بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات (بهینه سازی)

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رهیافت‌هایی برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری

نگارنده: رقیه انصاری

استاد راهنما

دکتر محمدهادی نوری‌اسکندری

خرداد ۱۳۹۸

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم .

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. وظیفه خود می‌دانم از استاد با کمالات ، صبور و شایسته؛ جناب آقای دکتر محمدهادی نوری‌اسکندری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛ کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات ایشان را سپاس گوید.

رقیه انصاری
خرداد ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **رقیه انصاری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **رهیافت‌هایی برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری** ، تحت راهنمایی **محمدهادی نوری‌اسکندری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه انصاری
خرداد ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

در این پایان‌نامه یک تکنیک جدید برای طراحی کنترل پایدارساز بر حسب روش شبه‌طیفی ژاکوبی ارائه شده است. ابتدا شرایط لازم برای پایداری سیستم‌های مرتبه صحیح و مرتبه کسری را مورد بررسی قرار داده، سپس با استفاده از قضایا و تعاریف مربوط به پایداری لیاپانوف یک قضیه جدید ارائه می‌دهیم. با استفاده از این قضیه برای یک سیستم کنترلی مرتبه کسری افق نامتناهی پایدار بودن سیستم را نشان می‌دهیم . برای این منظور ابتدا سیستم را به یک سیستم کنترلی مرتبه کسری افق متناهی تبدیل می‌کنیم و در ادامه با تقریب متغیرهای وضعیت و کنترل و استفاده از نقاط ژاکوبی گاوس سیستم را به یک سیستم جبری تبدیل میکنیم.

کلمات کلیدی: روش شبه طیفی ژاکوبی، پایداری لیاپانوف، پایداری میتاگ لفلر

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. رقیه انصاری، محمدهادی نوری‌اسکندری، طراحی کنترل برای سیستم‌های کسری،اولین کنفرانس ملی مدلسازی ریاضی در علم، فناوری و سیستم‌های هوشمند، ۱۱ بهمن ۱۳۹۷، دانشگاه علم و فناوری مازندران.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه

حساب کسری مربوط به حساب انتگرال و مشتق از مرتبه‌ای است که می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد و محبوبیت آن در سال‌های اخیر ناشی از کاربرد آن در بسیاری از رشته‌های علوم ومهندسی است. در واقع حساب کسری در سال ۱۶۹۵ توسط لایب نیتز [1] و هوپیتال [2] مطرح شد اینگونه که هوپیتال به لایب نیتز نامه ای نوشت و نظر او را راجع به مشتق از مرتبه ی غیر صحیح $\frac{1}{2}$ جویا شد، لایب نیتز در پاسخ او نوشت این موضوع منجر به تناقض می‌شود اما بعداً نتایج مفیدی از آن بدست خواهد آمد. سوال طرح شده توسط لایب نیتز باعث شد از آن به بعد افراد زیادی این موضوع را دنبال کنند. در سال ۱۷۳۰ این موضوع توجه اویلر [3] را به خود جلب نمود. در آن زمان اویلر بیان کرد که اگر n یک عدد صحیح مثبت و p تابعی از x باشد کسر $\frac{d^n p}{dx^n}$ را می‌توان بصورت جبری بیان نمود. در ۱۷۷۲، لاگرانژ [4] به بررسی حسابان کسری پرداخته بود. در ۱۸۱۲ لاپلاس یک [5]مشتق کسری را به وسیله‌ی انتگرال تعریف نمود ودر ۱۸۱۹ اولین مفهوم مشتق از مرتبه دلخواه توسط لاکروا [6] معرفی

[1] Leibniz
[2] L'Hospital
[3] Euler
[4] Lagrange
[5] Laplace
[6] Lacroix

شد. نفر بعد که مشتق از مرتبه دلخواه را معرفی نمود، فوریه [7] در سال ۱۸۲۲ بود. وی عملگر کسری خود را بر اساس نمایش انتگرالی از تابع $f(x)$ تعریف نمود. اولین کسی که عملگر کسری را بکار برد آبل [8] در سال ۱۸۲۳ بود. لیوویل [9] مطالعات خود را در سال ۱۸۳۲ روی حسابان کسری آغاز کرد. وی اولین کسی بود که تلاش کرد معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری را حل کند. در ۱۸۶۷ نیز گرانوالد [10] مطالعاتی در زمینه عملگرهای کسری انجام داد. در سالهای ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ لتنیکف [11] چند مقاله در زمینه حساب کسری نوشت. مفهوم انتگرال کسری در سال ۱۸۹۲ در مقاله‌ی ریمان [12] بکار برده شده بود. گرانوالد و کروگ نتایج بدست آمده توسط ریمان و لیوویل را جمع‌آوری کرده و انتگرال و مشتق ریمان-لیوویل را معرفی کردند. در اوایل قرن بیستم کاپوتو [13] مشتق جدیدی با استفاده از فرمول ریمان-لیوویل معرفی نمود. افراد زیادی روی این موضوع کار کرده‌اند مانند کیلباس، [14] پودلبنی، [15] هاردی، [16] سمکو، [17] و ... .

بهترین مرجع برای حساب کسری کتاب‌های میلر، [18] پودلبنی، راس، [19] اولدهام، [20] سامکو [21]، کیلباس [22] است. برای مطالعه کاملتر حساب کسری به [۳۶] مراجعه کنید.

رفتار بسیاری از سیستم‌ها با استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری دقیق‌تر است به عنوان مثال می‌توان فرآیند انتشار [۷]، فرآیند انتقال حرارت [۲۲]، تاثیر فرکانس در ماشین‌های القایی [۲۰] را ذکر کرد. به این مفهوم که پایداری این سیستم‌ها باید با استفاده از تکنیک‌های توسعه یافته برای سیستم‌های مرتبه کسری ثابت شود. بعلاوه این مدل‌ها اغلب در کنار طرح‌های کنترل کلاسیک استفاده شده‌اند و به دلیل اینکه کل سیستم کنترل منجر به یک نظم جزئی می‌شود، در این موارد پایداری تمام سیستم‌های کنترل شده باید با استفاده از تکنیک‌های مرتبه کسری آنالیز شود. البته در مواردی کنترل کننده‌های مرتبه کسری برای کنترل سیستم‌های مرتبه صحیح استفاده شده‌اند مانند کنترل کننده های مرتبه کسری PID [۲۷] . با استفاده از روش پیشنهاد شده توسط ماتیگنان[23] [۳۴] پایداری سیستم‌های خطی مرتبه کسری ناهمگن می‌تواند به آسانی ثابت شود. اگرچه این روش برای

7 Fourier
8 Abel
9 Liouville
10 Grünwald
11 Letnikov
12 Riemann
13 Caputo
14 Kilbas
15 Podlubny
16 Hardy
17 Samko
18 Miller
19 Ross
20 Oldham
21 Samko
22 Kilbas
23 Matignon

سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری همگن قابل استفاده نیست. دیتهلم [24] [۱۶] پایداری سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری همگن را تحت شرایط مطمئن ثابت کرده است. اما این نتیجه فقط برای سیستم‌های مرتبه کسری اسکالر قابل قبول است. بنابراین برای ثابت کردن پایداری سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری و سیستم‌های همگن در حالت برداری برخی تکنیک‌های دیگر باید اعمال شوند. یکی از این تکنیک‌ها بسط مرتبه کسری روش مستقیم است که توسط لی [25] و همکارانش پیشنهاد شده است که در فصل سوم پایان‌نامه اشاره می‌کنیم. اگرچه استفاده از این تکنیک اغلب واقعا کار سختی است چون پیدا کردن تابع منتخب لیاپانوف در موارد مرتبه کسری پیچیده تر است. برخی از نویسندگان تابع‌هایی از لیاپانوف را برای ثابت کردن پایداری سیستم‌های مرتبه کسری پیشنهاد کرده‌اند. به اثر برجسته [۲۹] می‌توان اشاره کرد در این پایان‌نامه در فصل پنجم یک تکنیک جدید برای طراحی کنترل پایدارساز ارائه می‌کنیم که پیچیدگی‌های روش‌های قبلی ارائه شده را ندارد. یکی از کاربردهای جدید و مهم حساب کسری، کاربرد این علم در تئوری کنترل است. ایده اولیه استفاده از کنترل کننده‌های مرتبه کسری برای کنترل سیستم‌های دینامیکی متعلق به آ. استالوپ [26] است که کنترل کننده‌های معروف به کرون [27] را معرفی کرد. استالوپ ثابت کرد که این کنترل کننده بهتر از کنترل کننده‌ی PID عمل می‌کند. پس ازآن محققان زیادی از جمله آر. ال. بگلی [28]، آر. آ. کالیلو [29] به مطالعه راجع به این موضوع پرداختند. تحقیقات نشان داده که استفاده از انتگرال‌ها و مشتقات مرتبه کسری در تئوری کنترل نتایج بهتری را نسبت به انتگرال‌ها و مشتقات مرتبه گویا ایجاد می‌نماید [۱۱]. نظریه کنترل بهینه کسری یک موضوع نسبتاً جدید است که در سال‌های اخیر مورد توجه محققان رشته‌های مختلف قرار گرفته است. قدمت مسائل کنترل بهینه به قرن ۱۷ میلادی برمی گردد این مسائل اولین بار توسط یوهان برنولی [30] با بیان مسأله یونانی کوتاهترین مسیر مطرح شد. و در آن زمان چند تن از ریاضیدانان صاحب نام پاسخ‌هایی را برای مسأله کوتاهترین مسیر ارائه نمودند. از کارهای انجام شده در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. آگراوال [31] [۳] شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه کسری با مفهوم ریمان-لیوویل ارائه کرد، و در [۴] به فرمول مشابه برای مسائل کنترل بهینه کسری با مفهوم کاپوتو رسید. لطفی و همکاران [۱۵] یک روش مستقیم بر پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر ارائه دادند. از جمله کارهای دیگر انجام شده در این زمینه می‌توان به [۹، ۱۸، ۳۵، ۳۸] اشاره کرد. مسائل کنترل بهینه کسری در زمینه مدل های هوافضا [۲]، رباتیک [۲۱]، اقتصاد [۱۰] و پزشکی [۱۷] کاربرد دارد.

---

[24] Dithelm

[25] Li et al

[26] A. Oustaloup

[27] Crone (Commande Robuste d’Ordre Non Entier)

[28] Bagley

[29] Calico

[30] Johann Bernoulli

[31] Agrawal

۱.۱.۱ حساب کسری(انتگرال ها و مشتقات مرتبه کسری)

تعریف ۱.۱.۱. [۱] فرض کنید $f(.)$ یک تابع روی بازه‌ی $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ باشد. مشتق کسری چپ وراست کاپوتو $f(.)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به‌ترتیب بصورت زیر تعریف شده است:

$$ {}_a^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \tag{۱.۱}$$

$$ {}_t^cD_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \tag{۲.۱}$$

بطوریکه $n = [\alpha] + 1$ و $\Gamma(.)$ تابع گاما است.

تعریف ۲.۱.۱. [۱] تابع گاما مفهوم $n!$ را برای هر عدد دلخواه n حتی اگر n مختلط و ناصحیح باشد بیان می‌کند. تابع گاما بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$ \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0 \tag{۳.۱}$$

ملاحظه ۱.۱.۱. [۱] اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه

$$ {}_a^CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)ds \right), \quad t > a, \tag{۴.۱}$$

$$ {}_t^CD_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_t^b (s-t)^{-\alpha} f'(s)ds \right), \quad t < b, \tag{۵.۱}$$

و اگر $\alpha = 0$ و یا $\alpha = n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه

$$ \begin{aligned} &{}_a^CD_t^0 f(t) = {}_t^CD_b^0 f(t) = f(t), \\ &{}_a^CD_t^n f(t) = f^{(n)}(t), \\ &{}_t^CD_b^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t), \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

که در آن $f^{(n)}(.)$ مشتق معمولی $f(.)$ از مرتبه n می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. [۱] فرض کنید $f(.)$ روی بازه $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. مشتق کسری چپ و راست ریمان-لیوویل تابع $f(.)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds \right), \quad t > a, \tag{۷.۱}$$

$$ {}_tD_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s)ds \right), \quad t < b, \tag{۸.۱}$$

که در آن $n = [\alpha] + 1$ می‌باشد. مشتق کسری چپ وراست ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب به صورت زیر نیز تعریف می‌شود:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{-(n-\alpha)} f(t)), \\ {}_tD_b^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}({}_tD_b^{-(n-\alpha)} f(t)). \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

ملاحظه ۲.۱.۱. [۱] اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right), \quad t > a, \tag{۱۰.۱} $$

$$ {}_tD_b^{\alpha} f(t) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_t^b (s-t)^{-\alpha} f(s) ds \right), \quad t < b, \tag{۱۱.۱} $$

و اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha = n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{0} f(t) &= {}_tD_b^{0} f(t) = f(t), \\ {}_aD_t^{n} f(t) &= f^{(n)}(t), \\ {}_tD_b^{n} f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t). \end{aligned} \tag{۱۲.۱} $$

تعریف ۴.۱.۱. [۱] فرض کنید $f(.)$ روی بازه متناهی $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل و انتگرال کسری راست ریمان-لیوویل تابع $f(.)$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$ {}_aI_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a, \tag{۱۳.۱} $$

$$ {}_tI_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < b, \tag{۱۴.۱} $$

که در آن $\alpha > 0$.

۲.۱.۱ خواص مهم مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو

- [۱] مشتق کسری ریمان لیوویل دارای خاصیت زیر است:

$$ {}_aD_t^{p}({}_aD_t^{q} f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n} [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \tag{۱۵.۱} $$

به طوری‌که $p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ و $n-1 \leq q < n$.

- انتگرال کسری ریمان-لیوویل دارای خاصیت زیر است

$$ {}_aI_t^{-\alpha}({}_aI_t^{-\beta} f(t)) = {}_aI_t^{-\alpha-\beta} f(t), $$

مشابه این خاصیت را در مشتق مرتبه صحیح نیز داریم

$$ \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}}, $$

انتگرال کسری ریمان-لیوویل خاصیت جابجایی ندارد.

- اگر $n < \alpha < n-1$، $n \in \mathbb{N}$، $\alpha \in \mathbb{R}$، $\lambda \in \mathbb{C}$ وتابع $f(.)$ و $g(.)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ باشد بطوریکه مشتق کسری کاپوتواز این دو تابع وجود داشته باشد. مشتق کسری کاپوتو بصورت یک عملگر خطی بصورت زیر است:

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}(\lambda f(t)+g(t)) = \lambda {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) + {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}g(t). $$

- فرض کنید $n < \alpha < n-1$، $n \in \mathbb{N}$، $\alpha \in \mathbb{R}$ و تابع $f(.)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ باشد که ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)$ وجود داشته باشد، بنابراین رابطه زیر برقرار است

$$ \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to n^-} {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t), \\ \lim\limits_{\alpha\to n-1^+} {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). \end{cases} $$

- فرض کنید $n < \alpha < n-1$، $m, n \in \mathbb{N}$، $\alpha \in \mathbb{R}$ وتابع $f(.)$ و ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(.)$ وجود داشته باشد

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}D^{m}f(t) = {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha+m}f(t). $$

- یکی از ویژگی‌های مشتق کسری قاعده‌ی تعمیم یافته‌ی لایب نیتز است که به صورت زیر آمده است.

