بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش احتمال

رساله دکتری

قضایای حدی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

نگارنده: سید محمد حسینی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

شهریور ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای سید محمد حسینی دانشجوی دکتری رشته آمار به شماره دانشجویی ۹۲۱۵۶۱۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۸/۶/۱۳ از رساله **نظری** ■ / **عملی** ☐ خود با عنوان : **قضایای حدی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی** دفاع و با اخذ نمره ...۱۹/۶۷... به درجه : ...عالی... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☒	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ -- ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر احمد نزاکتی	اساتید راهنما	دانشیار	
۲	دکتر حمید رضا نیلی ثانی	داور خارجی	دانشیار	
۳	دکتر محمد آرشی	داور داخلی	دانشیار	
۴	دکتر حسین باغیشنی	داور داخلی	استادیار	
۵	دکتر مهرداد عزنوی	نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای سید محمد حسینی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

دانشکده ریاضی

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم

که راه را به من نشان داد و

تقدیم به مادر عزیزتر از جانم

که چگونه رفتن را به من آموخت.

سپاس‌گزاری

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، آقای دکتر **احمد نزاکتی** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش، حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از داوران گرامی جناب آقای دکتر حمیدرضا نیلی ثانی، جناب آقای دکتر محمد آرشی و جناب آقای دکتر حسین باغیشنی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل کردند صمیمانه کمال تشکر و قدردانی را دارم. از کلیه اساتید گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود نهایت سپاس را دارم.

همچنین از دوست عزیزم آقای دکتر علی شهسواری که تا پایان راه خالصانه در کنار من بودند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام و تمام دوستان دوران تحصیلم که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

سید محمد حسینی
شهریور ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **سید محمد حسینی** دانشجوی دکتری رشته **آمار** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **قضایای حدی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی** ، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید محمد حسینی

شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

محققان زیادی به بررسی قضایای حدی برای فرآیند خطی پرداخته‌اند، ولی اکثر نتایج برای فرآیند خطی با ضرایب ثابت بیان شده‌اند. فرآیند خطی با ضرایب تصادفی حالت کلی‌تری است و فرآیندهای خطی با ضرایب ثابت را نیز پوشش می‌دهد. همچنین در عمل و در طبیعت بیشتر اوقات با شرایطی سر و کار داریم که نمی‌توان فرض استقلال را برای متغیرهای تصادفی در نظر گرفت. از این رو، بر آن شدیم به بررسی قضایای حدی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که از متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته (END) تشکیل شده‌اند، بپردازیم.

هدف در این رساله مطالعه قانون قوی اعداد بزرگ، مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگموند و همگرایی گشتاوری کامل برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که از متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته (END) تشکیل شده‌اند، است. نتایج این رساله توسعه برخی از نتایجی است که تا کنون بدست آمده‌اند.

کلمات کلیدی: قانون قوی اعداد بزرگ، مرتبه همگرایی، قانون قوی مارسینکویچ-زیگموند، همگرایی گشتاوری کامل، متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته، فرآیند خطی، ضرایب تصادفی.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. Hosseini S. H.، Nezakati A. (۲۰۱۸) Convergence rates in the law of large numbers for END linear processes with random coefficients، Communications in Statistics – Theory and Methods، doi: ۱۰.۱۰۸۰/۰۳۶۱۰۹۲۶.۲۰۱۸.۱۵۳۰۷۹۰ .

۲. Hosseini S. H.، Nezakati A. (۲۰۱۹) Complete Moment Convergence for the Dependent Linear Processes with Random Coefficients، Acta Mathematica Sinice، English series، doi: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۱۱۴-۰۱۹-۸۲۰۵-z.

۳. Hosseini S. H.، Nezakati A. (۲۰۱۹) Some general strong laws for dependent linear processes with random coefficients، Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas، Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas، Under Review.

۴. Hosseini S. H.، Nezakati A. (۲۰۱۸) THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR LINEAR PROCESS WITH RANDOM COEFFICIENTS، ۴۹th Annual Iranian Mathematics Conference.

۵. حسینی س. م.، نزاکتی ا. (۲۰۱۸) قضایای حدی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، چهاردهمین کنفرانس آمار ایران، ص ۱۸۷، شاهرود.

۶. نزاکتی ا.، حسینی س. م. (۲۰۱۶) قضایای حدی برای فرآیند خطی، سیزدهمین کنفرانس آمار ایران، ص ۸۹۳، کرمان.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم

۱.۱ مقدمه

بسیاری از محققان قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی وابسته و فرآیند خطی را بررسی کردند. به‌منظور آشنایی بیشتر در این زمینه به معرفی برخی از تعاریف و مفاهیم پایه می‌پردازیم. در این فصل به معرفی انواع وابستگی، فرآیند خطی با ضرایب ثابت و فرآیند خطی با ضرایب تصادفی که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز داریم، می‌پردازیم.

۲.۱ متغیرهای تصادفی تحت تسلط

در قضایای احتمالی، محققان علاقه‌مند به بررسی قضیه تحت شرط‌های ضعیف‌تر هستند. با توجه به اینکه شرط هم توزیع بودن شرط قوی برای متغیرهای تصادفی است، علاقه‌مندیم شرط هم توزیع بودن را با شرطی ضعیف‌تر جایگزین کنیم. بدین منظور، در ادامه تعریف متغیرهای تصادفی تحت تسلط [۱] را بیان می‌کنیم. متغیرهای تصادفی تحت تسلط حالت کلی‌تری از متغیرهای تصادفی هم توزیع است، یعنی متغیرهای تصادفی هم توزیع، متغیرهای تصادفی تحت تسلط هستند، ولی عکس آن برقرار نیست. مفاهیم متغیرهای تصادفی تحت تسلط از دیرباز وجود داشته است، در ادامه به بیان چند خاصیت از این متغیرهای تصادفی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. ادلر [۲] و روسالسکی [۳] [۱]، دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ را دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی X گوییم، هر گاه به ازای هر $t \geq ۰$ داشته باشیم:

$$\sup_{n\geq ۱} \mathbf{P}\left(|X_n| > t\right) \leq \mathbf{P}\left(X > t\right).$$

لم ۱.۲.۱. ادلر، روسالسکی و تیلور [۴] [۲]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی X باشد، آنگاه به ازای هر $n \geq ۱$ و $a, b > ۰$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}\left[|X_n|^a \mathbf{I}_{\{|X_n|\leq b\}}\right] \leq C\left(\mathbf{E}\left[X^a \mathbf{I}_{\{X\leq b\}}\right] + b^a \mathbf{P}(X > b)\right),$$

و

$$\mathbf{E}\left[|X_n|^a \mathbf{I}_{\{|X_n|> b\}}\right] \leq C\mathbf{E}\left[X^a \mathbf{I}_{\{X> b\}}\right].$$

که در آن C یک عدد ثابت مثبت است. همچنین برای هر $n \geq ۱$، $\mathbf{E}\left[|X_n|^a\right] \leq C\mathbf{E}\left[X^a\right]$.

۳.۱ متغیرهای تصادفی وابسته

همانطور که می‌دانیم پدیده‌هایی که روزمره با آنها سرو کار داریم متأثر از عوامل گوناگونی هستند که در پیرامون ما قرار گرفته‌اند. بر این اساس پذیره استقلال متغیرهای تصادفی که در بسیاری از مفاهیم آماری به‌عنوان پذیره اصلی در نظر گرفته می‌شود، در عمل کاربرد چندانی ندارد. به همین سبب بسیاری از محققان به مطالعه و بررسی رویدادها تحت پذیره وابستگی

[۱] Stochastically dominated

[۲] Adler

[۳] Rosalsky

[۴] Taylor

روی آورده‌اند. بدین منظور در این بخش برخی از انواع متغیرهای تصادفی وابسته را معرفی می‌کنیم.

۱.۳.۱ متغیرهای تصادفی وابسته ربعی منفی

وابستگی ربعی منفی [5] برای دو متغیر تصادفی اولین بار توسط لهمن [6] [۴۰] معرفی گردید، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱. دو متغیر تصادفی X و Y (یا توزیع توأم آنها) را وابسته ربعی منفی (NQD) می‌گوییم، هرگاه برای هر x و y متعلق به اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$\mathbf{P}\left(X<x, Y<y\right) \leq \mathbf{P}\left(X<x\right) \mathbf{P}\left(Y<y\right). \tag{۱.۱}$$

دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دو به دو وابسته ربعی منفی است، هر گاه هر دو متغیر تصادفی از این دنباله دارای وابستگی NQD باشد.

تعریف ۲.۳.۱. اگر حداقل برای یک زوج x و y نامساوی (۱.۱) به‌طور اکید برقرار باشد، این نوع وابستگی را، وابستگی اکید می‌نامیم.

ملاحظه ۱.۳.۱. نامساوی (۱.۱) معادل با هر یک از نامساوی های زیر است.

$$\mathbf{P}\left(X \geq x, Y \geq y\right) \leq \mathbf{P}\left(X \geq x\right) \mathbf{P}\left(Y \geq y\right),$$

$$\mathbf{P}\left(X \geq x, Y \leq y\right) \geq \mathbf{P}\left(X \geq x\right) \mathbf{P}\left(Y \leq y\right),$$

$$\mathbf{P}\left(X \leq x, Y \geq y\right) \geq \mathbf{P}\left(X \leq x\right) \mathbf{P}\left(Y \geq y\right),$$

$$\mathbf{P}\left(X > x, Y > y\right) \leq \mathbf{P}\left(X > x\right) \mathbf{P}\left(Y > y\right).$$

ملاحظه ۲.۳.۱. فرض کنید $F(x,y)$، $F_۱(x)$ و $F_۲(y)$ تابع توزیع توأم و توابع توزیع کناری متغیرهای تصادفی X و Y باشند. اگر X و Y متغیرهای تصادفی NQD باشند، آنگاه داریم:

$$F(x,y) \leq F_۱(x) F_۲(y).$$

ملاحظه ۳.۳.۱. فرض کنید f و g دو تابع نانزولی (ناصعودی) باشند. اگر X و Y متغیرهای تصادفی NQD باشند، آنگاه $f(X)$ و $g(Y)$ نیز متغیرهای تصادفی NQD هستند.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید توزیع توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$x \diagdown y$	-۱	۰	۱
-۱	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$
۰	۰	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$
۱	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	۰

[5] Negative quadrant dependent

[6] Lehmann

الف: X و Y متغیرهای تصادفی NQD هستند.

ب: $X^{۲}$ و $Y^{۲}$ متغیرهای تصادفی NQD نیستند.

ج: $|X|$ و $|Y|$ متغیرهای تصادفی NQD نیستند.

۲.۳.۱ متغیرهای تصادفی وابسته ربعی منفی خطی

متغیرهای تصادفی وابسته ربعی منفی خطی [۷] اولین بار توسط نیومن [۸] [۴۶] معرفی شدند.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{r_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از اعداد ثابت و مثبت باشند، اگر به ازای هر دو زیر مجموعه جدا از هم $A, B \in \mathbb{N}$ ، دو سری $\sum_{i\in A} r_i X_i$ و $\sum_{j\in B} r_j X_j$ وابسته NQD باشند، آنگاه دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ را وابسته ربعی منفی خطی $(LNQD)$ می‌نامیم.

ملاحظه ۴.۳.۱. فرض کنید a و b دو عدد ثابت و حقیقی باشند. اگر $\{X_n, n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی $LNQD$ باشد، آنگاه $\{aX_n + b, n \geq ۱\}$ نیز یک دنباله از متغیرهای تصادفی $LNQD$ است.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید توزیع توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{P}(X_۱ = ۱, X_۲ = ۳, X_۳ = ۱) = \mathbf{P}(X_۱ = ۲, X_۲ = ۳, X_۳ = ۱) = \frac{۱}{۱۱}$$
$$\mathbf{P}(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱) = \mathbf{P}(X_۱ = ۳, X_۲ = ۳, X_۳ = ۱) = \frac{۱}{۱۱}$$
$$\mathbf{P}(X_۱ = ۳, X_۲ = ۳, X_۳ = ۲) = \frac{۷}{۱۱}$$

همچنین تابع احتمال برای بقیه مقادیر برابر با صفر است. دنباله $\{X_۱, X_۲, X_۳\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی $LNQD$ است.

۳.۳.۱ متغیرهای تصادفی وابسته همراستای منفی

متغیرهای تصادفی وابسته همراستا منفی [۹] توسط جاج دو [۱۰] و پروشان [۱۱][۲۸] ارائه شده است.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $\{X_۱, X_۲, \cdots X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی متناهی باشد. اگر

$$\mathbf{P}\left(X_۱ > x_۱, X_۲ > x_۲, \cdots, X_n > x_n\right) \leq \prod_{i=۱}^{n} \mathbf{P}\left(X_i > x_i\right), \qquad (۲.۱)$$

---

[۷] Linearly negative quadrant dependent

[۸] Newman

[۹] Negatively orthant dependent

[۱۰] Joag-Dev

[۱۱] Proschan

و

$$\mathbf{P}\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i \leq x_i\right). \qquad (۳.۱)$$

آنگاه دنباله $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ را وابسته همراستا منفی (NOD) می‌نامیم.
همچنین $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی NOD است، هر گاه هر دنباله متناهی $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ از آن متغیرهای تصادفی NOD باشد.

ملاحظه ۵.۳.۱. برای $n = 2$، نامساوی (۲.۱) و (۳.۱) معادل هستند. اما برای $n \geq 3$ این دو نامساوی معادل نیستند.

ملاحظه ۶.۳.۱. برای هر جفت از متغیرهای تصادفی، وابستگی NOD و وابستگی NQD معادل هم هستند.

ملاحظه ۷.۳.۱. فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NOD و $\{f_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی ناصعودی (نانزولی) باشند. آنگاه $\{f_n(X_n), n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصافی NOD است.

۴.۳.۱ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

رده بعدی از متغیرهای تصادفی وابسته که معرفی می‌کنیم، متغیرهای تصادفی پیوندی منفی [۱۲] است، که توسط جاج دو و پروشان [۲۸] ارائه شده است.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ دنباله‌ای متناهی از متغیرهای تصادفی باشد. اگر به ازای هر دو مجموعه جدا از هم $A, B \subset \{1, 2, \cdots n\}$ و دو تابع صعودی $f(.), g(.)$ داشته باشیم:

$$cov\left(f\left(X_i, i \in A\right), g\left(X_j, j \in B\right)\right) \leq 0.$$

آنگاه دنباله $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ را پیوندی منفی (NA) می‌نامیم.
همچنین $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی NA است، هر گاه هر دنباله متناهی $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ از آن NA باشد.

در ادامه برخی از ویژگی‌های متغیر تصادفی NA که توسط جاج دو و پروشان [۲۸] ارائه شده است را بیان می‌کنیم.

ملاحظه ۸.۳.۱. هر زیرمجموعه دو عضوی یا بیشتر از متغیرهای تصادفی NA، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NA می‌باشد.

---

[۱۲] Negative associated

ملاحظه ۹.۳.۱. هر زیرمجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NA است.

ملاحظه ۱۰.۳.۱. توابع صعودی روی زیرمجموعه‌های جدا از هم، از یک مجموعه متغیرهای تصادفی NA، NA هستند.

ملاحظه ۱۱.۳.۱. اشتراک مجموعه‌های مستقل از هم، از یک مجموعه متغیرهای تصادفی NA، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NA می‌باشد.

ملاحظه ۱۲.۳.۱. توجه کنید که متغیرهای تصادفی NA، متغیرهای تصادفی NOD نیز هستند، اما عکس آن برقرار نیست.

ملاحظه ۱۳.۳.۱. برای هر جفت از متغیرهای تصادفی، وابستگی NA، NOD و NQD معادل هم هستند.

همچنین جاج دو و پروشان [۲۸] ، دو مثال ارائه دادند، که مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی NA، است.

مثال ۳.۳.۱. فرض کنید $\{X_۱, X_۲, \cdots X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دارای توزیع چند جمله‌ای، که فقط دارای یک مشاهده است، می‌باشد. در نتیجه وجود دارد $۱ \leq i \leq n$، به قسمی که $X_i = ۱$ و به ازای هر $۱ \leq j \neq i \leq n$ که $X_j = ۰$، به عبارتی دیگر $\sum_{i=۱}^{n} X_i = ۱$ است. بنابراین کواریانس هر دو زیرمجموعه جدا از هم، منفی می‌باشد. در نتیجه با استفاده از تعریف ۵.۳.۱، $\{X_۱, X_۲, \cdots X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NA است.

مثال ۴.۳.۱. جعبه ای شامل N توپ با رنگ‌های متفاوت را در نظر می‌گیریم. نمونه‌ای شامل n توپ (بدون جایگذاری) از این مجموعه انتخاب کرده و متغیرهای تصادفی $\{X_۱, X_۲, \cdots X_N\}$ را تابع نشانگر وجود یک توپ از رنگ iام در نمونه تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر $X_i = ۱$ است، اگر توپی با رنگ iام در نمونه موجود باشد و در غیر این صورت $X_i = ۰$ می‌باشد. در نتیجه مشابه مثال قبل $\{X_۱, X_۲, \cdots X_N\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NA است.

۵.۳.۱ متغیرهای تصادفی وابسته زبرجمعی منفی

یک رده دیگر از متغیرهای تصادفی وابسته، متغیرهای تصادفی وابسته زبرجمعی منفی [۱۳] می‌باشد. این نوع وابستگی، توسط هو [۱۴] [۲۷] بیان شده، که تعریف آن بر پایه توابع زبرجمعی بنا نهاده شده است. قبل از بیان این نوع وابستگی، ابتدا توابع زبرجمعی که توسط کمپرمن [۱۵] [۳۱] تعریف شده است را بیان می‌کنیم.

[۱۳] Negatively superadditive dependent

[۱۴] Hu

[۱۵] Kemperman

تعریف ۶.۳.۱. تابع $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ زبرجمعی است، اگر برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$، داشته باشیم:

$$\phi(\mathbf{x}\vee\mathbf{y})+\phi(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\geq\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y}),$$

که در آن $\vee$ نماد ماکسیمم مؤلفه‌ای و $\wedge$ نماد مینمم مؤلفه‌ای است. یعنی

$$\mathbf{x}\vee\mathbf{y}=(x_1\vee y_1,x_2\vee y_2,\cdots,x_n\vee y_n),$$

$$\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}=(x_1\wedge y_1,x_2\wedge y_2,\cdots,x_n\wedge y_n).$$

با استفاده از تعریف ۶.۳.۱ بررسی اینکه یک تابع زبرجمعی است یا خیر، کار آسانی نیست. برای بررسی زبر جمعی بودن یک تابع می‌توان از ملاحظه زیر استفاده کرد.

ملاحظه ۱۴.۳.۱. کمپرمن [۳۱]، اگر تابع ϕ دارای مشتق جزیی مرتبه دوم پیوسته باشد، آنگاه زبرجمعی بودن تابع ϕ معادل است با:

$$\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}\geq 0,\qquad 1\leq i\neq j\leq n.$$

با استفاده از تعریف تابع زبرجمعی، متغیرهای تصادفی وابسته زبرجمعی منفی به صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۷.۳.۱. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ دارای وابستگی زبرجمعی منفی (NSD) است، اگر به ازای هر تابع زبر جمعی ϕ داشته باشیم:

$$\mathbf{E}\left(\phi(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right)\leq\mathbf{E}\left(\phi(X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*)\right),$$

که در آن $\{X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل است، به طوری که X_i^* با X_i به ازای هر $1\leq i\leq n$ هم توزیع باشد. همچنین $\{X_n,n\geq 1\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی NSD است، هر گاه هر دنباله متناهی $\{X_1,X_2,\cdots X_n\}$ از آن دارای وابستگی NSD باشد.

ملاحظه ۱۵.۳.۱. برای هر جفت از متغیرهای تصادفی، وابستگی NSD، NOD، NQD و NA معادل هم هستند.

ملاحظه ۱۶.۳.۱. کریستوفیدز [۱۶] و واگلاتو [۱۷] [۱۰]، اگر $\{X_1,X_2,\cdots X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NA باشد، آنگاه این دنباله، دنباله‌ای از متغیرهای تصافی NSD است.

۴.۱ متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته

متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته [۱۸] اولین بار توسط لهمن [۴۰] معرفی شده است. با توجه به اینکه قضایای حدی این رساله برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته

[۱۶] Christofides

[۱۷] Vaggelatou

[۱۸] Extended negatively dependent

است، به بیان نامساوی‌هایی که در فصل‌های آتی به آن نیاز داریم، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ دنباله‌ای متناهی از متغیرهای تصادفی باشد. اگر ثابت مثبت M و مستقل از n وجود داشته باشد، به قسمی که:

$$\mathbf{P}\left(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \cdots, X_n > x_n\right) \leq M \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i > x_i\right),$$

و

$$\mathbf{P}\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\right) \leq M \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i \leq x_i\right).$$

آنگاه دنباله $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ را وابسته منفی تعمیم یافته (END) می‌نامیم.
همچنین $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی END است، هر گاه هر دنباله متناهی $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ از آن وابسته منفی تعمیم یافته باشد.

ملاحظه ۱.۴.۱. متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته برای حالتی که $M = 1$ باشد، متغیرهای تصادفی NOD می‌باشند.

علاوه بر این برای حالت $M = 1$ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی نیز هستند. در نتیجه متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته حالت کلی تری از متغیرهای تصادفی وابسته منفی همراستا، پیوندی منفی و مسقل هستند.

۱.۴.۱ نامساوی‌ها

در این قسمت به بیان چند لم و نامساوی از متغیرهای تصادفی END که در این رساله نیاز داریم، می‌پردازیم.

لم ۱.۴.۱. شن [۱۹] ژانگ [۲۰] و وانگ [۲۱] [۶۲]، فرض کنید $1 \leq p \leq 2$ و $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با ثابت مثبت M و میانگین صفر باشد، همچنین $\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$.
آنگاه ثابت مثبت $C(M,p)$ وجود دارد که وابسته به M و p است، به طوری که:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p \leq C(M,p) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}|X_i|^p.$$

لم ۲.۴.۱. دینک [۲۲] و همکاران [۱۶]، فرض کنید $1 \leq p \leq 2$ و $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با ثابت مثبت M و میانگین صفر باشد، همچنین $\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$.
آنگاه وجود دارد ثابت مثبت $C(M,p)$ و وابسته به M و p به قسمی که:

$$\mathbf{E} \max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|^p \leq C(M;p)(\log n)^p \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left|X_i\right|^p.$$

[۱۹] Shen

[۲۰] Zhang

[۲۱] Wang

[۲۲] Ding

ملاحظه ۱.۴.۲. لیو [23] [۴۲]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END و $\{f_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی ناصعودی (نانزولی) باشند. آنگاه $\{f_n(X_n), n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی END است.

اخیراً قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی END مورد توجه نویسندگان بسیاری قرار گرفته‌اند. برای مثال به [۵۸، ۶۷، ۷۰، ۷۵، ۷۸] مراجعه کنید.

۱.۵ فرآیند خطی با ضرایب ثابت

در ابتدا مک لیش [24] [۴۸، ۴۹، ۵۰] به بررسی همگرایی مجانبی برای سری‌های زمانی پرداخت که در آن سری‌های زمانی از فرآیند خطی تشکیل شده بودند و سپس قضایای حدی را برای متغیرهای تصادفی وابسته با شرایط مختلف بررسی کرد. فیلیپس [25] و سولو [26] [۵۵] به بررسی همگرایی مجانبی برای حالت‌های مختلف فرآیند خطی پرداختند. سپس ساودره [27] و همکاران [۶۰] به بررسی سری‌های زمانی که از فرآیندهای خطی با ضرایب تصادفی تشکیل شدند پرداختند، و آنها را با سری‌های زمانی که از فرآیند خطی با ضرایب ثابت تشکیل شدند مقایسه کردند. کو [28] [۳۵] به بررسی همگرایی مجانبی و قضایای حدی برای فرآیند تصادفی در فضای هیلبرت پرداخته است. وانگ [29] و وو [30] [۶۶] نیز قضیه حد مرکزی را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی وابسته مورد بررسی قرار دادند. در این بخش فرآیند خطی را تعریف کرده و ارتباط آن را با سری‌های زمانی بررسی می‌کنیم. سپس قضایای حدی بیان شده را برای فرآیند خطی با ضرایب ثابت ارائه می‌کنیم.

۱.۵.۱ تعریف فرآیند خطی با ضرایب ثابت

مدل‌هایی وجود دارند که برای بررسی سری‌های زمانی با رفتارهای دینامیک معرفی شده‌اند، که از آن جمله می‌توان به مدل‌های سری‌های زمانی میانگین متحرک (MA)، اتو رگرسیو (AR) و اتو رگرسیو – میانگین متحرک $(ARMA)$ اشاره کرد.

---

[23] Liu

[24] McLeish

[25] Philips

[26] solo

[27] Saavedre

[28] Ko

[29] Wang

[30] Wu

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{a_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای از اعداد ثابت باشد، آنگاه:

$$Z_t = \mu + a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_q X_{t-q} = \mu + \sum_{j=0}^{q} a_j X_{t-j}.$$

یک فرآیند میانگین متحرک مرتبه q نامیده می‌شود، و با نماد $MA(q)$ نشان داده می‌شود. دنباله $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ عامل اغتشاش یا خطا است و برای هر $t, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ داریم:

$$\mathbf{E}\left[X_t X_{t-s}\right] = 0.$$

و برای هر $t \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}\left[X_t\right] = 0, \qquad \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = \sigma^2 > 0.$$

در نتیجه اگر $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ یک فرآیند میانگین متحرک مرتبه q باشد، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}\left[Z_t\right] = \mu, \qquad var(Z_t) = (a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_q^2)\sigma^2.$$

همچنین برای کواریانس فرآیند $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= Cov\left(Z_t, Z_{t-1}\right) = Cov\left(Z_t, Z_{t+1}\right) \\
&= \left(a_0 a_1 + \cdots + a_{q-1} a_q\right)\sigma^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-1} a_{k+1} a_k \\
\gamma_j &= Cov\left(Z_t, Z_{t-j}\right) = Cov\left(Z_t, Z_{t+j}\right) \\
&= \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-j} a_{k+j} a_k.
\end{aligned}$$

تابع γ_j را تابع اتوکوواریانس می‌نامند.

