

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی
رساله دکتری گرایش گراف و ترکیبیات

بررسی طیف لاپلاسیین بدون علامت فاصله در گراف‌ها

نگارنده: مریم باغی‌پور

استادان راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف
دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور
دکتر عبدالله آل‌هوز

شهریور ۱۳۹۸



فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم مریم باغی پور دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی - گراف و ترکیبیات به شماره دانشجویی ۹۳۰۰۲۱۵ ورودی مهرماه سال ۹۳ در تاریخ ۹۸/۶/۲۶ از رساله خود با عنوان: بررسی طیف لاپلاسین بدون علامت فاصله در گرافها دفاع و با اخذ نمره ۲۰ به درجه : عالی نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ☐
 ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ ☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
 ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر صادق رحیمی شریف	استاد راهنمای اول	استادیار	
۲	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد راهنمای دوم	استاد	
۳	دکتر عبدالله آل هوز	استاد مشاور	دانشیار	
۴	دکتر میثم علیشاهی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۵	دکتر علیرضا اشرفی	استاد مدعو خارجی	استاد	
۶	دکتر سعید شعبانی	استاد مدعو خارجی	استادیار	
۷	دکتر مهدی قونمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم مریم باغی پور بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار تقدیم می‌نمایم به محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه تلاش‌های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند. به همسر مهربانم که مسیح‌وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود و تقدیم به پسر کوچکم که کودکی گمشده‌ام را در چهره معصومش پیدا کردم.

سپاس‌گزاری

سپاس‌ خدایی که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او را ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. در ابتدا از اساتید محترم راهنما جناب آقایان دکتر صادق رحیمی، شعرفاف و دکتر ابراهیم هاشمی که با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، هم‌چنین از استاد گرانقدر، جناب دکتر عبدالله آل‌هوز که استاد مشاور این رساله بودند و مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند و راهنمایی‌های ایشان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند، نهایت تشکر را دارم. از اساتید داور ارجمند جناب آقایان دکتر میثم علیشاهی، دکتر علیرضا اشرفی و دکتر سعید شعبانی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را متقبل شده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس‌ گوید.

هم‌چنین از خانواده عزیزم و دوستان مهربانم که بودندشان تاج افتخاریست بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، سپاسگزارم.

مریم باغی‌پور
شهریور ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **مریم باغی پور** دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده رساله دکتری با عنوان **بررسی طیف لاپلاسین بدون علامت فاصله در گراف ها**، تحت راهنمایی دکتر **صادق رحیمی شهرباف** و دکتر **ابراهیم هاشمی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم باغی پور

شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در حالت کلی ماتریس‌های متفاوتی به یک گراف نسبت داده می‌شود که از مهمترین آن‌ها می‌توان به ماتریس فاصله، ماتریس لاپلاسین فاصله و ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله که اخیراً مورد توجه قرار گرفته است، اشاره کرد.

فرض کنیم $D(G)$ ماتریس فاصله و $Tr(G)$ ماتریس قطری از اعداد انتقال گراف باشد، در این صورت ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله به صورت $D^Q(G) = D(G) + Tr(G)$ تعریف می‌شود و بزرگترین مقدار ویژه آن شعاع طیفی گراف G نامیده می‌شود. در این رساله، تعدادی کران بالا و پایین برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله بر حسب پارامترهایی مانند مرتبه، اندازه، عدد استقلال، عدد جورسازی و غیره ارائه می‌دهیم و گراف‌هایی که در شرایط مرزی کران‌های ما صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم. همچنین به بررسی مقادیر ویژه تعدادی از گراف‌ها با استفاده از عملیات گرافی می‌پردازیم. علاوه بر این انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله گراف G را تعریف کرده و تعدادی کران بالا و پایین برای انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم.

ما نوعی از حدس برآور را برای مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف G ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم که این حدس برای گراف‌های با قطر یک و دو برای به ازای هر k برقرار است. علاوه بر این نشان می‌دهیم که برای $k = n - 1$ و $k = n$ برای همه گراف‌ها و برای تعدادی k برای گراف‌های r -منتظم از لحاظ عدد انتقال برقرار است. در انتها، برخی پیشنهادات برای کارهای آتی در این زمینه ارائه می‌گردد.

کلمات کلیدی: ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله، طیف لاپلاسین، شعاع طیفی، انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله.

لیست مقالات مستخرج از رساله

۱. آل هوزع.، باغی پور م. و هاشمی ا، (۱۳۹۷) ” نتایجی در مورد انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری در گراف‌ها”، پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال چهارم، شماره سیزدهم.
2. Alhevaz A., Baghipur M., Hashemi E. and Ramane H.S. (2019), ” On the distance signless Laplacian spectrum of graphs” **Bull. Malay. Math. Sci. Soc.**, 42, 2603–2621.
3. Alhevaz A., Baghipur M. and Hashemi E. (2018), ”Further results on the distance signless Laplacian spectrum of graphs” **Asian-Eur. J. Math.**, 11, 3, Article ID: 1850066, 15 pp.
4. Alhevaz A., Baghipur M. and Hashemi E. (2018), ”On distance signless Laplacian spectrum and energy of graphs” **Electron. J. Graph Theory Appl**, 6, 2, 326–340.
5. Alhevaz A., Baghipur M., Ganie H. A. and Pirzada S. (2019), ”Brouwer type conjecture for the eigenvalues of distance signless Laplacian matrix of a graph” **Linear and Multilinear Algebra**, in press.
6. Alhevaz A., Baghipur M., Hashemi E. and Alizadeh Y. (2018), ”Minimum covering reciprocal distance signless Laplacian energy of graphs” **Acta Univ. Sapientiae, Informatica**, 10, 2, 218–240.
7. Alhevaz A., Baghipur M. and Rahimi S. (2017), ” Bounds on hyper-Wiener index of graphs ” **Asian-Eur. J. Math.**, 10, 3, Article ID: 1750057, 15pp.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	۱ مقدمه
۵	۲ تعاریف مقدماتی
۵	۱.۲ شعاع طیفی لاپلاسین بدون علامت فاصله
۶	۲.۲ کران‌های بالایی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
۹	۳.۲ کران‌های پایینی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
۱۱	۴.۲ کران‌هایی برای شعاع طیفی در گراف‌های تک‌دور و دودور
	۱.۴.۲ نتایجی برای مقدار ویژه‌ای که از لحاظ بزرگترین (کوچکترین) در
۱۲	رده‌ی دوم قرار دارند
۱۵	۳ نتایجی در مورد مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
۱۵	۱.۳ مقدمات و تعاریف اولیه
۱۷	۲.۳ تعدادی کران پایین برای شعاع طیفی ماتریس $D^Q(G)$
۳۳	۳.۳ تعدادی کران بالا برای شعاع طیفی ماتریس $D^Q(G)$
۴۳	۴.۳ مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله تعدادی از گراف‌ها
۵۵	۴ کران‌هایی برای انرژی لاپلاسین بدون علامت فاصله و بررسی خواص آن
۵۵	۱.۴ کران‌هایی برای انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
	۱.۱.۴ نتایجی در مورد انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی
۷۰	مینیمم احاطه‌گری در گراف‌ها
۷۵	۵ مجموع مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
۷۵	۱.۵ نوعی از حدس برآور برای ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
۹۳	۶ پیشنهادهایی برای برخی از کارهای آتی

۹۷	مراجع
۱۰۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۰۹	نمایه

فهرست تصاویر

۸۸		۱.۵	گراف H_{19} و گراف H از قضیه ۱۰.۱.۵
۹۴		۱.۶	گراف G از مرتبه $n = ۶$ با $k = ۳$ رأس پیرامونی

فصل ۱

مقدمه

فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و مجموعه یالی $E(G)$ باشد. یک گراف با $G = (V(G), E(G))$ نشان داده می‌شود. مرتبه‌ی G تعداد $n = |V(G)|$ از رئوسش و اندازه‌اش تعداد $m = |E(G)|$ از یال‌هایش می‌باشد. مجموعه رئوس مجاور به $v \in V(G)$ با $N_G(v)$ نشان داده می‌شود و درجه‌ی v برابر است با اندازه‌ی $N_G(v)$ و با $\deg_G(v)$ نمایش داده می‌شود. گیریم G یک گراف همبند با مجموعه رئوس $V(G)$ باشد. فاصله‌ی بین دو رأس $u, v \in V(G)$ با نماد $d_G(u, v)$ یا d_{uv} نشان داده می‌شود که برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v در G . ماکزیمم فاصله‌ی بین رئوس گراف G قطر گراف نامیده می‌شود. ماتریس فاصله^۱ از G با $D(G)$ نشان داده می‌شود که به صورت $D(G) = (d_{v_i v_j})$ تعریف می‌شود. برای گراف ساده‌ی همبند G از مرتبه‌ی n ، ماتریس فاصله، ماتریسی متقارن و تحویل‌ناپذیر است. هم‌چنین برای یک ماتریس مربعی M ، مجموعه‌ی مقادیر ویژه همراه با چندگانگی آن‌ها را طیف^۲ M می‌نامند. بزرگترین مقدار ویژه از M را شعاع طیفی^۳ M گویند. ماتریس فاصله و مفاهیم مرتبط با آن مانند طیف فاصله، شعاع طیفی و انرژی فاصله‌ای^۴ کاربردهای وسیعی در شیمی و علوم مختلف دیگر دارد.

امروزه بسیاری از پژوهشگران استفاده از شعاع طیفی ماتریس فاصله را برای توصیف ساختارهای مولکولی مورد استفاده قرار می‌دهند. از میان اولین نتایج به دست آمده، مرتبط با ماتریس فاصله، می‌توان به قضیه‌ی مهمی که توسط گراهام^۵ و پولاک^۶ [۴۹] اثبات شده است، اشاره

^۱Distance matrix

^۳Spectral radius

^۵Graham

^۲Spectrum

^۴Distance Energy

^۶Pollack

کرد که فرمولی از دترمینان ماتریس فاصله برای درخت‌ها ارائه کردند. به دنبال آن و دیگر نتایج به دست آمده از گراهام و پولاک [۴۹]، محققانی از نظریه‌ی جبری گراف نیز به این موضوع علاقه مند شدند. گراهام و لواژ [۴۶]، معکوس ماتریس فاصله را مورد بررسی قرار دادند. ادلبرگ [۴۰]، گراهام و لواژ [۴۶] و هوسیا [۷۳] به چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن پرداختند. میهالیک [۷۴]، خلاصه‌ای از کاربرد ماتریس فاصله در گراف‌های شیمیایی ارائه داد.

عدد انتقال^{۱۱} $Tr(G)$ از راس v به صورت مجموع فاصله‌ی همه‌ی رئوس دیگر از رأس v یا به عبارتی دیگر $Tr_G(v) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u, v)$ تعریف می‌شود. عدد انتقال یک گراف همبند G با $\sigma(G)$ نشان داده می‌شود که برابر است با مجموع فاصله‌های بین همه جفت‌های نامرتب از رئوس G .

واضح است $\sigma(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} Tr_G(v)$. گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال نامیده می‌شود هرگاه $Tr_G(v)$ برای هر رأس $v \in V(G)$ ثابت باشد. گسترش ماتریس‌ها مرتبط با ساختارهای گرافیکی متفاوت آن‌ها زیاد و رو به افزایش است. به ویژه ماتریس (شعاع) لاپلاسین بدون علامت فاصله در گراف‌ها اخیراً مورد توجه قرار گرفته و کاربردهای زیادی دارد. در این زمینه می‌توانید مراجع انتهایی را ملاحظه کنید. گیریم G گرافی همبند با $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. برای $1 \leq i \leq n$ به آسانی دیده می‌شود که $Tr_G(v_i)$ برابر است با مجموع سطر i ام از $D(G)$. گیریم $D(G) = \text{diag}(Tr_G(v_1), Tr_G(v_2), \dots, Tr_G(v_n))$. ماتریس قطری از اعداد انتقال رئوس گراف G باشد. ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از G ماتریسی $n \times n$ است که اولین بار توسط اچیچه^{۱۲} و هسن^{۱۳} در [۲] به صورت $D^Q(G) = Tr(G) + D(G)$ تعریف شد. واضح است $D^Q(G)$ تحویل ناپذیر، نامنفی، متقارن و نیمه‌معین مثبت است. بزرگترین مقدار ویژه از $D^Q(G)$ ، را شعاع طیفی می‌نامند و آن را با نماد $\rho(G)$ نمایش می‌دهند. گیریم $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ نشان‌دهنده‌ی طیف $D^Q(G)$ باشد و فرض می‌کنیم $\rho = \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$.

بنابر قضیه پرون-فروبنیوس^{۱۴}، متناظر با $\rho(G)$ یک بردار ویژه نرمال مثبت یکتایی از $D^Q(G)$ وجود دارد که آن را بردار ویژه اصلی از G می‌نامند.

یک بردار ستونی $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ را می‌توان به عنوان یک تابع که روی $V(G)$ تعریف می‌شود، در نظر گرفت به طوری که رأس v_i را به x_i نگاشت می‌کند، به عبارتی دیگر $x(v_i) = x_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$x^T D^Q(G) x = \sum_{\{u, v\} \subset V(G)} d_{uv} (x(u) + x(v))^2,$$

و λ یک مقدار ویژه از $D^Q(G)$ متناظر با بردار ویژه x است اگر و فقط اگر $x \neq 0$ و برای هر

⁷Lovász⁸Edelberg⁹Hosoya¹⁰Mihalic¹¹Transmission¹²Aouchiche¹³Hansen¹⁴Perron-Frobenius

$$v \in V(G)$$

$$\lambda x(v) = \sum_{u \in V(G)} d_{uv}(x(u) + x(v)).$$

این معادلات را (λ, x) - معادلات ویژه از G می‌نامند. برای یک بردار ستونی نرمال شده G با حداقل یک مولفه‌ی نامنفی، بنابر قضیه‌ی رالی^{۱۵}، داریم

$$\rho(G) \geq x^T D^Q(G)x,$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر x یک بردار ویژه اصلی از ماتریس $D^Q(G)$ باشد. در فصل سوم، تعدادی کران بالا و پایین برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم، همچنین مقادیر ویژه ماتریس $D^Q(G)$ برای تعدادی از گراف‌ها را با استفاده از عملیات گرافی به دست می‌آوریم.

انرژی گراف G برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط ایوان گاتمن^{۱۶} [۴۴]، برای ماتریس مجاورت $A(G)$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ به صورت $E_A = E_A(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ تعریف شد. مشابه با این تعریف در [۲۶]، [۶۱]، انرژی فاصله که با نماد $DE(G)$ نشان داده می‌شود به صورت مجموع قدر مطلق مقادیر ویژه ماتریس فاصله تعریف شد و برخی از خواص آن مورد بررسی قرار گرفت.

همچنین به طور مشابه ما در [۱۲] انرژی اولیه لاپلاسین بدون علامت فاصله را به صورت

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) = \sum_{i=1}^n \rho_i$$

تعریف می‌کنیم. اکنون مقدار ویژه کمکی ξ_i را به صورت $\xi_i = \rho_i - \frac{2\sigma(G)}{n}$ تعریف می‌کنیم. بر این اساس انرژی لاپلاسین بدون علامت فاصله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، [۹]

$$E_{DQ}(G) = \sum_{i=1}^n |\xi_i| = \sum_{i=1}^n \left| \rho_i - \frac{2\sigma(G)}{n} \right|.$$

در فصل سوم به بررسی این دو تعریف انرژی می‌پردازیم و کران‌های بالا و پایینی برای آن‌ها ارائه می‌دهیم.

در فصل پنجم حدسی را برای مجموع مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله بیان کرده و نشان می‌دهیم که برای رده‌هایی از گراف‌ها برقرار است. گیریم $\mu_n \leq \mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_1$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین باشند. فرض کنید $1 \leq k \leq n$ مجموع $S_k(G) = \sum_{i=1}^k \mu_i$ تا بزرگترین مقدار ویژه لاپلاسین از گراف G باشد. برآورد^{۱۷} این حدس را بیان کرد [۱۸] که برای گراف G از مرتبه n و اندازه m رابطه $S_k(G) = \sum_{i=1}^k \mu_i \leq m + \binom{k+1}{2}$ برای $k = 1, 2, \dots, n$ برقرار است که بعدها مورد بررسی بیشتری قرار گرفت، می‌توانید مراجع [۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴] را ببینید. گیریم $0 \leq q_n \leq q_{n-1} \leq \dots \leq q_1$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت باشند.

¹⁵Reyleigh's Principle

¹⁶Gutman

¹⁷Brouwer

اگر $S_k^+(G) = \sum_{i=1}^k q_i$ نشان دهنده مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه لاپلاسین بدون علامت از گراف G باشد، با انگیزه حدس برآور، اشرف^{۱۸} و همکارانش حدس $S_k^+(G) = \sum_{i=1}^k q_i \leq m + \binom{k+1}{2}$ را ارائه دادند [۱۷]. برای اطلاعات بیشتر در مورد این حدس می‌توانید مراجع [۱۷، ۵۰، ۹۳] را ببینید.

بر این اساس ما دو کمیت $M_k(G)$ و $N_k(G)$ را برای مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه و k تا کوچکترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله تعریف می‌کنیم. مشابه حدس برآور و حدس اشرف ما حدسی را برای مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم که این حدس برای گراف‌های با قطر یک و دو برای به ازای هر k برقرار است. علاوه بر این نشان می‌دهیم که این حدس برای $k = n - 1$ و $k = n$ برای همه گراف‌ها برقرار است. هم چنین حدس ما برای تعدادی k برای گراف‌های r -منتظم از لحاظ عدد انتقال صادق است. در نتیجه برای گراف‌های آستانه‌ای^{۱۹} و گراف قطعه‌ای^{۲۰} درستی حدس را نشان می‌دهیم. هم چنین درستی حدس را برای رده‌ای از گراف‌ها ثابت می‌کنیم.

در فصل آخر پیشنهادهایی را برای برخی از کارهایی که در آینده می‌توان انجام داد را ارائه می‌دهیم.

¹⁸Ashraf¹⁹Threshold²⁰Split

فصل ۲

تعاریف مقدماتی

در این فصل به بررسی بعضی از خواص و ویژگی‌های ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله که تاکنون ثابت شده‌اند، می‌پردازیم.

۱.۲ شعاع طیفی لاپلاسین بدون علامت فاصله

در ابتدا گزاره زیر که در تئوری ماتریس‌ها اهمیت اساسی دارد، را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۲. [۱۸] گیریم A ماتریسی متقارن حقیقی از مرتبه‌ی n باشند و M یک زیر ماتریس اصلی از A با مرتبه‌ی $s (\leq n)$ باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\lambda_{i+n-s} \leq \lambda_i(M) \leq \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

برای دو رأس غیر مجاور u, v در G ، گیریم $G + uv$ گراف به دست آمده از G با اضافه کردن یال uv باشد. برای مجموعه $S \subseteq V(G)$ ، فرض کنید $G - S$ گراف حاصل از حذف همه‌ی رئوس مجموعه S باشد (و همه‌ی یال‌های وابسته به آن‌ها). در حالت خاص، اگر $S = \{u\}$ ، آنگاه به جای $G - S$ می‌نویسیم $G - u$.

لم ۲.۱.۲. [۷۳] گیریم G گرافی همبند با دو رأس غیرمجاور $u, v \in V(G)$ باشد. در این صورت همواره رابطه‌ی $\rho(G + uv) < \rho(G)$ ، برقرار است.

لم ۳.۱.۲. [۸۶] گیریم G_s گراف حاصل از زیر تقسیم یک یال از گراف G باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی $\rho(G_s) > \rho(G)$ برقرار است.

فرض کنید K_n گراف کامل n -رأسی باشد و همچنین G گرافی همبند روی n رأس باشد. آنگاه بنابر گزاره قبل، $\rho(G) \geq \rho(K_n)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = K_n$.

قضیه ۱.۱.۲. [۸۶] گیریم u یک رأس آویخته از G و $d(G) = d$ قطر گراف G باشد، در این صورت برای $i = 1, 2, \dots, n-1$ ، همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho_{i+1}(G) - d \leq \rho_i(G - u) \leq \rho_i(G) - 1.$$

لم ۴.۱.۲. [۹۱] گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \frac{4\sigma(G)}{n}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برای گراف همبند G ، گیریم $Tr_{\max}$ ماکزیمم عدد انتقال از G باشد، نامساوی سمت چپ در گزاره زیر از مرجع [۷۳] حاصل می‌شود و نامساوی سمت راست آن در مرجع [۲] اثبات شده است.

لم ۵.۱.۲. گیریم G یک گراف همبند باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$Tr_{\max}(G) < \rho(G) \leq 2Tr_{\max}(G).$$

گیریم S_n ، ستاره‌ی n -رأسی باشد. برای $n \geq 3$ ، گیریم S_n^+ گراف تک‌دور به دست آمده با اضافه کردن یک یال به S_n باشد و P_n^+ گراف تک‌دور n -رأسی به دست آمده با چسباندن مسیر $(n-3)$ -رأسی به یک رأس پایانی از مثلثی باشد.

قضیه ۲.۱.۲. [۹۱] گیریم G یک گراف همبند از مرتبه‌ی $n \geq 4$ و گراف مکمل $\bar{G}$ همبند باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) + \rho(\bar{G}) \geq 6(n-1),$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G و $\bar{G}$ هر دو گراف‌های منتظم با قطر ۲ باشند.

۲.۲ کران‌های بالایی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله

در این قسمت، تعدادی کران بالا برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۲. [۲] گیریم G یک گراف همبند از مرتبه‌ی $n \geq 2$ با اندیس وینر $W(G)$ باشد، آنگاه $\rho(G) \leq 2W(G) - (n-1)(n-2)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G گراف کامل K_n باشد.

قضیه ۲.۲.۲. [۲] گیریم $G = (V, E)$ یک گراف همبند روی $n \geq 2$ رأس و k عددی صحیح به طوری که $1 \leq k \leq n$ باشد. گیریم $P_k(V)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ای از تمام زیرمجموعه‌های K عضوی از V باشد. آنگاه همواره رابطه‌های زیر برقرار است،

$$\rho \geq \max_{S \in P_k(V)} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{u \in S} Tr(u) + \frac{1}{k} \sum_{u, v \in S} d(u, v) \right\}$$

و

$$\rho_n \leq \min_{S \in P_k(V)} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{u \in S} Tr(u) + \frac{1}{k} \sum_{u, v \in S} d(u, v) \right\}.$$

در [۲] روابطی بین طیف ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از یک گراف همبند G و طیف ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله مکملش $\bar{G}$ به دست آمده است. در ابتدا گزاره معروفی از تئوری ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۲. [۲۴] برای ماتریس حقیقی M از مرتبه‌ی n ، گیریم $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots$ اگر N_1 و N_2 هردو ماتریس‌های حقیقی متقارن از مرتبه‌ی n و $N = N_1 + N_2$ باشد، آنگاه برای هر $i = 1, \dots, n$ ، همواره داریم

$$\lambda_i(N_1) + \lambda_1(N_2) \geq \lambda_i(N) \geq \lambda_i(N_1) + \lambda_n(N_2).$$

قضیه ۳.۲.۲. [۲] گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی $n \geq 3$ با قطر d باشد. فرض کنید $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ و $\bar{\rho}_1 \geq \bar{\rho}_2 \geq \dots \geq \bar{\rho}_n$ به ترتیب طیف ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از G و طیف ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله مکمل $\bar{G}$ از G باشد. (۱) اگر $d = 2$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌های زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} n-2 + \bar{\rho}_i &\leq \rho_i \leq 2n-2 + \bar{\rho}_i & 1 \leq i \leq n, \\ n-2 + \bar{\rho}_n &\leq \rho_i \leq n-2 + \bar{\rho}_1 & 1 \leq i \leq n-1, \\ 2n-2 + \bar{\rho}_n &\leq \rho_1 \leq 2n-2 + \bar{\rho}_1. \end{aligned}$$

(۲) اگر $d \geq 3$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است،

$$\rho_i \geq n-2 + \bar{\rho}_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

نتیجه ۱.۲.۲. گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\rho_i = n-2$ مقدار ویژه‌ای از ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله با چندگانگی μ باشد، آنگاه مکمل $\bar{G}$ از G شامل حداقل μ مؤلفه است به طوری که هر مؤلفه، یک گراف دوبخشی می‌باشد.

نتیجه ۲.۲.۲. گیریم G گرافی همبند از مرتبه n باشد. گیریم μ چندگانگی مقدار ویژه $\rho_i = n - 2$ از ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله G باشد، آنگاه $\mu \leq n - 1$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G \cong K_n$.

در [۷۰]، کران بالایی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای رده‌ای خاص از گراف‌ها با داشتن عددخوشه‌ای گراف‌هایی دست آمده است. در ابتدا گزاره زیر را اثبات کردند و سپس با استفاده از آن کران بالایی برای شعاع طیفی به دست آوردند. یک گراف کامل ω -بخشی با مجموعه‌های افراز $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ را با نماد $K_{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_\omega|}$ نشان داده می‌شود. عدد خوشه‌ای $\omega(G)$ برابر است با تعداد رأس‌های بزرگترین خوشه‌ای از G است. گیریم $K_\omega^{n-\omega}$ گراف به دست آمده از یک خوشه‌ای ω رأسی با چسباندن یک مسیر به طول $n - \omega$ به یک رأس از خوشه باشد.

لم ۲.۲.۲. [۷۰] فرض کنید $G_{p,q}$ گراف همبندی باشد که از G با چسباندن دو مسیر به طول‌های p و q در رأس u با $|V(G)| \geq 2$ رأس به دست آمده باشد. اگر $q \geq p \geq 1$ آنگاه همواره رابطه‌ی $\rho(G_{p-1,q+1}) > \rho(G_{p,q})$ برقرار است.

نتیجه ۳.۲.۲. از میان همه‌ی درخت‌ها از مرتبه‌ی n ، ماکسیمم و می‌نیمم مقدار شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله به ترتیب در مسیر P_n و ستاره‌ی $K_{1,n}$ اتفاق می‌افتد.

قضیه ۴.۲.۲. [۷۰] گیریم G یک گراف همبند از مرتبه‌ی n و عدد خوشه‌ای ω باشد. آنگاه همواره رابطه زیر برقرار است،

$$\rho(G) \leq \rho(K_\omega^{n-\omega}),$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_\omega^{n-\omega}$.

می‌دانیم عدد انتقال v_i به صورت $Tr_i = Tr_G(v_i) = \sum_{j=1}^n d(v_i, v_j)$ تعریف می‌شود، فرض کنیم $Tr_1 \geq Tr_2 \geq \dots \geq Tr_n$.

لم ۳.۲.۲. [۷۳] اگر A یک ماتریس $n \times n$ نامنفی با شعاع طیفی $\lambda(A)$ و مجموع سطرهای $r_1, r_2, \dots, r_n$ باشد، آنگاه $\min_{1 \leq i \leq n} r_i \leq \lambda(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} r_i$. علاوه بر این، اگر A تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه یکی از تساوی‌ها برقرار است اگر و فقط اگر مجموع سطرهای A با هم برابر باشند.

با استفاده از لم فوق در [۵۵] قضیه‌ی زیر نتیجه گرفته شد:

قضیه ۵.۲.۲. گیریم G گرافی ساده از مرتبه‌ی n و Tr_1 و Tr_n به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عدد انتقال گراف G باشند. آنگاه $2Tr_1 \leq \rho(G) \leq 2Tr_n$. علاوه بر این یکی از تساوی‌ها برقرار است اگر و فقط اگر G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

تعریف ۱.۲.۲. [۵۶] گیریم G گراف ساده و همبند از مرتبه‌ی n ، ماتریس فاصله‌ی $D = (d_{ij})$ و دنباله‌ی اعداد انتقال $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ با $Tr_1 \geq Tr_2 \geq \dots \geq Tr_n$ باشد. آنگاه دومین درجه‌ی فاصله از v_i ، با نماد T_i نشان داده می‌شود به طوری که $T_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} Tr_j$.

در واقع می‌توان گفت در [۵۵] رابطه‌هایی بین شعاع طیفی و عدد انتقال گراف را به دست آوردند.

قضیه ۶.۲.۲. [۵۵] گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n ، $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ دنباله‌ی درجات از G با $Tr_1 \geq Tr_2 \geq \dots \geq Tr_n$ و d قطر گراف G باشد. آنگاه برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ همواره داریم،

$$\rho(G) \leq \frac{2Tr_i + Tr_1 - d + \sqrt{(2Tr_i + d - Tr_1)^2 + 4(i-1)(Tr_1 - Tr_i)d}}{2}.$$

علاوه بر این اگر $i = 1$ باشد، آنگاه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد و اگر $2 \leq i \leq n$ باشد، آنگاه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G \cong K_n$.

قضیه ۷.۲.۲. [۵۵] گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n ، $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ دنباله‌ی درجات از G با $Tr_1 \geq Tr_2 \geq \dots \geq Tr_n$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ دومین دنباله درجه‌ی فاصله گراف G باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\min\{Tr_i + \frac{T_i}{Tr_i} : 1 \leq i \leq n\} \leq \rho(G) \leq \max\{Tr_i + \frac{T_i}{Tr_i} : 1 \leq i \leq n\}.$$

علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به ازای هر i ، $Tr_i + \frac{T_i}{Tr_i}$ مقدار ثابتی باشد.

۳.۲ کران‌های پایینی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله

در این قسمت کران‌هایی پایین برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای گراف‌های همبند ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۲. [۹۱] گیریم G درختی از مرتبه‌ی $n \geq 4$ به غیر از ستاره‌ی S_n باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) > \rho(S_n) = \frac{5n - 8 + \sqrt{9n^2 - 32n + 32}}{2}.$$

برای درخت‌ها با قطر d ، قضیه زیر در [۸۶] نشان می‌دهد که P_{d+1} گراف اکستریمال^۱ با می‌نیم شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله می‌باشد.

قضیه ۲.۳.۲. [۸۶] گیریم Γ_d مجموعه‌ای از درخت‌ها با قطر $d \geq 1$ می‌باشد. آنگاه برای هر درخت $T \in \Gamma_d$ ، $\rho(T) \geq \rho(P_{d+1})$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $T = P_{d+1}$. (نشان دهنده‌ی مسیری از مرتبه‌ی $d+1$ می‌باشد.)

¹Extremal

اکنون کران پایینی برای شعاع طیفی ماتریس بدون علامت فاصله در مورد گراف‌های دوبخشی که در [۹۱] اثبات شده است، می‌آوریم:

قضیه ۳.۳.۲. [۹۱] گیریم G گراف دوبخشی همبند از مرتبه‌ی $n \geq 2$ باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \begin{cases} 3n-4 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{5n-8+\sqrt{n^2+8}}{4} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

و حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

گیریم $P(n, r)$ مجموعه‌ای از گراف‌های همبند با n رأس و r رأس آویزان باشد که $0 \leq r \leq n-1$. واضح است، $P(n, n-1) = \{S_n\}$. در [۹۱] گراف یکتایی با می‌نیم شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از میان گراف‌هایی در $P(n, r)$ ، که $0 \leq r \leq n-2$ مشخص می‌شود. برای $0 \leq r \leq n-3$ ، گیریم $P(n, r)$ مجموعه‌ای از گراف‌های همبند n رأسی باشد که با چسباندن r رأس آویخته به تعدادی رؤس از گراف کامل K_{n-r} به دست می‌آید. همچنین گیریم K_n^r گرافی در $P(n, r)$ باشد که r رأس آویزان به رأس ثابتی از K_{n-r} چسبانده شده باشند.

گیریم $D_{n,a}$ گرافی باشد که از دو ستاره‌ی n رأسی با اضافه کردن یک یال بین مرکزهای S_{a+1} و S_{n-a-1} به دست می‌آید به طوری که، $1 \leq a \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$.

قضیه ۴.۳.۲. [۹۱] فرض کنید $G \in P(n, r)$ که $0 \leq r \leq n-2$.

(۱) اگر $0 \leq r \leq n-3$ ، آنگاه $\rho(G) \geq \rho(K_n^r)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = K_n^r$ ،

(۲) اگر $r = n-2$ ، آنگاه $\rho(G) \geq \rho(D_{n,1})$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = D_{n,1}$.

گیریم $C(n, s)$ مجموعه‌ای از گراف‌های همبند با n رأس و همبندی s باشد، که $1 \leq s \leq n-2$. در [۹۱] گراف یکتایی با می‌نیم ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از میان گراف‌هایی در $C(n, s)$ معرفی کردند. گیریم G_1 و G_2 دو گراف همبند رأس مجزا باشد. گیریم $G_1 \cup G_2$ اجتماع رأس مجزا از G_1 و G_2 و $G_1 \vee G_2$ گراف به دست آمده از $G_1 \cup G_2$ با چسباندن هر رأس G_1 به هر رأس G_2 باشد.

قضیه ۵.۳.۲. [۹۱] گیریم $G \in C(n, s)$ که $1 \leq s \leq n-2$. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \rho(K_s \vee (K_1 \cup K_{n-s-1})),$$

و حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = K_s \vee (K_1 \cup K_{n-s-1})$.

یادآوری می‌کنیم که عدد رنگی گراف همبند G برابر است با کوچکترین عدد از رنگ‌هایی که نیاز است تا رأس‌های G را رنگ کنیم به طوری که دو رأس مجاور رنگ‌های متفاوتی داشته

باشند. زیرمجموعه‌ای از رئوس را که رنگ یکسانی دارند را یک کلاس رنگی می‌نامند، چنین کلاسی یک مجموعه مستقل تشکیل می‌دهد. گراف توران^۲ $T_{n,k}$ یک گراف کامل k -بخشی روی n رأس به طوری که اگر $n_1, n_2, \dots, n_k$ بخش‌های این گراف باشند، در این صورت برای هر $1 \leq i, j \leq k$ همواره رابطه $|n_i - n_j| \leq 1$ برقرار باشد.

لم ۱.۳.۲. [۶۸] گیریم G گرافی همبند با کوچکترین شعاع طیفی ماتریس لاپلاسیین بدون علامت فاصله از میان همه‌ی گراف‌های همبند از مرتبه‌ی n و عدد رنگی k ، $2 \leq k \leq n-1$ ، باشد، آنگاه G گراف یکنای $T_{n,k}$ است.

قضیه ۶.۳.۲. [۶۸] گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n و عدد رنگی k باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq 2n + 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 4,$$

که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G یک گراف منتظم توران باشد.