اگر $f(t)$ و $g(t)$ همراه با تمام مشتقات آن در $[a,t]$ پیوسته باشد آنگاه قاعده لایب نیتز برای مشتق کسری به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$ {}_{a}^{c}D_{t}^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} f^{k}(t) {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha-k}g(t). \tag{۱۶.۱} $$

- مشتقات کاپوتو و ریمان-لیوویل بصورت زیر با هم در ارتباط اند

اگر $0 < \alpha < 1$

$$ {}_{a}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(a)t^{-\alpha} + {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t), \tag{۱۷.۱} $$

$$ {}_{t}D_{b}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(b)(b-t)^{-\alpha} + {}_{t}^{C}D_{b}^{\alpha}f(t). \tag{۱۸.۱} $$

- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $n-1 < \alpha < n$، $\alpha \in \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}$ یک مقدار ثابت باشد. لذا ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}(c) = 0$ و

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}((t-a)^{k}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-\alpha)^{k-\alpha}, & k \in \mathbb{R}, k > n-1, \\ 0, & k \in \mathbb{R}, k \le n-1. \end{cases} \tag{۱۹.۱} $$

- فرض کنید $n-1<\alpha<n$، $n\in\mathbb{N}$، $\alpha\in\mathbb{R}$ و $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ بسط تیلور باشد بنابراین

$$\begin{aligned} {}_{0}^{C}D_t^{\alpha}f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}{}_{a}^{C}D_t^{\alpha}(t-a)^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\right)(t-a)^{k-\alpha} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}. \end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

- فرض کنید $\alpha>0$ و $k>0$ بنابراین

$${}_{a}I_t^{\alpha}(t-a)^k=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}(t-a)^{k+\alpha}. \tag{۲۱.۱}$$

۳.۱.۱ تابع میتاگ لفلر

[۱] تابع میتاگ لفلر تعمیم تابع نمایی است. همانطور که تابع نمایی نقش مهمی را در جواب معادله‌های دیفرانسیل ایفا می‌کند، تابع میتاگ-لفلر نیز نقش مشابهی را در جواب معادله‌های دیفرانسیل مرتبه کسری ایفا می‌کند.

تعریف ۵.۱.۱. تابع یک پارامتری میتاگ-لفلر که با نماد $E_{\alpha}(z)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},$$

تعمیم (۵.۱.۱) را میتوان بصورت زیر در نظر گرفت که تابع دو پارامتری میتاگ لفلر است و توسط آگراوال ارائه شده است و نقش مهمی در حساب کسری ایفا می‌کند:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\qquad (\alpha>0,\quad \beta>0). \tag{۲۲.۱}$$

۴.۱.۱ چندجمله ای های متعامد

تعریف ۶.۱.۱. [۳۷] در این قسمت نخست ضرب داخلی دو تابع یادآوری می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. ضرب داخلی دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle f_1(x),f_2(x)\rangle_{w(x)}=\int_a^b f_1(x)f_2(x)w(x)dx \tag{۲۳.۱}$$

تعریف ۸.۱.۱. یک مجموعه از توابع $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ را روی بازه‌ی $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامد می‌گوییم، هرگاه:

$$\forall i, j, \qquad i \neq j \qquad \langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle_{w(x)} = 0 \tag{۲۴.۱}$$

و اگر $i = j$ آنگاه

$$\langle \phi_i(x), \phi_i(x) \rangle_{w(x)} \neq 0 \tag{۲۵.۱}$$

اگر در رابطه فوق

$$\langle \phi_i(x), \phi_i(x) \rangle_{w(x)} = 1 \tag{۲۶.۱}$$

آنگاه مجموع توابع متعامد فوق را متعامد یکه یا نرمال می‌گویند.

نکته ۱.۱.۱. برای نرمال کردن یک مجموعه متعامد باید اعضای مجموعه را بر نرمشان که بصورت زیر تعریف می‌شود تقسیم کنیم

$$\|\phi_i(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_i(x)^2 w(x) dx} \tag{۲۷.۱}$$

فرض کنید (a, b) یک بازه ی باز متناهی یا نامتناهی در $\mathbb{R}$ باشد. یک دستگاه از چندجمله ای های $\{P_n(x)\}$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ را نسبت به وزن $w(x) \geq 0$ روی (a, b) متعامد گویند، هرگاه

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0,$$

که در آن $n \neq m$. در اینجا $w(x)$ پیوسته یا قطعه پیوسته یا انتگرال پذیر متناظر چندجمله‌ای $P_n(.)$ است.

نمونه‌ای از چند جمله‌ای‌های متعامد به صورت زیر است.

۵.۱.۱ چند جمله‌ای‌های ژاکوبی

[۳۷] از چند جمله‌ای‌های متعامد کلاسیک چند جمله‌ای‌های ژاکوبی هستند که با نماد $J_i^{(\alpha,\beta)}(.)$ ، $i = 1, 2, \cdots$ نشان داده می‌شوند و روی بازه $[-1, 1]$ با رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} J_i^{(\alpha,\beta)}(s) = \phi_1(\alpha, \beta, s) J_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(s) - \phi_2(\alpha, \beta) J_{i-2}^{(\alpha,\beta)}(s), \qquad i = 2, 3, \cdots \\ J_0^{(\alpha,\beta)}(s) = 1, J_1^{(\alpha,\beta)}(s) = \frac{\alpha+\beta+2}{2} s + \frac{\alpha-\beta}{2}, \end{cases} \tag{۲۸.۱}$$

به طوری‌که

$$\phi_1(\alpha, \beta, s) = \frac{(\alpha + \beta + 2i - 1)\alpha^2 - \beta^2 + s(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i - 2)}{2i(\alpha + \beta + i)(\alpha + \beta + 2i - 2)}, \tag{۲۹.۱}$$

$$\phi_2(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + i - 1)(\beta + i - 1)(\alpha + \beta + 2i)}{i(\alpha + \beta + i)(\alpha + \beta + 2i - 2)}. \tag{۳۰.۱}$$

۶.۱.۱ مسأله کنترل بهینه افق متناهی

یک مسأله کنترل بهینه افق متناهی می‌تواند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&Minimize \quad J(x,u)=\int_{t_\circ}^{t_f} g(t,x,u)dt\\&subject \quad to \quad \dot{x}=f(t,x,u)\\&x(t_\circ)=\alpha, \quad x(t_f)=\beta,\end{aligned} \tag{۳۱.۱}$$

که در آن $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$ و $u=(u_1,\ldots,u_p)^T$ به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل نامیده می‌شوند. بردار β و t_f ممکن است معلوم یا مجهول باشند. تابعک J را تابع هدف یا هزینه و معادله $\dot{x}=g(t,x,u)$ را معادله دینامیکی (معادله دیفرانسیلی-کنترلی) می‌نامند.

۷.۱.۱ مسئله کنترل بهینه افق نامتناهی

یک مسئله کنترل بهینه افق نامتناهی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&Minimize \quad J=\int_{\circ}^{\infty} f(t,x(t),u(t))dt\\&subject \quad to \qquad \dot{x}(t)=g(t,x(t),u(t))\\&x(\circ)=x_\circ\end{aligned} \tag{۳۲.۱}$$

که $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$، $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ و $\dot{x}$ مشتق x نسبت به زمان است.

فصل ۲

بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه صحیح براساس تابع لیاپانوف

۱.۲ مقدمه

در ریاضیات **نظریه‌ی پایداری**، پایداری جواب‌های معادلات دیفرانسیل و مسیر حالت سیستم‌های دینامیکی را تحت انحرافات کوچک از شرایط اولیه مورد بحث قرار می‌دهد. در حالت کلی یک سیستم پایدار است اگر انحرافی کوچک در فرض مسئله باعث انحرافی کوچک در نتیجه شود. باید توجه داشت که برای تعیین اندازه تغییرات نیاز به تعریف متری مشخص است که به عنوان مثال در معادلات دیفرانسیل معمولی این متر می‌تواند نرم L_p در نظر گرفته شود. در سیستم های دینامیکی، یک زیر مجموعه از فضای فاز پایدار لیاپانوف [1] نامیده می‌شود اگر بتوان فاصله‌ای از نقطه تعادل یافت که با قرار دادن شرایط اولیه برای حالت‌های سیستم درون آن، حالت‌های سیستم برای زمان‌های بعدی درون دیسکی به شعاع به اندازه دلخواه کوچک قرار گیرند. معیارهای مختلفی وجود دارد که به کمک آنها بتوان پایداری یا ناپایداری مجموعه نقاطی از فضای حالت سیستم را اثبات نمود. به عنوان مثال در نمایش فضای حالت سیستم‌های خطی ناهمگن مسئله پایداری سیستم به مسئله‌ای در برگیرنده‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌ها تقلیل می‌یابد. روش‌های جامع‌تر برای اثبات پایداری سیستم‌های

[1] Lyapunov

دینامیکی شامل توابع لیاپانوف می‌باشد. [۲۵، ۲۴] یکی از برجسته‌ترین و معروفترین روش‌های تحلیل پایداری سیستم‌ها، تئوری پایداری لیاپانوف است که توسط ریاضیدان روسی الکساندر لیاپانوف در قرن نوزدهم میلادی پایه‌گذاری شده است.

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, u, t). \tag{۱.۲}$$

با ورودی کنترلی $u = g(x, t)$ و جایگذاری آن در سیستم غیرخطی به دینامیک حلقه بسته‌ی زیر می‌رسیم:

$$\dot{x} = f(x, g(x, t), t) = f(x, t).$$

اگر سیستم غیرخطی فوق صریحاً به زمان وابسته نباشد، سیستم همگن نامیده می‌شود در غیر اینصورت ناهمگن نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲. [۲۳] نقطه x_e نقطه تعادل سیستم $\dot{x} = f(x)$ است اگر $f(x_e) = 0$ باشد.

تعریف ۲.۱.۲. [۲۳] سیستم (۱.۲) مفروض است نقطه تعادل $x_e = 0$ را یک نقطه تعادل پایدار حاشیه‌ای گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon, \qquad t \geq 0. \tag{۲.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲. [۲۳] سیستم (۱.۲) را پایدار مجانبی گویند هرگاه پایدار باشد و به‌علاوه $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0. \tag{۳.۲}$$

تعریف ۴.۱.۲. [۲۳] سیستم (۱.۲) را ناپایدار گویند هرگاه پایدار نباشد.

قضیه ۱.۱.۲. سیستم دینامیکی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad t \geq 0. \tag{۴.۲}$$

که در آن A یک ماتریس ثابت است. اگر قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس A نامثبت باشد $Re(\lambda_A) \leq 0$ آن گاه سیستم (۴.۲) در $x_e = 0$ پایدار است. به‌علاوه اگر قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس A منفی $Re(\lambda_A) < 0$ باشند سیستم (۴.۲) در $x_e = 0$ پایدار مجانبی است.

تعریف ۵.۱.۲. [۲۳] نقطه تعادل مبدأ برای سیستم $\dot{x} = f(x)$ پایدار نمایی است اگر دو عدد α و λ (اعداد اکیداً مثبت) وجود داشته باشند که

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{۵.۲}$$

روش خطی سازی لیاپانوف

تعریف ۶.۱.۲. سیستم غیر خطی همگن $\dot{x} = f(x)$ را با نقطه تعادل $x = \circ$ در نظر بگیرید. این سیستم با بکارگیری بسط تیلور و صرف نظر کردن از جملات مرتبه بالاتر به صورت زیر خطی می‌شود:

$$\dot{x} = f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_{x=\circ} x + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right)_{x=\circ} x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\right)_{x=\circ} x^3 + \cdots}_{f_{h.o.t}(x)}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax(t), \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}. \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

$$\dot{x} = f(x,u) = \left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right)_{x,u=\circ} x + \left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right)_{x,u=\circ} u + f_{h.o.t}(x,u),$$

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu, \qquad A = \left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right)_{x,u=\circ}, \qquad B = \left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right)_{x,u=\circ}.$$

قضیه ۲.۱.۲. [۳۰، ۲۳] اگر سیستم $\dot{x} = Ax$ تقریب خطی سیستم غیر خطی $\dot{x} = f(x)$ باشد، آنگاه

الف:اگر قسمت حقیقی کلیه‌ی مقادیر ویژه A اکیداً منفی باشد، آنگاه نقطه‌ی تعادل برای سیستم غیرخطی به طور مجانبی پایدار است.

ب: اگر قسمت حقیقی حداقل یکی از مقادیر ویژه A اکیداًمثبت باشد، آنگاه نقطه تعادل برای سیستم غیر خطی ناپایدار است.

ج: اگر سیستم خطی شده به‌صورت حاشیه‌ای پایدار باشد، آنگاه در مورد پایداری نقطه تعادل سیستم غیرخطی نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت. یعنی، ممکن است سیستم غیرخطی پایدار، به طور مجانبی پایدار یا ناپایدار باشد.

روش دوم لیاپانوف (روش مستقیم):

فلسفه روش مستقیم لیاپانوف این است که اگر انرژی کل یک سیستم با گذشت زمان مستمراً تلف شود، آنگاه سیستم نهایتاً در یک نقطه تعادل ساکن می‌شود. این انرژی کل را تابع لیاپانوف می‌نامیم و همیشه یک تابع معین مثبت (نیمه معین) است.

تعریف ۷.۱.۲. [۲۳] تابع پیوسته اسکالر $V(x)$ به طور موضعی معین مثبت است اگر $V(\circ) = \circ$ و در یک ناحیه به شعاع R

$$\forall x \neq \circ : V(x) > \circ.$$

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر تعریف فوق در تمام فضای حالت صدق کند، آنگاه $V(x)$ به طور سراسری معین مثبت است.

ملاحظه ۲.۱.۲. اگر $V(x) \geq 0 : \forall x \neq 0$، آنگاه $V(x)$ نیمه معین مثبت نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۲. اگر در ناحیه‌ای به شعاع R تابع اسکالر $V(x)$ معین مثبت باشد و مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد، اگر مشتق زمانی آن در امتداد هر مسیر حالت از سیستم، نیمه معین منفی $\dot{V}(x) \leq 0$ باشد، آنگاه $V(x)$ یک تابع لیاپانوف نامیده می‌شود.

۱.۱.۲ تحلیل پایداری سیستم‌های خطی با روش دوم لیاپانوف

سیستم خطی همگن $\dot{x} = Ax(t)$ را با تابع لیاپانوف $V(x) = x^T Px$ در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = (Ax)^T Px + x^T PAx \\ &= x^T(A^T P + PA)x = -x^T Qx, \quad P^T = P.\end{aligned}$$

مشخصاً برای اینکه مشتق تابع لیاپانوف منفی باشد، باید یک ماتریس Q معین مثبت وجود داشته باشد.

یعنی در معادله $A^T P + PA = -Q$ که معادله لیاپانوف نامیده می‌شود، به ازای یک P معین مثبت یک Q معین مثبت وجود داشته باشد تا طبق قضیه لیاپانوف سیستم خطی پایدار مجانبی باشد. ولی ممکن است که سیستم پایدار باشد ولی به ازای یک P معین مثبت، یک Q معین مثبت یافت نشود. روش معقول آن است که یک Q معین مثبت انتخاب کنیم و از معادله $A^T P + PA = -Q$ تعیین کنیم که آیا P معین مثبت هست یا خیر؟ اگر P معین مثبت بود، آنگاه V تابع لیاپانوف است و سیستم پایدار مجانبی خواهد بود.

پایداری مجانبی یک خاصیت بسیار مهم در تحلیل پایداری سیستم‌های کنترل است. اعمال قضایای نقطه تعادل در اثبات این خاصیت اغلب بسیار مشکل است زیرا در اغلب موارد مشتق تابع لیاپانوف نیمه معین منفی می‌گردد. علی رغم این، خوشبختانه به کمک قضایای مجموعه نامتغیر قادر هستیم که پایداری مجانبی سیستم را تعیین کنیم.

تعریف ۹.۱.۲. [۳۰، ۲۳] مجموعه M برای یک سیستم دینامیکی یک مجموعه نامتغیر است اگر هر مسیر سیستم که از نقطه‌ای در M شروع می‌شود، در همه زمان‌های آتی نیز در Mباقی بماند. یعنی

$$if \quad x(0) \in M \quad \Rightarrow \quad x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

قضیه ۳.۱.۲. [۲۳، ۳۰] **قضیه مجموعه نامتغیر:**

سیستم تغییرناپذیر با زمان $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که $V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر (با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته) باشد که $\forall x \in \Omega, \quad \dot{V}(x) \leq 0$، $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ و M بزرگترین زیر مجموعه نامتغیر در E باشد، آنگاه:

$$\forall \quad x(0) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad x(t) \in M, \qquad t \to \infty$$

- اگر مجموعه M تنها شامل مبدأ باشد، پایداری مجانبی سراسری تضمین می‌شود.
- اگر شرط به صورت شعاعی بیکران نیز برقرار باشد، پایداری مجانبی سراسری تضمین می‌شود.

