



دانشگاه تبریز

دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

## برآوردگرهای بیز مقید تحت تابع زیان متعادل

مریم پورحسینی

استاد راهنما:

دکتر محمد آرشی

خرداد ۱۳۹۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

## برآوردگرهای بیز مقید تحت تابع زیان متعادل

دانشجو: مریم پورحسینی

استاد راهنما:

دکتر محمد آرشی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

خرداد ۱۳۹۰

سایه‌ها خواندم و خواندم کتاب دیگران

تا که امروز ز خود مطلبی آرام به زبان

همی حاصل عمرم همین است، همین

پیشکش به مهراد و پدر بادل و جان

پیشکش به یاری همسرم و صبر و دحاش

تک تک نایه داداد به من شوق و توان

تقدیم به استاد که اقتدر و صبور

که آموخت به من آنچه یاموخت به جان

## قدردانی

پاس خدا را بر آنچه از شکرش به ما الهام فرموده و بر آن دهنی دانی که به پروردگارش به ما کثوده است. الهی ادای شکر تو را به زبان یار نیست و دیای فضل تو را به کرا نیست و سر حقیقت تو به هیچ کس

عیان نیست، هدایت کن بر ما را بهی که بهتر از آن نیست.

اکنون که بیاری خداوند متعال این دوره را به پایان رسانده ام، به رسم ادب و احترام بوسه بردن بر دستمان زده و بر خود واجب می دانم از زحمات استاد عزیز و بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد آرش که علاوه بر تحقیق

و پژوهش با نظرات ارزنده و مدبرانه خود به فکر کردن، بهتر زندگی کردن و بهتر بودن را به من آموختند، بشکر کنم. همچنین از اساتید محترم آقایان دکتر احمد نرگانی و دکتر حسن دوستی که با حضور و دگریشان

تصحیح و داوری این رساله را بر عهده گرفته اند سپاسگزارم.

بر خود واجب می دانم که از زحمات اساتید که را تقدیر و پرستش زحمتش دانسته علوم و دانشگاه صنعتی شاهرود بشکر کنم.

و در نهایت از کلیه دوستان عزیزم که در طی دوران تحصیل فضای آرام و دوستانه را با ایشان تجربه کردم سپاسگزارم.

## تعهد نامه

اینجانب **مریم پورحسینی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **آمار ریاضی** دانشکده **علوم** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **برآوردگرهای بیز مقید تحت تابع زیان متعادل تحت راهنمایی دکتر محمد آرشی متعهد می شوم .**

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۹۰/۰۳/۳۰

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

## چکیده

یکی از مسائل مهم در آمار نظری، برآورد و بررسی خواص آن‌ها در خصوص پارامترهای مجهول جامعه آماری می‌باشد. در مسئله برآورد، برآوردگرها از لحاظ ویژگی‌های مختلفی همچون اریبی، مخاطره، کارایی و ... با یکدیگر مقایسه می‌شوند؛ یکی از این ویژگی‌هایی که بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است، میزان مخاطره برآوردگرها نسبت به تابع زیان مشخص می‌باشد. به عبارتی برآوردگرهایی بهتر هستند که دارای مخاطره کمتر باشند. استفاده از اطلاع پیشین معلوم در مدل‌های آماری، معمولاً به صورت یک قید مطرح است که در نهایت به مدل‌های محدود شده یا مقید منتج می‌شود. برآوردگری که بر اساس مدل‌های محدود شده بدست می‌آید، برآوردگر محدود شده (RE) نامیده می‌شود. در این پایان‌نامه برای جامعه نرمال یک متغیره و چند متغیره، برآوردگر بیز محدود شده (CBE) و انواع دیگر برآوردگرها مانند آزمون اولیه (PTE) و برآوردگر بیز تجربی محدود شده (CEBE) (در بعضی قسمت‌ها) را بدست آورده و مخاطره آنها را با یکدیگر مقایسه کرده‌ایم.

به طور خلاصه این مجموعه شامل چهار فصل می‌باشد. مطالب هر فصل به طور اجمالی عبارتند از:

- ✓ فصل اول مفاهیم و قضایای کلیدی مورد نیاز فصل‌های آتی پایان‌نامه را در بر دارد.
- ✓ در فصل دوم به بیان مسئله و مختصری از تاریخچه و کاربرد مسئله پرداخته‌ایم سپس در جامعه نرمال تک متغیره با میانگین نامعلوم برآوردگر بیز محدود شده را برای پارامتر میانگین، تحت تابع زیان متعادل وزنی بدست آورده و مخاطره آنها را به ازای وزن‌های مختلف در تابع زیان مقایسه کرده‌ایم. در ادامه به مثالهای مختلفی تحت تابع زیان متعادل وزنی تعمیم یافته پرداخته‌ایم.
- ✓ برآوردگر بیز محدود شده و برآوردگر بیز تجربی محدود شده را در فصل سوم بدست آورده و مخاطره آنها را در جامعه نرمال چند متغیره با میانگین و واریانس نامعلوم، مقایسه کرده‌ایم.

✓ فصل چهارم شامل نتایجی در خصوص برآوردگر محدود نشده، برآوردگر محدود شده و برآوردگر آزمون اولیه برای بردار میانگین جامعه نرمال چند متغیره با واریانس نامعلوم می‌باشد، است.

✓ در پایان پیشنهادات و نظرات راجع به آینده تحقیق و برنامه‌های کامپیوتری مربوطه در دو ضمیمه قبل از مراجع آمده است.

در پایان لازم می‌دانم این مطلب را خاطر نشان کنم که لم‌ها و قضایایی که با (\*) مشخص شده‌اند صورت قضیه یا لم در منابع بوده ولی اثبات آنها توسط اینجانب می‌باشد و لم‌ها و قضایایی که توسط (\*\*) مشخص شده‌اند هم صورت قضیه یا لم و هم اثبات توسط اینجانب انجام شده است.

## فهرست مقالات مستخرج از متن رساله

1. M. Pourhosseini, M. Arashi, Constrained empirical Bayes estimator under balanced loss function, The 10<sup>th</sup> Iran. Statist. Conf., (2010)
2. M. Pourhosseini, M. Arashi, Bayes action for different balanced type loss functions, 41<sup>st</sup> Iran. Int. Conf. Math., (2010).

۳. پورحسینی، م. آرشی، مقایسه برآوردگرهای بیز محدود شده تحت تابع زیان متعادل وزنی،

ششمین همایش ملی آمار ایران، (۱۳۸۹).

## علائم اختصاری

$A$ : ترانهاده ماتریس

$\text{tr}(A)$ : اثر ماتریس  $A$ .

$\text{Exp}(\text{tr}) = \text{etr}$

$\text{iid}$ : متغیرهای هم توزیع و مستقل.

$\chi^2_p$ : توزیع کی دو با  $p$  درجه آزادی.

$\chi^2_p(\lambda)$ : توزیع کی دو غیر مرکزی با  $p$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $\lambda$ .

$t_p(\underline{\mu}, V, \gamma_0)$ : توزیع  $t$ ,  $p$  متغیره با میانگین  $\underline{\mu}$ , مقیاس  $V$ , و  $\gamma_0$  درجه آزادی.

$F_{q,m}$ : توزیع فیشر مرکزی با  $(q, m)$  درجه آزادی.

$F_{q,m}(\Delta^2)$ : توزیع فیشر غیر مرکزی با  $(q, m)$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $\Delta^2$ .

