بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر

دانشجو:

اکرم آشیانی

استاد راهنما:

دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

استاد مشاور:

آقای سید رضا موسوی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: تیر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که همواره راهنمایی هایشان هدایتگر زندگی ام و دعایشان بدرقه راهم بوده است.

تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران از خداوند، در ابتدا مراتب سپاس و امتنان خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حمید رضا سلیمی مقدم که دانش لازم را در اختیارم قرار داده و راهنمایی های ایشان همواره برایم درس آموز بوده است، اعلام نموده و از استاد بزرگوار، جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفته و مرا در برطرف نمودن کاستی های آن یاری نموده اند، صمیمانه تشکر می کنم.

نسبت به زحمات آقایان دکتر زیره و دکتر نجفی خواه که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، بی نهایت سپاسگذارم.

همچنین همواره خود را مدیون حمایت های خانواده گرامیم دانسته و برایشان آرزوی سلامتی و بهروزی می نمایم.

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بیان مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلری پرداخته ایم. سپس مترهای راندرز را به عنوان حالت خاصی از مترهای فینسلری بیان نموده و برخی خصوصیات هندسی چنین مترهایی را مورد مطالعه قرار می دهیم. پس از آن مترهای راندرز تخت تصویری با S-انحنای ایزوتروپیک در نظر گرفته شده و قضیه طبقه بندی این نوع از مترها ارائه شده است. در نهایت به طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S-انحنای ایزوتروپیک می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: متر فینسلری، متر راندرز، متر تخت تصویری، انحنای پرچمی، S -انحنا.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱- مقاله "طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر" در چهل و یکمین کنفرانس ریاضی ایران در ارومیه.

۲- مقاله "برخی کاربردهای هندسه فینسلری در نسبیت عام انیشتین" در اولین همایش ملی الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم در جهرم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیشینه پژوهش

در ۱۸۵۴، ب. ریمان [۱] مفهوم انحنا را برای فضاهای با خانواده ای از ضرب های داخلی (مترهای ریمان) بیان کرد؛ در ۱۹۱۸ پ. فینسلر [۲] با جایگزینی خانواده نرم های مینکوفسکی به جای خانواده ضرب های داخلی این مفهوم را تعمیم داد. درضمن، آ. اینشتین [۳] نسبیت عمومی را با استفاده از هندسه ریمانی معرفی نمود. البته، آن زمان هنوز هندسه فضاهای فینسلری در مرحله اولیه بود. تا اینکه در ۱۹۲۶، ل. بروالد [۴] مفهوم ریمانی انحنا را به فضاهای فینسلری تعمیم داد و کمیت ناریمانی جدیدی را با استفاده از التصاق خودش کشف کرد. د. هیلبرت [۵] در سخنرانی ۱۹۰۰ پاریس، ۲۳ مساله را بیان کرد که مسائل چهارم و بیست و سوم در رده فینسلری قرار می گیرند. هندسه فینسلری کاربرد فراوانی در علوم طبیعی دارد.

متر راندرز روی منیفلد M ، یک متر فینسلری است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$F = \alpha + \beta,$$

که $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک متر ریمانی و $\beta_y = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M می باشد. مترهای راندرز ابتدا توسط فیزیکدان ج. راندرز [۶] در ۱۹۴۱ بیان شدند. پس از آن، این مترها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی

[۱] B. Riemann
[۲] P. Finsler
[۳] A. Einstein
[۴] L. Berwald
[۵] D. Hilbert
[۶] G. Randers

توسط ر. س. اینگاردن [۷] در ۱۹۵۷ به کار گرفته شدند، که اولین کسی بود که این نوع مترها را متر راندرز نامید.

همچنین، این مترها به طور طبیعی از مساله ناوبری یک فضای ریمانی (M,h) تحت تاثیر یک میدان نیروی خارجی W به وجود آمدند [۲۱] .

نشان داده شده که کوتاهترین مسیرهای زمانی ژئودزیک های یک متر راندرز $F=\alpha+\beta$ به وسیله رابطه

$$h(x,\frac{y}{F}-W_x)=1$$

به دست می آیند.

قضیه سختی مشهور اکبرزاده [۸] می گوید که هر متر فینسلری با انحنای پرچمی ثابت منفی روی منیفلد بسته، یک متر ریمانی است. اگر "انحنای پرچمی ثابت" به "انحنای پرچمی اسکالری" تغییر یابد، قضیه سختی زیر را داریم، یعنی،

هر متر فینسلری با انحنای پرچمی اسکالری منفی روی منیفلد بسته از بعد $n\geq 3$ باید یک متر راندرز باشد. (برای کسب اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۶] مراجعه شود.)

این منجر به مطالعه مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر می شود.

نشان داده می شود که برای یک متر فینسلری $F=F(x,y)$ با انحنای پرچمی اسکالری، اگر S -انحنا ایزوتروپیک باشد یعنی $S=(n+1)c(x)F$ آنگاه انحنای پرچمی باید به شکل زیر باشد:

$$K=\frac{3c_{x^m}y^m}{F}+\sigma, \tag{1.1}$$

که $\sigma=\sigma(x)$ و $c=c(x)$ توابع اسکالری هستند [۸].

این منجر به مطالعه مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالری با S -انحنای ایزوتروپیک می شود.

یک متر فینسلری F تخت تصویری گفته می شود اگر ژئودزیک های آنها روی زیرمجموعه های باز $\mathbb{R}^n$

[۷] R. S. Ingarden
[۸] Akbar Zadeh

خطوط راست باشند. مترهای فینسلری تخت تصویری روی $\mathcal{U}$ می توانند با معادلات زیر مشخص شوند:

$$G^i = P(x,y)y^i,$$

که برای هر $\lambda > ۰$ ، $P(x,\lambda y) = \lambda P(x,y)$ می باشد. به آسانی نشان داده می شود که هر متر تخت تصویری $F = F(x,y)$ از انحنای پرچمی اسکالر است. به علاوه، انحنای پرچمی برای این مترها به شکل زیر خواهد بود:

$$K = \frac{P^۲ - P_{x^m}y^m}{F^۲}.$$

قضیه بلترامی می گوید که یک متر ریمانی، تخت تصویری موضعی است اگر و فقط اگر از انحنای برشی ثابت باشد. این منجر به مطالعه مترهای فینسلری تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک می شود.

۲.۱ اهداف پایان نامه

هدف اصلی این پایان نامه طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S -انحنای ایزوتروپیک می باشد که در فصل ۵ به آن پرداخته می شود و قضیه اصلی، قضیه ۴.۲.۵ (بخش ۲.۵) است. در ضمن در فصل ۴ مترهای راندرز تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک طبقه بندی می شوند.

فصل ۲

مفاهیم مقدماتی

۱.۲ مقدمه

فرض کنید M منیفلد هموار حقیقی n -بعدی بوده و T_xM فضای مماس در $x \in M$ را نشان دهد. در این صورت $TM := \bigsqcup_{x\in M} T_xM$ کلاف مماس M با نگاشت تصویر متعارف $\pi := TM \to M$ می باشد. هر عضو TM به شکل (x, y) است که $x \in M$ و $y \in T_xM$ ؛ بنابراین نگاشت تصویر متعارف به شکل $\pi(x, y) := x$ است.

۲.۲ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

قراردادهایی که در سراسر این پایان نامه استفاده می کنیم به شرح زیر می باشد:

۱- از قرارداد جمع بندی اینشتین استفاده می کنیم، یعنی اگر اندیسی یک بار در بالا و یک بار در پایین تکرار شود، آنرا جمع بندی شده می نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ خودداری می نماییم و از اندیس های $i, j, k, \ldots \in \{۱, \ldots, n\}$ استفاده می کنیم.

۲- منیفلدها در این پایان نامه، هموار و متناهی البعد می باشند.

۳- $|.|$ و $<.,.>$ به ترتیب نرم اقلیدسی و ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ را نشان می دهند.

لازم به ذکر است، چنانچه هر کجا ارجاع داده نشده بود؛ آن مطلب از مرجع [۱۲] می باشد.

با توجه به قراردادهای ذکر شده، به بیان مفاهیم اساسی که برای طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر لازم می باشد، می پردازیم.

۱.۲.۲ متر فینسلری

در ابتدا لازم است تابع همگن را تعریف نماییم:

تعریف ۱.۲.۲ (تابع همگن). [۱] تابع $H:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ را همگن مثبت از درجه r نسبت به y گوییم اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم:

$$H(\lambda y)=\lambda^r H(y)$$

اکنون متر فینسلری را تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۲.۲ (متر فینسلری). [۱] متر فینسلری روی منیفلد M، تابع پیوسته ای چون $F:TM\rightarrow[0,\infty)$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱- منظم بودن: F روی TM_0 هموار است که

$$TM_0:=TM\setminus\{0\}=\{y\in T_xM|y\neq 0,x\in M\}.$$

۲- همگن مثبت: تابع F نسبت به y همگن مثبت از درجه یک می باشد.

۳- تحدب قوی: برای هر $(x,y)\in TM_0$ ماتریس $[g_{ij}(x,y)]$ که به صورت زیر تعریف می شود معین مثبت است:

$$g_{ij}(x,y):=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x,y)=F_{y^i}F_{y^j}+FF_{y^iy^j}.$$

که در آن $F_{y^i}=\frac{\partial F}{\partial y^i}$.

به زوج مرتب (M,F) منیفلد فینسلری می گویند.

توضیح ۳.۲.۲. [۱] با توجه به تعریف متر فینسلری می توان مشاهده کرد که تحدید یک متر فینسلری به صفحه مماس T_xM ، یک نرم مینکوفسکی است.

مثال ۴.۲.۲ (متر ریمانی). ساده ترین مثال از یک متر فینسلری، یک متر ریمانی است که در آن g_{ij} ها توابعی، فقط برحسب x می باشند.

متر های ریمانی، مهم ترین مترهای فینسلری می باشند. در زیر چند متر ریمانی خاص بیان شده است.

مثال ۵.۲.۲ (متر اقلیدسی استاندارد). فرض کنید $|.|$ نرم اقلیدسی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ باشد که

$$|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}.$$

$F = F(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F := |y| \qquad y \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{۱.۲}$$

F یک متر فینسلری روی $\mathbb{R}^n$ می باشد، که متر اقلیدسی استاندارد نامیده می شود.

مثال ۶.۲.۲ (متر کلاین). فرض کنید $B^n \subset (\mathbb{R}^n, |.|)$ گوی واحد استاندارد و

$$\alpha_{-1} := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1 - |x|^2}, \qquad y \in T_xB^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{۲.۲}$$

در این صورت α_{-1} یک متر ریمانی روی B^n می باشد که متر کلاین نامیده می شود. زوج (B^n, α_{-1}) مدل کلاین نامیده می شود.

مثال ۷.۲.۲ (مدل کروی تصویری). فرض کنید $S^n \subset (\mathbb{R}^{n+1}, |.|)$ کره واحد استاندارد باشد. برای $x \in S^n$ ، T_xS^n را به کمک روشی طبیعی با ابرصفحه ای در $\mathbb{R}^{n+1}$ مشخص می کنیم. فرض کنید:

$$\alpha_{+1} := |y|_0, \qquad y \in T_xS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{۳.۲}$$

که $|.|$ نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^{n+1}$ را نشان می دهد. اکنون فرض کنید S^n_+ و S^n_- به ترتیب نیم کره های بالایی و پایینی را نشان دهند و $\psi_\pm : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n_\pm$ نگاشت تصویر باشد که به شکل زیر تعریف شده است:

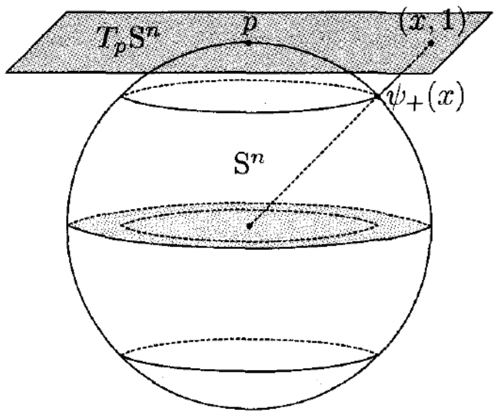
$$\psi_\pm(x) := (\frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{1+|x|^2}}).$$

$\psi_\pm$ خطوط مستقیم در $\mathbb{R}^n$ را به دایره های عظیمه روی $S^n_\pm$ می برد.

متر پول بک روی S^n_+ از $\mathbb{R}^n$ با ψ_+ به شکل زیر داده می شود:

$$\alpha_{+1} = \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1+|x|^2}, \qquad y \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{۴.۲}$$

زوج $(\mathbb{R}^n, \alpha_{+1})$ مدل کروی تصویری نامیده می شود.



شکل ۱.۲: مدل کروی تصویری

مترهای ریمانی در مثال های ۵.۲.۲ ، ۶.۲.۲ و ۷.۲.۲ در یک فرمول به شکل زیر بیان می شوند:

$$\alpha_\mu := \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1+\mu|x|^2}, \qquad y \in T_xB^n(r_\mu) \cong \mathbb{R}^n, \tag{۵.۲}$$

که اگر $\mu < 0$ ، آنگاه $r_\mu := \frac{1}{\sqrt{-\mu}}$ و اگر $\mu \geq 0$ ، آنگاه $r_\mu := +\infty$. متر α_μ به شکل $\alpha_\mu = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ بیان می شود، که:

$$a_{ij} = \frac{1}{1+\mu|x|^2}\{\delta_{ij} - \frac{\mu x_i x_j}{1+\mu|x|^2}\}. \tag{۶.۲}$$

قضیه ۸.۲.۲ (اولر [۱]). [۱] فرض کنیم تابع حقیقی H در تمام نقاط $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ دیفرانسیل پذیر باشد. آنگاه H همگن مثبت از درجه r است اگر و تنها اگر

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y),$$

که در آن $H_{y^i} = \frac{\partial H}{\partial y^i}$.

نتیجه ۹.۲.۲. [۱] اگر تابع F همگن مثبت از درجه یک باشد؛ آنگاه:

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y)$$

و

$$y^j F_{y^i y^j}(y) = 0.$$

نتیجه ۱۰.۲.۲. [۱] تابع F بیان شده در تعریف متر فینسلری در رابطه زیر صدق می کند:

$$F^2(y) = g_{ij}(y) y^i y^j.$$

۲.۲.۲ التصاق چرن

در سال ۱۹۴۳ س. س. چرن [۲] التصاقی را برای مترهای فینسلری بیان کرد که در این قسمت به بیان این التصاق می پردازیم اما پیش از آن باید کلاف پول بک را تعریف نماییم.

فرض کنیم (E, π, N) یک کلاف برداری و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار بین دو منیفلد M و N باشد. با استفاده از f می توان یک کلاف برداری روی M با همان تار کلاف برداری (E, π, N) تعریف نمود. این ساختار جدید را کلاف پول بک می نامیم.

[۱] Euler
[۲] S. S. Chern

تعریف ۱۱.۲.۲ (کلاف پول بک). [۱۵] فرض کنیم (E,π,N) یک کلاف برداری و $f: M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد. کلاف پول بک E توسط f را با نماد f^*E نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E = \{(x,\nu) \in M \times E | f(x) = \pi(\nu)\}.$$

تارهای کلاف پول بک f^*E یک کپی از تارهای E می باشند.

f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول $pr_1 : f^*E \longrightarrow M$ که توسط $(x,\nu) \in M \times E \longmapsto x \in M$ تعریف می شود؛ یک کلاف برداری روی M است. اگر نگاشت تصویر مولفه دوم $pr_2 : f^*E \longrightarrow E$ توسط $(x,\nu) \longmapsto \nu$ تعریف شود؛ آنگاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

و $f^*E \cong E$.

فرض کنیم $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر متعارف باشد؛ در این صورت با توجه به تعریف بالا کلاف پول بک π^*TM قابل تعریف است و تارهای آن در هر نقطه $(x,y) \in TM_0$ به شکل زیر است:

$$\pi^*TM|_{(x,y)} := \{(x,y,\nu) | \nu \in T_xM\} \cong T_xM.$$

به عبارت دیگر $\pi^*TM|_{(x,y)}$ فقط کپی T_xM است(شکل ۳.۲).

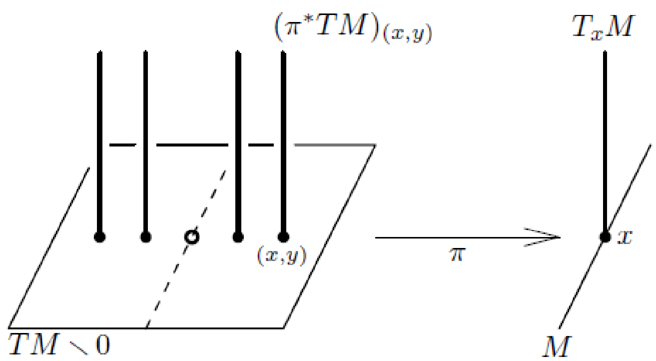
π^*TM کلاف مماس پول بک نامیده می شود.

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنید $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ کنج موضعی طبیعی برای $T(TM_0)$ باشد. آنگاه $VTM := span\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ زیر کلاف $T(TM_0)$ می باشد، که کلاف مماس عمودی M نامیده می شود.

فرض کنید $\partial_i := (x, y\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$. در این صورت $\{\partial_i\}$ یک کنج موضعی برای π^*TM می باشد.

کلاف برداری π^*TM برش متعارف $\mathcal{Y}$ را دارد که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathcal{Y}_{(x,y)} := (x,y,y).$$



شکل ۲.۲: قسمت نقطه چین، تصویر برش صفر است.

در $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \in T_xM$ ، $\mathcal{Y}$ به شکل زیر می تواند بیان شود:

$$\mathcal{Y} = y^i \partial_i. \tag{۷.۲}$$

اکنون دو تانسور مهم در هندسه فینسلری را بیان می کنیم:

تعریف ۱۳.۲.۲ (تانسور اساسی و تانسور کارتان). فرض کنید F متری فینسلری روی M و

$$g_{ij} := \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(x,y), \qquad C_{ijk} := \frac{1}{4}[F^2]_{y^i y^j y^k}(x,y).$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{G} := g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \qquad \mathcal{C} := C_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k. \tag{۸.۲}$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ تانسورهایی روی TM_0 می باشند که به ترتیب تانسور اساسی و تانسور کارتان نامیده می شوند.