روش کراسوفسکی:

در این روش یک شکل ساده برای تابع لیاپانوف یک سیستم غیرخطی به فرم $\dot{x} = f(x)$ ارائه می‌شود که به شکل زیر می‌باشد:

$$V(x) = f^T(x)f(x)$$

قضیه ۴.۱.۲. [۲۳، ۳۰][قضیه‌ی کراسوفسکی:] سیستم ناهمگن $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید که نقطه‌ی تعادل آن مبدأ می‌باشد. فرض کنید $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ ماتریس ژاکوبین سیستم باشد.
–اگر ماتریس $F = A + A^T$ در همسایگی Ω معین منفی باشد، آنگاه نقطه‌ی تعادل مبدأ برای سیستم فوق پایدار مجانبی خواهد بود و تابع V تابع لیاپانفی برای سیستم مذکور می‌باشد.

نکته ۱.۱.۲. ماتریس F را معین منفی گویند اگر $-F$ معین مثبت باشد.

–اگر Ω تمام فضای حالت $\mathbb{R}^n$ باشد و $V(x)$ به‌صورت شعاعی بی‌کران باشد آنگاه نقطه‌ی تعادل به‌صورت سراسری پایدار مجانبی خواهد بود.

روش کراسوفسکی تعمیم یافته

سیستم ناهمگن $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید که نقطه‌ی تعادل آن مبدأ میباشد. فرض کنید $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ ماتریس ژاکوبین سیستم باشد. شرط لازم و کافی برای اینکه مبدأ نقطه تعادل پایدار مجانبی این سیستم باشد این است که دو ماتریس معین مثبت Q و P وجود داشته باشند که

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow F = A^T P + PA + Q \leq 0,$$

یعنی در همسایگی محذوف Ω از مبدأ، نیمه معین منفی باشد آنگاه تابع لیاپانوف پیشنهادی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$V(x) = f^T(x)Pf(x).$$

ملاحظه ۳.۱.۲. روش‌هایی که تاکنون بیان شد، روش‌های مبتنی بر ریاضیات هستند. گاهی می‌توان با استفاده از خواص فیزیکی سیستم مانند انرژی جنبشی و پتانسیل، تابع لیاپانوف را برای سیستم‌های واقعی پیشنهاد کرد.

فصل ۳

پایداری سیستم‌های دینامیکی مرتبه کسری بر اساس تابع لیاپانوف

در سیستم‌های غیرخطی، روش مستقیم لیاپانوف (روش دوم لیاپانوف) یک راه برای آنالیز پایداری مستقیم بدون حل صریح معادله دیفرانسیل فراهم دیده است. این روش ایده‌ای را سازماندهی می‌کند که نشان می‌دهد سیستم پایدار است اگر یک تابع منتخب لیاپانوف برای سیستم وجود داشته باشد. روش مستقیم لیاپانوف یک شرط کافی برای نشان دادن پایداری سیستم‌هاست، به این معنی که بدون یافتن تابع منتخب لیاپانوف می‌توان نتیجه گرفت سیستم پایدار است.

در این فصل باتوجه به اهمیت کاربرد حساب کسری در سیستم‌های غیرخطی، روش مستقیم تعمیم یافته لیاپانوف وپایداری تعمیم یافته میتاگ لفلر را پیشنهاد می‌کنیم. برنامه های حساب کسری در واقعیت ممکن ومقرون به صرفه هستند [۱۳]. سه مرجع [۱۹، ۳۲، ۱۴] به طور جدی مربوط به بررسی مسائل گوناگون پایداری سیستم‌های مرتبه کسری هستند.

۱.۳ تابع میتاگ لفلر

[۱۲]مانند تابع نمایی که بارها در حل سیستم‌های مرتبه صحیح استفاده شده تابع میتاگ لفلر در حل سیستم‌های مرتبه کسری استفاده شده است که به‌صورت زیرتعریف شده است:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \tag{۱.۳}$$

که در آن $\alpha > 0$ و $z \in \mathbb{C}$ بعلاوه تابع میتاگ لفلر با دو پارامتر به صورت زیر به کار می‌رود:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \tag{۲.۳}$$

که در آن $\alpha > 0$، $\beta > 0$، $z \in \mathbb{C}$، برای $\beta = 1$ داریم $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z)$ همچنین $E_{1,1}(z) = e^x$. به‌علاوه تبدیل لاپلاس میتاگ لفلر با دو پارامتر به صورت زیر است:

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda}, \qquad (\mathbb{R}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}). \tag{۳.۳}$$

به طوریکه $t \geq 0$ و s یک متغیر در دامنه لاپلاس است. $\mathbb{R}(s)$ قسمت حقیقی s تعریف شده است و L برای تبدیل لاپلاس بکار می‌رود.

۲.۳ پیوستگی لیپ شیتز و لیپ‌شیتز موضعی

در آنالیز ریاضی، پیوستگیِ لیپشیتز شکل قویتری از پیوستگی برای توابع است که در آن تابع از نظر سرعت تغییرات محدود است. این مفهوم توسط رودلف لیپشیتز ریاضیدان آلمانی معرفی شد. مفهوم پیوستگی لیپشیتز، مفهومی ضعیفتر از مشتق پذیری و قویتر از پیوستگی است. هر تابع پیوسته ی لیپشیتز، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته ای پیوسته ی لیپشیتز نیست. همچنین هر تابع مشتق پذیری پیوسته ی لیپ‌شیتز است، ولی هر تابع پیوسته‌ی لیپ‌شیتز لزوماً مشتق‌پذیر نیست.

تابع $f(t,x)$ در ناحیه $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ نسبت به x لیپ‌شیتز است هرگاه ثابت $K > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $(t,x),(t,y) \in U$ رابطه زیر برقرار باشد

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K(x-y). \tag{۴.۳}$$

تابع $f(t,x)$ را در ناحیه U به طور موضعی لیپ‌شیتز گوییم هرگاه در یک همسایگی هر نقطه $(t,x) \in U$ لیپ‌شیتز باشد.

۱.۲.۳ شرط لیپ‌شیتز و سیستم مرتبه کسری

سیستم مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$${}_{0}D_t^{\alpha}x(t) = f(t,x) \tag{۵.۳}$$

به طوریکه $\alpha \in (0,1)$ و D نماد عملگر کسری کاپوتو یا ریمان-لیوویل باشد. اگر $x=0$ یک نقطه تعادل سیستم (۵.۳) باشد و f قطعه‌ای پیوسته نسبت به t و نسبت به x لیپ‌شیتز با ثابت لیپ‌شیتز l آنگاه داریم

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| E_\alpha(l(t-t_0)^\alpha), \tag{۶.۳}$$

به طوریکه $\alpha \in (0,1)$. (برای جزئیات بیشتر به [۱۲] مراجعه شود.)

۳.۳ پایداری تعمیم یافته میتاگ لفلر

پایداری لیاپانوف یک ابزار مهم برای پایداری سیستم‌های غیرخطی فراهم می‌کند . اینجا از روش مستقیم لیاپانوف استفاده می‌شود. روش مستقیم لیاپانوف که شامل پیدا کردن یک تابع منتخب لیاپانوف برای سیستم غیرخطی داده شده است. اگر یک چنین تابعی وجود داشته باشد سیستم پایدار است.

روش مستقیم لیاپانوف برای یافتن یک تابع مناسب بکار می‌رود. بخاطر داشته باشید که روش مستقیم لیاپانوف یک شرط کافی است به این معنی که اگر نتوان یک تابع منتخب لیاپانوف پیدا کرد برای نتیجه گرفتن خاصیت پایداری سیستم ممکن است سیستم هنوز هم پایدار باشد و نتوان ادعا کرد سیستم پایدار نیست. در این بخش ما روش مستقیم لیاپانوف را با در نظر گرفتن ترکیب عملگر کسری توسعه دادیم. سیستم دینامیکی غیرخطی خودش می‌تواند مرتبه کسری باشد همانطور که تابع لیاپانوف می‌تواند به مرتبه کسری زمانی تغییر حالت دهد. ابتدا پایداری به مفهوم میتاگ لفلر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۳. [۱۲](پایداری میتاگ لفلر) جواب (۵.۳) پایدار میتاگ لفلر گفته می‌شود اگر

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)] E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b \tag{۷.۳}$$

که در آن t_0 زمان اولیه است و $\alpha \in (0,1)$ و $\lambda \geq 0$ و $b > 0$ و $m(0)=0$ و $m(x) \geq 0$ و $m(x)$ با ثابت لیپ‌شیتز m_0 نسبت به $x \in \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ لیپ‌شیتز موضعی است.

تعریف ۲.۳.۳. [۱۲](پایداری تعمیم یافته میتاگ لفلر) جواب (۵.۳) پایدار تعمیم یافته میتاگ لفلر است اگر

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)](t-t_0)^{-\gamma} E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b \tag{۸.۳}$$

که در آن t_0 زمان اولیه و $\alpha \in (0,1)$ و $-\alpha < \gamma \leq 1-\alpha$ و $\lambda \geq 0$ و $b > 0$ و $m(0)=0$ و $m(x) \geq 0$ و $m(x)$ با ثابت لیپ‌شیتز m_0 نسبت به $x \in \mathbb{B} \in \mathbb{R}^n$ لیپ‌شیتز موضعی است.

ملاحظه ۱.۳.۳. [۱۲] پایداری میتاگ لفلر و پایداری تعمیم یافته‌ی میتاگ لفلر پایداری مجانبی را تضمین می‌کند.

۴.۳ بسط مرتبه کسری روش مستقیم لیاپانوف

[۱۲] با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف می‌توان به پایداری مجانبی دست یافت. در این بخش روش مستقیم لیاپانوف را برای سیستم‌های مرتبه کسری بسط می‌دهیم تا پایداری میتاگ لفلر را بدست آوریم.

قضیه ۱.۴.۳. [۱۲] فرض کنید $x=0$ نقطه تعادل سیستم (۵.۳) باشد و $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n$ یک دامنه شامل مبدأ باشد. فرض کنید $V(t,x(t)) : [0,\infty)\times\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته‌ی مشتق‌پذیر و لیپشیتز موضعی نسبت به x باشد بطوریکه

$$\alpha_1\|x\|^a\leq V(t,x(t))\leq\alpha_2\|x\|^{ab}, \tag{۹.۳}$$

$$ {}_{0}^{c}D_t^{\beta}V(t,x(t))\leq-\alpha_3\|x\|^{ab}, \tag{۱۰.۳}$$

که در آن $t\geq 0$، $x\in\mathbb{D}$، $\beta\in(0,1)$ و α_1، α_2، α_3 و a,b ثابت مثبت دلخواه هستند. آنگاه $x=0$ پایدار میتاگ–لفلر است. بطورکلی اگر فرض را روی $\mathbb{R}^n$ بگیریم $x=0$ پایدار سراسری میتاگ–لفلر است.

اثبات. طبق معادلات (۹.۳) و (۱۰.۳)

$$ {}_{0}^{c}D_t^{\beta}V(t,x(t))\leq-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V(t,x(t))$$

یک تابع غیر منفی $M(t)$ وجود دارد بطوریکه در عبارت زیر صدق می‌کند

$$ {}_{0}^{c}D_t^{\beta}V(t,x(t))+M(t)=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V(t,x(t)). \tag{۱۱.۳}$$

تبدیل لاپلاس گرفتن از (۱۱.۳) نتیجه می‌دهد

$$s^{\beta}V(s)-V(0)s^{\beta-1}+M(s)=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}V(s), \tag{۱۲.۳}$$

بطوریکه $V(0)=V(0,x(0))$ یک مقدار ثابت غیر منفی است و $V(s)=L\{V(t,x(t))\}$ بنابراین

$$V(s)=\frac{V(0)s^{\beta-1}-M(s)}{s^{\beta}+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}$$

اگر $x(0)=0$ آنگاه $V(0)=0$، جواب (۵.۳) $x=0$ است.

اگر $x(0)\neq 0$ و $V(0)>0$، چون $V(t,x)$ لیپشیتز موضعی نسبت به x است جواب منحصربفرد (۱۱.۳) به‌صورت زیر است:

$$V(t)=V(0)E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)-M(t)*\left[t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)\right] \tag{۱۳.۳}$$

از آنجایی که هردوی $t^{\beta-1}$ و $E_{\beta,\beta}(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta})$ توابع غیر منفی هستند، بنابراین

$$V(t) \leq V(0)E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right). \tag{۱۴.۳}$$

با جایگذاری (۱۴.۳) در (۹.۳) حاصل می‌شود

$$\|x(t)\| \leq \left[\frac{V(0)}{\alpha_1}E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{a}},$$

که در آن $\frac{V(0)}{\alpha_1} > 0$ برای $x(0) \neq 0$. فرض کنید $m(x(0)) = \frac{V(0)}{\alpha_1} = \frac{V(0,x(0))}{\alpha_1} \geq 0$ لذا داریم

$$\|x(t)\| \leq \left[m(x(0))E_{\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{a}}.$$

که در آن $m(x(0)) = 0$ اگروتنها اگر $x(0) = 0$. از آنجایی که $V(t,x)$ لیپ‌شیتز موضعی نسبت به x و $V(0,x(0)) = 0$ اگر وتنها اگر $x(0) = 0$، بنابراین $m(x(0)) = \frac{V(0,X(0))}{\alpha_1}$ لیپ‌شیتز موضعی نسبت به $x(0)$ و به علاوه $m(0) = 0$ است لذا می‌توان نتیجه گرفت که سیستم (۵.۳) پایدار میتاگ-لفلر است. □

۵.۳ یک خاصیت مهم مشتق کسری کاپوتو

دراین بخش یک لم بیان می‌شود که با استفاده ازآن می‌توان یک تابع منتخب لیاپانوف برای اثبات پایداری بسیاری از سیستم‌های مرتبه کسری پیدا کرد.

لم ۱.۵.۳. [۵] فرض کنید $x(t) \in \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر و پیوسته باشد در این‌صورت برای هر زمان ثابت $t \geq t_0$

$$\frac{1}{2}{}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x^2(t) \leq x(t){}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) \qquad \forall\alpha \in (0,1) \tag{۱۵.۳}$$

اثبات. نامساوی (۱۵.۳) معادل است با

$$x(t){}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) - \frac{1}{2}{}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x^2(t) \geq 0 \qquad \forall\alpha \in (0,1) \tag{۱۶.۳}$$

با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو می‌توان نوشت

$${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\mathrm{d}\tau \tag{۱۷.۳}$$

و به همین صورت

$$\frac{1}{2}{}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\mathrm{d}\tau \tag{۱۸.۳}$$

بنابراین عبارت (۱۶.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{[x(t)-x(\tau)]\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\mathrm{d}\tau \geq 0 \tag{۱۹.۳}$$

متغیر کمکی $y(\tau)=x(t)-x(\tau)$ راتعریف می‌کنیم پس داریم $y'(\tau)=\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$ پس می‌توان عبارت (۱۹.۳) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y(\tau)y'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\mathrm{d}\tau \tag{۲۰.۳}$$

با انتگرال گیری جزبه جز از عبارت (۲۰.۳) داریم

$$-\left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}}\right]\Bigg|_{\tau=t}+\left[\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}}\right]+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}\mathrm{d}\tau \geq 0 \tag{۲۱.۳}$$

با بررسی قسمت اول عبارت (۲۱.۳) که $t=\tau$ و آنالیز حد متناظر آن داریم

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to t}\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}}&=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[x(t)-x(\tau)]^2}{(t-\tau)^{\alpha}}\\&=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[x^2(t)-2x(t)x(\tau)+x^2(\tau)]}{(t-\tau)^{\alpha}}\end{aligned} \tag{۲۲.۳}$$

بااستفاده از قاعده هوپیتال

$$\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[x^2(t)-2x(t)x(\tau)+x^2(\tau)]}{(t-\tau)^{\alpha}}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[-2x(t)\dot{x}(\tau)+2x(\tau)\dot{x}(\tau)]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}} \tag{۲۳.۳}$$

$$=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\tau\to t}\frac{[2x(t)\dot{x}(\tau)-2x(\tau)\dot{x}(\tau)](t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha}=0 \tag{۲۴.۳}$$

بنابراین عبارت (۲۱.۳) می‌شود

$$\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}\mathrm{d}\tau \geq 0 \tag{۲۵.۳}$$

عبارت (۲۵.۳) به وضوح درست است و اثبات نتیجه گرفته می‌شود. □

لم ۲.۵.۳. (اصل مقایسه‌ی کسری) فرض کنید ${}_0^cD_t^{\beta}x(t)\geq {}_0^cD_t^{\beta}y(t)$ و $x(0)=y(0)$ به طوریکه $\beta\in(0,1)$ در این صورت $x(t)\geq y(t)$.