$N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ : نرمال  $p$  متغیره با میانگین  $\underline{\mu}$  و واریانس  $\Sigma$ .

$W_p(\Sigma, m)$ : توزیع ویشارت  $p$  متغیره با مقیاس  $\Sigma$  و  $m$  درجه آزادی.

$W^{-1}(\Sigma, m)$ : توزیع ویشارت معکوس با مقیاس  $\Sigma$  و  $m$  درجه آزادی.

$\Gamma_p(t)$ : تابع گامای چند متغیره.

$I(A \leq a)$ : تابع نشانگر مجموعه  $A$ .

$\mathcal{R}^p$ : فضای  $p$  بعدی حقیقی.

## حروف اختصاری

BLF: تابع زیان متعادل موزون (Balanced loss function).

CB: بیز مقید (Constrained Bayes).

CEB: بیز مقید تجربی (Constrained Empirical Bayes).

LSE: برآوردگر کمترین توان های دو (Least Square Estimation).

MLE: برآوردگر ماکسیمم درستنمایی (Maximum Likelihood Estimator).

MSE: میانگین مربع خطا (Mean Square Error).

PTE: برآوردگر آزمون اولیه (Preliminary Test Estimator).

RE: برآوردگر محدود شده (Restricted Estimator).

UE: برآوردگر محدود نشده (Unrestricted Estimator).

| صفحه | لیست شکل ها                                                                     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۱   | ۱.۱ نمودار تابع مخاطره $\delta_c$ به ازای $c = 0.5, 0.7, 1$                     |
| ۴۷   | ۲.۱ مقایسه مخاطره ها برای $N$ ها و $Y$ های مختلف                                |
| ۶۸   | ۲.۲ مقایسه مخاطره $R_2, R_3$ و $R_1$ برای $N$ های مختلف                         |
| ۶۸   | ۳.۲ مقایسه مخاطره $R_2, R_3$ و $R_1$ برای $Y$ های مختلف                         |
| ۶۸   | ۴.۲ مقایسه مخاطره $R_2, R_3$ و $R_1$ برای $\delta_0$ های مختلف                  |
| ۶۸   | ۵.۲ مقایسه مخاطره $R_2, R_3$ و $R_1$ برای واریانس های مختلف                     |
| ۷۱   | ۶.۲ مقایسه رفتار مخاطره $R_1$ تحت تابع زیان لینکس                               |
| ۷۲   | ۷.۲ مقایسه مخاطره های $R_1, R_2$ و $R_3$ تحت تابع زیان لینکس برای مثالهای مختلف |
| ۸۷   | ۱.۳ مخاطره برآوردگر CB                                                          |
| ۸۸   | ۲.۳ مخاطره برآوردگر CEB                                                         |
| ۱۱۶  | ۳.۳ مخاطره PTE برای $\omega = 0.9$                                              |
| ۱۱۶  | ۴.۳ مخاطره PTE برای $\omega = 0.5$                                              |

| صفحه | لیست جداول                                                       |
|------|------------------------------------------------------------------|
| ۵۸   | ۲.۱ مقادیر $\psi_1$ به ازای واریانس ها و $\theta_{00}$ های مختلف |
| ۶۰   | ۲.۲ مقادیر $\psi_2$ به ازای واریانس ها و $\theta_{00}$ های مختلف |
| ۶۱   | ۳.۲ مقادیر $\psi_3$ به ازای واریانس ها و $\theta_{00}$ های مختلف |
| ۶۵   | ۴.۲ مقادیر $\psi_6$ به ازای واریانس ها و $\theta_{00}$ های مختلف |
| ۱۱۴  | ۱.۴ طول و عرض سر برادران                                         |

## فهرست مندرجات

| صفحه | عنوان                                                |
|------|------------------------------------------------------|
| ۱    | فصل اول: مفاهیم و کلیات                              |
| ۲    | ۱.۱ مقدمه                                            |
| ۲    | ۲.۱ مختصری از نظریه تصمیم                            |
| ۴    | ۳.۱ جبر ماتریس‌ها                                    |
| ۵    | ۴.۱ انواع تابع زیان                                  |
| ۹    | ۵.۱ معیار مقایسه‌ای برآوردگرها                       |
| ۱۰   | ۱.۵.۱ معیار مقایسه‌ای برآوردگرها و برآوردگر پذیرفتنی |
| ۱۳   | ۱.۵.۲ اصل بیز                                        |
| ۱۵   | ۶.۱ برخی توزیع‌های آماری                             |
| ۲۷   | ۱.۶.۱ خانواده توزیع نمایی                            |
| ۲۸   | ۷.۱ لم‌های اساسی                                     |
| ۳۲   | ۸.۱ روش نمونه‌گیری بوت استرپ                         |
| ۳۴   | فصل دوم: برآوردگرهای محدود شد در حالت یک متغیره      |
| ۳۵   | ۱.۲ مقدمه                                            |
| ۳۵   | ۱.۲.۱ بیان مسئله                                     |
| ۳۵   | ۱.۲.۲ کاربرد مسئله                                   |
| ۳۷   | ۲.۲ مدل جامعه                                        |
| ۳۷   | ۳.۲ تاریخچه                                          |

| صفحه | عنوان                                                                           |
|------|---------------------------------------------------------------------------------|
| ۳۹   | ۲.۴ ایده برآوردگر بیز محدود شده                                                 |
| ۴۰   | ۲.۵ برآوردگرهای CB تحت تابع زیان متعادل وزنی                                    |
| ۴۳   | ۲.۵.۱ مثال‌های شهودی                                                            |
| ۴۸   | ۲.۶ برآوردگرهای بیز تحت تابع زیان متوازن تعمیم یافته                            |
| ۵۰   | ۲.۶.۱ مثال‌های کاربردی                                                          |
| ۷۳   | <b>فصل سوم: برآوردگرهای محدود شد در حالت چند متغیره</b>                         |
| ۷۴   | ۳.۱ مقدمه                                                                       |
| ۷۵   | ۳.۲ روش CB برای بدست آوردن برآوردگر                                             |
| ۷۸   | ۳.۲.۱ برآوردگرهای محدود شده تحت تابع زیان متعادل وزنی                           |
| ۸۴   | ۳.۲.۲ روش CEB                                                                   |
| ۸۹   | <b>فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون</b> |
| ۹۰   | ۴.۱ مقدمه                                                                       |
| ۹۴   | ۴.۲ معرفی برآوردگرها                                                            |
| ۹۶   | ۴.۳ اریبی برآوردگرها                                                            |
| ۹۸   | ۴.۴ محاسبه مخاطره برآوردگرهای مطرح شده                                          |
| ۱۱۱  | ۴.۵ مقایسه برآوردگرها                                                           |
| ۱۱۳  | ۴.۶ مثال کاربردی                                                                |
| ۱۱۷  | <b>پیشنهادهای و آینده تحقیق</b>                                                 |
| ۱۱۹  | <b>برنامه‌های کامپیوتری</b>                                                     |
| ۱۴۰  | <b>مراجع</b>                                                                    |
|      | <b>چکیده انگلیسی</b>                                                            |

# فصل اول

مفاهیم و کلیات

## ۱. ۱ مقدمه

در این فصل تعاریف، مفاهیم و قضایای کلیدی مورد نیاز فصل‌های آتی پایان‌نامه را بیان می‌کنیم. برای این منظور در بخش دوم و سوم به بیان مفاهیمی از استنباط آماری و نظریه تصمیم آماری پرداخته و توابع زیان استفاده شده در پایان‌نامه را معرفی می‌کنیم، در بخش چهارم معیار مقایسه‌ی برآوردگرها و همچنین اصول انتخاب یک برآوردگر را بیان می‌داریم. علاوه بر آن ارتباط انواع برآوردگرهای حاصل از به کارگیری اصول مورد نظر را عنوان می‌کنیم. سپس تعاریف و قضایای مورد نیاز را مطرح خواهیم کرد.