در [۷۰] کران بالایی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسیین بدون علامت فاصله برای رده‌ای از گراف‌ها با داشتن تعداد رئوس و عدد خوشه به دست آمده است.

لم ۲.۳.۲. [۷۰] گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n و عدد خوشه‌ی ω باشد. اگر $\omega > \frac{n}{4}$ ، آنگاه $\rho(G) \geq \rho(T_{n,\omega})$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G \cong T_{n,\omega}$.

۴.۲ کرانهایی برای شعاع طیفی در گراف‌های تک‌دور و دودور

در این قسمت کرانهایی برای شعاع طیفی مربوط به گراف‌های تک‌دور و دودور بیان کرده، همچنین کرانهایی برای شعاع طیفی که از نظر بزرگترین (کوچکترین) در مرتبه‌ی دوم قرار دارند را معرفی می‌کنیم.

گراف همبند G یک گراف تک‌دور می‌نامند هرگاه $|V(G)| = |E(G)|$ و G یک گراف دودور نامیده می‌شود هرگاه $|E(G)| = |V(G)| + 1$. برای $n \geq 4$ ، فرض کنید $B(n)$ مجموعه‌ای از گراف‌های دودور روی n رأس باشد.

برای $n \geq 5$ و $n \geq 4$ گیریم B_n^1, B_n^2 گراف دو دور n - رأسی به دست آمده با اضافه کردن دو یال غیر مجاور (مجاور) به ستاره‌ی S_n به دست بیاید.

گیریم C_n دوری روی n رأس باشد. برای $3 \leq p \leq q \leq n-2$ و $p+q \leq n+1$ ، گیریم $R_n(p, q)$ گراف دودور به دست آمده با متصل کردن یک رأس از C_p و یک رأس از C_q با استفاده از مسیر $P_{n+2-p-q}$ ، همچنین برای $3 \leq p \leq q \leq n-3$ و $0 \leq s \leq p \leq q \leq n-2$ ، گیریم $T_n(s, p, q)$

گراف دو دور n رأسی شامل سه مسیر درونی $P_{p+2}, P_{s+2}, P_{q+2}$ با رئوس پایانی مشترک باشند. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید مرجع [۹۰] را ملاحظه کنید.

لم ۱.۴.۲. [۹۰] برای $n \geq 5$ ، همواره رابطه‌ی $\rho(B_n^1) < \rho(B_n^2)$ برقرار است.

قضیه ۱.۴.۲. [۹۰] گیریم $G \in B(n)$ از مرتبه‌ی $n \geq 5$ باشد. در این صورت همواره داریم،

$$(1) \text{ برای } n = 5, \rho(H_5) > \rho(B_5^2) > \rho(B_5^1) > \rho(T_5(1, 1, 1)) > \rho(T_5(0, 1, 2)),$$

(۲) برای $n = 6$ ، اگر $G \not\cong B_6^1, T_6(1, 1, 2)$ ، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) > \rho(B_6^1) > \rho(T_6(1, 1, 2)),$$

(۳) برای $n \geq 7$ ، اگر $G \not\cong B_n^1, B_n^2$ ، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) > \rho(B_n^2) > \rho(B_n^1).$$

که H_5 گراف به دست آمده با چسباندن یک رأس آویخته به یکی از رئوس درجه‌ی دو در B_5^2 می‌باشد.

گیریم S_n^+ گراف به دست آمده از S_n با اضافه کردن یک یال، که دو رأس آویخته را به هم وصل می‌کند، باشد.

قضیه ۲.۴.۲. [۹۱] گیریم G گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی $n (\geq 6)$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی $\rho(G) \geq \rho(S_n^+)$ برقرار است و حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G = S_n^+$.

می‌دانیم کمر گراف G برابر است با طول کوتاه‌ترین دور در G (در صورت وجود). در [۸۶] ارتباط بین شعاع طیفی برای گراف‌های تک‌دور با کمر گراف اثبات شده است.

قضیه ۳.۴.۲. [۸۶] گیریم U_g مجموعه همه‌ی گراف‌های تک‌دور با کمر $g \geq 3$ باشد. برای

هر گراف تک‌دور $G \in U_g$ همواره داریم،

$$(1) \text{ اگر } g \text{ زوج باشد، آنگاه } \rho(G) \geq \frac{g^2}{4},$$

$$(2) \text{ اگر } g \text{ فرد باشد، آنگاه } \rho(G) \geq \frac{g^2-1}{4}.$$

تساوی‌های بالا برقرار است اگر و تنها اگر $G = C_g$.

لم ۲.۴.۲. گیریم G گراف همبند تک‌دوری از مرتبه‌ی $n \geq 6$ به غیر از S_n^+ باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) > \rho(S_n^+).$$

۱.۴.۲ نتایج برای مقدار ویژه‌ای که از لحاظ بزرگترین (کوچکترین)

در رده‌ی دوم قرار دارند

در این قسمت برای مقدار ویژه که از لحاظ بزرگترین (کوچکترین) در رده‌ی دوم قرار دارد، کران‌هایی ارائه می‌دهیم. در [۸۷] حدسی که در [۲] مطرح شده بود، اثبات شده است:

قضیه ۴.۴.۲. [۸۷] گیریم T درختی از مرتبه‌ی $n (\geq 4)$ و $\rho_2(T)$ مقدار ویژه‌ای باشد که از نظر بزرگترین در رده‌ی دوم قرار دارد. آنگاه $\rho_2(T) \geq 2n - 5$ ، که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $T = S_n$.

یادآوری می‌کنیم $Ki_{n,w}$ گرافی است که از یک خوشه K_w و یک مسیر P_{n-w} با اضافه کردن یالی بین رأس پایانی از مسیر و یکی از رؤوس خوشه به دست می‌آید. اچیچه و هسن در [۲] حدس‌هایی برای دومین مقدار ویژه (از نظر بزرگترین) ماتریس لاپلاسن بدون علامت فاصله مطرح کردند که در [۲۹] اثبات شدند:

قضیه ۵.۴.۲. [۲۹] گیریم T درختی از مرتبه‌ی $n (\geq 4)$ باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho_2(T) \geq \rho_2(S_n)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $T \cong S_n$.

حدس زیر که در [۲] مطرح شد، در [۲۹] نامساوی سمت چپ آن ثابت شد:

لم ۳.۴.۲. [۲] گیریم T درختی از مرتبه‌ی $n (n \geq 4)$ باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho_2(S_n^+) \leq \rho_2(G) \leq \rho_2(Ki_{n,3})$$

و تساوی کران پایین (کران بالا) برقرار است اگر و فقط اگر $G \cong S_n^+$. (به ترتیب $G \cong Ki_{n,3}$).

قضیه ۶.۴.۲. [۲۹] گیریم G گراف همبند تک‌دور با مرتبه‌ی $n \geq 4$ باشد. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر است،

$$\rho_2(G) \geq \rho_2(S_n^+)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong S_n^+$.

فصل ۳

نتایجی در مورد مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله

در این فصل، تعدادی کران پایین و بالا برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم. همچنین مقادیر ویژه تعدادی از گراف‌ها را با استفاده از عملیات گرافی به دست می‌آوریم. شایان ذکر است که تمامی نتایج حاصل شده در این فصل در مقالات [۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] ثبت شده‌اند.

۱.۳ مقدمات و تعاریف اولیه

در این قسمت برخی از خواص اولیه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ابتدا گزاره زیر را که در به دست آوردن نتایج بعدی مفید خواهد بود، را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۳. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال گراف G به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ باشد، آنگاه داریم،

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = 2\sigma(G) \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2. \quad (2.3)$$

برهان. از آنجا که $\sum_{i=1}^n \rho_i = trace[D^Q(G)] = \sum_{i=1}^n Tr_i = 2\sigma(G)$ ، بنابراین (۱.۳) برقرار است. دوباره، برای $i, j = 1, 2, \dots, n$ ، امین درایه از $[D^Q(G)]^2$ برابر $\sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + Tr_i^2$ است. از این رو $\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = trace[D^Q(G)]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2$ نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۲.۱.۳. [۱۹] گیریم B ماتریس نامنفی و تحویل‌ناپذیر با مجموع سطرهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ باشد. اگر $\mu(B)$ بزرگترین مقدار ویژه از ماتریس B باشد، آنگاه $\min_{1 \leq i \leq n} B_i \leq \mu(B) \leq \max_{1 \leq i \leq n} B_i$ که هر کدام از تساوی‌ها برقرار است اگر و تنها اگر $B_1 = B_2 = \dots = B_n$.

لم ۳.۱.۳. [۵۸] گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند روی n رأس باشد و D_1 و D_2 به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عدد انتقال گراف G باشند. آنگاه $2D_1 \leq \rho(G) \leq 2D_2$. علاوه بر این هر کدام از تساوی‌ها برقرار است اگر و تنها اگر G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

تعریف ۱.۱.۳. [۲۴] جمع دو گراف G_1 و G_2 ، که با نماد $G_1 \vee G_2$ نشان داده می‌شود، گرافی است که از G_1 و G_2 و با وصل کردن هر رأس از G_1 به همه‌ی رأس‌های G_2 حاصل شود.

اکنون دو گزاره مهم که به مقادیر ویژه ماتریس دلخواه هرمیتی و زیر ماتریس اصلی آن مرتبط است، را بیان می‌کنیم.

لم ۴.۱.۳. [۲۳] گیریم A ماتریسی هرمیتی از مرتبه‌ی n و گیریم B زیر ماتریس اصلی A از مرتبه‌ی m است. اگر $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ مقادیر ویژه A و $\mu_1(B) \geq \mu_2(B) \geq \dots \geq \mu_m(B)$ مقادیر ویژه B باشند، آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, m$ داریم $\lambda_{n-m+i}(A) \leq \mu_i(B) \leq \lambda_i(A)$.

نامساوی‌های زیر به نامساوی‌های ویل معروف هستند.

لم ۵.۱.۳. [۸۹] گیریم A و B ماتریس‌های هرمیتی $n \times n$ باشند، هم چنین $C = A + B$ ، آنگاه همواره داریم:

$$\begin{aligned} \lambda_i(C) &\leq \lambda_j(A) + \lambda_{i-j+1}(B) \quad (n \geq i \geq j \geq 1) \\ \lambda_i(C) &\geq \lambda_j(A) + \lambda_{i-j+n}(B) \quad (1 \leq i \leq j \leq n) \end{aligned}$$

۲.۳ تعدادی کران پایین برای شعاع طیفی ماتریس $D^Q(G)$

در این بخش کران‌های پایینی را برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۳. اگر دنباله‌ای اعداد انتقال گراف G به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}}, \quad (3.3)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. گیریم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بردار ویژه اصلی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله گراف G باشد و $C = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} (Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n)^T$ آنگاه داریم،

$$\rho(G) = \sqrt{\rho(G)^2} = \sqrt{X^T D^Q(G)^2 X} \geq \sqrt{C^T D^Q(G)^2 C},$$

و

$$C^T D^Q(G)^2 C = C^T (D + Tr)^2 C = C^T D^2 C + C^T Tr^2 C + 2C^T D \cdot Tr C.$$

اکنون می‌توان نوشت،

$$C^T D = \frac{1}{\sqrt{n}} (Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n) = C^T Tr.$$

بنابراین $C^T D^2 C = C^T D (C^T D)^T = \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}$. هم‌چنین به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت، $C^T Tr^2 C = \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n} = C^T D \cdot Tr C$. در نتیجه داریم،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n} + 2 \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}} = \sqrt{2 \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}}.$$

اکنون فرض می‌کنیم که G گرافی k منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد، آنگاه با استفاده از قضیه فروبنیوس [۲۴]، $2k$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $D^Q(G)$ است، بنابراین داریم

$\rho(G) = 2k = 2\sqrt{\frac{nk^2}{n}}$ از اینرو تساوی در (۳.۳) برقرار است. برعکس، اگر تساوی در (۳.۳) برقرار باشد، آنگاه C بردار ویژه متناظر با $\rho(G)$ است. در نتیجه G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال است. $\square$

قضیه ۲.۲.۳. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال و دنباله‌ی دومین اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}}, \quad (4.3)$$

و تساوی برقرار است که اگر و تنها اگر گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. با انجام دادن محاسباتی ساده، داریم:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n Tr_i^2 (Tr_i^2 + T_i^2) + \sum_{j=1}^n (Tr_j^2 + T_j^2) T_j^2\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n Tr_i^2 (Tr_i^2 + T_i^2) + \sum_{j=1}^n (Tr_j^2 + T_j^2) \sum_{i=1}^n d_{ij} Tr_i^2\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n Tr_i^2 (Tr_i^2 + T_i^2) + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \sum_{j=1}^n d_{ij} (Tr_j^2 + T_j^2)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 (Tr_i^2 + T_i^2) + Tr_i^2 \sum_{j=1}^n d_{ij} (Tr_j^2 + T_j^2))\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (Tr_i (Tr_i^2 + T_i^2) + \sum_{j=1}^n d_{ij} (Tr_j^2 + T_j^2)) \cdot Tr_i\right)^2. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز، می‌توان نتیجه گرفت،

$$\left(\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n (Tr_i (Tr_i^2 + T_i^2) + \sum_{j=1}^n d_{ij} (Tr_j^2 + T_j^2))^2 \cdot \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \quad (5.3)$$

که تساوی برقرار است اگر و تنها اگر عدد ثابت مثبتی مانند l وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ همواره داشته باشیم،

$$\frac{Tr_i (Tr_i^2 + T_i^2) + \sum_{j=1}^n d_{ij} (Tr_j^2 + T_j^2)}{Tr_i} = l.$$

بنابراین از (۵.۳) نتیجه می‌گیریم،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}}.$$

اکنون فرض می‌کنیم که G گرافی k منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد، آنگاه

$$\rho(G) = 2k = \sqrt{\frac{nk^4 + nk^4 + 2nk^4}{nk^2}} = \sqrt{4k^2}.$$

بنابراین تساوی در (۴.۳) برقرار است. برعکس، اگر تساوی در (۴.۳) برقرار باشد، آنگاه C بردار ویژه‌ی متناظر با $\rho(G)$ است. از $\rho(G)C = D^Q(G)C$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ رابطه‌ی $Tr_i + \frac{T_i}{Tr_i} = Tr_j + \frac{T_j}{Tr_j}$ برقرار است، بنابراین برای $i \neq j$ همواره داریم $Tr_i + \frac{T_i}{Tr_i} = Tr_j + \frac{T_j}{Tr_j}$. فرض کنیم $Tr_{\max}$ و $Tr_{\min}$ به ترتیب ماکزیمم و مینیمم اعداد انتقال گراف G باشد. بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود، فرض کنیم که $Tr_i = Tr_{\max}$ و $Tr_j = Tr_{\min}$. بنابراین داریم $Tr_{\max} + \frac{T_i}{Tr_{\max}} = Tr_{\min} + \frac{T_j}{Tr_{\min}}$. از آنجا که $T_i \geq Tr_{\max}Tr_{\min}$ و $T_j \leq Tr_{\max}Tr_{\min}$ می‌توان نتیجه گرفت،

$$Tr_{\max} + Tr_{\min} \leq Tr_{\max} + \frac{T_i}{Tr_{\max}} = Tr_{\min} + \frac{T_j}{Tr_{\min}} \leq Tr_{\max} + Tr_{\min}.$$

بنابراین باید همواره رابطه‌ی $Tr_{\max} + Tr_{\min} = Tr_{\max} + \frac{T_i}{Tr_{\max}} = Tr_{\min} + \frac{T_j}{Tr_{\min}}$ برقرار باشد. در نتیجه داریم $T_i = Tr_{\max}Tr_{\min}$ و $T_j = Tr_{\max}Tr_{\min}$ که می‌توان نتیجه گرفت برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، $Tr_{\max} = Tr_k = Tr_{\min}$. در نتیجه، G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال است. $\square$

در ادامه، کران پایینی برای $\rho(G)$ که شامل ماکزیمم درجه رئوس است، مورد بحث قرار خواهد گرفت.

قضیه ۳.۲.۳. اگر G گرافی از مرتبه‌ی n با ماکزیمم درجه‌ی Δ_1 و دومین ماکزیمم درجه‌ی Δ_2 باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) \geq 4n - 4 - \Delta_1 - \Delta_2, \quad (۶.۳)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G منتظم با قطر کمتر، مساوی ۲ باشد.

برهان. گیریم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بردار ویژه‌ای از $Tr^{-1}D^Q(G)Tr$ متناظر با $\rho(G)$ به طوری که $x_i = \min\{x_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ و $x_j = \min\{x_k \mid x_k \neq x_i, k = 1, 2, \dots, n\}$ با استفاده از معادلات ویژه برای مؤلفه‌ی x_i داریم،

$$\begin{aligned} \rho(G)x_i &= \sum_{k=1}^n d_{ik}(x_k + x_i) \\ &\geq d_i(x_j + x_i) + 2(n-1-d_i)(x_j + x_i) = (2n-2-d_i)(x_j + x_i). \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

همچنین به طور مشابه برای مؤلفه‌ی x_j داریم،

$$\begin{aligned} \rho(G)x_j &= \sum_{k=1}^n d_{jk}(x_k + x_j) \\ &\geq d_j(x_i + x_j) + 2(n-1-d_j)(x_i + x_j) = (2n-2-d_j)(x_i + x_j). \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

اکنون با ترکیب کردن (۷.۳) و (۸.۳)، نتیجه می‌گیریم،

$$\rho(G) \geq (2n-2-d_i) + (2n-2-d_j) \geq (2n-2-\Delta_1) + (2n-2-\Delta_2) = 4n-4-\Delta_1-\Delta_2.$$

فرض می‌کنیم که $\rho(G) = 4n - 4 - \Delta_1 - \Delta_2$. بنابراین در هر کدام از نامساوی‌ها در استدلال بالا باید تساوی برقرار باشد، که نتیجه می‌دهد که G یک گراف منتظم با قطر کمتر یا مساوی ۲ است. برعکس، گیریم G یک گراف منتظم با قطر حداکثر ۲ باشد، آنگاه همه مؤلفه‌های x_i برابر هستند. اگر $d(G) = 1$ آنگاه $G \cong K_n$ و $\rho(G) = 2(n-1) = 4n - 4 - 2(n-1)$. بنابراین تساوی در (۶.۳) برقرار است. اگر $d(G) = 2$ می‌توان نتیجه گرفت $\rho(G)x_i = 2d_i x_i + 4(n-1-d_i)x_i$. و بنابراین $\rho(G) = 4n - 4 - 2d_i$ در نتیجه تساوی در (۶.۳) برقرار است. $\square$

اگر گراف G دارای قطر ۲ باشد، در این صورت ما یک کران پایین برای G که شامل مرتبه و اندازه‌ی گراف G باشد را ارائه می‌دهیم.

لم ۱.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n و سایز m باشد. اگر قطر گراف G برابر ۲ باشد، در این صورت

$$\rho(G) \geq \frac{4n^2 - 4m - 4n}{n}, \quad (9.3)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف منتظم باشد.

برهان. گیریم $X = (1, 1, \dots, 1)^T$ برداری باشد با همه‌ی درایه‌های یک، آنگاه با استفاده از قاعده رالی داریم،

$$\begin{aligned} \rho(G) &\geq \frac{X^T D^Q(G) X}{X^T X} = \frac{1}{n} \left[2 \sum_{i=1}^n Tr_i \right] = \frac{1}{n} \left[2 \sum_{i=1}^n (2n - d_i - 2) \right] \\ &= \frac{1}{n} (4n^2 - 4m - 4n). \end{aligned}$$

اگر G یک گراف r منتظم باشد، آنگاه مجموع هر سطر از $D^Q(G)$ برابر است با $4n - 2r - 4$ و بنابراین $\rho(G) = 4n - 2r - 4$. از آنجا که $nr = 2m$ در این صورت تساوی در (۹.۳) برقرار است. برعکس اگر تساوی در (۹.۳) برقرار باشد، آنگاه X بردار ویژه‌ی متناظر با $\rho(G)$ است. این نتیجه می‌دهد که مجموع همه‌ی سطرها‌ی $D^Q(G)$ با هم برابر هستند. از آنجا که مجموع سطر i ام برابر است با $4n - 2d_i - 4$ از اینرو نتیجه می‌گیریم که G یک گراف منتظم است. $\square$

گیریم Γ کلاسی از گراف‌های $H = (V(H), E(H))$ باشد، به طوری که H گرافی همبند با قطر d ($3 \leq d \leq 4$) و $|V(H)| \geq d + 2$ دارای خواص زیر باشد:

فرض کنیم P_{d+1} یک مسیر $d+1$ رأسی در H است. آنگاه برای هر رأس $i \in V(H) \setminus V(P_{d+1})$ و برای هر رأس $j \in V(H)$ که $j \neq i$ یا $d(i, j) = 1$ یا $d(i, j) = 2$ برقرار باشد. گزاره زیر کران پایینی برای $W(G) + W(\bar{G})$ ارائه می‌دهد که در [۳۷] اثبات شده است.

لم ۲.۲.۳. [۳۷] گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند روی $n \geq 4$ رأس، با قطر d باشد. اگر $\bar{G}$ گراف مکمل همبند G باشد، در این صورت داریم،

$$W(G) + W(\bar{G}) \geq \frac{3}{4}n(n-1) + \frac{1}{6}(d-2)(d-1)d,$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف با قطر ۲ باشد یا $G \cong P_n$ یا $G \in \Gamma$ و $\bar{G}$ یک گراف با قطر ۲ است.

اکنون ما کران پایینی برای $\rho(G) + \rho(\bar{G})$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند روی $n \geq 4$ رأس، با قطر d باشد. اگر $\bar{G}$ گراف مکمل همبند G باشد، در این صورت داریم

$$\rho(G) + \rho(\bar{G}) \geq 6(n-1) + \frac{2}{3n}(d-2)(d-1)d,$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G و $\bar{G}$ گراف‌های منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر ۲ باشند.

برهان. با استفاده از گزاره‌های ۴.۱.۲ و ۲.۲.۳ نتیجه حاصل می‌شود. علاوه بر این به آسانی دیده می‌شود که تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G و $\bar{G}$ گراف‌های منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر ۲ باشند. $\square$

نتیجه ۱.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند روی $n \geq 4$ رأس با گراف مکمل همبند $\bar{G}$ باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) + \rho(\bar{G}) \geq 6(n-1),$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G و $\bar{G}$ گراف‌های منتظم با قطر ۲ باشند.

نتیجه ۲.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند روی $n \geq 2$ رأس و m یال باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) \geq 4(n-1) - \frac{4m}{n}, \quad (11.3)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یا $\bar{G}$ یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر ۲ باشد.

برهان. توجه می‌کنیم که رابطه‌ی زیر همواره برقرار است،

$$W(G) \geq m + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} - m \right) = n(n-1) - m,$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر قطر گراف G حداکثر ۲ باشد. بنابراین با استفاده از گزاره ۴.۱.۲ نامساوی (۱۱.۳) نتیجه می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم که تساوی در (۱۱.۳) برقرار باشد، آنگاه تساوی در گزاره ۴.۱.۲ برقرار است و $W(G) = m + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} - m \right) = n(n-1) - m$ و بنابراین G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر حداکثر ۲ است، در نتیجه $G \cong K_n$ یا G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر حداکثر ۲ است.

برعکس، اگر $G \cong K_n$ یا G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر حداکثر ۲ باشد، آنگاه به آسانی دیده می‌شود که تساوی در (۱۱.۳) برقرار است. $\square$

نتیجه ۳.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند خالی از مثلث و مربع روی $n \geq 2$ رأس و m یال باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) \geq 6(n-1) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n d_{v_i}^2 - \frac{4m}{n}, \quad (12.3)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر مجموع سطرهای $D^Q(G)$ همگی با هم برابر و قطر گراف G حداکثر ۳ باشد.

برهان. توجه می‌کنیم که با استفاده از رابطه‌ی اثبات شده‌ی زیر در [۹۴] داریم،

$$W(G) \geq \frac{2n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_{v_i}^2 - m,$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر قطر گراف حداکثر ۳ باشد. اکنون با استفاده از گزاره ۴.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۳. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال و دنباله‌ی دومین اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i(Tr_i^2 + T_i) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(Tr_j^2 + T_j))^2}{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i)^2}} \quad (13.3)$$

و تساوی برقرار است که اگر و تنها اگر عدد ثابت و مثبت c وجود داشته باشد به طوری که برای همه‌ی $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ داشته باشیم

$$c = \frac{Tr_i(Tr_i^2 + T_i) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(Tr_j^2 + T_j)}{Tr_i^2 + T_i},$$

در حقیقت $c = \rho(G)$.

برهان. اثبات مشابه قضیه ۱ در [۸۸]. $\square$

اکنون، کران پایین دیگری برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف‌ها ارائه می‌دهیم که تعدادی کران به دست آمده در [۹۱] را بهبود می‌بخشد.

قضیه ۶.۲.۳. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال و دنباله‌ی دومین اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i)^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}}, \quad (14.3)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. گیریم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بردار ویژه اصلی ماتریس لاپلاسیان بدون علامت فاصله گراف G باشد و $C = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} (Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n)^T$. آنگاه داریم،

$$\rho(G) = \sqrt{\rho(G)^2} = \sqrt{X^T D^Q(G)^2 X} \geq \sqrt{C^T D^Q(G)^2 C}.$$

اکنون ما داریم،

$$C^T D = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} (T_1, T_2, \dots, T_n),$$

$$C^T Tr = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} (Tr_1^2, Tr_2^2, \dots, Tr_n^2).$$

$$C^T D \cdot Tr C = \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^4}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2} \text{ و } C^T Tr^2 C = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2} \text{ هم چنین } C^T D^2 C = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}$$

$$\text{بنابراین رابطه‌های } C^T D^2 C = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2} \text{ و } C^T Tr^2 C = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2} \text{ برقرار هستند. پس نتیجه می‌گیریم،}$$

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i^2 + Tr_i^4 + 2T_i Tr_i^2)}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i)^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}}.$$

□

بقیه اثبات مشابه قضیه ۲.۲.۳ است.

ملاحظه ۱.۲.۳. کران پایین به دست آمده برای $\rho(G)$ در قضیه ۶.۲.۳ همیشه بهتر است کران پایین به دست آمده در گزاره ۴.۱.۲ است. در ابتدا می‌دانیم $\sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n Tr_i^2$. هم چنین با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز، داریم $(\sum_{i=1}^n T_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n T_i^2$ و $(\sum_{i=1}^n Tr_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n Tr_i^2$.

اکنون با استفاده از قضیه ۶.۲.۳ نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned}\rho(G) &\geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i)^2}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} \geq \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i)\right)^2}{n \sum_{i=1}^n Tr_i^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n 2Tr_i^2\right)^2}{n \sum_{i=1}^n Tr_i^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}} \geq 2\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n Tr_i\right)^2}{n^2}} = \frac{4\sigma(G)}{n}.\end{aligned}$$

زیر مجموعه S از مجموعه رئوس $V(G)$ از گراف G را مجموعه مستقل می‌نامند، هرگاه هیچ دو رأسی در S مجاور نباشند. ماکزیمم تعداد رئوس در مجموعه مستقل را عدد استقلال G می‌گویند. قضیه‌ی زیر کران پایینی برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله بر حسب مرتبه و عدد استقلال گراف G نشان می‌دهد. یک خوشه در گراف مجموعه‌ای است که همه‌ی رئوس آن مجاور باشند. ماکزیمم اندازه از یک خوشه را عدد خوشه گراف G می‌نامند. **قضیه ۷.۲.۳.** گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n ، با عدد استقلال s باشد، آنگاه همواره داریم،

$$\rho(G) \geq \frac{2s + 3n - 6 + \sqrt{4s(3s - 4) + n(n + 4) - 4ns + 4}}{2}. \quad (15.3)$$

برهان. گیریم S ماکزیمم مجموعه مستقل با عدد استقلال s باشد. فرض کنیم x بردار ویژه‌ی اصلی از G باشد. به آسانی دیده می‌شود که مولفه‌های x برای رأس‌های در S ، دارای مقدار یکسان $x(v_1)$ و برای رئوس در $V(G) \setminus S$ دارای مقدار یکسان $x(v_n)$ هستند. بنابراین معادلات ویژه‌ی G به صورت زیر هستند،

$$\begin{aligned}\rho(G)x(v_1) &\geq 2(s-1)(x(v_1) + x(v_1)) + (n-s)(x(v_1) + x(v_n)), \\ \rho(G)x(v_n) &\geq (n-s-1)(x(v_n) + x(v_n)) + s(x(v_1) + x(v_n)),\end{aligned}$$

و در نتیجه $\rho(G)$ بزرگترین ریشه از معادله زیر است،

$$\rho^2 + (6 - 2s - 3n)\rho + (2n^2 - 2s^2 + 4ns - 10n - 2s + 8) \geq 0,$$

□

که به ما نتیجه مطلوب را می‌دهد.

ملاحظه ۲.۲.۳. [۱۲] به آسانی دیده می‌شود که تساوی در (۱۵.۳) برقرار است اگر و تنها اگر $G = \bar{K}_s \vee K_{n-s}$.

قضیه ۸.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند با عدد استقلال s و عدد خوشه‌ای ω باشد. آنگاه همواره داریم،

$$\rho(G) \geq \frac{5s + 3\omega - 8 + \sqrt{(3s + \omega - 4)^2 - 7(s-1)(\omega-1)}}{2}, \quad (۱۶.۳)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_{\omega-1} \vee \bar{K}_s$.

برهان. گیریم S و C به ترتیب، ماکزیمم مجموعه‌ی مستقل و ماکزیمم خوشه‌ی گراف G باشند. فرض کنیم x بردار ویژه‌ی اصلی از G باشد. به آسانی دیده می‌شود که مؤلفه‌های x برای مجموعه رئوس $V(S)$ دارای مقدار ثابت $x(v_1)$ و برای مجموعه رئوس $V(C)$ دارای مقدار ثابت $x(v_n)$ هستند. هم چنین داریم، $\forall u, v \in C : d(u, v) = 1, \forall u, v \in S : d(u, v) \geq 2$. از طرف دیگر همواره داریم، $|S \cap C| \leq 1$. بنابراین معادلات ویژه از G به صورت زیر هستند،

$$\rho(G)x(v_1) \geq 2(s-1)(x(v_1) + x(v_1)) + (\omega-1)(x(v_1) + x(v_n))$$

$$\rho(G)x(v_n) \geq (\omega-1)(x(v_n) + x(v_n)) + (s-1)(x(v_1) + x(v_n)),$$

و بنابراین $\rho(G)$ بزرگترین ریشه از معادلات زیر است،

$$\rho^2(G) - (5s + 3\omega - 8)\rho(G) + (8(s-1)(\omega-1) + 2(\omega-1)^2 + 4(s-1)^2) \geq 0,$$

که نتیجه مطلوب را می‌دهد.

اگر $G \cong K_{\omega-1} \vee \bar{K}_s$ ، آنگاه به آسانی ثابت می‌شود که تساوی در (۱۶.۳) برقرار است. برعکس، اگر تساوی در (۱۶.۳) برقرار باشد، آنگاه داریم، $S \cup C = V(G)$ و $|C \cap S| = 1$. فرض کنیم $|C \cap S| = \{u\}$. از آنجا که $u \in C$ ، آنگاه برای هر $v \in C$ ، داریم $uv \in E(G)$. به طور مشابه برای هر $u \in S$ و $xy \in E(G)$ ، $y \in C - \{u\}$ ، نتیجه می‌گیریم که $x \in S$ و $\square$. بنابراین $G \cong K_{\omega-1} \vee \bar{K}_s$ برقرار هستند.

نتیجه ۴.۲.۳. [۱۲] فرض کنیم G یک گراف همبند با گراف مکمل همبند $\bar{G}$ باشد. آنگاه داریم،

$$\rho(\bar{G}) \geq \frac{5\omega + 3s - 8 + \sqrt{(3\omega + s - 4)^2 - 7(\omega-1)(s-1)}}{2},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_\omega \vee \bar{K}_{s-1}$ هم چنین

$$\rho(\bar{G}) \geq \frac{3n + 2\omega - 8 + \sqrt{(n + 2\omega - 4)^2 - 7(\omega-1)(n-\omega-1)}}{2},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_\omega \vee \bar{K}_{n-\omega-1}$.

برهان. از قضیه ۸.۲.۳ و تساوی $s(\bar{G}) = \omega(G)$ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

لم ۳.۲.۳. فرض کنیم $G = K_{n_1, \dots, n_k}$ گراف کامل k بخشی برای $1 \leq k \leq n-1$ باشد. در نتیجه داریم $\rho_n(G) \geq n + n_1 - 4$. علاوه بر این، اگر $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ و $n = kn_1$ آنگاه $\rho_n(G) = n + n_1 - 4$ و چندگانگی آن $n - k$ است.