با تانسور اساسی و تانسور کارتان قضیه زیر بیان می شود:

قضیه ۱۴.۲.۲. (چرن[۳]) . فرض کنید (M,F) منیفلد فینسلری n -بعدی باشد. برای کنج موضعی دلخواه π^*TM یعنی $\{e_i\}$ و هم کنج دوگان آن برای π^*T^*M یعنی $\{\omega^i\}$ ، مجموعه یکتایی از ۱-فرمی های موضعی

[۳] Chern

$\{\omega^i_j\}$ روی TM_0 وجود دارد به طوری که:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{۹.۲}$$

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j + 2C_{ijk}\omega^{n+k}, \tag{۱۰.۲}$$

که:

$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j\omega^i_j, \tag{۱۱.۲}$$

و $\mathcal{Y} =: y^i e_i$ ؛ بنابراین $g_{ij} := \mathcal{G}(e_i, e_j)$ و $C_{ijk} := \mathcal{C}(e_i, e_j, e_k)$.

در حقیقت، ۹.۲ معادل با تقارن

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} \tag{۱۲.۲}$$

و نبودن جملات dy^k در ω^i_j است؛ یعنی،

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}dx^k \tag{۱۳.۲}$$

۱۰.۲ نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\} \\ &- g^{kl}\{C_{jml}N^m_i + C_{iml}N^m_j - C_{ijm}N^m_l\}.\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

که در آن:

$$N^i_j := y^m\Gamma^i_{mj}. \tag{۱۵.۲}$$

در نتیجه:

$$N^k_j = \frac{1}{2}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\}y^i - 2g^{kl}C_{jml}G^m, \tag{۱۶.۲}$$

که:

$$G^i := \frac{1}{2}N^i_j y^j = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}y^j y^k. \tag{۱۷.۲}$$

پس:

$$G^i = \frac{1}{4}g^{il}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\}y^j y^k \tag{۱۸.۲}$$

و g^{ij} وارون ماتریس g_{ij} می باشد.

تعریف ۱۵.۲.۲ (التصاق چرن). با فرم های التصاق چرن، یعنی، $\{\omega^i_j\}$ نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$ برای π^*TM ، التصاق خطی ∇ روی π^*TM به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla_{\hat{Y}}X := \{dX^i(\hat{Y}) + X^j\omega^i_j(\hat{Y})\} \otimes e_i.$$

به طور ساده تر:

$$\nabla X := \{dX^i + X^j\omega^i_j\} \otimes e_i.$$

∇ التصاق چرن نامیده می شود.

با استفاده از معادلات

$$[F^2]_{x^l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}y^i y^j, \qquad [F^2]_{x^k y^l}y^k = 2\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}y^i y^k,$$

G^i در ۱۸.۲ به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$G^i = \frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^k y^l}y^k - [F^2]_{x^l}\}. \tag{۱۹.۲}$$

با کمک فرمول های

$$[F^2]_{x^l} = 2FF_{x^l}, \qquad [F^2]_{x^k y^l}y^k = \frac{2F_{x^k}y^k}{F}g_{ml}y^m + 2FF_{x^k y^l}y^k$$

به دست می آوریم:

$$G^i = Py^i + Q^i. \tag{۲۰.۲}$$

که در آن:

$$P := \frac{F_{x^k}y^k}{2F}, \qquad Q^i := \frac{F}{2}g^{il}\{F_{x^k y^l}y^k - F_{x^l}\}.$$

توابع موضعی N^i_j در ۱۵.۲ یا ۱۶.۲ ضرایب التصاق نامیده می شوند. از ۱۸.۲ نسبت به y^j دیفرانسیل می گیریم، نتیجه می شود:

$$N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}. \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین N^i_j فقط به G^i وابسته می باشد.

تعریف ۱۶.۲.۲. فرض کنید:

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{۲۲.۲}$$

آنگاه $HTM := span\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ زیر کلاف $T(TM_\circ)$ است و $T(TM_\circ) = HTM \oplus VTM$.

توابع موضعی Γ^i_{jk} در ۱۴.۲ علایم کریستوفل التصاق چرن نامیده می شوند. N^i_j و Γ^i_{jk} با فرمول ۱۵.۲ به یکدیگر وابسته می باشند.

اکنون علایم کریستوفل مترهای ریمانی را بررسی می کنیم.

فرض کنید $F = \sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمان روی منیفلد M باشد. با توجه به ۱۸.۲ ، ضرایب اسپری F یعنی $G^i = G^i(x,y)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$G^i = \frac{1}{4}g^{il}(x)\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x)\}y^jy^k. \tag{۲۳.۲}$$

که $(g^{ij}(x)) := (g_{ij}(x))^{-1}$. از فرمول های ۱۵.۲ و ۱۴.۲ ، ضرایب التصاق N^i_j و علایم کریستوفل Γ^i_{jk} به

شکل زیر به دست می آیند:

$$N_j^k = \frac{۱}{۲} g^{kl}(x)\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}(x) + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(x)\} y^i,$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{۱}{۲} g^{kl}(x)\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}(x) + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(x)\}, \qquad (۲۴.۲)$$

که علایم کریستوفل $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ توابعی بر حسب x می باشند.

مثال ۱۷.۲.۲. فرض کنید α_μ متر بیان شده با ۵.۲ باشد. در این صورت ماتریس معکوس (a_{ij}) به شکل

$$a^{ij} = (۱ + \mu|x|^۲)\{\delta^{ij} + \mu x^i x^j\} \qquad (۲۵.۲)$$

خواهد بود.

اکنون علایم کریستوفل α_μ را محاسبه می کنیم.

چون:

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^j} = \frac{\partial[\frac{۱}{۱+\mu|x|^۲}\{\delta_{kl} - \frac{\mu x_k x_l}{۱+\mu|x|^۲}\}]}{\partial x^j} = \frac{-۲\mu x_j \delta_{kl} - \mu(x_l \delta_{kj} + x_k \delta_{jl})}{(۱+\mu|x|^۲)^۲} + \frac{۴\mu^۲ x_j x_k x_l}{(۱+\mu|x|^۲)^۳}. \qquad (۲۶.۲)$$

پس طبق فرمول ۲۴.۲ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{۱}{۲}(۱+\mu|x|^۲)\{\delta_i^l + \mu x_i x^l\}\{-\mu \frac{۲x_j\delta_{kl} + ۲x_k\delta_{lj} - ۲x_l\delta_{jk}}{(۱+\mu|x|^۲)^۲} \\ &- \mu \frac{x_l\delta_{kj} + x_k\delta_{jl} + x_j\delta_{lk} + x_l\delta_{kj} - x_k\delta_{jl} - x_j\delta_{lk}}{(۱+\mu|x|^۲)^۲} + \frac{۴\mu^۲ x_l x_j x_k}{(۱+\mu|x|^۲)^۳}\}. \end{aligned} \qquad (۲۷.۲)$$

بنابراین:

$$\overline{\Gamma}_{jk}^i = -\mu \frac{x^j \delta_k^i + x^k \delta_j^i}{۱+\mu|x|^۲}. \qquad (۲۸.۲)$$

تعریف ۱۸.۲.۲ (منیفلد فینسلری موضعا مینکوفسکی). منیفلد فینسلری (M,F) موضعا مینکوفسکی نامیده می شود اگر در هر نقطه $x \in M$ دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) در TM موجود باشد که $F = F(x,y)$ فقط تابعی از $(y^i) \in \mathbb{R}^n$ باشد.

تعریف ۱۹.۲.۲ (مشتق کوواریانت افقی و عمودی). فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری n -بعدی، $\{e_i\}$ یک کنج موضعی برای π^*TM ، $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ هم کنج موضعی متناظر برای $T^*(TM_0)$ و $\{\omega^i_j\}$ مجموعه فرم های التصاق چرن موضعی نسبت به $\{e_i\}$ باشد. برای تابع اسکالری f روی TM_0 ، $f_{|m}$ و $f_{.m}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = f_{|k}\omega^k + f_{.k}\omega^{n+k}, \tag{۲۹.۲}$$

که $f_{|k}$ مشتق کوواریانت افقی و $f_{.k}$ مشتق کوواریانت عمودی f نامیده می شوند. روشی متداول برای تعریف مشتق های کوواریانت یک تانسور روی TM_0 با استفاده از التصاق چرن وجود دارد. برای مثال، اگر $\mathcal{T} = T_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$ ، $T_{ij|k}$ و $T_{ij.k}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$T_{ij|k}\omega^k + T_{ij.k}\omega^{n+k} := dT_{ij} - T_{kj}\omega^k_i - T_{ik}\omega^k_j.$$

در یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) ، ضرایب $T_{ij} = T_{ij}(x,y)$ توابعی موضعی از (x^i, y^i) هستند؛ که در آن $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $T_{ij|k}$ و $T_{ij.k}$ به شکل زیر داده می شوند:

$$T_{ij|k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{sj}\Gamma^s_{ik} - T_{is}\Gamma^s_{jk} - T_{ij.s}N^s_k,$$

$$T_{ij.k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^k}.$$

مشتق گیری کوواریانت در قاعده حاصل ضرب صدق می کند. برای مثال، برای $\mathcal{S} = S_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$ و $\mathcal{T} = T_k\omega^k$ داریم:

$$(S_{ij}T_k)_{|l} = S_{ij|l}T_k + S_{ij}T_{k|l}.$$

برای تانسور اساسی $\mathcal{G} = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$ ، از ۱۰.۲ نتیجه می شود:

$$g_{ij|k} = 0, \qquad g_{ij.k} = 2C_{ijk}.$$

و برای برش متعارف $\mathcal{Y} = y^i e_i$ ، از ۱۱.۲ به دست می آید:

$$y^i_{|k} = 0, \qquad y^i_{.k} = \delta^i_k.$$

بنابراین:

$$[F^2]_{|m} = 2FF_{|m} = g_{ij|m}y^iy^j = 0. \tag{۳۰.۲}$$

۳.۲.۲ اسپری و ژئودزیک

در یک فضای متری، خم های کمینه جالب توجه می باشند. خم های کمینه موضعی در هندسه فینسلری با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم (معادلات ژئودزیک) مشخص می شوند. در ادامه به بیان ژئودزیک و اسپری می پردازیم [۲۰] .

تعریف ۲۰.۲.۲ (اسپری). فرض کنید M منیفلدی n -بعدی و $\pi : TM_0 \longrightarrow M$ تصویر متعارف باشد. یک اسپری G روی منیفلد M یک میدان برداری هموار خاص روی TM_0 است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$G := y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{۳۱.۲}$$

که $G^i = G^i(x,y)$ توابعی موضعی با خاصیت همگنی زیر می باشند:

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x,y), \qquad \lambda > 0. \tag{۳۲.۲}$$

تعریف ۲۱.۲.۲ (خم انتگرال). یک خم $\gamma=\gamma(t)$ در $TM_\circ$ خم انتگرال G نامیده می شود اگر در معادله زیر صدق کند:

$$\dot\gamma = G_\gamma, \tag{۳۳.۲}$$

که در آن:

$$G_\gamma = y^i\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial\gamma}{\partial y^i}.$$

اکنون فرض کنید $\gamma(t)$ خم انتگرال G باشد. آنگاه مختصات $\gamma(t)$ یعنی $(x^i(t), y^i(t))$ در معادلات زیر صدق می کنند:

$$\dot x^i(t) = y^i(t), \qquad \dot y^i(t) + 2G^i(x(t), y(t)) = 0.$$

فرض کنید $\sigma(t) := \pi(\gamma(t))$ تصویر $\gamma(t)$ تحت π باشد. آنگاه مختصات $\sigma(t)$ یعنی $(x^i(t))$ در معادلات زیر صدق می کنند:

$$\ddot\sigma^i(t) + 2G^i(\sigma(t), \dot\sigma(t)) = 0. \tag{۳۴.۲}$$

در اینجا $\sigma(t)$ و $\dot\sigma(t) = \dot\sigma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\sigma(t)}$ با مختصاتشان یعنی به ترتیب $(\sigma^i(t))$ و $(\dot\sigma^i(t))$ مشخص می شوند.

برعکس، برای خم داده شده $\sigma=\sigma(t)$ در M ، لیفت طبیعی σ به عنوان خمی که با میدان برداری مماس خودش یعنی،

$$\dot\sigma(t) = \dot\sigma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\sigma(t)}$$

تشکیل شده، تعریف می گردد.

مختصات $\dot\sigma(t)$ در TM برابر $(\sigma^i(t), \dot\sigma^i(t))$ است.

اگر $\sigma(t)$ در ۳۴.۲ صدق کند، آنگاه $(x^i(t), y^i(t)) = (\sigma^i(t), \dot\sigma^i(t))$ در ۳۳.۲ صدق می کند. یعنی، لیفت طبیعی σ یک خم انتگرال G است.

تعریف ۲۲.۲.۲ (ژئودزیک). نگاشت $\sigma = \sigma(t)$ در M یک ژئودزیک نامیده می شود اگر خمی هموار باشد و لیفت طبیعی $\gamma(t) := \dot{\sigma}(t)$ خم انتگرال G در $TM_\circ$ باشد، یعنی، در ۳۳.۲ صدق کند. در یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد، مختصات $\sigma(t)$ یعنی $(\sigma^i(t))$ در ۳۴.۲ صدق می کند.

نتیجه ۲۳.۲.۲. [۲۳] یک خم هموار $\sigma(t)$ در منیفلد فینسلری (M, F) ژئودزیک است اگر و فقط اگر در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر صدق کند:

$$\frac{d^2\sigma^i}{dt^2}(t) + 2G^i(\sigma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t)) = 0, \tag{۳۵.۲}$$

که $G^i = G^i(x, y)$ توابع موضعی روی TM هستند، ضرایب ژئودزیک نامیده و به شکل زیر تعریف می شوند:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il}\{[F^2]_{x^m y^l} y^m - [F^2]_{x^l}\}. \tag{۳۶.۲}$$

۴.۲.۲ مترهای فینسلری هم ارز تصویری

در این بخش، مترهای فینسلری که ژئودزیک های یکسانی به عنوان مجموعه نقاط دارند را معرفی می کنیم.

تعریف ۲۴.۲.۲ (مترهای فینسلری هم ارز تصویری). دو متر فینسلری F و $\overline{F}$ روی منیفلد M هم ارز تصویری نامیده می شود اگر ژئودزیک های یکسانی به عنوان مجموعه نقاط داشته باشند.

قضیه ۲۵.۲.۲ (راپسک[۴]). [۱۷، ۲۰] برای دو متر فینسلری F و $\overline{F}$ روی منیفلد M ، شرایط زیر هم ارز می باشند:

۱- F و $\overline{F}$ ژئودزیک های یکسانی به عنوان مجموعه نقاط دارند.

۲- تابع اسکالری $P(x, y)$ روی TM وجود دارد به طوری که:

$$G^i(x, y) = \overline{G}^i(x, y) + P(x, y) y^i.$$

[۴] Rapcsák

در این حالت، P به صورت زیر داده می شود:

$$P(x,y) = \frac{F_{;k}y^k}{2F}.$$

۳- $\overline{F}$ در دستگاه زیر صدق می کند:

$$F_{;k.l}y^k - F_{;l} = 0, \qquad (۳۷.۲)$$

که $F_{;k}$ مشتق کوواریانت افقی F نسبت به $\overline{F}$ را نشان می دهد و $F_{;k.l} = (F_{;k})_{y^l}$.

۵.۲.۲ متر فینسلری تخت تصویری

اکنون به بیان مترهای فینسلری تخت تصویری می پردازیم که حالت خاصی از مترهای فینسلری هم ارز تصویری می باشند . این مترها با مترهای اقلیدسی هم ارز تصویری می باشند به عبارت دیگر ژئودزیک های آنها روی زیرمجموعه های باز $\mathbb{R}^n$ خطوط راست هستند.

تعریف ۲۶.۲.۲. متر فینسلری $F = F(x,y)$ روی زیر مجموعه باز $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ تخت تصویری نامیده می شود اگر تمام ژئودزیک هایش در $\mathcal{U}$ خط های راست باشند. متر فینسلری F روی منیفلد M تخت تصویری موضعی نامیده می شود اگر در هر نقطه، دستگاه مختصات موضعی (x^i) وجود داشته باشد که F تخت تصویری باشد.

از قضیه ۲۵.۲.۲ نتیجه می شود:

قضیه ۲۷.۲.۲ (هامل[5]). [۱۳، ۱۲] یک متر فینسلری $F = F(x,y)$ روی زیر مجموعه باز $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ تخت تصویری است اگر و فقط اگر دستگاه معادلات زیر برقرار باشند:

$$F_{x^k y^l}y^k - F_{x^l} = 0. \qquad (۳۸.۲)$$

[5] Hamel

در این حالت ضرایب اسپری به شکل $G^i = Py^i$ است که در آن $P = P(x,y)$ به صورت زیر داده می شود:

$$P = \frac{F_{x^k} y^k}{2F}. \tag{۳۹.۲}$$

تابع اسکالری P عامل تصویر F نامیده می شود.

قضیه ۲۸.۲.۲ (قضیه بلترامی[۶]). [۲۳] متر ریمانی $F = F(x,y)$ روی منیفلد M تخت تصویری موضعی است، اگر و فقط اگر ایزومتر موضعی به متر α_μ در ۵.۲ باشد.

در زیر مثالی از متر فینسلری تخت تصویری آورده شده است:

مثال ۲۹.۲.۲. خانواده زیر از مترهای ریمانی تعریف شده در ۵.۲ را در نظر بگیرید:

$$\alpha_\mu := \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1 + \mu|x|^2}, \qquad y \in T_xB^n(r_\mu) \cong \mathbb{R}^n, \tag{۴۰.۲}$$

که اگر $\mu < 0$ آنگاه $r_\mu := \frac{1}{\sqrt{-\mu}}$ و اگر $\mu \geq 0$ آنگاه $r_\mu := +\infty$. فرض کنید $F = \alpha_\mu$ ، در این صورت:

$$F_{x^k} = \frac{(\mu x_k|y|^2 - \mu <x,y> y_k)(1 + \mu|x|^2) - 2\mu x_k(|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}{(1 + \mu|x|^2)^2 \sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}.$$

پس:

$$F_{x^k} y^k = -\frac{2\mu <x,y>}{1 + \mu|x|^2} F$$

و

$$F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l} = [F_{x^k} y^k]_{y^l} - 2F_{x^l} = 0.$$

با استفاده از ۲۰.۲ و با محاسبه ای مستقیم به دست می آوریم:

$$G^i = -\frac{\mu <x,y>}{1 + \mu|x|^2} y^i.$$

بنابراین α_μ تخت تصویری است. قضیه بلترامی در هندسه ریمانی بیان می کند که هر متر ریمانی تخت تصویری موضعی، در حد یک تغییر مقیاس، ایزومتر موضعی به α_μ برای μ ثابت می باشد.