ملاحظه ۱.۵.۱. یک صورت تعمیم یافته از فرآیند $MA(q)$ فرآیند $MA(\infty)$ می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_t = \mu + a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}.$$

با توجه به تعریف فرآیند خطی با ضرایب ثابت که در ادامه بیان می‌شود، مشاهده می‌شود که سری زمانی میانگین متحرک $MA(\infty)$، با میانگین صفر حالت خاصی از فرآیند خطی با ضرایب ثابت می‌باشد.

در ادامه نخست فرآیند خطی با ضرایب ثابت را معرفی می‌کنیم. سپس با قرار دادن شرط‌هایی برای ضرایب، به بررسی قضایای حدی این نوع فرآیند می‌پردازیم.

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از اعداد ثابت باشد، آنگاه:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}.$$

یک فرآیند خطی با ضرایب ثابت است.

۲.۵.۱ قضایای حدی

در این قسمت به بیان قضایای حدی که تاکنون برای فرآیند خطی با ضرایب ثابت بررسی شده‌اند، می‌پردازیم. در ابتدا قانون قوی اعداد بزرگ را برای فرآیند خطی با ضرایب ثابت بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۱. فیلیپس و سولو [۵۵]، فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب ثابت است، که در آن $\{\varepsilon, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع می‌باشد. اگر $\mathbf{E}\varepsilon = 0$، $\mathbf{E}\varepsilon^2 < \infty$ و $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 a_j^2 < \infty$ باشد، آنگاه:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

قضیه ۲.۵.۱. فیلیپس و سولو [۵۵]، فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب ثابت است، که در آن $\{\varepsilon, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشد. اگر $\mathbf{E}\varepsilon = 0$، $\mathbf{E}|\varepsilon| < \infty$ و $\sum_{j=1}^{\infty} j\,|a_j| < \infty$ باشد، آنگاه:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

لوئچی [31] و سولیا [32] [۴۵]، قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی وقتی واریانس متناهی یا نامتناهی است، بررسی کردند.

قضیه ۳.۵.۱. لوئچی و سولیا [۴۵]، فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{t-j}\varepsilon_t$ یک فرآیند خطی باشد. $\{\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع متقارن α-پایا [33] با $1 < \alpha < 2$ و برای هر $p < \alpha$، $\mathbf{E}|\varepsilon|^p < \infty$ است، همچنین $1 \leq s < \alpha$، وجود داشته باشد، به طوری که $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^s < \infty$، آنگاه به ازای هر p که $1/p > 1 - 1/s + 1/\alpha$ داریم:

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

برای فرآیند خطی $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j+t}\varepsilon_t$، اگر $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$، آنگاه $\{X_t, t > 0\}$ دارای حافظه کوتاه یا وابستگی کوتاه [34] است. اگر $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| = \infty$، آنگاه $\{X_t, t > 0\}$ دارای حافظه طولانی یا وابستگی طولانی [35] است (برای مطالعه بیشتر به فصل ۳ در گریاتیس [36] و همکاران [۲۲] مراجعه کنید). لی [37] و همکاران [۴۱]، حالت خاصی از مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با وابستگی کوتاه بررسی کردند.

---

[31] Louhichi

[32] Soulier

[33] α-stable

[34] short-range dependent

[35] long-range dependent

[36] Giraitis

[37] Li

قضیه ۱.۵.۴. لی و همکاران [۴۱]، فرض کنید $1 \leq p < 2$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j+t}\varepsilon_j$ یک فرآیند خطی با وابستگی کوتاه باشد. همچنین $\{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و $\{\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با $\mathbf{E}|\varepsilon|^{2p} < \infty$ و میانگین صفر باشند. آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > n^{1/p}\epsilon\right) < \infty.$$

کاریکس [38] و راکیسکس [39][۹]، مرتبه همگرایی قانون ضعیف مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی مورد مطالعه قرار دادند.

قضیه ۱.۵.۵. کاریکس و راکیسکس [۹]، فرض کنید $1 < p < 2$ و $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی باشد، همچنین $\{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^p < \infty$ و $\{\varepsilon, \varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با $\mathbf{E}\left[|\varepsilon|^p \log(1+|\varepsilon|)\right] < \infty$ و میانگین صفر باشند. به علاوه فرض کنید برای برخی از $2 < q < p$ به طوری که $W_n(q)/W_n(p) = O(n^{1/q-1/p})$ باشد. آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > W_n(p)\epsilon\right) < \infty,$$

که در آن

$$W_n(t) = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\omega_{ni}|^t\right)^{1/t}, \tag{۱.۴}$$

به طوری که $\omega_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-i}$ باشد.

ژانگ و همکاران [۷۷]، قضیه ۲.۳.۱ را به فرآیند خطی با وابستگی طولانی تعمیم دادند.

قضیه ۱.۵.۶. ژانگ و همکاران [۷۷]، فرض کنید $r > 1$، $1 \leq p < 2$ و $1 < rp < 2$، همچنین $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j+t}\varepsilon_j$ یک فرآیند خطی باشد، $\{\varepsilon, \varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با $\mathbf{E}|\varepsilon|^{rp} < \infty$ و میانگین صفر باشند. به علاوه فرض کنید $\{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^p < \infty$ و برای برخی از $2 < q < rp$، $W_n(q)/W_n(p) = O(n^{1/q-1/p})$. آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > W_n(p)\epsilon\right) < \infty.$$

که در آن $\omega_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+i}$ است و $W_n(q)$ مانند (۱.۴) تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۵.۵ حالت خاصی از قضیه ۱.۵.۶ با $r = 1$ است. در ادامه قضایای حدی را برای فرآیند خطی با ضرایب ثابت $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}$ که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته باشد بررسی می‌کنیم.

---

[38] Characiejus

[39] Račkauskas

قضیه ۷.۵.۱. کو [۳۵] ، فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب ثابت در فضای هیلبرت است، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت [۴۰] (PA) و $\{a_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد ثابت در فضای هیلبرت باشد. اگر $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$، $\mathbf{E}\|\varepsilon_n\| < \infty$ و $\sum_{j=1}^{\infty} j\,\|a_j\| < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

در ادامه قضیه حد مرکزی را برای حالتی از فرآیند خطی با ضرایب ثابت بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۵.۱. وانگ و وو [۶۶]، فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب ثابت که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $LNQD$ باشد. اگر $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$، برای $s > 2$، $\mathbf{E}|\varepsilon_n|^s < \infty$، $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$ و داشته باشیم:

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\varepsilon_1^2 + 2\sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{E}\left(\varepsilon_1 \varepsilon_i\right) < \infty$$

آنگاه قضیه حد مرکزی برای این نوع فرآیند خطی با ضرایب ثابت برقرار است.

۶.۱ فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

فرآیند خطی با ضرایب تصادفی حالت کلی تری از فرآیند خطی با ضرایب ثابت، فرآیند میانگین متحرک مرتبه q $(MA(q))$ و فرآیند میانگین متحرک $MA(\infty)$ می‌باشد. در نتیجه قضایای حدی به دست آمده برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را می‌توان به این فرآیندها تعمیم داد. از این رو علاقه‌مند به دست آوردن قضایای حدی برای این نوع از فرآیند خطی هستیم. بدین منظور در این بخش نخست به معرفی فرآیند خطی با ضرایب تصادفی می‌پردازیم. سپس کاربرد فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را بیان می‌کنیم.

۱.۶.۱ تعریف فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

در این قسمت به تعریف فرآیند خطی با ضرایب تصادفی می‌پردازیم و با استفاده از این تعریف در فصل بعد قضایای حدی را برای حالت‌های مختلف فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشند. در این صورت:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}.$$

یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی است.

[۴۰] Positive associated

۲.۶.۱ کاربرد فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

تحلیل در قلمرو فرکانس روشی است که نوسانات سری زمانی را برحسب رفتار سینوسی در فرکانس‌های مختلف بیان می‌کند. در این بخش تابع چگالی طیفی که در واقع مکمل تابع اتوکوواریانس است را معرفی می‌کنیم. ضرورت روش‌های فرکانس در زمینه‌هایی چون مهندسی برق، ژئوفیزیک و هواشناسی به طور گسترده‌ای احساس می‌شود. فرض کنید یک سری زمانی شامل مؤلفه دوره‌ای با فرکانس معلوم است، در این صورت الگوی طبیعی زیر را داریم:

$$X_t = A\cos(\omega t + \theta) + Z_t. \qquad (۵.۱)$$

در این الگو ω فرکانس تغییرات دوره‌ای، A دامنه تغییرات، θ فاز و Z_t یک سری تصادفی مانا را نشان می‌دهد، که زاویه $(\omega t + \theta)$ بر حسب رادیان اندازه گیری می‌شود. چون ω، برابر است با تعداد رادیان‌ها در واحد زمان، گاهی اوقات فرکانس زاویه‌ای یا به اختصار فرکانس نامیده می‌شود. بعضی‌ها فرکانس را به صورت $f = ۲\pi/\omega$ یعنی تعداد دوره‌ها در واحد زمان در نظر می‌گیرند. این فرکانس اغلب برای تعبیر و تفسیر داده‌ها به کار برده می‌شود و $۲\pi/\omega$ را طول موج می‌نامند. الگوی (۵.۱) بسیار ساده است لیکن در عمل تغییرات سری زمانی ممکن است معلول تغییرات در چندین فرکانس مختلف باشد. به عنوان مثال ارقام فروش ممکن است تغییرات هفته‌ای، ماهانه، سالانه و سایر تغییرات دوره‌ای را شامل شود. در این صورت طبیعی است الگوی قبل را به این صورت تعمیم دهیم:

$$X_t = \sum_{j=۱}^{k} A_j \cos(\omega_j t + \theta_j) + Z_t. \qquad (۶.۱)$$

که در آن A_j دامنه مربوط به فرکانس ω_j است. الگوی (۶.۱) را می‌توان به صورت زیر بنویسیم:

$$X_t = \sum_{j=۱}^{k} (a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t) + Z_t. \qquad (۷.۱)$$

که در آن $a_j = A_j\cos\theta_j$ و $b_j = -A_j\sin\theta_j$. حال اگر در الگوهای (۶.۱) و (۷.۱) تعداد فرکانس‌ها نامتناهی باشند، یعنی وقتی $k \to \infty$ داریم:

$$X_t = \sum_{j=۱}^{\infty} A_j \cos(\omega_j t + \theta_j) + Z_t.$$

همچنین:

$$X_t = \sum_{j=۱}^{\infty} (a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t) + Z_t.$$

در این صورت می‌توان نشان داد که هر فرآیند مانای گسسته‌ای که در فاصله زمانی واحد اندازه گیری می‌شود را می‌توانیم به شکل زیر نمایش دهیم:

$$X_t = \int_{\circ}^{\pi} \cos\omega t \, dV(\omega) + \int_{\circ}^{\pi} \sin\omega t \, dU(\omega). \qquad (۸.۱)$$

که در آن $V(\omega)$ و $U(\omega)$ فرآیندهای نابسته با نموهای متعامدی هستند که به ازای هر ω واقع در فاصله $(\circ,\pi)$ تعریف شده باشند. معادله (۸.۱) را نمایش طیفی فرآیند می‌نامند. در ادامه قضیه وینر و خنیتشین مربوط به فرآیندهای حقیقی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۶.۱. برای هر فرآیند تصادفی مانا با تابع اتوکوواریانس γ_k، تابع افزایشی $F(\omega)$ وجود دارد به طوری که:

$$\gamma_k = \int_\circ^\pi \cos k\omega \, dF(\omega).$$

این معادله را نمایش طیفی تابع اتوکوواریانس و $F(\omega)$ را تابع توزیع طیفی می‌نامند.

تابع توزیع طیفی را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۲.۶.۱. برای هر $\omega \in (\circ,\pi)$، $F(\omega)$ کل واریانس مؤلفه‌های هارمونیک واقع در نمایش طیفی X_t را می‌دهد که دارای فرکانس‌های کوچکتر یا مساوی ω هستند.

برای فرآیند گسسته‌ای که در فواصل زمانی واحد اندازه گیری می‌شود بیشترین فرکانس ممکن π است. بنابراین تمام تغییرات برای فرکانس‌های کمتر از π به وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$F(\pi) = Var(X_t) = \sigma_x^۲.$$

اگر در نمایش طیفی فرآیند $k = \circ$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\gamma_\circ = \sigma_x^۲ = \int_\circ^\pi dF(\omega).$$

بنابراین تابع $F(\omega)$ در فاصله $(\circ,\pi)$ یکنوای افزایشی است. با اندکی دقت در می‌یابیم که رفتار این تابع تقریباً مانند توابع توزیع تجمعی است، با این تفاوت که در اینجا حد بالایی به جای ۱، $\sigma_x^۲$ است. در ادامه شکل نرمال شده تابع توزیع طیفی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۶.۱. شکل نرمال شده تابع توزیع طیفی را با رابطه زیر نشان می‌دهند:

$$F^*(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sigma_x^۲}.$$

یعنی نسبت واریانس حاصل از فرکانس در بازه $(\circ,\omega)$ داده می‌شود. چون $F^*(\pi) = ۱$ و $F^*(\omega)$ یکنوای افزایشی است، لذا $F^*(\omega)$ خواصی مشابه با تابع توزیع تجمعی دارد.

برای یک فرآیند مانای گسسته تصادفی، تابع توزیع طیفی تابعی پیوسته بر بازه $(\circ,\pi)$ است و می‌توان از آن نسبت به ω مشتق بگیریم. در ادامه تابع چگالی طیفی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۶.۱. مشتق تابع توزیع طیفی نسبت به ω را تابع چگالی طیفی می‌نامیم، و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}.$$

اگر تابع چگالی طیفی را داشته باشیم و آن را رسم کنیم سطح زیر منحنی آن برابر واریانس فرآیند خواهد بود.

فرض کنید (A, Ω, P^A) یک فضای احتمال مربوط به مجموعه‌ای از اشیا باشد، به طوری که یک فرآیند تصادفی با توزیع طیفی کاملا پیوسته باشد، برای هر کدام $a \in A$، $\{X_t(a), t \in \mathbb{Z}\}$ یک فرآیند مانا تعیین می‌شود. بنابراین $Q_a(\omega)$ تابع چگالی طیفی می‌باشد، که علاقمند به برآورد پارامترهای زیر هستیم:

$$f(\omega) = \mathbf{E}_A \left[Q_a(\omega) \right], \qquad var_A \left[Q_a(\omega) \right].$$

که در آن تابع $f(\omega)$ به اصطلاح جمعیت طیفی است. برای اطلاعات بیشتر به دیگلی [۴۱] و وسل [۴۲] [۱۵] مراجعه شود.

به منظور برآورد این تابع یک نمونه تصادفی $a = \{a_۱, \cdots, a_r\}$ از مجموعه A می‌گیریم، و برای هر a_i فرآیند $X_t(a_i)$ در زمان‌های $t = ۱, \cdots, T$ رخ می‌دهد. بنابراین ما اطلاعات برای تحلیل سری زمانی زیر را داریم:

$$\{X_t(a_i) : i = ۱, \cdots, r : t = ۱, \cdots, T\}. \tag{۹.۱}$$

که $Q_{a_۱}(\omega), \cdots, Q_{a_r}(\omega)$ را مستقل در نظر می‌گیریم، و دوره نما برای سری زمانی $X_t(a_i)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_{a,T}(\omega) = \frac{۱}{۲\pi T} \left| \sum_{t=۱}^{T} X_t(a) exp(-i\omega t) \right|^۲. \tag{۱۰.۱}$$

فرض کنید برای همه $|\omega| < \pi$، $f(\omega) > ۰$ و در نتیجه فرآیند $Z_a(\omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_a(\omega) = \frac{Q_a(\omega)}{f(\omega)}.$$

بنابراین j امین دوره نما در فرکانس فوریه $\omega_j = \frac{۲\pi j}{T}$، برای $j = -N, \cdots, N$، $N = \left[\frac{T}{۲}\right]$، را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$I_{i,T}(\omega_j) = f(\omega_j) Z_{a_i}(\omega_j) U_{i,j}^{(T)}. \tag{۱۱.۱}$$

که در آن به اختصار Q_{a_i} را با Q_i، و $I_{a_i,T}$ را با $I_{i,T}$، نشان می‌دهیم، و $U_{i,j}^{(T)}$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_{i,j}^{(T)} = \frac{I_{i,T}(\omega_j)}{Q_a(\omega_j)}.$$

فرآیند $Z_{a_i}(\omega)$ تفاوت بین عضوها را نشان می‌دهد، و $U_{i,j}^{(T)}$، باقیمانده مربوط به عضو iام است. بنابراین ما تابع کواریانس را برای هر $\omega, \theta \in [-\pi, \pi]$، به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Psi(\omega, \theta) = \mathbf{E}_A \left[\left(Q_i(\omega) - f(\omega)\right) \left(Q_i(\theta) - f(\theta)\right) \right].$$

[۴۱] Diggle

[۴۲] Wasel

با توجه به این داریم:

$$\Psi(\omega,\omega) = Var_A\left(Q_i(\omega)\right).$$

با توجه به اطلاعات داده شده و رابطه (۹.۱) برای برآورد $Q_i(\omega)$، داریم:

$$\hat{Q}_i(\omega;\lambda) = \frac{1}{T\lambda}\sum_{j=-N}^{N} K\left(\frac{\omega-\omega_j}{\lambda}\right) I_{i,T}(\omega_j). \tag{۱۲.۱}$$

که در آن $K(u)$ تابع هسته متقارن نامنفی حقیقی مقدار است، و λ پهنای باند است.
به همین ترتیب برای برآورد طیف جمعیت $f(\omega)$، داریم:

$$\hat{f}(\omega;h) = \frac{1}{Th}\sum_{j=-N}^{N} K\left(\frac{\omega-\omega_j}{h}\right) \overline{I}_{.,T}(\omega_j). \tag{۱۳.۱}$$

که در آن h پهنای باند است و $\overline{I}_{.,T}(\omega_j)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{I}_{.,T}(\omega_j) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} I_{i,T}(\omega).$$

شرایط سازگاری برای برآورد $\hat{Q}_i(\omega;\lambda)$، توسط پرایستلی [43] [۵۶]، و فرانک [44] و هاردلی [45] [۲۰] بررسی شده است. شرایط سازگاری برای برآورد طیف جمعیت $\hat{f}(\omega;h)$ و برآورد $\hat{Q}_i(\omega;\lambda)$، توسط برکول [46] و دیویس [47] [۸] بررسی شده است.
در ادامه شرایط سازگاری برای برآورد طیف جمعیت وقتی در سری زمانی (۹.۱)، $X_t(a)$ فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد، را بیان می‌کنیم.
فرض کنید در سری زمانی (۹.۱)، $X_t(a)$ فرآیند خطی با ضرایب تصادفی به صورت زیر باشد.

$$X_t(a) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u(a)\varepsilon_{t-u}(a).$$

که در آن $\{\varepsilon_n(a), n\in\mathbb{Z}\}$ و $\{g_n(a), n\in\mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی هستند.
در ادامه چند مثال برای آشنایی بیشتر با ضرایب تصادفی بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۶.۱. فرض کنید برای $n>0$، $g_n(a)=a^n$ و برای $n\le 0$، $g_n(a)=0$ باشد، و a دارای توزیع احتمال بتا باشد به طوری که:

$$h(a) = beta(\alpha_1,\alpha_2) \qquad 0<a<1.$$

مثال ۲.۶.۱. فرض کنید $g_0(a)\sim U[0,1]$ دارای توزیع یکنواخت استاندارد است، برای $n>0$، $g_n(a)\sim U[0,A_{n-1}]$ و همچنین برای $n<0$، $g_n(a)=0$. در نتیجه $\mathbf{E}[g_n(a)] = 2^{-(n+1)}$، بنابراین با احتمال یک داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j|g_j(a)| = \sum_{j=0}^{\infty} jg_j(a) < \infty.$$

---

[43] Priestley

[44] Franke

[45] Härdle

[46] Brockwell

[47] Davis

شرط فوق در بررسی قضایای حدی فرآیند خطی با ضرایب تصادفی کاربرد دارد.
اکنون می‌خواهیم قضایایی برای بررسی برآورد طیف جمعیت تشکیل شده از فرآیند خطی با ضرایب تصادفی بیان کنیم. برای این منظور، شرایط زیر را در نظر می‌گیریم:

i. برای هر $a \in A$، تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{E}\left[\varepsilon_t(a)^{۴}|a\right] = \mu_{۴}(a).$$

که در آن $\{\varepsilon_t(a), n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است، به علاوه $\mathbf{E}_A\left[\mu_{۴}(a)\right] < \infty$، بنابراین:

$$\mu_{۴}(a) < \infty \qquad a.s..$$

ii. فرض کنید برای دنباله ضرایب تصادفی $\{g_t(a), n \in \mathbb{Z}\}$ داشته باشیم:

$$\mathbf{E}_A\left[\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}|g_u(a)||u|^{۱/۲}\right)^{۴}\right] < \infty.$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty}|g_u(a)||u|^{۱/۲} < \infty \qquad a.s..$$

در قضیه ۱۰.۳.۱ برکول و دیویس [۸] ، نشان داده شده است که:

$$I_{a,T}(\omega) = ۲\pi Q_a(\omega) I_{a,T,e}(\omega) + R_{a,T}(\omega).$$

که در آن $I_{a,T,e}(\omega)$ دوره نگار متناظر با فرآیند $\{\varepsilon_t(a), n \in \mathbb{Z}\}$ می‌باشد و داریم:

$$\mathbf{E}_A\left[|R_{a,T}(\omega)|^{۲}|a\right] = \rho(a) O\left(T^{-۱}\right).$$

در اینجا $O\left(T^{-۱}\right)$ مستقل از a می‌باشد.

iii. فرض کنید $E_A\left[\rho(a)\right] < \infty$، بنابراین داریم:

$$\mathbf{E}_A\left[|R_{a,T}(\omega)|^{۲}\right] = O\left(T^{-۱}\right).$$

رابطه فوق به طور یکنواخت در ω برقرار می‌باشد.

iv. فرض کنید دنباله ضرایب تصادفی $\{g_t(a), n \in \mathbb{Z}\}$ از $\mu_{۴}(a)$ مستقل باشد.

v. فرض کنید $\{Q_a(\omega), a \in A, |\omega| \le \pi\}$ با پارامتر لیپشیتز [۴۸] L_a، به طوری که $E_A\left[L_a\right] < \infty$ در شرط لیپشیز با $O(۱)$ صدق کند.

[۴۸] Lipshitz

vi. فرض کنید تابع کرنل هسته نامنفی $K(u)$ با ورودی $[-\kappa,\kappa]$ و به طور یکنواخت لیپشیز داشته باشیم:

$$\int K(u)du = \int u^{۲} K(u)du = ۲\pi.$$

قضیه ۱.۶.۲. فرض کنید شرایط (i)، (ii) (v) و (vi) برقرار باشد و $f(\omega)$ به طور پیوسته در بازه $[-\pi,\pi]$ انتگرال پذیر باشد، اگر $T\to\infty$، $h\to ۰$ و $\left(Th^{۴}\right)^{-۱} = O(۱)$ آنگاه برای $\hat{f}(\omega,h)$ به طور یکنواخت در ω داریم:

$$\mathbf{E}_A\left[\hat{f}(\omega,h)\right] - f(\omega) = \frac{h^{۲}}{۲} f''(\omega) + o(h^{۲}) + O\left(\frac{\log T}{T}\right).$$

قضیه ۱.۶.۳. فرض کنید شرایط (i)، (ii)، (iii) (iv) و (vi) برقرار باشد و $\Psi(\omega,\theta)$ به طور پیوسته در بازه $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ انتگرال پذیر باشد، اگر $T,r\to\infty$، $Th\to ۰$ و $h\to\infty$ آنگاه برای $\hat{f}(\omega,h)$ به طور یکنواخت در ω داریم:

$$\begin{aligned} var_A\left(\hat{f}(\omega,h)\right) =& \frac{\mathbf{E}_A\left[Q_i^{۲}(\omega)\right]\|K\|^{۲}}{Thr} + O\left((Tr)^{-۱}\right) \\ &+ \frac{۱}{r}\left\{var_A\left(Q_i(\omega)\right) + O\left(h^{۲}\right) + O\left((Th)^{-۱}\right)\right\}. \end{aligned}$$

که در آن $\|K\|^{۲}$ برابر است با:

$$\|K\|^{۲} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^{۲}(\theta)d\theta.$$

این دو قضیه و همچنین شبیه سازی مقایسه فرآیند خطی با ضرایب ثابت با فرآیند خطی با ضرایب تصادفی در ساودره و همکاران [۶۰]، بیان شده است.