## ۱. ۲ مختصری از نظریه تصمیم

نظریه تصمیم آماری، مباحثی در مورد تصمیم‌گیری در حضور دانش آماری است که درک عدم حتمیت را آسان می‌کند. فرض می‌کنیم عدم حتمیت را می‌توان با مقدار کمی نامعلومی در نظر گرفت و آن را با  $\theta$  و مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن  $\theta$  را با  $\Theta$  نمایش می‌دهیم. هدف استنباط آماری به دست آوردن اطلاعاتی در مورد  $\theta$  با توزیع  $F_\theta$  از طریق مشاهدات (اطلاعات نمونه که از روش‌های آماری تهیه می‌شوند) است و پس از آن استنباط‌هایی روی  $\theta$  (بدون توجه به محل استفاده‌ی آن‌ها) صورت می‌گیرد. از سوی دیگر در نظریه‌ی تصمیم آماری این اطلاعات با اطلاعات جانبی دیگری به کار گرفته می‌شوند. یعنی علاوه بر اطلاعات نمونه، اطلاعات مربوط به تصمیم‌های ممکن و همچنین اطلاعاتی در مورد  $\theta$  که به اطلاعات پیشین موسوم هستند نیز در نظر گرفته می‌شوند که این اطلاعات پیشین گاهی اوقات از منابع غیر آماری و بر اساس تجارب گذشته حاصل می‌شوند. در نهایت برای هر تصمیم مقداری سود یا زیان متناسب با مقادیر مختلف  $\theta$  در نظر می‌گیرند تا به «بهترین» تصمیم دست یابند. حال تعاریف اولیه را که در این زمینه مطرح است بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱ وضع طبیعی:** عامل (پارامتر)  $\theta$  را که در تصمیم گیریهای آماری نقش اساسی دارد وضع طبیعی می‌گویند.

**تعریف ۲.۱ فضای پارامتر:** مجموعه همه مقادیر قابل قبول وضع طبیعی را فضای پارامتر نامیده و با  $\Omega$  نشان می‌دهند.

**تعریف ۳.۱ فضای عمل (فضای کار):** فرض کنید  $A$  مجموعه همه کارهایی است که می‌توانیم یکی از آنها را انجام دهیم. در این صورت  $A$  را فضای عمل می‌گویند، که با مشاهده یافته‌های  $X = (X_1, \dots, X_n)$  و بر اساس قاعده معینی می‌توانیم عمل  $a \in A$  را انجام دهیم. مثلاً در مسئله برآورد با مشاهده  $X = x$  تصمیم می‌گیریم که یک عضو از  $\Omega$  را اختیار کنیم در نتیجه  $A \in \Omega$  و یا در مسئله آزمون فرضیه تصمیم می‌گیریم که فرضیه  $H_0$  را بپذیریم (عمل  $a_0$ ) و یا  $H_0$  را رد کنیم (عمل  $a_1$ ).

**تعریف ۴.۱ داده‌ها:** اگر  $X$  متغیر تصادفی توصیف کننده مسئله تصمیم باشد، که چگالی آن متعلق به خانواده توزیع‌های  $F = \{f(x|\theta); \theta \in \Omega\}$  است، آنگاه یافته‌های نمونه تصادفی داده‌های مورد استفاده هستند. مجموعه همه این داده‌ها را فضای نمونه (فضای یافته‌ها) نامیده و با  $\mathcal{X}$  نشان می‌دهند.

**تعریف ۵.۱ تابع تصمیم:** بیان کردیم که با مشاهده  $X = x$  عمل  $a \in A$  را انجام می‌دهیم، بنابراین با تابعی  $s$  و کار داریم که دامنه آن  $\mathcal{X}$  و برد آن فضای عمل  $A$  است. به عبارتی دقیق تر داریم  $d: \mathcal{X} \rightarrow A$ . در مسئله برآورد،  $d(x)$  همان برآورد پارامتر است و در مسئله آزمون فرضیه،  $d(x)$  همان تابع آزمون است.

## ۱.۳ جبر ماتریس ها

### ۱.۶ اثر ماتریس<sup>۱</sup>

اثر ماتریس مربع  $A$  را با  $\text{tr}(A)$  نشان می دهیم و برابر است با مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس  $A$ .

### تعریف ۱.۷ ماتریس متعامد<sup>۲</sup>

ماتریس مربع  $A$  از رتبه  $n$  را متعامد گویند اگر  $A'A = AA' = I_n$ . بدیهی است که  $A^{-1} = A'$ .

### تعریف ۱.۸ مقدار ویژه و بردار ویژه

عدد  $\lambda \in \mathbb{C}$  یک مقدار ویژه ماتریس  $A$  نامیده می شود اگر یک بردار ستونی  $\underline{x} \neq 0$  (که بردار ویژه ماتریس  $A$  می نامیم) پیدا شود بطوریکه  $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ .

### تعریف ۱.۹ ماتریس معین مثبت<sup>۳</sup>

یک صورت درجه دوم بر حسب بردار  $\underline{x}$ ، تابعی به شکل  $Q(\underline{x}) = \underline{x}'A\underline{x}$  است که در آن  $A$  یک ماتریس مربع متقارن است. ماتریس  $A$  را معین مثبت (نیمه معین مثبت) می نامیم اگر و فقط اگر به ازای هر  $\underline{x} \neq 0$  داشته باشیم  $Q(\underline{x}) > 0$  ( $Q(\underline{x}) \geq 0$ ).

لم ۱.۱ بردارهای  $\underline{a}$  و  $\underline{x}$  و ماتریس  $A$  را در نظر می گیریم، روابط زیر برقرار است.

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (A\underline{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial \underline{x}} (A\underline{x})' = A'$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{x}'A) = A$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{x}'A\underline{x}) = 2A\underline{x}$$

---

۱. Matrix Trace

۲. Orthogonal Matrix

۳. Positive defined

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{a}' \underline{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{x}' \underline{a}) = \underline{a}$$

فرع ۱.۱ فرض کنید  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)'$  و  $\mathbf{C} = (C_{ij})$  ،  $i, j = 1, \dots, n$  ، آنگاه داریم:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C} & \underline{y} \\ \underline{y}' & 1 \end{vmatrix} = |\mathbf{C} - \underline{y}' \underline{y}| = \begin{vmatrix} 1 & \underline{y}' \\ \underline{y} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = |\mathbf{C}| (1 - \underline{y}' \mathbf{C}^{-1} \underline{y})$$

## ۱. ۴ انواع تابع زیان<sup>۱</sup>

ابتدا تابع زیان را تعریف می‌کنیم و سپس توابع زیان به کار رفته در پایان نامه را یک به یک مطرح می‌کنیم.