اثبات. چون ${}_0^CD_t^{\beta}x(t)\geq {}_0^CD_t^{\beta}y(t)$ پس یک تابع غیرمنفی $m(t)$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$${}_0^CD_t^{\beta}x(t)=m(t)+{}_0^CD_t^{\beta}y(t). \tag{۲۶.۳}$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله فوق داریم

$$s^{\beta}X(s)-s^{\beta-1}x(0)=M(s)+s^{\beta}Y(s)-s^{\beta-1}y(0). \tag{۲۷.۳}$$

چون $x(0)=y(0)$ پس

$$X(s)=s^{-\beta}M(s)+Y(s). \tag{۲۸.۳}$$

از عبارت بالا معکوس لاپلاس می‌گیریم:

$$x(t)={}_{0}D_t^{-\beta}m(t)+y(t).$$

طبق $m(t)\geq 0$ و ${}_aD_t^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$ ثابت می‌شود

$$x(t)\geq y(t) \tag{۲۹.۳}$$

□

ملاحظه ۱.۵.۳. لم (۱.۵.۳) برای $x(t)\in\mathbb{R}^n$ برقرار است $\underset{\forall t\geq t_0}{\forall\alpha\in}(0,1)$

$$\frac{1}{2}{}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x^T(t)x(t)\leq x^T(t){}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) \tag{۳۰.۳}$$

قضیه ۱.۵.۳. برای سیستم مرتبه کسری

$${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}x(t)=f(x(t)) \tag{۳۱.۳}$$

به طوریکه $\alpha\in(0,1)$ و $x=0$ نقطه تعادل است و $x(t)\in\mathbb{R}$. اگر شرایط زیر برقرار باشد

$$\forall x,\qquad x(t)f(x(t))\leq 0 \tag{۳۲.۳}$$

در این صورت سیستم (۳۱.۳) در مبدأ پایداراست.
اگر

$$\forall x\neq 0\qquad x(t)f(x(t))<0 \tag{۳۳.۳}$$

در این صورت سیستم (۳۱.۳) در مبدأ پایدار مجانبی است.

اثبات. فرض کنید تابع منتخب لیاپانوف زیر را پیشنهاد می‌دهیم که مثبت معین است

$$v(x(t))=\frac{1}{2}x^2(t) \tag{۳۴.۳}$$

استفاده از لم (۱.۵.۳) نتیجه می‌دهد

$$ {}_{t_\circ}^{c}D_t^{\alpha} v(x(t)) \leq x(t) {}_{t_\circ}^{c}D_t^{\alpha} x(t) \tag{۳۵.۳}$$

اگر $x(t)f(x(t)) \leq \circ$ پس $x(t) {}_{t_\circ}^{c}D_t^{\alpha} x(t) \leq \circ$ و مشتق کسری (۳۵.۳) از تابع لیاپانوف نتیجه می‌دهد که نیمه معین منفی است. کاربرد اصل مقایسه کسری ۲.۵.۳ اینجا نشان داده می‌شود که $v(x(t)) \underset{\forall x}{\leq} v(x(\circ))$.

براساس تعریف تابع $v(x(t))$ داریم

$$ \frac{1}{2}x^2(t) \leq \frac{1}{2}x^2(\circ), \qquad \forall x \tag{۳۶.۳}$$

براساس تعریف پایداری در مفهوم لیاپانوف [۱۲] برای عبارت (۳۶.۳) مبدأ سیستم (۳۱.۳) پایدار لیاپانوف است.

اگر $x(t)f(x(t)) < \circ, \forall x \neq \circ$ در اینصورت $x(t) {}_{t_\circ}^{c}D_t^{\alpha} x(t) < \circ$ و مشتق کسری (۳۵.۳) از تابع لیاپانوف، معین منفی می‌شود. ازرابطه داده شده بین تابع مثبت معین و تابع مرتبه k در [۳۱] و استفاده از قضیه (۱.۴.۳) می‌توان نتیجه گرفت مبدأ سیستم (۳۱.۳) پایدار مجانبی است. □

ملاحظه ۲.۵.۳. وقتی سیستم (۳۱.۳) برداری باشد و $x(t) \in \mathbb{R}^n$ نتیجه قابل قبول است. با استفاده از تابع منتخب لیاپانوف $v(x(t)) = \frac{1}{2}x^T x(t)$ و لم (۱.۵.۳) می‌توان اثبات کرد.

۶.۳ روش مستقیم کسری لیاپانوف با استفاده از تابع مرتبه k

[۱۲] در این بخش تابع‌های مرتبه k برای آنالیز روش مستقیم کسری لیاپانوف به‌کار گرفته می‌شوند.

تعریف ۱.۶.۳. [۱۲] یک تابع پیوسته‌ی $\gamma : [\circ, t) \longrightarrow [\circ, \infty)$ تابع مرتبه‌ی k گفته می‌شود اگر اکیداً صعودی باشد و $\gamma(\circ) = \circ$.

قضیه ۱.۶.۳. فرض کنید $x = \circ$ یک نقطه تعادل برای سیستم مرتبه کسری ناهمگن (۵.۳) باشد فرض کنید یک تابع لیاپانوف $V(t, x(t))$ و تابع $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ از مرتبه k موجود باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$ \alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{۳۷.۳}$$

و

$$ {}_{\circ}^{C}D_t^{\beta} V(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\|x\|) \tag{۳۸.۳}$$

به طوریکه $\beta \in (\circ, 1)$. آنگاه سیستم (۵.۳) پایدار مجانبی است.

اثبات. از (۳۷.۳) و (۳۸.۳) داریم

$$ {}_0^C D_t^\beta V \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) $$

با استفاده از لم (۲.۵.۳) و نامساوی (۳۸.۳) داریم $D^\beta V(t,x) \leq 0 = D^\beta 0 \Rightarrow V(t,x) \leq 0$ یعنی $V(t,x(t))$ کراندار است با جواب غیر منفی منحصر بفرد معادله دیفرانسیل اسکالر زیر

$$ {}_0^C D_t^\beta g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))), \quad g(0) = v(0, x(0)). \tag{۳۹.۳} $$

طبق تعریف نقطه تعادل اگر $g(0) = 0$، برای $t \geq 0$، $g(t) = 0$، چون $\alpha_3(\alpha_2^{-1})$ تابع مرتبه k است. در غیر اینصورت، $g(t)$ روی بازه‌ی $[0, \infty)$ بیشتر یا مساوی صفر است. پس طبق (۳۹.۳) ${}_0^C D_t^\beta g(t) \leq 0$. از اثبات مشابه (۲.۵.۳) به ازای $t \in (0, +\infty)$ داریم

$$ g(t) \leq g(0) \tag{۴۰.۳} $$

پس به تناقض رسیدیم و (۳۹.۳) پایدار مجانبی است. □

دو حالت زیر را می‌توان مطرح کرد:

- فرض کنید یک ثابت $t_1 \geq 0$ وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$ {}_0^C D_{t_1}^\beta g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t_1))) = 0 $$

نشان می‌دهیم برای هر $t \geq t_1$

$$ {}_0^C D_t^\beta g(t) = {}_{t_1}^C D_t^\beta g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))). \tag{۴۱.۳} $$

از تعریف نقطه تعادل داریم $x = 0$ نقطه تعادل ${}_{t_1}^C D_t^\beta g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t)))$ است. پس اگر $g(t_1) = 0$ آنگاه به ازای $t \geq t_1$، $g(t) = 0$.

- فرض کنید یک ثابت مثبت ϵ وجود دارد بطوریکه برای هر $t \geq 0$، $g(t) \geq \epsilon$. پس طبق (۴۰.۳) داریم،

$$ 0 < \epsilon \leq g(t) \leq g(0), \qquad t \geq 0. \tag{۴۲.۳} $$

با جایگذاری (۴۲.۳) در (۳۹.۳) داریم

$$ \begin{aligned} -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))) &\leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\epsilon)) \\ &= -\frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\epsilon))}{g(0)} g(0) \leq -l g(t), \end{aligned} \tag{۴۳.۳} $$

که در آن $0 < l = \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\epsilon))}{g(0)}$، بنابراین

$$ {}_0^C D_t^\beta g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))) \leq -l g(t) \tag{۴۴.۳} $$

از اثبات مشابه در قضیه‌ی (۱.۴.۳) داریم

$$g(t) \leq g(0)E_\beta(-lt^\beta), \tag{۴۵.۳}$$

که با فرض $g(t) \geq \epsilon$ تناقض دارد. براساس موارد ۱و۲ داریم $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. چون $V(t, x(t))$ کراندار است (کران هایش $g(t)$ هستند) از (۳۷.۳) نتیجه می‌شود

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

لم ۱.۶.۳. فرض کنید $\beta \in (0, 1)$ و $M(0)$ یک ثابت غیرمنفی دلخواه باشد، آنگاه

$$^C_0D_t^\beta M(t) \leq {}_0D_t^\beta M(t), \tag{۴۶.۳}$$

به طوریکه D و ^CD به ترتیب عملگر کسری کاپوتو و ریمان هستند.

اثبات. با استفاده از ویژگی (۱۵.۱) داریم

$$^C_0D_t^\beta M(t) = {}_0D_t^{\beta-1}\frac{d}{dt}M(t) = {}_0D_t^\beta M(t) - \frac{M(0)t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}. \tag{۴۷.۳}$$

چون $\beta \in (0, 1)$ و $M(0) \geq 0$ پس $^C_0D_t^\beta M(t) \leq {}_0D_t^\beta M(t)$. □

قضیه ۲.۶.۳. اگر مفروضات قضیه (۱.۶.۳) با جایگذاری $^C_0D_t^\beta$ با $_0D_t^\beta$ برقرار باشد، داریم

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

اثبات. طبق لم (۱.۶.۳) و $V(t, x) \geq 0$ نتیجه می‌شود

$$^C_0D_t^\beta V(t, x(t)) \leq {}_0D_t^\beta V(t, x(t)).$$

که نشان می‌دهد

$$^C_0D_t^\beta V(t, x(t)) \leq {}_0D_t^\beta V(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

از اثبات مشابه در قضیه (۱.۶.۳) بدست می‌آوریم $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ □

۷.۳ مثال‌های عددی

یکی از بیشترین توابع منتخب لیاپانوف استفاده شده برای اثبات پایداری سیستم مرتبه صحیح تابع درجه دوم است، اگرچه در موارد کسری استفاده از آنها ساده نیست.

مثال ۱.۷.۳. سیستم مرتبه کسری خطی متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید به طوریکه $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} ^c_0D_t^\alpha x_1(t) &= -\sin^2(t)x_1(t) - \sin(t)\cos(t)x_2(t) \\ ^c_0D_t^\alpha x_2(t) &= -\sin(t)\cos(t)x_1(t) - \cos^2(t)x_2(t) \end{aligned} \tag{۴۸.۳}$$

برای اثبات پایداری سیستم (۴۸.۳) باید روش مستقیم کلاسیک لیاپانوف را استفاده کنیم [۶]، تابع درجه دوم منتخب لیاپانوف را پیشنهاد می‌کنیم که مثبت معین است

$$v(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) \tag{۴۹.۳}$$

با استفاده از ویژگی مشتق کسری که در [۲۸] آورده شده، $\dot{x}(t) = {}_0^cD_t^{1-\alpha}\,{}_0^cD_t^{\alpha}x(t)$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= -{}_0^cD_t^{1-\alpha}[x_1(t)\sin^2(t) + x_2(t)\sin(t)\cos(t)] \\ \dot{x_2}(t) &= -{}_0^cD_t^{1-\alpha}[x_1(t)\sin(t)\cos(t) + x_2(t)\cos^2(t)] \end{aligned} \tag{۵۰.۳}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V(x_1(t), x_2(t))}{\mathrm{d}t} &= x_1(t)\dot{x_1} + x_2(t)\dot{x_2}(t) \\ &= -x_1(t){}_0^cD_t^{1-\alpha}[x_1(t)\sin^2(t)] - x_1(t){}_0^cD_t^{1-\alpha}[x_2(t)\sin(t)\cos(t)] \\ &- x_2(t){}_0^cD_t^{1-\alpha}[x_2(t)\cos^2(t)] - x_2(t){}_0^cD_t^{1-\alpha}[x_1(t)\sin(t)\cos(t)] \end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

همانطور که می‌توان دید در معادله (۵۱.۳) تعیین یک علامت معین برای مشتق اول تابع لیاپانوف و در نتیجه پایداری آن مشکل است. اگر بسط مرتبه کسری روش مستقیم لیاپانوف بجای آن استفاده شود تابع منتخب لیاپانوف (۴۹.۳) پیشنهاد شده است و با استفاده از ویژگی گفته شده می‌توان نشان داد که

$$ {}_0^cD_t^{\alpha}v(x_1(t)x_2(t)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x_1^{(k)}(t)\,{}_0^cD_t^{\alpha-k}x_1(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x_2^{(k)}(t)\,{}_0^cD_t^{\alpha-k}x_2(t) \tag{۵۲.۳}$$

اگر از لم (۱.۵.۳) استفاده کنیم، کاربرد تابع منتخب لیاپانوف (۴۹.۳) نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} {}_0^cD_t^{\alpha}v(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}x_1^2(t) + \frac{1}{2}{}_0^cD_t^{\alpha}x_2^2(t) \le x_1(t){}_0^cD_t^{\alpha}x_1(t) + x_2(t){}_0^cD_t^{\alpha}x_2(t) \\ &= -[x_1(t)\sin(t) + x_2(t)\cos(t)]^2 \le 0 \end{aligned} \tag{۵۳.۳}$$

مثال ۲.۷.۳. سیستم غیرخطی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید بطوریکه $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} {}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_1(t) &= -x_1(t) + x_2^3(t) \\ {}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \end{aligned} \tag{۵۴.۳}$$

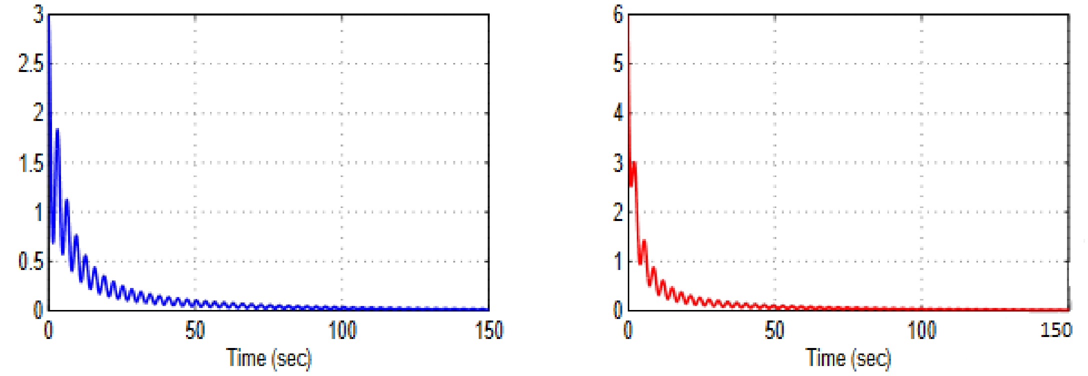
تابع منتخب لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید بطوریکه مثبت معین است

$$v(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t) \tag{۵۵.۳}$$

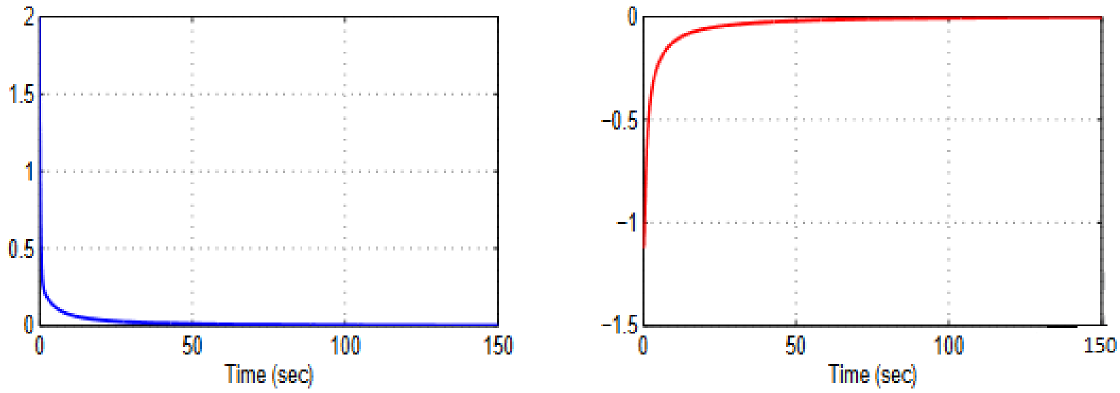
با استفاده از لم (۱.۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} {}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}v(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}{}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_1^2(t) + \frac{1}{4}{}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_2^4(t) &\leq x_1(t){}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t){}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t){}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_1(t) + x_2^3(t){}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x_2(t) \\ &= -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0 \end{aligned} \tag{۵۶.۳}$$

همانطور که می‌توان دید مشتق کسری تابع لیاپانوف معین منفی است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت مبدأ سیستم (۵۴.۳) پایدار مجانبی است.