[۶] Beltrami

۶.۲.۲ انحنای ریمان

انحنای ریمان کمیتی اساسی در هندسه فینسلری می باشد. این کمیت ابتدا توسط ب. ریمان [۷] در ۱۸۵۴ برای مترهای ریمانی بیان شد. در ۱۹۲۶، ل. بروالد [۸] انحنای ریمان را به مترهای فینسلری تعمیم داد [۵، ۱۷]. توسیع او از انحنای ریمان، مرحله مهمی در هندسه فینسلری است. در این قسمت به بیان انحنای ریمان می پردازیم.

تعریف ۳۰.۲.۲ (تانسور انحنای ریمان). فرض کنیم (M,F) یک منیفلد فینسلری همراه با التصاق چرن ∇ باشد. نگاشت

$$\begin{aligned} R: \quad & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M) \\ & R(X,Y)Z=\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z \qquad (۴۱.۲) \end{aligned}$$

را تانسور انحنای ریمان می نامیم.

اکنون انحنای ریمان را در حالت موضعی بیان می کنیم:

در یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i,y^i) در TM_0 ، هم کنج موضعی $\{\omega^i,\omega^{n+i}\}$ روی TM_0 به صورت زیر به دست می آید:

$$\omega^i=dx^i, \qquad \omega^{n+i}=\delta y^i:=dy^i+N^i_j dx^j,$$

که در آن $N^i_j=y^m\Gamma^i_{mj}$ در ۱۵.۲ تعریف شده است. با کمک $\frac{\delta}{\delta x^i}$ که در ۲۲.۲ تعریف شده، نتیجه می شود:

$$R_{j\ kl}^{\ i}=\frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k}-\frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^l}+\Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{jl}-\Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{ls}. \qquad (۴۲.۲)$$

بنابراین:

$$R^i_{kl}:=y^j R_{j\ kl}^{\ i}=\frac{\partial N^i_l}{\partial x^k}-\frac{\partial N^i_k}{\partial x^l}+N^s_l\frac{\partial N^i_k}{\partial y^s}-N^s_k\frac{\partial N^i_l}{\partial y^s}. \qquad (۴۳.۲)$$

[۷] B. Riemann
[۸] L. Berwald

چون $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ ، R^i_{kl} به صورت مستقیم در جملات G^i بیان می شود. با انقباض ۴۳.۲ با y^l و استفاده از ۲۱.۲ به دست می آوریم:

$$R^i_k := R^i_{kl}y^l = ۲\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^۲ G^i}{\partial x^j \partial y^k} + ۲G^j\frac{\partial^۲ G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}. \quad (۴۴.۲)$$

بنابراین انحنای ریمان، خانواده ای از نگاشت های خطی روی صفحات مماس است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$R = \{R_y | y \in T_xM_۰, x \in M\},$$

که در آن $R_y := R^i_k dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}|_x : T_xM \to T_xM$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$R_y(v) := R^i_k(x,y)v^k\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM.$$

و در آن داریم:

$$R^i_k = ۲\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^۲ G^i}{\partial x^j \partial y^k} + ۲G^j\frac{\partial^۲ G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \quad (۴۵.۲)$$

R انحنای ریمان نامیده می شود و

$$R_y(y) = ۰, \qquad R_{\lambda y} = \lambda^۲ R_y, \qquad \lambda > ۰. \quad (۴۶.۲)$$

به علاوه اگر $u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ ، $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $g_y(u,v) = g_{ij}(x,y)u^iv^j$ باشد؛ R_y نسبت به g_y خودالحاق است، یعنی،

$$g_y(R_y(u),v) = g_y(u,R_y(v)), \qquad u,v \in T_xM. \quad (۴۷.۲)$$

بنابراین:

$$g_y(R_y(u),y) = g_y(u,R_y(y)) = ۰.$$

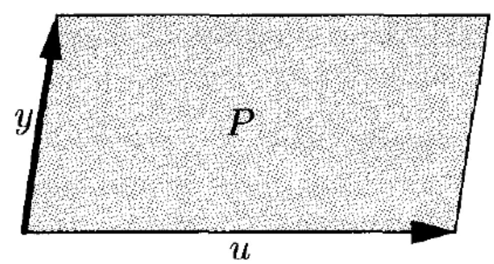
۴۶.۲ و ۴۷.۲ معادلات اساسی انحنای ریمان می باشند.

۷.۲.۲ انحنای پرچمی و انحنای ریچی

انحنای پرچمی یک عمومی سازی انحنای برشی در هندسه ریمانی و انحنای ریچی اثر انحنای ریمانی می باشد. در این قسمت به معرفی این دو انحنا می پردازیم.

تعریف ۳۱.۲.۲ (انحنای پرچمی). برای پرچم $P = span\{y, u\} \subset T_xM$ با میله پرچم y، انحنای پرچمی $K(P, y)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$K(P, y) := \frac{g_y(u, R_y(u))}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^{۲}}. \qquad (۴۸.۲)$$



شکل ۳.۲: پرچم $P = span\{y, u\}$.

با ۴۶.۲ و ۴۷.۲ ثابت می شود که $K(P, y)$ مستقل از انتخاب بردار خاص $u \in P$ است، که $P = span\{y, u\}$.

اکنون سه انحنای (پرچمی) اسکالر، ایزوتروپیک وثابت را بیان می نماییم:

۱- F را با انحنای (پرچمی) اسکالر می نامیم هرگاه؛ $K(P, y)$ مستقل از پرچم های P باشد یعنی $K = K(x, y)$ تابعی اسکالر روی فضای مماس باشد.

۲- F را با انحنای (پرچمی) ایزوتروپیک می نامیم هرگاه؛ $K(P, y)$ مستقل از پرچم های P و بردارهای مماس y باشد یعنی $K = K(x)$ تابعی اسکالر روی منیفلد باشد.

۳- F را با انحنای (پرچمی) ثابت می نامیم هرگاه؛ $K(P,y)$ مستقل از پرچم های P و بردارهای مماس y و مکان های x باشد یعنی $K=K_{\circ}$ تابعی ثابت روی منیفلد باشد.

گزاره ۳۲.۲.۲. فرض کنید F یک متر ریمانی روی منیفلد M باشد. برای هر صفحه مماس دلخواه $P\subset T_xM$ ، انحنای پرچمی $K(P,y)=K(P)$ مستقل از $y\in P\backslash\{\circ\}$ است.

برای مترهای ریمانی انحنای پرچمی $K=K(P)$ برابر با همان انحنای برشی متر ریمانی برای برش $P\subset T_xM$ است.

فرض کنیم M یک منیفلد n-بعدی، $p\in M$ و π یک زیر فضای دو بعدی از T_pM باشد. خانواده ژئودزیک های گذرنده از نقطه $p\in M$ و مماس بر زیر فضای دو بعدی π تشکیل یک رویه دو بعدی می دهد. انحنای گاوسی این رویه دو بعدی را انحنای برشی منیفلد M در نقطه $p\in M$ می نامیم [۱۴] .

در هر نقطه، $K(P,y)=K(x,y)$ اگر و فقط اگر

$$R^i_k=K\{F^{۲}\delta^i_k-g_{kq}y^qy^i\}. \tag{۴۹.۲}$$

گزاره ۳۳.۲.۲. [۱۲، ۷] هر متر فینسلری تخت تصویری موضعی، با انحنای پرچمی اسکالر است و در این حالت انحنای پرچمی به شکل زیر خواهد بود:

$$K=\frac{P^{۲}-P_{x^k}y^k}{F^{۲}}. \tag{۵۰.۲}$$

مثال ۳۴.۲.۲. خانواده زیر از مترهای ریمانی را در نظر بگیرید:

$$\alpha_\mu:=\frac{\sqrt{|y|^{۲}+\mu(|x|^{۲}|y|^{۲}-<x,y>^{۲})}}{۱+\mu|x|^{۲}},\qquad y\in T_xB^n(r_\mu)\cong\mathbb{R}^n.$$

بر طبق مثال ۲۹.۲.۲ ، ضرایب اسپری $G^i = Py^i$ هستند که در آن:

$$P = -\frac{\mu < x, y >}{۱ + \mu |x|^{۲}}.$$

با محاسبه ای مستقیم به دست می آوریم:

$$P_{x^k} y^k = -\mu \frac{|y|^{۲}(۱ + \mu |x|^{۲}) - ۲\mu < x, y >^{۲}}{(۱ + \mu |x|^{۲})^{۲}}.$$

با توجه به ۵۰.۲ داریم $K = \mu$. بنابراین α_μ انحنای برشی ثابت دارد.

لم ۳۵.۲.۲ (لم شور[۹]). [۴، ۱۲] فرض کنید (M, F) منیفلدی فینسلری از بعد $n \geq ۳$ و انحنای پرچمی ایزوتروپیک باشد. در این صورت انحنای پرچمی ثابت می باشد.

تعریف ۳۶.۲.۲ (انحنای ریچی). [۲۰] فرض کنید

$$Ric(x, y) := R^m_m. \qquad (۵۱.۲)$$

Ric یک تابع اسکالری خوش تعریف روی $TM_۰$ با خاصیت همگنی زیر است:

$$Ric(x, \lambda y) = \lambda^{۲} Ric(x, y), \qquad \lambda > ۰.$$

Ric را انحنای ریچی می نامیم.

تعریف ۳۷.۲.۲. متر فینسلری F با انحنای ریچی ثابت نامیده می شود اگر ثابت λ موجود باشد به طوریکه $Ric = (n - ۱)\lambda F^{۲}$.

۸.۲.۲ S -انحنا

در هندسه فینسلری دو کمیت هندسی نا ریمانی مهم وجود دارد. این دو کمیت، تاب و S -انحنا هستند که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم. S -انحنا ابتدا توسط ز .شن [۱۰] هنگامی که مقایسه حجمی هندسه

[۹] Schur
[۱۰] Z. Shen

فینسلر-ریمانی را مطالعه می کرد، بیان شد [۱۸] .

برای تعریف تاب نیاز به معرفی فرم حجمی بوسمان-هاسدورف داریم.

تعریف ۳۸.۲.۲ (فرم حجمی بوسمان-هاسدورف). منیفلد فینسلری n بعدی (M,F) را در نظر بگیرید. در هر نقطه $x \in M$ ، فرض کنید $\{b_i\}_{i=1}^n$ پایه دلخواهی برای T_xM و $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ پایه ای برای T_x^*M باشد که دوگان $\{b_i\}_{i=1}^n$ است. n -فرمی زیر، فرم حجمی بوسمان-هاسدورف نامیده می شود:

$$dV_F := \sigma_F(x)\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n,$$

که در آن:

$$\sigma_F(x) := \frac{Vol(B^n(1))}{Vol\{(y^i) \in \mathbb{R}^n | F(x, y^i b_i) < 1\}} \tag{۵۲.۲}$$

و $Vol(.)$ تابع حجم اقلیدسی روی زیرمجموعه ای در $\mathbb{R}^n$ را نشان می دهد که برای مکعب واحد $\mathcal{U} = [0,1]^n$ داریم $Vol(\mathcal{U}) = 1$.

اکنون تاب F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۳۹.۲.۲ (تاب). [۲۰] منیفلد فینسلری n بعدی (M,F) را در نظر بگیرید. برای هر نقطه $x \in M$ ، فرض کنید $\{b_i\}_{i=1}^n$ پایه دلخواهی برای T_xM و $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ پایه ای برای T_x^*M باشد که دوگان $\{b_i\}_{i=1}^n$ است. dV_F را به صورت

$$dV_F := \sigma_F(x)\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$$

و برای بردار دلخواه $y \in T_xM_0$ تاب را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tau(x,y) := ln[\frac{\sqrt{det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma_F(x)}].$$

تاب خاصیت همگنی زیر را دارا می باشد:

$$\tau(x, \lambda y) = \tau(x,y), \qquad \lambda > 0, y \in T_xM_0.$$

F ریمانی است اگر و تنها اگر $\tau = ۰$ باشد.

اکنون به تعریف دومین کمیت نا ریمانی مهم می پردازیم:

تعریف ۴۰.۲.۲ (S -انحنا). [۲۳] برای بردار دلخواه $y \in T_xM_۰$، فرض کنید $\sigma = \sigma(t)$ ژئودزیکی با $\sigma(۰) = x$ و $\dot{\sigma}(۰) = y$ باشد. بنابراین S -انحنا به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(x,y) := \frac{d}{dt}[\tau(\sigma(t), \dot{\sigma}(t))]|_{t=۰}.$$

که در آن $S = S(x,y)$ نسبت به y همگن مثبت از درجه یک می باشد.

در دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) ، فرض کنید $dV_F = \sigma_F(x)dx^۱ \wedge \ldots \wedge dx^n$ فرم حجمی و $G^i = G^i(x,y)$ ضرایب اسپری F را نشان دهند. از ۱۶.۲ نتیجه می شود:

$$\frac{\partial G^m}{\partial y^m} = \frac{۱}{۲} g^{ml} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} y^i - ۲ g^{ml} C_{iml} G^i.$$

از طرفی مشاهده می شود که:

$$\tau_{y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}[ln\sqrt{det(g_{jk}(x,y))}] = \frac{۱}{۲} g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} = g^{jk} C_{ijk}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} S &= y^i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - ۲ \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i \\ &= \frac{۱}{۲} g^{ml} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} y^i - ۲ g^{ml} C_{iml} G^i - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(\ln \sigma_F(x)). \end{aligned}$$

پس در مختصات موضعی، S-انحنا به شکل زیر خواهد بود:

$$S = \frac{\partial G^m}{\partial y^m}(x,y) - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(\ln \sigma_F(x)). \qquad (۵۳.۲)$$

تعریف ۴۱.۲.۲ (S -انحنای ایزوتروپیک و ثابت). یک متر فینسلری F روی منیفلد n-بعدی M، S-انحنای ایزوتروپیک دارد اگر تابع اسکالری $c = c(x)$ روی M موجود باشد به طوری که $S = (n+1)cF$. اگر $c(x)$ ثابت باشد، می گوییم F ، S -انحنای ثابت دارد.

قضیه ۴۲.۲.۲. [۸] فرض کنید (M, F) منیفلد فینسلری n -بعدی با انحنای پرچمی اسکالر $K(x, y)$ باشد. فرض کنید S -انحنا ایزوتروپیک باشد؛ یعنی،

$$S = (n+1)c(x)F(x, y),$$

که $c(x)$ یک تابع اسکالری روی M می باشد. آنگاه تابع اسکالری $\sigma(x)$ روی M وجود دارد به طوری که:

$$K = 3\frac{c_{x^m}(x)y^m}{F(x, y)} + \sigma(x).$$

به خصوص، $c(x) = c$ ثابت است اگر و فقط اگر $K = K(x, y)$ تابعی اسکالری روی M باشد.

فصل ۳

مترهای راندرز

۱.۳ مقدمه

مترهای راندرز ابتدا توسط فیزیکدان ج. راندرز [۱] در ۱۹۴۱ بیان شدند. پس از آن، این مترها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی توسط ر. س. اینگاردن [۲] در ۱۹۵۷ به کار گرفته شدند و او اولین کسی بود که این مترها را متر راندرز نامید.

همچنین، این مترها به طور طبیعی از مساله ناوبری یک فضای ریمانی (M, h) تحت تاثیر یک میدان نیروی خارجی W به وجود آمدند[۲۱] .

در این فصل به بیان این مترها روی منیفلد n-بعدی M می پردازیم و مترهای راندرز با S-انحنای ایزوتروپیک را بررسی و قضیه هایی را که مربوط به این مترها می باشند و در فصل های بعد لازم است، بیان می کنیم.

۲.۳ مترهای راندرز

تعریف ۱.۲.۳ (متر راندرز). یک متر راندرز، متر فینسلری $F(x, y) := \alpha(x, y) + \beta(x, y)$ می باشد که در آن $\alpha(x, y) := \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ یک متر ریمانی و $\beta_y(x, y) := b_i(x)y^i$ ۱-فرمی می باشند که در آن

$$||\beta||_\alpha := \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < ۱$$

[۱] G. Randers
[۲] R. S. Ingarden

و $(a^{ij}) := (a_{ij})^{-1}$.

اکنون به محاسبه درایه های ماتریس $[g_{ij}]$ مترهای راندرز می پردازیم:

می دانیم:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j} = F_{y^i}F_{y^j} + FF_{y^i y^j}.$$

با توجه به اینکه:

$$F = \alpha + \beta = \sqrt{a_{pq}y^p y^q} + b_k y^k,$$

داریم:

$$F_{y^i} = \frac{a_{iq}y^q + a_{pi}y^p}{2\alpha} + b_i = \frac{a_{iq}y^q}{\alpha} + b_i$$

و بنابراین:

$$F_{y^i} = \frac{y_i}{\alpha} + b_i, \tag{۱.۳}$$

که در آن $y_i := a_{ij}y^j$. به طور مشابه:

$$F_{y^j} = \frac{y_j}{\alpha} + b_j, \tag{۲.۳}$$

و همچنین:

$$F_{y^i y^j} = \frac{\alpha^2 a_{ij} - a_{jq}y^q a_{iq}y^q}{\alpha^3}.$$

بنابراین:

$$F_{y^i y^j} = \frac{\alpha^2 a_{ij} - y_i y_j}{\alpha^3}. \tag{۳.۳}$$

از ۱.۳ ، ۲.۳ و ۳.۳ نتیجه می شود:

$$g_{ij} = \frac{F}{\alpha}\{a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha} + \frac{\alpha}{F}(b_i + \frac{y_i}{\alpha})(b_j + \frac{y_j}{\alpha})\}.$$

از طرفی برای این که $F=\alpha+\beta:TM\longrightarrow\mathbb{R}$ یک متر فینسلری باشد، باید منظم، همگن مثبت و محدب قوی باشد(بخش ۱.۲.۲). همگن مثبت و منظم بودن آن به آسانی نتیجه می شود اما شرط تحدب قوی به معین مثبت بودن ماتریس $[g_{ij}]$ برای مترهای راندرز مربوط است. همانطور که محاسبه شد درایه های ماتریس $[g_{ij}]$ متر راندرز $F=\alpha+\beta$ به صورت زیر است:

$$g_{ij}=\frac{F}{\alpha}\{a_{ij}-\frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}+\frac{\alpha}{F}(b_i+\frac{y_i}{\alpha})(b_j+\frac{y_j}{\alpha})\},\qquad (۴.۳)$$

که در آن $y_i:=a_{ij}y^j$. از گزاره زیر معین مثبت بودن ماتریس g_{ij} نتیجه می شود:

گزاره ۲.۲.۳. [۳] سه شرط زیر برای مترهای راندرز هم ارز می باشند:

۱- روی M ، $||\beta||_\alpha<۱$.