### تعریف ۱.۱۰ تابع زیان

بهترین خصوصیت یک برآوردگر خوب بدست آوردن برآوردی از پارامتر مجهول جامعه است، که تا حد ممکن به مقدار واقعی پارامتر  $\theta$  نزدیک باشد. اگر  $\mathcal{D}$  کلاس کلیه برآوردگرهای پارامتر  $\theta$  باشد، در برآورد  $\theta$  به وسیله برآوردگر  $\delta(X) \in \mathcal{D}$  ، مقدار خطای حاصل شده را با تابع  $L(\theta, \delta(X))$  اندازه می‌گیرند که تابعی از  $\delta(X) - \theta$  می‌باشد. در این صورت یک تابع زیان، تابعی است حقیقی به صورت  $L(\theta, \delta(X))$  به طوری که:

$$L: \Theta \times \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty)$$

و در دو شرط زیر صدق کند:

- i)  $L(\theta, \delta(X)) \geq 0 \quad \forall \theta, \forall \delta$
- ii)  $L(\theta, \delta(X)) = 0 \Leftrightarrow \delta(X) = \theta$

تا کنون توابع زیان زیادی شناخته و استفاده شده است که ما در این قسمت با توجه به نیاز، به چند مورد اشاره می‌کنیم.

۱. تابع زیان متعادل<sup>۱</sup>

فرض کنید  $\delta$  برآوردگری برای  $\theta$  باشد. آنگاه نیکویی برازش  $\delta$  نسبت به برآوردگر هدف  $\delta_0$  با معیار  $(\delta - \delta_0)^2$  سنجیده می‌شود. این برآوردگر هدف می‌تواند LSE، MLE، UMVUE، بیز و ... باشد همچنین خطای برآورد  $\delta$  توسط معیار  $(\delta - \theta)^2$  اندازه‌گیری می‌شود. با توجه به این که هر دو معیار فوق برای تصمیم‌گیری راجع به  $\delta$  می‌توانند مفید باشند ترکیبی از آنها می‌تواند معیار کامل‌تری به صورت زیر ارائه دهد.

$$L_{\rho, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \rho(\delta_0, \delta) + (1 - \omega) \rho(\theta, \delta) \quad (۱.۱)$$

که در آن  $\omega \in [0, 1]$  مقداری معلوم،  $\delta_0$  برآوردگر هدف پارامتر  $\theta$  و  $\rho$  تابع زیان دلخواه می‌باشد. این تابع زیان توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) مطرح شده است که تعمیم کلی از تابع زیان متعادل وزنی مطرح شده توسط زلنر (۱۹۹۴) به صورت زیر می‌باشد.

$$L^z(\theta, t) = \omega \sum_{i=1}^n (X_i - t)^2 + (1 - \omega)(t - \theta)^2 \quad (۲.۱)$$

که در آن  $\omega \in [0, 1]$  مقداری معلوم و  $t = t(X)$  برآوردگر پارامتر  $\theta$  است. این تابع زیان به طور همزمان هر دو معیار نیکویی برازش<sup>۲</sup> و خطای برآوردیابی<sup>۳</sup> در برآورد پارامتر  $\theta$  را دارا می‌باشد.

## ۲. تابع زیان متعادل وزنی

با قرار دادن  $\rho(\theta, \delta) = \rho_1(\theta, \delta) = r(\theta)(\delta - \theta)^2$  در تابع زیان متعادل تابع زیان متعادل وزنی را بدست می‌آوریم.

$$L_{\omega, \delta_0}(\theta; \delta) = \omega r(\theta)(\delta - \delta_0)^2 + (1 - \omega)r(\theta)(\delta - \theta)^2 \quad (۳.۱)$$

---

۱. Balanced Loss Function

۲. Goodness of Fit

۳. Precision of Estimation

که در آن  $\omega \in [0,1]$ ،  $r(\cdot)$  تابع وزنی مثبت و  $\delta_0$  برآوردگر هدف می‌باشد. (این تابع زیان توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) با الهام گرفتن از زلنر (۱۹۹۴) مطرح شده است.

قسمت  $\omega r(\theta)(\delta - \delta_0)^2$  از تابع زیان متعادل درجه دو با جمله جریمه هموارسازی<sup>۱</sup> در رگرسیون ناپارامتری قابل قیاس است. این تابع زیان هر دو معیار نیکویی برازش و خطای برآورد را دارد و ضریب  $\omega$  باعث می‌شود هر کدام از محک های خطای برآورد و نیکویی برازش اهمیت داشته باشند. برای مثال اگر  $\omega = \frac{1}{2}$  همان اندازه که معیار نیکویی برازش در تابع زیان تأثیر دارد همان مقدار معیار خطای برآورد تأثیر خواهد داشت.

برای حالت چند متغیره تابع زیان متعادل وزنی بدین صورت است.

$$L_{\omega, \delta_0}^W(\underline{\theta}; \underline{\delta}) = \omega r(\|\underline{\theta}\|^2)(\underline{\delta} - \underline{\delta}_0)' W(\underline{\delta} - \underline{\delta}_0) + (1 - \omega) r(\|\underline{\theta}\|^2)(\underline{\delta} - \underline{\theta})' W(\underline{\delta} - \underline{\theta}) \quad (۴.۱)$$

که در آن  $\|\underline{\theta}\|^2 = \underline{\theta}' \underline{\theta} = \sum_{i=1}^p \theta_i^2$ ،  $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_p)'$ ،  $\omega \in [0,1]$ ،  $r(\cdot)$  تابع وزنی مثبت،  $\delta_0$  برآوردگر هدف (LS، MLE، بیز، هم پایا و مینیماکس) و  $W$  ماتریس وزنی می‌باشد.

این تابع زیان توسط جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) به عنوان تعمیمی برای حالت چند متغیره از تابع زیان مطرح شده در سال (۲۰۰۵) توسط همان نویسندگان ارائه شده است. در این تابع زیان نیز همان شرایط تابع زیان (۳.۱) برقرار است.

### ۳. تعمیم تابع زیان مربع خطا<sup>۲</sup>

با قرار دادن  $\rho(\theta, \delta) = \rho_2(\theta, \delta) = (h(\theta) - h(\delta))^2$  در تابع زیان (۱.۱) که در آن  $h$  پیوسته و افزایشی می‌باشد بسط جالبی از تابع زیان مربع خطا بدست می‌آید که به شرح زیر است.

$$(۵.۱)$$

۱. Lake of Smoothness

۲. Quadratic Loss Function

$$L_{\rho_2, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = r(\delta_0)(h(\delta) - h(\delta_0))^2 + r(\theta)(h(\theta) - h(\delta))^2$$

برخی از انتخاب‌هایی که برای  $\rho$  می‌تواند در نظر گرفت عبارتند از:

$$\rho(\theta, \delta) = \left(\ln\left(\frac{\theta}{\delta}\right)\right)^2 \quad \text{الف) } h(t) = \ln t, t > 0$$

$$\text{ب) } h(t) = e^{\alpha t}, \alpha > 0 \quad \rho(\theta, \delta) = (e^{\alpha\theta} - e^{\alpha\delta})^2 \quad (\text{Heilmann 1989})$$

#### ۴. تابع زیان آنتروپی<sup>۱</sup>

با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = \rho_3(\theta, \delta) = \frac{\theta}{\delta} - \log \frac{\theta}{\delta} - 1$  تابع زیان آنتروپی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$L_{\rho_3, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \left( \frac{\delta_0}{\delta} - \log \left( \frac{\delta_0}{\delta} \right) - 1 \right) + (1 - \omega) \left( \frac{\theta}{\delta} - \log \left( \frac{\theta}{\delta} \right) - 1 \right) \quad (۶.۱)$$