فصل ۲

همگرایی و مرتبه همگرایی

۱.۲ مقدمه

به خوبی نشان داده شده است، که قضایای حدی نقش مهمی در ریاضی و آمار دارد. جیرولامو کاردانو [۱](۱۵۰۱-۱۵۷۶) ریاضیدان ایتالیایی بدون اثبات ریاضی بر این باور بود که دقت نتایج تجربی در آمار با افزایش تعداد دفعات آزمایش بیشتر می‌شود. این فرضیه بعدها تحت عنوان قانون اعداد بزرگ اثبات شد و مورد توجه قرار گرفت. برای مطالعه بیشتر به مودینو [۲] [۵۲] مراجعه شود. حالت خاصی از این قانون برای متغیرهای برنولی برای نخستین بار توسط برنولی [۳] [۶] اثبات شد، وی این قانون را قضیه طلایی نامید، ولی بعدها با نام قانون اعداد بزرگ مشهور شد. در سال ۱۸۳۵سیمون دنیز پواسون [۴] این قانون را با نام قانون اعداد بزرگ توضیح داد. هم اکنون این قضیه با هر دو نام ذکر شده شناخته می‌شود. برای مطالعه بیشتر به هجیک [۵][۲۵] مراجعه کنید. بعد از برنولی و پواسون ریاضیدانان دیگری مانند مارکف، چبیشف، بورل و کولموگرف برای بهبود این تعریف و اثبات آن تلاش کردند و در

---

[۱] Gerolamo Cardano

[۲] Mlodinow

[۳] Bernoulli

[۴] Siméon Denis Poisson

[۵] Hacking

نهایت الکساندر خینچین [۶] برای هر متغیر تصادفی دلخواه آن را اثبات کرد. این تلاش‌ها منجر به پیدایش دو حالت مختلف از این قانون شد. این دو حالت قانون ضعیف و قانون قوی می‌باشد. قانون ضعیف و قانون قوی اعداد بزرگ دو قانون متفاوت نیستند، بلکه این دو قانون از دو دیدگاه متفاوت موضوع همگرایی احتمال و همگرایی قریب به یقین وقتی تعداد دفعات آزمایش زیاد است، به مقدار میانگین را توضیح می‌دهند. همچنین می‌توان قانون ضعیف را از قانون قوی نتیجه گرفت. بدین منظور در این فصل، به بررسی همگرایی و مرتبه همگرایی فرآیند خطی می‌پردازیم. در بخش اول ابتدا قانون قوی اعداد بزرگ را با شرط هم توزیع بودن متغیرها و گشتاور اول متناهی بیان می‌کنیم، سپس شرط هم توزیع را حذف و از شرط قوی‌تر گشتاور دوم متناهی، استفاده می‌کنیم. در انتها مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگموند را برای فرآیند خطی تشکیل شده از متغیرهای تصادفی END بررسی می‌کنیم.

۲.۲ همگرایی قریب به یقین برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

در این بخش، همگرایی قریب به یقین را وقتی که متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند با شرط گشتاور اول متناهی و وقتی که متغیرها هم توزیع نباشند با شرط گشتاور دوم متناهی، بررسی می‌کنیم. بدین منظور ابتدا چند لم بیان می‌کنیم. در اثبات لم‌ها و قضیه، C یک عدد ثابت مثبت است، که مقدار آن از خطی به خط دیگر ممکن است تغییر کند.

در فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، $\tilde{A}_j$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} A_i.$$

لم ۱.۲.۲. فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد. اگر Y_t را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{A}_j \varepsilon_{t-j}.$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت:

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_t \right) + Y_{t-1} - Y_t.$$

[۶] Alexander Khinchin

برهان. با استفاده از تعریف Y_t می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j} \\
&= A_0 \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j - \sum_{j=1}^{\infty} A_j \right) \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} A_i - \sum_{i=j+1}^{\infty} A_i \right) \varepsilon_{t-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_t - \tilde{A}_0 \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_{j-1} - \tilde{A}_j \right) \varepsilon_{t-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_{j-1} \varepsilon_{t-j} - \left(\tilde{A}_0 \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j \varepsilon_{t-j} \right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_t \right) + Y_{t-1} - Y_t.
\end{aligned}$$

□

لم ۲.۲.۲. اگر قریب به یقین $\sum_{j=0}^{\infty} j\,|A_j| < C$، آنگاه:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| \tilde{A}_j \right| < C. \qquad a.s..$$

برهان. برای اثبات با جایگذاری مقدار $\tilde{A}_j$، داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \left| \tilde{A}_j \right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} |A_i| &= \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| + \sum_{i=2}^{\infty} |A_i| + \sum_{i=3}^{\infty} |A_i| + \cdots \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| + \cdots \\
&\qquad + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| + \cdots \\
&\qquad\qquad + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{0} |A_1| + \sum_{i=0}^{1} |A_2| + \sum_{i=0}^{2} |A_3| + \sum_{i=0}^{3} |A_4| + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} |A_j| = \sum_{j=0}^{\infty} j\,|A_j| < C \ a.s..
\end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

لم ۳.۲.۲. اگر $\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{E}\,|A_j| < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left| \tilde{A}_j \right| < \infty.$$

برهان. مشابه اثبات لم ۲.۲.۲، داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left|\tilde{A_j}\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} \mathbf{E}\left|A_i\right| = \sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{E}\left|A_j\right| < \infty.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

لم ۴.۲.۲. فرض کنید $\{A_n, n \ge 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد به قسمی که برای هر $n \ge 0$، $\mathbf{E}A_n^2 < \infty$. اگر $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \mathbf{E}A_j^2 < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \qquad Converges \;\; a.s..$$

برهان. با توجه به اینکه $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \mathbf{E}A_j^2 < \infty$ و $\mathbf{E}A_j^2 \ge 0$، می‌توان نتیجه گرفت $\mathbf{E}A_n^2 = o(n^{-3})$. از طرفی $(\mathbf{E}|A_n|)^2 \le \mathbf{E}A_n^2$. بنابراین

$$\mathbf{E}|A_n| = o\left(n^{-3/2}\right).$$

در نتیجه، $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}|A_j| < \infty$. بنابراین داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} var(|A_j|) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}A_j^2 - \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{E}|A_n|)^2 < \infty.$$

پس با استفاده از معیار همگرایی کلموگرف آ.۱۴.۰ داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \qquad Converges \;\; a.s..$$

در نتیجه اثبات کامل است. □

۱.۲.۲ گشتاور اول متناهی

در ادامه قانون قوی اعداد بزرگ را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی بررسی می‌کنیم. بدین منظور قضیه زیر را ارائه می‌دهیم، و این قضیه را با استفاده از لم‌هایی که گفته شد اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد. که در آن $\{\varepsilon, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع، با $\mathbf{E}\varepsilon = 0$ و $\mathbf{E}|\varepsilon| < \infty$. همچنین $\{A_n, n \ge 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با شرط قریب به یقین $\sum_{j=1}^{\infty} j\left|A_j\right| < C$ و دنباله $\{\varepsilon, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ نیز از دنباله $\{A_n, n \ge 0\}$ مستقل باشد. در این صورت داریم:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as \; n \to \infty.$$

برهان. با توجه به لم ۱.۲.۲، برای مجموع فرآیندهای خطی با استفاده از سری تلسکوپی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} X_t &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} A_j\varepsilon_t + \sum_{t=1}^{n}\left(Y_{t-1} - Y_t\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t + Y_0 - Y_n.\end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t &= n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t + n^{-1}Y_0 - n^{-1}Y_n\\ &= \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} - \mathbf{I}_{III}.\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم وقتی $n \to \infty$، هر کدام از این سه قسمت قریب به یقین به سمت صفر میل می‌کنند، با اثبات این سه همگرایی نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. برای $\mathbf{I}_I$ طبق قانون قوی اعداد بزرگ خواهیم داشت:

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \xrightarrow{a.s.} \mathbf{E}\varepsilon = 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

همچنین بنا به فرض قضیه داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \le \sum_{j=0}^{\infty}|A_j| < \sum_{j=0}^{\infty} j\,|A_j| < C\ a.s..$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$، خواهیم داشت:

$$\mathbf{I}_I = \sum_{j=0}^{\infty} A_j\left(n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

با استفاده از لم ۲.۲.۲ و قریب به یقین بودن $\sum_{j=0}^{\infty} j\,|A_j| < C$، نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{A}_j\right| < C \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| < C. \tag{۱.۲}$$

با استفاده از رابطه (۱.۲) و $\mathbf{E}|\varepsilon| < \infty$، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|Y_0| &= \mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{A}_j\varepsilon_{-j}\right| \le \mathbf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{A}_j\varepsilon_{-j}\right|\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\varepsilon_{-j}\right| = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right|\mathbf{E}\left|\varepsilon_{-j}\right|\\ &= \mathbf{E}\left|\varepsilon\right|\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| < \infty.\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از لم آ.۰.۱۱، به ازای هر $\epsilon > 0$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(n^{-1}|Y_0| > \epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_0}{\epsilon}\right| > n\right) < \infty.$$

در نتیجه، با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) داریم:

$$n^{-1}Y_0 \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$، برای $\mathbf{I}_{II}$ داریم:

$$\mathbf{I}_{II} = n^{-1}Y_0 \xrightarrow{a.s.} 0.$$

همچنین به صورت مشابه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|Y_n| &= \mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{A}_j\varepsilon_{n-j}\right| \leq \mathbf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{A}_j\varepsilon_{n-j}\right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\varepsilon_{n-j}\right| = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right|\mathbf{E}\left|\varepsilon_{n-j}\right| \\
&= \mathbf{E}\left|\varepsilon\right|\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از لم آ.۰.۱۱، به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(n^{-1}|Y_n| > \epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\epsilon}\right| > n\right) < \infty.$$

در نتیجه، با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) داریم:

$$n^{-1}Y_n \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$، برای $\mathbf{I}_{III}$ داریم:

$$\mathbf{I}_{III} = n^{-1}Y_n \xrightarrow{a.s.} 0.$$

و اثبات کامل می‌شود. □

همچنین می‌توان همگرایی $\mathbf{I}_{II}$ و $\mathbf{I}_{III}$ را به روش زیر نشان داد. برای $\mathbf{I}_{II}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{II} = n^{-1}Y_0 &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{A}_j\varepsilon_{-j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty}A_i\varepsilon_{-j} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i-1}A_i\varepsilon_{-j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}iA_i\left(\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1}\varepsilon_{-j}\right).
\end{aligned}$$

با توجه به قانون قوی اعداد بزرگ، $\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1}\varepsilon_{-j}$ قریب به یقین همگرا به صفر است. پس داریم:

$$\mathbf{I}_{II} \leq \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{\infty}iA_i.$$

بنابراین قریب به یقین $|Y_0| < \infty$، در نتیجه وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\mathbf{I}_{II} = n^{-1}Y_0 \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

حال برای $\mathbf{I}_{III}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{III} = n^{-1}Y_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{A}_j\varepsilon_{n-j} = \frac{1}{n}\sum_{j=-\infty}^{n}\tilde{A}_{n-j}\varepsilon_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\tilde{A}_{n-j}\varepsilon_j + \frac{1}{n}\sum_{j=-\infty}^{-1}\tilde{A}_{n-j}\varepsilon_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\tilde{A}_{n-j}\varepsilon_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{A}_{n+j}\varepsilon_{-j}.\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}n^{-1}|Y_n| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{A}_j\varepsilon_{n-j}\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n}\tilde{A}_{n-j}\varepsilon_j\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{A}_{n+j}\varepsilon_{-j}\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\left|\tilde{A}_{n-j}\varepsilon_j\right| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{A}_{n+j}\varepsilon_{-j}\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\left(\max_{0\leq j\leq n}|\varepsilon_j|\right)\sum_{j=0}^{n}\left|\tilde{A}_{n-j}\right| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{A}_{n+j}\right||\varepsilon_{-j}|.\end{aligned}$$

برای قسمت اول با استفاده از لم ۲.۲.۲ می‌دانیم که $\sum_{j=0}^{n}\left|\tilde{A}_{n-j}\right| < C$، بنابراین کافیست نشان دهیم:

$$\max_{0\leq j\leq n}\left|n^{-1}\varepsilon_j\right| \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

اگر نشان دهیم $n^{-1}\varepsilon_n \xrightarrow{a.s.} 0$، آنگاه داریم:

$$\max_{0\leq j\leq n}\left|n^{-1}\varepsilon_j\right| \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}n^{-1}\varepsilon_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i.\end{aligned}$$

طبق قانون قوی اعداد بزرگ وقتی $n\to\infty$، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \xrightarrow{a.s.} 0,$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i \xrightarrow{a.s.} 0.$$

بنابراین قسمت اول قریب به یقین به صفر همگراست. برای قسمت دوم آن می‌دانیم:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{A}_{n+j}\right|\left|\varepsilon_{-j}\right| < C \ a.s.$$

وقتی $n\to\infty$، داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{A}_{n+j}\right|\left|\varepsilon_{-j}\right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

که با توجه به این نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{I}_{III} = n^{-1}Y_n \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

بنابراین اثبات همگرایی $\mathbf{I}_{II}$ و $\mathbf{I}_{III}$ کامل می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۲. در قضیه ۱.۲.۲ اگر ضرایب تصادفی A_j دارای توزیع تباهیده شده در نقطه a_j و $\sum_{j=1}^{\infty} j\left|a_j\right| < \infty$ باشند، آنگاه قضیه ۱.۲.۲ با قضیه ۲.۵.۱ معادل است.

۲.۲.۲ گشتاور دوم متناهی

در این قسمت قصد داریم در قضیه ۱.۲.۲، شرایط قریب به یقین $\sum_{j=1}^{\infty} j\left|A_j\right| < C$ و گشتاور اول متناهی برای عامل اغتشاش را با شرایط $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\mathbf{E}A_j^2 < \infty$ و گشتاور دوم متناهی برای عامل اغتشاش، جایگزین کنیم.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\{X_t, t>0\}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد، که $\{\varepsilon, \varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع، با میانگین صفر، $\mathbf{E}\varepsilon^2 < \infty$ و $\{A_n, n\geq 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\mathbf{E}A_j^2 < \infty$ و مستقل از $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ است. آنگاه داریم:

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

برهان. روند اثبات مشابه برهان ۱.۲.۲ می‌باشد. در نتیجه کافیست نشان دهیم $\mathbf{I}_I$، $\mathbf{I}_{II}$ و $\mathbf{I}_{III}$ قریب به یقین همگرا به صفر است. برای اثبات قسمت اول $\mathbf{I}_I$، با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ، لم ۴.۲.۲ و ملاحظه ۱.۲.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{I}_I = \sum_{j=0}^{\infty} A_j\left(n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right) \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

برای I_{II}، با استفاده از لم آ.۰.۴ (لم فاتو)، لم آ.۰.۱۰ و برای هر $i\in\mathbb{Z}$ میانگین ε_i برابر با صفر

است. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|Y_\circ^۲| &= \mathbf{E}\left(\sum_{j=\circ}^{\infty}\tilde{A}_j\varepsilon_{-j}\right)^۲ = \mathbf{E}\left(\sum_{j=\circ}^{\infty}\sum_{i=j+۱}^{\infty}A_i\varepsilon_{-j}\right)^۲\\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{i=۱}^{\infty}\sum_{j=\circ}^{i-۱}A_i\varepsilon_{-j}\right)^۲ = \mathbf{E}\left(\liminf_{m\to\infty}\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=\circ}^{i-۱}A_i\varepsilon_{-j}\right)^۲\\
&\le \mathbf{E}\liminf_{m\to\infty}\left(\sum_{j=\circ}^{m}\sum_{i=j+۱}^{m}A_i\varepsilon_{-j}\right)^۲ \le \liminf_{m\to\infty}\mathbf{E}\left(\sum_{j=\circ}^{m}\sum_{i=j+۱}^{m}A_i\varepsilon_{-j}\right)^۲\\
&= \liminf_{m\to\infty}\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(\sum_{j=\circ}^{m}\sum_{i=j+۱}^{m}a_i\varepsilon_{-j}\right)^۲|A_۱=a_۱,\cdots,A_m=a_m\right]\\
&\le C\liminf_{m\to\infty}\mathbf{E}\left[\sum_{j=\circ}^{m}\mathbf{E}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}a_i\varepsilon_{-j}\right)^۲|A_۱=a_۱,\cdots,A_m=a_m\right]\\
&\le C\liminf_{m\to\infty}\sum_{j=\circ}^{m}\mathbf{E}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}A_i\right)^۲\mathbf{E}\varepsilon_{-j}^۲ \le C\mathbf{E}\varepsilon^۲\liminf_{m\to\infty}\sum_{j=\circ}^{m}\mathbf{E}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}|A_i|\right)^۲,
\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

در نتیجه، با توجه به لم آ.۰.۳ (نامساوی کلاسیک کوشی شوارتز) و لم آ.۰.۱۴ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\varepsilon^۲\liminf_{m\to\infty}\sum_{j=\circ}^{m}\mathbf{E}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}|A_i|\right)^۲ &= \mathbf{E}\varepsilon^۲\liminf_{m\to\infty}\mathbf{E}\sum_{j=\circ}^{m}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{۲/۳}|A_i|i^{-۲/۳}\right)^۲\\
&\le \mathbf{E}\varepsilon^۲\liminf_{m\to\infty}\mathbf{E}\sum_{j=\circ}^{m}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{۴/۳}A_i^۲\right)\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{-۴/۳}\right)\\
&\le \mathbf{E}\varepsilon^۲\limsup_{m\to\infty}\mathbf{E}\sum_{j=\circ}^{m}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{۴/۳}A_i^۲\right)\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{-۴/۳}\right)\\
&\le \mathbf{E}\varepsilon^۲\mathbf{E}\limsup_{m\to\infty}\sum_{j=\circ}^{m}\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{۴/۳}A_i^۲\right)\left(\sum_{i=j+۱}^{m}i^{-۴/۳}\right)\\
&\le \mathbf{E}\varepsilon^۲\mathbf{E}\left(\sum_{j=\circ}^{\infty}\sum_{i=j+۱}^{\infty}j^{-۱/۳}i^{۴/۳}A_i^۲\right) = \mathbf{E}\varepsilon^۲\mathbf{E}\left(\sum_{i=۱}^{\infty}\sum_{j=\circ}^{i-۱}j^{-۱/۳}i^{۴/۳}A_i^۲\right)\\
&\le \mathbf{E}\varepsilon^۲\ \mathbf{E}\left(\sum_{i=۱}^{\infty}i^{۲/۳}i^{۴/۳}A_i^۲\right) = \mathbf{E}\varepsilon^۲\ \sum_{i=۱}^{\infty}i^۲\mathbf{E}A_i^۲ < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین، بر اساس لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، برای هر $\epsilon > \circ$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|n^{-۱}Y_\circ\right| > \epsilon\right) \le \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲\epsilon^۲}\mathbf{E}Y_\circ^۲ < \infty.$$

در نتیجه، با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) داریم:

$$n^{-۱}Y_\circ \xrightarrow{a.s.} \circ \qquad as\ n\to\infty.$$

همچنین به صورت مشابه داریم:

$$\mathbf{E}|Y_n^2| \leq \mathbf{E}\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \mathbf{E}A_i^2 < \infty.$$

بنابراین، با استفاده از لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، برای هر $\epsilon > 0$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|n^{-1}Y_n\right| > \epsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbf{E}Y_n^2 < \infty.$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$ با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی)، I_{III} قریب به یقین به صفر همگرا است. بنابراین نتیجه مد نظر حاصل می‌شود. □

نتیجه ۲.۲.۲. در قضیه ۲.۲.۲ اگر ضرایب تصادفی A_j دارای توزیع تباهیده در نقطه a_j باشند و $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 a_j^2 < \infty$. آنگاه قضیه ۲.۲.۲ با قضیه ۱.۵.۱ معادل است.

با اضافه کردن شرط میانگین صفر برای دنباله $\{A_n, n \geq 0\}$ و جایگزین کردن شرط ضعیف‌تر $\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{E}A_j^2 < \infty$ با شرط $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\mathbf{E}A_j^2 < \infty$ در قضیه ۲.۲.۲، قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\{X_t, t > 0\}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد. که $\{\varepsilon, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و $\mathbf{E}\varepsilon^2 < \infty$، همچنین $\{A_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر، $\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{E}A_j^2 < \infty$ و مستقل از $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشند. آنگاه داریم:

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

برهان. مشابه اثبات قضیه ۲.۲.۲ و (۲.۲) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}|Y_0^2| \leq C\mathbf{E}\varepsilon^2 \liminf_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{E}\left(\sum_{i=j+1}^{m} |A_i|\right)^2.$$

از طرفی $\{A_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر است. در نتیجه، با استفاده از لم آ.۰.۱۰ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\varepsilon^2 \liminf_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{E}\left(\sum_{i=j+1}^{m} |A_i|\right)^2 &\leq C\mathbf{E}\varepsilon^2 \liminf_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=j+1}^{m} \mathbf{E}A_i^2 \\
&\leq C\mathbf{E}\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j+1}^{\infty} \mathbf{E}A_i^2 \\
&= C\mathbf{E}\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{E}A_i^2 \\
&= C\mathbf{E}\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{E}A_i^2 < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین مشابه اثبات قضیه ۲.۲.۲ وقتی $n \to \infty$، I_{II} قریب به یقین به صفر همگرا است. به صورت مشابه I_{III} نیز به صفر همگرا است. در نهایت اثبات کامل می‌شود. □

۳.۲.۲ متغیرهای تصادفی غیر هم توزیع

در ادامه می‌خواهیم در فرآیند خطی با ضرایب تصادفی $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ شرط هم توزیع بودن دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ را حذف کنیم. بدین منظور شرط متناهی بودن گشتاور دوم را اضافه می‌کنیم، و برای دنباله $\{A_n, n \geq 0\}$، شرط $\sum_{j=0}^{\infty} j |A_j| < \infty, a.s.$ را به $\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{E}|A_j| < \infty$ کاهش می‌دهیم. اکنون یک مثال برای دنباله $\{A_n, n \geq 0\}$ ارائه می‌دهیم، که در آن برقرار بودن شرط $\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{E}|A_j| < \infty$ و $\sum_{j=0}^{\infty} j|A_j| < \infty$ را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $\{A_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع زیر باشد:

$$\mathbf{P}(A_n = n) = \mathbf{P}(A_n = -n) = \frac{1}{n^3 (\log n)^2}, \qquad n \geq 1,$$
$$\mathbf{P}(A_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3 (\log n)^2}, \qquad n \geq 1,$$
$$\mathbf{P}(A_0 = 0) = 1.$$

بنابراین به ازای هر $n \geq 0$ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}A_n = 0 \qquad \mathbf{E}|A_n| = \frac{2}{n^2 (\log n)^2} \qquad \mathbf{E}A_n^2 = \frac{2}{n(\log n)^2}.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{E}|A_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n(\log n)^2} < \infty.$$

همچنین داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}|A_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2(\log n)^2} < \infty.$$

علاوه بر این می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}A_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n(\log n)^2} < \infty.$$

بنابراین مجموع واریانس دنباله $\{A_n, n \geq 0\}$ برابر است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Var(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n(\log n)^2} < \infty.$$

با استفاده از قضیه آ.۰.۱۴ (معیار همگرایی کلموگروف)، اگر $\{A_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با شرایط $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}A_n < \infty$، $\sum_{n=0}^{\infty} Var(A_n) < \infty$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n < \infty \ a.s..$$

ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|A_n| < \infty \ a.s..$$

بنابراین این دنباله شرایط قضیه ۱.۲.۲ را ندارد، ولی در شرایط قضیه زیر صدق می‌کند.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد. که در آن $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر است که به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$ وجود داشته باشد C که $\mathbf{E}|\varepsilon_n| < C < \infty$ و $\sum_{t=1}^{n} \mathbf{E}\varepsilon_t^2 = O\left(n/(\log n)^2\right)$. همچنین فرض کنید $\{A_n, n\geq 0\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و شرایط $\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{E}\,|A_j| < \infty$، $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}A_j^2 < \infty$ به علاوه از دنباله $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ مستقل باشد. آنگاه داریم:

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n\to\infty.$$

برهان. با استفاده از ملاحظه ۱.۲.۲ برای $\mathbf{I}_I$ با استفاده از لم آ.۲.۰ (نامساوی مارکوف)، به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} A_j\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right| > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty} A_j\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right|^2\\ &= \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right|^2\mathbf{E}\left|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right|^2.\end{aligned}$$

با برقراری شرایط $\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}A_j < \infty$ و $\sum_{j=0}^{\infty} Var(A_j) < \infty$ بر اساس قضیه آ.۱۴.۰ (معیار همگرایی کلموگروف) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j < \infty\ a.s.,$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right|^2 < \infty\ a.s.,$$

در نتیجه با توجه به اینکه $\left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right)^2$، قریب به یقین مثبت است، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right)^2 < \infty.$$

با استفاده از آ.۱۰.۰ و اینکه $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$، داریم:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right|^2 \leq C\sum_{t=1}^{n}\mathbf{E}\,|\varepsilon_t|^2.$$

با توجه به اینکه $\mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right|^2 < \infty$ و فرض قضیه $\sum_{t=1}^{n}\mathbf{E}\varepsilon_t^2 = O\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} A_j\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\right| > \epsilon\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2\epsilon^2}\mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right|^2\sum_{t=1}^{n}\mathbf{E}\varepsilon_t^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{E}\varepsilon_t^2\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Cn}{n^2(\log n)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n(\log n)^2}, < \infty.\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\mathbf{I}_I = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t \right) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

با استفاده از لم ۳.۲.۲ و فرض قضیه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\mathbf{E}|\varepsilon_n| < C < \infty$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|Y_0| &= \mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{A}_j \varepsilon_{-j}\right| \leq \mathbf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{A}_j \varepsilon_{-j}\right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left|\tilde{A}_j \varepsilon_{-j}\right| = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| \mathbf{E}\left|\varepsilon_{-j}\right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} C\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از لم آ.۰.۱۱، به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(n^{-1}|Y_0| > \epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_0}{\epsilon}\right| > n\right) < \infty.$$

در نتیجه، با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) داریم:

$$n^{-1} Y_0 \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$، برای $\mathbf{I}_{II}$ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{I}_{II} = n^{-1} Y_0 \xrightarrow{a.s.} 0.$$

همچنین به صورت مشابه نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|Y_n| &= \mathbf{E}\left|\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{A}_j \varepsilon_{n-j}\right| \leq \mathbf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\tilde{A}_j \varepsilon_{n-j}\right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left|\tilde{A}_j \varepsilon_{n-j}\right| = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| \mathbf{E}\left|\varepsilon_{n-j}\right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} C\mathbf{E}\left|\tilde{A}_j\right| < \infty.
\end{aligned}$$

با استفاده از لم آ.۰.۱۱، به ازای هر $\epsilon > 0$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(n^{-1}|Y_n| > \epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\epsilon}\right| > n\right) < \infty,$$

بنابراین، با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) داریم:

$$n^{-1} Y_n \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

در نتیجه وقتی $n \to \infty$، برای $\mathbf{I}_{III}$ داریم:

$$\mathbf{I}_{III} = n^{-1} Y_n \xrightarrow{a.s.} 0.$$

در نهایت اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب ثابت است، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر، $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\,|\varepsilon_j| < \infty$ و $\sum_{t=1}^{n} \mathbf{E}\varepsilon_t^2 = O\left(n/(\log n)^2\right)$ و همچنین $\{a_n, n \geq 0\}$ دنباله‌ای از اعداد ثابت با شرط $\sum_{j=0}^{\infty} j\,|a_j| < \infty$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$n^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

برهان. روند اثبات مشابه برهان قضیه ۴.۲.۲ است. □

نتیجه ۳.۲.۲. در قضیه ۴.۲.۲ اگر ضرایب تصادفی A_j دارای توزیع تباهیده شده در نقطه a_j و $\sum_{j=1}^{\infty} j|a_j| < \infty$ باشند، آنگاه قضیه ۴.۲.۲ با قضیه ۵.۲.۲ معادل است.