۲- $F(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$ برای هر $y\neq ۰$ مثبت می باشد.

۳- ماتریس $[g_{ij}(x,y)]$ برای هر $y\neq ۰$ معین مثبت می باشد.

در فصل قبل فرم حجمی بوسمان-هاسدورف بیان شد. اکنون در مثال زیر به بیان رابطه بین فرم حجمی بوسمان-هاسدورف متر راندرز و متر ریمانی آن می پردازیم.

مثال ۳.۲.۳. متر راندرز $F=\alpha+\beta$ را در نظر بگیرید که در آن $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمان و $\beta_y=b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی منیفلد n -بعدی M می باشد.

فرض کنید $\Omega_x:=\{(y^i)\in\mathbb{R}^n|F(x,y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)<۱\}$. بنابراین :

$$Vol(\Omega_x)=\frac{Vol(B^n(۱))}{(۱-||\beta_x||_\alpha^۲)^{(n+۱)/۲}\sqrt{det(a_{ij}(x))}}.$$

آن را در فرمول ۵۲.۲ قرار می دهیم نتیجه می شود:

$$\sigma_F(x)=(۱-||\beta||_\alpha^۲)^{(n+۱)/۲}\sigma_\alpha(x),$$

که $\sigma_\alpha(x)=\sqrt{det(a_{ij}(x))}$. بنابراین رابطه بین فرم حجمی متر راندرز و متر ریمانی آن به شکل زیر می باشد:

$$dV_F=(1-||\beta||_\alpha^2)^{(n+1)/2}dV_\alpha. \tag{۵.۳}$$

هر متر راندرز $F=\alpha+\beta$ با $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ و $\beta_y=b_i(x)y^i$ می تواند به صورت جوابی از معادله زیر داده شود:

$$h(x,\frac{y}{F}-W)=\sqrt{h_{ij}(\frac{y^i}{F}-W^i)(\frac{y^j}{F}-W^j)}=1, \tag{۶.۳}$$

که $h(x,y)=\sqrt{h_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمان و $W=W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری با شرط زیر است:

$$||W||_h=h(x,-W)=\sqrt{h_{ij}(x)W^i(x)W^j(x)}<1.$$

رابطه بین (α,β) و (h,W) به شکل زیر داده می شود:

$$a_{ij}=\frac{(1-||W||_h^2)h_{ij}+W_iW_j}{(1-||W||_h^2)^2}, \tag{۷.۳}$$

$$b_i=-\frac{W_i}{1-||W||_h^2}, \tag{۸.۳}$$

$$h_{ij}=(1-||\beta||_\alpha^2)(a_{ij}-b_ib_j), \tag{۹.۳}$$

$$W^i=-\frac{b^i}{1-||\beta||_\alpha^2}, \tag{۱۰.۳}$$

که $W_i := h_{ij}W^j$ و $b^i := a^{ij}b_j$. به علاوه :

$$||W||_h^2 := h_{ij}W^iW^j = a^{ij}b_ib_j =: ||\beta||_\alpha^2.$$

با ۷.۳ و ۸.۳ می توانیم F را به شکل زیر بیان کنیم :

$$F = \frac{\sqrt{\lambda h^2 + W_0^2}}{\lambda} - \frac{W_0}{\lambda}, \qquad W_0 := W_iy^i, \tag{۱۱.۳}$$

که $W_i := h_{ij}W^j$ و $\lambda := 1 - W_iW^i = 1 - ||W||_h^2$.

لم ۴.۲.۳. [۱۲]. فرض کنید $\Phi = \Phi(x,y)$ یک متر فینسلری روی منیفلد n -بعدی M و $W = W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری دلخواه روی M باشد که برای هر $x \in M$ داریم $h(x,-W) < 1$. فرض کنید $F = F(x,y)$ یک متر فینسلری روی M باشد و در معادله زیر صدق کند:

$$\Phi(x, \frac{y}{F} - W) = 1. \tag{۱۲.۳}$$

آنگاه فرم های حجمی فینسلری F و Φ برابر می باشند، یعنی،

$$dV_F = dV_\Phi. \tag{۱۳.۳}$$

فرض کنید $\overline{G}^i = \overline{G}^i(x,y)$ ضرایب اسپری α باشند. با توجه به ۱۸.۲ ، $\overline{G}^i = \frac{1}{2}\overline{\Gamma}^i_{jk}y^jy^k$ که در آن $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk}(x)$ علایم کریستوفل α هستند که به صورت زیر بیان می شوند:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \frac{a^{il}}{2}\{\frac{\partial a_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^l}\}.$$

فرض کنید $\theta^i := dx^i$ و $\theta^i_j := \overline{\Gamma}^i_{jk}(x)dx^k$. $b_{i;j}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$b_{i;j}\theta^j := db_i - b_j\theta^j_i.$$

بنابراین داریم:

$$b_{i;j} = \frac{\partial b_i}{\partial x^j} - b_k \overline{\Gamma}^k_{ij}.$$

فرض کنید:

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} + b_{j;i}), \qquad s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} - b_{j;i}). \tag{۱۴.۳}$$

از آن جایی که $\overline{\Gamma}^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ji}$ ، داریم:

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}).$$

از طرف دیگر، ۱-فرمی $\beta_y = b_i y^i$ ، که می تواند به شکل $\beta = b_i dx^i$ بیان شود، دارای دیفرانسیل زیر است:

$$d\beta = db_j \wedge dx^j = \frac{1}{2}(\frac{\partial b_j}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j})dx^i \wedge dx^j.$$

بنابراین β بسته است ($d\beta = 0$) اگر و تنها اگر $s_{ij} = 0$. فرض کنیم:

$$s^i_j := a^{ih} s_{hj}, \qquad s_j := b_i s^i_j. \tag{۱۵.۳}$$

لم زیر رابطه بین G^i و $\overline{G}^i$ را برای متر راندرز بیان می کنند:

لم ۵.۲.۳. [۱۲]. برای متر راندرز $F = \alpha + \beta$ ، رابطه بین ضرایب اسپری F و α یعنی G^i و $\overline{G}^i$ به شکل زیر است:

$$G^i = \overline{G}^i + P y^i + Q^i, \tag{۱۶.۳}$$

که در آن :

$$P := \frac{e_{00}}{2F} - s_0, \qquad Q^i = \alpha s^i_0, \tag{۱۷.۳}$$

و $s_0 := s_i y^i$, $e_{00} := e_{ij} y^i y^j$, $e_{ij} := r_{ij} + b_i s_j + b_j s_i$ و $s^i_0 := s^i_j y^j$.

فرض کنید:

$$\mathcal{R}_{ij} := \frac{۱}{۲}(W_{i|j} + W_{j|i}), \qquad \mathcal{S}_{ij} := \frac{۱}{۲}(W_{i|j} - W_{j|i}),$$

که | مشتق کوواریانت نسبت به h را نشان می دهد. h^{ij} و h_{ij} را به ترتیب برای بالا بردن اندیس های پایین و پایین آوردن اندیس های بالا استفاده می کنیم؛ به عنوان مثال $W^i := h^{ij}W_j$ و $\mathcal{S}^i_j := h^{ir}\mathcal{S}_{rj}$ و غیره. فرض کنید:

$$\mathcal{R}_j := W^i\mathcal{R}_{ij}, \qquad \mathcal{S}_j := W_i\mathcal{S}^i_j = W^i\mathcal{S}_{ij}, \qquad \mathcal{R} := \mathcal{R}_jW^j,$$

بنابراین با کمک فرمول های بالا لم زیر را بیان می کنیم:

لم ۶.۲.۳. [۱۲] برای متر راندرز F که در جملات یک متر ریمان h و یک میدان برداری W با ۱۱.۳ بیان شده است، ضرایب اسپری F که با G^i نشان داده می شود؛ می تواند در جملات ضرایب اسپری h که با $\overline{G}^i$ نشان داده می شود؛ و مشتق های کوواریانت W نسبت به h به شکل زیر بیان شود:

$$G^i = \overline{G}^i - F\mathcal{S}^i_{\circ} - \frac{۱}{۲}F^۲(\mathcal{R}^i + \mathcal{S}^i) + \frac{۱}{۲}\{\frac{y^i}{F} - W^i\}\{۲F\mathcal{R}_{\circ} - \mathcal{R}_{\circ\circ} - F^۲\mathcal{R}\}. \qquad (۱۸.۳)$$

۳.۳ مترهای راندرز با S-انحنای ایزوتروپیک

مطالعه مترهای راندرز با S -انحنای ایزوتروپیک (یا ثابت) مساله ای طبیعی است که در این بخش به آن می پردازیم.

فرض کنید $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز روی منیفلد n -بعدی M باشد، که $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ و $\beta_y = b_i(x)y^i$, اگر:

$$\rho(x) := \ln\sqrt{۱ - ||\beta||^۲_\alpha(x)}.$$

با توجه به ۵.۳ ، رابطه بین فرم های حجمی dV_F و dV_α به صورت می باشد:

$$dV_F = e^{(n+1)\rho(x)} dV_\alpha.$$

اکنون از لم ۵.۲.۳ استفاده می کنیم. ضرایب اسپری F یعنی $G^i = G^i(x,y)$ و ضرایب اسپری α یعنی $\overline{G}^i = \overline{G}^i(x,y)$ با ۱۶.۳ و ۱۷.۳ به یکدیگر وابسته اند؛ یعنی،

$$G^i = \overline{G}^i + Py^i + Q^i,$$

که

$$P := \frac{e_{00}}{2F} - s_0, \qquad Q^i = \alpha s^i_0,$$

که در آن $s_0 := s_i y^i$, $e_{00} := e_{ij}y^iy^j$, $e_{ij} := r_{ij} + b_i s_j + b_j s_i$ و $s^i_0 := s^i_j y^j$ در ۱۴.۳ و ۱۵.۳ تعریف شده اند.

چون $s_{ij} + s_{ji} = 0$ بنابراین $s_{00} := s_{ij}y^iy^j = 0$ ، $s^i_i = a^{ij}s_{ij} = 0$ و

$$\frac{\partial(Py^m)}{\partial y^m} = \frac{\partial P}{\partial y^m} y^m + nP = (n+1)P,$$

$$\frac{\partial Q^m}{\partial y^m} = \alpha^{-1} s_{00} + \alpha s^m_m = 0.$$

چون α یک متر ریمان است، نتیجه می شود:

$$\frac{\partial \overline{G}^m}{\partial y^m} = \overline{\Gamma}^m_{im} y^i = y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{det(a_{ij})}) = y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(\ln \sigma_\alpha),$$

که $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ علایم کریستوفل α را نشان می دهند. به کمک اتحادهای بالا به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(\ln \sigma_F) \\ &= \frac{\partial \overline{G}^m}{\partial y^m} + \frac{\partial (Py^m)}{\partial y^m} + \frac{\partial Q^m}{\partial y^m} - (n+1) y^m \frac{\partial \rho}{\partial x^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(\ln \sigma_\alpha) \\ &= (n+1)\{P - \rho_0\} \\ &= (n+1)\{\frac{e_{00}}{2F} - (s_0 + \rho_0)\}. \qquad (19.3) \end{aligned}$$

که $\rho_{\circ} := \rho_{x^i}(x)y^i$. برای توضیحات بیشتر به مراجع [۱۹] و [۲۳] مراجعه کنید.

لم ۱.۳.۳. [۹] فرض کنید $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز روی منیفلد M باشد. برای تابع اسکالری $c = c(x)$ روی M، موارد زیر معادل می باشند:

۱) F دارای S-انحنای ایزوتروپیک است، یعنی $S = (n+1)cF$.

۲) α و β در تساوی $e_{\circ\circ} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$ صدق می کنند یعنی $r_{ij} + b_i s_j + b_j s_i = 2c(a_{ij} - b_i b_j)$.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم ۱ برقرار باشد یعنی F دارای S -انحنای ایزوتروپیک باشد، بنابراین:

$$S = (n+1)cF. \tag{۲۰.۳}$$

از طرفی طبق ۱۹.۳ ، S -انحنا برابر است با:

$$S = (n+1)\{\frac{e_{\circ\circ}}{2F} - (s_{\circ} + \rho_{\circ})\}. \tag{۲۱.۳}$$

پس طبق ۲۰.۳ و ۲۱.۳ داریم:

$$cF = \frac{e_{\circ\circ}}{2F} - (s_{\circ} + \rho_{\circ}).$$

در نتیجه:

$$e_{\circ\circ} = 2cF^2 + 2F(s_{\circ} + \rho_{\circ}).$$

با جایگذاری $F = \alpha + \beta$ خواهیم داشت:

$$e_{\circ\circ} = 2c(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)(s_{\circ} + \rho_{\circ}) = 2c(\alpha^2 + \beta^2) + 4c\alpha\beta + 2(s_{\circ} + \rho_{\circ})\beta + 2(s_{\circ} + \rho_{\circ})\alpha. \tag{۲۲.۳}$$

بنابراین:

$$e_{\circ\circ} = 2c(\alpha^2 + \beta^2) + 2(s_{\circ} + \rho_{\circ})\beta \tag{۲۳.۳}$$

و

$$۴c\beta+۲(s_{۰}+\rho_{۰})=۰. \tag{۲۴.۳}$$

اکنون از ۲۴.۳ نتیجه می گیریم:

$$s_{۰}+\rho_{۰}=-۲c\beta. \tag{۲۵.۳}$$

و با جایگذاری ۲۵.۳ در ۲۳.۳ داریم:

$$e_{۰۰}=۲c(\alpha^{۲}+\beta^{۲})-۴c\beta^{۲}=۲c(\alpha^{۲}+\beta^{۲}-۲\beta^{۲})=۲c(\alpha^{۲}-\beta^{۲}).$$

که معادل است با:

$$e_{ij}=۲c(a_{ij}-b_ib_j). \tag{۲۶.۳}$$

پس طبق معادله $e_{ij}:=r_{ij}+b_is_j+b_js_i$ نتیجه می شود:

$$r_{ij}+b_is_j+b_js_i=۲c(a_{ij}-b_ib_j).$$

اکنون فرض کنیم ۲ برقرار باشد، یعنی، $e_{۰۰}=۲c(\alpha^{۲}-\beta^{۲})$ پس طبق فرمول ۲۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned} S &= (n+۱)\{\frac{۲c(\alpha^{۲}-\beta^{۲})}{۲F}-(s_{۰}+\rho_{۰})\} \\ &= (n+۱)\{\frac{۲c(\alpha^{۲}-\beta^{۲})}{(\alpha+\beta)}-(s_{۰}+\rho_{۰})\} \\ &= (n+۱)\{c(\alpha-\beta)-(s_{۰}+\rho_{۰})\}. \end{aligned}$$

یعنی:

$$S=(n+۱)\{c(\alpha-\beta)-(s_{۰}+\rho_{۰})\}. \tag{۲۷.۳}$$

به کمک انقباض ۲۶.۳ با b^j و چون $s_jb^j=۰$ ، نتیجه می شود:

$$r_{ij}b^j+||\beta||_{\alpha}^{۲}s_i=۲c(۱-||\beta||_{\alpha}^{۲})b_i. \tag{۲۸.۳}$$

از طرفی داریم:

$$-b^j b_{j;i} = (1 - ||\beta||^2_\alpha)\rho_i. \tag{۲۹.۳}$$

اکنون ۲۹.۳ را به ۲۸.۳ اضافه می کنیم، نتیجه می شود:

$$\frac{1}{2}(b_{i;j} + b_{j;i})b^j + ||\beta||^2_\alpha s_i = 2c(1 - ||\beta||^2_\alpha)b_i.$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{2}b_{i;j}b^j - \frac{1}{2}(1 - ||\beta||^2_\alpha)\rho_i + ||\beta||^2_\alpha s_i = 2c(1 - ||\beta||^2_\alpha)b_i.$$

بنابراین:

$$2c(1 - ||\beta||^2_\alpha)b_i + (1 - ||\beta||^2_\alpha)\rho_i = -(1 - ||\beta||^2_\alpha)s_i. \tag{۳۰.۳}$$

و چون $1 - ||\beta||^2_\alpha \neq 0$ پس ۳۰.۳ معادل با ۲۴.۳ است و با توجه به ۲۴.۳ و ۲۷.۳ نتیجه می گیریم:

$$S = (n+1)\{c(\alpha - \beta) + 2c\beta\} = (n+1)\{c(\alpha + \beta)\} = (n+1)cF.$$

یعنی F دارای S-انحنای ایزوتروپیک است. ■

همان طور که قبلا بیان شد یک متر فینسلری $F = F(x,y)$ روی منیفلد M یک متر راندرز است اگر و فقط اگر جوابی از معادله زیر باشد:

$$h(x, \frac{y}{F} - W) = 1,$$

که $h(x,y) = \sqrt{h_{ij}(x)y^i y^j}$ یک متر ریمان و $W = W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری با شرط زیر می باشد:

$$||W||_h = h(x, -W) = \sqrt{h_{ij}(x)W^i(x)W^j(x)} < 1.$$

F با ۱۱.۳ داده می شود، یعنی،

$$F = \frac{\sqrt{\lambda h^2 + W_0^2}}{\lambda} - \frac{W_0}{\lambda}, \qquad W_0 := W_i y^i, \tag{۳۱.۳}$$

که $W_i := h_{ij}W^j$ و $\lambda := 1 - W_iW^i = 1 - ||W||_h^2$.