#### ۵. تابع زیان نوع استاین<sup>۲</sup>

با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = \rho_4(\theta, \delta) = \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^\beta - \beta \log \frac{\delta}{\theta} - 1$  که در آن  $\beta \neq 0$  تابع زیان نوع استاین به دست می‌آید.

$$L_{\rho_4, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \left( \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^\beta - \beta \log \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) - 1 \right) + (1 - \omega) \left( \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^\beta - \beta \log \left(\frac{\delta}{\theta}\right) - 1 \right) \quad (۷.۱)$$

۶. با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = \rho_5(\theta, \delta) = \left(\frac{\theta}{\delta} - 1\right)^2$  تابع زیان به شرح زیر می‌باشد.

$$L_{\rho_5, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \left( \frac{\delta_0}{\delta} - 1 \right)^2 + (1 - \omega) \left( \frac{\theta}{\delta} - 1 \right)^2 \quad (۸.۱)$$

#### ۷. تابع زیان لینکس<sup>۳</sup>

با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = \rho_6(\theta, \delta) = e^{a(\delta-\theta)} - a(\delta - \theta) - 1$  که در آن  $a \neq 0$  تابع زیان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$L_{\rho_6, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega (e^{a(\delta-\delta_0)} - a(\delta - \delta_0) - 1) + (1 - \omega) (e^{a(\delta-\theta)} - a(\delta - \theta) - 1) \quad (۹.۱)$$

---

۱. Entropy

۲. Stein Type Loss

۳. Linex Loss Function



۸. تابع زیان متوازن قدرمطلق<sup>۱</sup>

با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = \rho_7(\theta, \delta) = |\delta - \theta|$  تابع زیان متوازن قدرمطلق به صورت زیر داریم.

$$L_{\rho_7, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega|\delta - \delta_0| + (1 - \omega)|\delta - \theta| \quad (۱۰.۱)$$

تعریف ۱۱.۱ تابع مخاطره<sup>۲</sup>

با توجه به این که تابع زیان یک متغیر تصادفی است، می‌خواهیم به ازای هر  $L$  داده شده، برآوردگری مانند  $\delta(X)$  بیابیم که متوسط  $L$  را می‌نیمم کند. متوسط مقدار  $L$  را تابع مخاطره برآوردگر  $\delta$  در برآورد پارامتر  $\theta$  می‌نامیم و آن را با  $R(\theta, \delta)$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(\theta, \delta) = E_{\theta}[L(\theta, \delta(X))]$$

## تعریف ۱۲.۱

برای یک تابع حقیقی مقدار  $f$  با دامنه  $S$ ،  $\operatorname{argmin}_{x \in S} f(x)$  مجموعه‌ای از عناصر  $S$  می‌باشد که کمترین مقدار را برای  $f$  نتیجه می‌دهند.

$$\operatorname{argmin}_{x \in S} f(x) = \left\{ x \in S : f(x) = \min_{y \in S} f(y) \right\}$$

## ۱. ۵ معیار مقایسه‌ی برآوردگرها

در این بخش ابتدا معیار مقایسه‌ی برآوردگرها را بیان و برآوردگر پذیرفتنی را تعریف می‌کنیم. با در نظر گرفتن این معیار، نشان می‌دهیم در انتخاب یک برآوردگر اعمال محدودیت‌هایی (رعایت اصولی) لازم است و چند اصل مهم را بیان می‌کنیم. در زیر بخش‌های ۱، ۵، ۱ و ۲، ۵، ۱ این اصول را در حد نیاز پایان‌نامه شرح می‌دهیم.

برای مطالعه بیشتر به مرجع [۳] مراجعه کنید.

۱. Balanced Absolute Loss Function

۲. Risk Function

۱.۵.۱ معیار مقایسه‌ی برآوردگرها و برآوردگر پذیرفتنی (مجاز)<sup>۱</sup>

یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی تصمیم آماری، مقایسه‌ی برآوردگرهای موجود و یا به عبارت بهتر مقایسه‌ی دقت آن‌ها، به منظور دستیابی به بهترین برآوردگر است. به دلیل آن که میزان دقت یک برآوردگر با تابع مخاطره‌ی آن اندازه‌گیری می‌شود، مقایسه‌ی توابع مخاطره اهمیت می‌یابد. اصولاً برای مقایسه‌ی دو یا چند مقدار عددی، ابتدا آن‌ها را مرتب کرده و سپس عمل مقایسه را انجام می‌دهند. دو تعریف بعدی یک ترتیب جزئی روی کلاس  $\mathcal{D}$  (از برآوردگرها) برقرار می‌سازند.

**تعریف ۱۳.۱** فرض کنید  $\delta_1$  و  $\delta_2$  دو برآوردگر با تابع مخاطره‌ی  $R(\theta, \delta_1)$  و  $R(\theta, \delta_2)$  باشند.  $\delta_1$  را به خوبی  $\delta_2$  گویند هر گاه برای هر  $\theta \in \Theta$ ،  $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$  باشد. همچنین  $\delta_1$  را بهتر از  $\delta_2$  گویند هر گاه برای هر  $\theta \in \Theta$ ،  $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$  و برای حداقل یک  $\theta_0 \in \Theta$ ،  $R(\theta_0, \delta_1) < R(\theta_0, \delta_2)$  باشد. بعلاوه اگر برای  $\theta \in \Theta$ ،  $R(\theta, \delta_1) = R(\theta, \delta_2)$  باشد. آن گاه  $\delta_1$  هم ارز  $\delta_2$  است. هر گاه هیچ یک از سه حالت فوق اتفاق نیافتد،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را غیر قابل مقایسه گویند.

**تعریف ۱۴.۱** برآوردگر  $\delta$  را پذیرفتنی گویند هر گاه برآوردگر دیگری مانند  $\delta' \in \mathcal{D}$  وجود نداشته باشد که از  $\delta$  بهتر باشد. در غیر این صورت برآوردگر  $\delta$  را ناپذیرفتنی و  $\delta'$  را برآوردگر غالب بر آن گویند.

برای درک بهتر تعاریف فوق مثال زیر را در نظر بگیرید.

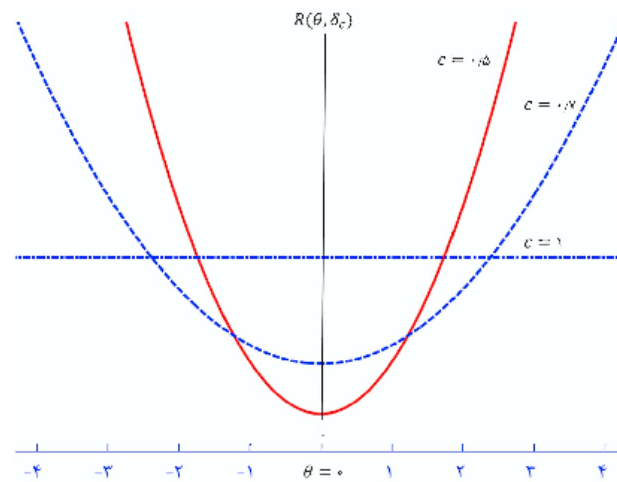
**مثال ۱.۱** فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $N(\theta, 1)$  است و علاقه‌مند به تصمیم‌گیری در مورد پارامتر  $\theta$  با برآوردگر  $\delta_c(X) = cX$  تحت تابع زیان  $L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$  هستیم. به وضوح داریم:

---

۱. Admissible

$$\begin{aligned}
 R(\theta, \delta_c) &= E_\theta[L(\theta, \delta_c)] \\
 &= E_\theta(cX - \theta)^2 \\
 &= c^2 + (1 - c)^2 \theta^2
 \end{aligned}$$

برای هر  $c > 1$ ،  $R(\theta, \delta_1) = 1 < c^2 + (1 - c)^2 \theta^2 = R(\theta, \delta_c)$  است. بنابراین برای هر  $c > 1$ ،  $\delta_1$  بهتر از  $\delta_c$ ،  $\delta_c$  ناپذیرفتنی و  $\delta_1$  برآوردگر غالب بر آن است. همچنین برای هر  $0 \leq c < c_* \leq 1$ ،  $\delta_c$  برآوردگرهای  $\delta_c$  و  $\delta_{c_*}$  غیر قابل مقایسه هستند. نمودار تابع مخاطره  $\delta_c$  به ازای  $c = 0.5, 0.7, 1$  را در شکل ۱.۱ نمایش داده‌ایم.