برهان. بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود، فرض می‌کنیم $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$. واضح است که قطر گراف ۲ می‌باشد. در یک گراف همبند با قطر ۲ داریم،

$$Tr(v) = d(v) + 2(n - d(v) - 1) = 2n - 2 - d(v)$$

و بنابراین $Tr(G) = (2n - 2)I - Diag(Deg)$ در نتیجه

$$D^Q(G) = J - I + A^c + (2n - 2)I - Diag(Deg)$$

که A^c ماتریس مجاورت G^c است. توجه داریم که G^c اجتماع گراف‌های کامل است، بنابراین با استفاده از نامساوی‌های ویلی داریم،

$$\begin{aligned} \rho_n(G) &\geq \rho_n(J - I) + \rho_n(A^c) + \rho_n((2n - 2)I) + \rho_n(-Diag(Deg)) \\ &\geq -2 + (2n - 2) - (n - n_1) = n + n_1 - 4. \end{aligned}$$

در ادامه، ما نشان خواهیم داد که مقدار ویژه‌ای وجود دارد که برابر $n + n_1 - 4$ است. فرض می‌کنیم $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ برای $1 \leq k \leq n-1$ و $n_1 = |V_i| (i = 1, \dots, k)$. آنگاه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از G به صورت زیر است،

$$D^Q(G) = \begin{pmatrix} S & J_{n_1 \times n_1} & J_{n_1 \times n_1} \dots J_{n_1 \times n_1} \\ J_{n_1 \times n_1} & S & J_{n_1 \times n_1} \dots J_{n_1 \times n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ J_{n_1 \times n_1} & J_{n_1 \times n_1} & J_{n_1 \times n_1} \dots J_{n_1 \times n_1} \\ J_{n_1 \times n_1} & J_{n_1 \times n_1} & J_{n_1 \times n_1} \dots S \end{pmatrix},$$

که $S = 2J_{n_1 \times n_1} + (n + n_1 - 4)I_{n_1}$ از این رو

$$P_{D^Q(G)}(\rho) = \det(\rho I - D^Q(G))$$

$$= (\rho - (n + n_1 - 4))^{n-k} \begin{vmatrix} \zeta & -n_1 & -n_1 \dots -n_1 \\ -n_1 & \zeta & -n_1 \dots -n_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -n_1 & -n_1 & -n_1 \dots -n_1 \\ -n_1 & -n_1 & -n_1 \dots \zeta \end{vmatrix},$$

که $\zeta = \rho - n - 3n_1 + 4$. از آنجا که $k \leq n - 1$ ، آنگاه چندگانگی $n + n_1 - 4$ حداقل $n - k \geq 1$ است. توجه داریم که $D^Q(G) = J - I + A^c + (2n - 2)I - \text{Diag}(\text{Deg})$. بنابراین با استفاده از نامساوی‌های ویل داریم $\rho_n(J - I) + \rho_i(A^c) + \rho_n((2n - 2)I - \text{Diag}(\text{Deg})) \leq \rho_i(G) \leq \rho_1(J - I) + \rho_{i-1}(A^c) + \rho_2((2n - 2)I - \text{Diag}(\text{Deg}))$ توجه داریم که G^c اجتماع گراف‌های کامل $K_{n_1}, \dots, K_{n_k}$ است. این نتیجه می‌دهد $\rho_i(A^c) = n_i - 1$ برای $i = 1, \dots, k$. بنابراین چون $n_i \geq 1$ و $\rho_1(G) > 2n - 2$ برای $i = 2, \dots, k$ برقرار است، داریم $\rho_i(G) \geq n + n_1 - 3$ پس چندگانگی $n + n_1 - 4$ حداقل $n - k$ است. $\square$

اکنون به بررسی گراف‌های همبند با قطر ۲ می‌پردازیم.

لم ۴.۲.۳. گراف $K_{1,n-1}$ ، گراف یکتایی با ماکزیم شعاع طیفی لاپلاسین بدون علامت فاصله از میان همه‌ی گراف‌های با قطر ۲ است.

برهان. گیریم G گراف همبند دلخواهی با قطر ۲ و مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. فرض می‌کنیم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ بردار اصلی از G ، که برای $i = 1, \dots, n$ با v_i متناظر است. گیریم v_t رأسی از $V(G)$ باشد، به طوری که $x_t = \min\{x_i | v_i \in V(G)\}$. بنابراین، ما دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $d(v_t) = n - 1$.

بنابراین همه یال‌های در $N(v_t)$ را حذف می‌کنیم و گراف حاصل $K_{1,n-1}$ می‌شود. در نتیجه $\rho(K_{1,n-1}) \geq \rho(G)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_{1,n-1}$.

حالت دوم: $d(v_t) \leq n - 2$.

بنابراین $C(v_t) \neq \emptyset$ واضح است که هر رأس در $C(v_t)$ با حداقل یک رأس در $N(v_t)$ مجاور است. گیریم $G' = G - [N(v_t), C(v_t)] + \{v_t v_i | v_i \in C(v_t)\}$ واضح است قطر G' برابر ۲ و $\Delta(G') = n - 1$ اما داریم،

$$\begin{aligned} \rho(G') - \rho(G) &\geq x^t(D^Q(G') - D^Q(G))x \\ &= \frac{1}{4} \sum_{v_i \in V(C_t)} (x_i + x_t)^2 - \sum_{v_i \in C(v_t)} (x_i + x_t)^2 \\ &\quad + \sum_{v_i v_j \in [N(v_t), C(v_t)]} (x_i + x_j)^2 - \frac{1}{4} \sum_{v_i v_j \in [N(v_t), C(v_t)]} (x_i + x_j)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{v_i v_j \in [N(v_t), C(v_t)]} (x_i + x_j)^2 - \frac{1}{4} \sum_{v_i \in C(v_t)} (x_i + x_t)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین داریم $\rho(G') \geq \rho(G)$. در نتیجه بنابر حالت اول، همواره رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\rho(K_{1,n-1}) \geq \rho(G') \geq \rho(G).$$

اگر $\rho(K_{1,n-1}) = \rho(G)$ باشد، آنگاه $G' \cong K_{1,n-1}$ و $\rho(G) = \rho(G')$ است، که نتیجه می‌دهد که X بردار اصلی $K_{1,n-1}$ است. بنابراین اگر $v_i, v_j \neq v_t$ باشد، آنگاه داریم $x_i = x_j > x_t$. از

آنجا که همه‌ی نامساوی‌های بالا تساوی هستند، داریم،

$$\sum_{v_i v_j \in [N(v_t), C(v_t)]} (x_i + x_j)^2 = \sum_{v_i \in C(v_t)} (x_i + x_t)^2.$$

بنابراین برای هر یال $v_i v_j \in [N(v_t), C(v_t)]$ ، نتیجه می‌گیریم $x_i = x_t$ که یک تناقض است. از این رو $\rho(K_{1, n-1}) > \rho(G)$ ، که اثبات کامل می‌شود. $\square$

اثبات شده است که اگر G منتظم باشد، آنگاه G دارای دقیقاً ۳ مقدار ویژه متمایز است اگر و تنها اگر قویاً منتظم باشد. نتیجه زیر برای گراف‌های با قطر ۲ برقرار است.

قضیه ۹.۲.۳. گیریم G گرافی همبند با قطر ۲ است. اگر G یک گراف k منتظم باشد، آنگاه G دارای ۳ مقدار ویژه متمایز برای ماتریس $D^Q(G)$ است اگر و تنها اگر G قویاً منتظم باشد.

برهان. از آنجا که قطر گراف G ۲ است، بنابراین داریم $D^Q(G) = J - I + A^c + (2n - 2)I - \text{Diag}(\text{Deg})$ ، که A^c ماتریس مجاورت G^c است. واضح است $\rho(G) = 4(n - 1) - 2k$ و $X = (1, \dots, 1)^T$ بردار ویژه اصلی متناظر با $\rho(G)$ می‌باشد. توجه داریم که چون G یک گراف k منتظم است، آنگاه G^c یک گراف $(n - 1 - k)$ منتظم و $X = (1, \dots, 1)^T$ یک بردار ویژه متناظر با $\rho(A^c)$ است. گیریم X_i بردار ویژه از A^c متناظر با $\rho(A^c)$ برای $2 \leq i \leq n$ است، آنگاه $X^T X_i = 0$ و بنابراین داریم

$$D^Q(G)X_i = (J - I)X_i + A^c X_i + (2n - 2)IX_i - \text{Diag}(\text{Deg})X_i = (2n - 4 - k - \rho_i(A)).$$

درنتیجه، $D^Q(G)$ دارای دقیقاً ۳ مقدار ویژه متمایز است اگر و تنها اگر A دارای ۳ مقدار ویژه متمایز باشد اگر و تنها اگر G قویاً منتظم باشد. $\square$

قضیه ۱۰.۲.۳. گیریم $G = K_{n_1, \dots, n_k}$ یک گراف k بخشی کامل با $n_1 = \dots = n_k$ و $n = kn_1$ باشد. آنگاه چندجمله‌ای مشخصه $D^Q(G)$ عبارت است از،

$$P_{D^Q(G)}(\rho) = \left(\rho - (n + n_1 - 4) \right)^{n-k} (\rho - n - 2n_1 + 4)^{k-1} (\rho - 2n - 2n_1 + 4).$$

برهان. بنابر گزاره ۳.۲.۳ داریم،

$$P_{D^Q(G)}(\rho) = \det \left(\rho I - D^Q(G) \right) = (\rho - (n + n_1 - 4))^{n-k} \begin{vmatrix} \rho - n - 2n_1 + 4 & -n_1 & -n_1 \dots - n_1 \\ -n_1 & \rho - n - 2n_1 + 4 & -n_1 \dots - n_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -n_1 & -n_1 & -n_1 \dots - n_1 \\ -n_1 & -n_1 & -n_1 \dots \rho - n - 2n_1 + 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\rho - (n + n_1 - 4) \right)^{n-k} \begin{vmatrix} \rho - n - 3n_1 + 4 & -n_1 & -n_1 \dots - n_1 \\ n + 2n_1 - 4 - \rho & \rho - n - 2n_1 + 4 & \circ \dots \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n + 2n_1 - 4 - \rho & \circ & \circ \dots \circ \\ n + 2n_1 - 4 - \rho & \circ & \circ \dots \rho - n - 2n_1 + 4 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\rho - (n + n_1 - 4) \right)^{n-k} \left((\rho - n - 2n_1 + 4)^k - n(\rho - n - 2n_1 + 4)^{k-1} \right) \\
 &= \left(\rho - (n + n_1 - 4) \right)^{n-k} (\rho - n - 2n_1 + 4)^{k-1} (\rho - 2n - 2n_1 + 4).
 \end{aligned}$$

□

اکنون کران پایینی برای شعاع طیفی ماتریس $D^Q(G)$ برای یک گراف دوبخشی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۲.۳. گیریم $G = (V, E)$ یک گراف دوبخشی همبند روی n رأس با دو بخش $V(G) = A \cup B$ که $|A| = p, |B| = q$ است. آنگاه داریم

$$\rho(G) \geq \frac{3n + 2p - 8 + \sqrt{9n^2 + 16q^2 - 28pq}}{2}, \quad (17.3)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف دوبخشی کامل $K_{p,q}$ باشد.

برهان. از آنجا که $V(G) = A \cup B$ و $|A| = p, |B| = q$ ، می‌توان فرض کرد که $A = \{1, 2, \dots, p\}$ و $B = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$ ، که $p+q = n$ است. گیریم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ یک بردار ویژه از $D^Q(G)$ متناظر با $\rho(G)$ باشد. ما می‌توانیم فرض کنیم که $x_i = \min\{x_k \mid k \in A\}$ و هم چنین $x_j = \min\{x_k \mid k \in B\}$ برای $i \in A$ داریم،

$$\begin{aligned}
 \rho(G)x_i &= \sum_{k=1, k \neq i}^p d_{i,k}(x_k + x_i) + \sum_{k=p+1}^{p+q} d_{i,k}(x_k + x_i) \\
 &\geq 4(p-1)x_i + q(x_j + x_i).
 \end{aligned} \quad (18.3)$$

برای $j \in B$ داریم،

$$\begin{aligned}
 \rho(G)x_j &= \sum_{k=1}^p d_{j,k}(x_k + x_j) + \sum_{k=p+1, k \neq j}^{p+q} d_{j,k}(x_k + x_j) \\
 &\geq p(x_i + x_j) + 4(q-1)x_j.
 \end{aligned} \quad (19.3)$$

از آنجا که G یک گراف همبند است، برای همه $k \in V$ داریم $x_k > 0$ از (۱۸.۳) و (۱۹.۳) نتیجه می‌گیریم،

$$\rho^2(G) + (\lambda - 5p - 5q)\rho(G) + 4p^2 + 4q^2 + 16pq - 2^{\circ}p - 2^{\circ}q + 16 \geq 0,$$

که نتیجه مطلوب در (۱۷.۳) را به ما می‌دهد.

اکنون فرض می‌کنیم که تساوی در (۱۷.۳) برقرار باشد، آنگاه همه‌ی نامساوی‌ها در استدلال بالا باید تساوی باشند. از تساوی در (۱۸.۳) نتیجه می‌گیریم که $x_k = x_j$ و $ik \in E(G)$ برای همه‌ی $k \in B$. از تساوی در (۱۹.۳) نتیجه می‌گیریم که $x_k = x_i$ و $jk \in E(G)$ برای همه‌ی $k \in A$.

بنابراین، هر رأس در هر مجموعه مجاور با همه‌ی رؤوس در مجموعه دیگر است و برعکس. از این رو، G یک گراف کامل دوبخشی $K_{p,q}$ است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

یادآوری می‌کنیم که گراف خطی $L(G)$ از گراف G گرافی است که رأس‌های $L(G)$ یال‌های G هستند و دو رأس در $L(G)$ مجاور هستند اگر و تنها اگر یال‌های متناظرشان در G دارای یک رأس مشترک باشند [۵۹]. این موضوع کاربردهای متفاوتی در شیمی فیزیک دارد. (به عنوان مثال ببینید [۴۸، ۴۹])

گیریم F_1 یک مسیر روی ۵ رأس، F_2 گراف به دست آمده از منطبق کردن یک رأس از یک مثلث با یک رأس پایانی از مسیر ۳ رأسی و F_3 گراف به دست آمده از منطبق کردن یک رأس از یک مثلث با یک رأس از مثلث دیگر باشد.

قضیه ۱۲.۲.۳. [۸۲، ۸۱] اگر $diam(G) \leq 2$ و هیچ کدام از گراف‌های F_1 ، F_2 و F_3 زیرگراف‌های القایی از G نباشند، آنگاه $diam(L(G)) \leq 2$ است.

قضیه ۱۳.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند روی n رأس، m یال باشد و $d_i = deg(v_i)$. اگر $diam(G) \leq 2$ و G شامل هیچ کدام از F_i ها برای $i = 1, 2, 3$ به عنوان زیرگراف القا شده نباشد، آنگاه داریم

$$\rho(L(G)) \geq \frac{4m^2 - 2 \sum_{i=1}^n d_i^2}{m}.$$

برهان. گیریم G یک گراف همبند با قطر ۲ باشد، که شامل هیچ کدام از F_i ها برای $i = 1, 2, 3$ به عنوان زیرگراف القا شده نباشد، هم چنین فرض می‌کنیم رأس‌های گراف $v_1, \dots, v_n$ باشند. گیریم d_i نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی v_i باشد. هنگامی که قطر گراف ۲ است، به آسانی دیده می‌شود که سطر i ام از $D^Q(G)$ شامل d_i یک، $n - d_i - 1$ دو و درایه قطری $2 - d_i - 2$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که $X = (1, 1, \dots, 1)^T$ برداری با درایه‌های یک باشد. آنگاه بنابر قاعده رالی داریم،

$$\rho(G) \geq \frac{X^T D^Q(G) X}{X^T X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (4n - 2d_i - 4) = \frac{4n^2 - 4m - 4n}{n}.$$

تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌های $L(G)$ به ترتیب برابر است با $n_1 = m$ و $m_1 = -m + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i^2$ و $i = 1, 2, 3$ به عنوان زیر گراف القا شده ندارد،

با استفاده از قضیه ۱۲.۲.۳ نتیجه می‌گیریم $diam(G) \leq ۲$. بنابراین

$$\begin{aligned} \rho(L(G)) &\geq \frac{۴n_1(n_1 - ۱) - ۴m_1}{n_1} \\ &= \frac{۴m(m - ۱) - ۴\left(-m + \frac{1}{۴} \sum_{i=1}^n d_i^2\right)}{m} \\ &= \frac{۴m^2 - ۲ \sum_{i=1}^n d_i^2}{m}. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۲.۳. اگر G یک گراف ساده‌ی همبند r -منتظم روی n رأس باشد، هم چنین G شامل هیچ کدام از F_i ها برای $i = ۱, ۲, ۳$ به عنوان زیرگراف القا شده نباشد، آنگاه داریم،

$$\rho(L(G)) \geq ۲r(n - ۲).$$

برهان. از آنجا که G یک گراف r -منتظم روی n رأس است، تعداد یال‌های G برابر است با $m = \frac{nr}{۲}$ و $d_i = deg(v_i) = r$. آنگاه از قضیه ۱۳.۲.۳ نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \rho(L(G)) &\geq \frac{۴m^2 - ۲ \sum_{i=1}^n d_i^2}{m} \\ &= \frac{۴\left(\frac{nr}{۲}\right)^2 - ۲ \sum_{i=1}^n r^2}{\frac{nr}{۲}} \\ &= ۲r(n - ۲). \end{aligned}$$

□

گیریم $e = uv$ یالی از G باشد که u و v رأس‌های پایانی از e هستند. درجه‌ی هر رأس $e \in V(L(G))$ برابر است با $deg_{L(G)}(e) = deg_G(u) + deg_G(v) - ۲$.

قضیه ۱۴.۲.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند به ترتیب با مجموعه رؤس و مجموعه یال‌های $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ باشد. فرض کنیم $d_i = deg(v_i)$. آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(L(G)) \geq \frac{۲}{m} \sum_{i=1}^n d_i(d_i - ۱) + ۴(m - ۱) - \frac{۴}{m} \sum_{i=1}^m deg(e_i).$$

برهان. اگر $d_i = deg(v_i)$ ، آنگاه برای هر رأس v_i ، d_i یال مجاور v_i وجود دارد. این d_i یال‌ها از یک گراف کامل روی d_i رأس در $L(G)$ وجود دارد. توجه داریم که یال $e = uv$ با $deg(u) + deg(v) - ۲ = deg(e)$ یال در هر دو u و v مجاور است. بنابراین یال e با $m - ۱ - deg(e)$ یال از گراف G مجاور نیست. در $L(G)$ فاصله‌ی بین e و $m - ۱ - deg(e)$ رأس باقی‌مانده بیشتر از یک است. از این رو هر یال $e = uv$ در فاصله‌ی حداقل $۲(m - ۱ - deg(e))$ در $L(G)$ وجود دارد. اکنون با استدلال مشابه قضیه ۱۳.۲.۳ اثبات کامل می‌شود.

□

تعریف ۱.۲.۳. تفاضل لاپلاسین بدون علامت فاصله از یک گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$D^Q S(G) = \rho_1(G) - \rho_n(G).$$

اکنون، کرانی برای تفاضل لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف‌ها ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۲.۳. گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه داریم،

$$\rho_1(G) - \rho_n(G) \geq \frac{2}{n} \sqrt{n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4 \sigma^2(G)}.$$

برهان. گیریم $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف G باشد. اکنون فرض می‌کنیم که اعداد حقیقی و نامنفی $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ و $b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$ در معادلات زیر تعریف شده‌اند:

$$\rho_i^2 = a_i \rho_1^2 + b_i \rho_n^2, \quad a_i + b_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

قرار می‌دهیم $a = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i$ و $b = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} b_i$ ، که داریم $a + b = n$ و

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = a \rho_1^2 + b \rho_n^2.$$

از طرفی دیگر، توجه می‌کنیم که رابطه‌ی $\rho_i^2 = (a_i \rho_1^2 + b_i \rho_n^2)(a_i + b_i)$ برقرار است و بنابراین

$$\rho_i \geq a_i \rho_1 + b_i \rho_n, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

که نتیجه می‌دهد،

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \geq a \rho_1 + b \rho_n.$$

اکنون، مشاهده می‌کنیم که رابطه‌ی $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$ برقرار است و بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \right)^2 &\leq (a \rho_1^2 + b \rho_n^2)(a + b) - (a \rho_1 + b \rho_n)^2 \\ &= ab(\rho_1 - \rho_n)^2 \\ &\leq \frac{n^2}{4} (\rho_1 - \rho_n)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

در نتیجه، از (۲.۳) رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم،

$$\rho_1 - \rho_n \geq \frac{2}{n} \sqrt{n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4 \sigma^2(G)},$$

□

که نتیجه‌ی مطلوب است.

۳.۳ تعدادی کران بالا برای شعاع طیفی ماتریس $D^Q(G)$

در این بخش کران‌های بالایی را برای شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۳. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال و دنباله‌ی دومین اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \frac{Tr_i + Tr_j + \sqrt{(Tr_i - Tr_j)^2 + 4\left(\frac{T_i}{Tr_i}\right)\left(\frac{T_j}{Tr_j}\right)}}{2} \right\}, \quad (21.3)$$

و تساوی برقرار است که اگر و تنها اگر گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. گیریم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بردار ویژه‌ی از $Tr^{-1}D^Q(G)Tr$ متناظر با $\rho(G)$ باشد. فرض کنیم $x_s = \max\{x_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ و $x_t = \max\{x_i \mid x_i \neq x_s, i = 1, 2, \dots, n\}$ اکنون (i, j) امین درایه از $Tr^{-1}D^Q(G)Tr$ به صورت زیر است؛

$$\begin{cases} Tr_i & \text{اگر } i = j \\ \frac{Tr_j}{Tr_i} d_{ij} & \text{اگر } i \neq j. \end{cases}$$

از طرفی با استفاده از رابطه‌ی

$$Tr^{-1}D^Q(G)TrX = \rho(G)X, \quad (22.3)$$

برای s امین معادله از (۲۲.۳)، داریم

$$(\rho(G) - Tr_s)x_s = \sum_{i=1}^n \frac{Tr_i}{Tr_s} d_{si}x_i \leq \frac{x_t}{Tr_s} \sum_{i=1}^n d_{si}Tr_i = \frac{T_s}{Tr_s}x_t. \quad (23.3)$$

به طور مشابه برای t امین معادله از (۲۲.۳)، داریم

$$(\rho(G) - Tr_t)x_t = \sum_{i=1}^n \frac{Tr_i}{Tr_t} d_{ti}x_i \leq \frac{x_s}{Tr_t} \sum_{i=1}^n d_{ti}Tr_i = \frac{T_t}{Tr_t}x_s. \quad (24.3)$$

با ترکیب روابط (۲۳.۳) و (۲۴.۳)، نتیجه می‌گیریم $(\rho(G) - Tr_s)(\rho(G) - Tr_t)x_s x_t \leq \frac{T_s}{Tr_s} \frac{T_t}{Tr_t} x_t x_s$ و بنابراین

$$\rho^2(G) - (Tr_s + Tr_t)\rho(G) + Tr_s Tr_t - \left(\frac{T_s}{Tr_t}\right)\left(\frac{T_t}{Tr_s}\right) \leq 0.$$

به عبارتی دیگر

$$\rho(G) \leq \frac{Tr_s + Tr_t + \sqrt{(Tr_s - Tr_t)^2 + 4\left(\frac{T_s}{Tr_t}\right)\left(\frac{T_t}{Tr_s}\right)}}{2}.$$

در نتیجه

$$\rho(G) \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \frac{Tr_i + Tr_j + \sqrt{(Tr_i - Tr_j)^2 + 4\left(\frac{T_i}{Tr_i}\right)\left(\frac{T_j}{Tr_j}\right)}}{2} \right\}.$$

اکنون فرض می‌کنیم که G گرافی k منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد، آنگاه برای هر $\forall i = 1, 2, \dots, n$ داریم $Tr_i = k$ و $\rho(G) = 2k$ پس تساوی در (۲۱.۳) برقرار است. برعکس، اگر تساوی (۲۱.۳) برقرار باشد، آنگاه باید همه‌ی نامساوی‌ها در استدلال بالا تساوی باشند، به ویژه از (۲۳.۳) و (۲۴.۳) نتیجه می‌گیریم $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ در نتیجه داریم

$$\rho(G) = Tr_1 + \frac{T_1}{Tr_1} = Tr_2 + \frac{T_2}{Tr_2} = \dots = Tr_n + \frac{T_n}{Tr_n}.$$

اکنون مشابه اثبات قضیه ۲.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال است. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال و دنباله‌ی دومین اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) \geq \min_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \frac{Tr_i + Tr_j + \sqrt{(Tr_i - Tr_j)^2 + 4\left(\frac{T_i}{Tr_i}\right)\left(\frac{T_j}{Tr_j}\right)}}{2} \right\},$$

و تساوی برقرار است که اگر و تنها اگر گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. اثبات مشابه اثبات قضیه ۱.۳.۳ است و حذف می‌شود. $\square$

در ادامه، کران پایینی برای $\rho(G)$ که شامل می‌نیمم درجه رئوس است، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۳. گرییم G گرافی از مرتبه‌ی n با مینیمم درجه‌ی δ_1 و دومین مینیمم درجه‌ی δ_2 باشد. اگر d قطر گراف G باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) \leq 2(nd - 1) - (d - 1)(\delta_1 + \delta_2 + d), \quad (25.3)$$

و تساوی برقرار است که اگر و تنها اگر گراف G منتظم با قطر کمتر یا مساوی ۲ باشد.

برهان. گرییم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بردار ویژه‌ای از $Tr^{-1}D^Q(G)Tr$ متناظر با $\rho(G)$ به طوری که $x_i = \max\{x_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ و $x_j = \max\{x_k \mid x_k \neq x_i, k = 1, 2, \dots, n\}$ با استفاده از معادلات ویژه برای مؤلفه‌ی x_i داریم،

$$\begin{aligned} \rho(G)x_i &= \sum_{k=1}^n d_{ik}(x_k + x_i) \\ &\leq d_i(x_j + x_i) + 2(x_j + x_i) + 3(x_j + x_i) + \dots + (d-1)(x_j + x_i) \\ &\quad + d[n-1-d_i-(d-2)](x_j + x_i) \\ &= [nd - \frac{d(d-1)}{2} - 1 - d_i(d-1)](x_j + x_i). \end{aligned} \quad (26.3)$$

همچنین به طور مشابه برای مؤلفه‌ی x_j داریم،

$$\begin{aligned}\rho(G)x_j &= \sum_{k=1}^n d_{jk}(x_k + x_j) \\ &\leq d_j(x_i + x_j) + 2(x_i + x_j) + 3(x_i + x_j) + \dots + (d-1)(x_i + x_j) \\ &\quad + d[n-1-d_j-(d-2)](x_i + x_j) \\ &= [nd - \frac{d(d-1)}{2} - 1 - d_j(d-1)](x_i + x_j).\end{aligned}\quad (27.3)$$

اکنون با ترکیب کردن (۲۶.۳) و (۲۷.۳)، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned}\rho(G) &\leq [nd - \frac{d(d-1)}{2} - 1 - d_i(d-1)] + [nd - \frac{d(d-1)}{2} - 1 - d_j(d-1)] \\ &\leq [nd - \frac{d(d-1)}{2} - 1 - \delta_1(d-1)] + [nd - \frac{d(d-1)}{2} - 1 - \delta_2(d-1)] \\ &= 2(nd-1) - (d-1)(\delta_1 + \delta_2 + d).\end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم که G یک گراف منتظم با قطر حداکثر ۲ باشد. آنگاه همه مؤلفه‌های x_i برابر هستند. اگر $d(G) = 1$ آنگاه $G \cong K_n$ و $\rho(G) = 2(n-1)$. بنابراین تساوی در (۲۵.۳) برقرار است. اگر $d(G) = 2$ می‌توان نتیجه گرفت $\rho(G)x_i = 2d_{v_i}x_i + 4(n-1-d_{v_i})x_i$ و بنابراین $\rho(G) = 4n - 4 - 2d_{v_i} = 2(2n-1) - (2d_{v_i} + 2)$ در نتیجه تساوی در (۲۵.۳) برقرار است. توجه داریم که تساوی در (۲۵.۳) برقرار است اگر و تنها اگر همه مؤلفه‌های بردار ویژه اصلی برابر باشند و در نتیجه مجموع سطرهاى $D^Q(G)$ برابر هستند. اکنون فرض می‌کنیم که قطر گراف بزرگتر یا مساوی با ۴ باشد و تساوی در (۲۵.۳) برقرار باشد. از آنجا که برای هر رأس v_i رأس یکتای v_j وجود دارد که در فاصله‌ی ۲ از v_i قرار دارد، بنابراین قطر گراف G باید از ۴ کمتر باشد. اگر قطر گراف G برابر ۳ باشد و تساوی در (۲۵.۳) برقرار باشد، آنگاه برای یک رأس مرکزی v_s (رأسی که خروج از مرکزش ۲ باشد) با استفاده از معادلات ویژه برای مؤلفه‌ی x_s نتیجه می‌گیریم،

$$\rho(G)x_s = 2d_{v_s}x_s + 4(n-1-d_{v_s})x_s = 2[3n - \frac{3(3-1)}{2} - 1 - d_{v_s}(3-1)]x_s,$$

که نتیجه می‌دهد $d_{v_s} = n-2$ به عبارتی دیگر $G \cong P_n$ اما مؤلفه‌های بردار ویژه‌ی اصلی از $D^Q(P_n)$ با هم برابر نیستند. بنابراین G باید یک گراف منتظم با قطر کمتر یا مساوی ۲ باشد. $\square$

اکنون ما کران‌هایی برای $\rho(G)$ از گراف G ارائه می‌دهیم که اعداد انتقال گراف منتظم نیستند.

قضیه ۴.۳.۳. گیریم G گرافی از مرتبه‌ی $n \geq 2$ باشد. اگر $Tr_1 > Tr_{n-k+1}$ و $Tr_1 \geq \dots \geq Tr_n$

که $1 \leq k \leq n-1$ باشد، در این صورت داریم

$$\rho(G) \leq \frac{Tr_{n-k+1} + 2Tr_1 - 1}{2} + \frac{\sqrt{(Tr_{n-k+1} - 2Tr_1)^2 + 2(2Tr_1 - Tr_{n-k+1}) + 4k(Tr_{n-k+1} - Tr_1) + 1}}{2}, \quad (28.3)$$

و تساوی برقرار است که اگر و تنها اگر گراف G گرافی است با k رأس از درجه‌ی $n-1$ و $n-k$ رأس باقی‌مانده دارای درجه‌ی کمتر از $n-1$ باشد.

برهان. گیریم $V_1 = \{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ و $V_2 = V(G) \setminus V_1$ آنگاه می‌توان $D^Q(G)$ را به صورت زیر افراز کرد،

$$D^Q(G) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Tr_{11} & \circ \\ \circ & Tr_{22} \end{pmatrix},$$

که D_{11} و Tr_{11} ماتریس‌های $(n-k) \times (n-k)$ هستند. فرض کنیم

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}I_{n-k} & \circ \\ \circ & I_k \end{pmatrix}$$

برای $1 < x < \infty$ و $B = U^{-1}D^Q(G)U$ که I_s ماتریس یکه $s \times s$ است. در این صورت

$$B = \begin{pmatrix} D_{11} & xD_{12} \\ \frac{1}{x}D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Tr_{11} & \circ \\ \circ & Tr_{22} \end{pmatrix}$$

ماتریس نامنفی و تحویل‌ناپذیری است که مقادیر ویژه‌ی آن با $D^Q(G)$ یکسان است. گیریم B_i نشان‌دهنده‌ی مجموع سطر i ام از ماتریس B است. اگر $i = 1, 2, \dots, n-k$ آنگاه از آنجا که برای $j = n-k+1, \dots, n$ همواره رابطه‌ی $d_{ij} \geq 1$ برقرار است، در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{j=1}^{n-k} d_{ij} + x \sum_{j=n-k+1}^n d_{ij} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n d_{ij} + (x-1) \sum_{j=n-k+1}^n d_{ij} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \\ &= 2Tr_i + (x-1) \sum_{j=n-k+1}^n d_{ij} \leq 2Tr_i + (x-1)k \leq 2Tr_1 + (x-1)k. \end{aligned}$$

اگر $i = n-k+1, \dots, n$ آنگاه از آنجا که برای $j = n-k+1, \dots, n$ همواره رابطه‌های

$d_{ii} = 0$ و $d_{ij} \geq 1$ برقرار است، در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{n-k} d_{ij} + \sum_{j=n-k+1}^n d_{ij} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sum_{j=1}^n d_{ij} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{j=n-k+1}^n d_{ij} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) Tr_i + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{j=n-k+1}^n d_{ij} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) Tr_i + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(k-1) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) Tr_{n-k+1} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(k-1). \end{aligned}$$

گیریم

$$\begin{aligned} x &= \frac{Tr_{n-k+1} - 2Tr_1 + 2k - 1}{2k} \\ &+ \frac{\sqrt{(Tr_{n-k+1} - 2Tr_1)^2 + 2(2Tr_1 - Tr_{n-k+1}) + 4k(Tr_{n-k+1} - Tr_1) + 1}}{2k}, \end{aligned}$$

آنگاه نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} 2Tr_1 + (x-1)k &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) Tr_{n-k+1} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(k-1) \\ &= \frac{1}{x}(Tr_{n-k+1} + 2Tr_1 - 1) \\ &+ \sqrt{(Tr_{n-k+1} - 2Tr_1)^2 + 2(2Tr_1 - Tr_{n-k+1}) + 4k(Tr_{n-k+1} - Tr_1) + 1}. \end{aligned}$$

از آنجا که رابطه‌ی $Tr_1 > Tr_{n-k+1} \geq Tr_n \geq n-1 > k-1$ برقرار است، در این صورت داریم $0 < x < 1$. بنابراین با استفاده از گزاره ۲.۱.۳ نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \rho(G) &\leq \max_{1 \leq i \leq n} B_i \\ &\leq \frac{1}{x}(Tr_{n-k+1} + 2Tr_1 - 1) \\ &+ \sqrt{(Tr_{n-k+1} - 2Tr_1)^2 + 2(2Tr_1 - Tr_{n-k+1}) + 4k(Tr_{n-k+1} - Tr_1) + 1}. \end{aligned}$$

اکنون فرض می کنیم که تساوی در (۲۸.۳) برقرار باشد. از آنجا که برای $i = 1, 2, \dots, n-k$ رابطه‌ی $B_i = 2Tr_1 + (x-1)k$ برقرار است، در این صورت برای $i = 1, 2, \dots, n-k$ و $j = n-k+1, \dots, n$ داریم $d_{ii} = 1$. این نتیجه می دهد که هر رأس در V_1 با همه‌ی رأس های V_k مجاور است. دوباره، از آنجا که برای $i = n-k+1, \dots, n$ رابطه‌ی $B_i = \left(1 + \frac{1}{x}\right) Tr_{n-k+1} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(k-1)$ برقرار است، در این صورت برای $i, j = n-k+1, \dots, n$ با $i \neq j$ داریم $d_{ii} = 1$. این نتیجه می دهد که مجموعه رئوس V_k یک زیرگراف کامل از گراف G تولید می کند. بنابراین درجه‌ی هر رأس در V_k برابر $n-1$ و از اینرو قطر گراف G حداکثر ۲ است. از آنجا که $Tr_1 = Tr_2 = \dots = Tr_{n-k}$ از آنجا که $Tr_1 > Tr_{n-k+1}$ گراف G نمی تواند درجه‌ی رئوس در V_1 برابر هستند. علاوه بر این از آنجا که $Tr_1 > Tr_{n-k+1}$ گراف G نمی تواند

یک گراف کامل باشد و بنابراین $k \leq n - 2$. برعکس، اگر G گراف بیان شده در بخش دوم قضیه باشد، آنگاه از اثبات بالا، نتیجه می‌گیریم $B_1 = B_2 = \dots = B_n$ و بنابراین تساوی برقرار است. $\square$

اکنون ما کران‌های بالا و پایینی برای $\rho(G)$ بر حسب اعداد انتقال و دومین اعداد انتقال گراف G ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۳.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند باشد، در این صورت داریم،

$$\rho(G) \leq \frac{Tr_{\max} + \sqrt{Tr_{\max}^2 + 8T_{\max}}}{2},$$

که $Tr_{\max}$ و $T_{\max}$ به ترتیب ماکزیمم عدد انتقال و ماکزیمم دومین عدد انتقال باشند. علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. از آنجا که $D^Q(G) = Tr(G) + D(G)$ با یک محاسبه‌ی ساده داریم، $r_{v_i}(D^Q(G)) = 2Tr_i$ و $r_{v_i}(DTr) = r_{v_i}(D^2) = \sum_{j=1}^n d_{ij}Tr_j$ آنگاه می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} r_{v_i}(D^{2Q}(G)) &= r_{v_i}(Tr^2 + TrD + DTr + D^2) \\ &= r_{v_i}(Tr(Tr + D)) + r_{v_i}(DTr) + r_{v_i}(D^2) \\ &= Tr_i r_{v_i}(D^Q(G)) + 2 \sum_{j=1}^n d_{ij}Tr_j \\ &\leq Tr_{\max} r_{v_i}(D^Q(G)) + 2T_{\max}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم،

$$r_{v_i}(D^{2Q}(G) - Tr_{\max}D^Q(G)) \leq 2T_{\max}.$$

با استفاده از گزاره ۲.۱.۳ نتیجه می‌گیریم،

$$\rho^2(G) - Tr_{\max}\rho(G) - 2T_{\max} \leq 0,$$

و بنابراین با استفاده از گزاره ۲.۱.۳ نتیجه دنبال می‌شود. حال اگر تساوی برقرار باشد، همه‌ی نامساوی‌ها در استدلال بالا باید مساوی باشند، در نتیجه رابطه‌های $Tr_i = Tr_{\max}$ و $T_i = T_{\max}$ برای هر v_i برقرار است. بنابراین با استفاده از گزاره ۲.۱.۳ گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال است.