۳.۲ مرتبه همگرایی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

در این بخش، مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$، بررسی می‌کنیم، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی END است. بدین منظور نخست به معرفی مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت می‌پردازیم. سپس لم‌های مورد نیاز را معرفی می‌کنیم. در انتها مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۳.۲ مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

هسو [۷] و رابینز [۸][۲۶] مفهومی از همگرایی کامل را معرفی کردند. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع به طور کامل همگراست، اگر مجموع واریانس‌های آن متناهی باشد. اردوش [۹] [۱۸] این همگرایی کامل را اثبات کرد. نتیجه کارهای هسو، رابینز و اردوش توسط [۵] تعمیم داده شد و مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت [۱۰] نامیده شد.

قضیه ۱.۳.۲. باوم [۱۱] و کتز [۱۲] [۵]، فرض کنید $r \geq 1$، $1 \leq p < 2$ و $\{X, X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند. اگر $\mathbf{E}X = 0$ و $\mathbf{E}|X|^{rp}$ موجود باشد، آنگاه به

[۷] Hsu

[۸] Robbins

[۹] Erdös

[۱۰] Marcinkiewicz-Zygmund

[۱۱] Baum

[۱۲] Katz

ازای هر $\epsilon > 0$، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > n^{1/p}\epsilon\right) < \infty.$$

حالت خاصی از قضیه ۱.۳.۲ با $r = 2$، قضیه ۴.۵.۱ است. ژانگ [۷۶]، حالت خاصی از قضیه ۱.۳.۲ را با $r > 1$ برای فرآیند خطی با وابستگی طولانی و تشکیل شده از عامل اغتشاشات هم توزیع و ϕ-آمیخته [13] بررسی کرد. کتز [۳۰] حالت خاصی از قضیه ۱.۳.۲ را وقتی $r = 2$ و $1 \leq p < 2$ باشد اثبات کرد. همچنین هسو و رابینز [۲۶] نیز حالت خاصی از قضیه ۱.۳.۲ را وقتی $r = 2$ و $p = 2$ باشد نشان دادند. برای $1 \leq p < 2$، اگر $\{X, X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ باشد، آنگاه $n^{-1/p}(X_1 + \cdots + X_n)$، وقتی $n \to \infty$، قریب به یقین همگرا به صفر است. معمولاً چنین نتایجی را قانون قوی مارسینکویچ-زیگموند می‌نامند، که حالت خاصی از قضیه ۱.۳.۲ می‌باشد(برای مطالعه بیشتر به [۴۷] مراجعه کنید.)

در ادامه به تفسیر مارسینکویچ و زیگموند در قانون قوی اعداد بزرگ می‌پردازیم. در این حالت وقتی $\mathbf{E}X^2 = \infty$ اما گشتاوری بین یک و دو موجود و متناهی باشد، قانون قوی اعداد بزرگ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۲. دورت [14] [۱۷]، فرض کنید $\{X, X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر باشد. اگر برای ثابتی مانند $1 < p < 2$ داشته باشیم $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ و $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$، آنگاه داریم:

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

شن [۶۱]، مرتبه همگرایی مارسینکویچ-زیگموند برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی END را بررسی کرد.

قضیه ۳.۳.۲. شن [۶۱]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و تحت تسلط متغیر تصادفی X با $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ باشد. برای برخی از $p \geq 1/\alpha$ و $1/2 < \alpha \leq 1$، اگر $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی باشد که:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^q = O(n) \qquad for some\ p > q.$$

آنگاه برای هر $\epsilon > 0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right| > \epsilon n^{\alpha}\right) < \infty.$$

---

[13] ϕ-mixing

[14] Durrett

۲.۳.۲ لم‌های مورد نیاز

لم ۱.۳.۲. فرض کنید $1 \leq p \leq 2$، $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و $\mathbf{E}\,|\varepsilon_n|^p < \infty$ باشد. همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با $\mathbf{E}\,|A_n|^p < \infty$ و مستقل از $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای مقدار ثابت $n \geq 1$، اگر $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right) \varepsilon_i$ قریب به یقین همگرا باشد، داریم:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)\varepsilon_i\right|^p \leq C'(M;p)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right|^p \mathbf{E}\,|\varepsilon_i|^p .$$

که در آن $C'(M;p) = 2^p C(M;p)$.

برهان. با توجه به لم آ.۰.۴ (لم فاتو) و لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\varepsilon_i\right|^p &= \mathbf{E}\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)\varepsilon_i\right|^p \\
&\leq \liminf_{m\to\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)^+ - \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)^-\right)\varepsilon_i\right|^p \\
&\leq 2^{p-1}\limsup_{m\to\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)^+\varepsilon_i\right|^p \\
&\quad + 2^{p-1}\limsup_{m\to\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)^-\varepsilon_i\right|^p = I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

با استفاده از قانون امید ریاضی کل [۱۵] (امید ریاضی مکرر) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right)^+\varepsilon_i\right|^p \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} a_j\right)^+\varepsilon_i\right|^p \,\middle|\, A_{-m+1} = a_{-m+1}, \cdots, A_{m+n} = a_{m+n}\right)\right].
\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

برای هر $n \geq 1$ وهر $i \in \mathbb{Z}$، $\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} a_j\right)^+$ یک مقدار مثبت است. بنابراین، بر اساس لم ۲.۴.۱، $\left\{\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} a_j\right)^+\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}\right\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر است. در نتیجه با استفاده از لم ۱.۴.۱، داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} a_j\right)^+\varepsilon_i\right|^p \,\middle|\, A_{-m+1} = a_{-m+1}, \cdots, A_{m+n} = a_{m+n}\right] \\
&\leq C(M;p)\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left[\left|\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} a_j\right)^+\varepsilon_i\right|^p \,\middle|\, A_{-m+1} = a_{-m+1}, \cdots, A_{m+n} = a_{m+n}\right],
\end{aligned}$$

---

[۱۵] Law of total expectation

با توجه به اینکه دنباله $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ از دنباله $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ مستقل است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&C(M;p)\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left[\left|\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}a_j\right)^{+}\varepsilon_i\right|^p \middle| A_{-m+1}=a_{-m+1},\cdots,A_{m+n}=a_{m+n}\right]\\&\leq C(M;p)\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p\mathbf{E}\left[\left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}a_j\right)^{+}\right)^p \middle| A_{-m+1}=a_{-m+1},\cdots,A_{m+n}=a_{m+n}\right],\end{aligned}$$

و با جایگذاری در (۴.۲) داریم:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)^{+}\varepsilon_i\right|^p\leq C(M;p)\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)^{+}\right)^p\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p. \tag{۵.۲}$$

در نتیجه برای I_1، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}I_1&\leq 2^{p-1}C(M;p)\limsup_{m\to\infty}\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)^{+}\right)^p\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p\\&\leq 2^{p-1}C(M;p)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right|^p\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p.\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

همچنین $\left\{\left(\sum_{j=1-i}^{k-i}a_j\right)^{-}\varepsilon_i, i\in\mathbb{Z}\right\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر است. در نتیجه مشابه I_1، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)^{-}\varepsilon_i\right|^p\\&=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=-m}^{m}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}a_j\right)^{-}\varepsilon_i\right|^p \middle| A_{-m+1}=a_{-m+1},\cdots,A_{m+n}=a_{m+n}\right)\right]\\&\leq C(M;p)\mathbf{E}\left[\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left(\left|\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}a_j\right)^{-}\varepsilon_i\right|^p \middle| A_{-m+1}=a_{-m+1},\cdots,A_{m+n}=a_{m+n}\right)\right]\\&\leq C(M;p)\sum_{i=-m}^{m}\mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)^{-}\right)^p\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p.\end{aligned} \tag{۷.۲}$$

در نتیجه برای I_2، داریم:

$$I_2\leq 2^{p-1}C(M;p)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right|^p\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p. \tag{۸.۲}$$

بنابراین با استفاده از (۳.۲)-(۸.۲)، نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)\varepsilon_i\right|^p\leq C'(M;p)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right|^p\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p.$$

و اثبات کامل می‌شود. □

لم ۲.۳.۲. فرض کنید $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد. می‌توان نوشت:

$$\sum_{t=1}^{n}X_t=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\varepsilon_i.$$

برهان. با بسط سری روی tها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n}X_t=&\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}\\ =&\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{1-j}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{2-j}+\cdots+\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{n-j},\end{aligned}$$

بنابراین با بسط سری روی jها، داریم:

$$\sum_{t=1}^{n}X_t=$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots+ & A_{-2}\varepsilon_3+ & A_{-1}\varepsilon_2+ & A_0\varepsilon_1+ & A_1\varepsilon_0+ & A_2\varepsilon_{-1}+ & A_3\varepsilon_{-2}+\ \cdots\\
\cdots+ & A_{-1}\varepsilon_3+ & A_0\varepsilon_2+ & A_1\varepsilon_1+ & A_2\varepsilon_0+ & A_3\varepsilon_{-1}+ & A_4\varepsilon_{-2}+\ \cdots\\
\cdots+ & A_0\varepsilon_3+ & A_1\varepsilon_2+ & A_2\varepsilon_1+ & A_3\varepsilon_0+ & A_4\varepsilon_{-1}+ & A_5\varepsilon_{-2}+\ \cdots\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\cdots+ & A_{n-4}\varepsilon_3+ & A_{n-3}\varepsilon_2+ & A_{n-2}\varepsilon_1+ & A_{n-1}\varepsilon_0+ & A_n\varepsilon_{-1}+ & A_{n+1}\varepsilon_{-2}+\ \cdots\\
\cdots+ & A_{n-3}\varepsilon_3+ & A_{n-2}\varepsilon_2+ & A_{n-1}\varepsilon_1+ & A_n\varepsilon_0+ & A_{n+1}\varepsilon_{-1}+ & A_{n+2}\varepsilon_{-2}+\ \cdots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}&=\cdots+\sum_{j=1-3}^{n-3}A_j\varepsilon_3+\sum_{j=1-2}^{n-2}A_j\varepsilon_2+\sum_{j=1-1}^{n-1}A_j\varepsilon_1+\sum_{j=1}^{n}A_j\varepsilon_0+\sum_{j=1+1}^{n+1}A_j\varepsilon_{-1}+\sum_{j=1+2}^{n+2}A_j\varepsilon_{-2}+\cdots\\ &=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\varepsilon_i.\end{aligned}$$

و نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

در ادامه، مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی بیان می‌کنیم. در این بخش فرض می‌کنیم $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}$، قریب به یقین متناهی است، به این معنی که $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}$، قریب به یقین همگراست.

۳.۳.۲ مرتبه همگرایی

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $r>1$، $1\le p<2$، $1<rp<2$ و $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی است، که در آن $\{\varepsilon_n,n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END

با میانگین صفر، به علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\varepsilon^{rp} < \infty$ باشد. همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر باشد، به طوری که

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^p < \infty, \tag{۹.۲}$$

و برای برخی $rp < q \leq ۲$،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q < \infty, \tag{۱۰.۲}$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲} \mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| > n^{۱/p}\epsilon\right) < \infty.$$

برهان. با توجه به اینکه $\mathbf{E}\varepsilon_i = ۰$، بنابراین برای هر $i \in \mathbb{Z}$ و هر یک از $n \geq ۱$، خواهیم داشت:

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni} + \varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni},$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{ni} &= \varepsilon_i \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \leq n^{۱/p}\}} + n^{۱/p}\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > n^{۱/p}\}} - n^{۱/p}\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -n^{۱/p}\}}, \\ \varepsilon''_{ni} &= \varepsilon_i - \varepsilon'_{ni} = \left(\varepsilon_i - n^{۱/p}\right)\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > n^{۱/p}\}} + \left(\varepsilon_i + n^{۱/p}\right)\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -n^{۱/p}\}}.\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۲.۴.۱، $\{\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni}, i \in \mathbb{Z}\}$ و $\{\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}, i \in \mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر هستند. همچنین داریم:

$$|\varepsilon'_{ni}| = |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \leq n^{۱/p}\}} + n^{۱/p}\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > n^{۱/p}\}}, \tag{۱۱.۲}$$

$$\begin{aligned}|\varepsilon''_{ni}| &= \left(\varepsilon_i - n^{۱/p}\right)\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > n^{۱/p}\}} - \left(\varepsilon_i + n^{۱/p}\right)\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -n^{۱/p}\}} \\ &\leq |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > n^{۱/p}\}}.\end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

بنابراین، با استفاده از لم ۲.۳.۲، برای هر یک از $n \geq ۱$، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{t=۱}^{n} X_t &= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni}) \\ &\quad + \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j(\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}).\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right| > \epsilon n^{1/p}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni}) + \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon''_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right| > \epsilon n^{1/p}\right)\\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right| > \frac{\epsilon n^{1/p}}{2}\right)\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon''_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right| > \frac{\epsilon n^{1/p}}{2}\right) = H_1 + H_2. \qquad (13.2)
\end{aligned}$$

در ابتدا نشان می‌دهیم $H_1 < \infty$، بدین منظور بر اساس لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، برای برخی $rp < q \le 2$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
H_1 &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^q n^{r-2}}{\epsilon^2 n^{q/p}}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^q\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^q,
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\{\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni}, i\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر است، در نتیجه با استفاده از لم ۱.۳.۲ داریم:

$$H_1 \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni}|^q\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right|^q,$$

با استفاده از لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) می‌توان نوشت:

$$H_1 \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^q + \mathbf{E}|\mathbf{E}\varepsilon'_{ni}|^q\right)\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right|^q,$$

با توجه به اینکه $1 < q \le 2$، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن) داریم:

$$\begin{aligned}
H_1 &\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^q + \mathbf{E}(\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^q)\right)\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right|^q\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^q\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right|^q,
\end{aligned}$$

از طرفی $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر است، بنابراین با استفاده از لم ۱.۴.۱ نتیجه می‌گیریم:

$$H_1 \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^q\sum_{j=1-i}^{n-i}\mathbf{E}|A_j|^q,$$

در نتیجه با استفاده از (۱۱.۲) خواهیم داشت:

$$H_۱ \leq C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-q/p} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\left(|\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{۱/p}\}} + n^{۱/p}\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n^{۱/p}\}}\right)^q \sum_{j=۱-i}^{n-i} \mathbf{E}|A_j|^q,$$

با استفاده از لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H_۱ \leq & C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-q/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{۱/p}\}}\right] \\
& + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-q/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[n^{q/p} \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|> n^{۱/p}\}}\right] \\
= & C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-q/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{۱/p}\}}\right] \\
& + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-۱/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[n^{۱/p} \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|> n^{۱/p}\}}\right] \\
\leq & C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-q/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{۱/p}\}}\right] \\
& + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-۱/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i| \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|> n^{۱/p}\}}\right],
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε است، بنابراین طبق لم ۱.۲.۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_۱ \leq & C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-q/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \left\{\mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{۱/p}\}}\right] + n^{q/p}\mathbf{P}(\varepsilon > n^{۱/p})\right\} \\
& + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۲-۱/p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=۱-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon> n^{۱/p}\}}\right] \\
= & C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۱-q/p} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{۱/p}\}}\right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q \\
& + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۱-۱/p} \mathbf{E}\left[n^{۱/p} \mathbf{I}_{\{\varepsilon> n^{۱/p}\}}\right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q \\
& + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۱-۱/p} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon> n^{۱/p}\}}\right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q,
\end{aligned}$$

با استفاده از (۲۰.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
H_۱ \leq & C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۱-q/p} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{۱/p}\}}\right] + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{r-۱-۱/p} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon> n^{۱/p}\}}\right] \\
= & H_{۱۱} + H_{۱۲}.
\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

برای H_{11}، داریم:

$$\begin{aligned} H_{11} &= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right] \\ &= C\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right]\sum_{n=i}^{\infty} n^{r-q/p-1} \end{aligned}$$

از طرفی $rp<q$، در نتیجه $r-q/p<0$، بنابراین بر اساس لم آ.۰.۱۵ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} H_{11} &\leq C\sum_{i=1}^{\infty} i^{r-q/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right] \\ &= C\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(i^{1/p}\right)^{rp-q}\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right] \\ &\leq C\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{rp-q}\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right] \\ &= C\mathbf{E}\varepsilon^{rp}<\infty. \end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

برای H_{12}، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H_{12} &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-1/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{1/p}\}}\right] \\ &= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-1/p}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right] \\ &= C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\sum_{n=1}^{m} n^{r-1/p-1}, \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $rp>1$، بنابراین $r-1/p>0$، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۱۶ داریم:

$$\begin{aligned} H_{12} &\leq C\sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right] \\ &= C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(m^{1/p}\right)^{rp-1}\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right] \\ &\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{rp-1}\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right] \\ &= C\mathbf{E}\varepsilon^{rp}<\infty. \end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

با توجه به (۱۵.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌گیریم، $H_1<\infty$.
برای H_2، مشابه H_1 با استفاده از لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، لم ۱.۳.۲، لم آ.۰.۵ (نامساوی

c_r)، لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن)، لم ۱.۴.۱، لم ۱.۲.۱، (۱۹.۲) و (۱۲.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^p n^{r-2}}{\epsilon n} \mathbf{E} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1-i}^{n-i} A_j (\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}) \right|^p \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-3} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \left| \sum_{j=1-i}^{n-i} A_j \right|^p \mathbf{E}|\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}|^p \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-3} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\,|A_j|^p\, \mathbf{E}|\varepsilon''_{ni}|^p \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-3} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\,|A_j|^p\, \mathbf{E} \left[|\varepsilon_i|^p \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > n^{1/p}\}} \right] \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-3} \mathbf{E} \left[\varepsilon^p \mathbf{I}_{\{\varepsilon > n^{1/p}\}} \right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\,|A_j|^p \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbf{E} \left[\varepsilon^p \mathbf{I}_{\{\varepsilon > n^{1/p}\}} \right] \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{E} \left[\varepsilon^p \mathbf{I}_{\{m^{1/p} < \varepsilon \leq (m+1)^{1/p}\}} \right] \\
&\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[\varepsilon^p \mathbf{I}_{\{m^{1/p} < \varepsilon \leq (m+1)^{1/p}\}} \right] \sum_{n=1}^{m} n^{r-2}, \qquad (۱۷.۲)
\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به اینکه $r-1>0$، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۱۶ داریم:

$$\begin{aligned}
H_2 &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1} \mathbf{E} \left[\varepsilon^p \mathbf{I}_{\{m^{1/p} < \varepsilon \leq (m+1)^{1/p}\}} \right] \\
&= C \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[\left(m^{1/p} \right)^{rp-p} \varepsilon^p \mathbf{I}_{\{m^{1/p} < \varepsilon \leq (m+1)^{1/p}\}} \right] \\
&\leq C\mathbf{E}\varepsilon^{rp} < \infty. \qquad (۱۸.۲)
\end{aligned}$$

با استفاده از (۱۳.۲)-(۱۸.۲) برای هر $\epsilon>0$، می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbf{P} \left(\left| \sum_{t=1}^{n} X_t \right| > n^{1/p}\epsilon \right) < \infty.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. $\square$

در ادامه با ارائه چند مثال نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{E}|A_j|^p < \infty \nRightarrow \mathbf{E}|A_j|^q < \infty, \qquad \mathbf{E}|A_j|^q < \infty \nRightarrow \mathbf{E}|A_j|^p < \infty.$$

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید $\{A_j, j \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END، با تابع توزیع زیر باشد:

$$\mathbf{P}\left(A_j = j^{-1/p}\right) = \mathbf{P}\left(A_j = -j^{-1/p}\right) = \frac{1}{2}.$$

بنابراین به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$ و $p < q$ داریم:

$$\mathbf{E}A_j = ۰, \qquad \mathbf{E}\left|A_j\right|^p = |j|^{-۱}, \qquad \mathbf{E}\left|A_j\right|^q = |j|^{-q/p}.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^p = \infty, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q < \infty.$$

مثال ۲.۳.۲. فرض کنید $\{A_j, j \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END، با تابع توزیع زیر باشد:

$$\mathbf{P}\left(A_j = j\right) = \mathbf{P}\left(A_j = -j\right) = j^{-۱-q}$$
$$\mathbf{P}\left(A_j = ۰\right) = ۱ - ۲j^{-۱-q}.$$

بنابراین به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$ و $۱ < p < q$ داریم:

$$\mathbf{E}A_j = ۰, \qquad \mathbf{E}\left|A_j\right|^p = ۲\left|j\right|^{-۱-q+p}, \qquad \mathbf{E}\left|A_j\right|^q = ۲\left|j\right|^{-۱}.$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^p < \infty, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q = \infty.$$

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید $\{A_j, j \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END، با تابع توزیع زیر باشد:

$$\mathbf{P}\left(A_j = j^{-۱}\right) = \mathbf{P}\left(A_j = -j^{-۱}\right) = \frac{۱}{۲}.$$

بنابراین به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$ و $۱ < p < q$ داریم:

$$\mathbf{E}A_j = ۰, \qquad \mathbf{E}\left|A_j\right|^p = |j|^{-p}, \qquad \mathbf{E}\left|A_j\right|^q = |j|^{-q}.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^p < \infty, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q < \infty.$$

با توجه به مثال‌های ارائه شده نتیجه می‌گیریم، وجود هر دو شرط (۱۹.۲) و (۲۰.۲) در قضیه ۴.۳.۲ لازم است و این دو شرط همدیگر را نتیجه نمی‌دهند. در ادامه حالت خاصی از قضیه ۴.۳.۲ را با $r = ۱$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید $۱ \leq p < ۲$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، به علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log(۱+\varepsilon)\right] < \infty$ باشد. همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^p < \infty, \tag{۱۹.۲}$$

برای برخی $p < q \leq ۲$،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q < \infty, \tag{۲۰.۲}$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| > n^{۱/p}\epsilon\right) < \infty.$$

برهان. مشابه اثبات قضیه ۴.۳.۲ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| > \epsilon n^{۱/p}\right) \\
\leq &\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right| > \frac{\epsilon n^{۱/p}}{۲}\right) \\
&+ \sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j(\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right| > \frac{\epsilon n^{۱/p}}{۲}\right) = H_۱ + H_۲.
\end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

برای $H_۱$، مشابه اثبات قضیه ۴.۳.۲ با استفاده از لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، لم ۱.۳.۲، لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r)، لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن)، لم ۱.۴.۱، لم ۱.۲.۱، (۲۰.۲) و (۱۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
H_۱ \leq &\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^q n^{-۱}}{\epsilon^۲ n^{q/p}}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^q \\
\leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱-q/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^q\sum_{j=۱-i}^{n-i}\mathbf{E}|A_j|^q \\
\leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-q/p}\left\{\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{۱/p}\}}\right] + n^{q/p}\mathbf{P}(\varepsilon > n^{۱/p})\right\}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|A_j|^q \\
&+ C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱-۱/p}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}|A_j|^q\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n^{۱/p}\}}\right] \\
\leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-q/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{۱/p}\}}\right] + C\sum_{n=۱}^{\infty} n\mathbf{P}(\varepsilon > n^{۱/p}) \\
&+ C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{۱/p}\}}\right]\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|A_j|^q \\
\leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-q/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{۱/p}\}}\right] + C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{۱/p}\}}\right] = H_{۱۱} + H_{۱۲}.
\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

با توجه به اینکه $1-q/p<0$، بنابراین با استفاده از لم آ.۰.۱۵، برای H_{11} نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}H_{11}&=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-q/p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{q}\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right]\\&=C\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{q}\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right]\sum_{n=i}^{\infty}n^{1-q/p-1}\\&\leq C\sum_{i=1}^{\infty}i^{1-q/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{q}\mathbf{I}_{\{(i-1)^{1/p}<\varepsilon\leq i^{1/p}\}}\right]\leq C\mathbf{E}\varepsilon^{p}<\infty.\end{aligned}\tag{۲.۲۳}$$

از طرفی $1-1/p>0$، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۱۶، برای H_{12} داریم:

$$\begin{aligned}H_{12}&\leq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{1/p}\}}\right]\\&=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/p}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\\&=C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\sum_{n=1}^{m}n^{1-1/p-1}\\&\leq C\sum_{m=1}^{\infty}m^{1-1/p}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\leq C\mathbf{E}\varepsilon^{p}<\infty.\end{aligned}\tag{۲.۲۴}$$

برای H_2، مشابه H_1 با استفاده از لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، لم ۲.۳.۱، لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r)، لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن)، لم ۱.۴.۱، لم ۱.۲.۱، (۲.۱۹) و (۲.۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}H_{2}&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{p}n^{-1}}{\epsilon n}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i}A_{j}(\varepsilon_{ni}^{''}-\mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''})\right|^{p}\\&\leq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_{j}\right|^{p}\mathbf{E}|\varepsilon_{ni}^{''}|^{p}\\&\leq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{p}\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{1/p}\}}\right]\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_{j}\right|^{p}\\&\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{p}\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\sum_{n=1}^{m}n^{-1},\end{aligned}\tag{۲.۲۵}$$

در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۱۷ داریم:

$$\begin{aligned}H_{2}&\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{p}\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\sum_{n=1}^{m}n^{-1}\\&\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\log(1+m)\mathbf{E}\left[\varepsilon^{p}\mathbf{I}_{\{m^{1/p}<\varepsilon\leq(m+1)^{1/p}\}}\right]\\&=C\mathbf{E}\left[\varepsilon^{p}\log(1+\varepsilon)\right]<\infty,\end{aligned}\tag{۲.۲۶}$$

با استفاده از (۲۱.۲)-(۲۶.۲) برای هر $\epsilon > 0$، می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right| > n^{1/p}\epsilon\right) < \infty.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

ملاحظه ۱.۳.۲. با توجه به ملاحظه ۱.۴.۱ متغیرهای تصادفی END حالت کلی‌تری از متغیرهای تصادفی NA، متغیرهای تصادفی NOD، متغیرهای تصادفی NSD و متغیرهای تصادفی مستقل هستند. بنابراین نتایج قضیه‌های ۴.۳.۲ و ۵.۳.۲ برای این متغیرهای تصادفی هم برقرار هستند.