فرض کنید $\mathcal{R}_{ij} := \frac{1}{2}(W_{i|j} + W_{j|i})$ ،$\mathcal{R}_j := W^i\mathcal{R}_{ij}$ و $\mathcal{R} := W^i\mathcal{R}_{ij}W^j$ همان طور که در لم ۶.۲.۳ تعریف شده اند، باشند. از ۱۸.۳ به دست می آوریم:

$$\frac{\partial G^m}{\partial y^m} = \frac{\partial \overline{G}^m}{\partial y^m} + \frac{n+1}{2F}\{2FR_\circ - R_{\circ\circ} - F^2R\}. \tag{۳۲.۳}$$

فرض کنید $dV_F = \sigma_F dx^1 \dots dx^n$ و $dV_h = \sigma_h$ به ترتیب فرم حجمی F و h را نشان دهند. طبق لم ۴.۲.۳ ، $dV_F = dV_h$ ، یعنی $\sigma_F = \sigma_h$. چون h یک متر ریمان است، داریم:

$$\frac{\partial \overline{G}^m}{\partial y^m} = y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(ln\sigma_h). \tag{۳۳.۳}$$

بنابراین لم زیر به آسانی نتیجه می شود:

لم ۲.۳.۳. [۱۱] فرض کنید $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز روی منیفلد M باشد که در جملات متر ریمان h و میدان برداری W با ۱۱.۳ نشان داده می شود؛ آنگاه

$$S = \frac{n+1}{2F}\{2FR_\circ - R_{\circ\circ} - F^2R\}. \tag{۳۴.۳}$$

اثبات. با توجه به سه فرمول ۵۳.۲ ، ۳۲.۳ و ۳۳.۳ و لم ۴.۲.۳ نتیجه می شود. ■

اکنون به بیان دو لم زیر می پردازیم. برای توضیحات بیشتر می توان به کتاب [۱۲] مراجعه کرد.

لم ۳.۳.۳. [۱۱] فرض کنید $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز روی منیفلد M باشد که در جملات متر ریمان h و میدان برداری W با ۱۱.۳ بیان می شود. در این صورت $S = (n+1)cF$ اگر و فقط اگر

$$\mathcal{R}_{\circ\circ} = -2ch^2. \tag{۳۵.۳}$$

در این حالت،

$$G^i = \overline{G}^i - F\mathcal{S}^i_\circ - \frac{1}{2}F^2\mathcal{S}^i + cFy^i, \tag{۳۶.۳}$$

که $\overline{G}^i$ ضرایب ژئودزیک h را نشان می دهند.

لم ۴.۳.۳. [۱۲] فرض کنید $h=\sqrt{h_{ij}y^iy^j}$ یک متر ریمان روی منیفلد n -بعدی M و $W=W^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی M باشد که برای تابع اسکالری $c=c(x)$ روی M در ۳۵.۳ صدق می کند. آنگاه:

$$W_{k|i|j}=\mathbf{2}(c_{x^k}h_{ij}-c_{x^i}h_{jk}-c_{x^j}h_{ki})-W_m\overline{R}_{j\ ki}^{m}, \tag{۳۷.۳}$$

که $\overline{R}_{j\ ki}^{m}$ ضرایب تانسور انحنای ریمان h را نشان می دهد.

اکنون آماده ایم که در فصل های بعد مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S -انحنای ایزوتروپیک را مطالعه و مشخص کنیم.

فصل ۴

مترهای راندرز تخت تصویری با S-انحنای ایزوتروپیک

۱.۴ مقدمه

همان طور که قبلا بیان شد مترهای فینسلری تخت تصویری، مترهایی هستند که روی زیرمجموعه های باز در $\mathbb{R}^n$ ، ژئودزیک های آنها خطوط راست می باشند. این مترها با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی ۳۸.۲ مشخص می شوند.

در این فصل به بررسی مترهای راندرز تخت تصویری موضعی می پردازیم و در ابتدا قضیه طبقه بندی مترهای راندرز تخت تصویری با انحنای پرچمی ثابت را بیان می کنیم و سپس به بیان و اثبات قضیه طبقه بندی مترهای راندرز با S -انحنای ایزوتروپیک می پردازیم و در هر حالت انحنای پرچمی را به صورت صریح محاسبه می کنیم.

۲.۴ مترهای راندرز تخت تصویری با انحنای پرچمی ثابت

گزاره زیر را برای مترهای راندرز تخت تصویری موضعی داریم:

گزاره ۱.۲.۴. [۱۲] متر راندرز $F = \alpha + \beta$ تخت تصویری موضعی است اگر و فقط اگر α تخت تصویری موضعی و β بسته باشد.

در ابتدا قضیه طبقه بندی برای مترهای راندرز تخت تصویری با انحنای پرچمی ثابت را بیان می کنیم:

قضیه ۲.۲.۴. [۲۲] فرض کنید $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز n-بعدی با انحنای ریچی ثابت $Ric=(n-1)\sigma F^2$ با $\beta\neq 0$ باشد. اگر F تخت تصویری موضعی باشد؛ آنگاه $\sigma\leq 0$. علاوه بر این اگر $\sigma=0$ آنگاه F موضعا مینکوفسکی است. اگر $\sigma=\frac{-1}{4}$ ، F را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F=\frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-<x,y>^2}}{1-|x|^2}\pm\frac{<x,y>}{1-|x|^2}\pm\frac{<a,y>}{1+<a,x>},\qquad y\in T_x\mathbb{R}^n \qquad (1.4)$$

که در آن $a\in\mathbb{R}^n$ یک بردار ثابت با $|a|<1$ می باشد. متر راندرز تعریف شده در ۱.۴ دارای خواص زیر است:

۱. $K=\frac{-1}{4}$.

۲. $S=\pm\frac{1}{2}(n+1)F$.

پس از آن د. بائو [1] و ک. رابلس [2] نتیجه زیر را ثابت کردند:

اگر متر راندرز F اینشتین باشد، یعنی، $Ric=(n-1)\sigma(x)F^2$ آنگاه F ، S -انحنای ثابت دارد [۲] . این منجر به مطالعه مترهای راندرز تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک شد. اکنون آماده ایم تا مترهای راندرز تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک را بررسی کنیم.

۳.۴ مترهای راندرز تخت تصویری با S -انحنای ایزوتروپیک

همان طور که در گزاره ۱.۲.۴ بیان شد اگر $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز تخت تصویری موضعی باشد؛ آنگاه α تخت تصویری موضعی و β بسته است.

طبق قضیه بلترامی در هندسه ریمانی (قضیه ۲۸.۲.۲) ، α تخت تصویری موضعی است اگر و فقط اگر α روی گوی واحد $B^n(r_\mu)\subset\mathbb{R}^n$ یا کل $\mathbb{R}^n$ ، موضعا ایزومتریک با متر استاندارد α_μ زیر، برای $\mu=-1,0,+1$ می باشد:

$$\alpha_{-1}(x,y)=\frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}}{1-|x|^2};\qquad y\in T_xB^n\cong\mathbb{R}^n. \qquad (2.4)$$

[1] D. Bao
[2] C. Robles

$$\alpha_0(x,y)=|y|; \qquad y\in T_x\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n. \tag{۳.۴}$$

$$\alpha_{+1}(x,y)=\frac{\sqrt{|y|^2+(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}}{1+|x|^2}; \qquad y\in T_x\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n. \tag{۴.۴}$$

در این صورت اگر $\mu+4c(x)^2\neq 0$ ، β به صورت زیر تعیین می شود:

$$\beta=-\frac{2c_{x^k}(x)y^k}{\mu+4c(x)^2}.$$

به عبارت دیگر داریم:

$$c_{i;j}=-c(\mu+4c^2)a_{ij}+\frac{12cc_ic_j}{\mu+4c^2}.$$

اکنون در قضیه زیر معادلات بالا را برای c حل می کنیم و β و انحنای پرچمی K را مشخص می نماییم.

قضیه ۱.۳.۴. [۸] فرض کنید $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز تخت تصویری موضعی روی منیفلد n-بعدی M باشد و μ انحنای برشی ثابت α را نشان دهد. فرض کنید S-انحنا ایزوتروپیک باشد؛ یعنی $S=(n+1)c(x)F$. بنابراین F می تواند به شکل زیر طبقه بندی شود:

۱. اگر $\mu+4c(x)^2\equiv 0$ باشد، آنگاه $c(x)$ ثابت است و $K=-c^2\leq 0$.

۱.۱. اگر $c=0$ ، آنگاه F موضعا مینکوفسکی با انحنای پرچمی $K=0$ است.

۲.۱. اگر $c\neq 0$ ، آنگاه پس از یک نرمال سازی، F ایزومتر موضعی به متر راندرز زیر، روی گوی باز $B^n\subset\mathbb{R}^n$ است و

$$F(x,y)=\frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}\pm<x,y>}{1-|x|^2}\pm\frac{<a,y>}{1+<a,x>}, \tag{۵.۴}$$

که $a\in\mathbb{R}^n$ با $|a|<1$ می باشد و انحنای پرچمی F ، ثابت منفی $K=\frac{-1}{4}$ می باشد.

۲. اگر $\mu + ۴c(x)^۲ \neq ۰$ ، آنگاه F با

$$F(x,y) = \alpha(x,y) - \frac{۲c_{x^k}(x)y^k}{\mu + ۴c(x)^۲} \tag{۶.۴}$$

و انحنای پرچمی F به شکل زیر داده می شود:

$$K = ۳\{\frac{c_{x^k}(x)y^k}{F(x,y)} + c(x)^۲\} + \mu = \frac{۳}{۴}\{\mu + ۴c(x)^۲\}\frac{F(x,-y)}{F(x,y)} + \frac{\mu}{۴}. \tag{۷.۴}$$

۱.۲. هنگامی که $\mu = -۱$ و $\alpha = \alpha_{-۱}$ به شکل ۲.۴ روی B^n بیان شده باشد، آنگاه:

$$c(x) = \frac{\lambda + <a,x>}{۲\sqrt{(\lambda + <a,x>)^۲ \pm (۱ - |x|^۲)}}, \tag{۸.۴}$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ و $|a|^۲ < \lambda^۲ \pm ۱$.

۲.۲. هنگامی که $\mu = ۰$ و $\alpha = \alpha_۰$ به شکل ۳.۴ روی $\mathbb{R}^n$ بیان شده باشد، آنگاه:

$$c(x) = \frac{\pm ۱}{۲\sqrt{k + <a,x> + |x|^۲}}, \tag{۹.۴}$$

که در آن $k > ۰$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ و $|a|^۲ < k$.

۳.۲. هنگامی که $\mu = ۱$ و $\alpha = \alpha_{+۱}$ به شکل ۴.۴ روی $\mathbb{R}^n$ بیان شده باشد، آنگاه:

$$c(x) = \frac{\epsilon + <a,x>}{۲\sqrt{(۱ + |x|^۲ - (\epsilon + <a,x>)^۲}}, \tag{۱۰.۴}$$

که $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ و $|\epsilon|^۲ + |a|^۲ < ۱$.

اثبات. فرض می کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز روی منیفلد n -بعدی M باشد که $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ ، $\beta_y = b_i(x)y^i$ و برای هر $x \in M$ ، $||\beta||_\alpha := \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < ۱$. $b_{i;j}$ را به صورت $b_{i;j}\theta^j := db_i - b_j\theta_i^j$ تعریف می کنیم؛ که در آن $\theta^i := dx^i$ و $\theta_i^j := \gamma_{jk}^i dx^k$ فرم های التصاق لوی چویتای α را نشان می دهد.

فرض می کنیم:

$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} + b_{j;i})$ ، $s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} - b_{j;i})$ ، $s^i_j := a^{ih}s_{hj}$ ، $s_j := b_i s^i_j$ ، $e_{ij} := r_{ij} + b_i s_j + b_j s_i$ و $\rho(x) := \ln\sqrt{1 - ||\beta||^2_\alpha(x)}$ و $d\rho = \rho_{x^i}dx^i = \rho_i dx^i$.

طبق ۱۹.۳ ، S -انحنای $F = \alpha + \beta$ به شکل زیر داده می شود:

$$S = (n+1)\{\frac{e_{00}}{2F} - (s_0 + \rho_0)\},$$

که $e_{00} := e_{ij}y^i y^j$ ، $s_0 := s_i y^i$ و $\rho_0 := \rho_{x^p}y^p$. طبق لم ۱.۳.۳ $S = (n+1)c(x)F$ معادل است با:

$$e_{ij} = 2c(x)(a_{ij} - b_i b_j). \tag{۱۱.۴}$$

فرض می کنیم α انحنای برشی ثابت دارد و β بسته است. (بنابراین $s_{ij} = 0$ و $s_i = 0$.)

فرض می کنیم $\Psi := b_{i;j;k}y^i y^j y^k$ و $\Phi := b_{i;j}y^i y^j$.

با فرمول (۵۶.۸) از مرجع [۱۹] داریم:

$$KF^2 = \mu\alpha^2 + 3[\frac{\Phi}{2F}]^2 - \frac{\Psi}{2F}. \tag{۱۲.۴}$$

علاوه براین، فرض کنیم $S = (n+1)c(x)F$. چون $s_{ij} = 0$ بنابراین:

$$\frac{1}{2}(b_{i;j} - b_{j;i}) = 0.$$

پس:

$$b_{i;j} = b_{j;i}.$$

در نتیجه:

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} + b_{j;i}) = b_{i;j}.$$

لذا:

$$e_{ij} = r_{ij}.$$

نتیجه می شود $e_{ij} = r_{ij} = b_{i;j}$ و ۱۱.۴ به صورت

$$b_{i;j} = 2c(a_{ij} - b_i b_j)$$

ساده می شود. از فرمول اخیر به دست می آوریم:

$$\Phi := b_{i;j}y^i y^j = 2c(a_{ij} - b_i b_j)y^i y^j = 2c(\alpha^2 - \beta^2),$$

$$b_{i;j;k} = 2c_{x^k}(a_{ij} - b_i b_j) - 4c^2(a_{ik}b_j + a_{jk}b_i - 2b_i b_j b_k).$$

در نتیجه :

$$\Psi = b_{i;j;k}y^i y^j y^k = 2c_{x^k}y^k(\alpha^2 - \beta^2) - 4c^2(\alpha^2\beta + \alpha^2\beta - 2\beta^3) = 2c_{x^k}y^k(\alpha^2 - \beta^2) - 8c^2(\alpha^2 - \beta^2)\beta.$$

اکنون آماده ایم تا قضیه را ثابت کنیم.

فرض می کنیم $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز باشد. چون F تخت تصویری موضعی است، α تخت تصویری موضعی و β بسته است. طبق قضیه بلترامی می دانیم α انحنای برشی ثابت μ دارد.

بنابر قضیه ۴۲.۲.۲ چون S -انحنا، ایزوتروپیک است پس انحنای پرچمی به شکل

$$K = \frac{3c_{x^k}(x)y^k}{F(x,y)} + \sigma(x) \tag{۱۳.۴}$$

است که در آن $\sigma(x)$ تابع اسکالری روی M است.

از ۱۲.۴ و ۱۳.۴ نتیجه می شود:

$$3c_{x^k}y^k F + \sigma F^2 = KF^2 = \mu\alpha^2 + 3[\frac{\Phi}{2F}]^2 - \frac{\Psi}{2F}.$$

با استفاده از فرمول های بالا برای Φ و Ψ بدست می آوریم:

$$3c_{x^k}y^k(\alpha+\beta) + \sigma(\alpha+\beta)^2 = \mu\alpha^2 + 3\frac{4c^2(\alpha^2-\beta^2)^2}{4(\alpha+\beta)^2} - \frac{2c_{x^k}y^k(\alpha^2-\beta^2) - 8c^2(\alpha^2-\beta^2)\beta}{2(\alpha+\beta)}.$$

درنتیجه:

$$۳c_{x^k}y^k(\alpha+\beta)+\sigma(\alpha+\beta)^۲-\mu\alpha^۲-۳c^۲(\alpha-\beta)^۲+c_{x^k}y^k(\alpha-\beta)-۴c^۲(\alpha-\beta)\beta=۰.$$

لذا:

$$۴c_{x^k}y^k\alpha+۲c_{x^k}y^k\beta+۲\sigma\alpha\beta+۲c^۲\alpha\beta+\sigma\alpha^۲+\sigma\beta^۲-\mu\alpha^۲-۳c^۲\alpha^۲+c^۲\beta^۲=۰.$$

وپس از ساده کردن نتیجه می گیریم:

$$۲\{۲c_{x^k}y^k+(\sigma+c^۲)\beta\}\alpha+\{۲c_{x^k}y^k+(\sigma+c^۲)\beta\}\beta+\{\sigma-۳c^۲-\mu\}\alpha^۲=۰.$$

و این نتیجه می دهد:

$$۲c_{x^k}y^k+(\sigma+c^۲)\beta=۰, \qquad (۱۴.۴)$$

$$\sigma-۳c^۲-\mu=۰. \qquad (۱۵.۴)$$

با قرار دادن ۱۵.۴ در ۱۳.۴ و ۱۴.۴ بدست می آوریم:

$$K=۳\{\frac{c_{x^k}y^k}{F(x,y)}+c(x)^۲\}+\mu, \qquad (۱۶.۴)$$

$$۲c_{x^k}y^k+(\mu+۴c^۲)\beta=۰. \qquad (۱۷.۴)$$

اکنون آماده ایم که β و c را مشخص کنیم:

حالت۱: فرض کنیم $\mu+۴c(x)^۲\equiv۰$.

در این حالت از ۱۷.۴ نتیجه می شود $۲c_{x^k}y^k=۰$ بنابراین $c(x)=c$ ثابت است و از ۱۶.۴ نتیجه می

شود که:

$$K = 3c^2 + \mu = -c^2.$$

آنگاه از قضیه طبقه بندی برای مترهای راندرز تخت تصویری با انحنای ثابت (قضیه ۲.۲.۴) نتیجه مورد نظر به دست می آید.