برعکس، موقعی که G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال است، به آسانی دیده می‌شود که تساوی برقرار است. $\square$

قضیه ۶.۳.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند باشد، در این صورت داریم،

$$\rho(G) \geq \frac{Tr_{\min} + \sqrt{Tr_{\min}^2 + 8T_{\min}}}{2},$$

که $Tr_{\min}$ و $T_{\min}$ به ترتیب ماکزیمم عدد انتقال و ماکزیمم دومین عدد انتقال باشند. علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. مشابه اثبات قضیه ۵.۳.۳ است. $\square$

نتیجه ۱.۳.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند باشد، در این صورت داریم،

$$\min_{v_i \in V(G)} \sqrt{2Tr_i^2 + 2T_i} \leq \rho(G) \leq \max_{v_i \in V(G)} \sqrt{2Tr_i^2 + 2T_i}.$$

برهان. از آنجا که $D^Q(G) = Tr(G) + D(G)$ با یک محاسبه‌ی ساده داریم، $r_{v_i}(D^Q(G)) = 2Tr_i$ و $r_{v_i}(DTr) = r_{v_i}(D^2) = \sum_{j=1}^n d_{ij}Tr_j$ آنگاه می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} r_{v_i}(D^2Q) &= r_{v_i}(Tr^2 + TrD + DTr + D^2) \\ &= r_{v_i}(Tr(Tr + D)) + r_{v_i}(DTr) + r_{v_i}(D^2) \\ &= Tr(v_i)r_{v_i}(D^Q) + 2 \sum_{j=1}^n d_{ij}Tr(v_j) \\ &= 2Tr_i^2 + 2T_i. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از گزاره ۲.۱.۳ نتیجه می‌گیریم

$$\rho(G) \leq \max_{v_i \in V(G)} \sqrt{2Tr_i^2 + 2T_i}.$$

اثبات طرف دیگر به طور مشابه است. $\square$

قضیه ۷.۳.۳. گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) \leq \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i + \sqrt{(n-1) \left(n \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + Tr_i^2) - (\sum_{i=1}^n Tr_i)^2 \right)}}{n}.$$

برهان. گیریم $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از G باشد. واضح است که،

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n &= trace(D^Q(G)) = \sum_{i=1}^n Tr_i, \\ \rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2 &= trace(D^2Q(G)) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + Tr_i^2). \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم،

$$(n-1)(\rho_2^2 + \rho_3^2 + \dots + \rho_n^2) \geq (\rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n)^2.$$

از این رو

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n(d_{ij})^2 + Tr_i^2\right) - \rho_1^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n Tr_i - \rho_1\right)^2.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم،

$$\rho_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i + \sqrt{(n-1)\left(n \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + Tr_i^2) - (\sum_{i=1}^n Tr_i)^2\right)}}{n}.$$

□

نتیجه ۲.۳.۳. گیریم G گرافی همبند با قطر ۲ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \rho(G) \leq & \frac{1}{n} \left[2n^2 - 2n - 2m \right. \\ & \left. + \sqrt{(n-1)\left(4(n^3 - n^2 - m^2) - 6mn + n \sum_{i=1}^n d_{v_i}^2\right)} \right]. \end{aligned}$$

برهان. از آنجا که در ماتریس $D(G)$ ، $2m$ درایه برابر یک و $n(n-1) - 2m$ درایه برابر ۲ وجود دارد، آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Tr_i &= \sum_{i=1}^n (2(n-1) - d_{v_i}) = 2n^2 - 2n - 2m, \\ \sum_{i=1}^n Tr_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 &= \sum_{i=1}^n (2(n-1) - d_{v_i})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 \\ &= 4n(n-1)^2 - 4m(n-1) + \sum_{i=1}^n d_{v_i}^2 \\ &\quad + (2m)^2 + (n^2 - n - 2m)^2 \\ &= 4n^2(n-1) + 2m - 4mn + \sum_{i=1}^n d_{v_i}^2. \end{aligned}$$

□

از این رو با استفاده از قضیه ۷.۳.۳، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

اکنون ما، رابطه‌هایی بین شعاع طیفی ماتریس فاصله و شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای یک گراف، ارائه می‌دهیم.

لم ۱.۳.۳. گیریم G یک گراف همبند با شعاع طیفی ماتریس فاصله‌ی $\mu(G)$ ، آنگاه داریم،

$$\mu(G) \leq \frac{1}{2} \rho(G).$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. گیریم $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ بردار ویژه‌ی یک متناظر با $\rho(G)$ و $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T \in \mathbb{R}^n$ بردار ویژه‌ی یک متناظر با $\mu(G)$ باشد. از آنجا که رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\rho(G) = X^T D^Q X = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} (x_i + x_j)^2,$$

و در حالی که داریم،

$$\begin{aligned} \mu(G) = X'^T D X' &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} x'_i x'_j \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} (x'_i + x'_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} (x_i + x_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho(G). \end{aligned}$$

بنابراین نامساوی مطلوب نتیجه می‌شود.

اگر تساوی برقرار باشد، آنگاه همه‌ی نامساوی‌ها باید تساوی باشند. بنابراین داریم،

$$\mu(G) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} x'_i x'_j = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} (x'_i + x'_j)^2.$$

از آنجا که $2x'_i x'_j \leq x'^2_i + x'^2_j$ ، باید $x'_i = x'_j$ باشد. چون گراف همبند است، نتیجه می‌گیریم که X' ضریبی از بردار با درایه‌های یک است. رابطه‌ی $DX' = \mu X'$ نتیجه می‌دهد که G باید منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برعکس، به آسانی دیده می‌شود، هنگامی که G منتظم از لحاظ عدد انتقال است، آنگاه تساوی برقرار است و بنابراین اثبات کامل می‌شود. $\square$

لم ۲.۳.۳. گیریم G یک گراف همبند با ماکزیمم عدد انتقال $Tr_{\max}$ و شعاع طیفی ماتریس فاصله‌ی $\mu(G)$ باشد، آنگاه داریم،

$$\rho(G) - \mu(G) \leq Tr_{\max}.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد. برهان. واضح است،

$$\begin{aligned} \rho(G) &= \max_{x \neq 0} \frac{x^T D^Q(G) x}{x^T x} \\ &= \max_{x \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^n Tr_i x_i^2 + x^T D(G) x}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &\leq Tr_{\max} + \max_{x \neq 0} \frac{x^T D(G) x}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= Tr_{\max} + \mu(G). \end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

بنابر (۲۹.۳) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $Tr_i = Tr_{\max}$ برای همه $v_i \in V(G)$ ، که نتیجه می‌دهد G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال است. $\square$

اکنون ما مجموعه $G_{n,\Delta}$ که $\Delta \geq 2$ از گراف‌های همبند با n رأس و داشتن مقدار ثابت ماکزیمم درجه Δ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گراف $B_{n,\Delta}$ ، درختی است روی n رأس، که از مسیر $P_{n-\Delta+1}$ و گراف خالی $\bar{K}_{\Delta-1}$ با چسباندن یک رأس پایانی مسیر به هر رأس از گراف خالی حاصل شود. رأس پایانی دیگر از مسیر $P_{n-\Delta+1}$ با درجه‌ی یک در $B_{n,\Delta}$ ، را برگ $G_{n,\Delta}$ می‌گوییم.

قضیه زیر در مطالب زیادی از ریاضی شیمی معروف است، اگرچه جهت تکمیل، اثبات مستقیمی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۸.۳.۳. برای هر گراف $G \in G_{n,\Delta}$ ، همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\sigma(G) \leq \sigma(B_{n,\Delta})$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G با $B_{n,\Delta}$ یکرخت باشد.

برهان. گیریم G گرافی در $G_{n,\Delta}$ باشد. در ابتدا توجه داریم که بنابر گزاره ۲.۱.۲، با حذف یال $\{u, v\}$ از G شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله به طور اکید کاهش می‌یابد. بنابراین برای هر درخت فراگیر T از G همواره داریم،

$$\sigma(G) \leq \sigma(T),$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G = T$. از آنجا که هر گراف $G_{n,\Delta}$ دارای یک درخت فراگیر با ماکزیمم درجه‌ی یکسان Δ است، می‌توان در ادامه اثبات‌مان را روی چنین درخت‌هایی محدود کنیم. اکنون قضیه را با استفاده از استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = \Delta + 1$ ، تنها یک درخت با $\Delta + 1$ رأس و ماکزیمم درجه‌ی Δ وجود دارد، که در این صورت درخت مورد نظر ستاره است و $K_{1,\Delta} \cong B_{\Delta+1,\Delta}$. بنابراین پایه استقرا ثابت شد.

اکنون فرض می‌کنیم بنابر فرضیه استقرا برای $n \geq \Delta + 1$ ، درخت $B_{n,\Delta}$ دارای ماکزیمم عدد انتقال در $G_{n,\Delta}$ و گیریم T هر درختی در $G_{n+1,\Delta}$ باشد. درخت T شامل یک برگ q است که حذف آن ماکزیمم درجه از T را کاهش نمی‌دهد. در غیر این صورت، T شامل تنها یک رأس از درجه Δ و همه‌ی برگ‌ها با آن رأس مجاور خواهند بود و نتیجه می‌دهد که T یکرخت با ستاره است، که با $n + 1 \geq \Delta + 2$ تناقض دارد. گیریم p همسایه یکتایی از q در T باشد. برای هر رأس u از T همواره داریم، $d_T(u, q) = d_{T-q}(u, p) + 1$ ، در حالی که فاصله‌ی بین همه زوج‌های دیگر از $T - q$ رأس باقی‌مانده تغییر نکند. بنابراین داریم $\sigma(T) = \sigma(T - q) + Tr_{T-q}(p) + n$. از فرضیه استقرا نتیجه می‌شود،

$$\sigma(T - q) \leq \sigma(B_{n,\Delta}), \quad (۳۰.۳)$$

بنابراین داریم $\sigma(T) \leq \sigma(B_{n+1,\Delta})$.

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر تساوی در (۳.۳) برقرار باشد. پس بنابر فرض استقرا $T - q \cong T_{n,\Delta}$ و یک برگ از $B_{n,\Delta}$ است. این نشان می‌دهد که $T \cong B_{n+1,\Delta}$ و بنابراین $B_{n+1,\Delta}$ گراف یکتایی در $G_{n+1,\Delta}$ است که ماکزیمم مقدار عدد انتقال را نتیجه می‌دهد. بنابراین حکم ثابت می‌شود. $\square$

توجه داریم که مسیر P_n دارای ماکزیمم شعاع طیفی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله می‌باشد. گیریم G یک گراف ساده و v یکی از رئوسش باشد. برای $k, l \geq 0$ ، گراف $G(v, k)$ از $G \cup P_k$ با اضافه کردن یک یال بین v و رأس پایانی P_k به دست بیاید، هم چنین گراف $G(v, k, l)$ از $G \cup P_k \cup P_l$ با اضافه کردن یال‌های بین v و یکی از رئوس پایانی در هر دوی P_k و P_l به دست بیاید.

لم ۳.۳.۳. [۷۰] گیریم G گرافی ساده و v یکی از رئوس گراف باشد. اگر $k \geq l \geq 1$ ، آنگاه همواره داریم،

$$\rho(G(v, k, l)) < \rho(G(v, k+1, l-1)).$$

در ادامه برای Δ ، می‌توان در لم ۳.۳.۳ انتقال را در رأس با درجه‌ی Δ در $B_{n,\Delta}$ انجام داد و گراف $B_{n,\Delta-1}$ را به دست بیاوریم. بنابراین برای $\Delta > 2$ ، داریم $\rho(B_{n,\Delta}) < \rho(B_{n,\Delta-1})$ ، که زنجیره‌ای از نامساوی‌های زیر را نشان می‌دهد،

$$\rho(S_n) = \rho(B_{n,n-1}) < \rho(B_{n,n-2}) < \dots < \rho(B_{n,3}) < \rho(B_{n,2}) = \rho(P_n).$$

۴.۳ مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله تعدادی از گراف‌ها

اکنون ما مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله را برای تعدادی از گراف‌ها که با استفاده از تعدادی عملیات گرافی به دست آمده‌اند، را مورد بحث قرار خواهیم داد. ما جمع گراف‌ها، دو برابر کردن گراف، حاصل ضرب دکارتی و حاصل ضرب الفبایی گراف‌ها [۲۴] را بررسی خواهیم کرد.

لم ۱.۴.۳. [۳۳] گیریم

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس بلوکی متقارن 2×2 باشد. آنگاه مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از، مقادیر ویژه $A_0 + A_1$ و مقادیر ویژه $A_0 - A_1$.

قضیه بعد هم ارزی بین مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت و ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای گراف‌های با قطر ۲ نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۴.۳. گیریم G یک گراف همبند r منتظم روی n رأس با قطر $d \leq 2$ باشد. اگر $\{2r, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس بدون علامت فاصله $Q(G)$ باشد، آنگاه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله $4n - 2r - 4$ و $2n - 4 - \mu_i$ برای $i = 2, 3, \dots, n$ هستند.

برهان. توجه داریم که در مورد $d = 1$ (متناظر با گراف کامل) نتیجه بدیهی است. اکنون فرض می‌کنیم که قطر گراف G برابر ۲ باشد. بنابراین عدد انتقال هر رأس $v \in V(G)$ برابر است با

$$Tr(v) = d(v) + 2(n - 1 - d(v)) = 2n - d(v) - 2 = 2n - r - 2,$$

که $d(v)$ نشان دهنده‌ی درجه‌ی هر رأس v در G است. هم چنین ماتریس فاصله به صورت $D(G) = 2J - 2I - A(G)$ است که J ماتریسی با درایه‌های یک است. بنابراین می‌توان ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله را به صورت زیر نوشت،

$$D^Q(G) = Tr(G) + D(G) = (2n - 2)I - rI + 2J - 2I - A(G) = (2n - 4)I + 2J - Q(G).$$

از آنجا که G یک گراف r منتظم است، $1 = [1, 1, \dots, 1]^T$ یک بردار ویژه از ماتریس بدون علامت فاصله $Q = Q(G)$ متناظر با مقدار ویژه‌ی $2r$ است. قرار می‌دهیم $z = \frac{1}{\sqrt{z}}1$ و گیریم P یک ماتریس متعامد با اولین ستون z باشد، به طوری که $P^T Q P = \text{diag}(2r, \mu_2, \dots, \mu_n)$ بنابراین

$$\begin{aligned} P^T(D^Q(G))P &= P^T[(2n - 4)I + 2J - Q]P \\ &= (2n - 4)I - 2P^T J P - P^T Q P \\ &= \text{diag}(4n - 4 - 2r, 2n - 4 - \mu_2, \dots, 2n - 4 - \mu_n). \end{aligned}$$

□

از این رو نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۴.۳. گیریم G یک گراف r منتظم با قطر ۲ و مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن $\{r, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشند. آنگاه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله به صورت $\{2(2n - r - 2), 2n - \lambda_2 - r - 4, \dots, 2n - \lambda_n - r - 4\}$ است.

برهان. از آنجا که $Q(G) = rI(G) + A(G)$ آنگاه از قضیه ۱.۴.۳ نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} D^Q(G) &= (2n - 4)I + 2J - (rI(G) + A(G)) \\ &= (2n - 4 - r)I + 2J - A(G), \end{aligned}$$

□

و نتیجه دنبال می‌شود.

برای گراف دلخواه G ، گراف $G \vee G$ با چسباندن هر رأس از G به هر رأس از گراف کپی G به دست می‌آید.

قضیه ۲.۴.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند، r منتظم روی n رأس باشد. اگر $r, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت از G باشند، آنگاه مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسیین بدون علامت فاصله از $G \vee G$ عبارتند از،

$$6n - 2r - 4,$$

$$4n - 2r - 4 \quad \text{و}$$

$$3n - \lambda_i - r - 4, \quad 2 \text{ بار}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

برهان. از آنجا که G یک گراف r منتظم است، ماتریس لاپلاسیین بدون علامت فاصله از $G \vee G$ را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\begin{pmatrix} A + 2\bar{A} + (3n - r - 2)I & J \\ J & A + 2\bar{A} + (3n - r - 2)I \end{pmatrix},$$

که A ماتریس مجاورت از گراف G ، $\bar{A}$ ماتریس مجاورت از گراف $\bar{G}$ ، J ماتریس با درایه‌های یک و I ماتریس همانی است. از آن جا که $\bar{A} = J - I - A$ ، آنگاه با استفاده از گزاره ۱.۴.۳ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

تعریف ۱.۴.۳. [۶۲] گیریم G گرافی با مجموعه رؤس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. گراف کپی از G را با رأس‌های $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ در نظر می‌گیریم، به طوری که u_i با v_i متناظر است، برای هر i . هم‌چنین با همه‌ی رأس‌های در $N(v_i)$ از G مجاور است. گراف به دست آمده را با نماد $D_2(G)$ نشان داده و آن را دوبرابر کردن گراف G می‌نامند.

قضیه ۳.۴.۳. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند، r منتظم روی n رأس با قطر ۲ باشد. اگر $r, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت از G باشند، آنگاه مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسیین بدون علامت فاصله از $D_2(G)$ عبارتند از،

$$8n - 4r - 4,$$

$$4n - 2r - 4, \quad \text{و } n \text{ بار}$$

$$4n - 2\lambda_i - 2r - 4, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

برهان. بنابر تعریف $D_2(G)$ ، ماتریس لاپلاسیین بدون علامت فاصله از $D_2(G)$ به فرم زیر است،

$$\begin{pmatrix} A + 2\bar{A} + 2(2n - r - 1)I & A + 2\bar{A} + 2I \\ A + 2\bar{A} + 2I & A + 2\bar{A} + 2(2n - r - 1)I \end{pmatrix},$$

که A ماتریس مجاورت از گراف G ، $\bar{A}$ ماتریس مجاورت از گراف $\bar{G}$ ، J ماتریس با درایه‌های یک و I ماتریس همانی است. از آن جا که $\bar{A} = J - I - A$ ، آنگاه با استفاده از گزاره ۱.۴.۳ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

اکنون ما مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله را برای حاصل ضرب دکارتی دو گرافی که منتظم هستند از نظر فاصله، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۳. [۲۴] حاصل ضرب دکارتی دو گراف G و H ، که با $G \square H$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ و دو رأس (u_1, u_2) و (v_1, v_2) در $G \square H$ مجاور هستند هرگاه $u_1 = v_1$ و u_2 مجاور v_2 در H باشد یا $u_2 = v_2$ و u_1 مجاور v_1 در G باشد.

گزاره زیر از [۷۲] جهت به دست آوردن نتایج ما، مفید خواهد بود.

لم ۲.۴.۳. [۷۲] گیریم G و H دو گراف همبند باشند، هم چنین فرض می‌کنیم $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V(G) \times V(H)$. اگر $G \square H$ نشان دهنده‌ی حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد، آنگاه

$$d_{G \square H}(u, v) = d_G(u_1, v_1) + d_H(u_2, v_2).$$

قضیه ۴.۴.۳. گیریم G و H دو گراف منتظم از لحاظ فاصله به ترتیب روی p و n رأس با اعداد انتقال k و t باشند. فرض کنیم مقادیر ویژه G و H به ترتیب به صورت $Spec_D(G) = \{k, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p\}$ و $Spec_D(H) = \{t, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n\}$ باشند. آنگاه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از عبارتند از،

$$Spec_{DQ}(G \square H) = \{\sum nk + \sum pt, n\mu_i + nk + pt, p\eta_j + nk + pt, nk + pt\},$$

که $i = 2, \dots, p$ و $j = 2, \dots, n$ و $nk + pt$ با چندگانگی $(p-1)(n-1)$ است.

برهان. گیریم D_G و D_H به ترتیب ماتریس‌های فاصله دو گراف G و H باشند. فرض کنیم $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ و $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. بنابراین $D_G = [d_{ij}]$ و $D_H = [e_{ij}]$ ، که $d_{ij} = d_G(u_i, u_j)$ و $e_{ij} = d_H(v_i, v_j)$ از آنجا که G و H گراف‌های منتظم از لحاظ عدد انتقال به ترتیب با اعداد انتقال k و t هستند، آنگاه داریم

$$\sum_{j=1}^p d_{rj} = k \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^n e_{qj} = t.$$

هم چنین از آنجا که G منتظم از لحاظ عدد انتقال است، بردار ستونی با درایه‌های یک از مرتبه‌ی $p \times 1$ یک بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه k از D_G است. هم چنین از آنجا که D_G یک ماتریس حقیقی و متقارن است، بنابراین یک ماتریس قطری پذیر است و از اینرو دارای یک پایه‌ی متعامد B_G شامل بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه‌هایش است. در نتیجه

اگر μ_i یک مقدار ویژه از D_G باشد که متفاوت از k و با بردار ویژه $X_i = [x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^p]^T \in B_G$ باشد، آنگاه $\sum_{j=1}^p x_i^j = 0$.

گیریم $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V(G) \times V(H)$. آنگاه با استفاده از لم ۲.۴.۳ داریم،

$$d_{G \square H}(u, v) = d_G(u_1, v_1) + d_H(u_2, v_2).$$

با انجام ترتیب مناسبی از رئوس $G \square H$ و با استفاده از گزاره ۲.۴.۳، ماتریس D^Q آن، C را می‌توان به فرم زیر نوشت،

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} d(u_1, u_1).J_n + D_H & d(u_1, u_2).J_n + D_H & \dots & d(u_1, u_p).J_n + D_H \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d(u_p, u_1).J_n + D_H & d(u_p, u_2).J_n + D_H & \dots & d(u_p, u_p).J_n + D_H \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} (nk + pt)I_n & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & (nk + pt)I_n \end{pmatrix} \\ &= D_G \otimes J_n + J_p \otimes D_H + I_p \otimes (nk + pt)I_n, \end{aligned}$$

که $\circ$ نشان دهنده‌ی ماتریس صفر و $\otimes$ نشان دهنده‌ی ضرب تنسور از ماتریس‌ها می‌باشد. اکنون مقدار ویژه‌های C را با در نظر گرفتن بردارهای ویژه متناظر با آن‌ها به دست می‌آوریم. رابطه‌ی زیر برای ماتریس‌ها معروف است. [۷۵] برای ماتریس‌های A, B, C و D رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD),$$

هنگامی که ضرب‌های AC و BD وجود داشته باشد.

گیریم $\mathbf{1}_G$ نشان دهنده‌ی بردار ویژه‌ی با درایه‌های یک متناظر با مقدار ویژه k از G و $\mathbf{1}_H$ نشان دهنده‌ی بردار ویژه‌ی با درایه‌های یک متناظر با مقدار ویژه t از H باشد. آنگاه $D_G \cdot \mathbf{1}_G = k \mathbf{1}_G$ و $D_H \cdot \mathbf{1}_H = t \mathbf{1}_H$ بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} C \cdot (\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H) &= (D_G \otimes J_n + J_p \otimes D_H + I_p \otimes (nk + pt)I_n) \cdot (\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H) \\ &= (D_G \cdot \mathbf{1}_G) \otimes (J_n \mathbf{1}_H) + (J_p \mathbf{1}_G) \otimes (D_H \cdot \mathbf{1}_H) + (I_p \mathbf{1}_G) \otimes ((nk + pt)I_n \mathbf{1}_H) \\ &= k \mathbf{1}_G \otimes (n \mathbf{1}_H) + p \mathbf{1}_G \otimes (t \mathbf{1}_H) + (nk + pt)(\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H) \\ &= nk.(\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H) + pt.(\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H) + (nk + pt).(\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H) \\ &= \mathbf{2}(nk + pt) \cdot (\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H), \end{aligned}$$

نشان می‌دهد که $\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H$ بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی $2(nk + pt)$ از C است. گیریم X_i بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی μ_i از D_G است. آنگاه $X_i \otimes \mathbf{1}_H$ بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی $n\mu_i + nk + pt$ از C است، زیرا

$$\begin{aligned} C \cdot (X_i \otimes \mathbf{1}_H) &= [D_G \otimes J_n + J_p \otimes D_H + I_p \otimes (nk + pt)I_n] \cdot (X_i \otimes \mathbf{1}_H) \\ &= (D_G \cdot X_i) \otimes (J_n \mathbf{1}_H) + (J_p X_i) \otimes (D_H \cdot \mathbf{1}_H) + (I_p \cdot X_i) \otimes ((nk + pt)I_n \mathbf{1}_H) \\ &= \mu_i X_i \otimes n \mathbf{1}_H + 0 \otimes t \mathbf{1}_H + (nk + pt)(X_i \otimes \mathbf{1}_H) \\ &= (n\mu_i + nk + pt) \cdot (X_i \otimes \mathbf{1}_H). \end{aligned}$$

به طور مشابه، اگر Z_j بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی η_j از D_H باشد، آنگاه $\mathbf{1}_G \otimes Z_j$ یک بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی $pn_j + nk + pt$ از C است. علاوه بر این مقدار ویژه‌ها، ما می‌توانیم ببینیم که $nk + pt$ به عنوان یک مقدار ویژه با چندگانگی $(p-1)(n-1)$ ظاهر می‌شود. گیریم $R_p^i, i = 2, 3, \dots, p$ بردار مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه 0 از J_p و $T_n^j, j = 2, 3, \dots, n-1$ بردار مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه 0 از J_n باشد. آنگاه $(p-1)(n-1)$ بردار $R_p^i \otimes T_n^j$ مستقل خطی هستند و بردار ویژه‌های متناظر با $nk + pt$ از C هستند. زیرا

$$\begin{aligned} C \cdot (R_p^i \otimes T_n^j) &= [D_G \otimes J_n + J_p \otimes D_H + I_p \otimes (nk + pt)I_n] \cdot (R_p^i \otimes T_n^j) \\ &= (D_G \cdot R_p^i) \otimes (J_n T_n^j) + (J_p R_p^i) \otimes (D_H \cdot T_n^j) + (I_p R_p^i) \otimes ((nk + pt)I_n T_n^j) \\ &= (D_G \cdot R_p^i) \otimes 0 + 0 \otimes (D_H \cdot T_n^j) + (nk + pt) \otimes (R_p^i \otimes T_n^j) \\ &= (nk + pt) \cdot (R_p^i \otimes T_n^j). \end{aligned}$$

اکنون pn بردار $\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_H, X_i \otimes \mathbf{1}_H, \mathbf{1}_G \otimes Z_j$ و $R_p^i \otimes T_n^j$ مستقل خطی هستند و بنابراین C دارای یک پایه شامل بردار ویژه‌های مستقل خطی می‌باشد و نتیجه دنبال می‌شود. $\square$

در ادامه، مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای حاصل ضرب الفبایی $G[H]$ از دو گراف G و H ، را به دست می‌آوریم.

تعریف ۳.۴.۳. [۲۵] گیریم G و H دو گراف روی مجموعه رئوس $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ و $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشند. آنگاه حاصل ضرب الفبایی $G[H]$ ، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ ، که $u = (u_1, v_1)$ مجاور با $v = (u_2, v_2)$ است، اگر و تنها اگر $u_1 - u_2$ مجاور u_2 در G است یا $u_1 = u_2$ و $v_1 - v_2$ مجاور v_2 در H است.

اکنون مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای حاصل ضرب الفبایی $G[H]$ از یک گراف k منتظم از لحاظ عدد انتقال G با گراف r منتظم H را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۴.۳. گیریم G یک گراف k منتظم از لحاظ عدد انتقال روی p رأس باشد. فرض کنیم H گرافی r منتظم روی n رأس با مقادیر ویژه مجاورت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد. گیریم $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ مقادیر ویژه ماتریس فاصله‌ی D_G از G باشد. آنگاه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از $G[H]$ به صورت زیر هستند،

$$n\mu_i + kn + 4n - 2r - 4, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{و}$$

$$kn + 2n - \lambda_j - r - 4, \quad \text{بار } p, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

برهان. ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله F را برای $G[H]$ می‌توان به فرم زیر نوشت،

$$F = D_G \otimes J_n + I_p \otimes (A + 2\bar{A} + (kn + 2n - 2)I - D'),$$

که A نشان دهنده‌ی ماتریس مجاورت از H ، $\bar{A}$ نشان دهنده‌ی ماتریس مجاورت از $\bar{H}$ و D' ماتریس قطری از درجه رؤس H می‌باشد.

از آنجا که H ، r - منتظم است، بردار ستونی $\mathbf{1}$ با درایه‌های یک از مرتبه‌ی $n \times 1$ یک بردار ویژه از A متناظر با مقدار ویژه r است. آنگاه بردار $\mathbf{1}$ ، یک بردار ویژه از $A + 2\bar{A} + (kn + 2n - 2)I - D'$ با مقدار ویژه $4n - 2r - 4$ است. به طور مشابه، اگر λ_j هر مقدار ویژه‌ی از A با بردار ویژه Y_j باشد، آنگاه Y_j یک بردار ویژه از $A + 2\bar{A} + (kn + 2n - 2)I - D'$ با مقدار ویژه $4n - 2r - \lambda_j - 4$ است و Y_j بر $\mathbf{1}$ عمود می‌باشد.

گیریم $X_i = [x_1^i \quad x_2^i \quad \dots \quad x_p^i]^T$ بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه μ_i از D_G باشد، آنگاه داریم

$$D_G \cdot X_i = \mu_i X_i.$$

اکنون

$$\begin{aligned} F \cdot (X_i \otimes \mathbf{1}_n) &= (D_G \otimes J_n + I_p \otimes (A + 2\bar{A} + (kn + 2n - 2)I - D')) \cdot (X_i \otimes \mathbf{1}_n) \\ &= (D_G \cdot X_i) \otimes (J_n \cdot \mathbf{1}_n) + (I_p \cdot X_i) \otimes (A + 2\bar{A} + (kn + 2n - 2)I - D') \cdot \mathbf{1}_n \\ &= \mu_i X_i \otimes n\mathbf{1}_n + X_i \otimes (kn + 4n - 2r - 4)\mathbf{1}_n \\ &= n\mu_i (X_i \otimes \mathbf{1}_n) + (kn + 4n - 2r - 4)(X_i \otimes \mathbf{1}_n) \\ &= (n\mu_i + kn + 4n - 2r - 4) \cdot (X_i \otimes \mathbf{1}_n). \end{aligned}$$

بنابراین $4n - 2r - 4 + n\mu_i$ یک مقدار ویژه از F با بردار ویژه $X_i \otimes \mathbf{1}_n$ است. هنگامی که Y_j عمود بر $\mathbf{1}$ است، برای هر $j = 2, 3, \dots, n$ داریم $J_n \cdot Y_j = \mathbf{0}$. گیریم $\{Z_k\}, k = 1, 2, \dots, p$. خانواده‌ی از p بردار مستقل خطی نسبت داده شده با مقدار ویژه $\mathbf{1}$ از I_p باشد. آنگاه برای هر p بردارهای $Z_k \otimes Y_j$ ، $j = 2, 2, \dots, n$ ، بردار ویژه‌های F با مقادیر ویژه $4n - 2r - \lambda_j - 4$ ،

هستند. زیرا

$$\begin{aligned}
 F \cdot (Z_k \otimes Y_j) &= (D_G \otimes J_n + I_p \otimes (A + \mathfrak{A}\bar{A} + (kn + \mathfrak{A}n - \mathfrak{A})I - D')) \cdot (Z_k \otimes Y_j) \\
 &= (D_G \cdot Z_k) \otimes (J_n \cdot Y_j) + (I_p \cdot Z_k) \otimes (A + \mathfrak{A}\bar{A} + (kn + \mathfrak{A}n - \mathfrak{A})I - D') \cdot Y_j \\
 &= 0 + Z_k \otimes (kn + \mathfrak{A}n - \lambda_j - r - \mathfrak{A})Y_j \\
 &= (kn + \mathfrak{A}n - \lambda_j - r - \mathfrak{A}) \cdot (Z_k \otimes Y_j).
 \end{aligned}$$

هم چنین pn بردار $X_i \otimes \mathbf{1}_n$ و $Z_k \otimes Y_j$ مستقل خطی هستند. (از آنجا که با در نظر گرفتن هر ترکیب خطی از این بردارها، به آسانی دیده می‌شود که ترکیب خطی صفر است اگر و تنها اگر اسکالرهای بنابر استدلال خطی از بردارهای سازنده از ضرب تنسور، صفر باشند.) بنابراین بردارهای ویژه متعلق به مقدار ویژه‌های مخالف مستقل خطی هستند و بنابراین دارای یک پایه که شامل همه‌ی بردار ویژه‌ها است. بنابراین نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

می‌دانیم که چند جمله‌ای مشخصه $D^Q(G)$ به صورت $\psi(G : \rho) = \det(\rho I - D^Q(G))$ تعریف می‌شود.