ملاحظه ۲.۳.۲. برای هر دو دنباله از متغیرهای تصادفی $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\{\phi(\varepsilon_n), n \in \mathbb{Z}\}$ که لم ۱.۴.۱ به ازای هر تابع ناصعودی (یا نانزولی) $\phi(\varepsilon)$ برقرار باشد، می‌توان لم ۱.۳.۲ بدست آورد. بنابراین نتایج قضیه‌های ۴.۳.۲ و ۵.۳.۲ برای این متغیرهای تصادفی نیز برقرار هستند.

فصل ۳

همگرایی گشتاوری کامل

۱.۳ مقدمه

در این فصل، به بررسی همگرایی گشتاوری کامل برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$، می‌پردازیم. که در آن، $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی END است. همگرایی گشتاوری کامل، حالت کلی تری از قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت است. بنابراین نتایج این فصل را می‌توان به بعضی از قضایای فصل دوم تعمیم داد.

۲.۳ تعریف همگرایی گشتاوری کامل

همگرایی گشتاروی کامل [۱] اولین بار توسط چو [۲] [۱۱] بررسی شد. همگرایی گشتاوری کامل، همگرایی کامل را نتیجه می‌دهد. بنابراین همگرایی گشتاوری کامل، یکی از مهمترین مسائل در نظریه احتمال است.

قضیه ۱.۲.۳. چو [۱۱]، فرض کنید $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر باشد. اگر $p \geq ۱$، $\alpha > \frac{۱}{۲}$، $\alpha p > ۱$، $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ و $\mathbf{E}\left[|X|\log(۱+|X|)\right] < \infty$ باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\mathbf{E}\left(\max_{۱\leq k\leq n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+} < \infty.$$

ملاحظه ۱.۲.۳. همگرایی گشتاوری کامل، حالت کلی تری از قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت است.

نویسندگان زیادی همگرایی گشتاوری کامل را برای سری‌های میانگین متحرک و متغیرهای وابسته مورد بررسی قرار داده‌اند. برای مطالعه بیشتر به [۷۹، ۳۳، ۳۴، ۳۶، ۳۲، ۶۴، ۷۲، ۷۴، ۶۳، ۶۵، ۶۸، ۶۹، ۳۹، ۷۱، ۵۸، ۷۳، ۲۴] مراجعه کنید.

۳.۳ لم‌های مورد نیاز

در این بخش، به بیان لم‌هایی می‌پردازیم که در اثبات قضایای این فصل کاربرد دارند.

لم ۱.۳.۳. فرض کنید $۱ < p \leq ۲$ و $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و $\mathbf{E}|\varepsilon_n|^p < \infty$ باشد. همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با $\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^p < \infty$ باشد. به علاوه $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ از $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ مستقل باشد. آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}\max_{۱<k\leq n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=۱-i}^{k-i} A_j\right)\varepsilon_i\right|^p \leq C(M;p)(\log n)^p \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p.$$

---

[۱] Complete moment convergence

[۲] Chow

برهان. با جابه‌جایی دو مجموع خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{k-i}A_j\right)\varepsilon_i\right|^p=\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right)A_j\right|^p,$$

با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right)A_j\right|^p\leq\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right||A_j|\right|^p,$$

با توجه به اینکه مجموع ماکسیمم‌ها از ماکسیمم مجموع‌ها بیشتر است، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right||A_j|\right|^p&\leq\mathbf{E}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|\right|^p\\&=\mathbf{E}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^{1-\frac{1}{p}}|A_j|^{\frac{1}{p}}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|\right|^p,\end{aligned}$$

با استفاده از لم آ.۰.۸ (نامساوی هولدر) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^{1-\frac{1}{p}}|A_j|^{\frac{1}{p}}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|\right|^p\\&\leq\mathbf{E}\left|\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\\&=\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^{p-1}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\right],\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از تابع نشانگر داریم:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^{p-1}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\right]\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^{p-1}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\\&\leq\sum_{m=1}^{\infty}m^{p-1}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right],\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\{|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p, j\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی

است، در نتیجه بر اساس لم آ.۰.۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[\left(|A_j|\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p,
\end{aligned}$$

آخرین تساوی با استفاده از اینکه دنباله $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ از دنباله $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ مستقل است، بدست آمده. در نتیجه بر اساس لم ۲.۴.۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|^p\\
&\leq C(M;p)(\log n)^p\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p\\
&\leq C(M;p)(\log n)^p\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right],
\end{aligned}$$

برای $m=1$، $\mathbf{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\mathbf{I}_{\{0\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<1\}}\right]\leq 1$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&C(M;p)(\log n)^p\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\\
&\leq C(M;p)(\log n)^p\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p\right)\\
&\quad\cdot\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\right)\\
&= C(M;p)(\log n)^p\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p\right)\\
&\quad\cdot\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(m|A_j|^{\frac{1}{p-1}}-|A_j|^{\frac{1}{p-1}}+|A_j|^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\mathbf{I}_{\{m-1\leq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\right),
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) داریم:

$$\begin{aligned}
&C(M;p)(\log n)^p \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p\right)\\
&\cdot\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(m|A_j|^{\frac{1}{p-1}}-|A_j|^{\frac{1}{p-1}}+|A_j|^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\mathbf{I}_{\{m-1\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\right)\\
\le&C(M;p)(\log n)^p \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p\right)\\
&\cdot\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}2^p\mathbf{E}\left[(m-1)^{p-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\right)\\
\le&C(M;p)(\log n)^p \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p\right)\\
&\cdot\left(1+2^p\sum_{m=2}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^p\mathbf{I}_{\{m-1\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\right)\\
\le&C(M;p)(\log n)^p \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p\right)\left(1+2^p\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^p\right)\\
\le&C(M;p)(\log n)^p \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|^p.
\end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل است. □

لم ۲.۳.۳. فرض کنید $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و $\mathbf{E}\left|\varepsilon_n\right|<\infty$ باشد، و $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با $\mathbf{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<\infty$ باشد. همچنین $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ از $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ مستقل باشد، در این حالت داریم:

$$\mathbf{E}\max_{1<k\le n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{k-i}A_j\right)\varepsilon_i\right|\le C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|\varepsilon_i\right|.$$

برهان. با جابه‌جایی دو مجموع، نامساوی مثلثی و این که ماکسیمم مجموع اعداد مثبت برابر

با بیشترین تعداد جمع‌ها است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{k-i}A_j\right)\varepsilon_i\right| =&\mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right)A_j\right|\\ &\leq \mathbf{E}\max_{1<k\leq n}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\left|\sum_{i=1-j}^{k-j}\varepsilon_i\right|\right|\\ &\leq \mathbf{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\sum_{i=1-j}^{n-j}|\varepsilon_i|\\ &\leq \mathbf{E}\left[\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}|\varepsilon_i|\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right],\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از اینکه دنباله $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ از دنباله $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ مستقل است و $\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)<\infty$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}|\varepsilon_i|\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right] &= \mathbf{E}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}|\varepsilon_i|\,\mathbf{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\\ &\leq C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\,|\varepsilon_i|\,.\end{aligned}$$

□

۴.۳ همگرایی گشتاوری کامل برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

در ادامه به بیان همگرایی گشتاوری کامل برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی متشکل شده از متغیرهای تصادفی END می‌پردازیم. همچنین با استفاده از این همگرایی، مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت و قانون قوی اعداد بزرگ را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی نتیجه می‌گیریم. به علاوه نتایج بدست آمده را به فرآیند خطی با ضرایب ثابت و تشکیل شده از متغیرهای تصادفی مستقل تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید $\alpha > ۰$، $۱ < p < ۲$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\varepsilon^p < \infty$ است. همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j| < \infty, \tag{۱.۳}$$

برای برخی $۱ < q \leq ۲$،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q < \infty, \tag{۲.۳}$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p - ۲ - \alpha} \mathbf{E}\left(\left| \sum_{t=۱}^{n} X_t \right| - \epsilon n^{\alpha} \right)^{+} < \infty. \tag{۳.۳}$$

برهان. با توجه به اینکه $\mathbf{E}\varepsilon_i = ۰$، برای هر $i \in \mathbb{Z}$ و هر یک از $n \geq ۱$، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'} + \varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''},$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ni}^{'} = \varepsilon_i \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \leq n^{\alpha}\}} + n^{\alpha}\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > n^{\alpha}\}} - n^{\alpha}\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -n^{\alpha}\}}, \tag{۴.۳}$$

$$\varepsilon_{ni}^{''} = \varepsilon_i - \varepsilon_{ni}^{'} = (\varepsilon_i - n^{\alpha})\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > n^{\alpha}\}} + (\varepsilon_i + n^{\alpha})\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -n^{\alpha}\}}. \tag{۵.۳}$$

با استفاده از لم ۲.۴.۱، $\{\varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'}, i \in \mathbb{Z}\}$ و $\{\varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''}, i \in \mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر هستند. همچنین داریم:

$$|\varepsilon_{ni}^{'}| = |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \leq n^{\alpha}\}} + n^{\alpha}\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > n^{\alpha}\}}, \tag{۶.۳}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{ni}^{''}| &= (\varepsilon_i - n^{\alpha})\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > n^{\alpha}\}} - (\varepsilon_i + n^{\alpha})\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -n^{\alpha}\}} \\ &\leq |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > n^{\alpha}\}}. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

بنابراین، با استفاده از لم ۲.۳.۲، برای هر یک از $n \geq ۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\sum_{t=۱}^{n} X_t &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j \varepsilon_i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j (\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni}) \\ &\quad + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j (\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}).\end{aligned}$$

در نتیجه، با استفاده از لم آ.۰.۹، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+} \\ &\leq \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha} \left(\frac{۱}{\epsilon^q} + \frac{۱}{q-۱}\right) \frac{۱}{n^{\alpha(q-۱)}} \mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j (\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^q \\ &+ \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha} \mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j (\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right| \\ &\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۲} \mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j (\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^q \\ &+ \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha} \mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=۱-i}^{n-i} A_j (\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right| = H_۱ + H_۲.\end{aligned} \tag{۸.۳}$$

برای $H_۱$، بر اساس لم ۱.۳.۲، لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r)، لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن)، لم ۱.۴.۱، لم ۱.۲.۱، (۲.۳) و (۶.۳) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
H_{1} \leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j\right|^q \mathbf{E}\left|\varepsilon_{ni}^{'}-\mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'}\right|^q \\
\leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|\varepsilon_{ni}^{'}-\mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'}|^q \sum_{j=1-i}^{n-i} \mathbf{E}\left|A_j\right|^q \\
\leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|\varepsilon_{ni}^{'}|^q \sum_{j=1-i}^{n-i} \mathbf{E}|A_j|^q \\
\leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^\alpha\}}\right] \\
& + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{P}\left(|\varepsilon_i|>n^\alpha\right) \\
\leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1} \left\{\mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^\alpha\}}\right] + n^{\alpha q}\mathbf{P}(\varepsilon>n^\alpha)\right\} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q \\
& + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}|A_j|^q \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i| \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n^\alpha\}}\right] \\
\leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^\alpha\}}\right] + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1}\mathbf{P}(\varepsilon>n^\alpha) \\
& + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-1} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^\alpha\}}\right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q \\
\leq & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^\alpha\}}\right] + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-1} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^\alpha\}}\right] \\
= & H_{11} + H_{12}.
\end{aligned}
\tag{۹.۳}
$$

با توجه به اینکه $\alpha p - \alpha q < 0$، بنابراین با استفاده از لم آ.۱۵.۰، برای H_{11} خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{(i-1)^\alpha<\varepsilon\leq i^\alpha\}}\right] \\
&= C\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{(i-1)^\alpha<\varepsilon\leq i^\alpha\}}\right] \sum_{n=i}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1} \\
&\leq C\sum_{i=1}^{\infty} i^{\alpha p-\alpha q} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{(i-1)^\alpha<\varepsilon\leq i^\alpha\}}\right] \leq C\mathbf{E}\varepsilon^p < \infty.
\end{aligned}
\tag{۱۰.۳}
$$

از طرفی $\alpha p-\alpha>0$، در نتیجه با استفاده از لم آ.۱۶.۰، برای H_{12} داریم:

$$\begin{aligned} H_{12} &= C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-1}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{\alpha}<\varepsilon\leq(m+1)^{\alpha}\}}\right] \\ &= C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{\alpha}<\varepsilon\leq(m+1)^{\alpha}\}}\right]\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha p-\alpha-1} \\ &\leq C\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha p-\alpha}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{\alpha}<\varepsilon\leq(m+1)^{\alpha}\}}\right]\leq C\mathbf{E}\varepsilon^{p}<\infty. \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

با توجه به (۱۰.۳) و (۱۱.۳) می‌توان نتیجه گرفت که $H_1<\infty$. برای H_2، مشابه H_1 با استفاده از لم ۱.۳.۲، لم آ.۵.۰ (نامساوی c_r)، لم آ.۶.۰ (نامساوی جنسن)، لم ۱.۴.۱، لم ۱.۲.۱، لم آ.۱۷.۰، (۱.۳) و (۷.۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} H_2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right|\mathbf{E}\left|\varepsilon_{ni}''-\mathbf{E}\varepsilon_{ni}''\right| \\ &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_j\right|\mathbf{E}|\varepsilon_{ni}''| \\ &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_j\right|\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n^{\alpha}\}}\right] \\ &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-2}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{\alpha}\}}\right]\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_j\right|\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-1}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{\alpha}\}}\right] \\ &= C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{\alpha}<\varepsilon\leq(m+1)^{\alpha}\}}\right]\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha p-\alpha-1} \\ &\leq C\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha p-\alpha}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^{\alpha}<\varepsilon\leq(m+1)^{\alpha}\}}\right]\leq C\mathbf{E}\varepsilon^{p}<\infty. \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

با توجه به (۸.۳)-(۱۲.۳)، می‌توان (۳.۳) را به دست آورد. □

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید $\alpha>0$، $1<p<2$ و $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی با همان شرایط قضیه ۱.۴.۳ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon>0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=1}^{n}X_t\right|>\epsilon n^{\alpha}\right)<\infty. \tag{۱۳.۳}$$

برهان. برای هر $\epsilon > ۰$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\mathbf{E}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+} \\
=&\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\int_{۰}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha} > t\right) dt \\
\geq&\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\int_{۰}^{\epsilon n^{\alpha}}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha} > t\right) dt \\
\geq&\epsilon\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| > ۲\epsilon n^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

با استفاده از این مطلب (۳.۳) را از (۱۳.۳) می توان نتیجه گرفت. بنابراین با استفاده از قضیه ۱.۴.۳ نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

در ادامه با استفاده از قضیه فوق، حالت خاصی از قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی بیان می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۴.۳. اگر در قضیه ۲.۴.۳، $\alpha = ۱/p$ باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، با استفاده از (۱۳.۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| > \epsilon n^{۱/p}\right) < \infty. \qquad (۱۴.۳)$$

این نتیجه برای $۱ < p < ۲$، مشابه نتیجه قضیه ۵.۳.۲ است، با این تفاوت که در قضیه ۵.۳.۲ شرط $\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log(۱+\varepsilon)\right] < \infty$، باید برقرار باشد ولی در (۱۴.۳) شرط $\mathbf{E}\varepsilon^p < \infty$، کافی است. همچنین در (۱۴.۳) شرط $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|A_j| < \infty$، جایگزین شرط $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|A_j|^p < \infty$، در قضیه ۵.۳.۲ شده است. برای $p = ۱$ قضیه ۵.۳.۲ برقرار است، ولی (۱۴.۳) را نمی‌توان نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید $\alpha > ۰$، $۱ < p < q \leq ۲$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log^q(۱+\varepsilon)\right] < \infty$ است. همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|\right)^{q} < \infty, \qquad (۱۵.۳)$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\mathbf{E}\left(\max_{۱\leq k\leq n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+} < \infty.$$

برهان. روند اثبات، مشابه برهان قضیه ۱.۴.۳ است، اگر $\{\varepsilon'_{ni} : i \in \mathbb{Z}, n \geq ۱\}$ مانند (۴.۳) و $\{\varepsilon''_{ni} : i \in \mathbb{Z}, n \geq ۱\}$ مانند (۵.۳) تعریف شوند، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\mathbf{E}\left(\max_{۱\leq k\leq n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+} \\
\leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۲}\mathbf{E}\left(\max_{۱\leq k\leq n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{k-i} A_j(\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^{q}\right) \\
&+\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-۲-\alpha}\mathbf{E}\left(\max_{۱\leq k\leq n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=۱-i}^{k-i} A_j(\varepsilon''_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right|\right) \\
= &H_۱^* + H_۲^*.
\end{aligned}$$

برای $H_۱^*$، با توجه به (۱۵.۳) و اینکه $\{\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni}, i\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر است، در نتیجه طبق لم ۱.۳.۳ داریم:

$$H_۱^* \leq C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۲}(\log n)^q \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni}\right|^q,$$

با استفاده از این مطلب، لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) و لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن) می‌توان نوشت:

$$H_۱^* \leq C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۲}(\log n)^q \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|\varepsilon'_{ni}\right|^q,$$

بنابراین با استفاده از (۶.۳) و لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_۱^* \leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۲}(\log n)^q \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{\alpha}\}}\right] \\
&+C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-۲}(\log n)^q \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left[n^{\alpha}\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|> n^{\alpha}\}}\right] \\
\leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۲}(\log n)^q \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{\alpha}\}}\right] \\
&+C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-۲}(\log n)^q \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|> n^{\alpha}\}}\right],
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از لم ۱.۲.۱، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H_۱^* \leq &C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-۱}(\log n)^q\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{\alpha}\}}\right] \\
&+C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-۱}(\log n)^q\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon> n^{\alpha}\}}\right] \\
= &H_{۱۱}^* + H_{۱۲}^*.
\end{aligned}$$

برای H^*_{11}، مشابه قبل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H^*_{11} &\le C\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^\alpha<\varepsilon\le i^\alpha\}}\right]\sum_{n=i}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha q-1}(\log n)^q\\
&\le C\sum_{i=1}^{\infty}i^{\alpha p-\alpha q}(\log i)^q\mathbf{E}\left[\varepsilon^q\mathbf{I}_{\{(i-1)^\alpha<\varepsilon\le i^\alpha\}}\right]\\
&\le C\mathbf{E}\left[\varepsilon^p\log^q(1+\varepsilon)\right]<\infty.
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $p>1$، برای H^*_{12} خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H^*_{12} &\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-1}(\log n)^q\sum_{m=n}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^\alpha<\varepsilon\le(m+1)^\alpha\}}\right]\\
&\le C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha p-\alpha}(\log m)^q\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^\alpha<\varepsilon\le(m+1)^\alpha\}}\right]\\
&\le C\mathbf{E}\left[\varepsilon^p\log^q(1+\varepsilon)\right]<\infty.
\end{aligned}$$

در نهایت بر اساس (۱۵.۳) نتیجه می‌گیریم $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}\,|A_j|<\infty$، بنابراین با استفاده از لم ۲.۳.۳، برای H^*_2، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
H^*_2 &\le \sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-2}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|\varepsilon''_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon''_{ni}\right|\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-1}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^\alpha\}}\right]\\
&\le C\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{m^\alpha<\varepsilon\le(m+1)^\alpha\}}\right]\sum_{n=1}^{m}n^{\alpha p-\alpha-1}\le C\mathbf{E}\left[\varepsilon^p\right]<\infty.
\end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید $\alpha>0$، $1<p<2$ و $X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی با همان شرایط قضیه ۳.۴.۳ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon>0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{t=1}^{k}X_t\right|>\epsilon n^\alpha\right)<\infty.$$

برهان. اثبات مشابه قضیه ۲.۴.۳ است. □

ملاحظه ۲.۴.۳. اگر در قضیه ۴.۴.۳، $\alpha=1/p$ باشد، آنگاه برای هر $\epsilon>0$، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{t=1}^{k}X_t\right|>\epsilon n^{1/p}\right)<\infty.$$

در ادامه بر اساس ملاحظه فوق حالت خاصی از قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنید $۱ < p < ۲$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی با همان شرایط قضیه ۳.۴.۳ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{۱}{n^{۱/p}} \sum_{t=۱}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

برهان. بر اساس ملاحظه ۲.۴.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\infty &> \sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱} \mathbf{P}\left(\max_{۱\le k\le n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| > \epsilon n^{۱/p}\right) \\
&= \sum_{m=۱}^{\infty} \sum_{n=۲^m}^{۲^{m+۱}-۱} n^{-۱} \mathbf{P}\left(\max_{۱\le k\le n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| > \epsilon n^{۱/p}\right) \\
&\ge \frac{۱}{۲} \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{۱\le k\le n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| > \epsilon \left(۲^{m+۱}\right)^{۱/p}\right).
\end{aligned}$$

در نتیجه، با توجه به لم آ.۰.۱ (لم بورل کانتلی) وقتی $m \to \infty$، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\left(۲^m\right)^{۱/p}} \max_{۱\le k\le n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

از طرفی می‌دانیم به ازای هر یک از n، وجود دارد m به طوری که $۲^m \le n < ۲^{m+۱}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{n^{۱/p}} \sum_{t=۱}^{n} X_t \le \frac{۱}{\left(۲^m\right)^{۱/p}} \max_{۱\le k\le n}\left|\sum_{t=۱}^{k} X_t\right| \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

در نهایت نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. □

ملاحظه ۳.۴.۳. اگر $\{A_n = a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای غیر تصادفی از اعداد باشد(ضرایب ثابت)، آنگاه با شرط $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$، در قضیه ۳.۴.۳ می‌توان قضیه ۳.۵.۱ را نتیجه بگیریم.