شکل ۱.۳: رفتار سیستم(۴۸.۳)



شکل ۲.۳: رفتار سیستم(۵۴.۳)

فصل ۴

طراحی کنترل مقاوم برای سیستم‌های کسری دینامیکی خطی

در این فصل قصد داریم به چگونگی طراحی کنترل برای سیستم‌های کسری دینامیکی خطی با پارامترهای نامعین، بپردازیم. این سیستم‌ها بیشتر در مسائل کاربردی یافت می‌شوند. سیستم‌های با متغیر غیر منفی را سیستم‌های مثبت می‌نامیم و نتایج بدست آمده برای سیستم‌های خطی نامعین را برای سیستم‌های کسری نامعین بسط می‌دهیم. در اینجا

- $\mathbb{R}_+^n$ فضای غیر منفی حقیقی n بعدی از $\mathbb{R}^n$ است.

- M^T نشان دهنده‌ی ترانهاده‌ی ماتریس حقیقی مقدار M است.

- یک ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس متزلر [1] نامیده می‌شود اگر مولفه‌های غیرقطری آن غیر منفی باشند. یعنی برای $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$، M متزلر است اگر وقتی $i \neq j$، $m_{ij} \geq 0$.

- یک ماتریس یا بردار غیرمنفی گفته می‌شود اگر تمام مولفه هایش غیر منفی باشند و مثبت است اگر تمام مولفه هایش بزرگتر اکید از صفر باشند.

[1] Metzler

۱.۴ مقدمه

سیستم خطی مرتبه کسری زمان پیوسته همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) \\ 0 < \alpha \leq 1 \\ x_0 \geq 0 \end{cases} \tag{۱.۴}$$

جواب سیستم کسری بصورت زیر است:

$$x(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha})x_0, \tag{۲.۴}$$

که در آن E نماد تابع میتاگ–لفلر است.

تعریف ۱.۱.۴. باتوجه به شرط اولیه $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ سیستم (۱.۴) مثبت است اگر مسیر خروجی $x(t)$ هیچوقت منفی نشود یعنی به ازای هر $\forall t \geq 0$ داشته باشیم، $x(t) \in \mathbb{R}^n_+$.

لم ۱.۱.۴. سیستم مرتبه کسری زمان پیوسته (۱.۴) مثبت است اگر وتنها اگر A یک ماتریس متزلر باشد.

سیستم خطی مرتبه کسری زمان پیوسته

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ -\underline{u} \leq u \leq \bar{u}, \\ x(0) = x_0 \geq 0. \end{cases} \tag{۳.۴}$$

را در نظر بگیرید. حال دو نتیجه اساسی از پایداری سیستم مرتبه کسری همگن (۱.۴) که در [۱۲] و [۳۳] آمده را استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۴. [۱۲] فرض کنید یک تابع لیاپانوف $V(t, x(t))$ و تابع $\beta_i, (i = 1, 2, 3)$ از مرتبه k وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \beta_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq \beta_2(\|x(t)\|) \\ {}^{C}D^{\alpha}V(t, x(t)) \leq -\beta_3(\|x(t)\|) \end{cases} \tag{۴.۴}$$

بطوریکه $\alpha \in (0, 1)$، آنگاه سیستم (۳.۴) پایدار مجانبی است .(تمام این قضایا برای مشتق ریمان–لیوویل نیز برقرار است.)

قضیه ۲.۱.۴. [۳۳] سیستم (۳.۴) با کنترل کراندار u پایدار است اگر وتنها اگر

$$|arg(\lambda_i(A))| > \frac{\alpha\pi}{۲}, \quad i = ۱, \ldots, n, \tag{۵.۴}$$

بطوریکه $\lambda_i(A)$، i مین مقدار ویژه از ماتریس A باشد.

ملاحظه ۱.۱.۴. شرایط پایداری بالا معادل با این است که ماتریس A در یک ناحیه بزرگ مقدار ویژه دارد که می‌تواند شامل یک بخش از نیمه راست صفحه مختلط باشد. اگرچه برای سیستم‌های مثبت کسری در [۲۶] نشان داده شده که مقدار ویژه سیستم فقط سمت چپ صفحه مختلط است. لذا هر سیستم مثبت کسری لزوماً پایدار نیست.

اگر یک کنترل پس خورد به صورت

$$u(t) = Kx(t) \tag{۶.۴}$$

بکار ببریم، یک سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = (A + BK)x(t), \\ ۰ < \alpha \leq ۱, \\ x_۰ \geq ۰, \\ -\underline{u} \leq u \leq \overline{u}. \end{cases} \tag{۷.۴}$$

- سیستم کسری حلقه بسته مثبت است.
- سیستم کسری حلقه بسته پایدار مجانبی است در حالی که در قیود متقارن کنترل صدق کند.

مسئله‌ای که ما با آن سروکار داریم طراحی کنترل کننده است به طوریکه پایداری مجانبی حاصل می‌شود. باتوجه به شرایطی که برای A, B وجود دارد، سه قضیه اساسی ارائه شده است:

- فرض اول: ماتریس‌های A, B معین باشد.
- فرض دوم: ماتریس‌های A, B نامعین باشند و در شرایط زیر صدق کنند

$$A^- \leq A \leq A^+, \qquad B^- \leq B \leq B^+ \tag{۸.۴}$$

- فرض سوم: ماتریس‌های A, B معین باشند ولی به شکل ترکیب محدب به صورت

$$\begin{aligned} A = \sum_{s=۱}^{N} \delta_s A_s; \qquad B = \sum_{s=۱}^{N} \delta_s B_s; \\ \delta_s \geq ۰; \qquad \sum_{s=۱}^{N} \delta_s = ۱. \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

لم ۲.۱.۴. [۸] فرض کنید بردار مثبت $\lambda \in \mathbb{R}^n$ و بردارهای $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}^m$ وجود دارند که در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$A\lambda + B\sum_{i=1}^{n} y_i < 0$$
$$a_{ij}\lambda_j + b_i y_j \geq 0, \quad i \neq j \tag{۱۰.۴}$$

به طوری‌که a_{ij} درایه (ij) ماتریس A و b_i سطرهای ماتریس B باشند، در اینصورت سیستم حلقه بسته (۷.۴) پایدار مجانبی است. یعنی وضعیت به ازای تمام $x_0 \geq 0$ غیرمنفی است، بنابراین وضعیت پایدار شده پس خورد با

$$K = [\frac{y_1}{\lambda_1} \frac{y_2}{\lambda_2} \cdots \frac{y_n}{\lambda_n}]. \tag{۱۱.۴}$$

داده شده است.

قضیه ۳.۱.۴. [۸] برای سیستم (۷.۴) با فرض ۱ مسئله برنامه ریزی خطی (LP) زیر را با متغیرهای $\overline{x} = [\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n]^T \in \mathbb{R}^n$، $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^m$ و $z_1, \dots, z_n \in R^m$ در نظر بگیرید:

$$(LP1)\begin{cases} A\overline{x} + B(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i) < 0, \\ \overline{x} > 0, \\ y_i \geq 0, \\ z_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \overline{u}, \\ \sum_{i=1}^{n} z_i \leq \underline{u}, \\ a_{ij}\overline{x}_j + b_i(y_j - z_j) \geq 0, \quad i \neq j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{۱۲.۴}$$

آنگاه سیستم حلقه بسته (۷.۴) برای هر شرط اولیه‌ی $0 < x_0 \leq \overline{x}$ تحت کنترل کراندار پس خورد $-\underline{u} \leq u = Kx \leq \overline{u}$ با $K = [\overline{x}_1^{-1}(y_1 - z_1) \dots \overline{x}_n^{-1}(y_n - z_n)]$ مثبت و پایدار مجانبی است.

اثبات. بردار مثبت $\bar{x} = [\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n]$ و بردارهای غیر منفی $y_1, \cdots, y_n$ و $z_1, \cdots, z_n$ و $K = [\overline{x}_1^{-1}(y_1 - z_1) \dots \overline{x}_n^{-1}(y_n - z_n)]$ را در نظر بگیرید، در این صورت برای $i \neq j = 1, \cdots, n$ داریم

$$a_{ij} + b_i\bar{x}_j^{-1}(y_j - z_j) = a_{ij} + b_i k_j = (A + BK)_{ij} \geq 0$$

ماتریس $A + BK$ متزلر است، نامعادله $A\bar{x} + B\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i) < 0$ معادل با $(A + BK)\bar{x} < 0$ است. از این رو $\bar{x} > 0$، با استفاده از لم (۲.۱.۴) نتیجه می‌گیریم سیستم (۷.۴) پایدار مجانبی است. با استفاده از نامعادلات $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \overline{u}$ و $\sum_{i=1}^{n} z_i \leq \underline{u}$ که $y_i \geq 0$ و $z_i \geq 0$ $(\forall i = 1, \cdots, n)$ نشان

می‌دهیم $-\underline{u} \leq u = Kx \leq \overline{u}$. فرض می‌کنیم $K_۱\bar{x} = \sum_{i=۱}^{n} y_i$ و $K_۲\bar{x} = \sum_{i=۱}^{n} z_i$. با یادآوری $y_i \geq ۰$ و $z_i \geq ۰$ بنابراین $K = K_۱ - K_۲, K_۱ \geq ۰, K_۲ \geq ۰$. از آنجایی که $۰ \leq x(t) \leq \bar{x}$ می‌توان نوشت $۰ \leq K_۱x(t) \leq K_۱\bar{x}$ و $-K_۲\bar{x} \leq -K_۲x(t) \leq ۰$ در نهایت داریم $-K_۲x \leq Kx(t) \leq K_۱\bar{x}$ که بنابر شرط مسئله برنامه ریزی خطی $K_۱\bar{x} \leq \bar{u}$ و $K_۲\bar{x} \leq \underline{u}$ بنابراین $-\underline{u} \leq u = Kx \leq \overline{u}$.

□

قضیه ۴.۱.۴. برای سیستم (۷.۴) با فرض ۲ مسئله LP زیر را با متغیرهای $\overline{x} = [\overline{x}_۱ \dots \overline{x}_n]^T \in \mathbb{R}^n$، $y_۱, \dots, y_n \in \mathbb{R}^m$ و $z_۱, \dots, z_n \in R^m$ در نظر بگیرید:

$$(LP۲)\begin{cases} A^+\overline{x} + B^+\sum_{i=۱}^{n} y_i - B^-\sum_{i=۱}^{n} z_i < ۰, \\ \overline{x} > ۰, \\ y_i \geq ۰, \\ z_i \geq ۰, i = ۱, \dots, n \\ \sum_{i=۱}^{n} y_i \leq \overline{u}, \\ \sum_{i=۱}^{n} z_i \leq \underline{u}, \\ a_{ij}^-\overline{x}_j + b_i^- y_j - b_i^+ z_j \geq ۰,\ i \neq j = ۱, \dots, n. \end{cases} \tag{۱۳.۴}$$

سیستم حلقه بسته (۷.۴) برای هر شرط اولیه‌ی $۰ < x_۰ \leq \overline{x}$ تحت کنترل کراندار پس خورد $-\underline{u} \leq u = Kx \leq \overline{u}$ با $K = [\overline{x}_۱^-۱(y_۱ - z_۱) \dots \overline{x}_n^-۱(y_n - z_n)]$ مثبت و پایدار مجانبی است.

اثبات. فرض کنید $A^- \leq A \leq A^+$ و $B^- \leq B \leq B^+$. از آنجا که $\bar{x} > ۰, y_i > ۰, z_i > ۰$، می‌توان نوشت

$$A^-\bar{x} \leq A\bar{x} \leq A^+\bar{x},$$

$$B^-\sum_{i=۱}^{n} y_i \leq B\sum_{i=۱}^{n} y_i \leq B^+\sum_{i=۱}^{n} y_i$$

و

$$-B^+\sum_{i=۱}^{n} z_i \leq -B\sum_{i=۱}^{n} z_i \leq -B^-\sum_{i=۱}^{n} z_i$$

در نهایت میرسیم به

$$A\bar{x} + B(\sum_{i=۱}^{n} y_i - \sum_{i=۱}^{n} z_i) \leq A^+\bar{x} + B^+\sum_{i=۱}^{n} y_i - B^-\sum_{i=۱}^{n} z_i < ۰$$

که برای درستی نامساوی قضیه (۳.۱.۴) کافی است. با استفاده از استدلال مشابه می‌توان نوشت $a_{ij}\bar{x}_j + b_i(y_j - z_j) \geq a_{ij}^-\bar{x}_j + b_i^- y_j - b_i^+ z_j$ که نشان می‌دهد که رابطه $a_{ij}^-\bar{x}_j + b_i^- y_j - b_i^+ z_j \geq ۰$ برای $i \neq j$ برقرار است.

□

قضیه ۵.۱.۴. مسئله‌ی LP زیر را برای سیستم (۷.۴) با فرض ۳ در نظر بگیرید که در آن $\bar{x} = [\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_n] \in \mathbb{R}^n$، $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}^n$ و $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}^m$:

$$(LP3) \begin{cases} A_s\bar{x} + B_s(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n z_i) < 0, \\ \bar{x} > 0, \\ y_i > 0, \\ z_i > 0, \qquad\qquad i = 1, \cdots, n, s = 1 \cdots, N, \\ \sum_{i=1}^n y_i \leq \bar{u}, \\ \sum_{i=1}^n z_i \leq \underline{u}, \\ (a_s)_{ij}\bar{x}_j + (b_s)_i(y_i - z_j) \geq 0, \qquad i \neq j = 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{۱۴.۴}$$

سیستم حلقه بسته‌ی (۷.۴) برای هر شرط اولیه‌ی $0 < x_0 < \bar{x}$ و کنترل

$$-\underline{u} \leq u = Kx \leq \bar{x}, \tag{۱۵.۴}$$

به طوری‌که $K = [\bar{x}_1^{-1}(y_1 - z_1) \cdots \bar{x}_n^{-1}(y_n - z_n)]$ مثبت وپایدار مجانبی است.

اثبات. فرض کنید $A^- \leq A \leq A^+$ و $B^- \leq B \leq B^+$. از این رو $\bar{x} > 0$، $y_i > 0$، $z_i > 0$، می‌توان نوشت: $A^-\bar{x} \leq A\bar{x} \leq A^+\bar{x}$، $B^- \sum_{i=1}^n y_i \leq B \sum_{i=1}^n y_i \leq B^+ \sum_{i=1}^n y_i$
و

$$-B^+ \sum_{i=1}^n z_i \leq -B \sum_{i=1}^n z_i \leq -B^- \sum_{i=1}^n z_i.$$

به طور خلاصه داریم

$$A\bar{x} + B(\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n z_i) \leq A^+\bar{x} + B^+ \sum_{i=1}^n y_i - B^- \sum_{i=1}^n z_i.$$

در نتیجه،

$$A^+\bar{x} + B^+ \sum_{i=1}^n y_i - B^- \sum_{i=1}^n z_i < 0.$$

برای تحقق نامساوی اول قضیه (۳.۱.۴) کافی است. با استفاده از همان استدلال می‌توان داشت

$$a_{ij}\bar{x}_j + b_i(y_j - z_j) \geq a_{ij}^-\bar{x}_j + b_i^- y_j - b_i^+ z_j \tag{۱۶.۴}$$

که نشان می‌دهد که عبارت $a_{ij}^-\bar{x}_j + b_i^- y_j - b_i^+ zj \geq 0$ به ازای $i \neq j$ برای اثبات نامساوی قبل در قضیه (۳.۱.۴) کافی است. □

۲.۴ مثال‌های عددی

مثال ۱.۲.۴. یک سیستم نامعین توصیف شده با (۷.۴) را در نظر بگیرید به طوریکه

$$A^- = \begin{bmatrix} -۱/۲ & ۰/۵ \\ -۰/۳ & -۰/۷ \end{bmatrix}, A^+ \begin{bmatrix} -۱ & ۰/۶ \\ -۰/۲ & -۰/۶ \end{bmatrix},$$

$$B^- = \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۰/۲ \end{bmatrix}, B^+ = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۳ \end{bmatrix}.$$

به علاوه $\underline{u} = ۴$، $\bar{u} = ۱۰$، $\alpha = ۰/۵$. از حل LP۲ جواب شدنی $\bar{x}^T = [۳/۶۵۸۸ \quad ۱/۶۰۹۸]$، $y_۱ = ۶/۲۰۷۵$، $y_۲ = ۱/۲۲۳۴$، $z_۱ = ۰/۳۶۹۱$ و $z_۲ = ۲/۲۹۲۸$ را به دست می‌اوریم. ماتریس پس خورد $K = [۱/۵۹۵۷ \quad -۰/۶۶۴۳]$ به دست آمده است. می‌توان دید که سیستم حلقه بسته مثبت است، وضعیت‌ها با $\bar{x}$ کراندارند و کنترل همیشه محدود است بین ۴− و ۱۰. در شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ می‌توان دید که مسیرها همگرا به صفر هستند. کنترل متناظر در شکل ۳.۴ نشان داده شده است به طوری‌که می‌توان دید که کران‌های تحمیل شده بر u صدق کرده‌اند.