قضیه ۶.۴.۳. گیریم G_i گراف r_i منظم از مرتبه‌ی n_i برای $i = 1, 2$ باشد. آنگاه چندجمله‌ای مشخصه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ماتریس $G_1 \vee G_2$ به صورت زیر است،

$$\psi(G_1 \vee G_2 : \rho) = \frac{[(\rho - \mathfrak{A}n_1 - n_2 + \mathfrak{A}r_1 + \mathfrak{A})(\rho - \mathfrak{A}n_2 - n_1 + \mathfrak{A}r_2 + \mathfrak{A}) - n_1n_2]}{(\rho - \mathfrak{A}n_1 - n_2 + \mathfrak{A}r_1 + \mathfrak{A})(\rho - \mathfrak{A}n_2 - n_1 + \mathfrak{A}r_2 + \mathfrak{A})} \psi(G_1 : \rho)\psi(G_2 : \rho). \quad (31.3)$$

برهان. در ابتدا توجه داریم که همواره داریم

$$\begin{aligned}
 \psi(G_1 \vee G_2 : \rho) &= \det(\rho I - D^Q(G_1 \vee G_2)) \\
 &= \begin{vmatrix} \rho I_{n_1} - D^Q(G_1) & -J_{n_1 \times n_2} \\ -J_{n_2 \times n_1} & \rho I_{n_2} - D^Q(G_2) \end{vmatrix}. \quad (32.3)
 \end{aligned}$$

دترمینان (۳۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\begin{vmatrix} m_1 & -d_{12} & \dots & -d_{1n_1} & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -d_{21} & m_1 & \dots & -d_{2n_1} & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ -d_{n_11} & -d_{n_12} & \dots & m_1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m_2 & -d'_{12} & \dots & -d'_{1,n_2} \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -d'_{21} & m_2 & \dots & -d'_{2,n_2} \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -d'_{n_21} & -d'_{n_22} & \dots & m_2 \end{vmatrix} \quad (33.3)$$

که $m_1 = \rho - (2n_1 + n_2 - 2) + r_1$ و $m_2 = \rho - (2n_2 + n_1 - 2) + r_2$. توجه داریم که d_{ij} فاصله‌ی بین دو رأس v_i و v_j در G_1 و d'_{ij} فاصله‌ی بین دو رأس u_i و u_j در G_2 است. اکنون ما تعدادی عملیات و انتقالات انجام می‌دهیم به طوری که مقدار دترمینان (۳۳.۳) تغییری نکند. اکنون سطر $(n_1 + 1)$ از سطرهای $(n_1 + 2), (n_1 + 3), \dots, (n_1 + n_2)$ از (۳۳.۳) را تفریق می‌کنیم. بعد از آن، با اضافه کردن ستون‌های $(n_1 + 2), (n_1 + 3), \dots, (n_1 + n_2)$ به ستون $(n_1 + 1)$ از ماتریس به دست آمده، دترمینان (۳۴.۳) حاصل می‌شود:

$$|B| = \begin{vmatrix} m_1 & -d_{12} & \dots & -d_{1n_1} & -n_2 \\ -d_{21} & m_1 & \dots & -d_{2n_1} & -n_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -d_{n_1 1} & -d_{n_1 2} & \dots & m_1 & -n_2 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m_2 - 2n_2 + 2 + r_2 \end{vmatrix} \quad (34.3)$$

که

$$|B| = \begin{vmatrix} m_2 + d'_{12} & -d'_{23} + d'_{13} & \dots & -d'_{2n_2} + d'_{1n_2} \\ -d'_{32} + d'_{12} & m_2 + d'_{13} & \dots & d'_{2n_2} + d'_{1n_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ -d'_{n_2 2} + d'_{12} & -d'_{n_2 3} + d'_{13} & \dots & m_2 + d'_{1n_2} \end{vmatrix}. \quad (35.3)$$

در (۳۴.۳) دترمینان از مرتبه‌ی $(n_1 + 1)$ است. اولین سطر را از سطرهای $2, 3, \dots, n_1$ کم می‌کنیم. بعد از آن، با اضافه کردن ستون‌های $2, 3, \dots, n_1$ به اولین ستون ماتریس به دست آمده، دترمینان (۳۶.۳) حاصل می‌شود،

$$|B| = \begin{vmatrix} m_1 - 2n_1 + 2 + r_1 & -d_{12} & \dots & -d_{1n_1} & -n_2 \\ \circ & m_1 + d_{12} & \dots & -d_{2n_1} + d_{1n_1} & \circ \\ \vdots & \vdots & & & \\ \circ & -d_{n_1 2} + d_{12} & \dots & m_1 + d_{1n_1} & \circ \\ -n_1 & -1 & \dots & -1 & m_2 - 2n_2 + 2 + r_2 \end{vmatrix} \quad (36.3)$$

اکنون با بسط دادن در امتداد اولین ستون داریم (۳۷.۳)،

$$\{(m_1 - 2n_1 + 2 + r_1)\Delta_1 - (-1)^{n_1} n_1 \Delta_2\} |B| \quad (37.3)$$

که

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m_1 + d_{12} & -d_{23} + d_{13} & \dots & -d_{2n_1} + d_{1n_1} & \circ \\ -d_{32} + d_{12} & m_1 + d_{13} & \dots & -d_{3n_1} + d_{1n_1} & \circ \\ \vdots & \vdots & & & \\ -d_{n_1 2} + d_{12} & -d_{n_1 3} + d_{13} & \dots & m_1 + d_{1n_1} & \circ \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m_2 - 2n_2 + 2 + r_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -d_{12} & -d_{13} & \dots & -d_{1n_1} & -n_2 \\ m_1 + d_{12} & -d_{23} + d_{13} & \dots & -d_{2n_1} + d_{1n_1} & \circ \\ -d_{32} + d_{12} & m_1 + d_{13} & \dots & -d_{3n_1} + d_{1n_1} & \circ \\ \vdots & \vdots & & & \\ -d_{n_12} + d_{12} & -d_{n_13} + d_{13} & \dots & m_1 + d_{1n_1} & \circ \end{vmatrix}.$$

عبارت (۳۷.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\begin{aligned} & \{(m_1 - 2n_1 + 2 + r_1)(m_2 - 2n_2 + 2 + r_2)|A| - n_1 n_2 |A|\}|B| \\ = & |A||B|\{(m_1 - 2n_1 + 2 + r_1)(m_2 - 2n_2 + 2 + r_2) - n_1 n_2\} \end{aligned} \quad (38.3)$$

که

$$|A| = \begin{vmatrix} m_1 + d_{12} & -d_{23} + d_{13} & \dots & -d_{2n_1} + d_{1n_1} \\ -d_{32} + d_{12} & m_1 + d_{13} & \dots & -d_{3n_1} + d_{1n_1} \\ \vdots & \vdots & & \\ -d_{n_12} + d_{12} & -d_{n_13} + d_{13} & \dots & m_1 + d_{1n_1} \end{vmatrix}. \quad (39.3)$$

دترمینان (۳۹.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{(m_1 - 2n_1 + 2 + r_1)} \\ &\times \begin{vmatrix} m_1 - 2n_1 + 2 + r_1 & -d_{12} & -d_{13} & \dots & -d_{1n_1} \\ \circ & m_1 + d_{12} & -d_{23} + d_{13} & \dots & -d_{2n_1} + d_{1n_1} \\ \circ & -d_{32} + d_{12} & m_1 + d_{13} & \dots & -d_{3n_1} + d_{1n_1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \circ & -d_{n_12} + d_{12} & -d_{n_13} + d_{13} & \dots & m_1 + d_{1n_1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (40.3)$$

بنابراین، با تفریق ستون‌های $2, 3, \dots, n_1$ از اولین ستون و بعد از آن اضافه کردن اولین سطر از ماتریس به دست آمده به سطرهای $2, 3, \dots, n_1$ ، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{(m_1 - 2n_1 + 2 + r_1)} \times \begin{vmatrix} m_1 & -d_{12} & -d_{13} & \dots & -d_{1n_1} \\ -d_{21} & m_1 & -d_{23} + d_{13} & \dots & -d_{2n_1} \\ -d_{31} & -d_{32} & m_1 & \dots & -d_{3n_1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ -d_{n_11} & -d_{n_12} & -d_{n_13} & \dots & m_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(m_1 - 2n_1 + 2 + r_1)} \psi(G_1 : \rho). \end{aligned} \quad (41.3)$$

با استدلال مشابه، می‌توان نشان داد که از (۳۵.۳)، رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$|B| = \frac{1}{(m_2 - 2n_2 + 2 + r_2)} \psi(G_2 : \rho) \quad (42.3)$$

با جایگذاری (۴۱.۳)، (۴۲.۳)، m_1 و m_2 نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۷.۴.۳. گیریم G_i یک گراف r_i -منتظم با رأس n_i و $\lambda_{i,1} = r_i \geq \lambda_{i,2} \geq \dots \geq \lambda_{i,n_i}$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت A_{G_i} که $i \in \{1, 2\}$ می‌باشد. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از $G_1 \vee G_2$ شامل مقادیر ویژه $2n_1 + n_2 - \lambda_{1,j} - r_1 - 4$ و $2n_2 + n_1 - \lambda_{2,j} - r_2 - 4$ برای $j = 2, 3, \dots, n_i$ و دو مقدار ویژه که به فرم زیر هستند،

$$\frac{5(n_1 + n_2) - 2(r_1 + r_2) - 8 \pm \sqrt{(3(n_1 - n_2) - 2(r_1 - r_2))^2 + 4n_1n_2}}{2}. \quad (43.3)$$

برهان. ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله $D^Q(G)$ از $G_1 \vee G_2$ به فرم زیر است:

$$D^Q(G) = \begin{pmatrix} 2J - A_{G_1} + (2n_1 + n_2 - r_1 - 4)I & J_{n_1 \times n_2} \\ J_{n_2 \times n_1} & 2J - A_{G_2} + (2n_2 + n_1 - r_2 - 4)I \end{pmatrix}.$$

به دلیل منتظم بودن گراف G_1 ، J بردار با درایه‌های یک را به عنوان یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه r_1 ، در نظر می‌گیریم، دیگر بردارهای ویژه بر J عمود هستند. (توجه داریم که نیاز به همبندی ندارد و بنابراین r_1 لزوماً یک مقدار ویژه ساده‌ی G_1 نیست.)

گیریم λ یک مقدار ویژه دلخواه از ماتریس مجاورت G_1 ، متناظر با بردار ویژه x ، است، به طوری که رابطه‌ی $j^T x = 0$ برقرار است. بنابراین $(x^{\circ}_{n_2 \times 1})^T$ یک بردار ویژه از $D^Q(G)$ متناظر با مقدار ویژه $2n_1 + n_2 - \lambda_{1,j} - r_1 - 4$ است. استدلال مشابه برقرار است، برای مقدار ویژه دلخواه μ از A_{G_2} که متناظر با بردار y ویژه است به طوریکه $j^T y = 0$. در این روش با تشکیل دادن بردار ویژه‌هایی به شکل $(x^{\circ})^T$ و $(y^{\circ})^T$ ، $2n_1 + n_2 - 2$ بردار ویژه عمود از $D^Q(G)$ را تشکیل می‌دهیم. این نتیجه می‌دهد که دو مقدار ویژه باقی مانده از $D^Q(G)$ ، با انتخاب مناسبی برای α و β به فرم $(\alpha_j \beta_j)^T$ است.

اکنون فرض می‌کنیم که ρ یک مقدار ویژه از $D^Q(G)$ با بردار ویژه به فرم $(\alpha_j \beta_j)^T$ است. آنگاه، با استفاده از $A_{G_1} j = r_1 j$ و $A_{G_2} j = r_2 j$ ، دستگاه زیر را نتیجه می‌گیریم،

$$\rho \alpha = (2n_1 - r_1 - 2)(\alpha + \alpha) + n_2(\alpha + \beta)$$

$$\rho \beta = n_1(\alpha + \beta) + (2n_2 - r_2 - 2)(\beta + \beta).$$

با حذف α و β ، معادله درجه دوم زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned} \rho^2 - \rho((4n_1 + n_2 - 2r - 4) + (4n_2 + n_1 - 2r_2 - 4)) \\ + (4n_1 + n_2 - 2r - 4)(4n_2 + n_1 - 2r_2 - 4) - n_1n_2 = 0 \end{aligned}$$

که جواب‌های آن در (۴۳.۳) داده شده است. به آسانی دیده می‌شود که این جواب‌ها، دو مقدار ویژه باقی مانده از $D^Q(G)$ هستند. $\square$

فصل ۴

کران‌هایی برای انرژی لاپلاسین بدون علامت فاصله و بررسی خواص آن

در این فصل، تعدادی کران برای انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم. همچنین انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری از گراف G ، که آن را با نماد $MMD^Q(G)$ نمایش خواهیم داد، را تعریف کرده و برخی خواص مهم آن را بررسی می‌نماییم. تمامی نتایج حاصل شده در این فصل در مقالات [۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] ثبت شده‌اند.

۱.۴ کران‌هایی برای انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله

در این بخش کران‌های بالا و پایینی برای انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برحسب پارامترهای مختلف گرافی مانند تعداد رئوس، اندازه گراف، قطر گراف و اعداد انتقال گراف ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۴. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال گراف G به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ باشد، آنگاه

همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n}} \\ & \leq E_{DQ}(G) \\ & \leq \sqrt{n(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n})}. \end{aligned}$$

برهان. با قرار دادن $a_i = 1$ و $b_i = |\xi_i|$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ در نامساوی کوشی شوارتز زیر

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right),$$

نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 & \leq n \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \\ \Rightarrow E_{DQ}(G) & \leq \sqrt{n(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n})}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم،

$$E_{DQ}(G) = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n},$$

□

و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۱.۱.۴. گیریم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n و با قطر d باشد، آنگاه

$$\sqrt{n(n-1)} \leq E_{DQ}(G) \leq n \sqrt{(n-1) \left(d^2 + \frac{n^2(n-1)}{4} - n + 1 \right)}.$$

برهان. از آنجا که $d_{ij} \geq 1$ برای $i \neq j$ و $\frac{n(n-1)}{4}$ زوج رئوس در G وجود دارد، آنگاه از کران پایین قضیه ۱.۱.۴، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} E_{DQ}(G) & \geq \sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n}} \\ & \geq \sqrt{2 \frac{n(n-1)}{4} + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \sum_{i=1}^n Tr_i^2} = \sqrt{n(n-1)}. \end{aligned}$$

دوباره، از آنجا که $d_{ij} \leq d$ برای $i \neq j$ و $\frac{n(n-1)}{4}$ زوج رئوس در G وجود دارد، آنگاه از کران بالای

قضیه ۱.۱.۴ نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} E_{DQ}(G) &\leq \sqrt{n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n} \right)} \\ &\leq \sqrt{n \left(2 \frac{n(n-1)}{2} d^2 + \frac{n^2(n-1)^2}{4} - n(n-1)^2 \right)} \\ &= n \sqrt{(n-1) \left(d^2 + \frac{n^2(n-1)}{4} - n + 1 \right)}, \end{aligned}$$

از این رو نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

گزاره زیر، در به دست آوردن نتیجه بعد، مفید خواهد بود.

لم ۱.۱.۴. [۹۵] اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، اعداد نامنفی باشند، آنگاه نتیجه زیر همواره برقرار است،

$$n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \right] \leq n \sum_{i=1}^n a_i - \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \right)^2 \leq n(n-1) \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \right].$$

نتیجه ۲.۱.۴. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و

$$\Delta = \left| \det \left(D^Q(G) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Tr_i I_n \right) \right|,$$

باشد، آنگاه همواره داریم،

$$\begin{aligned} &\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n} + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} \\ &\leq E_{DQ}(G) \\ &\leq \sqrt{(n-1) \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n} \right) + n\Delta^{\frac{2}{n}}}. \end{aligned}$$

برهان. با انتخاب $a_i = \xi_i^2$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ و با استفاده از گزاره ۱.۱.۴ و گزاره ۱.۱.۳، نتیجه می‌گیریم،

$$K \leq n \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i| \right)^2 \leq (n-1)K,$$

به عبارتی دیگر

$$K \leq n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{4\sigma^2(G)}{n} \right) - E_{DQ}^2(G) \leq (n-1)K, \quad (1.4)$$

که

$$\begin{aligned} K &= n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \left(\prod_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= n \left[\frac{1}{n} \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\mathcal{F}\sigma^2(G)}{n} \right) - \left(\prod_{i=1}^n |\xi_i| \right)^{\frac{2}{n}} \right] \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\mathcal{F}\sigma^2(G)}{n} - n\Delta_n^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

□ از (۱.۴)، کران مطلوب حاصل می‌شود.

در ادامه، کرانهایی برای $E_{DQ}(G)$ که شامل، مرتبه و اندازه برای گراف‌های با قطر ۲ است، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از این جهت، یادآوری می‌کنیم که G یک گراف از مرتبه n و اندازه m است.

لم ۲.۱.۴. اگر G گرافی با قطر ۲ باشد، آنگاه داریم،

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \mathcal{F}n(n-1) - \mathcal{E}m - \frac{\mathcal{F}m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2.$$

برهان. چون در گراف $D(G)$ ، $2m$ درایه برابر یک و $n(n-1) - 2m$ درایه برابر ۲ است، آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\mathcal{F}}{n} \left(\frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{i=1}^n Tr_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n (2(n-1) - d_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (2(n-1) - d_i) \right)^2 \\ &= (2m)^2 + (n^2 - n - 2m)^2 + \mathcal{F}n(n-1)^2 - \mathcal{L}m(n-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n d_i^2 - \mathcal{F}n(n-1)^2 + \mathcal{L}m(n-1) - \frac{\mathcal{F}m^2}{n} \\ &= \mathcal{F}n(n-1) - \mathcal{E}m - \frac{\mathcal{F}m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2. \end{aligned}$$

□

از قضیه‌ی ۱.۱.۴ و گزاره ۲.۱.۴، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۳.۱.۴. اگر G گرافی با قطر ۲ باشد، آنگاه داریم،

$$\sqrt{\mathfrak{F}_{n(n-1)} - \mathfrak{F}_m - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2} \\ \leq E_{DQ}(G) \leq \sqrt{n \left(\mathfrak{F}_{n(n-1)} - \mathfrak{F}_m - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right)}.$$

به طور مشابه، از نتیجه ۲.۱.۴ و گزاره ۲.۱.۴ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۱.۴. اگر G گرافی با قطر ۲ و $\Delta = \left| \det \left(D^Q(G) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Tr_i I_n \right) \right|$ باشد، آنگاه داریم،

$$\sqrt{\mathfrak{F}_{n(n-1)} - \mathfrak{F}_m - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} \\ \leq E_{DQ}(G) \\ \leq \sqrt{(n-1) \left(\mathfrak{F}_{n^2} - \mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}_m - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right) + n\Delta^{\frac{2}{n}}}.$$

لم ۳.۱.۴. گیریم G یک گراف r -منتظم با قطر ۲ باشد، آنگاه همواره داریم،

$$E_{DQ}(G) \leq 2n - r - 2 + \sqrt{(n-1) \left[n(r+4) - (r+2)^2 - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right]}.$$

برهان. از آنجا که G ، یک گراف r -منتظم با قطر ۲ است، بنابر گزاره ۱.۲.۳، داریم $\rho(G) = 4n - 2r - 4$ و بنابراین $4n - 2r - 4 = \rho_1 - \frac{\rho(G)}{n} = \mathfrak{F}_n - 2r - 4 - (2n - 2 - r) = 2n - r - 2$ با به کار بردن نامساوی کوشی شوارتز برای $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1})^T$ و $(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)^T$ ، نتیجه می‌گیریم،

$$\left(\sum_{i=2}^n |\xi_i| \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n \xi_i^2 \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow (E_{DQ}(G) - \xi_1(G))^2 \leq (n-1) \left(\mathfrak{F}_{n(n-1)} - \mathfrak{F}_m - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 - \xi_1(G)^2 \right)$$

$$\Rightarrow E_{DQ}(G) \leq \xi_1(G) + \sqrt{(n-1) \left(\mathfrak{F}_{n(n-1)} - \mathfrak{F}_m - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 - \xi_1(G)^2 \right)}.$$

چون $\xi_1(G) = 2n - r - 2$ و $2m = nr$ است، نتیجه می‌گیریم،

$$E_{DQ}(G) \leq 2n - r - 2 + \sqrt{(n-1) \left[n(r+4) - (r+2)^2 - \frac{\mathfrak{F}_m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 \right]}.$$

□

قضیه ۲.۱.۴. اگر قطر گراف G برابر ۲ باشد، آنگاه داریم،

$$E_{DQ}(G) \leq \frac{1}{n} [2n^2 - 2m - 2n + \sqrt{(n-1)[4n^3 + 2mn(n-2m-4) - 4(n^2 + m^2) + n^2 \sum_{i=1}^n d_i^2}].$$

برهان. اثبات ما، مشابه ایده‌ی استفاده شده برای به دست آوردن کران بالا برای انرژی گراف در [۶۵، ۶۶] است. بنابر (۲.۴)، داریم

$$E_{DQ}(G) \leq \xi_1(G) + \sqrt{(n-1) \left[4n(n-1) - 6m - \frac{4m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 - \xi_1(G)^2 \right]}.$$

اکنون تابع زیر را برای

$$\frac{2n^2 - 2n - 2m}{n} \leq x \leq \sqrt{4n(n-1) - 6m - \frac{4m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2},$$

تعریف می‌کنیم،

$$f(x) := x + \sqrt{(n-1) \left[4n(n-1) - 6m - \frac{4m^2}{n} + \sum_{i=1}^n d_i^2 - x^2 \right]}.$$

بنابراین $\frac{2n^2 - 2n - 2m}{n} \geq 1$ و از این رو $f(x)$ یک تابع نزولی برای $x^2 \leq \frac{2n^2 - 2n - 2m}{n}$ است. اما هنگامی که $x \geq 1$ ، داریم $x \leq x^2$ ، بنابراین $\frac{2n^2 - 2n - 2m}{n} \leq x \leq x^2$ و $f(x) \leq f(\frac{2n^2 - 2n - 2m}{n})$. اثبات کامل می‌شود.

□

در ادامه، گزاره زیر در به دست آوردن نتایج بعدی مفید خواهد بود.

لم ۴.۱.۴. [۴۱] گیریم $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $C = A + B$ باشد. آنگاه داریم،

$$E(C) \leq E(A) + E(B).$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر، ماتریس متعامد P وجود داشته باشد، به طوری که PA و PB هر دو ماتریس‌های نیمه معین مثبت باشند.

لم ۵.۱.۴. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال گراف G به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$E_{DQ}(G) \leq E_D(G) + \sum_{i=1}^n |Tr_i - \frac{2\sigma(G)}{n}|.$$

برهان. در ابتدا توجه داریم که همواره داریم،

$$(D^Q(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n) = D(G) + (Tr(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n)$$

اکنون با به کار بردن گزاره ۴.۱.۴ و این حقیقت که $Tr(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n$ یک ماتریس قطری است و مقادیر ویژه آن $Tr_i - \frac{2\sigma(G)}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ است، نتیجه مطلوب حاصل می شود. $\square$

نتیجه ۵.۱.۴. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال گراف G به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ باشد،

$$E_{DQ}(G) \leq E_D(G) + \sqrt{n \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - 4\sigma^2(G)}.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف منتظم از لحاظ عدد انتقال باشد.

برهان. بنابر نامساوی کوشی-شوارتز، داریم،

$$\sum_{i=1}^n |Tr_i - \frac{2\sigma(G)}{n}| \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n (Tr_i - \frac{2\sigma(G)}{n})^2} = \sqrt{n \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - 4\sigma^2(G)}.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $|Tr_i - \frac{2\sigma(G)}{n}| = c$, $i = 1, 2, \dots, n$. بنابراین نتیجه حاصل می شود. $\square$

با استفاده از گزاره ۴.۱.۴، می توان نتیجه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۳.۱.۴. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند باشد، در این صورت داریم،

$$|E_{DQ}(G) - E_{DL}(G)| \leq 2E_D(G). \quad (3.4)$$

تساوی برقرار است اگر و تنها G گراف تهی باشد.

برهان. از تساوی های

$$D^L(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n = Tr(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n - D(G)$$

و

$$D^Q(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n = Tr(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n + D(G)$$

نتیجه می گیریم که

$$(D^Q(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n) - (D^L(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n) = 2D(G).$$

بنابراین داریم،

$$D^L(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n = -2D(G) + (D^Q(G) - \frac{2\sigma(G)}{n}I_n)$$

$$D^Q(G) - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}I_n = \Upsilon D(G) + (D^L(G) - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}I_n).$$

با به کار بردن گزاره ۴.۱.۴، نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} E_{D^L}(G) &= E(D^L(G) - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}I_n) \leq E(-\Upsilon D(G)) + E(D^Q(G) - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}I_n) \\ &= \Upsilon E_D(G) + E_{D^Q}(G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{D^Q}(G) &= E(D^Q(G) - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}I_n) \leq E(\Upsilon D(G)) + E(D^L(G) - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}I_n) \\ &= \Upsilon E_D(G) + E_{D^L}(G) \end{aligned}$$

و بنابراین، نامساوی (۳.۴) حاصل می شود. اگر G گراف تهی باشد، آنگاه نامساوی (۳.۴) مساوی می شود. $\square$

اکنون، کرانه های بالا و پایینی برای $E_{D^Q}(G)$ برحسب تعداد رئوس، عدد انتقال گراف و دترمینان $\det D^Q(G)$ ارائه می دهیم.

قضیه ۴.۱.۴. گیریم G یک گراف ساده ی همبند از مرتبه ی n باشد، در این صورت داریم،

$$E_{D^Q}(G) \leq \Upsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n^2} (\Upsilon n\sigma(G) + \Upsilon\sigma(G) + n) - \xi \quad (4.4)$$

که $\xi = \ln |\frac{n\Delta}{\Upsilon\sigma(G)}|$ و $\Delta = |\det(D^Q(G) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Tr_i I_n)|$ می باشد.

برهان. تابع زیر را در نظر بگیرید،

$$f(x) = (x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n})^2 - (x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}) - \ln(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}), \quad x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} > 0$$

در نتیجه

$$f'(x) = 2(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}) - 1 - \frac{1}{x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}}.$$

بنابراین $f(x)$ یک تابع صعودی روی $x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \geq 1$ و یک تابع نزولی روی $0 < x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \leq 1$ است. از این رو $f(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}) \geq f(1) = 0$ نتیجه می دهد که برای $x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} > 0$ رابطه زیر برقرار است،

$$x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \leq (x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n})^2 - \ln(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n})$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} = 1$. با استفاده از این نتیجه، داریم،

$$\begin{aligned}
 E_{DQ}(G) &= \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + \sum_{i=\Upsilon}^n \left| \rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right| \\
 &\leq \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + \sum_{i=\Upsilon}^n \left(\left(\rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right)^2 - \ln \left| \rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right| \right) \\
 &= \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \rho_1^2 + \frac{\mathfrak{F}\sigma^2(G)}{n^2}(n-1) \\
 &\quad - \frac{\mathfrak{F}\sigma(G)}{n}(\Upsilon\sigma(G) - \rho_1) - \ln \prod_{i=1}^n \left| \rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right| + \ln \left(\rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right) \\
 &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n^2}(\Upsilon n\sigma(G) + \Upsilon\sigma(G) + n) + \frac{\mathfrak{F}\sigma(G)}{n} \rho_1 \\
 &\quad - \rho_1^2 - \ln \Delta + \ln \left(\rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right). \tag{۵.۴}
 \end{aligned}$$

از آنجا که تابع

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n^2}(\Upsilon n\sigma(G) + \Upsilon\sigma(G) + n) \\
 &\quad + \frac{\mathfrak{F}\sigma(G)}{n}x - x^2 - \ln \Delta + \ln \left(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right)
 \end{aligned}$$

یک تابع صعودی روی $1 \leq x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} < \infty$ و یک تابع نزولی روی $1 \leq x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}$ است، هم چنین $1 \leq x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \leq \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}$ پس داریم،

$$\begin{aligned}
 g(x) \leq g\left(\frac{\mathfrak{F}\sigma(G)}{n}\right) &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n^2}(\Upsilon n\sigma(G) + \Upsilon\sigma(G) + n) \\
 &\quad - \ln \Delta + \ln \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}.
 \end{aligned}$$

از ترکیب کردن این نتیجه با (۵.۴)، (۴.۴) حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۱.۴. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت داریم،

$$E_{DQ}(G) \geq \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln \Delta - \ln \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \tag{۶.۴}$$

که $\Delta = |\det(D^Q(G) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Tr_i I_n)|$ است.

برهان. تابع زیر را برای $x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} > 0$ ، در نظر بگیرید،

$$f(x) = x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} - 1 - \ln \left(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right).$$

به آسانی دیده می‌شود که $f(x)$ تابعی صعودی برای $1 \leq x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}$ و نزولی برای $0 < x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \leq 1$ است. بنابراین $f(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}) \geq f(1) = 0$ ، نتیجه می‌دهد $1 + \ln \left(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right) \geq x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}$.

برای $x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} > 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} = 1$ باشد. با استفاده از نتایج بالا، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} E_{DQ}(G) &= \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + \sum_{i=2}^n \left| \rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right| \\ &\geq \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + n - 1 + \sum_{i=2}^n \ln \left| \rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right| \\ &= \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln \prod_{i=2}^n \left| \rho_i - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right| \\ &= \rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln \Delta - \ln \left(\rho_1 - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

چون

$$g(x) = x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln \Delta - \ln \left(x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \right)$$

تابعی صعودی روی $1 \leq x - \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} \leq n$ است، بنابراین داریم،

$$g(x) \geq g\left(\frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}\right) = \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln \Delta - \ln \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}$$

□ برای $x \geq \frac{\Upsilon\sigma(G)}{n}$ از ترکیب کردن این نتیجه با (۱۱.۴)، (۶.۴) حاصل می‌شود.

اکنون انرژی اولیه لاپلاسین بدون علامت فاصله را برای جمع دو گراف منتظم بر حسب، مقادیر ویژه ماتریس مجاورتشان، بررسی می‌کنیم.

قضیه ۶.۱.۴. برای $i = 1, 2$ ، گیریم G_i یک گراف r_i منتظم با n_i رأس باشد. آنگاه داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G_1 \vee G_2) = n_1(2n_1 + n_2 - r_1) + n_2(2n_2 + n_1 - r_2) - 2(n_1 + n_2).$$

برهان. برای $i = 1, 2$ ، مقادیر ویژه ماتریس مجاورت A_{G_i} را با $\lambda_{i,1} = r_i \geq \lambda_{i,2} \geq \dots \geq \lambda_{i,n_i}$ نشان می‌دهیم. بنابر قضیه ۷.۴.۳، مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله از $G_1 \vee G_2$ عبارتند از:

$$\frac{5(n_1 + n_2) - 2(r_1 + r_2) - 8 \pm \sqrt{(3(n_1 - n_2) - 2(r_1 - r_2))^2 + 4n_1n_2}}{2} \quad (8.4)$$

و $2n_1 + n_2 - \lambda_{1,j} - r_1 - 4$ ، $2n_2 + n_1 - \lambda_{2,j} - r_2 - 4$ برای $j = 2, 3, \dots, n_i$. مقادیر داده شده در (۸.۴) هر دو نامنفی هستند و بنابراین مجموع این دو مقدار ویژه $(5n_1 - 2r_1 - 4) + (5n_2 - 2r_2 - 4)$ است. برای مقادیر ویژه باقی‌مانده از $G_1 \vee G_2$ ، داریم،

$$\begin{aligned} &\sum_{j=2}^{n_1} (2n_1 + n_2 - \lambda_{1,j} - r_1 - 4) + \sum_{j=2}^{n_2} (2n_2 + n_1 - \lambda_{2,j} - r_2 - 4) = \\ &(n_1 - 1)(2n_1 + n_2 - r_1 - 4) + r_1 + (n_2 - 1)(2n_2 + n_1 - r_2 - 4) + r_2, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathcal{E}_{DQ}(G_1 \vee G_2) = n_1(2n_1 + n_2 - r_1) + n_2(2n_2 + n_1 - r_2) - 2(n_1 + n_2).$$

□

اکنون به بررسی انرژی اولیه لاپلاسین بدون علامت فاصله برای گراف چند بخشی کامل، روی n رأس می‌پردازیم.

قضیه ۷.۱.۴. اگر $n = kn_1$ و $n_1 = \dots = n_k \geq 2$ باشد، آنگاه رابطه‌ی زیر همواره برقرار است،

$$\mathcal{E}_{DQ}(K_{n_1, \dots, n_k}) = n(n + n_1 - 2).$$

هدف ما اثبات این قضیه است. جهت تخمین مقادیر ویژه $D^Q(G)$ ، مفاهیمی از هم‌ارزی افراز ماتریس، مانند هم‌ارزی افراز گراف، بیان می‌کنیم. یک افراز $V = \cup_{i=1}^k V_i$ از مجموعه اندیس از ماتریس A را هم‌ارزی افراز ماتریس می‌گویند، هرگاه ماتریس $k \times k$ مانند B وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $i, j \in \{1, \dots, r\}$ و هر $u \in V_i$ ، رابطه‌ی زیر برقرار باشد،

$$\sum_{v \in V_j} A_{u,v} = B_{i,j}.$$

ظاهراً، از یک هم‌ارزی افراز ماتریس $D^Q(G)$ با ماتریس B برابر می‌شود با

$$B = n_1 J + (n + 2n_1 - 4)I, \quad (9.4)$$

که J ماتریس با درایه‌های یک و I ماتریس یکه است. اکنون گزاره اساسی زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۶.۱.۴. گیریم $D^Q(G)$ دارای یک هم‌ارزی افراز ماتریس $V = \cup_{i=1}^k V_i$ ، متناظر با B باشد. در این صورت، هر مقدار ویژه B یک مقدار ویژه از $D^Q(G)$ است.