حالت۲: فرض کنید روی زیر مجموعه باز $\mathcal{U} \subset M$، $\mu + 4c(x)^2 \neq 0$. از ۱۷.۴ نتیجه می شود:

$$\beta = -\frac{2c_{x^k}(x)y^k}{\mu + 4c(x)^2}. \tag{۱۸.۴}$$

دقت کنید که β دقیق است. فرض می کنیم $dc =: c_i dx^i$ و $c_{i;j}dx^j := dc_i - c_k\overline{\Gamma}^k_{ij}dx^j$ مشتق کوواریانت dc نسبت به α را نشان می دهد، که $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ نمادهای کریستوفل α را نشان می دهند. داریم:

$$c_i = c_{x^i}(x), \qquad c_{i;j} = c_{x^ix^j}(x) - c_{x^k}(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x). \tag{۱۹.۴}$$

به طور مشابه، $b_{i;j}$ و $b_{i;j;k}$ را تعریف می کنیم. چون β بسته است، $b_{i;j} = b_{j;i}$ پس $r_{ij} = b_{i;j} = e_{ij}$ ، $s_{ij} = 0$ و $s_j = 0$. در این حالت $S = (n+1)c(x)F$ معادل است با:

$$b_{i;j} = 2c(a_{ij} - b_ib_j). \tag{۲۰.۴}$$

از ۱۸.۴ داریم:

$$b_i = -\frac{2c_i}{\mu + 4c^2} \tag{۲۱.۴}$$

و از ۲۱.۴ نتیجه می شود:

$$b_{i;j} = \frac{-2c_{i;j}(\mu + 4c^2) + 16cc_ic_j}{(\mu + 4c^2)^2}. \tag{۲۲.۴}$$

با توجه به ۲۰.۴ و ۲۱.۴ به دست می آوریم:

$$b_{i;j} = 2c(a_{ij} - \frac{4c_ic_j}{(\mu + 4c^2)^2}). \tag{۲۳.۴}$$

از ۲۲.۴ و ۲۳.۴ داریم:

$$c_{i;j} = -c(\mu + ۴c^۲)a_{ij} + \frac{۱۲cc_ic_j}{\mu + ۴c^۲}. \quad (۲۴.۴)$$

اکنون ۲۴.۴ را برای $c(x)$ در سه حالت $\mu = -۱, ۰, ۱$ محاسبه می کنیم.

(۱.۲) $\mu = -۱$. فرض کنیم $\alpha = \alpha_{-۱} = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ که به صورت ۲.۴ بیان می شود. داریم:

$$a_{ij}y^iy^j = \alpha^۲ = \alpha_{-۱}^۲ = \frac{|y|^۲ - (|x|^۲|y|^۲ - <x, y>^۲)}{(۱ - |x|^۲)^۲}.$$

در نتیجه:

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij} - |x|^۲\delta_{ij} + x_ix_j}{(۱ - |x|^۲)^۲}.$$

بنابراین:

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{۱ - |x|^۲} + \frac{x_ix_j}{(۱ - |x|^۲)^۲}. \quad (۲۵.۴)$$

طبق ۲۵.۲ ماتریس معکوس (a_{ij}) برابر است با:

$$a^{ij} = (۱ - |x|^۲)\{\delta^{ij} - x^ix^j\}. \quad (۲۶.۴)$$

طبق فرمول ۲۸.۲ علایم کریستوفل α به صورت

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \frac{x^i\delta^k_j + x^j\delta^k_i}{۱ - |x|^۲} \quad (۲۷.۴)$$

خواهند بود و معادله ۲۴.۴ به شکل

$$c_{i;j} = -c(-۱ + ۴c^۲)a_{ij} + \frac{۱۲cc_ic_j}{-۱ + ۴c^۲}$$

در می آید. با استفاده از ۲۵.۴ و ۱۹.۴ نتیجه می گیریم:

$$c_{x^ix^j}(x) - c_{x^k}(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x) = -c(-۱ + ۴c^۲)\{\frac{\delta_{ij}}{۱ - |x|^۲} + \frac{x_ix_j}{(۱ - |x|^۲)^۲}\} + \frac{۱۲cc_{x^i}c_{x^j}}{-۱ + ۴c^۲}.$$

و بنابراین با استفاده از ۲۷.۴ نتیجه می شود:

$$c_{x^ix^j} - \frac{x^i c_{x^j} + x^j c_{x^i}}{1-|x|^2} = -c(-1+4c^2)\{\frac{\delta_{ij}}{1-|x|^2} + \frac{x_i x_j}{(1-|x|^2)^2}\} + \frac{12 c c_{x^i} c_{x^j}}{-1+4c^2}. \quad (28.4)$$

فرض می کنیم:

$$f := \frac{2c\sqrt{1-|x|^2}}{\sqrt{\mp(-1+4c^2)}},$$

که علامت، وابسته به مقدار c است به طوریکه $\mp(-1+4c^2) > 0$.

معادله ۲۸.۴ ، f را به شکل زیر ساده می کند:

$$f_{x^ix^j} = 0.$$

خواهیم داشت $f = <a, x> + \lambda$ که $\lambda \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^n$. بنابراین:

$$<a, x> + \lambda = \frac{2c\sqrt{1-|x|^2}}{\sqrt{\mp(-1+4c^2)}}.$$

با به توان ۲ رساندن رابطه فوق داریم:

$$(<a, x> + \lambda)^2 = \frac{4c^2(1-|x|^2)}{\mp(-1+4c^2)}.$$

پس:

$$c^2\{4(1-|x|^2) \pm 4(<a, x> + \lambda)^2\} = \pm(<a, x> + \lambda)^2.$$

با ساده کردن به دست می آوریم:

$$c^2 = \frac{(<a, x> + \lambda)^2}{\pm 4(1-|x|^2) + 4(<a, x> + \lambda)^2}.$$

آنگاه نتیجه می شود:

$$c = \frac{\lambda + <a, x>}{2\sqrt{(\lambda + <a, x>)^2 \pm (1-|x|^2)}}. \quad (29.4)$$

از ۲۹.۴ داریم:

$$c_{x^k}(x)y^k = \frac{\pm\{<a,y>(1-|x|^2)+<x,y>(\lambda+<a,x>)\}}{2\{(\lambda+<a,x>^2)\pm(1-|x|^2)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

و با قرار دادن فرمول قبل در ۱۸.۴ به دست می آوریم:

$$\beta = \frac{(\lambda+<a,x>)<x,y>+(1-|x|^2)<a,y>}{(1-|x|^2)\sqrt{(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)}}$$

و

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}}{1-|x|^2} \\ &+ \frac{(\lambda+<a,x>)<x,y>+(1-|x|^2)<a,y>}{(1-|x|^2)\sqrt{(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)}}. \end{aligned} \tag{۳۰.۴}$$

از طرفی:

$$b_i = \frac{(\lambda+<a,x>)x_i+(1-|x|^2)a_i}{(1-|x|^2)\sqrt{(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)}}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} ||\beta||_\alpha^2 &= b_ib^i = a^{ij}b_ib_j = (1-|x|^2)\{\delta^{ij}-x^ix^j\}\{\frac{(\lambda+<a,x>)^2x_ix_j+(1-|x|^2)^2a_ia_j}{(1-|x|^2)^2[(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)]} \\ &+ \frac{(1-|x|^2)(\lambda+<a,x>)(x_ia_j+x_ja_i)}{(1-|x|^2)^2[(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)]}\} = \frac{(\lambda+<a,x>)^2|x|^2}{(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)} \\ &+ \frac{(1-|x|^2)(|a|^2-<a,x>^2)+2<a,x>(\lambda+<a,x>)(1-|x|^2)}{(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)}. \end{aligned}$$

که با محاسبه ای مستقیم نتیجه می گیریم:

$$1-||\beta||_\alpha^2 = \frac{(1-|x|^2)\{\pm1-(|a|^2-\lambda^2)\}}{(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)}.$$

بنابراین $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز روی زیرمجموعه باز B^n است اگر و فقط اگر $|a|^2-\lambda^2<\pm1$ در این حالت برای هر $x\in B^n$ ، $(\lambda+<a,x>)^2\pm(1-|x|^2)>0$. بنابراین F به کل B^n

گسترش می یابد.

با ۱۶.۴ ، ۲۹.۴ و ۷.۴ به دست می آوریم:

$$K = -\frac{3}{4}\frac{\pm(1-|x|^2)}{(\lambda+<a,x>)^2 \pm (1-|x|^2)}.\frac{F(x,-y)}{F(x,y)} - \frac{1}{4}. \tag{۳۱.۴}$$

(۲.۲.) $\mu = 0$. فرض کنیم $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{\delta_{ij}y^iy^j}$ که به صورت ۳.۴ بیان می شود. در نتیجه $a_{ij} = \delta_{ij}$.
معادله ۲۴.۴ به شکل

$$c_{x^ix^j} = -4c^3\delta_{ij} + \frac{3c_{x^i}c_{x^j}}{c} \tag{۳۲.۴}$$

در می آید. فرض می کنیم: $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^n | c(x) \neq 0\}$ و

$$f = \frac{1}{c^2}.$$

معادله ۳۲.۴ ، f را به صورت زیر ساده می کند:

$$f_{x^ix^j} = 8\delta_{ij} \tag{۳۳.۴}$$

و خواهیم داشت:

$$f = 4(k + 2 <a,x> + |x|^2),$$

که $k \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^n$ به طوری که برای هر $x \in \mathcal{U}$ ، $f(x) > 0$. آنگاه $c = \pm\frac{1}{\sqrt{f}}$ به صورت زیر می شود:

$$c = \frac{\pm 1}{2\sqrt{k + 2 <a,x> + |x|^2}}. \tag{۳۴.۴}$$

با توجه به ۳۴.۴ نتیجه می گیریم:

$$c_{x^k}(x)y^k = \pm\frac{-<a,y> - <x,y>}{2(k + 2<a,x> + |x|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

و با توجه به فرمول قبل و ۱۸.۴ به دست می آوریم:

$$\beta=\pm\frac{<a,y>+<x,y>}{\sqrt{k+2<a,x>+|x|^2}}$$

و

$$F=|y|\pm\frac{<a,y>+<x,y>}{\sqrt{k+2<a,x>+|x|^2}}. \tag{۳۵.۴}$$

از طرفی:

$$b_i=\pm\frac{a_i+x_i}{\sqrt{k+2<a,x>+|x|^2}}.$$

در نتیجه:

$$||\beta||_\alpha^2=\frac{|a|^2+2<a,x>+|x|^2}{k+2<a,x>+|x|^2}.$$

که با محاسبه ای مستقیم نتیجه می گیریم:

$$1-||\beta||_\alpha^2=\frac{k-|a|^2}{k+2<a,x>+|x|^2}.$$

لذا $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز روی زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ است اگر و فقط اگر $|a|^2<k$. در این حالت،

$$k+2<a,x>+|x|^2\geq k-|a|^2+(|a|-|x|)^2>0, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

بنابراین F به کل $\mathbb{R}^n$ گسترش می یابد. به کمک ۱۶.۴ ، ۳۴.۴ و ۷.۴ نتیجه می شود:

$$K=\frac{3}{4(k+2<a,x>+|x|^2)}.\frac{F(x,-y)}{F(x,y)}>0.$$

(۳.۲) $\mu=+1$. فرض کنیم $\alpha=\alpha_{+1}=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ که به شکل ۴.۴ بیان می شود. داریم:

$$a_{ij}y^iy^j=\alpha^2=\alpha_{+1}^2=\frac{|y|^2+(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}{(1+|x|^2)^2}.$$

در نتیجه:

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij} + |x|^۲\delta_{ij} - x_i x_j}{(۱ + |x|^۲)^۲}.$$

بنابراین:

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{۱ + |x|^۲} - \frac{x_i x_j}{(۱ + |x|^۲)^۲}. \qquad (۳۶.۴)$$

طبق ۲۵.۲ ماتریس معکوس (a_{ij}) به شکل

$$a^{ij} = (۱ + |x|^۲)\{\delta^{ij} + x^i x^j\} \qquad (۳۷.۴)$$

می باشد. طبق فرمول ۲۸.۲ علایم کریستوفل α به صورت

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = -\frac{x^i\delta^k_j + x^j\delta^k_i}{۱ + |x|^۲} \qquad (۳۸.۴)$$

خواهند بود و معادله ۲۴.۴ می شود:

$$c_{i;j} = -c(۱ + ۴c^۲)a_{ij} + \frac{۱۲cc_ic_j}{۱ + ۴c^۲}.$$

با استفاده از ۳۶.۴ و ۱۹.۴ نتیجه می شود:

$$c_{x^ix^j}(x) - c_{x^k}(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x) = -c(۱ + ۴c^۲)\{\frac{\delta_{ij}}{۱ + |x|^۲} - \frac{x_ix_j}{(۱ + |x|^۲)^۲}\} + \frac{۱۲cc_{x^i}c_{x^j}}{۱ + ۴c^۲}.$$

بنابراین با استفاده از ۳۸.۴ داریم:

$$c_{x^ix^j} + \frac{x^ic_{x^j} + x^jc_{x^i}}{۱ + |x|^۲} = -c(۱ + ۴c^۲)\{\frac{\delta_{ij}}{۱ + |x|^۲} - \frac{x_ix_j}{(۱ + |x|^۲)^۲}\} + \frac{۱۲cc_{x^i}c_{x^j}}{۱ + ۴c^۲}. \qquad (۳۹.۴)$$

فرض می کنیم:

$$f := \frac{۲c\sqrt{۱ + |x|^۲}}{\sqrt{۱ + ۴c^۲}}.$$

معادله ۳۹.۴ ، f را به صورت زیر ساده می کند:

$$f_{x^ix^j} = ۰$$

و خواهیم داشت $f = \epsilon + <a, x>$. بنابراین:

$$\epsilon + <a, x> = \frac{2c\sqrt{1+|x|^2}}{\sqrt{1+4c^2}}.$$

با به توان ۲ رساندن داریم:

$$(\epsilon + <a, x>)^2 = \frac{4c^2(1+|x|^2)}{1+4c^2}.$$

لذا

$$4c^2\{(1+|x|^2) - (\epsilon + <a, x>)^2\} = (\epsilon + <a, x>)^2.$$

با ساده کردن به دست می آوریم:

$$c^2 = \frac{(\epsilon + <a, x>)^2}{4\{(1+|x|^2) - (\epsilon + <a, x>)^2\}}$$

و نتیجه می شود:

$$c = \frac{\epsilon + <a, x>}{2\sqrt{1+|x|^2 - (\epsilon + <a, x>)^2}}. \qquad (۴۰.۴)$$

از ۴۰.۴ نتیجه می گیریم:

$$c_{x^k}(x)y^k = \frac{<a, y>(1+|x|^2) - <x, y>(\epsilon + <a, x>)}{2\{1+|x|^2 - (\epsilon + <a, x>)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

با قرار دادن فرمول قبل در ۱۸.۴ به دست می آوریم:

$$\beta = \frac{(\epsilon + <a, x>) <x, y> - (1+|x|^2) <a, y>}{(1+|x|^2)\sqrt{1+|x|^2 - (\epsilon + <a, x>)^2}}$$

و

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - <x, y>^2)}}{1+|x|^2} + \frac{(\epsilon + <a, x>) <x, y> - (1+|x|^2) <a, y>}{(1+|x|^2)\sqrt{1+|x|^2 - (\epsilon + <a, x>)^2}}.$$

از طرفی:

$$b_i = \frac{(\epsilon + <a,x>)x_i - (1+|x|^2)a_i}{(1+|x|^2)\sqrt{1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2}}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}||\beta||_\alpha^2 &= b_ib^i = a^{ij}b_ib_j = (1+|x|^2)\{\delta^{ij}+x^ix^j\}\{\frac{(\epsilon+<a,x>)^2x_ix_j+(1+|x|^2)^2a_ia_j}{(1+|x|^2)^2(1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2)}\\ &- \frac{(\epsilon+<a,x>)(1+|x|^2)(x_ia_j+x_ja_i)}{(1+|x|^2)^2(1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2)}\} = \frac{(\epsilon+<a,x>)^2|x|^2}{1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2}\\ &+ \frac{-2<a,x>(\epsilon+<a,x>)(1+|x|^2)+|a|^2+<a,x>^2}{1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2}.\end{aligned}$$

که با محاسبه ای مستقیم نتیجه می گیریم:

$$1-||\beta||_\alpha^2 = \frac{(1+|x|^2)\{1-\epsilon^2-|a|^2\}}{1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2}.$$

بنابراین $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز روی زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ است اگر و فقط اگر $\epsilon^2+|a|^2<1$.

در این حالت برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ داریم $1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2>0$. بنابراین F به کل $\mathbb{R}^n$ گسترش می یابد. به کمک ۱۶.۴ به دست می آوریم:

$$K = \frac{3(1+|x|^2)}{4\{1+|x|^2-(\epsilon+<a,x>)^2\}}.\frac{F(x,-y)}{F(x,y)}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}.$$

برای تکمیل اثبات تنها کافی است تساوی فرمول ۷.۴ را ثابت کنیم.

می دانیم $F(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$ ، بنابراین $F(x,-y)=\alpha(x,y)-\beta(x,y)$. از طرفی با فرمول ۶.۴ داریم:

$$\alpha(x,y)=F(x,y)+\frac{2c_{x^k}(x)y^k}{\mu+4c(x)^2}, \tag{۴۱.۴}$$

$$\alpha(x,y)=F(x,-y)-\frac{2c_{x^k}(x)y^k}{\mu+4c(x)^2}. \tag{۴۲.۴}$$

از ۴۱.۴ و ۴۲.۴ به دست می آوریم:

$$F(x,-y)-F(x,y)=\frac{4c_{x^k}(x)y^k}{\mu+4c(x)^2}.$$

لذا:

$$c_{x^k}(x)y^k=\frac{\{F(x,-y)-F(x,y)\}(\mu+4c(x)^2)}{4}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
K &= 3\{\frac{c_{x^k}(x)y^k}{F(x,y)}+c(x)^2\}+\mu\\
&= \frac{3}{4}\frac{\{F(x,-y)-F(x,y)\}(\mu+4c(x)^2)}{F(x,y)}+3c(x)^2+\mu\\
&= \frac{3}{4}\frac{F(x,-y)}{F(x,y)}(\mu+4c(x)^2)-\frac{3}{4}(\mu+4c(x)^2)+3c(x)^2+\mu\\
&= \frac{3}{4}\{\mu+4c(x)^2\}\frac{F(x,-y)}{F(x,y)}+\frac{\mu}{4}.
\end{aligned}$$

■

فصل ۵

مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S-انحنای ایزوتروپیک

۱.۵ مقدمه

یکی از مسائل اصلی در هندسه فینسلری طبقه بندی مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر یا ثابت است. اگرچه این مساله حتی در حالت انحنای پرچمی ثابت حل نشده است. در این بخش می خواهیم مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S -انحنای ایزوتروپیک را شرح دهیم و در نهایت به طبقه بندی این نوع از مترها می پردازیم.