در ادامه حالت خاصی از قضیه ۱.۴.۳ را با $p = ۱$، بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۴.۳. فرض کنید $\alpha > ۰$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، به علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon \log(۱+\varepsilon)\right] < \infty$ است. همچنین فرض کنید $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j| < \infty,$$

برای برخی $۱ < q \le ۲$،

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j|^q < \infty,$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon>0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathbf{E}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+} < \infty. \tag{۱۶.۳}$$

برهان. مشابه برهان قضیه ۱.۴.۳، اگر $\{\varepsilon'_{ni} : i\in\mathbb{Z}, n\geq 1\}$ مانند (۴.۳) و $\{\varepsilon''_{ni} : i\in\mathbb{Z}, n\geq 1\}$ مانند (۵.۳) تعریف شوند، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۹ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha}\mathbf{E}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right| - \epsilon n^{\alpha}\right)^{+}\\
\leq& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-2}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon'_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right|^{q}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha}\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{n-i} A_j(\varepsilon''_{ni}-\mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right|\\
=&H_1+H_2.
\end{aligned}\tag{۱۷.۳}$$

برای H_1، مشابه (۹.۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_1 \leq& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\alpha q-2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|\varepsilon'_{ni}|^{q}\sum_{j=1-i}^{n-i}\mathbf{E}|A_j|^{q}\\
\leq& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\alpha q-2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|A_j|^{q}\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^{q}\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq n^{\alpha}\}}\right]\\
&+C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|A_j|^{q}\mathbf{P}\left(|\varepsilon_i|>n^{\alpha}\right)\\
\leq& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\alpha q-1}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{q}\mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{\alpha}\}}\right]+C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}\mathbf{P}(\varepsilon>n^{\alpha})\\
&+C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{\alpha}\}}\right]\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}|A_j|^{q}\\
\leq& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\alpha q-1}\mathbf{E}\left[\varepsilon^{q}\mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq n^{\alpha}\}}\right]+C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^{\alpha}\}}\right]\\
=&H_{11}+H_{12}.
\end{aligned}\tag{۱۸.۳}$$

بر اساس اینکه $\alpha - \alpha q < ۰$، در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۱۵، $H_{۱۱}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_{۱۱} &= C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha-\alpha q-۱}\sum_{i=۱}^{n}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{(i-۱)^\alpha<\varepsilon\le i^\alpha\}}\right] \\ &= C\sum_{i=۱}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{(i-۱)^\alpha<\varepsilon\le i^\alpha\}}\right]\sum_{n=i}^{\infty} n^{\alpha-\alpha q-۱} \\ &\le C\sum_{i=۱}^{\infty} i^{\alpha-\alpha q}\mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{(i-۱)^\alpha<\varepsilon\le i^\alpha\}}\right] \le C\mathbf{E}\varepsilon < \infty. \end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

برای $H_{۱۲}$، بر اساس آ.۰.۱۷، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} H_{۱۲} &= C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m^\alpha<\varepsilon\le (m+۱)^\alpha\}}\right] \\ &= C\sum_{m=۱}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m^\alpha<\varepsilon\le (m+۱)^\alpha\}}\right]\sum_{n=۱}^{m} n^{-۱} \\ &\le C\sum_{m=۱}^{\infty}\log(۱+m)\mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m^\alpha<\varepsilon\le (m+۱)^\alpha\}}\right] \\ &\le C\mathbf{E}\left[\varepsilon\log(۱+\varepsilon)\right] < \infty. \end{aligned} \tag{۲۰.۳}$$

در انتها برای $H_{۱۲}$، مشابه (۱۲.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H_{۲} &\le C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۲}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_j\right|\mathbf{E}|\varepsilon_{ni}''| \\ &\le C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۲}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_j\right|\mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n^\alpha\}}\right] \\ &\le C\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۲}\mathbf{E}\left[\varepsilon\mathbf{I}_{\{\varepsilon>n^\alpha\}}\right]\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=۱-j}^{n-j}\mathbf{E}\left|A_j\right| \\ &\le C\sum_{m=۱}^{\infty}\mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m^{۱/p}<\varepsilon\le (m+۱)^{۱/p}\}}\right]\sum_{n=۱}^{m} n^{-۱} \\ &\le C\sum_{m=۱}^{\infty}\log(۱+m)\mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m^{۱/p}<\varepsilon\le (m+۱)^{۱/p}\}}\right] \\ &= C\mathbf{E}\left[\varepsilon\log(۱+\varepsilon)\right] < \infty. \end{aligned} \tag{۲۱.۳}$$

در نتیجه با استفاده از (۱۷.۳)-(۲۱.۳) می‌توان (۱۶.۳) بدست آورد، که این نتیجه مورد نظر است. □

قضیه ۷.۴.۳. فرض کنید $\alpha > ۰$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی با همان شرایط قضیه ۶.۴.۳ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\alpha-۲}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=۱}^{n} X_t\right| > \epsilon n^\alpha\right) < \infty.$$

برهان. مشابه قضیه ۲.۴.۳ است. $\square$

ملاحظه ۴.۴.۳. اگر در قضیه ۷.۴.۳، $\alpha = 1$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > 0$، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right| > \epsilon n\right) < \infty.$$

قضیه ۸.۴.۳. فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی باشد، که در آن $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon\log^3(1+\varepsilon)\right] < \infty$ است. همچنین $\{A_n, n\in\mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|\right)^2 < \infty.$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > 0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathbf{E}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{t=1}^{k} X_t\right| - \epsilon n\right)^{+} < \infty.$$

برهان. روند اثبات، مشابه برهان قضیه ۳.۴.۳ است، اگر $\{\varepsilon'_{ni} : i\in\mathbb{Z}, n\ge 1\}$ و $\{\varepsilon''_{ni} : i\in\mathbb{Z}, n\ge 1\}$ به صورت زیر تعریف شوند:

$$\varepsilon'_{ni} = \varepsilon_i\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\le n\}} + n\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i>n\}} - n\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i<-n\}},$$
$$\varepsilon''_{ni} = \varepsilon_i - \varepsilon'_{ni} = (\varepsilon_i - n)\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i>n\}} + (\varepsilon_i + n)\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i<-n\}}.$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$|\varepsilon'_{ni}| = |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\le n\}} + n\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n\}}, \tag{۲۲.۳}$$
$$|\varepsilon''_{ni}| = (\varepsilon_i - n)\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i>n\}} - (\varepsilon_i + n)\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i<-n\}} \le |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>n\}}. \tag{۲۳.۳}$$

در نتیجه با استفاده از لم آ.۰.۹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathbf{E}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{t=1}^{k} X_t\right| - \epsilon n\right)^{+}\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}\mathbf{E}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{k-i} A_j(\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni})\right)^2\right)\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathbf{E}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1-i}^{k-i} A_j(\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni})\right|\right)\\
&= H_1^* + H_2^*.
\end{aligned}$$

برای H_1^*، با توجه به (۱۵.۳) و اینکه $\{\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni}, i \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر است، در نتیجه طبق لم ۱.۳.۳ داریم:

$$H_1^* \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \log^2 n \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left(\varepsilon'_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon'_{ni}\right)^2,$$

با استفاده از این مطلب، لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) و لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن) می‌توان نوشت:

$$H_1^* \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \log^2 n \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left(\varepsilon'_{ni}\right)^2,$$

بنابراین با استفاده از (۲۲.۳) و لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_1^* \leq & C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \log^2 n \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left[\varepsilon_i^2 \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \leq n\}}\right] \\
& + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^2 n \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i| \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > n\}}\right]
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از لم ۱.۲.۱، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H_1^* \leq & C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^2 n \mathbf{E}\left[\varepsilon^2 \mathbf{I}_{\{\varepsilon \leq n\}}\right] \\
& + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \log^2 n \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon > n\}}\right] \\
\leq & C \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \left(\log^2 m + 2 \log m + 2\right) \mathbf{E}\left[\varepsilon^2 \mathbf{I}_{\{m-1 < \varepsilon \leq m\}}\right] \\
& + C \sum_{m=1}^{\infty} \log^3 m \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m < \varepsilon \leq (m+1)\}}\right] \\
\leq & C \mathbf{E}\left[\varepsilon \log^3 (1 + \varepsilon)\right] < \infty.
\end{aligned}$$

در نهایت بر اساس $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j| < \infty$، با استفاده از لم ۲.۳.۳، برای H_2^*، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
H_2^* & \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1-j}^{n-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}\right| \\
& \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon > n\}}\right] \\
& \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \log m \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{m < \varepsilon \leq (m+1)\}}\right] \\
& \leq C \mathbf{E}\left[\varepsilon \log^3 (1 + \varepsilon)\right] < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathbf{E}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{t=1}^{k} X_t\right| - \epsilon n\right)^{+} < \infty.$$

که این نتیجه مد نظر است. □

قضیه ۹.۴.۳. فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی با همان شرایط قضیه ۸.۴.۳ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > 0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{t=1}^{k} X_t\right| > \epsilon n\right) < \infty. \tag{۲۴.۳}$$

برهان. مشابه قضیه ۲.۴.۳ است. □

در ادامه با استفاده از (۲۴.۳) قانون قوی اعداد بزرگ برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را نتیجه می‌گیریم.

نتیجه ۱.۴.۳. فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j\varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی با همان شرایط قضیه ۸.۴.۳ باشد. آنگاه مشابه قضیه ۵.۴.۳، برای هر $\epsilon > 0$، وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} 0.$$

ملاحظه ۵.۴.۳. اگر $\{A_n = a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای غیر تصادفی از اعداد (ضرایب ثابت) باشد. آنگاه با شرط $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$، در قضیه ۸.۴.۳ می‌توان قضیه ۱.۵.۱ و ۲.۵.۱ را نتیجه گرفت.

ملاحظه ۶.۴.۳. با توجه به ملاحظه ۱.۴.۱ متغیرهای تصادفی END حالت کلی‌تری از متغیرهای تصادفی NA، متغیرهای تصادفی NOD، متغیرهای تصادفی NSD و متغیرهای تصادفی مستقل است. بنابراین نتایج این فصل را می‌توان برای این نوع از متغیرهای تصادفی به دست آورد.

فصل ۴

برخی از حالات کلی قانون قوی اعداد بزرگ

۱.۴ مقدمه

در این فصل به بیان حالت کلی تری از قانون قوی اعداد بزرگ برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی می‌پردازیم که با توجه به آن می‌توان قانون قوی اعداد بزرگ و قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی نتیجه بگیریم.

۲.۴ لم‌های مورد نیاز

در ابتدا به بیان لم‌هایی می‌پردازیم که در اثبات قضیه‌های این فصل کاربرد دارند.

لم ۱.۲.۴. فرض کنید $1 < p \le 2$، $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و $\mathbf{E}\varepsilon_n^p < \infty$، $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با شرط $\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^p < \infty$ باشد. همچنین $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ از $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ مستقل باشد. آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)\varepsilon_i\right|^p \le C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}|\mathbf{E}\varepsilon_i|^p.$$

برهان. روند اثبات مشابه برهان لم ۱.۳.۳ می‌باشد. در نتیجه با استفاده از ۱.۴.۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)\varepsilon_i\right|^p &= \mathbf{E}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1-j}^{n-j}\varepsilon_i\right)A_j\right|^p \\
&\le \mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\left|\sum_{i=1-j}^{n-j}\varepsilon_i\right|\right)^p = \mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^{1-\frac{1}{p}}|A_j|^{\frac{1}{p}}\left|\sum_{i=1-j}^{n-j}\varepsilon_i\right|\right)^p \\
&\le \mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\left|\sum_{i=1-j}^{n-j}\varepsilon_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^{p-1}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\left|\sum_{i=1-j}^{n-j}\varepsilon_i\right|^p\right)\mathbf{I}_{\{m-1\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right] \\
&\le \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\mathbf{E}\left|\sum_{i=1-j}^{n-j}\varepsilon_i\right|^p \\
&\le C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}m^{p-1}\mathbf{E}\left[|A_j|\mathbf{I}_{\{m-1\le\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|<m\}}\right]\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p \\
&\le C\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}\varepsilon_i^2\right)\left(1+2^p\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|\right)^p\right) \le C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|^p.
\end{aligned}$$

□

لم ۲.۲.۴. فرض کنید $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و $\mathbf{E}|\varepsilon_n| < \infty$، $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با $\mathbf{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j| < \infty$ باشد. همچنین $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ از $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ مستقل باشد. آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1-i}^{n-i}A_j\right)\varepsilon_i\right| \le C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1-j}^{n-j}\mathbf{E}|\varepsilon_i|,$$

۳.۴ برخی از حالات کلی قانون قوی اعداد بزرگ برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی

در این بخش ابتدا به بررسی حالت کلی قانون قوی اعداد بزرگ برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی می‌پردازیم و در ادامه با استفاده از آن، قانون قوی اعداد بزرگ و قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت را برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی بدست می‌آوریم.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $1 < p < 2$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، به علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log^q(1+\varepsilon)\right] < \infty$، همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر و برای برخی از $p < q \leq 2$،

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|\right)^q < \infty. \qquad (1.4)$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. اگر $\{b_p(n), n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی مثبت نسبت به n و $\{k_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح مثبت نسبت به n باشند، به طوری که:

$$0 < \alpha = \inf_{n \geq 1} \frac{b_p(k_n)}{b_p(k_{n+1})} \leq \sup_{n \geq 1} \frac{b_p(k_n)}{b_p(k_{n+1})} = \beta < 1, \qquad (2.4)$$

$$\sum_{n=i}^{\infty} \frac{k_n}{b_p^q(k_n)} = O\left(b_p^{p-q}(k_i)\right), \qquad (3.4)$$

$$\sum_{n=i}^{\infty} \frac{k_n \log^q k_n}{b_p^q(k_n)} = O\left(b_p^{p-q}(k_i) \log^q b_p(k_i)\right), \qquad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{k_n}{b_p(k_n)} = O\left(b_p^{p-1}(k_i)\right), \qquad (5.4)$$

و

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{k_n \log^q k_n}{b_p(k_n)} = O\left(b_p^{p-1}(k_i) \log^q b_p(k_i)\right). \qquad (6.4)$$

آنگاه وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{b_p(n)} \xrightarrow{a.s.} 0.$$

برهان. با توجه به اینکه $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$، برای هر $i \in \mathbb{Z}$ و هر یک از $n \geq 1$، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'} + \varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''},$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ni}^{'} = \varepsilon_i \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \le b_p(k_n)\}} + b_p(k_n)\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > b_p(k_n)\}} - b_p(k_n)\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -b_p(k_n)\}}\,,$$
$$\varepsilon_{ni}^{''} = \varepsilon_i - \varepsilon_{ni}^{'} = (\varepsilon_i - b_p(k_n))\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > b_p(k_n)\}} + (\varepsilon_i + b_p(k_n))\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -b_p(k_n)\}}\,.$$

با استفاده از لم ۲.۴.۱، $\{\varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'}, i \in \mathbb{Z}\}$ و $\{\varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''}, i \in \mathbb{Z}\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر هستند. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{ni}^{'}| &= |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| \le b_p(k_n)\}} + b_p(k_n)\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > b_p(k_n)\}} \le |\varepsilon_i|\,, \\ |\varepsilon_{ni}^{''}| &= (\varepsilon_i - b_p(k_n))\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i > b_p(k_n)\}} - (\varepsilon_i + b_p(k_n))\,\mathbf{I}_{\{\varepsilon_i < -b_p(k_n)\}} \\ &\le |\varepsilon_i|\mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > b_p(k_n)\}} \le |\varepsilon_i|\,. \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

برای هر مقدار مثبت صحیح n، وجود دارد m، به قسمی که: $k_{m-1} < n \le k_m$. همچنین وقتی $n \to \infty$، آنگاه $m \to \infty$. بنابراین T_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_n = \frac{1}{b_p(k_n)} \sum_{m=k_{n-1}+1}^{k_n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{m-j}. \tag{۸.۴}$$

در نتیجه با استفاده از این تعریف می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{b_p(n)} =& \frac{b_p(k_{m-1})}{b_p(n)} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{b_p(k_r)}{b_p(k_{m-1})} T_r \\ &+ \frac{1}{b_p(n)} \sum_{t=k_{m-1}+1}^{n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

با استفاده از (۲.۴) می‌توان نتیجه گرفت، $b_p(k_{m-1}) \ge \alpha b_p(k_m)$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{b_p(n)}\right| \le& \left|\sum_{r=1}^{m-1} \frac{b_p(k_r)}{b_p(k_{m-1})} T_r\right| \\ &+ \frac{1}{\alpha b_p(k_m)} \max_{k_{m-1} < l \le k_m} \left|\sum_{t=k_{m-1}+1}^{l} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}\right|. \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

برای قسمت اول سمت راست نامساوی بالا با استفاده از لم آ.۱۳.۰ (لم توپلیتس) خواهیم داشت:

$$\lim_{m\to\infty} T_m = 0 \;\; a.s.,$$

و

$$\sup_{m \ge 2} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{b_p(k_r)}{b_p(k_{m-1})} < \infty,$$

همچنین برای هر r داریم:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{b_p(k_r)}{b_p(k_{m-1})} = 0.$$

با توجه به اینکه $\{b_p(n), n \geq 0\}$ دنباله‌ای صعودی است، می‌توان نوشت:

$$\sum_{r=1}^{m-1} \frac{b_p(k_r)}{b_p(k_{m-1})} = \sum_{r=1}^{m-1} \prod_{i=r}^{m-2} \frac{b_p(k_i)}{b_p(k_{i+1})} \leq \sum_{r=1}^{m-1} \beta^{m-r-1}$$
$$= \frac{1-\beta^m}{1-\beta} < \frac{1}{1-\beta} < C.$$

بنابراین، قسمت اول سمت راست نامساوی (۹.۴) قریب به یقین همگرا به صفر است، اگر دنباله $\{T_m, m \geq 0\}$ قریب به یقین به صفر همگرا باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
T_n =& \frac{1}{b_p(k_n)} \sum_{m=k_{n-1}}^{k_n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{m-j} \\
=& \frac{1}{b_p(k_n)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{n-1}+1-i}^{k_n-i} A_j (\varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'} + \varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''}) \\
=& \frac{1}{b_p(k_n)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{n-1}+1-i}^{k_n-i} A_j (\varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'}) \\
&+ \frac{1}{b_p(k_n)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{n-1}+1-i}^{k_n-i} A_j (\varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''}) \\
=& T_n^{'} + T_n^{''}.
\end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم T_n قریب به یقین به صفر همگراست، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|T_n| > \epsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|T_n^{'}| > \epsilon/2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|T_n^{''}| > \epsilon/2\right)$$
$$= H_1 + H_2.$$

برای H_1، مشابه اثبات قضیه ۴.۳.۲ با استفاده از لم آ.۰.۲ (نامساوی مارکوف)، لم ۱.۲.۴، لم آ.۰.۵ (نامساوی c_r)، لم آ.۰.۶ (نامساوی جنسن)، لم ۱.۴.۱، لم ۱.۲.۱، (۲۰.۲) و (۱۱.۲)

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_1 \leq& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^q \mathbf{E}\left|T_n^{'}\right|^q}{\epsilon^q} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_p^q(k_n)} \mathbf{E}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{n-1}+1-i}^{k_n-i} A_j(\varepsilon_{ni}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{'})\right|^q \\
\leq& C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_p^q(k_n)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} \mathbf{E}|\varepsilon_{ni}^{'}|^q \\
\leq& C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_p^q(k_n)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i|^q \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|\leq b_p(k_n)\}}\right] \\
&+ C \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} \mathbf{P}\left(|\varepsilon_i| > b_p(k_n)\right) \\
\leq& C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{b_p^q(k_n)} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq b_p(k_n)\}}\right] + C \sum_{n=1}^{\infty} k_n \mathbf{P}\left(\varepsilon > b_p(k_n)\right) \\
&+ C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_p(k_n)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i| \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|> b_p(k_n)\}}\right] \\
\leq& C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{b_p^q(k_n)} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq b_p(k_n)\}}\right] + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{b_p(k_n)} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon> b_p(k_n)\}}\right] \\
=& H_{11} + H_{12}.
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از (۳.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H_{11} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{b_p^q(k_n)} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{b_p(k_{i-1})<\varepsilon\leq b_p(k_i)\}}\right] \\
&= C \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{b_p(k_{i-1})<\varepsilon\leq b_p(k_i)\}}\right] \sum_{n=i}^{\infty} \frac{k_n}{b_p^q(k_n)} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{\infty} b_p^{p-q}(k_i) \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{b_p(k_{i-1})<\varepsilon\leq b_p(k_i)\}}\right] \\
&\leq C\mathbf{E}\varepsilon^p < \infty,
\end{aligned}$$

همچنین بر اساس (۵.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
H_{12} &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{b_p(k_m)<\varepsilon\leq b_p(k_{m+1})\}}\right] \sum_{n=1}^{m} \frac{k_n}{b_p(k_n)} \\
&= C \sum_{m=1}^{\infty} b_p^{p-1}(k_m) \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{b_p(k_m)<\varepsilon\leq b_p(k_{m+1})\}}\right] \\
&\leq C\mathbf{E}\varepsilon^p < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $H_1 < \infty$. همچنین برای H_2، با استفاده از (۱.۴) نتیجه

می‌گیریم $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\,|A_j| < \infty$، بنابراین بر اساس لم ۲.۲.۴، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
H_۲ &\leq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲\mathbf{E}|T_n^{''}|}{\epsilon} \leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{b_p(k_n)} \mathbf{E} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{n-۱}+۱-i}^{k_n-i} A_j(\varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''}) \right| \\
&\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{b_p(k_n)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-۱}+۱-j}^{k_n-j} \mathbf{E} \left| \varepsilon_{ni}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{ni}^{''} \right| \\
&\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{b_p(k_n)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-۱}+۱-j}^{k_n-j} \mathbf{E} \left| \varepsilon_{ni}^{''} \right| \\
&\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{b_p(k_n)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-۱}+۱-j}^{k_n-j} \mathbf{E}\,|A_j|\, \mathbf{E} \left[|\varepsilon_i|\, \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i|>b_p(k_n)\}} \right] \\
&\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{k_n}{b_p(k_n)} \mathbf{E} \left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon>b_p(k_n)\}} \right] \\
&\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E} \left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{b_p(k_m)<\varepsilon\leq b_p(k_{m+۱})\}} \right] \sum_{n=۱}^{m} \frac{k_n}{b_p(k_n)} \\
&\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} b_p^{p-۱}(k_m) \mathbf{E} \left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{b_p(k_m)<\varepsilon\leq b_p(k_{m+۱})\}} \right] \leq C\mathbf{E}\varepsilon^p < \infty.
\end{aligned}$$

در نتیجه $H_۲ < \infty$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت قسمت اول سمت راست نامساوی (۹.۴) وقتی $n \to \infty$، قریب به یقین به صفر همگرا است. برای قسمت دوم سمت راست نامساوی (۹.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{k_{m-۱}<l\leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-۱}+۱-i}^{l-i} A_j \varepsilon_i \right| > \alpha b_p(k_m)\epsilon \right) \\
&\leq \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{k_{m-۱}<l\leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-۱}+۱-i}^{l-i} A_j(\varepsilon_{mi}^{'} - \mathbf{E}\varepsilon_{mi}^{'}) \right| > \alpha b_p(k_m)\epsilon/۲ \right) \\
&\quad + \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{k_{m-۱}<l\leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-۱}+۱-i}^{l-i} A_j(\varepsilon_{mi}^{''} - \mathbf{E}\varepsilon_{mi}^{''}) \right| > \alpha b_p(k_m)\epsilon/۲ \right) \\
&= I_۱ + I_۲.
\end{aligned}$$

برای $I_۱$، مشابه $H_۱$ با استفاده از لم ۱.۲.۴ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_۱ &\leq \sum_{m=۱}^{\infty} \left(\alpha b_p(k_m)\epsilon/۲\right)^{-q} \mathbf{E} \max_{k_{m-۱}<l\leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-۱}+۱-i}^{l-i} A_j(\varepsilon'_{mi} - \mathbf{E}\varepsilon'_{mi}) \right|^q \\ &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{\log^q k_m}{b_p^q(k_m)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{m-۱}+۱-j}^{k_m-j} \mathbf{E}|\varepsilon'_{mi}|^q \\ &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{k_m \log^q k_m}{b_p^q(k_m)} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{\varepsilon\leq b_p(k_m)\}}\right] + C \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{k_m \log^q k_m}{b_p(k_m)} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{\varepsilon> b_p(k_m)\}}\right] \\ &= I_{۱۱} + I_{۱۲}. \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از (۴.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_{۱۱} &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{k_m \log^q k_m}{b_p^q(k_m)} \sum_{i=۱}^{m} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{b_p(k_{i-۱})<\varepsilon\leq b_p(k_i)\}}\right] \\ &= C \sum_{i=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{b_p(k_{i-۱})<\varepsilon\leq b_p(k_i)\}}\right] \sum_{m=i}^{\infty} \frac{k_m \log^q k_m}{b_p^q(k_m)} \\ &\leq C \sum_{i=۱}^{\infty} b_p^{p-q}(k_i) \log^q b_p(k_i) \mathbf{E}\left[\varepsilon^q \mathbf{I}_{\{b_p(k_{i-۱})<\varepsilon\leq b_p(k_i)\}}\right] \\ &\leq C\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log^q(۱+\varepsilon)\right] < \infty, \end{aligned}$$

همچنین بر اساس (۶.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_{۱۲} &\leq C \sum_{i=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{b_p(k_i)<\varepsilon\leq b_p(k_{i+۱})\}}\right] \sum_{m=۱}^{i} \frac{k_m \log^q k_m}{b_p(k_m)} \\ &= C \sum_{i=۱}^{\infty} b_p^{p-۱}(k_i) \log^q b_p(k_i) \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{b_p(k_i)<\varepsilon\leq b_p(k_{i+۱})\}}\right] \\ &\leq C\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log^q(۱+\varepsilon)\right] < \infty. \end{aligned}$$

برای $I_۲$، مشابه $H_۲$ بر اساس لم ۲.۳.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_۲ &\leq \sum_{m=۱}^{\infty} \left(\alpha b_p(k_m)\epsilon/۲\right)^{-۱} \mathbf{E} \max_{k_{m-۱}<l\leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-۱}+۱-i}^{l-i} A_j(\varepsilon''_{ni} - \mathbf{E}\varepsilon''_{ni}) \right| \\ &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۱}{b_p(k_m)} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=k_{m-۱}+۱-j}^{k_m-j} \mathbf{E}\left|\varepsilon''_{ni}\right| \leq C\mathbf{E}\varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

در نتیجه وقتی $n \to \infty$، قسمت دوم سمت راست نامساوی (۹.۴) نیز قریب به یقین به صفر همگرا است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\sum_{t=۱}^{n} X_t}{b_p(n)} \xrightarrow{a.s.} ۰ \qquad as\ n \to \infty.$$

که این نتیجه مورد نظر است. $\square$

در ادامه قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $۱ < p < ۲$ و $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon^p \log^q(۱+\varepsilon)\right] < \infty$، همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، $\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|\right)^q < \infty$ و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{\sum_{t=۱}^{n} X_t}{n^{۱/p}} \xrightarrow{a.s.} ۰ .$$

برهان. دو دنباله از اعداد حقیقی و صحیح مثبت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{b_p(n) = n^{۱/p}, n \geq ۱\}, \qquad \{k_n = ۲^n, n \geq ۱\}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{b_p(k_n)}{b_p(k_{n+۱})} = \frac{۲^{n/p}}{۲^{\frac{n+۱}{p}}} = ۲^{-۱/p}$$

بنابراین، برای $p > ۱$ شرط (۲.۴) برقرار است. همچنین برای $۱ < p < q \leq ۲$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{k_n}{b_p^q(k_n)} &= \sum_{n=i}^{\infty} \frac{۲^n}{۲^{qn/p}} = \sum_{n=i}^{\infty} \left(۲^{۱-q/p}\right)^n \\ &= O\left(۲^{i(۱-q/p)}\right) = O\left(b_p^{p-q}(k_i)\right), \end{aligned}$$

در نتیجه (۳.۴) برقرار است. به‌علاوه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{k_n \log^q k_n}{b_p^q(k_n)} &\leq C \sum_{n=i}^{\infty} \frac{۲^n n^q}{۲^{qn/p}} = C \sum_{n=i}^{\infty} \left(۲^{۱-q/p}\right)^n n^q \\ &= O\left(۲^{i(۱-q/p)} i^q\right) = O\left(b_p^{p-q}(k_i) \log^q b_p(k_i)\right), \end{aligned}$$

با توجه تساوی بالا شرط (۴.۴) برقرار است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=۱}^{i} \frac{k_n}{b_p(k_n)} &= \sum_{n=۱}^{i} \frac{۲^n}{۲^{n/p}} = \sum_{n=۱}^{i} \left(۲^{۱-۱/p}\right)^n \\ &= O\left(۲^{i(۱-۱/p)}\right) = O\left(b_p^{p-۱}(k_i)\right), \end{aligned}$$

بر اساس تساوی بالا (۵.۴)، برقرار است. در انتها نشان می‌دهیم، شرط (۶.۴) برقرار است.

$$\begin{aligned} \sum_{n=۱}^{i} \frac{k_n \log^q k_n}{b_p(k_n)} &\leq C \sum_{n=۱}^{i} \frac{۲^n n^q}{۲^{n/p}} = \sum_{n=۱}^{i} \left(۲^{۱-۱/p}\right)^n n^q \\ &= O\left(۲^{i(۱-۱/p)} i^q\right) = O\left(b_p^{p-۱}(k_i) \log^q b_p(k_i)\right). \end{aligned}$$

بنابراین بر اساس قضیه ۱.۳.۴، وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{\sum_{t=۱}^{n} X_t}{n^{۱/p}} \xrightarrow{a.s.} ۰ .$$

□

ملاحظه ۱.۳.۴. قضیه ۲.۳.۴ با قضیه ۵.۴.۳ معادل است.