برهان. فرض کنید، ρ یک مقدار ویژه از B با بردار ویژه x باشد، به طوری که $Bx = \rho x$. از بردار y در V داریم،

$$y_u = x_i \quad \text{if} \quad u \in V_i.$$

آنگاه برای $u \in V_i$ داریم،

$$\begin{aligned} (D^Q(G)y)_u &= \sum_{v \in V} D^Q(G)_{u,v} y_v = \sum_{j=1}^k \sum_{v \in V_j} D^Q(G)_{u,v} x_j \\ &= \sum_{j=1}^k B_{i,j} x_j = (Bx)_i = \rho x_i = \rho y_u. \end{aligned}$$

از آنجا که برای هر u دلخواه برقرار است، داریم $D^Q(G)y = \rho y$ و ρ یک مقدار ویژه از $D^Q(G)$ است. □

اگر ρ به عنوان یک مقدار ویژه از B دارای چندگانگی k باشد، آنگاه مجموعه‌ای از k بردار ویژه مستقل از B متناظر با ρ وجود دارد. واضح است که استقلال خطی بنابر گزاره قبل حفظ می‌شود، بنابراین، ما داریم یک مجموعه از k بردار ویژه مستقل خطی از $D^Q(G)$ متناظر با ρ . این نتیجه می‌دهد که ρ یک مقدار ویژه از B است که چندگانگی آن حداقل k است. چندجمله‌ای مشخصه از ماتریس B در (۹.۴) بعد از تفریق آخرین سطر از هر کدام از سطرها قبل به صورت زیر می‌شود،

$$\begin{aligned}\det(\rho I - B) &= \det\left((\rho - (n + 2n_1 - 4))I - n_1 J\right) \\ &= (\rho - n - 2n_1 + 4)^k \left(1 - \frac{n}{\rho - n - 2n_1 + 4}\right).\end{aligned}$$

بنابراین، مقادیر ویژه B نامنفی هستند و در نتیجه

$$\sum_{i=1}^k |\rho_i| = \sum_{i=1}^k \rho_i.$$

پس داریم،

$$\sum_{i=1}^k \rho_i = k(n + 3n_1 - 4).$$

بنابراین انرژی اولیه لاپلاسین بدون علامت فاصله از $K_{n_1, \dots, n_k}$ ، اگر $n_1 = \dots = n_k \geq 2$ باشد، برابر است با،

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{D^Q}(K_{n_1, \dots, n_k}) &= |n + n_1 - 4| \sum_{i=1}^k (n_i - 1) + \sum_{i=1}^k |\rho_i| \\ &= |n + n_1 - 4|(n - k) + nk + 3n - 4k \\ &= n(n + n_1 - 2),\end{aligned}$$

که نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

در ادامه کران‌هایی برای انرژی اولیه لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم.

قضیه ۸.۱.۴. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت داریم،

$$\mathcal{E}_{D^Q}(G) \geq \frac{4\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln\left(\frac{n \det D^Q}{4\sigma(G)}\right). \quad (10.4)$$

برهان. اثبات مشابه استدلال قضیه ۵.۱.۴ است. تابع زیر را برای $x > 0$ ، در نظر بگیرید،

$$f(x) = x - 1 - \ln(x).$$

به آسانی دیده می‌شود که $f(x)$ تابعی صعودی برای $x \geq 1$ و نزولی برای $0 < x \leq 1$ است. بنابراین $f(x) \geq f(1) = 0$ ، نتیجه می‌دهد $x \geq 1 + \ln(x)$ برای $x > 0$ و تساوی برقرار است اگر

و تنها اگر $x = 1$ باشد. با استفاده از نتایج بالا، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{DQ}(G) &= \rho_1 + \sum_{i=2}^n |\rho_i| \\ &\geq \rho_1 + n - 1 + \sum_{i=2}^n \ln |\rho_i| \\ &= \rho_1 + n - 1 + \ln \prod_{i=2}^n |\rho_i| \\ &= \rho_1 + n - 1 + \ln \Delta - \ln(\rho_1).\end{aligned}\quad (11.4)$$

چون

$$g(x) = x + n - 1 + \ln \Delta - \ln(x)$$

تابعی صعودی روی $1 \leq x \leq n$ است، بنابراین داریم،

$$g(x) \geq g\left(\frac{\mathcal{F}\sigma(G)}{n}\right) = \frac{\mathcal{F}\sigma(G)}{n} + n - 1 + \ln \Delta - \ln \frac{\mathcal{F}\sigma(G)}{n}$$

□ برای $x \geq \frac{\mathcal{F}\sigma(G)}{n}$ از ترکیب کردن این نتیجه با (۱۱.۴)، (۶.۴) حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۱.۴. اگر دنباله‌ی اعداد انتقال و دنباله‌ی دومین اعداد انتقال گراف G به ترتیب به صورت $\{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ و $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ باشد، آنگاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} + n - 1 + \ln(\det D^Q) - \ln \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}} \right).$$

برهان. با استفاده از قضیه ۶.۲.۳ داریم،

$$\rho(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Tr_i^2 + T_i^2)}{\sum_{i=1}^n Tr_i^2}},$$

□ اکنون با استفاده از قضیه ۸.۱.۴ و رابطه (۱۱.۴)، نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۷.۱.۴. اگر G گرافی از مرتبه‌ی n با ماکزیمم درجه‌ی Δ_1 و دومین ماکزیمم درجه‌ی Δ_2 باشد، آنگاه داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \geq 5n - 5 - \Delta_1 - \Delta_2 + \ln(\det D^Q) - \ln(4n - 4 - \Delta_1 - \Delta_2).$$

برهان. با استفاده از قضیه ۳.۲.۳ داریم،

$$\rho(G) \geq 4n - 4 - \Delta_1 - \Delta_2,$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۸.۱.۴ و رابطه (۱۱.۴)، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

اکنون برخی گزاره‌هایی را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت را بیان می‌کنیم و سپس نتایجی برای $\mathcal{E}_{DQ}(G)$ ارائه می‌دهیم.

لم ۷.۱.۴. [۷۸] اگر a_i و $b_i, 1 \leq i \leq n$ ، اعداد حقیقی و نامنفی باشند، آنگاه داریم،

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \frac{n^2}{4} (M_1 M_2 - m_1 m_2)^2,$$

که رابطه‌های $M_1 = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ ، $M_2 = \max_{1 \leq i \leq n} b_i$ ، $m_1 = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$ و $m_2 = \min_{1 \leq i \leq n} b_i$ برقرار هستند.

لم ۸.۱.۴. [۷۹] اگر a_i و $b_i, 1 \leq i \leq n$ ، اعداد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه داریم،

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2,$$

که رابطه‌های $M_1 = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ ، $M_2 = \max_{1 \leq i \leq n} b_i$ ، $m_1 = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$ و $m_2 = \min_{1 \leq i \leq n} b_i$ برقرار هستند.

اکنون با به کار بردن گزاره ۷.۱.۴، نامساوی زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۹.۱.۴. اگر G گرافی از مرتبه‌ی n با بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله به ترتیب ρ_1 و ρ_n باشد، آنگاه همواره داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \geq \sqrt{n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - \frac{n^2}{4} (\rho_1 - \rho_n)^2}.$$

قضیه ۱۰.۱.۴. گیریم G گرافی از مرتبه‌ی n با بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله به ترتیب ρ_1 و ρ_n باشد، آنگاه همواره داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \geq \frac{2\sqrt{\rho_1 \rho_n}}{\rho_1 + \rho_n} \sqrt{n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right)}.$$

برهان. فرض کنید $a_i = \rho_i$ که $a_1 \geq \dots \geq a_n$ و $b_i = 1, 1 \leq i \leq n$ باشد. با استفاده از لم ۸.۱.۴ داریم،

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 \sum_{i=1}^n 1^2 \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_1}} + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_n}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \right)^2.$$

از این رو با یک محاسبه ساده نتیجه می‌گیریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \geq \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_n}}{\rho_1 + \rho_n} \sqrt{n \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right)}.$$

□

نتیجه ۸.۱.۴. گیریم G گرافی از مرتبه‌ی n با بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه لاپلاسی بدون علامت فاصله به ترتیب ρ_1 و ρ_n باشد، آنگاه همواره داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \geq \frac{\sqrt{n \sqrt{n(n-1)} \rho_1 \rho_n}}{\rho_1 + \rho_n}.$$

اکنون کران بالایی برای $\mathcal{E}_{DQ}(G)$ که شامل مرتبه و دنباله درجات اعداد انتقال است، را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۴. گیریم G یک گراف ساده‌ی همبند از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \leq n \sqrt{\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم،

$$\sum_{i=2}^n |\rho_i| \leq \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n \rho_i^2} = \sqrt{(n-1) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \rho_1^2 \right)}.$$

از این رو داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \leq \rho_1 + \sqrt{(n-1) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \rho_1^2 \right)}.$$

تابع

$$f(x) = x + \sqrt{(n-1) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - x^2 \right)}$$

نزولی است اگر و تنها اگر $x \geq \sqrt{\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}}$ بنابراین

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \leq f \left(\sqrt{\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2}{n}} \right).$$

□

نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۹.۱.۴. اگر G گرافی همبند از مرتبه‌ی n با قطر d باشد، آنگاه همواره داریم،

$$\mathcal{E}_{DQ}(G) \leq n \sqrt{(n-1) \left(d^2 + \frac{n^2(n-1)}{4} \right)}.$$

□

برهان. با استدلال مشابه نتیجه ۱.۱.۴، حکم حاصل می‌شود.

۱.۱.۴ نتایج درمورد انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله مینیمم احاطه‌گری در گراف‌ها

اکنون، برای مینیمم مجموعه احاطه‌گری گراف G ، ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری از گراف G ، که آن را با نماد $MMD^Q(G)$ نمایش خواهیم داد، را تعریف کرده و برخی خواص مهم آن را بررسی می‌نماییم. همچنین انرژی ماتریس $MMD^Q(G)$ را به صورت مجموع مقادیر ویژه آن تعریف کرده و تعدادی کران بالا و پایین برای انرژی $ED_{DQ}(G)$ و همچنین برای شعاع طیفی $MMD^Q(G)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $MMD^Q(G)$ ارائه می‌دهیم.

زیرمجموعه D از $V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گری از گراف G نامیده می‌شود هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی $V(G) - D$ با تعدادی رئوس از مجموعه D مجاور باشد. هر مجموعه احاطه‌گری با کوچکترین اندازه را کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گری می‌نامند. اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گری از گراف G عدد احاطه‌گری نامیده می‌شود و با نماد $\eta(G)$ نشان داده می‌شود. در [۸۳، ۸۴]، ماتریس مینیمم احاطه‌گری و ماتریس فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری و همچنین انرژی‌های مرتبط با آن‌ها تعریف شده و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. ما ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری از گراف G (به طور مختصر ماتریس MMD^Q را به صورت $MMD^Q(G) := (p_{ij})$ تعریف می‌کنیم که:

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 + Tr(v_i) & \text{اگر } i = j \text{ و } v_i \in D \text{ باشد} \\ Tr(v_i) & \text{اگر } i = j \text{ و } v_i \notin D \text{ باشد} \\ d(v_i, v_j) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از آنجا که ماتریس $MMD^Q(G)$ ، ماتریسی تحویل‌ناپذیر، نامنفی، متقارن و نیمه معین مثبت است، همه‌ی مقادیر ویژه آن نامنفی هستند. گیریم α عددی حقیقی باشد، ما به ترتیب نمادهای $\Gamma_\alpha(G)$ و $\sigma_\alpha(G)$ را برای $\sum_{v \in V(G)} Tr(v)^\alpha$ و $\sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v)^\alpha$ استفاده می‌کنیم. همچنین انرژی ماتریس $MMD^Q(G)$ را به صورت مجموع مقادیر ویژه آن تعریف می‌کنیم و با نماد $ED_{DQ}(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۹.۱.۴ [۳۴] اگر a_i و b_i ، $1 \leq i \leq n$ ، اعداد حقیقی و نامنفی باشند، به طوری که اعداد حقیقی r و R وجود داشته باشند، که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، رابطه $r \leq \frac{b_i}{a_i} \leq R$ ، $a_i \neq 0$ ، برقرار باشد. آنگاه داریم،

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 + rR \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq (r+R) \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها، برای حداقل یک i که $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم، $b_i = a_i r$ یا $b_i = a_i R$.

قضیه ۱۲.۱.۴. گیریم G یک گراف ساده با n رأس و m یال باشد. اگر D مینیمم مجموعه احاطه‌گری باشد، آنگاه داریم،

$$ED_{DQ}(G) = \eta(G) + 2\sigma(G).$$

برهان. فرض کنید $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MMD^Q(G)$ باشند. اکنون با استفاده از این حقیقت که رابطه $\sum_{i=1}^n \rho_i = \text{trace}(MMD^Q(G))$ برقرار است و مقادیر ویژه $MMD^Q(G)$ نامنفی هستند، حکم ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۱۰.۱.۴. گیریم G یک گراف از مرتبه n باشد، آنگاه داریم $ED_{DQ}(G) \geq n^2 - n + 1$ تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_n$.

برهان. با توجه به اینکه همواره داریم، $\eta(G) \geq 1$ و $\sigma(G) \geq \frac{n^2-n}{2}$. همچنین تساوی در هر دو نامساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_n$ ، بنابراین حکم ثابت می‌شود. $\square$

لم ۱۰.۱.۴. گیریم G گرافی از مرتبه n و D مینیمم مجموعه احاطه‌گری باشد. اگر $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ مقادیر $MMD^Q(G)$ باشند، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} \text{Tr}(v).$$

برهان. داریم،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho_i^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} q_{ji} = \sum_{i=1}^n (q_{ii})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (q_{ij})^2 \\ &= \sum_{v \notin D} (\text{Tr}(v))^2 + \sum_{v \in D} (1 + \text{Tr}(v))^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (q_{ij})^2 \\ &= \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} \text{Tr}(v). \end{aligned}$$

$\square$

نتیجه ۱۱.۱.۴. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال با قطر حداکثر ۲ باشد. هم چنین D مینیمم مجموعه احاطه‌گری باشد. اگر $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ مقادیر ویژه $MMD^Q(G)$ باشند، آنگاه داریم،

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = 4n^2(n-1) - 2m(4n-1) + \eta(G)(4n-3) + M_1(G) - 2 \sum_{v \in D} \deg(v),$$

که $M_1(G) = \sum_{i=1}^n \deg(v_i)^2$ اولین اندیس زاگرب نامیده می‌شود.

برهان. گیریم $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. از آنجا که $diam(G) \leq 2$ است، داریم $Tr(v) = 2n - deg(v) - 2$. اکنون از این حقیقت که $\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = trace(MMD^Q(G))^2$ ، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho_i^2 &= \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \\ &= \sum_{v \in V(G)} (Tr(v))^2 + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) + 2(2n(n-1) - 3m). \end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری روابط زیر در تساوی فوق، حکم حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} (Tr(v))^2 &= 4n(n-1)^2 - 4m(n-1) + M_1(G), \\ \sum_{v \in D} Tr(v) &= 2(n-1)\eta(G) - \sum_{v \in D} deg(v). \end{aligned}$$

□

در ادامه، تعدادی کران برای $ED_{DQ}(G)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۴. گیریم G گرافی ساده از مرتبه n باشد. اگر D مینیمم مجموعه احاطه‌گری و $\Delta = \det(MMD^Q(G))$ باشد، آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} &\sqrt{\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} \\ &\leq ED_{DQ}(G) \\ &\leq \sqrt{n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right)}. \end{aligned}$$

برهان. فرض کنید، $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ مقادیر ویژه $MMD^Q(G)$ باشند. ابتدا نامساوی سمت راست را اثبات می‌کنیم. در نامساوی کوشی شوارتز $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$ ، قرار می‌دهیم $a_i = 1$ و $b_i = \rho_i$. با استفاده از گزاره ۱۰.۱.۴، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^2 \right) \\ (ED_{DQ}(G))^2 &\leq n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right). \end{aligned}$$

برای نامساوی سمت چپ، از نامساوی حسابی، هندسی برای مجموعه $\{\rho_i \rho_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ استفاده می‌کنیم، (که طبق این نامساوی، میانگین حسابی از اعداد حقیقی نامنفی، بزرگتر و

یا مساوی میانگین هندسی آن‌هاست. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho_i \rho_j &\geq \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \rho_i \rho_j \right)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \rho_i \right)^{\frac{n-1}{\binom{n}{2}}} = \left(\prod_{i=1}^n \rho_i \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \Delta^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

اکنون، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} (ED_{DQ}(G))^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho_i \rho_j \\ &\geq \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۴.۱.۴. اگر ρ_1 بزرگترین مقدار ویژه $MMD^Q(G)$ باشد، آنگاه $\rho_1 \geq \frac{4\sigma(G) + \eta(G)}{n}$.

برهان. بگیریم $X = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n^T$ بردار با درایه‌های یک باشد. آنگاه با استفاده از قاعده رالی داریم (ببینید [۲۱])،

$$\begin{aligned} \rho_1 &\geq \frac{X^T MMD^Q(G) X}{X^T X} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}}{n} \\ &= \frac{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j) + \sum_{i=1, v_i \notin D}^n Tr v_i + \sum_{i=1, v_i \in D}^n (1 + Tr v_i)}{n} \\ &= \frac{4H\sigma(G) + \eta(G)}{n}. \end{aligned}$$

□

اکنون با قرار دادن $a_i = 1$ و $b_i = \rho_i$ در گزاره‌های ۷.۱.۴ و ۸.۱.۴، دو کران پایین برای $ED_{DQ}(G)$ از گراف G را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۱۵.۱.۴. فرض کنید، G یک گراف همبند باشد که $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MMD^Q(G)$ از G باشند. آنگاه داریم،

$$ED_{DQ}(G) \geq \sqrt{n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right) - \frac{n^2}{4} (\rho_1 - \rho_n)^2} \quad (12.4)$$

$$ED_{DQ}(G) \geq \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_n}}{\rho_1 + \rho_n} \sqrt{n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right)}.$$

لم ۱۱.۱.۴. [۲۲] اگر a_i و $b_i, 1 \leq i \leq n$ اعداد حقیقی و نامنفی باشند و اعداد حقیقی a, b, A و B وجود داشته باشند، به طوری که برای هر $i = 1, \dots, n$ ، داشته باشیم، $a \leq a_i \leq A$ و $b \leq b_i \leq B$ ، آنگاه داریم،

$$\left| n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \alpha(n)(A-a)(B-b),$$

که $\alpha(n) = n \left[\frac{n}{4} \right] \left(1 - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{4} \right] \right)$ است، هنگامی که $[x]$ نشان دهنده بخش صحیح از عدد حقیقی x باشد. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ و $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

کران پایین دیگری برای $ED_{DQ}(G)$ ، با استفاده از گزاره ۱۱.۱.۴ و با قرار دادن $a_i = b_i = \rho_i$ ، به صورت زیر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۱.۴. فرض کنید، G یک گراف همبند باشد که $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MMD^Q(G)$ از G باشند. آنگاه داریم،

$$ED_{DQ}(G) \geq \sqrt{n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right) - \alpha(n)(\rho_1 - \rho_n)^2}. \quad (۱۳.۴)$$

نتیجه ۱۲.۱.۴. از آنجا که $\alpha(n) = n \left[\frac{n}{4} \right] \left(1 - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{4} \right] \right) \leq \frac{n^2}{4}$ ، آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} ED_{DQ}(G) &\geq \sqrt{n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right) - \alpha(n)(\rho_1 - \rho_n)^2} \\ &\geq \sqrt{n \left(\Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v) \right) - \frac{n^2}{4}(\rho_1 - \rho_n)^2}, \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد که نامساوی ۱۳.۴ از نامساوی ۱۲.۴ قوی‌تر است.

قضیه ۱۷.۱.۴. فرض کنید، G یک گراف همبند باشد که $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MMD^Q(G)$ باشند. آنگاه داریم،

$$ED_{DQ}(G) \geq \frac{n\rho_1\rho_n + \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2 \sum_{v \in D} Tr(v)}{\rho_1 + \rho_n}.$$

برهان. نتیجه با قرار دادن $r = \rho_n$ و $R = \rho_i$ ، $b_i = \rho_i$ ، $a_i = 1$ در لم ۹.۱.۴ حاصل می‌شود. $\square$

فصل ۵

مجموع مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله

در این فصل ابتدا کران‌هایی را برای مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه $M_k(G)$ و مجموع k تا کوچکترین مقدار ویژه $N_k(G)$ برحسب تعداد رئوس n و عدد انتقال $\sigma(G)$ ارائه می‌دهیم. مشابه حدس برآور و حدس اشرف ما حدسی را برای مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله ارائه می‌دهیم. مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۱۳] می‌باشد.

۱.۵ نوعی از حدس برآور برای ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله

حدس ۱.۱.۵. برای هر گراف همبند G از مرتبه n که مسیر نباشد، برای هر $k = 2, \dots, n$ داریم $M_k(G) \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3}$.

نشان می‌دهیم که این حدس برای گراف‌های با قطر یک و دو به ازای هر k برقرار است. علاوه بر این نشان می‌دهیم حدس ۱.۱.۵ برای $k = n-1$ و $k = n$ برای همه گراف‌ها برقرار است، همچنین این حدس برای تعدادی k برای گراف‌های r -منتظم از لحاظ عدد انتقال

صادق است. در نتیجه برای گراف‌های آستانه‌ای^۱ و قطعه‌ای^۲ درستی حدس را نشان می‌دهیم. هم چنین درستی حدس را برای رده‌ای از گراف‌ها ثابت می‌کنیم. مشابه گزاره ۲ در [۶۰] می‌توان گزاره زیر را اثبات کرد.

لم ۱.۱.۵. برای گراف همبند G ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله دارای دو مقدار متمایز است اگر و تنها اگر گراف G کامل باشد.

اکنون کران بالایی برای $M_k(G)$ برحسب تعداد رئوس n و عدد انتقال گراف $\sigma(G)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۵. اگر G یک گراف همبند از مرتبه n باشد، آنگاه همواره داریم،

$$M_k(G) \leq \frac{1}{n} \left\{ 2k\sigma(G) + \left[k(n-k) \left(n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4\sigma^2(G) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (۱.۵)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\rho_1 = \dots = \rho_k$ و $\rho_{k+1} = \dots = \rho_n$.

برهان. گیریم $M_k = M_k(G)$. با استفاده از گزاره ۱.۱.۳ و نامساوی کوشی شوارتز، داریم

$$\begin{aligned} (2\sigma(G) - M_k)^2 &= (\rho_{k+1} + \dots + \rho_n)^2 \leq (n-k)(\rho_{k+1}^2 + \dots + \rho_n^2) \\ &= (n-k) \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - (\rho_1^2 + \dots + \rho_k^2) \right) \\ &\leq (n-k) \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 - \frac{1}{k} M_k^2 \right). \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد

$$M_k(G) \leq \frac{1}{n} \left\{ 2k\sigma(G) + \left[k(n-k) \left(n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4\sigma^2(G) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

تساوی در (۱.۵) برقرار است اگر و تنها اگر تساوی در نامساوی کوشی شوارتز و هم چنین تساوی در $\rho_1^2 + \dots + \rho_k^2 \geq \frac{1}{k} M_k^2$ برقرار باشد. لذا تساوی در (۱.۵) برقرار است اگر و تنها اگر $\rho_{k+1} = \dots = \rho_n$ و $\rho_1 = \dots = \rho_k$ که اثبات کامل می‌شود. $\square$

از آنجا که برای گراف K_n مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله به صورت $\{n-2, 2n-2, \dots, n-2\}$ می‌باشند، از قضیه فوق نتیجه می‌شود که برای $k=1$ تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_n$. اکنون با استدلال مشابه کران پایینی برای $N_k(G)$ برحسب تعداد رئوس و عدد انتقال گراف $\sigma(G)$ ارائه می‌دهیم.

¹Threshold

²Split

قضیه ۲.۱.۵. اگر G یک گراف همبند از مرتبه n باشد، آنگاه همواره داریم،

$$N_k(G) \geq \frac{1}{n} \left\{ 2k\sigma(G) - \left[k(n-k) \left(n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4\sigma^2(G) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\rho_1 = \dots = \rho_{n-k}$ و $\rho_{n-k+1} = \dots = \rho_n$.

در حالت خاص برای $k=1$ از قضیه‌های ۱.۱.۵ و ۲.۱.۵ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۱.۵. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و ρ_1 و ρ_n به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه گراف باشد. آنگاه همواره داریم،

$$\rho_1 \leq \frac{2\sigma(G)}{n} + \frac{\sqrt{(n-1) \left(n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4\sigma^2(G) \right)}}{n}$$

و

$$\rho_n \geq \frac{2\sigma(G)}{n} - \frac{\sqrt{(n-1) \left(n \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n Tr_i^2 \right) - 4\sigma^2(G) \right)}}{n}.$$

نتیجه ۱.۱.۵. کران بالایی را برای ρ_1 برحسب تعداد رئوس n و عدد انتقال $\sigma(G)$ از گراف G ارائه می‌دهد. برای گراف G با $E' \subseteq E(G)$ ، گیریم $G - E'$ گراف حاصل شده از G با حذف یال‌های E' باشد. اگر $E' = \{e\}$ ، آنگاه برای $G - \{e\}$ می‌نویسیم $G - e$.

لم ۲.۱.۵. [۳] فرض کنید G یک گراف همبند روی n رأس با $m \geq n$ یال و G' گراف همبند حاصل شده از G با حذف یک یال از آن باشد. آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $\rho_i(G) \leq \rho_i(G')$. گزاره زیر با استفاده از نامساوی‌های ویل^۳ نتیجه می‌شود.

لم ۳.۱.۵. [۵] فرض کنید G یک گراف همبند روی $n \geq 3$ رأس با قطر d باشد. گیریم $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله گراف G و $\bar{q}_1 \geq \bar{q}_2 \geq \dots \geq \bar{q}_n$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله گراف مکمل G باشند. آنگاه برای $1 \leq i \leq n$ همواره داریم،

$$n - 2 + \bar{q}_i \leq \rho_i \leq 2n - 2 + \bar{q}_i, \quad d = 2 \quad \text{و}$$

$$\rho_i \geq n - 2 + \bar{q}_i, \quad d \geq 3.$$

اکنون رابطه‌ای بین $M_k(G)$ و $M_k(H)$ که H زیرگراف فراگیر همبند G است را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۵. اگر G یک گراف همبند با m یال و H یک زیرگراف فراگیر همبند G باشد، آنگاه برای $1 \leq k \leq n$ همواره داریم $M_k(G) \leq M_k(H)$.

³Weyl inequalities

برهان. گیریم G یک گراف همبند از مرتبه n و H زیرگراف فراگیر همبند G باشد. اگر $G = H$ آنگاه نتیجه واضح است. بنابراین فرض کنیم H یک زیرگراف فراگیر سره از G باشد. نتیجه حاصل می‌شود با استفاده از گزاره ۲.۱.۵ یا با استفاده مکرر از گزاره ۲.۱.۵، هنگامی که G شامل یک یال یا یال‌های بیشتری است که در H نیستند. $\square$

نتایج زیر از قضیه ۳.۱.۵ حاصل می‌شوند.

نتیجه ۲.۱.۵. اگر G یک گراف همبند از اندازه m و T درخت فراگیر G باشد، آنگاه همواره برای $1 \leq k \leq n$ داریم $M_k(G) \leq M_k(T)$.

نتیجه ۳.۱.۵. اگر G یک گراف همبند از اندازه m و P_n یک مسیر همیلتونی از G باشد، آنگاه همواره برای $1 \leq k \leq n$ داریم $M_k(G) \leq M_k(P_n)$.

نتیجه ۴.۱.۵. اگر G یک گراف همبند از مرتبه n و اندازه m و C_n یک دور همیلتونی از G باشد، آنگاه همواره برای $1 \leq k \leq n$ داریم $M_k(G) \leq M_k(C_n)$.

نتیجه زیر با استفاده از گزاره ۳.۱.۵ حاصل می‌شود.

قضیه ۴.۱.۵. اگر G یک گراف همبند از مرتبه n ، اندازه m و اگر $\bar{G}$ مکمل G باشد، آنگاه برای $1 \leq k \leq n$ داریم $M_k(G) \geq k(n-2) + S_k^+(\bar{G})$.

قضیه فوق نشان می‌دهد که هر کران پایینی برای $S_k^+(\bar{G})$ یک کران پایینی برای $M_k(G)$ است.

مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله برای گراف‌هایی با قطر یک و دو

این بخش برای تایید درست بودن حدس ۱.۱.۵ برای گراف‌های مختلف اختصاص داده شده است. در ابتدا نشان می‌دهیم که حدس برای $k = n-1$ و $k = n$ برای همه گراف‌های همبند درست است.

قضیه ۵.۱.۵. حدس ۱.۱.۵ برای $k = n-1$ و $k = n$ برای همه گراف‌های همبند برقرار است.

برهان. گیریم G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 2$ با m یال و عدد انتقال $\sigma(G)$ باشد. می‌دانیم که مسیر P_n دارای ماکزیمم عدد انتقال از میان همه گراف‌های همبند از مرتبه n است. در واقع $\sigma(G) \leq \sigma(P_n) = \binom{n+1}{3}$. بنابراین از آنجا که رابطه زیر برقرار است،

$$M_{n-1}(G) \leq M_n(G) = 2\sigma(G) = \sigma(G) + \sigma(G) \leq \sigma(G) + \binom{n+1}{3}$$

$\square$ پس برای حالت‌های خاص $k = n, n-1$ نتیجه حاصل می‌شود.

با استفاده از محاسبات مستقیم، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۶.۱.۵. حدس ۱.۱.۵ برای همه گراف‌های همبند $G \neq P_n$ از مرتبه $n \leq 5$ برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم که حدس ۱.۱.۵ برای همه گراف‌های همبند با قطر یک برقرار است.

قضیه ۷.۱.۵. حدس ۱.۱.۵ برای K_n برقرار است.

برهان. می‌دانیم که برای گراف K_n مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله آن به صورت $\{2n-2, (n-2)^{[n-1]}\}$ و عدد انتقال آن $\sigma(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ است. برای $2 \leq k \leq n$ اگر $0 \leq k^3 + 3k^2 - (6n-14)k + 3n(n-3)$ باشد، آنگاه داریم،

$$M_k(K_n) = 2n-2 + (k-1)(n-2) \leq \sigma(K_n) + \binom{k+2}{3} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k^2+3k+2)}{6},$$

از آنجا که $k \geq 2$ برای نشان دادن $0 \leq k^3 + 3k^2 - (6n-14)k + 3n(n-3)$ باید رابطه $0 \leq k^3 - (6n-14)k + 3n(n-3) + 12$ را ثابت کنیم.

تابع $f(k) = k^3 - (6n-14)k + 3n(n-3) + 12$ را برای $k \in [2, n]$ در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که $f(k)$ تابعی نزولی در بازه $[2, \sqrt{2n-\frac{14}{3}}]$ و تابعی صعودی در بازه $[\sqrt{2n-\frac{14}{3}}, n]$ است. بنابراین برای کامل شدن اثبات باید نشان دهیم که $f(\sqrt{2n-\frac{14}{3}}) \geq 0$. فرض کنید که $0 \leq f(\sqrt{2n-\frac{14}{3}})$ و بنابراین $0 \leq (\sqrt{2n-\frac{14}{3}})^3 - (6n-14)(\sqrt{2n-\frac{14}{3}}) + 3n(n-3) + 12$ در نتیجه $(4n-\frac{28}{3})\sqrt{2n-\frac{14}{3}} + 3n(n-3) + 12 \geq 0$ و بنابراین داریم

$$9n^4 - 86n^3 + 377n^2 - 738/66n + 550/51 \geq 0.$$

که نتیجه می‌دهد $0 \leq 1058/66 + n(415/66n - 1130/66) + n^3(9n-86)$ که برای $n \geq 2$ همیشه درست است. بنابراین حکم حاصل می‌شود. $\square$

فرض کنید گرافی نوع خاصی از تقارن را دارد که می‌توان آن را به فرم زیر با ماتریس وابسته به صورت زیر نمایش داد

$$M = \begin{pmatrix} X & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta^t & B & \cdots & C & C \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \beta^t & C & \cdots & B & C \\ \beta^t & C & \cdots & C & B \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

که $X \in R^{t \times t}$, $\beta \in R^{t \times s}$ و $B, C \in R^{s \times s}$ به طوری که $n = t + cs$ ، که c تعداد کپی‌های B است. بنابراین می‌توانیم مقادیر ویژه آن را با استفاده از اجتماع مقادیر ویژه ماتریس‌های کوچکتر بنویسیم. در اینجا $\sigma^{(k)}(Y)$ نشان دهنده چندگانگی k از مقدار ویژه $\sigma(Y)$ است.

لم ۴.۱.۵. [۴۲] گیریم M ماتریسی به فرم ماتریس داده شده در (۲.۵) با $c \geq 1$ کپی از بلوک B باشد. آنگاه داریم،

$$1 - \sigma(B - C) \subseteq \sigma(M) \text{ با چندگانگی } c - 1,$$

۲ - $\sigma(M) \setminus \sigma^{(c-1)}(B - C) = \sigma(M')$ مجموعه ای از $t + s$ مقدار ویژه باقی مانده از M است به طوری که $M' = \begin{pmatrix} X & \sqrt{c}\beta \\ \sqrt{c}\beta^t & B + (c-1)C \end{pmatrix}$

گیریم S_n^* گراف حاصل شده از ستاره $K_{1,n-1}$ با اضافه کردن یک یال بین دو رأس آویخته باشد. با استفاده مکرر از گزاره ۴.۱.۵، مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از $S_n^* = K_{1,n-1} + e$ به صورت زیر حاصل می شود.