شکل ۱.۱ نمودار تابع مخاطره  $\delta_c$  به ازای  $c = 0.5, 0.7, 1$

طبق شکل ۱.۱ برآوردگرهای  $\delta_c$  غیر قابل مقایسه هستند. توجه کنید که برای هر  $0 \leq c \leq 1$ ،  $\delta_c$  یک برآوردگر پذیرفتنی در کلاس برآوردگرهای به فرم  $\delta_c(X) = cX$  است. برای مشاهده‌ی توضیحات بیشتر مثال ۴.۱ برگر (۱۹۸۵) را ملاحظه نمایید.

**توجه ۱.۱** ناپذیرفتنی بودن یک برآوردگر یک خاصیت منفی است، اما پذیرفتنی بودن آن لزوماً یک خاصیت مثبت نیست. به عبارت دیگر اطلاع از ناپذیرفتنی بودن یک برآوردگر منجر به عدم استفاده‌ی مستقیم از آن می‌شود (معمولاً در این حالت از برآوردگر غالب بر آن استفاده می‌شود). در حالی که

اطلاع از پذیرفتنی بودن یک برآوردگر لزوماً منجر به استفاده از آن نمی‌شود، چرا که برخی از برآوردگرهای پذیرفتنی نامعقول هستند. برای درک بهتر، در مثال ۱,۱ قرار دهید  $c = 0$ . در این صورت اگر چه  $\delta_c$  پذیرفتنی است اما مقدار مشاهده شده‌ی  $X = x$  را نادیده می‌گیرد. بنابراین استفاده از آن نامعقول است.

همان گونه که در مثال ۱,۱ مشاهده کردیم، در برآورد پارامتر  $\theta$  چندین برآوردگر پذیرفتنی را می‌توان یافت. در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که چه دلیلی مبنی بر انتخاب برآوردگر  $\delta_c$  و یا عدم انتخاب برآوردگر دیگری مانند  $\delta(X) = X \tanh(X)$  وجود دارد؟ بنابراین لازم است برای پیش دستی بر این قبیل سؤال‌ها، اصولی را در انتخاب برآوردگرها در نظر بگیریم و سپس تابع مخاطره‌ی برآوردگرهای حاصل و احیاناً برآوردگرهای مورد ادعای دیگر را با هم مقایسه کنیم. این عمل منجر به معرفی برآوردگر بهینه می‌شود.

یکی از روش‌های مطرح در تعیین یک برآوردگر، استفاده از اصل ماکسیمم درستنمایی است. به کار گیری این اصل برآوردگرهای حافظ دامن‌ی پارامتر به دست می‌دهد اما این اصل با تابع زیان ارتباطی ندارد. بنابراین شایسته است اصل ماکسیمم درستنمایی را در کنار تابع زیان به کار گرفت. البته این امر بدان معنی نیست که برآوردگر ماکسیمم درستنمایی یک برآوردگر بهینه است. متأسفانه حالت‌هایی که در آن‌ها بهترین برآوردگر وجود دارد، نادر هستند و در حالت کلی پیدا کردن بهترین برآوردگر  $\delta$  در کلاس تمام برآوردگرها امکان پذیر نیست. معمولاً در انتخاب برآوردگر بهینه به یکی از دو روش کلی زیر عمل می‌شود:

### روش اول: محدود کردن کلاس برآوردگرها

از آنجا که بهترین برآوردگر در کلاس تمام برآوردگرها وجود ندارد، می‌توان با محدود کردن کلاس برآوردگرها با یک روش معقول، به یافتن بهترین برآوردگر امیدوار بود. در این روش، یک زیر کلاس  $C$

از کلاس کلیه ی برآوردگرها ( $\mathcal{D}$ ) انتخاب و در این کلاس کوچکتر، بهترین برآوردگر را پیدا می کنند. مثلاً کلاس برآوردگرهای ناریب، پایا و ... .

## روش دوم: برقراری نوعی رابطه ی ترتیب در کلاس برآوردگرها

در این روش به جای محدود کردن کلاس برآوردگرها، ابتدا برآوردگرها را با معیاری مطلوب مرتب و سپس بهترین برآوردگر را انتخاب می کنند. دو اصل مهم در این روش، اصل بیز و اصل مینیماکس هستند.

با توجه به این که در پایان نامه، اصل بیز را مورد استفاده قرار می دهیم، در ادامه به بیان مطالب مقدماتی مورد نیاز می پردازیم.

### ۱.۵. ۲ اصل بیز

در اصل بیز،  $\theta$  متغیری تصادفی در نظر گرفته می شود که روی آن توزیع احتمالی تحت عنوان توزیع پیشین، بر اساس اطلاعات قبلی، اعتقادات، باورها و تجربیات آزمایش گر اختیار می شود. بر اساس نمونه ی جمع آوری شده از جامعه، توزیع پیشین تصحیح می گردد. توزیع پیشین تصحیح شده را توزیع پسین می نامند. اگر  $\theta$  متغیری تصادفی باشد آن گاه تابع مخاطره  $R(\theta, \delta)$  نیز متغیری تصادفی خواهد بود. در ادامه از  $\theta$  به عنوان متغیر تصادفی و هم به عنوان مقدار مشاهده شده استفاده خواهیم نمود.

**تعریف ۱.۵.۱** مخاطره بیزی برآوردگر  $\delta$  نسبت به توزیع پیشین  $\Pi(\theta)$ ، با چگالی پیشین  $\pi(\theta)$  با  $r(\pi, \delta)$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود.

$$r(\pi, \delta) = E_{\pi}[R(\theta, \delta)] = \int_{\theta} R(\theta, \delta) d\Pi(\theta) \quad (1.11)$$

**تعریف ۱.۱۶**  $\delta_B \in \mathcal{D}$  را یک برآوردگر بیزی نسبت به پیشین  $\pi(\theta)$  گویند هر گاه مخاطره ی بیزی را در بین تمام برآوردهای ممکن می نیمم کند. به عبارت دیگر  $\delta_B$  یک برآوردگر بیزی نسبت به پیشین  $\pi(\theta)$  است هر گاه داشته باشیم.

$$r(\pi, \delta_B) = \inf_{\delta \in \mathcal{D}} r(\pi, \delta) \quad (12.1)$$

با استفاده از قضیه زیر می توان یک برآوردگر بیزی را تحت تابع زیان داده شده به دست آورد.