مثال ۲.۲.۴. سیستم کراندار مثبت (۷.۴) را در نظر بگیرید که در آن

$$A_۱ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰/۶ \\ -۰/۲ & -۰/۶ \end{bmatrix}, B_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۳ \end{bmatrix},$$

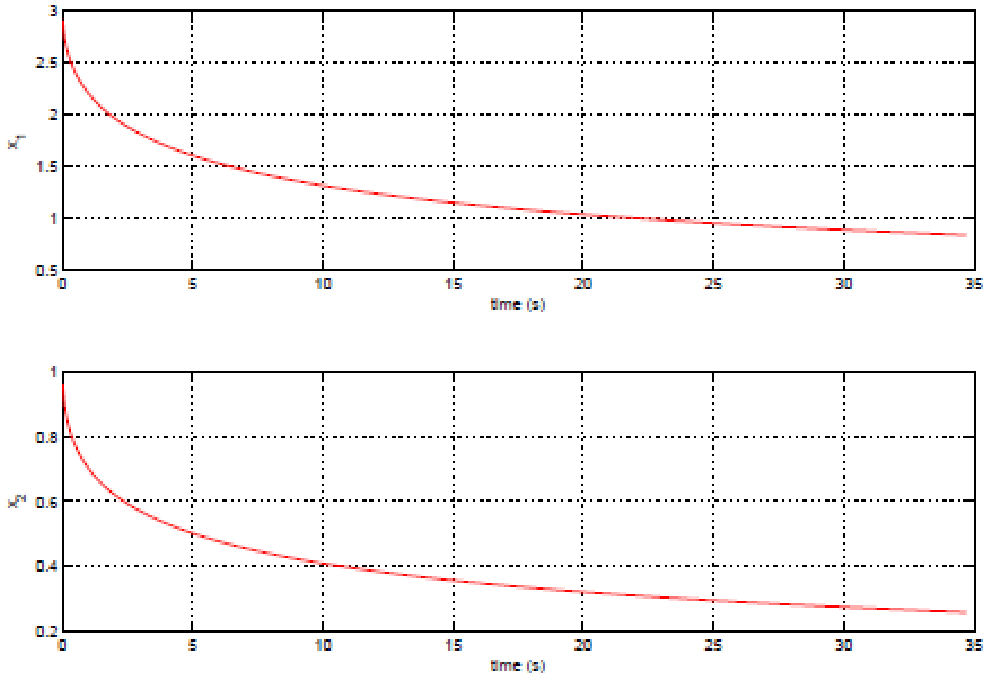
$$A_۲ = \begin{bmatrix} -۰/۹ & ۰/۶ \\ -۰/۳ & -۰/۷ \end{bmatrix}, B_۲ = \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۰/۳ \end{bmatrix},$$

$$A_۳ = \begin{bmatrix} -۱/۲ & ۰/۴ \\ -۰/۳ & -۰/۸ \end{bmatrix}, B_۳ = \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۰/۵ \end{bmatrix},$$

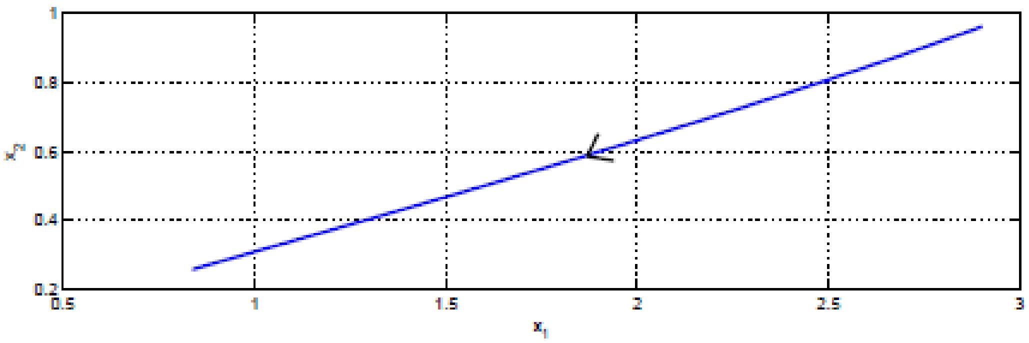
با $\underline{u} = ۱۰$، $\bar{u} = ۴$، $\alpha = ۰/۴$، از حل LP۲ یک جواب شدنی داده شده به صورت $\bar{x}^T = \begin{bmatrix} ۲/۹۹ & ۶/۰۹۴۱ \end{bmatrix}$ و $y_۱ = ۳/۳۰۵۴$، $y_۲ = ۰/۴۳۱۱$، $z_۱ = ۰/۲۱۰۸$ و $z_۲ = ۶/۱۶۸۶$ به دست می‌آوریم

$$K = \begin{bmatrix} ۱/۰۳۵ & -۰/۹۴۱۵ \end{bmatrix}$$

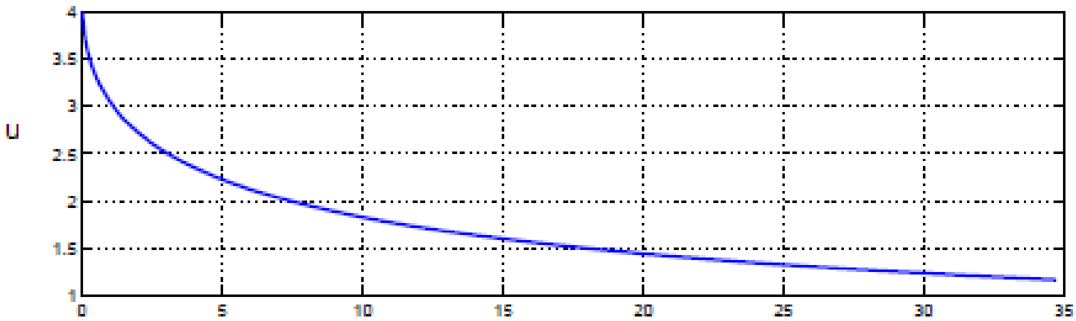
می‌توان دید که سیستم حلقه بسته مثبت است در حالی که وضعیت $\bar{x}$ کراندار است و کنترل همیشه بین ۱۰− و ۴ محدود و کراندار است. در شکل‌های ۴.۴ و ۵.۴ می‌توان دید که مسیرهای منحنی به صفر همگرا هستند. مطابق کنترلی که در شکل ۶.۴ نشان داده شده می‌توان دید کرانهای تحمیلی بر u صدق کرده‌اند.



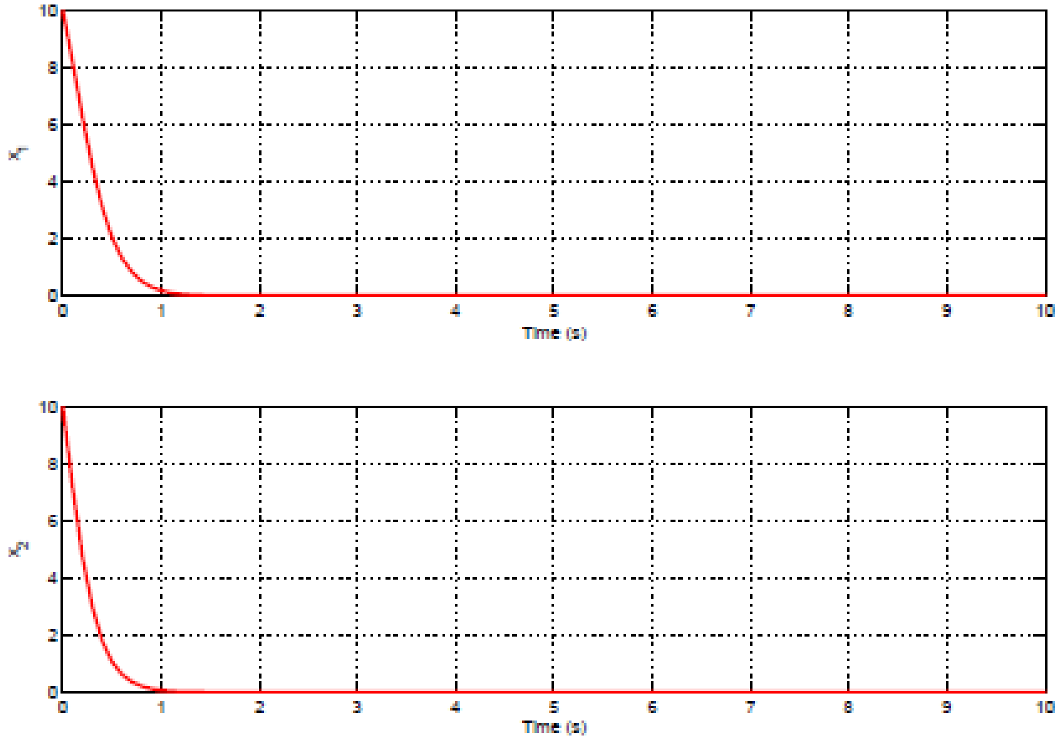
شکل ۱.۴: متغیرهای وضعیت سیستم نامعین کسری مثال ۱.۲.۴



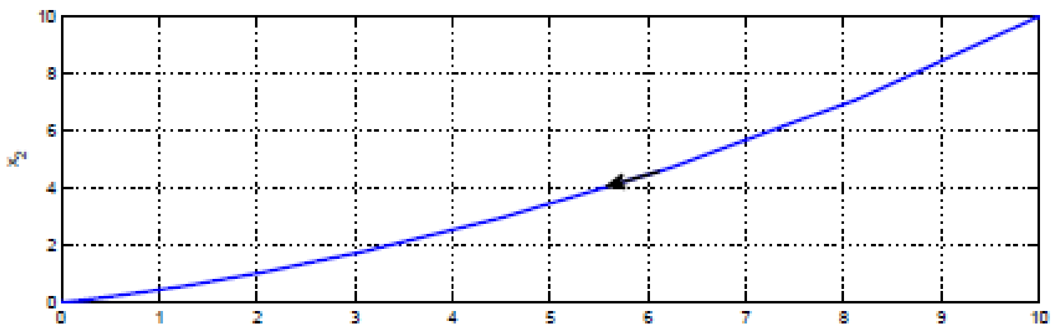
شکل ۲.۴: صفحه فاز مربوط به مثال ۱.۲.۴



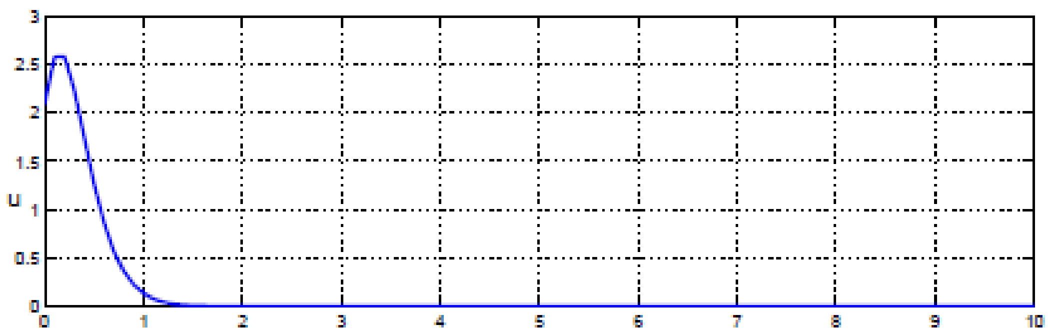
شکل ۳.۴: تابع کنترل پایدارکننده برای مثال ۱.۲.۴



شکل ۴.۴: متغیرهای وضعیت سیستم نامعین کسری مثال ۲.۲.۴



شکل ۵.۴: صفحه فاز مربوط به مثال ۲.۲.۴



شکل ۶.۴: تابع کنترل پایدارکننده برای مثال ۲.۲.۴

فصل ۵

طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های دینامیکی مرتبه کسری

لم ۵.۰.۱. فرض کنید $x_e = \circ$ نقطه تعادل سیستم مرتبه کسری

$$ {}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(x(t)), \quad t \geq \circ, \tag{۵.۱} $$

باشد، به علاوه فرض کنید تابع $V(x)$ با مشتقات پیوسته و توابع اکیداً صعودی $\gamma_i(x)$، $i = ۱, ۲, ۳\ldots$ وجود داشته باشند به طوری‌که

$$ \begin{cases} \gamma_i(\circ) = \circ,\ i = ۱, ۲, ۳, \\ \gamma_۱(x) \leq V(x(t)) \leq \gamma_۲(x), \\ {}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha} V(x(t)) \leq -\gamma_۳(x), \end{cases} $$

که در آن $\alpha \in (\circ, ۱)$. در این صورت سیستم (۵.۱) پایدار مجانبی است.

۱.۵ طراحی کنترل پایدار کننده برای سیستم‌های مرتبه کسری

قضیه ۱.۱.۵. فرض کنید $\phi:[t,\infty)\to\mathbb{R}^n$ یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته باشد. پس برای هر $t>0$ و $\alpha\in(0,1)$، داریم:

$$\frac{1}{2}\,{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}\left(\|\phi(t)\|^{2}\right)\le \phi^{T}(t)\;{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}\phi(t). \tag{۲.۵}$$

اثبات. با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,{}_{0}^{c}D_t^{\alpha}\|\phi(t)\|^{2}-\phi(t)\,{}_{0}^{c}D_t^{\alpha}\phi(t)&=\\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\phi(s)\dot\phi(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds-\phi(t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\dot\phi(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds\\ &=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{(\phi(s)-\phi(t))\dot\phi(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds.\end{aligned}\tag{۳.۵}$$

با استفاده از انتگرال جزبه جز دایم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,{}_{0}^{c}D_t^{\alpha}\|\phi(t)\|^{2}-\phi(t)\,{}_{0}^{c}D_t^{\alpha}\phi(t)=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{s\to t^-}\frac{\|\phi(s)-\phi(t)\|^{2}}{(t-s)^{\alpha}}-\frac{\|\phi(t_0)-\phi(s)\|^{2}}{(t-t_0)^{\alpha}}\\ -\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{\|\phi(s)-\phi(t)\|^{2}}{(t-s)^{\alpha+1}}ds.\end{aligned}\tag{۴.۵}$$

از آنجایی که عبارت اول به صفر همگراست پس می‌توان نشان داد:

$$\frac{1}{2}\,{}_{0}^{c}D_t^{\alpha}\|\phi(t)\|^{2}-\phi(t)\,{}_{0}^{c}D_t^{\alpha}\phi(t)\le 0, \tag{۵.۵}$$

که این معادل عبارت (۲.۵) است. □

سیستم کنترلی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=f(x(t),u(t)),\\ x(0)=\beta,\ t>0.\end{cases}\tag{۶.۵}$$

قضیه ۲.۱.۵. فرض کنید تابع $x(.)$ کراندار باشد و $(x(.),u(.))$ در رابطه افق نامتناهی زیر صدق کند

$$\begin{cases}{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=f(x(t),u(t)),\\ x(t)f\big(x(t),u(t)\big)+\epsilon\le 0,\\ x(0)=\beta,\ t>0,\end{cases}\tag{۷.۵}$$

بطوریکه ϵ یک ثابت مثبت به اندازه‌ی کافی کوچک باشد. پس $u(t)$ کنترل پایدارکننده‌ی مجانبی برای سیستم (۶.۵) است.