۲.۵ مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر و S -انحنای ایزوتروپیک

فرض می کنیم F یک متر راندرز باشد که در جملات یک متر ریمان $h(x,y)=\sqrt{h_{ij}(x)y^iy^j}$ و یک میدان برداری $W=W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ با ۱۱.۳ بیان شده است؛ یعنی،

$$F=\frac{\sqrt{\lambda h^{2}+W_0^{2}}}{\lambda}-\frac{W_0}{\lambda},\qquad W_0:=W_iy^i, \tag{۱.۵}$$

که $W_i:=h_{ij}W^j$ و $\lambda:=1-h(x,W)^2=1-W_iW^i=1-||W||_h^2$. فرض کنیم:

$$\mathcal{R}_{ij}:=\frac{1}{2}(W_{i|j}+W_{j|i}),\qquad \mathcal{S}_{ij}:=\frac{1}{2}(W_{i|j}-W_{j|i}),\qquad \mathcal{S}^i_j:=h^{ir}\mathcal{S}_{rj},$$

$$\mathcal{R}_j:=W^i\mathcal{R}_{ij},\qquad \mathcal{S}_j:=W_i\mathcal{S}^i_j=W^i\mathcal{S}_{ij},\qquad \mathcal{R}:=\mathcal{R}_jW^j.$$

با لم ۶.۲.۳ ضرایب اسپری F که با G^i نشان داده می شود؛ می تواند در جملات ضرایب اسپری h که با $\overline{G}^i$ نشان داده می شود؛ و مشتق های کوواریانت W نسبت به h به صورت زیر بیان شود:

$$G^i = \overline{G}^i - F\mathcal{S}^i_\circ - \frac{1}{2}F^2(\mathcal{R}^i + \mathcal{S}^i) + \frac{1}{2}\{\frac{y^i}{F} - W^i\}\{2F\mathcal{R}_\circ - \mathcal{R}_{\circ\circ} - F^2\mathcal{R}\}. \tag{۲.۵}$$

با ۲.۵ ، انحنای ریمان F یعنی R^i_k در جملات انحنای ریمان h یعنی $\overline{R}^i_k$ و مشتق های کوواریانت W می تواند بیان شود. فرمول ۴۵.۲ را به خاطر آورید:

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^m\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^m \partial y^k} + 2G^m\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^m \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^m}\frac{\partial G^m}{\partial y^k}. \tag{۳.۵}$$

۲.۵ را به شکل زیر می نویسیم:

$$G^i = \overline{G}^i + Q^i,$$

که در آن:

$$Q^i := -F\mathcal{S}^i_\circ - \frac{1}{2}F^2(\mathcal{R}^i + \mathcal{S}^i) + \frac{1}{2}\{\frac{y^i}{F} - W^i\}\{2F\mathcal{R}_\circ - \mathcal{R}_{\circ\circ} - F^2\mathcal{R}\}.$$

آنگاه

$$R^i_k = \overline{R}^i_k + 2Q^i_{|k} - [Q^i_{|m}]_{y^k}y^m + 2Q^m[Q^i]_{y^m y^k} - [Q^i]_{y^m}[Q^m]_{y^k}, \tag{۴.۵}$$

که "|" مشتق کوواریانت نسبت به h را نشان می دهد.

از حالا به بعد فرض می کنیم F ، S -انحنای ایزوتروپیک دارد، یعنی، برای یک تابع اسکالری $c = c(x)$ ، $S = (n+1)cF$. طبق لم ۳.۳.۳ داریم:

$$\mathcal{R}_{\circ\circ} = -2ch^2. \tag{۵.۵}$$

در این صورت ضرایب اسپری G^i به شکل زیر ساده می شوند:

$$G^i = \overline{G}^i + Q^i, \tag{۶.۵}$$

که:

$$Q^i := -F\mathcal{S}^i_{\circ} - \frac{۱}{۲}F^۲\mathcal{S}^i + cFy^i.$$

به کمک ۳۷.۳ داریم:

$$W_{i|j|k} = ۲(c_{x^i}h_{jk} - c_{x^j}h_{ik} - c_{x^k}h_{ij}) - \overline{R}^p_{k\ ij}W_p, \tag{۷.۵}$$

که $\overline{R}^i_{p\ kq}$ ضرایب تانسور انحنای ریمان h را نشان می دهد به طوری که $\overline{R}^i_k := \overline{R}^i_{p\ kq}y^py^q$. بنابر ۷.۵ و خواص تانسور انحنای ریمان h به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^i_{k|\circ} &= ۲(h^{im}c_{x^m}y_k - c_{x^k}y^i) - \overline{R}^i_{k\ mq}W^my^q,\\
\mathcal{S}^i_{\circ|k} &= ۲(h^{im}c_{x^m}y_k - c_{x^m}y^m\delta^i_k) + \overline{R}^i_{p\ kq}y^pW^q,\\
\mathcal{S}^i_{|k} &= ۲c\mathcal{S}^i_k - \mathcal{S}^i_m\mathcal{S}^m_k + ۲(c_{x^m}W^m\delta^i_k - h^{im}c_{x^m}W_k) - \overline{R}^i_{p\ kq}W^pW^q,\\
\mathcal{S}^i_{|\circ} &= ۲c\mathcal{S}^i_{\circ} - \mathcal{S}^i_m\mathcal{S}^m_{\circ} + ۲(c_{x^m}W^my^i - h^{im}c_{x^m}W_{\circ}) - \overline{R}^i_{p\ mq}W^pW^qy^m,\\
\mathcal{S}^i_{\circ|\circ} &= ۲(h^{im}c_{|m}h^۲ - c_{|\circ}y^i) - \overline{R}^i_{p\ mq}y^py^qW^m.
\end{aligned}$$

که در آن $y_k := h_{ik}y^i$.

اکنون فرض می کنیم $A := \sqrt{\lambda h^۲ + W_{\circ}^۲}$. از ۱۱.۳ داریم $A = \lambda F + W_{\circ}$ و

$$F\lambda + W_{\circ} = \sqrt{\lambda h^۲ + W_{\circ}^۲}.$$

با به توان ۲ رساندن نتیجه می شود:

$$F^۲\lambda^۲ + ۲F\lambda W_{\circ} = \lambda h^۲.$$

پس:

$$F^۲\lambda + ۲FW_{\circ} = h^۲.$$

بنابراین:

$$h^{۲} - ۲FW_{۰} = \lambda F^{۲}. \tag{۸.۵}$$

چون $A = \lambda F + W_{۰}$ پس $\lambda = \frac{A-W_{۰}}{F}$ با استفاده از ۸.۵ داریم $h^{۲} - ۲FW_{۰} = (\frac{A-W_{۰}}{F})F^{۲}$ و در نتیجه:

$$h^{۲} - FW_{۰} - AF = ۰. \tag{۹.۵}$$

به علاوه با استفاده از ۹.۵ و ۵.۵ فرمول های زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned}
F_{|k} &= \frac{۲cF(y_k - FW_k) + F(F\mathcal{S}_k + \mathcal{S}_{k۰})}{A},\\
F_{|۰} &= ۲cF^{۲} + \frac{F^{۲}}{A}\mathcal{S}_{۰},\\
(F_{y^k})_{|۰} &= (\frac{h^{۲}}{A^{۳}}\mathcal{S}_{۰} + ۲c\frac{F}{A})\{y_k - FW_k\} - \frac{F^{۲}}{A^{۲}}\mathcal{S}_{۰}W_k - \frac{F}{A}\mathcal{S}_{k۰}.
\end{aligned}$$

به کمک ۴.۵ و اتحادهای بالا و نرم افزار میپل، فرمول بسیار ساده تر زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
R^i_k &= \overline{R}^{\,i}_{p\ kq}y^py^q - F\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}W^py^q - F\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}y^pW^q\\
&+ F^{۲}\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}W^pW^q - F_{y^k}\overline{R}^{\,i}_{p\ mq}y^py^qW^m + FF_{y^k}\overline{R}^{\,i}_{p\ mq}y^qW^pW^m\\
&+ (\frac{۳c_{x^m}y^m}{F} - c^{۲} - ۲c_{x^m}W^m)\{F^{۲}\delta^i_k - FF_{y^k}y^i\}.
\end{aligned} \tag{۱۰.۵}$$

هیچ یک از جمله های $\mathcal{S}^i$ یا $\mathcal{S}^i_k$ در ۱۰.۵ اتفاق نمی افتند.

مشاهده می کنیم که:

$$\begin{aligned}
&\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}(y^p - FW^p)(y^q - FW^q)\\
= \ &\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}y^py^q - F\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}y^pW^q - F\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}W^py^q + F^{۲}\overline{R}^{\,i}_{p\ kq}W^pW^q
\end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

و

$$
\begin{aligned}
& \overline{R}^{\,i}_{p\ mq}(y^p - FW^p)(y^q - FW^q)W^m \\
= \;& \overline{R}^{\,i}_{p\ mq} y^p y^q W^m - F\overline{R}^{\,i}_{p\ mq} W^p y^q W^m \\
- \;& F\overline{R}^{\,i}_{p\ mq} y^p W^q W^m + F^{۲}\overline{R}^{\,i}_{p\ mq} W^p W^q W^m \\
= \;& \overline{R}^{\,i}_{p\ mq} y^p y^q W^m - F\overline{R}^{\,i}_{p\ mq} W^p y^q W^m. \qquad (۱۲.۵)
\end{aligned}
$$

۱۱.۵ و ۱۲.۵ را در ۱۰.۵ جایگزین می کنیم، به دست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
R^i_k \;=\;& \overline{R}^{\,i}_{p\ kq}(y^p - FW^p)(y^q - FW^q) \\
-\;& F_{y^k}\overline{R}^{\,i}_{p\ mq}(y^p - FW^p)(y^q - FW^q)W^m \\
+\;& (\frac{۳c_{x^m}y^m}{F} - c^{۲} - ۲c_{x^m}W^m)\{F^{۲}\delta^i_k - FF_{y^k}y^i\}. \qquad (۱۳.۵)
\end{aligned}
$$

فرض می کنیم:

$$\xi^i := y^i - F(x,y)W^i, \qquad \xi_k := h_{ik}\xi^i$$

و

$$\widetilde{h} := h(x,\xi) = \sqrt{h_{pq}\xi^p\xi^q} = \sqrt{\xi_k\xi^k}, \qquad \widetilde{W}_{۰} := W_i\xi^i.$$

داریم:

$$\widetilde{h}^{۲} = h_{pq}\xi^p\xi^q = h_{pq}(y^p - FW^p)(y^q - FW^q) = h^{۲} - ۲FW_{۰} + F^{۲}h(x,W)^{۲} = F^{۲}.$$

بنابراین:

$$y^i = \xi^i + \widetilde{h}W^i.$$

مشاهده می کنیم که:

$$\begin{aligned}\lambda\widetilde{h} &= \lambda F = A - W_{\circ}\\ &= A - W_i(\xi^i + \widetilde{h}W^i)\\ &= A - \widetilde{W}_{\circ} - \widetilde{h}(1-\lambda).\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$A = \widetilde{h} + \widetilde{W}_{\circ}.$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}F_{y^k} &= \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2} - W_{\circ}}{\lambda}\right)\\ &= \frac{\left(\frac{\frac{\partial(\lambda h^2 + W_{\circ}^2)}{\partial y^k}}{2\sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2}} - \frac{\partial W_{\circ}}{\partial y^k}\right)\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial y^k}\left(\sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2} - W_{\circ}\right)}{\lambda^2}\\ &= \frac{\lambda\frac{\partial(\lambda h^2)}{\partial y^k} + \lambda\frac{\partial(W_{\circ}^2)}{\partial y^k} - 2\lambda\sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2}\frac{\partial W_{\circ}}{\partial y^k}}{2\lambda^2\sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2}}\\ &= \frac{\lambda y_k + W_{\circ}W_k - W_k\sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2}}{\lambda A}\\ &= \frac{1}{A}\left(y_k + W_k\left(\frac{W_{\circ} - \sqrt{\lambda h^2 + W_{\circ}^2}}{\lambda}\right)\right)\\ &= \frac{1}{A}(y_k - FW_k).\end{aligned}$$

بنابراین با اتحادهای بالا به دست می آوریم:

$$F_{y^k} = \frac{1}{A}(y_k - FW_k) = \frac{\xi_k}{\widetilde{h} + \widetilde{W}_{\circ}},$$

$$F^2\delta^i_k - FF_{y^k}y^i = \widetilde{h}^2\delta^i_k - \xi_k\xi^i - \frac{1}{\widetilde{h} + \widetilde{W}_{\circ}}\xi_k(\widetilde{h}^2\delta^i_p - \xi_p\xi^i)W^p,$$

که $y_k := h_{ik}y^i$. با استفاده از ۱۳.۵ به دست می آوریم:

لم ۱.۲.۵. [۱۱]. فرض کنید $F=\alpha+\beta$ یک متر راندرز بیان شده با ۱۱.۳ باشد و دارای S -انحنای ایزوتروپیک $S=(n+1)cF$ است. در این صورت برای هر تابع اسکالری $\mu=\mu(x)$ روی M داریم:

$$R^i_k-(\frac{3c_{x^m}y^m}{F}+\mu-c^2-2c_{x^m}W^m)\{F^2\delta^i_k-FF_{y^k}y^i\}$$
$$=\widetilde{R}^i_k-\mu(\widetilde{h}^2\delta^i_k-\xi_k\xi^i)-\frac{\xi_k}{\widetilde{h}+\widetilde{W}_0}\{\widetilde{R}^i_p-\mu(\widetilde{h}^2\delta^i_p-\xi_p\xi^i)\}W^p, \qquad (۱۴.۵)$$

که در آن

$$\widetilde{R}^i_k:=\overline{R}^i_{p\ kq}\xi^p\xi^q$$

و $\overline{R}^i_{p\ kq}$ ضرایب تانسور انحنای ریمان h را نشان می دهند.

اثبات. با توجه به ۱۳.۵ ، $\xi^i:=y^i-F(x,y)W^i$ و $\widetilde{R}^i_k:=\overline{R}^i_{p\ kq}\xi^p\xi^q$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
& R^i_k-(\frac{3c_{x^m}y^m}{F}+\mu-c^2-2c_{x^m}W^m)\{F^2\delta^i_k-FF_{y^k}y^i\}\\
= & \overline{R}^i_{p\ kq}(y^p-FW^p)(y^q-FW^q)\\
- & F_{y^k}\overline{R}^i_{p\ mq}(y^p-FW^p)(y^q-FW^q)W^m\\
+ & (\frac{3c_{x^m}y^m}{F}-c^2-2c_{x^m}W^m)\{F^2\delta^i_k-FF_{y^k}y^i\}\\
- & (\frac{3c_{x^m}y^m}{F}+\mu-c^2-2c_{x^m}W^m)\{F^2\delta^i_k-FF_{y^k}y^i\}\\
= & \overline{R}^i_{p\ kq}\xi^p\xi^q-F_{y^k}\overline{R}^i_{p\ mq}\xi^p\xi^qW^m-\mu(F^2\delta^i_k-FF_{y^k}y^i)\\
= & \widetilde{R}^i_k-F_{y^k}\widetilde{R}^i_mW^m-\mu(F^2\delta^i_k-FF_{y^k}y^i)\\
= & \widetilde{R}^i_k-\frac{\xi_k}{\widetilde{h}+\widetilde{W}_0}W^m\widetilde{R}^i_m-\mu(\widetilde{h}^2\delta^i_k-\xi_k\xi^i-\frac{1}{\widetilde{h}+\widetilde{W}_0}\xi_k(\widetilde{h}^2\delta^i_p-\xi_p\xi^i)W^p)\\
= & \widetilde{R}^i_k-\mu(\widetilde{h}^2\delta^i_k-\xi_k\xi^i)-\frac{\xi_k}{\widetilde{h}+\widetilde{W}_0}\{\widetilde{R}^i_p-\mu(\widetilde{h}^2\delta^i_p-\xi_p\xi^i)\}W^p.
\end{aligned}$$

■

قضیه زیر به کمک ۱۴.۵ به آسانی ثابت می شود:

قضیه ۲.۲.۵. [۱۱] فرض کنید F یک متر راندرز روی منیفلد n-بعدی M تعریف شده با ۱۱.۳ باشد. فرض کنید $S = (n+1)cF$. در این صورت F از انحنای پرچمی اسکالر است اگر و فقط اگر h از انحنای برشی $\overline{K} = \mu$ باشد که $\mu = \mu(x)$ یک تابع اسکالری(=ثابت اگر $n \geq 3$) است. در این حالت، انحنای پرچمی F با فرمول

$$K = \frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma$$

داده می شود که $\sigma := \mu - c^2 - 2c_{x^m}W^m$.

اثبات . فرض می کنیم F از انحنای اسکالر است، آنگاه با استفاده از قضیه ۴۲.۲.۲ برای انحنای پرچمی داریم:

$$K = \frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma,$$

که $\sigma = \sigma(x)$ تابعی اسکالری روی M است. یعنی داریم:

$$R^i_k = (\frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma)\{F^2\delta^i_k - FF_{y^k}y^i\}.$$

فرض می کنیم:

$$\mu := \sigma + c^2 + 2c_{x^m}W^m.$$

کافی است نشان دهیم h انحنای برشی $\overline{K} = \mu$ دارد. از ۱۴.۵ نتیجه می شود که:

$$\widetilde{R}^i_k - \mu(\widetilde{h}^2\delta^i_k - \xi_k\xi^i) - \frac{1}{\widetilde{h} + \widetilde{W}_0}\xi_k\{\widetilde{R}^i_p - \mu(\widetilde{h}^2\delta^i_p - \xi_p\xi^i)\}W^p = 0$$

و به وضوح، داریم:

$$\widetilde{R}^i_k = \mu(\widetilde{h}^2\delta^i_k - \xi_k\xi^i). \qquad (۱۵.۵)$$

بنابراین h انحنای برشی $\overline{K} = \mu$ دارد. با لم شور، در بعد $n \geq 3$ ، μ مقداری ثابت است.