**تعریف ۱.۱۷** به پارامترهای توزیع پیشین هایپر پارامتر<sup>۱</sup> می گویند. معمولاً در بدست آوردن برآوردگر بیز این پارامترها معلوم فرض می شوند ولی چنانچه این پارامترها مجهول باشند و آنها را برآورد کنیم و در برآوردگر بیز قرار دهیم به برآوردگر بدست آمده برآوردگر بیز تجربی می گویند.

**قضیه ۱.۱** (لی من و کسلا، ۱۹۹۸، ص ۲۲۸)

فرض کنید  $\theta$  دارای تابع توزیع  $\Pi(\theta)$ ، با تابع چگالی  $\pi(\theta)$  و متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیعی از خانواده ی  $\mathcal{F}_\theta = \{f(x|\theta): \theta \in \Theta\}$  باشد. همچنین فرض کنید در مسأله برآوردیابی با تابع زیان نامنفی  $L(\theta, \delta)$  شرایط زیر برقرار باشند.

**الف)** برآوردگر  $\delta_0$  با مخاطره ی متناهی موجود است.

**ب)** برای هر  $x \in \mathcal{X}$ ، برآوردگر  $\delta^\pi(x)$  موجود است که مخاطره ی پسین

$$r(x, \delta) = \int_{\Theta} L(\theta, \delta(x)) d\Pi(\theta|x) \quad (13.1)$$

را می نیمم کند که در آن

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)d\Pi(\theta)}$$

تابع چگالی پسین  $\theta$  به شرط  $X = x$  است.

۱. Hyper parameter

در این صورت،  $\delta^\pi(x)$  یک برآورد بیزی است.

نتیجه ۱.۱ (لی من و کسلا ۱۹۹۸، ص ۲۲۸)

تحت فرضیات قضیه ۱.۱ در برآورد پارامتر  $\theta$  داریم:

الف) تحت تابع زیان  $\rho_7$ ، برآورد بیزی، میانه ی توزیع  $\theta$  به شرط  $X = x$  است، یعنی

$$\delta_B(x) = \text{Median}(\theta|x) \quad (۱۴.۱)$$

ب) تحت تابع زیان  $\rho_2$  برآورد بیزی، امید ریاضی توزیع  $\theta$  به شرط  $X = x$  است، یعنی

$$\delta_B(x) = E(\theta|x) \quad (۱۵.۱)$$

## ۱. ۶ برخی توزیع های آماری

### تعریف ۱.۱۸ توزیع نرمال

توزیع نرمال استاندارد یک توزیع پیوسته است که تابع چگالی آن برابر است با:

$$f(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

حال اگر  $Y = \mu + \sigma X$  و  $X \sim N(0,1)$ ، آنگاه توزیع  $Y$  نرمال با تابع چگالی زیر می باشد.

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

و می نویسیم  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

تابع مولد گشتاور برای توزیع نرمال عبارت است از:

$$m_{N(\mu, \sigma^2)}(t) = E[\exp(tY)] = \exp(\mu t) \exp(\sigma^2 t^2 / 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

در زیر چند مورد از امید ریاضی های توابعی از متغیر  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  مورد نیاز در این رساله را آورده ایم.

$$\varphi_1 = E(y) = \mu$$

$$\varphi_2 = E(y^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\varphi_3 = E(y^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$

$$\varphi_4 = E(y^4) = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$$

$$\varphi_5 = E(e^x) = m_{N(\mu, \sigma^2)}|_{(t=1)} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\varphi_6 = E(xe^x) = \frac{\partial}{\partial t} m_{N(\mu, \sigma^2)}|_{(t=1)} = (\mu + \sigma^2)\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\varphi_7 = E(x^2 e^x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} m_{N(\mu, \sigma^2)}|_{(t=1)} = (\mu + \sigma^2)^2 + \sigma^2 \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\varphi_8 = E(xe^{-bx}) = \frac{\partial}{\partial t} m_{N(\mu, \sigma^2)}|_{(t=-b)} = (\mu - b\sigma^2)\exp\left(-b\mu + \frac{b\sigma^2}{2}\right)$$

$$\varphi_9 = E(e^{(1-b)x}) = m_{N(\mu, \sigma^2)}|_{(t=1-b)} = \exp\left((1-b)\mu + \frac{(1-b)^2\sigma^2}{2}\right)$$

### تعریف ۱۹.۱ توزیع نرمال چند متغیره

بردار  $p$  مولفه‌ای  $\underline{X}$  دارای توزیع نرمال  $p$  متغیره است و با نماد  $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$  نشان داده می‌شود اگر و

فقط اگر به ازای هر بردار  $p$  مولفه‌ای ثابت  $a, a' \underline{X}$  دارای توزیع نرمال یک متغیره باشد.

اگر  $\Sigma$  یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه  $\underline{X}$  دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر است:

$$f(\underline{x}) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right]$$

که در آن  $|\Sigma|^{1/2}$  ریشه دوم دترمینال  $\Sigma$  است. توجه کنید اگر  $p = 1$ ، آنگاه صورت درجه دوم در

توان نمایی، به  $\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$  تبدیل می‌شود و در نتیجه  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

**قضیه ۲.۱** اگر  $\mu \sim N(\theta, \tau^2)$  و  $X|\mu \sim N(\mu, \sigma^2)$  آنگاه توزیع پسین  $\mu$  برابر است با:

$$\mu|X \sim N\left(\frac{\sigma^2\theta + \tau^2x}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2}\tau^2\right)$$

**برهان:** برای اثبات به برگر (۱۹۸۵) مراجعه کنید.

**قضیه ۱.۳** اگر  $\underline{X}_i \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ ،  $i = 1, \dots, N$  و  $\underline{X}_i$  ها مستقل از یکدیگر باشند آنگاه

$$N(\bar{\underline{X}} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\bar{\underline{X}} - \underline{\mu}) \sim \chi_p^2$$

**برهان:** برای اثبات میرهد<sup>۱</sup> (۲۰۰۵) را مطالعه کنید.

**قضیه ۱.۴** فرض کنید  $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$  دارای توزیع  $N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$  با  $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$  و  $\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$

$\underline{\Sigma}_{22} > 0$  آنگاه توزیع شرطی  $\underline{X}_1$  به شرط  $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$  به صورت

$$N_p(\underline{\mu}_1 + \underline{\Sigma}_{12} \underline{\Sigma}_{22}^{-1} (\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2), \underline{\Sigma}_{11,2})$$

است، که:

$$\underline{\Sigma}_{11,2} = \underline{\Sigma}_{11} - \underline{\Sigma}_{12} \underline{\Sigma}_{22}^{-1} \underline{\Sigma}_{21}$$

**برهان:** برای اثبات میرهد (۲۰۰۵) را ببینید.

**تعریف ۱.۲۰** توزیع ویشارت<sup>۲</sup>

اگر  $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_N \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$  آنگاه  $A = \sum_{\alpha=1}^N (\underline{X}_\alpha - \bar{\underline{X}})(\underline{X}_\alpha - \bar{\underline{X}})'$  دارای توزیع ویشارت با تابع

چگالی به فرم زیر می باشد:

$$\begin{aligned} f(\underline{y}) &= \frac{|\underline{A}|^{\frac{1}{2}(n+p+1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{A}\right)}{2^{\frac{1}{2}np} \pi^{p(p-1)/4} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}n} \prod_{i=1}^p \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} \\ &= \frac{|\underline{A}|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{A}\right)}{2^{\frac{1}{2}np} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad N > p \end{aligned}$$