لم ۵.۱.۵. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از $S_n^* = K_{1,n-1} + e$ عبارت است از $\{(2n-5)^{[n-3]}, x_1, x_2, x_3\}$ که x_1, x_2, x_3 ریشه های چندجمله ای زیر هستند،

$$g(x) = x^3 - (7n-15)x^2 + (14n^2-63n+72)x - (8n^3-52n^2+108n-68).$$

برهان. گیریم v_1 رأس مرکزی از گراف ستاره $K_{1,n-1}$ و e یالی باشد که دو رأس آویخته w_1 و w_2 را به هم متصل می کند. بنابراین مجموعه رؤس از S_n^* را می توان به صورت $V(S_n^*) = \{v_1, w_1, w_2, u_1, u_2, \dots, u_{n-3}\}$ برچسب گذاری کرد. به آسانی دیده می شود که $Tr(u_i) = 2n-3$ و $Tr(w_1) = Tr(w_2) = 2n-4$ ، $Tr(v_1) = n-1$ برای $i = 1, 2, \dots, n-3$. با استفاده از این برچسب گذاری، ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله S_n^* به فرم زیر است

$$D^Q(S_n^*) = \begin{pmatrix} X & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta^t & 2n-3 & 2 & \dots & 2 \\ \beta^t & 2 & 2n-3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta^t & 2 & 2 & \dots & 2n-3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} n-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2n-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2n-4 \end{pmatrix} \text{ و } \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} \text{ که است.}$$

با استفاده از گزاره ۴.۱.۵، با $C = [2]$ ، $B = [2n-3]$ و $c = n-3$ نتیجه می شود که $\sigma(D^Q(S_n^*)) = \sigma^{[n-4]}(B - C) \cup \sigma(M_1) = \sigma^{[n-4]}([2n-3-2]) \cup \sigma(M_1)$ به طوری که $M_1 = \begin{pmatrix} X & \sqrt{n-3}\beta \\ \sqrt{n-3}\beta & 4n-11 \end{pmatrix}$ با تعویض دومین و آخرین ستون از M_1 و سپس دومین و

آخرین سطر از ماتریس حاصل شده، ماتریسی مشابه با M_1 حاصل می‌شود.
در ماتریس حاصل شده قرار می‌دهیم $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{n-3} \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} n-1 & \sqrt{n-3} \\ \sqrt{n-3} & 4n-11 \end{pmatrix}$ ، $C = [1]$ ، $B = [2n-4]$ و $c = 2$ در گزاره ۴.۱.۵ که نتیجه می‌دهد

$$\sigma(M_1) = \sigma^{[1]}(B - C) \cup \sigma(M_2) = \sigma^{[1]}([2n-4-1]) \cup \sigma(M_2)$$

که $M_2 = \begin{pmatrix} n-1 & \sqrt{n-3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{n-3} & 4n-11 & 2\sqrt{2(n-3)} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2(n-3)} & 2n-3 \end{pmatrix}$ است. بنابراین سه مقدار ویژه باقی‌مانده، از ماتریس M_2 حاصل می‌شوند که ریشه‌های چند جمله‌ای

$$g(x) = x^3 - (7n-15)x^2 + (14n^2 - 63n + 72)x - (8n^3 - 52n^2 + 108n - 68)$$

□

هستند و اثبات کامل می‌شود.

گزاره زیر کران بالایی برای مجموع k تا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت $S_k^+(G)$ را ارائه می‌دهد. (ببینید [۹۳]).

لم ۶.۱.۵. [۹۳] اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 6$ و اندازه $m(G)$ باشد، آنگاه برای $1 \leq k \leq n$ داریم،

$$S_k^+(G) \leq 2m(G) - n + 2k - \frac{2k-2}{n}.$$

برای یک گراف همبند G از مرتبه n ، اندازه m و قطر ۲ حدس ما به شرط

$$m \geq \frac{\sqrt{144n+12}}{6} \left(\frac{4n}{3} + \frac{1}{6} \right) - 3n$$

قضیه ۸.۱.۵. اگر G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 6$ ، اندازه m و قطر ۲ باشد، آنگاه برای $k \geq 2$ اگر $m \geq \frac{\sqrt{144n+12}}{6} \left(\frac{4n}{3} + \frac{1}{6} \right) - 3n$ باشد، حدس ۱.۱.۵ برقرار است.

برهان. گیریم G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 2$ ، اندازه m و قطر ۲ باشد. واضح است که هر دو رأس یا همسایه هستند یا یک همسایه مشترک دارند. بنابراین برای همه رأس‌های $v \in V(G)$ داریم، $Tr(v) = d(v) + 2(n-1-d(v)) = 2n-1-d(v)$ و بنابراین عدد انتقال $\sigma(G)$ برابر با $n^2 - n - m$ است.

با استفاده از گزاره‌های ۳.۱.۵ و ۶.۱.۵ اگر $k^3 + 3k^2 - (12n-2)k + 6m + 6n \geq 0$ باشد، آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} M_k(G) &\leq k(2n-2) + S_k^+(\overline{G}) \\ &\leq k(2n-2) + 2m(\overline{G}) - n + 2k = 2nk + n(n-2) - 2m \\ &\leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = n^2 - n - m + \frac{k(k^2 + 3k + 2)}{6}. \end{aligned}$$

چند جمله‌ای $f(k) = k^3 + 3k^2 - (12n - 2)k + 6n + 6m$ را برای $k \in [2, n - 2]$ در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که $f(k)$ تابعی صعودی روی بازه $[-\frac{6+\sqrt{144n+12}}{6}, n - 2]$ و تابعی نزولی روی $[2, \frac{-6+\sqrt{144n+12}}{6}]$ است. اکنون با محاسبه مستقیم به آسانی دیده می‌شود که $f(\frac{-6+\sqrt{144n+12}}{6}) \geq 0$ نتیجه می‌دهد $m \geq \frac{\sqrt{144n+12}}{6}(\frac{4n}{3} + \frac{1}{9}) - 3n$ و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

گیریم Γ_n مجموعه‌ای از همه گراف‌های همبندی باشد که حدس اشرف^۴ برقرار است. بنابراین همه درخت‌های n رأسی، گراف‌های تک دور، گراف‌های دو بخشی و گراف‌های منتظم عضو خانواده Γ_n هستند. برای خانواده‌ی از گراف‌های Γ_n ، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۹.۱.۵. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $28 \leq n$ ، اندازه m ، قطر ۲ و فرض کنید $\bar{G}$ مکمل G باشد. اگر $\bar{G} \in \Gamma_n$ ، آنگاه برای $k \geq 2$ حدس ۱.۱.۵ برقرار است.

برهان. گیریم G گرافی همبند از مرتبه $28 \leq n$ با m یال و قطر ۲، هم چنین $\bar{G}$ مکمل G باشد. از آنجا که قطر G برابر ۲ است بنابراین $\sigma(G) = n^2 - n - m$. هم چنین $\bar{G} \in \Gamma_n$ نتیجه می‌دهد

$$S_k^+(\bar{G}) \leq m(\bar{G}) + \binom{k}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - m + \frac{k(k+1)}{2}. \quad (3.5)$$

با استفاده از گزاره ۳.۱.۵ و نامساوی (۳.۵) اگر $k^3 - (12n - 11)k + 3n(n-1) \geq 0$ باشد، آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} M_k(G) &\leq k(2n - 2) + S_k^+(\bar{G}) \\ &\leq k(2n - 2) + \frac{n(n-1)}{2} - m + \frac{k(k+1)}{2} \\ &\leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = n^2 - n - m + \frac{k(k^2 + 3k + 2)}{6}. \end{aligned}$$

چند جمله‌ای $f(k) = k^3 - (12n - 11)k + 3n(n-1)$ را برای $k \in [2, n - 2]$ در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که $f(k)$ تابعی صعودی روی $[\sqrt{4n - \frac{11}{3}}, n - 2]$ و تابعی نزولی روی $[2, \sqrt{4n - \frac{11}{3}}]$ است. با محاسبه مستقیم به آسانی دیده می‌شود که $f(\sqrt{4n - \frac{11}{3}}) \geq 0$ نتیجه می‌دهد $9n^4 - 274n^3 + 713n^2 - \frac{1936n}{3} + \frac{5324}{27} \geq 0$ که برای همه $n \geq 28$ برقرار است. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم که حدس برای همه گراف‌های همبند با قطر ۲ و داشتن ماکزیمم درجه برقرار است.

قضیه ۱۰.۱.۵. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 6$ ، اندازه m و قطر ۲ باشد.

۱- اگر ماکزیمم درجه G برابر $d_1 = n - 1$ باشد، آنگاه حدس ۱.۱.۵ برای همه $n \geq 19$ برقرار است.

۲- اگر ماکزیمم درجه G برابر $d_1 = n - 2$ باشد، آنگاه حدس ۱.۱.۵ برای همه $n \geq 24$ برقرار

است.

۳- برای $n \geq 91$ حدس ۱.۱.۵ برای همه گراف‌های همبند برقرار است.

برهان. گیریم G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 6$ با m یال و ماکزیمم درجه $d_1 = n - 1$ باشد. واضح است که هر دو رأس در G یا مجاور هستند یا یک همسایه مشترک دارند. بنابراین برای همه $v \in V(G)$ داریم $Tr(v) = d(v) + 2(n - 1 - d(v)) = 2n - 1 - d(v)$ و بنابراین عدد انتقال گراف برابر $\sigma(G) = n^2 - n - m$ است. برای $k = n, n - 1$ نتیجه از قضیه ۵.۱.۵ حاصل می‌شود. از آنجا که ماکزیمم درجه گراف $n - 1$ است، نتیجه می‌شود $G \cong K_{1, n-1}$ یا $G \cong K_{1, n-1}$ زیرگراف فراگیر سره از G است. ابتدا فرض می‌کنیم که $G \cong K_{1, n-1}$. بنابراین مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله از $K_{1, n-1}$ عبارتند از

$$\left\{ \frac{5n - 8 + \sqrt{9n^2 - 32n + 32}}{2}, (2n - 5)^{[n-2]}, \frac{5n - 8 - \sqrt{9n^2 - 32n + 32}}{2} \right\} \quad (4.5)$$

و $m = n - 1$ یال دارد. در نتیجه اگر $k^3 + 3k^2 - (12n - 32)k + 6n(n - 2) \geq 0$ ، که برای همه n و برای همه $k \in [2, n - 1]$ درست است، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} M_k(K_{1, n-1}) &= \frac{5n - 8 + \sqrt{9n^2 - 32n + 32}}{2} + (k - 1)(2n - 5) \\ &\leq 2n + 1 + k(2n - 5) \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} \\ &= n^2 + 1 + \frac{k(k^2 + 3k + 2)}{6}. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید که $K_{1, n-1}$ یک زیرگراف فراگیر سره از G است، از قضیه ۳.۱.۵ نتیجه می‌گیریم،

$$M_k(G) \leq M_k(K_{1, n-1}). \quad (5.5)$$

با استفاده از (۴.۵) و نامساوی (۵.۵) داریم

$$\begin{aligned} M_k(G) &\leq \frac{5n - 8 + \sqrt{9n^2 - 32n + 32}}{2} + (k - 1)(2n - 5) \leq 2n - \frac{3}{2} + k(2n - 5) \\ &\leq \frac{6(n^2 - n - m) + k^3 + 3k^2 + 2k}{6}, \end{aligned}$$

اگر

$$k^3 + 3k^2 - (12n - 32)k + 6n^2 - 18n - 6m + 9 \geq 0. \quad (6.5)$$

هم چنین هنگامی که قطر گراف برابر ۲ است، آنگاه $m \leq \frac{n(n-1)}{2} - 1$. بر این اساس، نتیجه می‌دهد $k^3 + 3k^2 - (12n - 32)k + 3n(n - 5) + 15 \geq 0$. اکنون روی $k \in [2, n - 1]$ چندجمله‌ای $f(k) = k^3 + 3k^2 - (12n - 32)k + 3n(n - 5) + 15$ را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که

تابع $f(k)$ روی $[\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3}, n-1]$ نزولی و روی $[\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3}, n-1]$ صعودی است. برای کامل شدن اثبات باید نشان دهیم که $f(\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3}) \geq 0$. اکنون $f(\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3}) \geq 0$ نتیجه می‌دهد $3(\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3})^2 + 3n^2 - 15n + 15 \geq (\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3})(12n - 32 - (\frac{-3+\sqrt{36n-87}}{3})^2)$ و هم چنین نتیجه می‌دهد $9n^2 - 9n - 45 \geq \sqrt{36n-87}(8n - \frac{58}{3})^2$ برای همه $n \geq 23$ همواره داریم $9n^4 - 274n^3 + 1775n^2 - \frac{13186}{3}n + \frac{103631}{27} \geq 0$. پس ما نشان دادیم که

$$M_k(G) \leq 2n + 1 + k(2n - 5) \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3},$$

برای همه $n \geq 23$.

اگر قرار دهیم $m \leq \frac{n(n-1)}{4} - 18$ در (۶.۵)، آنگاه با فرایند مشابه بالا نتیجه می‌شود که حدس ۱.۱.۵ برای $n \geq 6$ برقرار است.

برای $n = 22$ اگر $k^3 + 3k^2 - 232k + 2772 - 6m \geq 0$ باشد، آنگاه داریم

$$M_k(G) \leq 39k + 42/5 \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} - m + 462.$$

چندجمله‌ای $f(k) = k^3 + 3k^2 - 232k + 2772 - 6m$ ، $k \in [2, 21]$ را در نظر بگیرید، به آسانی دیده می‌شود که $f(k)$ روی بازه $[2, 7/85^\circ]$ نزولی و روی بازه $[7/85^\circ, 21]$ صعودی است. از آنجا که $231 = \frac{n(n-1)}{4} - 1$ بنابراین $m \leq \frac{n(n-1)}{4} - 1$ و در نتیجه $f(k) > 0$ برای همه k . پس برای $n = 22$ نتیجه ثابت می‌شود. برای $n = 21$ با استفاده از قضیه ۳.۱.۵ و گزاره ۵.۱.۵ اگر $k^3 + 3k^2 - 220k + 2279/4 - 6m \geq 0$ باشد، آنگاه داریم

$$M_k(G) \leq M_k(S_n^*) = 77/1584 + 37(k-1) \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} - m + 420.$$

چندجمله‌ای $f(k) = k^3 + 3k^2 - 220k + 2279/4 - 6m$ ، $k \in [2, 22]$ را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که $f(k)$ روی $[2, 7/6216]$ نزولی و روی $[7/6216, 20]$ صعودی است. بنابراین داریم $f(7/6216) = 1219/29 - 6m \geq 0$ که نتیجه می‌دهد $m \leq 203/21$. هم چنین قضیه ۸.۱.۵ نتیجه می‌دهد که حدس ۱.۱.۵ برای $n = 21$ و برای همه $m \geq 195/15$ برقرار است. با ترکیب کردن این نتایج با هم، نتیجه برای $n = 21$ برقرار است. به طور مشابه برای $n = 20$ داریم

$$M_k(G) \leq M_k(S_n^*) = 73/1497 + 35(k-1) \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} - m + 380,$$

اگر $k^3 + 3k^2 - 208k + 2051/10 - 6m \geq 0$ که برای $m \leq 180/23$ درست است. هم چنین قضیه ۸.۱.۵ نتیجه می‌دهد که برای $n = 20$ حدس ۱.۱.۵ برای همه $m \geq 181$ برقرار است. با ترکیب این‌ها با هم، حکم برای $n = 21$ نتیجه می‌شود.

برای $n = 19$ از مشاهدات بالا نتیجه می‌شود که حدس ۱.۱.۵ برای همه $m \leq 153$ برقرار است. بنابراین فرض کنیم که G گرافی است با $m \geq 14$ یال. از آنجا که ماکزیمم درجه $d_1 = 18$ ،

از اینرو دومین ماکزیمم درجه d_2 باید حداقل ۱۶ باشد (در غیر این صورت $m \geq 154$ که این غیر ممکن است). واضح است که گراف H_{19} (نشان داده شده در شکل ۱.۵) یک زیر گراف فراگیر از G است. به آسانی دیده می شود که مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله گراف H_{19} عبارتند از $\{66/9403, 33, 32/9999, 32^{[14]}, 19/5969, 17/4626\}$. با اسفاده از قضیه ۳.۱.۵ برای $k \geq 4$ نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} M_k(G) &\leq M_k(H_{19}) = 66/9403 + 2(33) + 32(k-3) \\ &\leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} - m + 342, \end{aligned}$$

اگر $6m \geq 0 - 1830/35 + 190k + k^3 + 3k^2 - 190k + 1830/35 - 6m \geq 0$ که برای $m \leq 165/05$ درست است. هم چنین قضیه ۸.۱.۵ نتیجه می دهد که برای $n = 19$ حدس برای همه $m \geq 165/30$ برقرار است. با ترکیب این ها، نتیجه برای $n = 19$ و $k \geq 4$ حاصل می شود. به طور مشابه برای $1 \leq k \leq 3$ به آسانی دیده می شود که حدس ۱.۱.۵ برقرار است.

۲- اگر ماکزیمم درجه $d_1 = n - 2$ باشد، آنگاه گراف H نشان داده شده در شکل ۱.۵ یک زیر گراف فراگیر از G است. ابتدا مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف H را به دست می آوریم. با برجسب گذاری مناسب رئوس H به آسانی دیده می شود که ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از H به صورت زیر نوشته می شود

$$D^Q(H) = \begin{pmatrix} n & 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2n-4 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 3n-8 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2n-4 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2n-2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2n-2 \end{pmatrix}.$$

با تکرار استفاده از گزاره ۴.۱.۵ مشاهده می کنیم که مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله از H عبارتند از $\{(2n-4)^{[n-5]}, 2n-6, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ که $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$ ریشه های چندجمله ای

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - (10n - 22)x^3 + (35n^2 - 162n + 200)x^2 - (50n^3 - 346n^2 + 808n - 608)x \\ &+ (24n^4 - 208n^3 + 632n^2 - 704n + 128) \end{aligned}$$

هستند. داریم

$$\begin{aligned} g(n-1) &= 4n^3 - 53n^2 + 222n - 301 > 0, \quad n \geq 7 \text{ برای همه} \\ g(n) &= -2n^3 + 24n^2 - 96n + 128 < 0, \quad n \geq 5 \text{ برای همه} \\ g(2n-8) &= -4n^3 + 56n^2 - 320n + 896 < 0, \quad n \geq 8 \text{ برای همه} \\ g(2n-6) &= 8n^2 - 88n + 224 > 0, \quad n \geq 7 \text{ برای همه} \\ g(3n-13) &= -8n^3 + 255n^2 - 2286n + 6451 < 0, \quad n \geq 19 \text{ برای همه} \\ g(3n-18) &= 2n^3 + 260n^2 - 5936n + 30656 > 0, \quad n \geq 12 \text{ برای همه} \\ g(4n-2) &= -20n^3 + 432n^2 + 504n - 448 < 0, \quad n \geq 23 \text{ برای همه} \\ g(4n+2) &= 4n^3 + 856n^2 + 3768n + 2336 > 0, \quad n \geq 1 \text{ برای همه.} \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $x_1 \in [4n-2, 4n+2]$, $x_2 \in [3n-18, 3n-13]$, $x_3 \in [2n-8, 2n-6]$ و $x_4 \in [n-1, n]$ با استفاده از قضیه ۳.۱.۵ برای $k=2$ دیده می‌شود که

$$M_2(G) \leq M_2(H) = 7n - 11 \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} + n^2 - n - m,$$

اگر $m \leq n(n-8) + 15$ که برای همه $n \geq 13$ همیشه درست است. دوباره برای $k \geq 3$ با استفاده از قضیه ۳.۱.۵ اگر $k^3 + 3k^2 - (12n-26)k + 6n^2 - 24n - 6m + 18 \geq 0$ باشد، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} M_k(G) &\leq M_k(H) = 7n - 11 + (k-2)(2n-4) \\ &\leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} + n^2 - n - m. \end{aligned}$$

تابع $f(k) = k^3 + 3k^2 - (12n-26)k + 6n^2 - 24n - 6m + 18$ را روی $k \in [3, n-1]$ در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که $f(k)$ روی $[\frac{-6+\sqrt{144n-276}}{6}, n-1]$ صعودی و روی $[\frac{-6+\sqrt{144n-276}}{6}, 3]$ نزولی است. با محاسبه مستقیم می‌بینیم که $f(\frac{-6+\sqrt{144n-276}}{6}) \geq 0$ نتیجه می‌دهد

$$m \leq n^2 - 2n - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{36864n^3 - 211968n^2 + 406272n - \frac{778688}{3}}. \quad (7.5)$$

با قرار دادن $m \leq \frac{n(n-1)}{3} - 1$ به آسانی دیده می‌شود که نامساوی (۷.۵) برای همه $n \geq 29$ برقرار است. اگر $n = 28$ آنگاه کران بالای (۷.۵) نتیجه می‌دهد که برای $m \leq 372/76$ برقرار است. به طور مشابه با استفاده از کران بالای (۷.۵) و کران پایین داده شده از قضیه ۸.۱.۵ به آسانی دیده می‌شود که برای $n = 24, 25, 26, 27$ حدس ۱.۱.۵ برقرار است.

۳- نشان داده شده است که گراف $K_{1,n-1}$ دارای ماکزیمم شعاع طیفی لاپلاسین بدون علامت

فاصله از بین همه گراف‌های همبند با قطر ۲ است. بنابراین برای یک گراف همبند G یا قطر ۲ داریم

$$\rho_1(G) \leq \rho_1(K_{1,n-1}) = \frac{5n-8 + \sqrt{9n^2 - 32n + 32}}{2} < 4n - \frac{13}{2}. \quad (۸.۵)$$

برای $k \geq 2$ از (۸.۵) اگر $k^3 + 3k^2 - (24n - 41)k + 6n^2 - 6n - 6m \geq 0$ باشد، آنگاه نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} M_k(G) &\leq k\rho_1(G) \leq k\rho_1(K_{1,n-1}) < k(4n - \frac{13}{2}) \\ &\leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = n^2 - n - m + \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}. \end{aligned}$$

اگر $m \leq \frac{n(n-1)}{4}$ آنگاه با فرایند مشابه بخش (۱) به آسانی دیده می‌شود که این نامساوی برای همه $n \geq 91$ برقرار است. از آنجا که با استفاده از قضیه ۸.۱.۵ حدس ۱.۱.۵ همواره برای $m \geq \frac{\sqrt{144n+12}}{6}(\frac{4n}{3} + \frac{1}{9}) - 3n$ برقرار است، بنابراین اگر برای $n \geq 91$ ما نشان دهیم که $\frac{\sqrt{144n+12}}{6}(\frac{4n}{3} + \frac{1}{9}) - 3n \leq \frac{n(n-1)}{4}$ آنگاه نتیجه حاصل می‌شود. از $\frac{\sqrt{144n+12}}{6}(\frac{4n}{3} + \frac{1}{9}) - 3n \leq \frac{n(n-1)}{4}$ نتیجه می‌گیریم

$$(6n(n-11))^2 \geq (144n+12)(\frac{4n}{3} + \frac{1}{9})^2$$

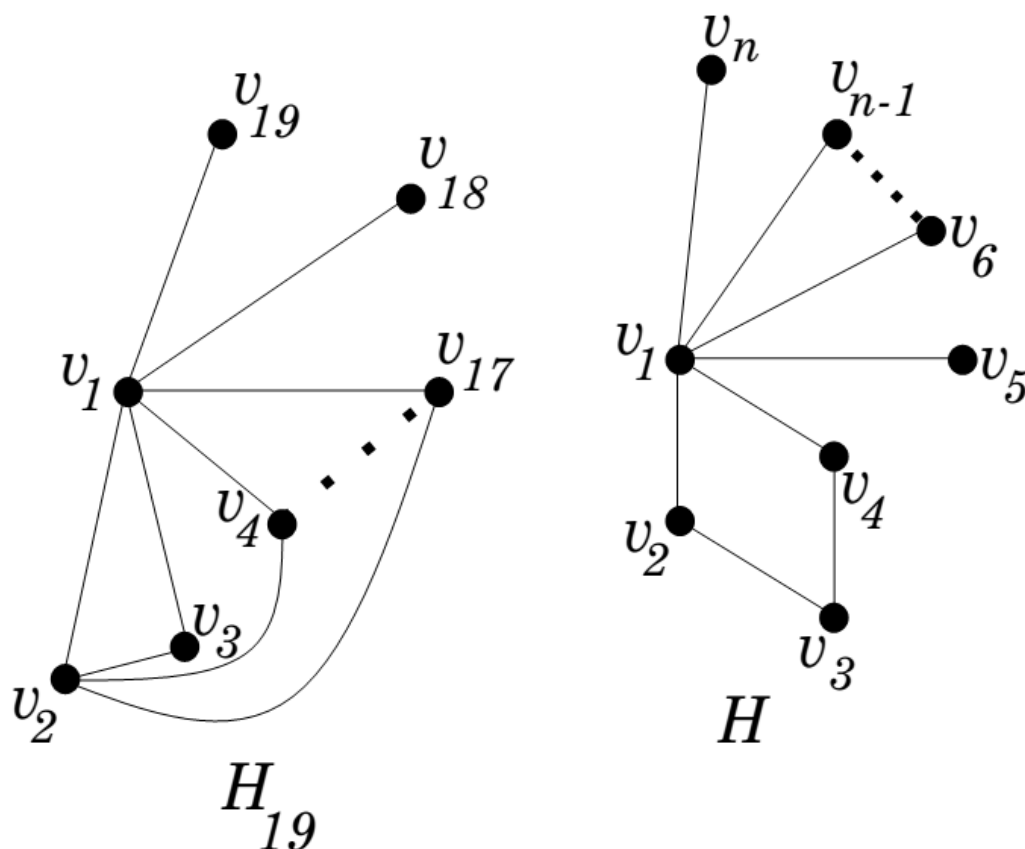
که نتیجه می‌دهد $9n^4 - 826n^3 + 833n^2 - \frac{64}{3}n + \frac{16}{27} \geq 0$ که برای $n \geq 91$ همیشه درست است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

گراف آستانه‌ای^۵ گرافی است که هیچ زیرگراف ایجاد شده یکرخت با P_4 یا C_4 یا $2K_2$ را نداشته باشد. یک گراف آستانه‌ای را یک گراف ماکزیمم درجه می‌نامند. گراف‌های آستانه‌ای به طور بازگشتی با استفاده از دو عملیات (شروع با یک رأس منفرد) ساخته می‌شوند: (۱) اضافه کردن یک رأس احاطه‌گری (مجاور به همه رأس‌های قبلی) یا (۲) اضافه کردن یک رأس منفرد (منفرد از همه رأس‌های قبلی). بنابراین می‌توانیم گراف آستانه‌ای روی n رأس با استفاده از دنباله دوتایی $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ نشان دهیم. در اینجا $2 \leq i \leq n$ ، b_i برابر صفر است هرگاه v_i با عملیات (۲) اضافه شده باشد و b_i برابر یک است هرگاه v_i با عملیات (۱) اضافه شده باشد. این نمایش را دنباله ایجاد می‌نامند. برای آسان‌تر کردن، $\circ$ را به عنوان اولین کاراکتر از این رشته استفاده می‌کنیم که نشان‌دهنده اولین رأس از گراف است. در این روش تعداد کاراکترهای ۱ در این رشته، تریس^۶ گراف نامیده می‌شود، نشان‌دهنده تعداد رئوس احاطه‌گری در ساختارش است. از این تعریف واضح است که گراف آستانه‌ای همیشه دارای یک رأس یکتایی با درجه $n-1$ است. بنابراین نتیجه از قضیه ۱۰.۱.۵ (۱) حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۱.۵. حدس برای گراف‌های آستانه‌ای از مرتبه $n \geq 19$ برقرار است.

⁵Threshold

⁶Trace



شکل ۱.۵: گراف H_{19} و گراف H از قضیه ۱۰.۱.۵.

گراف G را یک گراف قطعه‌ای^۷ نامند اگر بتوان مجموعه رئوس آن را به مجموعه‌های V_1 و V_2 طوری افراز کرد که گراف القا شده روی V_1 یک خوشه و روی V_2 یک مجموعه مستقل باشد. $(V_1; V_2)$ به افراز آن اشاره دارد. از تعریف نتیجه می‌شود که مکمل و هر زیرگراف تولید شده از گراف قطعه‌ای یک گراف قطعه‌ای است. یک گراف قطعه‌ای کامل گرافی است قطعه‌ای که هر رأس از V_1 با هر رأس از V_2 مجاور است. از این تعریف واضح است که یک گراف قطعه‌ای همیشه با قطر دو یا سه است. بنابراین نتیجه زیر از قضیه ۱۰.۱.۵ (۱) حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۱.۵. حدس برای گراف‌های قطعه‌ای با قطر دو از مرتبه $n \geq 19$ برقرار است.

جمع^۸ دو گراف G_1 و G_2 که با نماد $G = G_1 \vee G_2$ نشان داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های شامل همه یال‌های از G_1 و G_2 و یال‌هایی که هر رأس از G_1 را به هر رأس از G_2 متصل می‌کند. از این تعریف واضح است که اگر یکی از گراف‌های G_1 یا G_2 رأسی احاطه‌گری داشته باشد، آنگاه $G = G_1 \vee G_2$ دارای یک رأس احاطه‌گری است. لذا نتیجه زیر از قضیه ۱۰.۱.۵ (۱) حاصل می‌شود.

نتیجه ۷.۱.۵. فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌هایی به ترتیب از مرتبه n_1 و n_2 و گیریم $G = G_1 \vee G_2$

⁷Split

⁸Join

گرافی از مرتبه $n = n_1 + n_2$ باشد. اگر G_1 یا G_2 دارای یک رأس احاطه‌گری باشد، آنگاه حدس برای همه $n \geq 19$ برقرار است.

اکنون روی گراف‌های منتظم از لحاظ عدد انتقال بحث می‌کنیم. می‌دانیم که گراف پترسن یک گراف r -منتظم از لحاظ عدد انتقال با $r = 15$ است. با محاسبه مستقیم به آسانی دیده می‌شود که مقادیر ویژه لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف پترسن عبارت است از $\{3^0, 15^{[4]}, 12^{[5]}\}$ و عدد انتقال آن $\sigma(G) = 75$ است. اکنون به آسانی می‌توان گراف پترسن را مورد بررسی قرار داد که حدس برای آن برقرار باشد. نتیجه زیر شرایطی را به ما می‌دهد که گراف r -منتظم از لحاظ عدد انتقال در حدس ۱.۱.۵ صدق کنند.

قضیه ۱۱.۱.۵. فرض کنید G یک گراف همبند r -منتظم از لحاظ عدد انتقال از مرتبه $n \geq 6$ باشد.

۱- اگر قطر گراف دو باشد، آنگاه حدس ۱.۱.۵ برای همه $(\frac{4}{3} + \frac{1}{9n})$ با $r \leq 2n + 4 - \frac{\sqrt{144n+12}}{3}$ و برای هر r با $n \geq 91$ برقرار است.

۲- اگر $k \leq \frac{n}{2} - \gamma^+$ که γ^+ مثبت‌های ماتریس فاصله از گراف G است، آنگاه حدس ۱.۱.۵ برای هر r برقرار است.

۳- اگر $\gamma^+ \leq \frac{n+2}{6} - \sqrt{2r+12}(\frac{1}{3} + \frac{1}{6r})$ که γ^+ مثبت‌های ماتریس فاصله از گراف G است، آنگاه حدس ۱.۱.۵ برای هر r برقرار است.

برهان. گیریم G یک گراف r -منتظم از لحاظ عدد انتقال از مرتبه $n \geq 6$ و $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف G باشند.

۱- اثبات این مطلب از قضیه ۸.۱.۵ و قضیه ۱۰.۱.۵ و این حقیقت که گراف r -منتظم از لحاظ عدد انتقال با قطر دو یک گراف $(2n-2-r)$ -منتظم است، نتیجه می‌شود.

۲- با استفاده از $\rho_i = r + \nu_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$M_k(G) = M_k(G) = \sum_{i=1}^k \rho_i = kr + \sum_{i=1}^k \nu_i. \quad (9.5)$$

می‌دانیم که $\nu_1 = r$ و $\sum_{i=1}^n \nu_i = 0$. بنابراین اگر γ^+ تعداد مقادیر ویژه مثبت ماتریس $D(G)$ باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^k \nu_i \leq \sum_{i=1}^{\gamma^+} \nu_i \leq \gamma^+ r$. با استفاده از معادله (۹.۵) اگر همواره رابطه $k^3 + 3k^2 - (6r-2)k + 3r(n-6\gamma^+) \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه داریم،

$$M_k(G) = kr + \sum_{i=1}^k \nu_i \leq r(k + \gamma^+) \leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{nr}{2} + \frac{k(k^2 + 3k + 2)}{6}.$$

به آسانی دیده می‌شود که این نامساوی برای همه $k \leq \frac{n}{2} - \gamma^+$ برقرار است و بنابراین در این حالت اثبات کامل می‌شود.

۲- با فرایند مشابه بخش (۲) داریم $k^3 + 3k^2 - (6r-2)k + 3r(n-6\gamma^+) \geq 0$. چندجمله‌ای

دیده می شود که این تابع روی $k \in [\frac{-6+\sqrt{72r+12}}{6}, n-1]$ نزولی و روی $k \in [2, \frac{-6+\sqrt{72r+12}}{6}]$ صعودی است. اکنون به آسانی دیده می شود که $f(\frac{-6+\sqrt{72r+12}}{6}) \geq 0$ نتیجه می دهد که $3nr - 18\gamma^+r + 6r - \sqrt{72r+12}(\frac{r}{3} + \frac{1}{6}) \geq 0$ و بنابراین حکم حاصل می شود. $\square$

مثال ۱.۱.۵. گیریم $G \cong C_n$ ، $n \geq 4$. می دانیم که G گرافی است r - منتظم از لحاظ عدد انتقال با $r = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ است [۶]. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از G برای $n = 2t$ عبارتند از $\{\frac{n}{4}, \frac{n}{4}^{[t-1]}, \frac{n}{4} - \csc^2(\frac{(2j-1)\pi}{n}), j = 1, 2, \dots, t\}$ و برای $n = 2t+1$ عبارتند از $\{\frac{n-1}{4}, \frac{n-1}{4} - \frac{1}{4} \sec^2(\frac{j\pi}{n}), \frac{n-1}{4} - \frac{1}{4} \csc^2(\frac{(2j-1)\pi}{n}), j = 1, 2, \dots, t\}$ و عدد انتقال آن برابر $\sigma(G) = \lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor$ است. نشان خواهیم داد که حدس برای $n = 2t$ برقرار است. از آنجا که در ماتریس فاصله $\gamma^+ = 1$ ، از قسمت دوم قضیه ۱۰.۱.۵ نتیجه می شود که حدس همیشه برای $k \leq \frac{n}{4} - 1 = t - 1$ برقرار است. برای $k = t$ به آسانی با محاسبه مستقیم دیده می شود که حدس درست است. برای $2t \leq k \leq t+1$ داریم

$$\begin{aligned} M_k(G) &= \frac{n}{4} + (t-1)\frac{n}{4} + (k-t)\frac{n}{4} - \sum_{j=1}^{k-t} \csc^2(\frac{(2j-1)\pi}{n}) \\ &\leq \sigma(G) + \binom{k+2}{3} = \frac{n}{\lambda} + \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} \end{aligned}$$

که رابطه $\sum_{j=1}^{k-t} \csc^2(\frac{(2j-1)\pi}{n}) \geq k(\frac{n}{4} + 1) - \frac{n}{\lambda} - \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$ را نتیجه می دهد. اگر برای همه $k \geq \frac{n}{4} + 1$ نشان دهیم $k(\frac{n}{4} + 1) - \frac{n}{\lambda} - \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} \leq 0$ ، آنگاه نتیجه حاصل می شود. گیریم $1 \leq \alpha \leq \frac{n}{4}$ ، $k = \frac{n}{4} + \alpha$. برای این مقدار k داریم $k(\frac{n}{4} + 1) - \frac{n}{\lambda} - \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} \leq 0$ که نتیجه می دهد $(\frac{n}{4} + \alpha)(\frac{n}{4} + 1) - \frac{n}{\lambda} - \frac{(\frac{n}{4} + \alpha)^3 + 3(\frac{n}{4} + \alpha)^2 + 2(\frac{n}{4} + \alpha)}{6} \leq 0$ و بنابراین

$$(32\alpha + 16n - 24n\alpha) + 6an^2 - 8a^3 - 24a^2 - 12na^2 - 6n^2 - n^3 \leq 0.$$

از آنجایی که $24n\alpha \geq 16n + 32\alpha - 24n\alpha \leq 0$ بنابراین $6an^2 - 8a^3 - 24a^2 - 12na^2 - 6n^2 - n^3 \leq 0$ که نتیجه می دهد

$$8a^3 + (12n + 24)a^2 - 6n^2a + 6n^2 + n^3 \geq 0.$$

تابع $f(\alpha) = 8a^3 + (12n + 24)a^2 - 6n^2a + 6n^2 + n^3$ ، $\alpha \in [1, \frac{n}{4}]$ را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می شود که $f(\alpha)$ روی بازه $[1, \beta]$ صعودی و روی $[\beta, \frac{n}{4}]$ نزولی است به طوری که $\beta = \frac{1}{4\lambda} \sqrt{1152n^2 + 2304n + 2304} - \frac{n}{4} - 1$. بنابراین اگر $f(\beta) \geq 0$ ، آنگاه نتیجه حاصل می شود. از $f(\beta) \geq 0$ نتیجه می گیریم $\beta(6n^2 - 8\beta^2) \geq \beta^2 + n^3 + 6n^2 \geq \beta(12n + 24)\beta^2 + n^3 + 6n^2 \geq \frac{1}{4} \sqrt{1152n^2 + 2304n + 2304}(\frac{n}{4} + n + 1) + 6n^2 + 18n^2 + 30n + 16 \geq 4n^6 + 24n^5 + 108n^4 + 248n^3 + 324n^2 + 192n \geq 0$ که همیشه درست است.