ملاحظه ۲.۳.۴. اگر $\{A_n = a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای غیر تصادفی از اعداد(ضرایب ثابت) با شرط $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$، باشد. قضیه ۲.۳.۴ مشابه قضیه ۳.۵.۱ است.

در ادامه قانون قوی اعداد بزرگ برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\left[\varepsilon \log^{۳}(۱+\varepsilon)\right] < \infty$، همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر، $\mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|\right)^{۲} < \infty$ و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. آنگاه وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{۱}{n} \sum_{t=۱}^{n} X_t \xrightarrow{a.s.} ۰\,.$$

برهان. در قضیه ۱.۳.۴، اگر $\{b_p(n) = n, n \geq ۱\}$ و $\{k_n = ۲^n, n \geq ۱\}$ باشند. بنابراین قسمت اول سمت راست نامساوی (۹.۴)، وقتی $n \to \infty$، قریب به یقین همگرا به صفر است. برای اینکه:

$$\begin{aligned} H_{۱۱} &\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{۲^{۲n}} \mathbf{E}\left[\varepsilon^{۲} \mathbf{I}_{\{\varepsilon \leq ۲^n\}}\right] \leq C \sum_{i=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon^{۲} \mathbf{I}_{\{۲^{i-۱} < \varepsilon \leq ۲^i\}}\right] \sum_{n=i}^{\infty} ۲^{-n} \\ &\leq C \sum_{i=۱}^{\infty} ۲^{-i} \mathbf{E}\left[\varepsilon^{۲} \mathbf{I}_{\{۲^{i-۱} < \varepsilon \leq ۲^i\}}\right] \leq C \mathbf{E}\varepsilon < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{۱۲} &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \sum_{n=۱}^{m} ۱ \leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \log ۲^m \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \\ &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \log(۱+\varepsilon) \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \leq C \mathbf{E}\left[\varepsilon \log(۱+\varepsilon)\right] < \infty, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} H_{۲} &\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=۲^{n-۱}+۱-j}^{۲^n - j} \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i| \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > ۲^n\}}\right] \\ &\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \sum_{n=۱}^{m} ۱ \leq C \mathbf{E}\left[\varepsilon \log(۱+\varepsilon)\right] < \infty. \end{aligned}$$

به صورت مشابه، برای قسمت دوم سمت راست نامساوی (۹.۴)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_{۱۱} &\leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n n^{۲}}{۲^{۲n}} \mathbf{E}\left[\varepsilon^{۲} \mathbf{I}_{\{\varepsilon \leq ۲^n\}}\right] \leq C \sum_{i=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon^{۲} \mathbf{I}_{\{۲^{i-۱} < \varepsilon \leq ۲^i\}}\right] \sum_{n=i}^{\infty} ۲^{-n} n^{۲} \\ &\leq C \sum_{i=۱}^{\infty} ۲^{-i} i^{۲} \mathbf{E}\left[\varepsilon^{۲} \mathbf{I}_{\{۲^{i-۱} < \varepsilon \leq ۲^i\}}\right] \leq C \mathbf{E}\left[\varepsilon \log^{۲}(۱+\varepsilon)\right] < \infty, \end{aligned}$$

$$I_{۱۲} \leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \sum_{n=۱}^{m} n^{۲} \leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \log^{۳} ۲^m \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right]$$
$$\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \log^{۳}(۱+\varepsilon) \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \leq C\mathbf{E}\left[\varepsilon \log^{۳}(۱+\varepsilon)\right] < \infty,$$

و

$$I_{۲} \leq C \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^{۲}}{۲^n} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=۲^{n-۱}+۱-j}^{۲^n - j} \mathbf{E}\left[|\varepsilon_i| \mathbf{I}_{\{|\varepsilon_i| > ۲^n\}}\right]$$
$$\leq C \sum_{m=۱}^{\infty} \mathbf{E}\left[\varepsilon \mathbf{I}_{\{۲^m < \varepsilon \leq ۲^{m+۱}\}}\right] \sum_{n=۱}^{m} n^{۲} \leq C\mathbf{E}\left[\varepsilon \log^{۳}(۱+\varepsilon)\right] < \infty.$$

بنابراین، وقتی $n \to \infty$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\sum_{t=۱}^{n} X_t}{n} \xrightarrow{a.s.} ۰ \qquad as\ n \to \infty.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

ملاحظه ۳.۳.۴. قضیه ۳.۳.۴ با نتیجه ۱.۴.۳ معادل است.

ملاحظه ۴.۳.۴. اگر $\{A_n = a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای غیر تصادفی از اعداد باشد(ضرایب ثابت) و شرط $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$، برقرار باشد، قضیه ۳.۳.۴ مشابه قضیه ۱.۵.۱ و ۲.۵.۱ است.

در ادامه حالتی از قضیه ۱.۳.۴ را وقتی $p = ۱$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\varepsilon < \infty$، همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}|A_j| < \infty \tag{۱۰.۴}$$

و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. اگر $\{b_p(n), n \geq ۱\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی مثبت نسبت به n و $\{k_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح مثبت نسبت به n، با

$$۰ < \alpha = \inf_{n \geq ۱} \frac{b(k_n)}{b(k_{n+۱})} \leq \sup_{n \geq ۱} \frac{b(k_n)}{b(k_{n+۱})} = \beta < ۱, \tag{۱۱.۴}$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{k_n}{b(k_n)} = O(۱), \tag{۱۲.۴}$$

باشند. آنگاه وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{\sum_{t=۱}^{n} X_t}{b(n)} \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

برهان. با تعریف T_n به صورت (۸.۴)، برای قسمت اول سمت راست نامساوی (۹.۴) مشابه برهان قضیه ۱.۳.۴ نشان می‌دهیم، وقتی $n \to \infty$، قریب به یقین همگرا به صفر است. بنابراین با استفاده از (۱۰.۴) و (۱۲.۴)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|T_n| > \epsilon\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}|T_n|}{\epsilon} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b(k_n)} \mathbf{E}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} \varepsilon_i A_j\right| \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b(k_n)} \mathbf{E}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} |\varepsilon_i A_j|\right) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b(k_n)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n-j} \mathbf{E}\,|\varepsilon_i|\, \mathbf{E}\,|A_j| \\
&\leq C\mathbf{E}\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{b(k_n)} \leq C\mathbf{E}\,|\varepsilon| < \infty.
\end{aligned}$$

برای قسمت دوم سمت راست نامساوی (۹.۴)، با استفاده از (۱۰.۴) و (۱۲.۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{k_{m-1}<l\leq k_m} \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-1}+1-i}^{l-i} A_j \varepsilon_i\right| > \alpha b(k_m)\epsilon\right) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha b(k_m)\epsilon\right)^{-1} \mathbf{E} \max_{k_{m-1}<l\leq k_m} \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-1}+1-i}^{l-i} A_j \varepsilon_i\right| \\
&\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b(k_m)} \mathbf{E}\left(\max_{k_{m-1}<l\leq k_m} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-1}+1-i}^{l-i} |A_j|\,|\varepsilon_i|\right) \\
&\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b(k_m)} \mathbf{E}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-1}+1-i}^{k_m-i} |A_j|\,|\varepsilon_i|\right) \\
&\leq C\mathbf{E}\,|\varepsilon| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{b(k_m)} \leq C\mathbf{E}\,|\varepsilon| < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه مد نظر به دست می‌آید. □

مثال ۱.۳.۴. در قضیه ۴.۳.۴، اگر $\{b(n) = n\log n\,(\log\log n)^2, n \geq 1\}$ و $\{k_n = 2^n, n \geq 1\}$ باشند، آنگاه داریم:

$$0 < \frac{b(k_n)}{b(k_{n+1})} = \frac{2^n \log 2^n \left(\log\log 2^n\right)^2}{2^{n+1} \log 2^{n+1} \left(\log\log 2^{n+1}\right)^2} < 1$$

بنابراین، شرط (۲.۴) برقرار است. همچنین می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=i}^{\infty} \frac{k_n}{b(k_n)} = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log 2^n \left(\log\log 2^n\right)^2}$$
$$= \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n \log 2 \left(\log(n \log 2)\right)^2} = O\left(1\right),$$

در نتیجه شرط (۱۲.۴)، برقرار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{n \log n \left(\log\log n\right)^2} \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

در ادامه حالتی از قضیه ۱.۳.۴ را وقتی $p = 2$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنید $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ یک فرآیند خطی با ضرایب تصادفی، که در آن $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر به‌علاوه تحت تسلط متغیر تصادفی نامنفی ε و $\mathbf{E}\varepsilon^2 < \infty$، همچنین $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با (۱.۴) و مستقل از دنباله $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ باشد. اگر $\{b_p(n), n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی مثبت نسبت به n و $\{k_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح مثبت نسبت به n، با شرط (۱۱.۴) و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n \log^2 k_n}{b^2(k_n)} = O\left(1\right), \tag{۱۳.۴}$$

باشند. آنگاه وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{b(n)} \xrightarrow{a.s.} 0\,.$$

برهان. روند اثبات مشابه برهان قضیه ۴.۳.۴ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|T_n| > \epsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}|T_n|^2}{\epsilon^2} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^2(k_n)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=k_{n-1}+1-j}^{k_n - j} \mathbf{E}\varepsilon_i^2$$
$$= C\mathbf{E}\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{b^2(k_n)} \leq C\mathbf{E}\varepsilon^2 < \infty,$$

و

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-1}+1-i}^{l-i} A_j \varepsilon_i \right| > \alpha b(k_m)\epsilon\right)$$
$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha b(k_m)\epsilon\right)^{-2} \mathbf{E} \max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k_{m-1}+1-i}^{l-i} A_j \varepsilon_i \right|^2$$
$$\leq C\mathbf{E}\varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m \log^2 k_m}{b^2(k_m)} \leq C\mathbf{E}\varepsilon^2 < \infty.$$

بنابراین، میتوان نتیجه گرفت:

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{b(n)} \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad as\ n \to \infty.$$

در نتیجه، برهان کامل می‌شود. □

مثال ۲.۳.۴. در قضیه ۵.۳.۴، اگر

$$\{b(n) = \left(n \log^{۳} n \,(\log\log n)^{۲}\right)^{۱/۲}, n \geq ۱\}$$

و

$$\{k_n = ۲^n, n \geq ۱\}$$

باشند. آنگاه شرط‌های (۱۱.۴) و (۱۳.۴) برقرار هستند. در نتیجه می‌توان گفت:

$$\frac{\sum_{t=۱}^{n} X_t}{\left(n \log^{۳} n \,(\log\log n)^{۲}\right)^{۱/۲}} \xrightarrow{a.s.} ۰ \qquad as\ n \to \infty.$$

فصل ۵

پیشنهادات

در این رساله مهمترین قضایای حدی شامل قانون قوی اعداد بزرگ، مرتبه همگرایی قانون قوی مارسینکویچ-زیگمونت و همگرایی کامل گشتاروی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی به دست آمده‌اند.

i. با توجه به اینکه برای نشان دادن سازگاری آماره از قانون قوی اعداد بزرگ استفاده می‌شود، می‌توان نتایج این تحقیق را در برآورد پارامتر فرآیند خطی با ضرایب تصادفی و سری‌های زمانی میانگین متحرک که حالت خاصی از فرآیند خطی است، استفاده کرد. به عنوان مثال می‌توان نتایج ساودره و همکاران [۶۰] را برای شرایط ضعیف‌تری بیان کرد.

ii. در ادامه می‌توان به بررسی فرآیند خطی با ضرایب تصادفی که در آن شرایط ضعیف‌تری در نظر گرفته شده‌اند، پرداخت و سپس قضایای حدی را بررسی کرد.

iii. همچنین می‌توان به بررسی قضیه حد مرکزی برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی پرداخت.

iv. در این تحقیق برای فرآیند خطی با ضرایب تصادفی به صورت:

$$Z_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j X_{t-j}$$

دو دنباله $\{A_n, n \geq \mathbb{Z}\}$ و $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ از یکدیگر مستقل فرض شدند. می‌توان با بیان وابستگی میان این دو دنباله به بررسی قضایای خطی پرداخت.

v. همچنین می‌توان فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را به صورت:

$$Z_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{nj} X_{n(t-j)}$$

در نظر گرفت که در آن $\{A_{ni}; u_n \leq i \leq v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\{X_{ni}; u_n \leq i \leq v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ آرایه های تصادفی مستقل یا وابسته هستند، در نظر بگیریم، و سپس قضایای حدی آن را بررسی کرد.

vi. در ادامه می‌توان تمامی حالت‌های ذکر شده از فرآیند خطی با ضرایب تصادفی را در فضای هیلبرت مورد بررسی قرار داد.

مراجع

[1] Adler, A., Rosalsky, A. (1987): Some general strong laws for weighted sums of stochastically dominated random variables. **Stochastic Analysis and Applications**, 5(1), 1-16.

[2] Adler, A., Rosalsky, A., Taylor, R. L. (1989): Strong laws of large numbers for weighted sums of random elements in normed linear spaces. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, 12(3), 507-529.

[3] Ash, R. B., Doléans-Dade, C. (2000): **Probability and Measure Theory.** Academic Press, San Diego, second edition.

[4] Athreya, K. B., Lahiri, S. N. (2006): **Measure Theory and Probability Theory .** New York, Springer Science & Business Media.

[5] Baum, L. E., Katz, M. (1965): Convergence rates in the law of large numbers. **Transactions of the American Mathematical Society,** 120(1), 108-123.

[6] Bernoulli, J. (1713): **Usum & Applicationem Praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis .** Ars Conjectandi.

[7] Birkel, T. (1988): A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables. **Statistics and Probability Letters,** 7(1), 17-20 .

[8] Brockwell, P. J., Davis, R. A. (2006): **Time Series: Theory and Methods.** New York, Springer Science & Business Media.

[9] Characiejus, V., Račkauskas, A. (2016): Weak law of large numbers for linear processes. **Acta Mathematica Hungarica,** 149(1), 215-232.

[10] Christofides, T. C., Vaggelatou, E. (2004): A connection between supermodular ordering and positive/negative association. **Journal of Multivariate Analysis,** 88(1), 138-151.

[11] Chow, Y. S. (1988): On the rate of moment convergence of sample sums and extremes. **Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica ,** 16(3), 177-201.

[12] Chung, K. L. (2001): **A Course in Probability Theory.** Academic press, San Diego, third edition.

[13] Chen, Y., Chen, A., Ng, K. W. (2010): The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables. **Journal of Applied Probability,** 47(4), 908-922.

[14] Devroye, L. (1981): Laws of the iterated logarithm for order statistics of uniform spacings. **The Annals of Probability,** 860-867.

[15] Diggle, P. J., Wasel, I. (1993): **On periodogram-based spectral estimation for replicated time series. In: Rao S (ed) Developments in Time Series Analysis.** Chapman and Hall, London.

[16] Ding, Y., Tang, X., Deng, X., Wang, X. (2017): Complete moment convergence for weighted sums of extended negatively dependent random variables. **Filomat,** 31(14) 4341-4352.

[17] Durrett, R. (2013): **Probability: Theory and Examples.** Cambridge university press, London.

[18] Erdös, P. (1949): On a theorem of Hsu and Robbins. **The Annals of Mathematical Statistics,** 20(2), 286-291.

[19] Fakoor, V., Azarnoosh, H. A. (2005): A note on the strong law of large numbers. **Journal of the Iranian Statistical Society-JIRSS,** 4(2), 107-111.

[20] Franke, J., Härdle, W. (1992): On bootstrapping kernel spectral estimates. **The Annals of Statistics,** 20, 121-145.

[21] Gao, S., Zhang, J., Zhou, T. (2003): Law of large numbers for sample mean of random weighting estimate. **Information Sciences,** 155(1), 151-156.

[22] Giraitis, L., Koul, H. L., Surgailis, D. (2012): **Large Sample Inference for Long Memory Processes.** Imperial College Press, London.

[23] Gut, A. (2013): **Probability: A Graduate Course.** Springer, New York.

[24] Guo, M., Zhu, D., Ren, Y. (2015): Complete q th moment convergence of weighted sums for arrays of rowwise negatively associated random variables. **Stochastics,** 87(2), 257-272.

[25] Hacking, I. (1983): Nineteenth century cracks in the concept of determinism. **Journal of the History of Ideas,** 44(3), 455-475.

[26] Hsu, P. L., Robbins, H. (1947): Complete convergence and the law of large numbers. **Proceedings of the National Academy of Sciences,** 33(2), 25-31.

[27] Hu, T. (2000): Negatively superadditive dependence of random variables with applications, **Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,** 16(1) 133–144.

[28] Joag-Dev, K., Proschan, F. (1983): Negative association of random variables with applications.**The Annals of Statistics,** 11(1), 286-295.

[29] Johnson, N. L., Kotz, S. (1990): Randomly weighted averages: Some aspects and extensions. **The American Statistician,** 44(3), 245-249.

[30] Katz, M. L. (1963): The probability in the tail of a distribution. **The Annals of Mathematical Statistics,** 34(1), 312-318.

[31] Kemperman, J. H. B., (1977): On the FKG-inequalities for measures on a partially ordered space, **Indagationes Mathematicae,** 39(1), 313-331.

[32] Kim, H. C. (2008): On the complete moment convergence of moving average processes generated by iid random variables. **Korean Annals of Mathematics,** 25(1), 7-17.

[33] Kim, T. S., Ko, M. H. (2008): Complete moment convergence of moving average processes under dependence assumptions. **Statistics and Probability Letters,** 78(7), 839-846.

[34] Kim, T. S., Ko, M. H., Choi, Y. K. (2008): Complete moment convergence of moving average processes with dependent innovations. **Journal of the Korean Mathematical Society,** 45(2), 355-365.

[35] Ko, M. H. (2008): Strong laws of large numbers for linear processes generated by associated random variables in a Hilbert space. **Honam Mathematical Journal,** 30(4), 703-711.

[36] Ko, M. H., Kim, T. S., Ryu, D. H. (2008): On the complete moment convergence of moving average processes generated by $\rho^{\star}$-mixing sequences. **Korean Mathematical Society. Communications,** 23(4) 597-606.

[37] Kulik, R. (2006): Limit theorems for moving averages with random coefficients and heavy-tailed noise. **Journal of Applied Probability,** 43(1), 245-256.

[38] Laha, R. G. and Rohatgi, V. K. (1979): **Probability Theory.** Wiley, New York.

[39] Le Guo, M. (2014): Equivalent conditions of complete moment convergence of weighted sums for φ-mixing sequence of random variables. **Communications in Statistics. Theory and Methods,** 43(10-12), 2527-2539.

[40] Lehmann, E. L. (1966): Some concepts of dependence. **The Annals of Mathematical Statistics,** 37, 1137-1153.

[41] Li, D., Rao, M. B., Wang, X. (1992): Complete convergence of moving average processes. **Statistics and Probability Letters**, 14(2), 111-114.

[42] Liu, L. (2010): Necessary and sufficient conditions for moderate deviations of dependent random variables with heavy tails. **Science in China. Series A. Mathematics,** 53(6), 1421-1434.

[43] Lin, Z., Bai, Z. (2010): **Probability Inequalities.** Springer, New York.

[44] Loeve, M. (1963): **Probability Theory.** 3rd edition. The University Series in Higher Mathematics. Princeton, N. J.-Toronto-New York-London: Van Nostrand.

[45] Louhichi, S., Soulier, P. (2000): Marcinkiewicz–Zygmund strong laws for infinite variance time series. **Statistical Inference for Stochastic Processes Stat,** 3(1), 31-40 .

[46] Newman, C. M. (1984): Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. **Lecture Notes-Monograph Series,** 5, 127-140.

[47] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A. (1937): Quelques théoremes sur les fonctions indépendantes. **Fundamenta Mathematicae,** 29, 60-90.

[48] McLeish, D. L. (1975): A maximal inequality and dependent strong laws. **The Annals of Probability,** 3(5), 829-839.

[49] McLeish, D. L. (1975): Invariance principles for dependent variables. **Probability Theory and Related Fields,** 32(3), 165-178.

[50] McLeish, D.L. (1977): **The Drunkard's Walk: How Randomness Rules Our Lives .** Vintage Books, New York.

[51] Mitrinovic, D. S., Vasic, P. M. (1970): **Analytic Inequalities.** (Vol. 1). Springer-verlag, Berlin.

[52] Mlodinow, L. (2009): On the invariance principles for nonstationary mixingales. **The Annals of Probability,** 5(4) 616-621.

[53] Patterson, R. F., et al. (2001): Limit theorems for negatively dependent random variables. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,** 47(2), 1283-1295.

[54] Petrov, V. V. (1996): On the strong law of large numbers. **Statistics and Probability Letters,** 26(4), 377-380.

[55] Phillips, P. C., Solo, S. (1992): Asymptotics for linear processes. **The Annals of Statistics,** 971-1001.

[56] Priestley, M. (1981): **Spectral Analysis and Time Series.** Academic, Boston.

[57] Pruitt, W. E. (1966): Summability of independent random variables (Summability of independent random variables, discussing convergence properties of sequence). **Journal of Mathematical and Mechanics,** 15, 769-776.

[58] Qiu, D., Chen, P. (2014): Complete moment convergence for iid random variables. **Statistics and Probability Letters,** 91, 76-82.

[59] Qiu, D., Chen, P. (2015): Complete moment convergence for product sums of sequence of extended negatively dependent random variables. **Journal of Inequalities and Applications,** 2015:212, 15 pp., doi:10.1186/s13660-015-0730-4.

[60] Saavedra, P., et al. (2008): Estimation of population spectrum for linear processes with random coefficients. **Computational Statistics,** 23(1), 79-98.

[61] Shen, A. (2016): Complete convergence for weighted sums of END random variables and its application to nonparametric regression models. **Journal of Nonparametric Statistics,** 28(4), 702-715.

[62] Shen, A., Zhang, Y., and Wang, W. (2017): Complete convergence and complete moment convergence for extended negatively dependent random variables. **Filomat** 31(5), 1381-1394.

[63] Sung, S. H. (2009): Moment inequalities and complete moment convergence. **Journal of Inequalities and Applications,** Article ID 271265, 14 pp., doi:10.1155/2009/271265

[64] Sung, S. H. (2011): Convergence of moving average processes for dependent random variables. **Communications in Statistics. Theory and Methods,** 40(13), 2366-2376.

[65] Sung, S. H. (2013): Complete q th moment convergence for arrays of random variables. **Journal of Inequalities and Applications,** 2013:24, 11 pp, doi:10.1186/1029-242X-2013-24.

[66] Wang, J., Wu, Q. (2012): Central limit theorem for stationary linear processes generated by linearly negative quadrant-dependent sequence. **Journal of Inequalities and Applications,** 2012:45, 7 pp., doi:10.1186/1029-242X-2012-45.