اثبات. از آنجا که $x(.)$ کراندار است ثابت M وجود دارد به طوریکه $\|x(t)\|\leq M$، $(\forall t\geq 0)$. تابع $V(x(t))=\frac{1}{2}\|x(t)\|^2$ را تعریف می‌کنیم و با استفاده از قضیه (۱.۱.۵) داریم

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(x(t))\leq x(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t). \tag{۸.۵}$$

حال با تعریف $\gamma_1(x)=\gamma_2(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2$ و $\gamma_3(x)=(\frac{\epsilon}{M^2})\|x\|^2$ داریم

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(x(t))\leq x(t){}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=x(t)f(x(t),u(t))=-\epsilon\leq -(\frac{\epsilon}{M^2})\|x\|^2=-\gamma_3(x). \tag{۹.۵}$$

بنابراین سیستم پایدار مجانبی است به این معنی که $u(.)$ کنترل پایدارکننده مجانبی است. □

با استفاده از قضیه قبل مسئله طراحی کنترل برای سیستم مرتبه کسری به یک سیستم افق نامتناهی تبدیل شد. برای به دست آوردن جواب باید سیستم را به یک سیستم افق متناهی تبدیل کنیم برای این‌کار ابتدا به بیان و اثبات قضیه زیر می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱.۵. فرض کنید $0<\alpha<1$ و $x(.)$ یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته روی $[0,\infty)$ باشد و $X(t)=x(\frac{\tau}{1-\tau})$، $0\leq\tau<1$. پس برای هر $t>0$ داریم ${}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)={}_{0}^{*}D_\tau^{\alpha}X(\tau)$ به طوریکه $\tau=\frac{t}{1+t}$ و

$$ {}_{0}^{*}D_\tau^{\alpha}X(\tau)=\frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\tau}(\frac{1-\xi}{\tau-\xi})^{\alpha}X'(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad 0<\tau<1. \tag{۱۰.۵}$$

اثبات. فرض کنید $t>0$ و $\tau=\frac{t}{1+t}$ پس

$$\begin{aligned}
{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t}\frac{x'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\frac{\tau}{1-\tau}}\frac{x'(s)}{(\frac{\tau}{1-\tau}-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\frac{\tau}{1-\tau}}\frac{\mathrm{d}x(s)}{(\frac{\tau}{1-\tau}-s)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم $\xi=\frac{s}{1+s}$. بنابراین $s=\frac{\xi}{1-\xi}$ واگر $0<s<\frac{\tau}{1-\tau}$ پس $0<\xi<t$ و $\mathrm{d}x(s)=\mathrm{d}X(\xi)$. داریم

$$\begin{aligned}
{}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)&=\frac{1}{\Gamma}\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}X(\xi)}{(\frac{\tau}{1-\tau}-\frac{\xi}{1-\xi})^{\alpha}}\\
&=\frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t}(\frac{1-\xi}{\tau-\xi})^{\alpha}\mathrm{d}X(\xi)\\
&=\frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\tau}(\frac{1-\xi}{\tau-\xi})^{\alpha}X'(\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

از (۱۱.۵) و (۱۰.۵) به دست می‌اوریم ${}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)={}_{0}^{*}D_\tau^{\alpha}X(\tau)$. □

حال سیستم افق نامتناهی (۷.۵) به یک سیستم افق متناهی معادلش بصورت زیر تبدیل شد

$$\begin{cases} {}_{0}^{*}D_{\tau}^{\alpha}X(\tau) = g(X(\tau), U(\tau)), \\ X(\tau)g(X(\tau), u(\tau)) + \epsilon \leq 0, \\ X(0) = \beta, \ 0 < \tau < 1, \end{cases} \tag{۱۲.۵}$$

به طوریکه ${}_{0}^{*}D_{\tau}^{\alpha}X(\tau)$ تعریف شده در (۱۰.۵)،

$$X(\tau) = x(\frac{\tau}{1-\tau}), \ U(\tau) = u(\frac{\tau}{1-\tau}), \tag{۱۳.۵}$$

به ترتیب متغیرهای کنترل و وضعیت هستند و

$$g(X(\tau), U(\tau)) = f\big(x(\frac{\tau}{1-\tau}), u(\frac{\tau}{1-\tau})\big).$$

در ادامه ما یک روش شبه طیفی ژاکوبی را برای حل سیستم کنترلی مرتبه کسری افق متناهی (۱۲.۵) پیشنهاد می‌دهیم.

۲.۵ روش شبه طیفی ژاکوبی

در اینجا از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی خاص $J_i^{(-\alpha,0)}(.)$، $i = 1, 2, \ldots$ روی بازه‌ی $(-1, 1)$ استفاده می‌کنیم که با رابطه بازگشتی زیر نمایش داده می‌شوند [۱۳]

$$\begin{cases} J_i^{(-\alpha,0)}(s) = \phi_1(-\alpha, s)J_{i-1}^{(-\alpha,0)}(s) - \phi_2(\alpha)J_{i-2}^{(-\alpha,0)}(s), & i = 2, 3, \ldots \\ J_0^{(-\alpha,0)}(s) = 1, J_1^{(-\alpha,0)}(s) = \frac{2-\alpha}{2}s - \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

به طوریکه

$$\phi_1(\alpha, s) = \frac{(2i-1-\alpha)\alpha^2 + s(2i-\alpha)}{2i(i-\alpha)}, \tag{۱۴.۵}$$

$$\phi_2(\alpha) = \frac{(i-1-\alpha)(i-1)(2i-\alpha)}{i(i-\alpha)(2i-2-\alpha)}. \tag{۱۵.۵}$$

برای استفاده از این جندجمله‌ای‌ها روی بازه‌ی $(0, 1)$ تغییر متغیر $s = 2\tau - 1$ را بکار می‌گیریم و چند جمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته $\bar{J}_i^{(-\alpha,0)}(\tau) = J_i^{(-\alpha,0)}(2\tau - 1)$ را تعریف می‌کنیم. شکل تحلیلی چندجمله‌ای‌های انتقال داده شده‌ی ژاکوبی از درجه i به صورت زیر است

$$\bar{J}_i^{(-\alpha,0)}(\tau) = \frac{\Gamma(i-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i-k}\,\Gamma(i+k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)(i-k)!k!}\tau^k, \tag{۱۶.۵}$$

بطوریکه $\bar{J}_i^{(-\alpha,0)}(0) = (-1)^i$ و نسبت به وزن $w^{(-\alpha,0)}$ متعامد باشند

$$\int_0^1 \bar{J}_i^{(-\alpha,0)}(\tau)\bar{J}_k^{(-\alpha,0)}(\tau)w^{(-\alpha,0)}(\tau)d\tau = h_k, \tag{۱۷.۵}$$

و تابع وزن انتقال داده شده به صورت $w^{(-\alpha,0)}(\tau) = (1-\tau)^{-\alpha}$ باشد بنابراین

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{2k-\alpha+1}, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{۱۸.۵}$$

در لم زیر یک فرمول کاربردی برای تقریب انتگرال روی بازه $(0,1)$ داریم. این فرمول براساس ریشه‌های چند جمله‌ای ژاکوبی انتقال یافته است، که ژاکوبی گاوس انتقال یافته نامیده می‌شود.

لم ۱.۲.۵. برای هر چندجمله‌ای $p(.)$ حداکثر از درجه $2N-1$،

$$\int_0^1 p(\tau)w^{(-\alpha,0)}(\tau)d\tau = \sum_{j=1}^{N} p(\tau_j)w_j^{(-\alpha,0)}, \tag{۱۹.۵}$$

به طوریکه گره‌های $\{\tau_j\}_{j=1}^N$ گره‌های ژاکوبی گاوس انتقال داده شده اند که ریشه‌های $\bar{J}_N^{(-\alpha,0)}(.)$ هستند و

$$w_j^{(-\alpha,0)} = \frac{1}{2^\alpha\,\tau_j(1-\tau_j)\left[\left(\bar{J}_N^{(-\alpha,0)}\right)'(\tau_j)\right]^2}, \quad j = 1,2,...,N. \tag{۲۰.۵}$$

اثبات. با استفاده از قضیه ۲۵.۳ در [۳۷] داریم

$$\int_{-1}^1 P(t)W^{(-\alpha,0)}(t)dt = \sum_{j=1}^{N} P(t_j)W_j^{(-\alpha,0)} \tag{۲۱.۵}$$

به طوریکه $P(.)$ چند جمله‌ای از درجه $2N-1$ و $W^{(-\alpha,0)}(t) = (1-t)^{-\alpha}$،

$$W_j^{(-\alpha,0)} = \frac{1}{2^\alpha(1-t_j^2)(J_N^{(-\alpha,0)'}(\tau_j))^2}, \qquad j = 1,2,...,N, \tag{۲۲.۵}$$

و $\{t_j\}_{j=1}^N$ گره‌های لژاندر گاوس هستند. با تبدیل $t = 2\tau - 1$ و $0 \le \tau < 1$ داریم

$$W^{(-\alpha,0)}(t) = W^{(-\alpha,0)}(2\tau-1) = (1-(2\tau-1))^{-\alpha} = 2^{-\alpha}(1-\tau)^\alpha \tag{۲۳.۵}$$

$$\begin{aligned}(J_N^{(-\alpha,0)})'(t) &= \frac{d}{dt}J_N^{(-\alpha,0)}(t) = \frac{d\tau}{dt}J_N^{(-\alpha,0)}(t) \\ &= \frac{d\tau}{dt}\frac{dJ_N^{(-\alpha,0)}}{d\tau}(2\tau-1) = \frac{1}{2}\frac{d\bar{J}_N^{(-\alpha,0)}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}(\bar{J}_N^{(-\alpha,0)})'(\tau),\end{aligned} \tag{۲۴.۵}$$

همچنین

$$\begin{aligned}W_j^{(-\alpha,0)} &= \frac{1}{2^\alpha(1-(2\tau_j-1)^2)(\frac{1}{2}(\bar{J}_N^{(-\alpha,0)})'(\tau_j))^2} \\ &= \frac{1}{2^\alpha(\tau_j(1-\tau_j))((\bar{J}_N^{(-\alpha,0)})'(\tau_j))^2} \\ &= w_j^{(-\alpha,0)}.\end{aligned} \tag{۲۵.۵}$$

از این رو با رابطه (۲۳.۵)-(۲۵.۵) و(۲۱.۵) رابطه (۲۰.۵) را به دست می‌اوریم. $\square$

حال با تقریب جواب سیستم افق متناهی (۱۲.۵) نقطه $\tau_0 = 0$ را به نقاط شیفت داده شده ژاکوبی گاوس $\{\tau_j\}_{j=1}^{N}$ اضافه می‌کنیم و چندجمله‌ای لاگرانژ کسری زیر را تعریف می‌کنیم

$$L_j^\alpha(\tau) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{N} \frac{\tau^\alpha - \tau_i^\alpha}{\tau_j^\alpha - \tau_i^\alpha}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{۲۶.۵}$$

چندجمله‌ای‌های کسری لاگرانژ خواص چندجمله‌ای‌های کلاسیک را حفظ می‌کنند به این معنی که $L_j^\alpha(\tau_k) = \delta_{jk}$. در روش انتقال داده شده‌ی ژاکوبی گاوس متغیرهای وضعیت و کنترل سیستم کنترلی افق متناهی (۱۲.۵) به صورت زیر تقریب زده می‌شوند

$$X(\tau) \simeq \sum_{j=0}^{N} a_j L_j^\alpha(\tau),\ U(\tau) \simeq \sum_{j=0}^{N} b_j L_j^\alpha(\tau),\ \ 0 \leq \tau \leq 1, \tag{۲۷.۵}$$

به طوریکه a_j ، b_j برای $j = 1, 2, \cdots, N$ مقادیر نامعلومی هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$X(\tau_k) \simeq a_k, \quad U(\tau_k) \simeq b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N \tag{۲۸.۵}$$

به راحتی می‌توان نشان داد

$$L_j^{\alpha\prime}(\tau) = \sum_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{N} \frac{\alpha\tau^{\alpha-1}}{\tau_j^\alpha - \tau_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq r\\ i\neq j}}^{N} \frac{\tau^\alpha - \tau_i^\alpha}{\tau_j^\alpha - \tau_i^\alpha}, \qquad 0 < \tau \leq 1. \tag{۲۹.۵}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱۰.۵) و (۲۹.۵) و تغییر متغیر $\xi = \tau z$، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} {}_0^*D_\tau^\alpha L_j^\alpha(\tau) &= \frac{(1-\tau)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau (\frac{1-\xi}{\tau-\xi})^\alpha L_j^{\alpha\prime}(\xi) d\xi \\ &= \frac{\tau^{1-\alpha}(1-\tau)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-z)^{-\alpha}\Big((1-\tau z)^\alpha L_j^{\alpha\prime}(\tau z)\Big) dz \end{aligned} \tag{۳۰.۵}$$

همچنین داریم

$${}_0^*D_\tau^\alpha X(\tau) \simeq \sum_{j=1}^{N} a_j\, {}_0^*D_t^\alpha L_j^\alpha(\tau), \quad 0 < t \leq 1. \tag{۳۱.۵}$$

ماتریس مشتق را بصورت زیر تعریف می‌کنیم $D = (D_{kj}^\alpha) = \left({}_0^*D_t^\alpha L_j^\alpha(\tau_k)\right)_{N\times(N+1)}$. با استفاده از لم (۱.۲.۵) می‌توانیم انتگرال را در رابطه (۳۰.۵) تقریب بزنیم که درایه‌های ماتریس مشتق D را به صورت زیر به دست آوریم

$$D_{kj}^\alpha \simeq \frac{\tau_k^{1-\alpha}(1-\tau_k)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{l=1}^{N} w_l (1-\tau_k z_l)^\alpha L_j^{\alpha\prime}(\tau_k z_l), \quad j = 0, 1, \ldots, N,\ \ k = 1, 2, \ldots, N, \tag{۳۲.۵}$$

بطوریکه $\tau_\circ = \circ$ و $\{\tau_k\}_{k=1}^N$ و $\{z_l\}_{l=1}^N$ نقاط انتقال داده شده ژاکوبی گاوس هستند. بنابراین سیستم کنترلی افق متناهی (۱۲.۵) به سیستم جبری زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} \sum_{j=\circ}^N a_j D_{kj}^\alpha - g(a_k, b_k) = \circ, \ k = 1, 2, \dots, N, \\ a_k \ g(a_k, b_k) + \epsilon \leq \circ, \ k = \circ, 1, \dots, N, \\ a_\circ - \beta = \circ, \end{cases} \tag{۳۳.۵}$$

بطوریکه ϵ یک ثابت مثبت به اندازه کافی کوچک باشد، که این مقدار میتواند از (۳۳.۵) حذف شود و نامساوی به مساوی تبدیل شود. متغیر جدید $c_k, \ k = \circ, 1, \dots, N$، را استفاده می‌کنیم و (۳۳.۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} \sum_{j=\circ}^N a_j D_{kj}^\alpha - g(a_k, b_k) = \circ, \ k = 1, 2, \dots, N, \\ a_k \ g(a_k, b_k) + c_k^2 = \circ, \ k = \circ, 1, \dots, N, \\ a_\circ - \beta = \circ, \end{cases} \tag{۳۴.۵}$$

پس از حل سیستم (۳۴.۵)، بدست می‌آوریم $a = (a_\circ, a_1, \dots, a_N)$، $b = (b_\circ, b_1, \dots, b_N)$ و $c = (c_\circ, c_1, \dots, c_N)$ که متغیرهای سیستم هستند. از این رو با روابط (۱۳.۵) و (۲۷.۵) وضعیت پایدار شده و کنترل پایدار کننده سیستم دینامیکی کسری (۶.۵) به صورت زیر به دست می‌آید

$$x(t) \simeq \sum_{j=1}^N a_j L_j^\alpha\left(\frac{t}{1+t}\right), \qquad u(t) \simeq \sum_{j=1}^N b_j L_j^\alpha\left(\frac{t}{1+t}\right), \ t \geq \circ. \tag{۳۵.۵}$$

۳.۵ نتایج عددی

مثال ۱.۳.۵. سیستم غیرخطی کنترلی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_\circ^c D_t^\alpha x(t) = x^2(t) + sin x(t) + u(t), \qquad t > \circ, \\ x(\circ) = \beta. \end{cases} \tag{۳۶.۵}$$

سیستم (۳۴.۵) متناظر آن به صورت زیر است

$$\begin{cases} \sum a_j D_{kj}^\alpha - a_k^2 - \sin a_k - b_k = \circ, \qquad k = 1, 2, \dots, N, \\ a_k(a_k^2 + \sin a_k + b_k) + c_k^2 = \circ, \qquad k = \circ, 1, \dots, N, \\ a_\circ = \beta. \end{cases} \tag{۳۷.۵}$$

با حل سیستم جبری فوق داریم ، برای $N = 8$، $\beta = 1$ و $\alpha = \circ/5, \circ/7, \circ/9$ کنترل پایدار کننده و وضعیت پایدار مجانبی $u(.)$ (۲۷.۵) را برای سیستم (۳۳.۳) به دست می‌آوریم که در شکل ۱.۵ نشان داده شده است.