مثال ۲.۱.۵. گراف^۹ $CP(t)$ گرافهای چندگانه کامل $K_{2,2,\dots,2}$ روی t بخش که هر بخش از مرتبه ۲ است، می باشد. واضح است که گراف $CP(t)$ یک گراف r - منتظم از لحاظ عدد انتقال با $r = 2t$ و مرتبه $n = 2t$ است. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از گراف $CP(t)$ عبارتند از $\{4t, 2t^{[t-1]}, 2t - 2^{[t]}\}$ و عدد انتقال آن $\sigma(CP(t)) = 2t^2$. از آنجا که $\gamma^+ = 1$ در ماتریس فاصله، آنگاه از دومین قسمت قضیه ۱۰.۱.۵ نتیجه می شود که حدس همیشه برای $k \leq t-1$ برقرار است. برای $k = t$ با محاسبه مستقیم به آسانی دیده می شود که حدس درست است. برای $t+1 \leq k \leq 2t$ داریم $M_k(CP(t)) = 4t + k(2t-2) \leq \sigma(CP(t)) + \binom{k+2}{3}$ که نتیجه می دهد $k^3 + 3k^2 - (12t-14)k + 12t(t-2) \geq 0$. قرار می دهیم $k = t + \alpha$ ، $1 \leq \alpha \leq t$ و در نتیجه $0 \leq t^3 + 3t^2 - 10t + \alpha^3 + (3t+3)\alpha^2 + (3t^2-6t+13)\alpha + t^3 + 3t^2 - 10t \geq 0$ که برای همه $\alpha \geq 1$ درست است. بنابراین حدس ۱.۱.۵ برای همه گرافهای $CP(t)$ برقرار است.

^۹cocktail party graph

فصل ۶

پیشنهادهایی برای برخی از کارهای آتی

در این فصل پیشنهادهایی را برای برخی از کارهایی که در آینده می‌توان انجام داد را ارائه می‌دهیم. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که خروج از مرکز $e(v)$ از رأس v در $V(G)$ به صورت

$$e(v) = \max \{d(u, v) \mid u \in V(G)\}$$

تعریف می‌شود. قطر گراف G که با $diam(G)$ نشان داده می‌شود برابر است با ماکزیمم فاصله بین رئوس گراف G و از این رو رابطه $diam(G) = \max \{e(v) \mid v \in V(G)\}$ برقرار است. هم‌چنین شعاع گراف با نماد $rad(G)$ نشان داده می‌شود و به صورت $rad(G) = \min \{e(v) \mid v \in V(G)\}$ تعریف می‌شود. مسیر خروج از مرکز از یک رأس $v \in V(G)$ ، نشان داده شده با $P(v)$ ، مسیری است به طول که $e(v)$ که v را به رأس خروج از مرکزش وصل می‌کند.

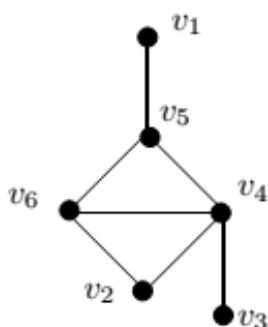
رأس v با $e(v) = diam(G)$ را رأس پیرامونی^۱ می‌نامند [۷۶]. با استفاده از رأس‌های پیرامونی، ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله پیرامونی را می‌توان تعریف کرد.

گیریم $V_p(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ مجموعه رئوس پیرامونی G باشد. قرار می‌دهیم $|V_p(G)| = k$ به طوری که $2 \leq k \leq n$. فرض کنید $D_p(G) = (d_{ij})_{i,j \in V_p(G)}$ و Tr_p نشان دهنده ماتریس قطری که درایه‌های قطری آن $tr_i = \sum_{j \in V_p(G)} d_{ij}$ هستند. بر این اساس می‌توان ماتریس لاپلاسین

¹Peripheral vertex

بدون علامت فاصله پیرامونی را تعریف کرده و کران‌هایی برای شعاع طیفی آن ارائه داد. برای مثال فرض کنید G گراف نمایش داده در شکل ۱.۶ باشد، آنگاه داریم

$$D_p^Q(G) = \begin{bmatrix} . & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 6 & 3 & 3 \\ v_2 & 3 & 5 & 2 \\ v_3 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$



شکل ۱.۶: گراف G از مرتبه $n = 6$ با $k = 3$ رأس پیرامونی.

گراف G از مرتبه $n = 6$ با $k = 3$ رأس پیرامونی هم چنین در [۷۷] انرژی فاصله پیرامونی تعریف و کران‌هایی برای آن ارائه شده است. بنابراین می‌توان انرژی لاپلاسین بدون علامت فاصله پیرامونی را تعریف کرده و کران‌های بالا و پایینی را برای آن تعیین کرد. هم چنین ارتباط این انرژی فاصله پیرامونی مورد بررسی قرار گیرد.

اندیس استرادا^۲ اولین بار به صورت $EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}$ تعریف شد که $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت هستند. مراجع [۳۸] و [۳۹] را ببینید. بعدها اندیس استرادا فاصله در [۴۳] به صورت $DEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\mu_i}$ تعریف شد که $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ مقادیر ویژه ماتریس فاصله هستند و برخی خواص آن مورد بررسی قرار گرفت. بر این اساس می‌توان اندیس استرادا لاپلاسین بدون علامت فاصله را تعریف کرده و به بررسی خواص آن بپردازیم. هم چنین می‌توان ارتباطی بین این اندیس با اندیس استرادا فاصله و اندیس استرادا مجاورت را تعیین کرد.

ماتریس هراری^۳ $RD(G)$ از گراف G ، که ماتریس معکوس فاصله^۴ هم نامیده می‌شود، ماتریس (RD_{ij}) از مرتبه $n \times n$ است، به طوری که (i, j) امین درایه‌ی آن برای $i \neq j$ برابر با $\frac{1}{d_{ij}}$ است و در غیر این صورت ۰ است. اندیس هراری^۵ از گراف G با نماد $H(G)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر [۸۰] تعریف می‌شود،

$$H(G) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n RD_{ij} = \sum_{i < j} \frac{1}{d_{ij}}.$$

^۲Estrada index

^۴Reciprocal distance matrix

^۵Harary index

^۳Harary matrix

عدد انتقال معکوس $Tr'_G(v)$ از رأس v به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Tr'_G(v) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d_G(u, v)}, \quad u \neq v.$$

هم‌چنین $Tr'(G)$ یک ماتریس قطری به صورت زیر است،

$$Tr'(G) = \text{diag}[Tr'_G(v_1), Tr'_G(v_2), \dots, Tr'_G(v_n)].$$

گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال معکوس نامیده می‌شود هرگاه $Tr'_G(v)$ برای هر رأس $v \in V(G)$ ثابت باشد. واضح است $H(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} Tr'_G(v)$. بر این اساس می‌توان ماتریس معکوس لاپلاسین بدون علامت فاصله را تعریف کرده و نشان داد که این ماتریس تحویل ناپذیر، نامنفی، متقارن و نیمه‌معین مثبت است و بنابراین کران‌هایی را برای شعاع طیفی این ماتریس ارائه داد. هم‌چنین می‌توان انرژی این ماتریس را تعریف کرده و تعدادی کران بالا و پایین برای آن تعیین کرد.

همان طوری که در ابتدای مقدمه اشاره شد، عدد انتقال یک گراف همبند G برابر است با اندیس وینر گراف G . اندیس وینر $W(G)$ ^۶ اولین اندیس توپولوژیک^۷ مورد استفاده در شیمی بود. این شاخص در سال ۱۹۴۷ اوسط هارولد وینر^۸ به عنوان عدد مسیری برای شناسایی الکن‌ها^۹ معرفی شد. به زبان شیمیایی اندیس وینر برابر جمع همه کوتاه‌ترین مسیرهای زنجیری کربن-کربن در یک مولکول و به زبان نظریه گراف، اندیس وینر برابر جمع همه‌ی کوتاه‌ترین فاصله‌ها در یک گراف می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر، خواندن مقالات [۳۶، ۳۷] نوشته شده توسط دویرین^{۱۰} و همکارانش را پیشنهاد می‌کنیم.

بنابه تعریف اندیس وینر گراف G که با $W(G)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از،

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in V \times V} d(u, v).$$

بعد از آن، اندیس ابر وینر^{۱۱} $WW(G)$ توسط کلین^{۱۲} به عنوان تعمیمی از اندیس وینر به صورت زیر تعریف شد [۶۷]،

$$WW(G) = \frac{1}{2} W(G) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d^2(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} (d(u, v) + d^2(u, v)).$$

هم‌چنین ما نمادهای $d(u|G)$ و $d^2(u|G)$ را به ترتیب به صورت‌های $d(u, v) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)$ و $d^2(u|G) = \sum_{v \in V(G)} d^2(u, v)$ تعریف می‌کنیم. تاکنون اندیس ابر وینر برای گراف‌های خاصی مانند گراف‌های کامل K_n ، گراف‌های کامل دوبخشی $K_{m,n}$ ، مسیرهای n رأسی P_n ، دورهای n رأسی C_n و تعدادی گراف‌های دیگر محاسبه شده است. برای هر درخت n رأسی همواره رابطه‌ی $WW(K_{n-1,1}) \leq WW(T) \leq WW(P_n)$ برقرار است (مرجع [۴۵] را ببینید).

⁶Wiener index

⁷Topological index

⁸Harold Wiener

⁹Alkanes

¹⁰Dobrynin

¹¹Hyper Wiener

¹²Klein

بنابراین می‌توان کران‌هایی برای اندیس وینر و اندیس ابر وینر برحسب تعداد رئوس، تعداد یال‌ها، خروج از مرکز و عدد استقلال گراف ارائه داد.

اکنون به بررسی ماتریسی می‌پردازیم که مقادیر ویژه در حالت‌هایی مرتبط با مقادیر ویژه ماتریس فاصله و ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله است. سوی^{۱۳} و همکارانش ترکیب محدبی از $Tr(G)$ و $D(G)$ را به صورت $D_\alpha(G) = \alpha Tr(G) + (1 - \alpha)D(G)$ تعریف کردند و آن را ماتریس فاصله تعمیم یافته^{۱۴} نامیدند [۲۸]. بنابراین اگر $D(G)$, $Tr(G)$, $D^L(G)$ و $D^Q(G)$ به ترتیب ماتریس فاصله، ماتریس قطری از اعداد انتقال، ماتریس لاپلاسین فاصله و ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله باشند، آنگاه همواره رابطه‌های $D_\alpha(G) = D(G)$, $D_1(G) = Tr(G)$ و $D_\alpha(G) - D_\beta(G) = (\alpha - \beta)D^L(G)$ برقرار هستند. گیریم $\partial_1 \geq \partial_2 \geq \dots \geq \partial_n$ مقادیر ویژه ماتریس فاصله تعمیم یافته $D_\alpha(G)$ باشند. برخی از خواص ماتریس فاصله تعمیم یافته را می‌توان مورد بررسی قرار داد و کران‌هایی را برای بزرگترین مقدار ویژه^{۱۵} آن و دومین مقدار ویژه^{۱۶} آن از لحاظ بزرگترین ارائه کرد. همچنین مقادیر ویژه ماتریس فاصله تعمیم یافته تعدادی از گراف‌ها را با استفاده از عملیات گرافی به دست آورد.

مشابه تعریفی که برای انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله انجام دادیم، انرژی ماتریس فاصله تعمیم یافته را می‌توان تعریف کرد و کران‌هایی را برای آن ارائه داد.

¹³Cui

¹⁵Spectral radius

¹⁶Second largest eigenvalue

¹⁴Generalized distance matrix

مراجع

- [۱] آل هوز ع.، باغی پور م. و هاشمی ا، (۱۳۹۷) ” نتایجی در مورد انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری در گراف‌ها”، پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال چهارم، شماره سیزدهم.
- [2] Aouchiche M. and Hansen P. (2011),” A signless Laplacian for the distance matrix of a graph” **Les Cahiers du Gerad**, G-78.
- [3] Aouchiche M. and Hansen P. (2013), ”Two Laplacians for the distance matrix of a graph” **Linear Algebra Appl.**, 439(1), 21–33.
- [4] Aouchiche M. and Hansen P. (2014), ”Distance spectra of graphs: a survey” **Linear Algebra Appl.**, 458, 301–386.
- [5] Aouchiche M. and Hansen P. (2016), ”On the distance signless Laplacian of a graph” **Linear and Multilinear Algebra**, 64(6), 1113–1123.
- [6] Abiad A., Brimkov B., Erey A., Leshock L., Rivera X. M., Song Suil O, S. Y. and Williford J., ”On the Wiener index, distance cospectrality and transmission-regular graphs” **Discrete Appl. Math.**, 230, 1–10.
- [7] Alon N. (1986), ”Eigenvalues and expanders” **Combinatorica**, 6, 83–96.
- [8] Adiga C., Bayad A., Gutman I. and Srinivas S.A. (2012), ”The minimum covering energy of a graph” **Kragujevac J. Sci.**, 34, 39–56.
- [9] Alhevaz A., Baghipur M. and Paul S. (2018), ” On the distance signless Laplacian spectral radius and the distance signless Laplacian energy of graphs” **Discrete Mathematics, Algorithms and Applications**, 10, (3), Article ID: 1850035, 19pp.
- [10] Alhevaz A., Baghipur M., Hashemi E. and Ramane H.S. (2019), ” On the distance signless Laplacian spectrum of graphs” **Bull. Malay. Math. Sci. Soc.**, 42, 2603–2621.

- [11] Alhevaz A., Baghipur M. and Hashemi E. (2018), "Further results on the distance signless Laplacian spectrum of graphs" **Asian-Eur. J. Math.**, 11,3, Article ID: 1850066, 15 pp.
- [12] Alhevaz A., Baghipur M. and Hashemi E. (2018), "On distance signless Laplacian spectrum and energy of graphs" **Electron. J. Graph Theory Appl.**, 6, 2, 326–340.
- [13] Alhevaz A., Baghipur M., Ganie H.A. and Pirzada S. (2019), "Brouwer type conjecture for the eigenvalues of distance signless Laplacian matrix of a graph" **Linear and Multilinear Algebra**, in press.
- [14] Alhevaz A., Baghipur M., Hashemi E. and Alizadeh Y. (2018), "Minimum covering reciprocal distance signless Laplacian energy of graphs" **Acta Univ. Sapientiae, Informatica**, 10, 2, 218–240.
- [15] Alhevaz A., Baghipur M. and Rahimi S. (2017), "Bounds on hyper-Wiener index of graphs" **Asian-Eur. J. Math.**, 10, 3, Article ID: 1750057, 15pp.
- [16] Adiga C., Bayad A., Gutman I. and Srinivas S.A. (2012), "The minimum covering energy of a graph" **Kragujevac J. Sci.**, 34, 39–56.
- [17] Ashraf F., Omid G. R. and Tayfeh-Rezaie B. (2013) "On the sum of signless Laplacian eigenvalues of a graph" **Linear Algebra Appl.** 438, 4539–4546.
- [18] Brouwer A.E. and Haemers W.H. (2012), "**Spectra of Graphs**", Springer, New York.
- [19] Berman A. and Plemmons R.J. (1994), "**Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences**," Classics in Applied Mathematics, 9. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.
- [20] Bondy J.A. and Murty U.S.R. (1976), "**Graph Theory with Applications**", Springer, Macmillan, New York.
- [21] Backus G.E. and Gilbert J.F. (1967), "Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems" **Geophys. J. R. Ustr. Soc.**, 13, 247–276.
- [22] Biernacki M., Pidek H. and Ryll-Nardzewski C. (1950), "Sur une inégalité entre des intégrales définies. (French)" **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A.** 4, 1–4.
- [23] Cauchy A. (1821), "**Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**," In oeuvres complètes.
- [24] Cvetković D., Doob M. and Sachs H. (1995), "Spectra of Graphs—Theory and Applications, 3rd edition" **Johann Ambrosius Barth Verlag**, Heidelberg Leipzig.

- [25] Cvetković D. Rowlinson P. and Simić S. (1997), "**Eigenspaces of graphs**" Cambridge: Cambridge University Press.
- [26] Consonnic V. and Todeschini R. (2008), "New spectral indices for molecule description" **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.** 60, 1, 3–14.
- [27] Chen Z. (2004), "Spectra of extended double cover graphs" **Czechoslovak J. Math.**, 54, 1077–1082.
- [28] Cui S.Y., He J.X. and Tian G.X. (2019), "The generalized distance matrix" **Linear Algebra Appl.**, 563, 1–23.
- [29] Das, K.C. (2015), "Proof of conjectures on the distance signless Laplacian eigenvalues of graphs" **Linear Algebra Appl.** 467, 100–115.
- [30] Das K.C. and Gutman I. (2010), "Estimating the Wiener index by means of number of vertices, number of edges, and diameter" **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.** 64, 3, 647–660.
- [31] Das K.C., Xu K. and Gutman I. (2013), "On Zagreb and Harary Indices" **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.**, 70, 301–314
- [32] Das K.C., Zhou B. and Trinajstić N. (2009), "Bounds on Harary index" **J. Math. Chem.**, 46, 1377–1393.
- [33] Davis P.J. (1979), "**Circulant Matrices**, Wiley, New York.
- [34] Diaz J.B. and Metcalf F.T. (1963), "Stronger forms of a class of inequalities of G. Pólya–G. Szegő, and L.V. Kantorovich" **Bull. Amer. Math. Soc.**, 69, 415–418.
- [35] Diaz J.B. and Metcalf F.T. (1964), "Complementary inequalities I: Inequalities complementary to Cauchy's inequality for sums of real number" **J. Math. Anal. Appl.**, 59–74.
- [36] Dobrynin A.A., Entringer R. and Gutman I. (2001), "Wiener index of trees: Theory and applications" **Acta Appl. Math.**, 66, 211–249.
- [37] Dobrynin A.A., Gutman I., Klavzar S. and Zigert P. (2002), "Wiener index of hexagonal systems" **Acta Appl. Math.**, 72, 247–294.
- [38] Estrada E. (2002), "Characterization of the folding degree of proteins" **Bioinformatics**, 18, 697–704.

-
- [39] Estrada E. (2004), "Characterization of the amino acid contribution to the folding degree of proteins" **Proteins**, 54, 727–737.
- [40] Edelberg M., Garey M.R. and Graham R.L. (1976), "On the distance matrix of a tree" **Discrete Math.** 14, 23–39.
- [41] Fan K. (1951), "Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators" **Proc. Natl. Acad. Sci. USA.** 37, 760–766.
- [42] Fritscher E. and Trevisan V. (2016), "Exploring symmetries to decompose matrices and graphs preserving the spectrum" **SIAM J. Matrix Anal. Appl.**, 37(1), 260–289.
- [43] Güngör A. D. and B. Bozkurt Ş. (2009), "On the distance Estrada index of graphs" **Hacet. J. Math. Stat.** 38, 277–283.
- [44] Gutman I. (2001), "The energy of a graph: Old and new results, in: A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann (Eds.)" **Algebraic Combinatorics and Applications**, Springer-Verlag, Berlin, pp 196–211.
- [45] Gutman I., Linert W., Lukovits I. and Dobrynin A.A. (1997), "Trees with extremal hyper-Wiener index: Mathematical basis and chemical applications" **J. Chem. Inf. Comput. Sci.** 37(2), 349–354 .
- [46] Graham, R.L. and Lovász L. (1978), "Distance matrix polynomials of trees" **Adv. Math.**, 29, 60–88.
- [47] Graham R.L. and Pollack H.O. (1971), "On the addressing problem for loops witching" **Bell System Tech. J.** 50, 2495–2519.
- [48] Gutman I. and Estrada E. (1996), "Topological indices based on the line graph of the molecular graph" **J. Chem. Inf. and Comput. Sci.** 36 (3), 541–543.
- [49] Gutman I., Popović L., Mishra B.K., Kuanar M., Estrada E. and Guevara N. Applications of line graphs in physical chemistry: Predicting the surface.
- [50] Ganie H. A. and Pirzada S. (2017) "On the bounds for signless Laplacian energy of a graph" **Discrete Appl. Math.** 228, 3–13.
- [51] Ganie H. A., Pirzada S. and Trevisan V. "Brouwer's conjecture for two families of graphs" **Bull. Korean Math. Soc.**, Communicated.

- [52] Ganie H. A., Alghamdi A. M. and Pirzada S. (2016), "On the sum of the Laplacian eigenvalues of a graph and Brouwer's conjecture" **Linear Algebra Appl.** 501 , 376–389.
- [53] Ganie H. A., Pirzada S., Shaban Rezwan Ul and Li X. (2019) "Upper bounds for the sum of Laplacian eigenvalues of a graph and Brouwer's conjecture" **Discrete Math. Algorithms Appl.**, 11, (2), 1950028, 16 pages.
- [54] Haemers W. H., Mohammadian A. and Tayfeh-Rezaie B. (2010) "On the sum of Laplacian eigenvalues of graphs" **Linear Algebra Appl.**, 432, 2214–2221.
- [55] Hong W. and Lihua Y. (2013), " Some sharp bounds on the distance signless Laplacian spectral radius of graphs" **math. Co** .
- [56] He C.X., Liu Y. and Zhao Z.H. (2010), " Some new sharp bounds on the distance spectral radius of graph, **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.** 63, 7 83–788.
- [57] Hosoya H., Murakami M. and Gotoh M. (1973), " Distance polynomial and characterization of a graph" **Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.** 24, 27–34.
- [58] Hong W. and You L. (2014), " Further results on the spectral radius of matrices and graphs " **Appl. Math. Comput.**, 239, 326–332.
- [59] Harary F. (1999), "**Graph Theory**, Narosa Publishing House, New Delhi.
- [60] Indulal G. (2009), "Sharp bounds on the distance spectral radius and the distance energy of graphs" **Linear Algebra Appl.** 430, 106–113.
- [61] Indulal G., Gutman I. and Vijayakumar A. (2008), " On distance energy of graphs " **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.** 60, 461–472.
- [62] Indulal G. and Vijayakumar A. (2006), " On a pair of equienergetic graphs " **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.** 55, 83–90.
- [63] Indulal G. and Balakrishnan R. (2016), " Distance spectrum of Indu-Bala product of graphs " **AKCE Int. J. Graphs Combin.**, 13, 230–234.
- [64] Ilić A., Yu G. and Feng L. (2012), " The Harary index of trees " **Utilitas Math.**, 87, 21–32.
- [65] Koolen J.H. and Moulton V. (2001), " Maximal energy graphs " **Adv. Appl. Math.**, 26, 47–52.

-
- [66] Koolen J.H., Moulton V. and Gutman I. (2000), "Improving the McClelland inequality for total Π -electron energy" **Chem. Phys. Lett.**, 320, 213–216.
- [67] Klein D.J., Lukovits I. and Gutman I. (1995), "On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures" **J. Chem. Inf. Comput. Sci.** 35,1, 50–52.
- [68] Li X., Fan Y. and Zha S. (2014), "A Lower Bound for the Distance Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs in Terms of Chromatic Number" **J. Math. Research Appl.**, 34, 3, 289–294.
- [69] Liu M. and Liu B. (2013), "A survey on recent results of variable Wiener index" **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.**, 69, 491–520.
- [70] Lina H. and Lua X. (2015), "Bounds on the distance signless Laplacian spectral radius in terms of clique number" **Linear and Multilinear Algebra**, 63, 9, 1750–1759.
- [71] Lin H. and Zhou B. (2015), "On the distance Laplacian spectral radius of graphs" **Linear Alg. Appl.**, 475, 265–275.
- [72] Laskar R. (1969), "Eigenvalues of the adjacency matrix of cubic lattice graphs" **Pacific J. Math.** 29, 623–629.
- [73] Minc H. (1988), "**Nonnegative matrices**". New York: John Wiley Sons.
- [74] Mihalić Z., Veljan D., Amiő D., Nikoló S., Plavšić D. and Trinajstić N. (1992), "The distance matrix in chemistry" **J. Math. Chem.**, 11, 223–258.
- [75] Marcus M. and Minć H. (1964), "**A survey of Matrix theory and Matrix inequalities**", Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.
- [76] Narayankar K.P. and Lokesh S.B. (2017), "Peripheral Wiener index of a graph" **Commun. Combin. Optim.** 2(1), 43–56.
- [77] Narayankar K.P. and Lokesh S.B. (2017), "Peripheral distance energy of graphs" **Int. J. Math. Combin.**, 1, 88–101.
- [78] Ozeki N. (1968), "On the estimation of inequalities by maximum and minimum values" **J. College Arts Sci. Chiba Univ.**, 5, 2, 199–203.
- [79] Pólya G. and Szegő G. (1972), "**Problems and Theorems in Analysis, Series, Integral Calculus, Theory of Functions (Classics in Mathematics)**" Springer, Berlin.

- [80] Plavšić D., Nikolić S., Trinajstić N. and Mihalić Z. (1993), " On the Harary index for the characterization of chemical graphs " **J. Math. Chem.**, 12, 235–250.
- [81] Ramane H.S., Gutman I. and Ganagi A.B. (2013), " On diameter of line graphs " **Iranian J. Math. Sci. Inf.**, 8, 105–109.
- [82] Ramane H.S., Revankar D.S., Gutman I. and Walikar H.B. (2009), " Distance spectra and distance energies of iterated line graphs of regular graphs " **Publ. Inst. Math. (Beograd)**, 85 (99), 39–46.
- [83] Rajesh Kanna, M.R., Dharmendra. B.N. and Sridhara, G. (2013), " The minimum dominating energy of a graph " **Int. J. Pure Appl. Math.**, 85, 4, 707–718.
- [84] Rajesh Kanna, M.R., Dharmendra. B.N. and Sridhara, G. (2014), " Minimum dominating distance energy of a graph " **J. Indones. Math. Soc.** 20, 19–29.
- [85] Rajesh Kanna, M.R., Dharmendra. B.N. and Pradeep Kumar R. (2014), " Minimum covering Harary energy of a graph " **Int. J. Pure. Appl. Math.**, 90, 3, 371–385.
- [86] Tian F., Li X. and Rou J. (2014), " A Note on the Signless Laplacian and Distance Signless Laplacian Eigenvalues of Graphs " **J. Math. Research Appl.** 34, 6, 647–654
- [87] Tian F., Wong D. and Rou J. (2015), " Proof for four conjectures about the distance Laplacian and distance signless Laplacian eigenvalues of a graph " **Linear Algebra Appl.**, 471, 10–20
- [88] Tian G.X., Huang T.Z. and Zhou B. (2009), " A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs " **Linear Algebra Appl.** 430, 2503–2510.
- [89] Weyl H. (1912), " Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen " **Math. Ann.**, 71, 441–479.
- [90] Xing R. and Zhou B. (2013), " On the distance and distance signless Laplacian spectral radii of bicyclic graphs " **Linear Algebra Appl.**, 439, 3955–3963.
- [91] Xing R., Zhou B. and Li J. (2014), " On the distance signless Laplacian spectral radius of graphs " **Linear and Multilinear Algebra**, 62 , 10, 1377–1387
- [92] Xu K., Klavžar S., Das K.C. and Wang J. (2014), " Extremal (n,m) -graphs with respect to distance-degree-based topological indices " **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.**, 72, 865–880.

-
- [93] Yang J. and You L. (2014), "On a conjecture for the signless Laplacian eigenvalues" **Linear Algebra Appl.** 446, 115–132.
- [94] Zhou B. and Gutman I. (2004), " Relations between Wiener, hyper-Wiener and Zagreb indices " **Chem. Phys. Lett.**, 394, 93–95.
- [95] Zhou B., Gutman I. and Aleksić T. (2008), " A note on the Laplacian energy of graphs " **MATCH Commun. Math. Comput. Chem.**, 60, 441–446.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Disjoint union	اجتماع مجزا
Energy	انرژی
Distance energy	انرژی فاصله
Pendant	آویخته
Join	الصاق
Largest eigenvalue	بزرگترین مقدار ویژه
Perron-Frobenius	پرون-فروبنیوس
Characteristic polynomial	چندجمله‌ای مشخصه
Multiplicity	چندگانگی
Clique	خوشه
Tree	درخت
Interlacing	درهم بافتن
Cycle	دور
Degree	درجه
Vertex	رأس
Subgraph	زیرگراف
Subdivision	زیرتقسیم
Spectral radius	شعاع طیفی
Wiener index	اندیس وینر
Spectrum	طیف
Laplacian spectrum	طیف لاپلاسین
Clique number	عدد خوشه‌ای
Chromatic number	عدد رنگی
Distance	فاصله
Diameter	قطر
Girth	کمر

Unicyclic graph	گراف تک‌دور
Line graph	گراف خطی
Bipartite graph	گراف دوبخشی
Simple graph	گراف ساده
Star graph	گراف ستاره
Complete graph	گراف کامل
Bicyclic graph	گراف دو دور
Regular graph	گراف منظم
Turan graph	گراف توران
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسیان
Distance signless Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسیان بدون علامت فاصله
Adjacency matrix	ماتریس مجاورت
Symmetric	متقارن
Positive definite	مثبت معین
Adjacent	مجاور
Independent	مستقل
Path	مسیر
Eigenvalue	مقدار ویژه
Complement	مکمل
Connected	همبند
Connectivity	همبندی
Neighbour	همسایه
Edge	یال

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacency matrix	ماتریس مجاورت
Adjacent	مجاور
Bipartite graph	گراف دوبخشی
Characteristic matrix	ماتریس مشخصه
Clique	خوشه
Clique number	عدد خوشه‌ای
Chromatic number	عدد رنگی
Complement	مکمل
Complement graph	گراف مکمل
Connected	همبند
Connectivity	همبندی
Cycle	دور
Diameter	قطر
Disjoint union	اجتماع مجزا
Distance signless Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله
Distance	فاصله
Distance energy	انرژی فاصله
Degree	درجه
Edge	یال
Eigenvalue	مقدار ویژه
Energy	انرژی
Girth	کمر
Independent	مستقل
Interlacing	درهم بافتن
Join	الصاق
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسین

Laplacian spectrum	طیف لاپلاسین
Largest eigenvalue	بزرگترین مقدار ویژه
Line graph	گراف خطی
Neighbour	همسایه
Path	مسیر
Pendant	آویخته
Perron-Frobenius	پرون – فروبنیوس
Positive definite	مثبت معین
Regular graph	گراف منتظم
Simple graph	گراف ساده
Spectral radius	شعاع طیفی
Spectrum	طیف
Subdivision	زیرتقسیم
Star graph	گراف ستاره
Subgraph	زیرگراف
Symmetric	متقارن
Tree	درخت
Turan graph	گراف توران
Unicyclic graph	گراف تک‌دور
Vertex	رأس
Wiener index	اندیس وینر

Abstract

Several matrices can be associated to a graph such as the distance matrix, distance Laplacian matrix or the distance signless Laplacian matrix. The spectrum of these matrices gives some informations about the structure of the graph. The distance signless Laplacian spectral radius of a connected graph G is the largest eigenvalue of the distance signless Laplacian matrix of G , defined as $D^Q(G) = Tr(G) + D(G)$, where $D(G)$ is the distance matrix of G and $Tr(G)$ is the diagonal matrix of vertex transmissions of G . In this thesis, we determine some upper and lower bounds on the distance signless Laplacian spectral radius of G based on some graph invariants such as order, size, independence number and matching number. The graphs attaining the corresponding bounds are also characterized. Further, we study the distance signless Laplacian spectrum of some graphs obtained by operations. In addition, we define distance signless Laplacian energy and give some upper and lower bounds on the distance signless Laplacian energy of graphs.

We also propose a Brouwer-type conjecture for the sum of k -largest distance signless Laplacian eigenvalues and show that it holds for graphs of diameter one and graphs of diameter two for all k . We then show that it holds for $k = n - 1$ and $k = n$ for all graphs and for some k for r -transmission regular graphs. We conclude by giving some alternative directions and asking some open questions.

Keywords: Distance signless Laplacian matrix, distance signless Laplacian spectrum, spectral radius, distance signless Laplacian energy.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Graph and Combinatorics

On distance signless Laplacian spectrum of graphs

By: Maryam Baghipur

Supervisors:

Dr. Sadegh Rahimi Sharebaf

Dr. Ebrahim Hashemi

Advisor:

Dr. Abdollah Alhevaz

September 2019