[67] Wang, S., Wang, X. (2013): Precise large deviations for random sums of END real-valued random variables with consistent variation. **Journal of Mathematical Analysis and Applications,** 402(2), 660-667.

[68] Wang, X., Shen, A., Li, X. (2013): A note on complete convergence of weighted sums for array of rowwise AANA random variables. **Journal of Inequalities and Applications,** 2013:359., 13 pp., doi:10.1186/1029-242X-2013-359.

[69] Wang, X., Li, X., Hu, S. (2014): Complete convergence of weighted sums for arrays of rowwise φ-mixing random variables. **Applications of Mathematics,** 59(5), 589-607.

[70] Wang, X., et al. (2015): Complete consistency for the estimator of nonparametric regression models based on extended negatively dependent errors. **Statistics,** 49(2), 396-407.

[71] Wu, Y. F., Cabrea, M. O., Volodin, A. (2014): Complete convergence and complete moment convergence for arrays of rowwise END random variables. **Glasnik Matematicki. Serija III.,** 49(69) 449-468.

[72] Yang, W., et al. (2012): On complete convergence of moving average process for AANA sequence. **Discrete Dynamics in Nature and Society,** Article ID315138, 15 pp., doi:10.1155/2012/86393.

[73] Yang, W., et al. (2014): The convergence of double-indexed weighted sums of martingale differences and its application. **Abstract and Applied Analysis,** 2014, Article ID 893906.

[74] Yang, W., Hu, S. (2015): Complete moment convergence of pairwise NQD random variables. **Stochastics,** 87(2), 199-208.

[75] Zhang, G. (2010): Complete convergence for Sung's type weighted sums of END random variables. **Journal of Inequalities and Applications,** Article ID 383805, 8 pp., doi:10.1155/2010/383805.

[76] Zhang, L. X. (1996): Complete convergence of moving average processes under dependence assumptions. **Statistics and Probability Letters**, 30(2), 165-170.

[77] Zhang, T., Chen, P., Sung, S. H. (2017): Convergence rates in the law of large numbers for long-range dependent linear processes. **Journal of Inequalities and Applications**, 2017(1), 241.

[78] Zhang, S., Qu, C., Sun, F. (2018): On the Complete Convergence for END Random Variables. **Applied Mathematical Sciences,** 12(4), 161-173.

[79] Zhou, X. (2010): Complete moment convergence of moving average processes under φ-mixing assumptions. **Statistics and Probability Letters,** 80(5-6), 285-292.

پیوست آ

نامساوی‌ها و تعاریف

نامساوی‌ها

در ابتدا برخی از نامساوی‌های احتمالی که در فصل‌های این رساله به آنها نیاز داریم، بیان می‌کنیم. در ابتدا نامساوی‌هایی که برای تمامی متغیرهای تصادفی برقرار هستند ارائه می‌کنیم.

لم آ.۰.۱. گات [۱] [۲۳]، (لم اول بورل کانتلی [۲]) فرض کنید $\{A_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right) < \infty$، آنگاه داریم:

$$\mathbf{P}\left(A_n,\ i.o.\right) = ۰.$$

لم آ.۰.۲. گات [۲۳]، (نامساوی مارکوف [۳]) فرض کنید $r > ۰$، اگر $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ و $x > ۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathbf{P}\left(|X| > x\right) \leq \frac{\mathbf{E}|X|^r}{x^r}.$$

لم آ.۰.۳. میریکوویچ [۴] و واسیک [۵] [۵۱]، (نامساوی کلاسیک کوشی شوارتز [۶]) فرض کنید

[۱] Gut

[۲] Borel Cantelli lemma

[۳] Markov's inequality

[۴] Mitrinovic

[۵] Vasic

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ و $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

لم آ.۰.۴. گات [۲۳]، (لم فاتو [۷]) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد. آنگاه داریم:

$$\mathbf{E} \liminf_{n\to\infty} X_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E} X_n.$$

نتیجه آ.۰.۱. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد. آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} X_n.$$

لم آ.۰.۵. گات [۲۳]، (نامساوی c_r [۸]) فرض کنید $r > 0$ باشد. اگر $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ و $\mathbf{E}|Y|^r < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}|X+Y|^r \leq c_r \left(\mathbf{E}|X|^r + \mathbf{E}|Y|^r\right).$$

که در آن، $c_r = 1$ برای $r \leq 1$ و $c_r = 2^{r-1}$ برای $r > 1$ است.

نامساوی c_r برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت زیر است.

ملاحظه آ.۰.۵. لین [۹] و بای [۱۰] [۴۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، $\mathbf{E}|X_i|^r < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}|\sum_{i=1}^{n} X_i|^r \leq c_r \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}|X_i|^r.$$

که در آن، $c_r = 1$ برای $r \leq 1$ و $c_r = n^{r-1}$ برای $r > 1$ است.

لم آ.۰.۶. گات [۲۳]، (نامساوی جنسن [۱۱]) فرض کنید X یک متغیر تصادفی و g یک تابع محدب، همچنین X و $g(X)$ انتگرال‌پذیر باشند. آنگاه داریم:

$$g(\mathbf{E}X) \leq \mathbf{E}g(X).$$

لم آ.۰.۷. گات [۲۳]، (نامساوی هولدر [۱۲]) فرض کنید $p^{-1} + q^{-1} = 1$ باشد. اگر $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ و $\mathbf{E}|Y|^q < \infty$ باشند، آنگاه داریم:

$$|\mathbf{E}XY| \leq \mathbf{E}|XY| \leq \left(\mathbf{E}|X|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\mathbf{E}|Y|^q\right)^{1/q}.$$

---

[۶] Classical inequality of Cauchy Schwarz

[۷] Fatou's lemma

[۸] c_r inequality

[۹] Lin

[۱۰] Bai

[۱۱] Jensen's inequality

[۱۲] Hölder's inequality

در ادامه نامساوی هولدر را برای سری‌ها بیان می‌کنیم.

لم آ.۰.۸. (نامساوی هولدر) فرض کنید $\{x_n, n \geq 1\}, \{y_n, n \geq 1\} \in \mathbb{R}^n$ باشد. اگر $p^{-1}+q^{-1}=1$ باشد. آنگاه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

لم آ.۰.۹. سانگ [13] [۶۱]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ و $\{Y_n, n \geq 1\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشند، آنگاه برای هر $n \geq 1$، $q > 1$، $\epsilon > 0$ و $a > 0$ داریم:

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{t=1}^{n}(X_t+Y_t)\right| - \epsilon a\right)^{+} \leq \left(\frac{1}{\epsilon^q}+\frac{1}{q-1}\right)\frac{1}{a^{q-1}}\mathbf{E}\left|\sum_{t=1}^{n} X_n\right|^q + \mathbf{E}\left|\sum_{t=1}^{n} Y_t\right|,$$

و

$$\mathbf{E}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{t=1}^{k}(X_t+Y_t)\right| - \epsilon a\right)^{+} \leq \left(\frac{1}{\epsilon^q}+\frac{1}{q-1}\right)\frac{1}{a^{q-1}}\mathbf{E}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{t=1}^{k} X_t\right|^q\right) + \mathbf{E}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{t=1}^{k} Y_t\right|\right).$$

در ادامه نامساوی‌هایی که برای متغیرهای تصادفی مستقل برقرار است را بیان می‌کنیم.

لم آ.۰.۱۰. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با گشتاور دوم متناهی و میانگین صفر باشند، آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \leq 4\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}X_i^2.$$

در ادامه به بیان همگرایی‌ها می‌پردازیم.

همگرایی در احتمال

تعریف آ.۰.۱. چانگ [14] [۱۲]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. آنگاه این دنباله را همگرا در احتمال [15] به متغیر تصادفی X گوییم، هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

همگرایی در احتمال را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad as \;\; n \to \infty.$$

[13] Sung

[14] Chung

[15] Converges in probability

همگرایی قریب به یقین

تعریف آ.۰.۲. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. آنگاه این دنباله را همگرا قریب به یقین [۱۶] به متغیر تصادفی X گوییم، هر گاه داشته باشیم:

$$\mathbf{P}\left(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \ as \ n \rightarrow \infty\}\right) = ۱.$$

همگرایی قریب به یقین را به اختصار با $(a.s.)$، و به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \qquad as \quad n \rightarrow \infty.$$

تعریف آ.۰.۳. لاها [۱۷] و روهاتگی [۱۸] [۳۸]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. آنگاه این دنباله را همگرا قریب به یقین به متغیر تصادفی X گوییم، هر گاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ داشته باشیم:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \epsilon : for \ n \geq m\right) = ۰.$$

ملاحظه آ.۰.۶. گات [۲۳]، همگرایی قریب به یقین را همچنین همگرایی با احتمال یک [۱۹] نیز نامیده می‌شود، که به اختصار با $(w.p.۱)$ نشان داده می‌شود.

ملاحظه آ.۰.۷. گات [۲۳]، همگرایی قریب به یقین، همگرایی در احتمال را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن همیشه برقرار نیست. همچنین وقتی $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی یکنوا باشد، همگرایی در احتمال، همگرایی قریب به یقین را نتیجه می‌دهد.

یکی از کاربردهای همگرایی قریب به یقین برای نشان دادن قانون قوی اعداد بزرگ است. چن [۲۰] و همکاران قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی END را بررسی کردند.

قضیه آ.۰.۶. چن و همکاران [۱۳]، فرض کنید $\{X_۱, X_۲, \cdots, X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی END با توزیع مشترک F باشند. اگر $\mathbf{E}|X_۱| < \infty$ و $\mathbf{E}|X_۱| = \mu$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} \mu \quad as \quad n \rightarrow \infty.$$

---

[۱۶] Converges almost surely

[۱۷] Laha

[۱۸] Rohatgi

[۱۹] Convergence with probability 1

[۲۰] Chen

همگرایی کامل

تعریف آ.۰.۴. سو [۲۱] و رابینز [۲۲] [۲۶]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. این دنباله را همگرای کامل [۲۳] به متغیر تصادفی X گوییم، هر گاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ داشته باشیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < \infty.$$

ملاحظه آ.۰.۸. لاها و روهاتگی [۳۸]، همگرایی کامل، همگرایی قریب به یقین را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن همیشه برقرار نیست. همچنین وقتی $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همگرای قریب به یقین به ثابت C باشد، آنگاه همگرایی کامل را نتیجه می‌دهد.

لم آ.۰.۱۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد، آنگاه داریم:

$$\mathbf{E}|X| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X| > n\right) < \infty$$

برهان. برای اثبات داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X| = \int_{۰}^{\infty} |x| dF|x| &= \sum_{n=۱}^{\infty} \int_{n-۱}^{n} |x| dF|x| \\
&\geq \sum_{n=۱}^{\infty} \int_{n-۱}^{n} (n-۱) dF|x| \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} (n-۱) \mathbf{P}\left(n-۱ < |X| \leq n\right) \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{k=۱}^{n-۱} \mathbf{P}\left(n-۱ < |X| \leq n\right) \\
&= \sum_{k=۱}^{\infty} \sum_{n=k+۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(n-۱ < |X| \leq n\right) \\
&= \sum_{k=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(k < |X|\right)
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X| > n\right) \leq \mathbf{E}|X| < \infty.$$

و اثبات کامل می‌شود. □

[۲۱] Hsu

[۲۲] Robbins

[۲۳] Complete convergence

همگرایی معادل

در این بخش ابتدا معادل در توزیع [۲۴] و همگرایی معادل [۲۵] را بیان می‌کنیم، و سپس ارتباط آن با قانون قوی اعداد بزرگ بررسی می‌شود.

تعریف آ.۰.۵. فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشند. آنگاه این دو دنباله را در توزیع معادل گوییم، هر گاه:

$$\mathbf{P}\left(X_n \neq Y_n\right) \to ۰ \qquad as \;\; n \to \infty.$$

تعریف آ.۰.۶. فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشند. این دو دنباله را همگرای معادل گوییم، هر گاه:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(X_n \neq Y_n\right) < \infty.$$

ملاحظه آ.۰.۹. گات [۲۳]، اگر $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ دو دنباله همگرای معادل باشند، در توزیع هم معادل هستند.

قضیه آ.۰.۷. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی و همگرای معادل باشند، آنگاه داریم:

i. احتمال بینهایت تا از X_n مخالف Y_n باشد، برابر با صفر است. یعنی

$$\mathbf{P}\left(X_n \neq Y_n \; i.o.\right) = ۰.$$

ii. مجموع اختلاف X_n با Y_n قریب به یقین همگراست. به عبارت دیگر

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(X_n - Y_n\right) < \infty \qquad a.s..$$

iii. اگر $\{b_n, n \geq ۱\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، وقتی $n \to \infty$، $b_n \uparrow \infty$، آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{b_n} \sum_{k=۱}^{n} \left(X_k - Y_k\right) \xrightarrow{a.s.} ۰ \qquad as \;\; n \to \infty.$$

قضیه آ.۰.۸. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند، آنگاه برای $r > ۰$ عبارت‌های زیر معادل هستند:

i. گشتاور r موجود و متناهی باشد:

$$\mathbf{E}|X|^r < \infty.$$

[۲۴] Equivalent distribution

[۲۵] Equivalence Convergence

ii. به ازاء هر $\epsilon > ۰$:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X| > \epsilon n^{۱/r}\right) < \infty.$$

iii. به ازاء هر $\epsilon > ۰$:

$$\mathbf{P}\left(|X| > \epsilon n^{۱/r}\ i.o.\right) = ۰.$$

iv. وقتی $n \to \infty$:

$$\frac{X_n}{n^{۱/r}} \xrightarrow{a.s.} ۰.$$

با توجه به قضیه فوق اگر شرط هم توزیع بودن و استقلال را داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم دو دنباله همگرای معادل بسازیم.

نتیجه آ.۰.۲. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند و $Y_n = X_n I_{[|X|<n^{۱/r}]}$. آنگاه دو دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ همگرای معادل هستند.

نتیجه آ.۰.۳. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ دو دنباله همگرای معادل هستند. آنگاه داریم:

i. همگرایی یا واگرایی دو سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} X_n, \qquad \sum_{n=۱}^{\infty} Y_n,$$

معادل هستند.

ii. اگر $\{b_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد، وقتی $n \to \infty$، $b_n \uparrow \infty$. آنگاه همگرایی یا واگرایی دو سری زیر وقتی $n \to \infty$، معادل هستند:

$$\frac{۱}{b_n}\sum_{k=۱}^{n} X_k, \qquad \frac{۱}{b_n}\sum_{k=۱}^{n} Y_k.$$

قضیه آ.۰.۹. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ و $\{Y_n, n \geq ۱\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی و همگرای معادل باشند. در این حالت اگر $n \to \infty$، آنگاه داریم:

i.

$$X_n - Y_n \xrightarrow{P} ۰.$$

ii.

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff Y_n \xrightarrow{d} X.$$

گشتاورها و دم‌ها

گزاره آ.۱.۰. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی است، آنگاه برای $r > ۰$ داریم:

$$\mathbf{E}|X|^r < \infty \implies x^r \mathbf{P}\left(|X| > x\right) \to ۰ \quad as \quad x \to \infty.$$

عکس رابطه فوق لزوماً برقرار نیست.

گزاره آ.۲.۰. فرض کنید $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر می‌باشند، آنگاه برای هر $a > ۰$ داریم:

$$\mathbf{E}\left[XI_{\{|X|\leq a\}}\right] = -\mathbf{E}\left[XI_{\{|X|>a\}}\right],$$

همچنین:

$$\left|\mathbf{E}\left[\sum_{k=۱}^{n} X_K I_{\{|X_k|\leq a\}}\right]\right| \leq n\mathbf{E}\left[|X| I_{\{|X|>a\}}\right].$$

گزاره آ.۳.۰. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با میانگین صفر باشد. برای $a > ۰$، قطعاً $Y = XI_{\{|X|\leq a\}}$ داری میانگین صفر نیست، ولی اگر X متقارن باشد، آنگاه:

$$\mathbf{E}\left[Y\right] = ۰.$$

قضیه آ.۱۰.۰. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با مجموع جزئی $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ و $\{b_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت که وقتی $n \to \infty$، $b_n \uparrow \infty$. همچنین $Y_{k,n} = X_k I_{[|X_k|\leq b_n]}$ با مجموع جزئی $T_n = \sum_{k=۱}^{n} Y_{k,n}$ و $\mu_n = \mathbf{E}T_n$ می‌باشند. در این صورت:

i. اگر

$$\sum_{k=۱}^{n} \mathbf{P}\left(|X_k| > b_n\right) \to ۰ \quad as \quad n \to \infty, \tag{آ.۱}$$

و

$$\frac{۱}{b_n}\sum_{k=۱}^{n} Var\, Y_{k,n} \to ۰ \quad as \quad n \to \infty. \tag{آ.۲}$$

آنگاه داریم:

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} ۰ \quad as \quad n \to \infty. \tag{آ.۳}$$

ii. اگر

$$\frac{\mu_n}{b_n} \to ۰ \quad as \quad n \to \infty.$$

آنگاه داریم:

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{P} ۰ \quad as \quad n \to \infty.$$

و همچنین اگر قانون ضعیف اعداد بزرگ آ.۳ برقرار باشد، عکس قسمت اول قضیه، رابطه آ.۱ و آ.۲ برقرار است.

قضیه فوق در قضایای همگرایی ضعیف زمانی که هیچ اطلاع از میانگین و واریانس موجود نیست، کاربرد دارد. در ادامه قضیه قانون قوی کلوموگورف [۲۶] را بیان می‌کنیم.

قضیه آ.۱۱.۰. چانگ [۱۲]، فرض کنید $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با مجموع جزئی $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ باشد. در این صورت:

i. اگر $\mathbf{E}|X| < \infty$ آنگاه داریم:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mathbf{E}X \quad as \quad n \to \infty.$$

ii. اگر $\mathbf{E}|X| = \infty$ آنگاه داریم:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|S_n|}{n} = +\infty \qquad a.s..$$

همگرایی سری‌ها

در ابتدا لم کرونکر [۲۷] را بیان می‌کنیم.

لم آ.۱۲.۰. دورت [۲۸] [۱۷]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشند، و $\{b_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت که وقتی $n \to \infty$، $b_n \uparrow \infty$ باشد، اگر

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{X_k}{b_k} < \infty \qquad a.s..$$

آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{b_n} \sum_{k=۱}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} ۰ \quad as \quad n \to \infty.$$

در ادامه تابع ϕ را در $\mathbb{R}$، مثبت، زوج و پیوسته تعریف می‌کنیم که اگر $|x|$ صعودی باشد، آنگاه $\frac{\phi(x)}{|x|}$ صعودی و $\frac{\phi(x)}{x^۲}$ نزولی باشد. در ادامه قضیه چانگ را مطرح می‌کنیم.

قضیه آ.۱۲.۰. چانگ [۱۲]، فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل که به ازاء هر $n \geq ۱$، $\mathbf{E}X_n = ۰$ و $\{b_n, n \geq ۱\}$ دنباله از اعداد حقیقی مثبت که وقتی $n \to \infty$، $b_n \uparrow \infty$ باشد. اگر تابع ϕ در شرط بالا صدق کند و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left[\phi(X_n)\right]}{\phi(b_n)} < \infty,$$

[۲۶] Kolmogorov

[۲۷] Kronecker

[۲۸] Durrett

آنگاه داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{b_k} < \infty \qquad a.s..$$

در ادامه قضیه یک سری کینچین [29]- کلوموگورف برای همگرایی سری مجموع متغیرهای تصادفی را بیان می‌کنیم.

قضیه آ.۰.۱۳. آتریا [30] و لاهیری [31][۴]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل که به ازاء هر $n \geq 1$، $\mathbf{E}X_n = 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n^2 < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty \qquad a.s..$$

در ادامه قضیه معیار همگرایی کلموگروف را بیان می‌کنیم.

قضیه آ.۰.۱۴. گات [۲۳]، (معیار همگرایی کلموگروف) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n) < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbf{E}X_n) < \infty \qquad a.s..$$

علاوه بر این اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n < \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \qquad a.s..$$

در ادامه قضیه معیار همگرایی کلموگروف دو طرفه را بیان می‌کنیم.

قضیه آ.۰.۱۵. گات [۲۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و به طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbf{E}X_n) < \infty \qquad a.s..$$

یک نتیجه از معیارهای همگرایی کلموگروف و لم کرونکر تصادفی به صورت قضیه قانون قوی اعداد بزرگ کلموگروف است که در زیر بیان می‌شود.

قضیه آ.۰.۱۶. اش [32] و دالینس-دد [33][۳]، فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با $\mathbf{E}X_n = \mu_n$ و $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ و بعلاوه $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت که وقتی $n \to \infty$، $b_n \uparrow \infty$ باشند، اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{b_n^2} < \infty.$$

---

[29] Khinchine

[30] Athreya

[31] Lahiri

[32] Ash

[33] Doléans-Dade

آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{b_n}\sum_{k=۱}^{n}(X_k-\mathbf{E}X_k)\xrightarrow{a.s.}۰ \qquad as \quad n\to\infty.$$

اگر $\{X,X_n,n\geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع و همچنین $b_n=n$ باشد، با استفاده از قضیه قبل می‌توانیم قانون قوی اعداد بزرگ را اثبات کنیم. یعنی

$$\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(X_k-\mathbf{E}X_k)=\frac{S_n}{n}-\mathbf{E}X\xrightarrow{a.s.}۰ \qquad as \quad n\to\infty.$$

در ادامه قضیه سه سری کلموگروف را بیان می‌کنیم.

قضیه آ.۰.۱۷. آتریا و لاهیری [۴]، فرض کنید $\{X_n,n\geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و برای ثابتی مانند $۰<c<\infty$، $Y_n=X_nI_{[|X_n|\leq c]}$ اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty}X_n$ قریب به یقین همگرا باشد، آنگاه سه سری زیر همگرا هستند.

i. دو دنباله $\{X_n,n\geq ۱\}$ و $\{Y_n,n\geq ۱\}$ همگرای معادل است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\mathbf{P}\left(|X_n|>c\right)<\infty.$$

ii. مجموع میانگین‌های Y_n همگرا است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\mathbf{E}Y_n<\infty.$$

ii. مجموع واریانس‌های Y_n همگرا است.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}Var(Y_n)<\infty.$$

همچنین عکس قضیه نیز برقرار است یعنی اگر سه سری فوق برقرار باشد آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty}X_n$ قریب به یقین همگرا است.

لم آ.۰.۱۳. لو [۳۴] [۴۴]، (لم توپلیتس [۳۵]) فرض کنید $\{a_{nk};۱\leq k\leq k_n,n\geq ۱\}$ آرایه‌ای از اعداد حقیقی، به قسمی که برای هر $k\geq ۱$، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}=۰,$$

و

$$\sup_{n\geq ۱}\sum_{k=۱}^{k_n}|a_{nk}|<\infty.$$

[۳۴] loeve

[۳۵] Toeplitz lemma

همچنین فرض کنید $\{x_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} x_n = 0.$$

لم آ.۱۴.۰. برای هر $b > 0$، داریم:

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} i^{-1-b} \leq b^{-1} j^{-b}.$$

برهان. همگرایی سری $\sum_{i=j+1}^{\infty} i^{-1-b}$ معادل با همگرایی انتگرال $\int_{j+1}^{\infty} i^{-1-b} di$ است. بنابراین داریم:

$$\int_{j+1}^{\infty} i^{-1-b} di \leq \int_{j}^{\infty} i^{-1-b} di = b^{-1} j^{-b}.$$

در نتیجه اثبات کامل است. □

لم آ.۱۵.۰. فرض کنید $a < 0$ و C یک عدد حقیقی ثابت مثبت باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=i}^{\infty} n^{a-1} \leq C i^{a}.$$

برهان. همگرایی سری بالا معادل با همگرایی انتگرال زیر است.

$$\int_{i}^{\infty} x^{a-1} dx = \frac{1}{a}\{(\infty)^a - i^a\} \leq C i^a.$$

□

لم آ.۱۶.۰. فرض کنید $b > 0$ و C یک عدد حقیقی ثابت مثبت باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=1}^{m} n^{b-1} \leq C m^{b}.$$

برهان. همگرایی سری بالا معادل با همگرایی انتگرال زیر است.

$$\int_{1}^{m} x^{b-1} dx = \frac{1}{b}\left\{m^b - 1^b\right\} \leq C m^b.$$

□

لم آ.۱۷.۰. فرض کنید C یک عدد حقیقی ثابت مثبت باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-1} \leq C \log(1 + m).$$

برهان. همگرایی سری بالا معادل با همگرایی انتگرال زیر است.

$$\int_{1}^{m} x^{b-1} dx = \frac{1}{b}\left\{m^b - 1^b\right\} \leq C m^b.$$

□

Abstract

Researchers have investigated the effects of limit theoremes on linear processes. Many of these results have been demonstrated for linear processes with constant coefficients. Linear processes with random coefficients are a more extended form of linear processes with constant coefficients. In most circumstances in practice and nature, since there are conditions that the independent random variables can not be considered, we investigate the limit theorems for linear processes with random coefficients that contain extended negatively dependent random variables. The purpose of this dissertation is the study of the strong law of large numbers, convergence rate of the strong laws and the Marcinkiewicz-Zygmund, and complete moment convergence for linear processes with random coefficients that contain extended negatively dependent random variables. The results of this dissertation causes the expansion of the results that have been obtained by now.

Keywords: Strong laws of large numbers, Convergence rate, Marcinkiewicz–Zygmund law of large numbers, Complete moment convergence, Extended negatively dependent random variables, Linear processes, Random coefficients.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Probability Theory

Limit theoremes for linear processes with random coefficients

By: Seyed Mohammad Hosseini

Supervisor

Ahmad Nezakati

September 2019