مثال ۲.۳.۵. سیستم کنترلی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x(t) = x(t)u(t) + e^{x(t)} - u^{2}(t), \\ x(0) = \beta. \end{cases} \tag{۳۸.۵}$$

سیستم جبری متناظر با سیستم فوق به صورت زیر است

$$\begin{cases} \sum a_j D^{\alpha}_{kj} - a_k b_k - e^{a_k} + b_k^{2} = 0, & k = 1, 2, \dots, N, \\ a_k(a_k b_k + e^{a_k} - b_k^{2}) + c_k^{2} = 0, & k = 0, 1, \dots, N, \\ a_0 = \beta. \end{cases} \tag{۳۹.۵}$$

با در نظر گرفتن $N = 8$، $\beta = 1$ و $\alpha = 0/5, 0/7, 0/9$،کنترل پایدار کننده و وضعیت پایدار مجانبی(۲۷.۵) برای سیستم کنترلی (۳۵.۳) بدست می‌آید که در شکل ۲.۵ قابل نمایش است.

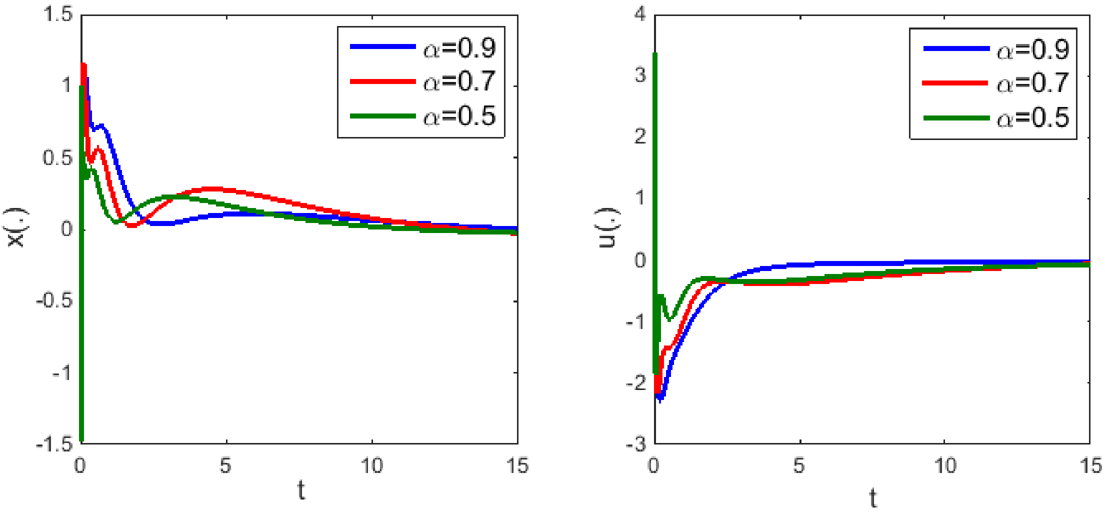
مثال ۳.۳.۵. سیستم کنترلی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^{c}_{0}D^{\alpha}_{t}x(t) = x^{3}(t) + x^{2}(t) + x(t) + u(t), \\ x(0) = \beta. \end{cases} \tag{۴۰.۵}$$

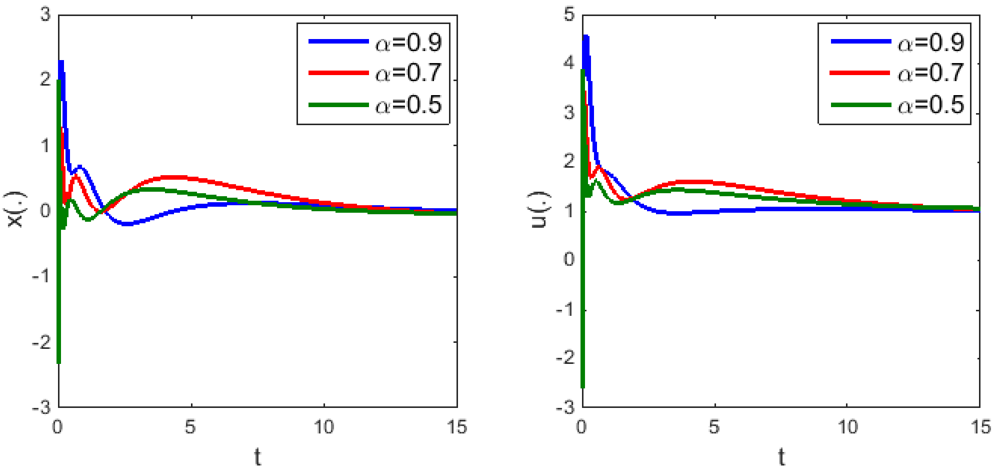
سیتم جبری (۳۴.۵) متناظر آن به صورت زیر است

$$\begin{cases} \sum a_j D^{\alpha}_{kj} - a_k^{3} - a_k^{2} - a_k - b_k = 0, & k = 1, 2, \dots, N, \\ a_k(a_k^{3} + a_k^{2} + a_k + b_k) + c_k^{2} = 0, & k = 0, 1, \dots, N, \\ a_0 = \beta. \end{cases} \tag{۴۱.۵}$$

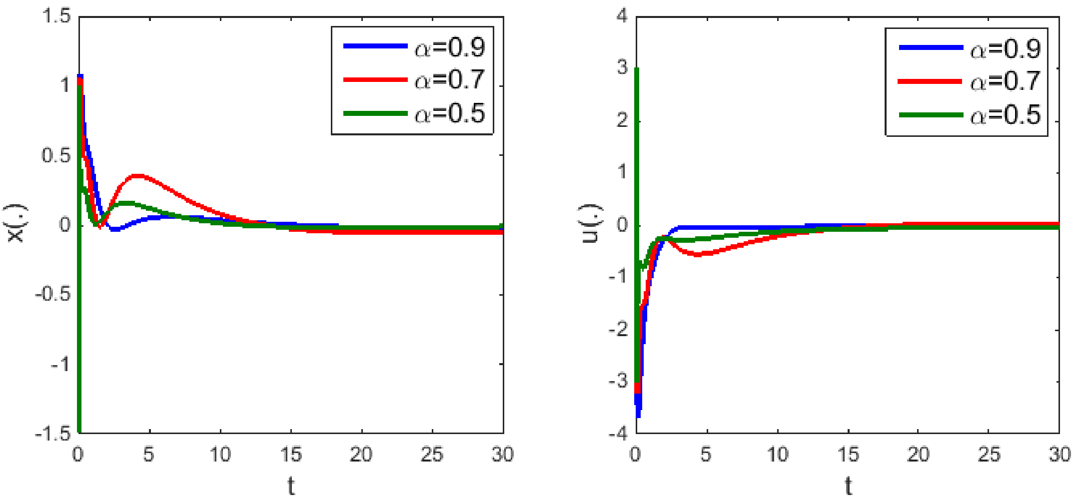
با حل این سیستم جبری و مقادیر $N = 8$، $\beta = 1$ و $\alpha = 0/5, 0/7, 0/9$، کنترل پایدار کننده $u(.)$ و وضعیت پایدار مجانبی (۲۷.۵) برای سیستم (۳۶.۳) به دست می‌آید که در شکل ۳.۵ نشان داده شده است.



شکل ۱.۵: کنترل پایدارکننده و وضعیت پایدار مجانبی برای سیستم (۳۶.۵)



شکل ۲.۵: کنترل پایدارکننده و وضعیت پایدار مجانبی برای سیستم (۳۸.۵)



شکل ۳.۵: کنترل پایدار کننده و وضعیت پایدار مجانبی برای سیستم (۴۰.۵)

فصل ۶

نتیجه گیری

پیدا کردن تابع لیاپانوف منتخب برای اثبات پایداری بسیاری از سیستم‌های کسری غالباً مشکل است. در این پایان‌نامه با استفاده از بسط مرتبه کسری روش مستقیم لیاپانوف یک قضیه جدید بیان و اثبات کرده و با استفاده از روش شبه طیفی ژاکوبی، متغیرهای وضعیت و کنترل را برای یک سیستم کنترلی مرتبه کسری تقریب زده و سپس سیستم کنترلی مرتبه کسری به سیستم جبری تبدیل شد که با حل این سیستم وضعیت پایدار شده و کنترل پایدار کننده این سیستم بدست می‌آید. در آخر برای نشان دادن کارایی و اعتبار روش چندین مثال عددی ارائه دادیم.

مراجع

[۱] جعفری حسین، (۱۳۹۲)، ”**مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل کسری**“ ۱۳۹۲، انتشارات دانشگاه مازندران، صفحه۲۲۰

[2] Aboelela, M. A., Ahmed, M. F., Dorrah, H. T. (2012) ”Design of aerospace control systems using fractional PID controller” Journal of Advanced Research, 3(3), 225-232.

[3] Agrawal, O. P. (2004). ”A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems” Nonlinear Dynamics, 38(1-4), 323-337.

[4] Agrawal, O. P. (2008). ”A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems” Journal of dynamic systems, measurement, and control, 130(1), 011010.

[5] Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. A., Gallegos, J. A. (2014) ”Lyapunov functions for fractional order systems” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19(9), 2951-2957.

[6] Annaswamy, A. M., Narendra, K. S. (2012) ”Stable adaptive systems” Courier Corporation.

[7] Aoun, M., Grégoire, G., Oustaloup, A., Ragot, F., Roy, P., Sabatier, J. (2006) ”Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation” Signal processing, 86(10), 2645-2657.

[8] Benhayoun, M., Benzaouia, A., Hmamed, A., Mesquine, F., Tadeo, F. (2014) ”Stabilization of continuous-time fractional positive systems by using a Lyapunov function” IEEE Transactions on Automatic Control, 59(8), 2203-2208.

[9] Beschi, M., Padula, F., and Visioli, A. (2017) ”The generalised isodamping approach for robust fractional PID controllers design” International Journal of Control, 90(6), 1157-1164.

[10] Bykadorov, I., Ellero, A., Funari, S., and Moretti, E. (2007) ”A fractional optimal control problem for maximizing advertising efficiency” (No. 158).

[11] Chen, Y., Petras, I., and Xue, D. (2009) ”Fractional order control-a tutorial” In 2009 American control conference, IEEE, 1397-1411.

[12] Chen, Y., Li, Y., Podlubny, I. (2010) ”Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability” Computers and Mathematics with Applications, 59(5), 1810-1821.

[13] Chen, Y. (2006) ”Ubiquitous fractional order controls?” IFAC Proceedings Volumes, 39(11), 481-492.

[14] Coito, F., Ortigueira, M. (2008) ”Initial conditions: What are we talking about?”.

[15] Dehghan, M., Lotfi, A., and Yousefi, S. A. (2011) A ”numerical technique for solving fractional optimal control problems” Computers and Mathematics with Applications, 62(3), 1055-1067.

[16] Diethelm, K. (2010). ”The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type” Springer Science and Business Media.

[17] Ding, Y., Wang, Z., and Ye, H. (2011) ”Optimal control of a fractional-order HIV-immune system with memory” IEEE Transactions on Control Systems Technology, 20(3), 763-769.

[18] Dulf, E. H., Dutta, A., Ionescu, C. M., Maxim, A., Muresan, C. I., Pinar, Z., (2016) ”Tuning algorithms for fractional order internal model controllers for time delay processes” International Journal of Control, 89(3), 579-593.

[19] Farges, C., Moze, M., Sabatier, J., (2008) ”On stability of fractional order systems” In Third IFAC workshop on fractional differentiation and its applications FDA’08 (p. xxx).

[20] Faucher, J., Kabbaj, H., Lin, J., Poinot, T., Trigeassou, J. C. (2000) ”Modélisation et identification d’ordre non entier d’une machine asynchrone” In Conférence Internationale Francophone d’Automatique.

[21] Feliu-Talegon, D., and Feliu-Batlle, V. (2017) ”Improving the position control of a two degrees of freedom robotic sensing antenna using fractional-order controllers” International Journal of Control, 90(6), 1256-1281.

[22] Gabano, J-D., and Thierry Poinot. (2011) ”Fractional modelling and identification of thermal systems” Signal Processing, 91.3, 531-541.

[23] Grizzle, J. W., Khalil, H. K. (2002) ”Nonlinear systems” Prentice hall Upper Saddle River, NJ.

[24] Holmes, P., and Shea-Brown, E. T. (2006) ”Stability” Scholarpedia, 1(10), 1838.

[25] Khalil, H. K. (1996) ”Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models” IEEE Transactions on Automatic Control, 41(2), 177-188.

[26] Kaczorek, T. (2011) ”Necessary and sufficient stability conditions of fractional positive continuous-time linear systems” acta mechanica et automatica, 5(2), 52-54.

[27] Karimi-Ghartemani, M., Parniani, M., Sadati, N., Zamani, M. (2009) ”Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization” Control Engineering Practice, 17(12), 1380-1387.

[28] Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006) ”Theory and applications of fractional differential equations” Elsevier Science Limited.

[29] Lakshmikantham, V., Leela, S., Sambandham, M. (2008) ”Lyapunov theory for fractional differential equations” Communications in Applied Analysis, 12(4), 365.

[30] Li, W., Slotine, J. J. E.(1991) ”Applied nonlinear control” Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.

[31] Lohmiller, W., and Slotine, J. J. E. (2000) ”Nonlinear process control using contraction theory” AIChE journal, 46(3), 588-596.

[32] Malti, R., Merveillaut, M., Oustaloup, A., Sabatier, J. (2008) ”On a representation of fractional order systems: interests for the initial condition problem” In 3rd IFAC workshop on fractional differentiation and its applications (p. 1).

[33] Matignon, D. (1996) ”Stability results for fractional differential equations with applications to control processing” In Computational engineering in systems applications, 963-968.

[34] Matignon, D. (1994) ”Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire” Doctoral dissertation, Paris 11.

[35] Nemati, A., and Yousefi, S. A. (2016) ”A numerical scheme for solving two-dimensional fractional optimal control problems by the Ritz method combined with fractional operational matrix” IMA Journal of Mathematical Control and Information, 34(4), 1079-1097.

[36] Ross, B. (1977) ”The development of fractional calculus 1695–1900” Historia Mathematica, 4(1), 75-89.

[37] Shen, J., Tang, T., Wang, L. L. (2011) ”Spectral method: algorithms, analysis and applications” Springer Science and Business Media.

[38] Trujillo, J. J., and Ungureanu, V. M. (2018) ”Optimal control of discrete-time linear fractional-order systems with multiplicative noise” International Journal of Control, 91(1), 57-69.

Aabstract

In this thesis, a new technique has been considered to design of the stabilizer control based on Jacobi pseudo-spectral method.At first, we study the conditions of the stability of integer and fractional systems, then we use the theorems and definitions related to Lyapunov stability. finally, we present a new theorem and prove theorem, stability of infinite horizon control system. For this purpose, first we transform the system to a finite horizon fractional control system and then we to a algebraic system with approximation variables state and control and using Jacobi-Gauss nodes.
Keywords: Jacobi pseudo-spectral method, Lyapunov stability, Mittag-Leffler .

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations Research

Some approaches for stability of fractional systems

By: Roghayeh Ansari

Supervisor

Dr. Mohammad Hadi Noori Skandari

May 2019