برعکس، اگر h انحنای برشی $\overline{K} = \mu$ داشته باشد، آنگاه ۱۵.۵ برقرار است. با ۱۴.۵ دوباره به دست می آوریم:

$$R^i_k = (\frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma)\{F^2\delta^i_k - FF_{y^k}y^i\}, \tag{16.5}$$

که $\sigma = \mu - c^2 - 2c_{x^m}W^m$. بنابراین F انحنای اسکالر دارد. ■

در بعد $n \geq 3$ اگر $\overline{K} = \mu(x)$ ؛ آنگاه $\mu(x) = \mu$ یک تابع ثابت است و همان طور که می دانیم، هر متر ریمان h با انحنای برشی ثابت μ ایزومتر موضعی به متر α_μ زیر، روی $\mathbb{R}^n$ می باشد:

$$\alpha_\mu = \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)}}{1 + \mu|x|^2}, \tag{17.5}$$

که $y \in T_xB^n \cong \mathbb{R}^n$ و $|.|$ نرم اقلیدسی استاندارد را نمایش می دهد. دامنه α_μ گوی باز $B^n(r_\mu) \subset \mathbb{R}^n$ می باشد که اگر $\mu < 0$ آنگاه $r_\mu := \frac{1}{\sqrt{-\mu}}$ ، و اگر $\mu \geq 0$ آنگاه $r_\mu := +\infty$.

فرض کنید $S = (n+1)c(x)F$ ، یعنی، W در معادله زیر صدق می کند:

$$W_{i|j} + W_{j|i} = -4ch_{ij}. \tag{18.5}$$

(برای توضیحات بیشتر به مرجع [۲۵] مراجعه شود.)

می شود ۱۸.۵ را حل کرد و به دست آورد:

$$c = \frac{\delta + <a,x>}{\sqrt{1 + \mu|x|^2}}, \tag{19.5}$$

$$W = -2\{(\delta\sqrt{1+\mu|x|^2} + <a,x>)x - \frac{|x|^2 a}{\sqrt{1+\mu|x|^2} + 1}\} + xQ + b + \mu <b,x> x, \tag{20.5}$$

که δ ثابت، $Q = (q^i_j)$ ماتریسی پاد-متقارن و $a, b \in \mathbb{R}^n$ بردارهایی ثابت می باشند. این مطلب را در قضیه زیر می توان دید.

قضیه ۳.۲.۵. [۲۴] فرض کنید $h = \alpha_\mu$ متر ریمان در ۱۷.۵ باشد، یعنی،

$$h = \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - <x, y>^2)}}{1 + \mu|x|^2}, \tag{۲۱.۵}$$

و $W = (W^i)$ یک میدان برداری روی گوی باز $B^n(r_\mu) \subset \mathbb{R}^n$ باشد. فرض کنید $F = \alpha + \beta$ متر راندرز روی $B^n(r_\mu) \subset \mathbb{R}^n$ باشد که در جملات h و W با ۱۱.۳ بیان شده است.

فرض کنید $n \geq 3$. آنگاه F ، S -انحنای ایزوتروپیک دارد یعنی برای تابع اسکالری $c = c(x)$ ، داریم $S = (n+1)cF$ اگر و فقط اگر

$$c = \frac{\delta + <a, x>}{\sqrt{1 + \mu|x|^2}}, \tag{۲۲.۵}$$

که δ ثابت و $a \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ثابت است و $W = (W^i)$ از ۱۸.۵ داده می شود با:

$$W = -2\{(\delta\sqrt{1 + \mu|x|^2} + <a, x>)x - \frac{|x|^2 a}{\sqrt{1 + \mu|x|^2} + 1}\} + xQ + b + \mu <b, x> x, \tag{۲۳.۵}$$

که $Q = (q^i_j)$ ماتریسی پاد متقارن و $b = (b^i) \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ثابت می باشد.

اکنون قضیه طبقه بندی زیر، که قضیه اصلی این پایان نامه می باشد، را به دست می آوریم:

قضیه ۴.۲.۵ (طبقه بندی). [۱۱، ۱۰] فرض کنید $F = \alpha + \beta$ یک متر راندرز روی منیفلد M از بعد $n \geq 3$ باشد که توسط متر ریمان h و میدان برداری W به وسیله رابطه ۱۱.۳ تعریف شده است. در این صورت F از انحنای پرچمی اسکالری $K = K(x, y)$ و S -انحنای ایزوتروپیک $S = (n+1)c(x)F$ است اگر و فقط اگر یک دستگاه مختصات موضعی چنان باشد که h ، c و W به ترتیب با ۲۱.۵ ، ۲۲.۵ و ۲۳.۵ تعریف می شوند. در این صورت انحنای پرچمی با

$$K = \frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma \tag{۲۴.۵}$$

داده می شود که $\sigma = \mu - c^2 - 2c_{x^m}W^m$.

اثبات. با توجه به فرض، بعد M از ۳ کمتر نیست. ابتدا فرض می کنیم $F=\alpha+\beta$ از S -انحنای ایزوتروپیک و انحنای پرچمی اسکالر است. به کمک قضیه ۲.۲.۵ انحنای پرچمی F با ۲۴.۵ داده می شود و h انحنای برشی ثابت $\overline{K}=\mu$ دارد. در هر نقطه، یک دستگاه مختصات موضعی وجود دارد که h با ۲۱.۵ داده می شود. طبق قضیه ۳.۲.۵ ، اگر $S=(n+1)c(x)F$ ؛ آنگاه c و W به ترتیب با ۲۲.۵ و ۲۳.۵ در همان دستگاه مختصات موضعی داده می شوند.

برعکس، فرض کنید یک دستگاه مختصات موضعی وجود دارد که h ، c و W به ترتیب با ۲۱.۵ ، ۲۲.۵ و ۲۳.۵ داده می شوند. آنگاه طبق قضیه ۳.۲.۵ ، داریم $S=(n+1)c(x)F$. چون h انحنای برشی ثابت $\overline{K}=\mu$ دارد، با استفاده از قضیه ۲.۲.۵ ، F از انحنای پرچمی اسکالر داده شده در ۲۴.۵ است. ■

مثال ۵.۲.۵. در ۲۱.۵ تا ۲۳.۵ فرض می کنیم $\mu=0$ ، $\delta=0$ ، $Q=0$ و $b=0$. به دست می آوریم:

$$h=|y|,\qquad c=<a,x>,\qquad W=-2<a,x>x+|x|^2a.$$

متر راندرز $F=\alpha+\beta$ داده می شود با:

$$\begin{aligned}F&=\frac{\sqrt{(1-|a|^2|x|^4)|y|^2+(|x|^2<a,y>-2<a,x><x,y>)^2}}{1-|a|^2|x|^4}\\&-\frac{|x|^2<a,y>-2<a,x><x,y>}{1-|a|^2|x|^4}.\end{aligned}$$

F در ۱۱.۳ با روابط زیر صدق می کند:

$$W_0:=W_iy^i=|x|^2<a,y>-2<a,x><x,y>,$$

$$\lambda:=1-W_iW^i=1-|a|^2|x|^4,\qquad h^2=|y|^2.$$

پس با توجه به قضیه قبل متر راندرز F تعریف شده بالا از S -انحنای ایزوتروپیک و انحنای پرچمی اسکالر است، یعنی،

$$S=(n+1)<a,x>F,\qquad K=\frac{3<a,y>}{F}+3<a,x>^2-2|a|^2|x|^2.$$

۳.۵ مسائل پیشنهادی برای تحقیقات آتی

در این پایان نامه به طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر پرداختیم. در نهایت، دو مساله باز زیر برای تحقیقات آتی مهم و جالب می باشند:

۱- به طبقه بندی (α, β) -متریک ها با انحنای پرچمی اسکالر بپردازیم که تعمیمی از مترهای راندرز با انحنای پرچمی اسکالر می باشند.

۲- S -انحنای مترهای راندرز را محاسبه کنیم.

مراجع

[1] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Volume 200 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. 5, 6, 8

[2] D. Bao and C. Robles. On Randers spaces of constant flag curvature. *Rep. Math. Phys.*, 51(1):9–42, 2003. 43

[3] D. Bao and C. Robles. Ricci and flag curvatures in Finsler geometry. In A*sampler of Riemann-Finsler geometry*, Volume 50 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ*. pages 197–259. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004. 31

[4] L. Berwald. Ueber Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkr*ü*mmung allgemeiner affiner R*ä*ume und Finslersche Raume skalarer Kr*ü*mmung, *Ann. Math.*, 48(1947), 755-781. 25

[5] L. Berwald. Untersuchung der Kr*ü*mmung allgemeiner metrischer R*ä*ume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Z.*, 25(1926), 40-73. 21

[6] L. Berwald. Parallel*ü*bertragung in allgemeinen Raumen,. *Atti Congr. Intern. Mat. Bologna.*, 4(1928), 263-270. 18, 21

[7] L. Berwald. *Ü*ber die n-dimensionalen Geometrien konstanter Kr*ü*mmung, in denen die Geraden die kurzesten sind,. *Math. Z*, 30(1929), 449-469. 24

[8] X. Chen, X. Mo, and Z. Shen. On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature. *J. London Math. Soc. (2)*, 68(3):762–780, 2003. 2, 28, 44

[9] X. Chen and Z. Shen. Randers metrics with special curvature properties. *Osaka J. Math.*, 40(1):87–101, 2003. 37

[10] X. Cheng and Z. Shen. Classification of Randers metrics of scalar flag curvature. *Acta math.Acad. Paedagogicae.*, 24(2008) 51-63. 68

[11] X. Cheng and Z. Shen. Randers metrics of scalar flag curvature. preprint, 2005; revised version 2006. 40, 65, 66, 68

[12] S.-S.Chern , and Z. Shen. *Riemann-finsler geometry*. Volume 6 of *Nanka itracts in mathematics.* World Scientific publishing, 2005. 5, 19, 24, 25, 33, 34, 35, 40, 41, 42

[13] G. Hamel. *Über die Geometrien in denen die Geraden die Kurzesten sind. *Math. Ann.*, 57(1903), 231-264. 19

[14] John M. Lee. *Riemannian manifolds: An Introduction to curvature*. Volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. 24

[15] Peter W. Michor. *Topics in Differential Geometry*. Volume 93 of *Graduate studies in Mathematics*. American mathematical Society, Providence, 2008. 9

[16] X. Mo and Z. Shen. On negatively curved Finsler manifolds of scalar curvature. *Canad. Math. Bull.*, 48(1):112–120, 2005. 2

[17] A. Rapcsák. *Ü*ber die bahntreuen Abbildungen metrisher R*ä*ume. *Publ. Math. Debrecen.*, 8(1961), 285-290. 18, 21

[18] Z. Shen. Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry. *Adv. Math.*, 128(2):306–328, 1997. 26

[19] Z. Shen. *Differential geometry of spray and Finsler spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001. 37, 46

[20] Z. Shen. *Lectures on Finsler geometry*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001. 16, 18, 25, 26

[21] Z. Shen. Finsler metrics with K = 0 and S = 0. *Canad. J. Math.*, 55(1):112–132, 2003. 2, 29

[22] Z. Shen. Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature. *Math. Ann.*, 325(1):19–30, 2003. 43

[23] Z. Shen. Landsberg curvature, S-curvature and Riemann curvature. In A*sampler of Riemann-Finsler geometry*, volume 50 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ*. pages 303–355. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004. 18, 20, 27, 37

[24] Z. Shen and H. Xing. On Randers metrics with isotropic S-curvature. *Acta Mathematica Sinica.*, 24(5):789–796, 2008. 68

[25] H. Xing. The geometric meaning of Randers metrics with isotropic S-curvature. *Adv. Math. (China).*, 34(6):717–730, 2005. 67

فهرست الفبایی

نمادها

مجموعه میدان های برداری روی منیفلد M . . . . $\chi(M)$
ضرایب التصاق . . . . N^i_j
علایم کریستوفل التصاق . . . . Γ^i_{jk}
مشتق کوواریانت افقی . . . . $f_{|k}$
مشتق کوواریانت عمودی . . . . $f_{.k}$
ضرایب اسپری . . . . G^i
انحنای ریمان . . . . R
انحنای پرچمی . . . . $K(P,y)$
انحنای ریچی . . . . Ric
تانسور اساسی . . . . $\mathcal{G}$
تانسور کارتان . . . . $\mathcal{C}$
تاب . . . . τ
S-انحنا . . . . S

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

S-انحنا	S-curvature
S-انحنای ایزوتروپیک	isotropic S-curvature
S-انحنای ثابت	constant S-curvature
اسپری	spray
التصاق چرن	Chern connection
انحنای برشی	sectional curvature
انحنای پرچمی	flag curvature
انحنای (پرچمی) اسکالر	scalar (flag) curvature
انحنای (پرچمی) ایزوتروپیک	isotropic (flag) curvature
انحنای (پرچمی) ثابت	constant (flag) curvature
انحنای ریچی	Ricci curvature
انحنای ریمان	Riemann curvature
تاب	distortion
تانسور اساسی	fundamental tensor
تانسور کارتان	Cartan tensor
تخت تصویری	projectively flat
خم انتگرال	integral curve
ژئودزیک	geodesic
ضرایب اسپری	spray coefficients
ضرایب التصاق	connection coefficient
ضرایب ژئودزیک	geodesic coefficient
ضرایب کریستوفل	Christoffel coefficient
عامل تصویر	projective factor
علایم کریستوفل	Christoffel symbols
فرم حجمی	volume form
فرم حجمی بوسمان-هاسدورف	Busemann-Hausdorff volume form
قضیه اولر	Euler's Theorem
قضیه بلترامی	Beltrami's Theorem
قضیه چرن	Chern's Theorem
قضیه راپسک	Rapcsák's Theorem
قضیه هامل	Hamel's Theorem
کلاف پول بک	pull back bundle

لم شور	Schur’s lemma
لیفت طبیعی	canonical lift
متر اقلیدسی استاندارد	standard Euclidean metric
متر راندرز	Randers metric
متر ریمانی	Riemannian metric
متر فینسلر	Finsler metric
متر کلاین	Klein metric
مدل کروی تصویری	projective spherical model
مساله ناوبری	navigation problem
مشتق کوواریانت	covariant derivative
مشتق کوواریانت افقی	horizontal covariant derivative
مشتق کوواریانت عمودی	vertical covariant derivative
منیفلد فینسلری	Finsler manifold
موضعا تخت تصویری	locally projectively flat
موضعا مینکوفسکی	locally Minkowskian
نرم مینکوفسکی	Minkowski norm
هم ارز تصویری	projectively equivalent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Beltrami's Theorem . . . . قضیه بلترامی
Busemann-Hausdorff volume form . . . . فرم حجمی بوسمان-هاسدورف
canonical lift . . . . لیفت طبیعی
Cartan tensor . . . . تانسور کارتان
Chern connection . . . . التصاق چرن
Chern's Theorem . . . . قضیه چرن
Christoffel coefficient . . . . ضرایب کریستوفل
Christoffel symbols . . . . علایم کریستوفل
connection coefficient . . . . ضرایب التصاق
constant (flag) curvature . . . . انحنای (پرچمی) ثابت
constant S-curvature . . . . S -انحنای ثابت
covariant derivative . . . . مشتق کوواریانت
distortion . . . . تاب
Euler's Theorem . . . . قضیه اولر
Finsler manifold . . . . منیفلد فینسلری
Finsler metric . . . . متر فینسلر
flag curvature . . . . انحنای پرچمی
fundamental tensor . . . . تانسور اساسی
geodesic . . . . ژئودزیک
geodesic coefficient . . . . ضرایب ژئودزیک
Hamel's Theorem . . . . قضیه هامل
horizontal covariant derivative . . . . مشتق کوواریانت افقی
integral curve . . . . خم انتگرال
isotropic S-curvature . . . . S -انحنای ایزوتروپیک
isotropic (flag) curvature . . . . انحنای (پرچمی) ایزوتروپیک
Klein metric . . . . متر کلاین
locally Minkowskian . . . . موضعا مینکوفسکی
locally projectively flat . . . . موضعا تخت تصویری
Minkowski norm . . . . نرم مینکوفسکی
navigation problem . . . . مساله ناوبری
projective factor . . . . عامل تصویر
projectively equivalent . . . . هم ارز تصویری

projectively flat	تخت تصویری
projective spherical model	مدل کروی تصویری
pull back bundle	کلاف پول بک
Randers metric	متر راندرز
Rapcsák's Theorem	قضیه راپسک
Ricci curvature	انحنای ریچی
Riemann curvature	انحنای ریمان
Riemannian metric	متر ریمانی
scalar (flag) curvature	انحنای (پرچمی) اسکالر
Schur's lemma	لم شور
S-curvature	S -انحنا
sectional curvature	انحنای برشی
spray	اسپری
spray coefficients	ضرایب اسپری
standard Euclidean metric	متر اقلیدسی استاندارد
vertical covariant derivative	مشتق کوواریانت عمودی
volume form	فرم حجمی

Abstract

In this thesis in the first chapter we give the basic concepts of Finsler geometry. Then, we consider Randers metrics as a special case of Finsler metrics, and study some geometrical properties of these metrics.

Projectively flat Randers metrics with isotropic S-curvature are considered and the classification theorem of this type of metrics is presented.

Finally, we give the classification theorem of Randers metrics of scalar flag curvature with isotropic S-curvature.

Keywords: *Finsler metric, Randers metric, projectively flat Finsler metric, flag curvature, S-curvature.*

Shahrood University of Technology

Shahrood University of Technology

Faculty of Methematics

Department of pure Mathematics

M.Sc. Thesis

Classification of Randers metrics of scalar flag curvature

By:

Akram Ashyani

Supervisor:

Dr. Hamid-reza Salimi-moghaddam

Advisor:

Mr. S. Reza Musawi

July 2011