برای اطلاعات بیشتر به اندرسن<sup>۱</sup> (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

۱. Muirhead

۲. Inverted Wishart

## تعریف ۲۱.۱ توزیع ویشارت معکوس

اگر  $A \sim W_p(\Sigma, m)$  آنگاه  $B = A^{-1}$  دارای توزیع ویشارت معکوس می باشد که تابع چگالی آن به شرح زیر است.

$$f(\underline{y}) = \frac{|\psi|^{\frac{1}{2}m} |B|^{-\frac{1}{2}(m+p+1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \psi B^{-1}\right)}{2^{\frac{1}{2}mp} \Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)}$$

که در آن  $B$  ماتریس معین مثبت و  $\psi = \Sigma^{-1}$ . (اندرسن ۲۰۰۳)

قضیه ۱.۵ اگر  $M \sim W_p(\Sigma, m)$  و  $B$  یک ماتریس  $(p \times q)$  باشد، آنگاه

$$B'MB \sim W_p(B'\Sigma B, m)$$

فرع ۲.۱ زیر ماتریس های قطری  $M$  خودشان دارای توزیع ویشارت اند.

فرع ۱.۳ اگر  $M \sim W_p(\Sigma, m)$  آنگاه  $M \Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(I, m)$

فرع ۱.۴ اگر  $M \sim W_p(\Sigma, m)$  و  $B_{(p \times q)}$  در  $B'B = I_q$  صدق کند، آنگاه  $B'MB \sim W_p(I, m)$ .

قضیه ۱.۶ اگر  $M \sim W_p(\Sigma, m)$ ،  $m > p$  آنگاه نسبت  $\frac{a'\Sigma^{-1}a}{a'M^{-1}a}$  به ازای هر  $p$  بردار ثابت  $a$  دارای توزیع  $\chi^2_{m-p+1}$  است.

برهان: اثبات قضایای ۱.۵ و ۱.۶ و فرع های ۲.۱ تا ۴.۱ را در ماردیا (۱۳۷۶) ببینید.

لم ۲.۱ فرض کنید متغیر  $M$  دارای توزیع ویشارت  $p$  متغیره با پارامترهای  $\Sigma$  و  $m$  باشد، در این صورت داریم:

$$E(M^{-1}) = \frac{\Sigma^{-1}}{m-p-1}, \quad m-p > 1$$

برهان: برای اثبات به لم ۱،۷،۷ اندرسن (۲۰۰۳) مراجعه کنید.



(\*) لم ۳.۱ فرض می‌کنیم  $\mathbf{B} \sim \mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{m})$  آنگاه داریم:

$$\int_{\mathbf{B} > 0} |\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}(\mathbf{m}+\mathbf{p}+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}\boldsymbol{\psi}\mathbf{B}^{-1}\right) d\mathbf{B} = |\boldsymbol{\psi}|^{-\frac{1}{2}\mathbf{m}} 2^{\frac{\mathbf{m}\mathbf{p}}{2}} \Gamma_p\left(\frac{\mathbf{m}}{2}\right)$$

برهان: از خواص تابع چگالی داریم:

$$\int_{\mathbf{B} > 0} \frac{|\boldsymbol{\psi}|^{\frac{1}{2}\mathbf{m}} |\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}(\mathbf{m}+\mathbf{p}+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}\boldsymbol{\psi}\mathbf{B}^{-1}\right)}{2^{\frac{1}{2}\mathbf{m}\mathbf{p}} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}\mathbf{m}\right)} d\mathbf{B} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{B} > 0} |\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}(\mathbf{m}+\mathbf{p}+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}\boldsymbol{\psi}\mathbf{B}^{-1}\right) d\mathbf{B} = |\boldsymbol{\psi}|^{-\frac{1}{2}\mathbf{m}} 2^{\frac{1}{2}\mathbf{m}\mathbf{p}} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}\mathbf{m}\right) \quad \blacksquare$$

لم ۴.۱ (قاری ۱۳۸۷)

فرض کنید  $\mathbf{C}$  یک ماتریس  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  باشد، بطوریکه  $\mathbf{C}'\mathbf{B} = \mathbf{0}$  و

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B}(\mathbf{B}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{S}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{S}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'$$

آنگاه برای  $\mathbf{S} \sim \mathbf{W}_p(\boldsymbol{\Sigma}, n)$  که در آن  $n = N - 1$  موارد زیر برقرار است.

$$۱) E(\hat{\mathbf{H}}) = \mathbf{H}$$

$$۲) E(\hat{\mathbf{H}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\mathbf{H}}) = \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \mathbf{C}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'$$

$$۳) E(\text{tr } \hat{\mathbf{A}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{r(n-1)}{n-q-1}$$

برهان:

$$\mathbf{B}_2 = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C})^{-\frac{1}{2}} \quad (۱۶.۱)$$

را که یک ماتریس  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  می‌باشد، در نظر می‌گیریم. بطوریکه  $\mathbf{B}_2'\mathbf{B}_2 = \mathbf{I}_q$  و

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2'\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} &= \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}' \\ &= \mathbf{H} \end{aligned}$$

(۱۷.۱)

و با تعریف

$$B_1 = \Sigma^{-\frac{1}{2}} B (B' \Sigma^{-1} B)^{-\frac{1}{2}} \quad (۱۸.۱)$$

$B'_1 B_1 = I_r$  و  $B'_2 B_1 = 0$  نتیجه می‌شود. آنگاه افراز  $\Gamma = (B_1, B_2)$  یک ماتریس متعامد  $p \times p$  است،

یعنی  $\Gamma' \Gamma = I_p$  زیرا:

$$\begin{aligned} \Gamma' \Gamma &= \begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{pmatrix} (B_1 \quad B_2) \\ &= \begin{pmatrix} B'_1 B_1 & B'_1 B_2 \\ B'_2 B_1 & B'_2 B_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = I_{r+q} = I_p \end{aligned}$$

حال با توجه به قضیه ۵.۱ چون  $S \sim W_p(\Sigma, n)$  و  $\Sigma$  یک ماتریس  $p \times p$  است، پس:

$$W = \underline{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} S \underline{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim W_p\left(\underline{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \Sigma \underline{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}, n\right) \quad (۱۹.۱)$$

و در نتیجه  $W \sim W_p(I, n)$ .

(۱) با توجه با اینکه

$$\begin{aligned} \hat{H} &= S C (C' S C)^{-1} C' \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}} W B_2 (B'_2 W B_2)^{-1} B'_2 \Sigma^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(۲۰.۱)

و با توجه به روابط (۱۶.۱) و (۱۹.۱)

$$\begin{aligned} &\Sigma^{\frac{1}{2}} W B_2 (B'_2 W B_2)^{-1} B'_2 \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} S \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} C (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} \left( (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} C' \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} S \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} C (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} C' \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= S C (C' S C)^{-\frac{1}{2}} \left( (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} C' S C (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} (C' \Sigma C)^{-\frac{1}{2}} C' \\ &= S C (C' S C)^{-1} C' \end{aligned}$$

از آنجایی که  $\Gamma$  ماتریس متعامد است، یعنی  $\Gamma' \Gamma = I_p$ ، با ضرب طرفین تساوی (۲۰.۱) در  $\Gamma' \Gamma$  تساوی

برقرار خواهد بود. پس

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= SC(C'SC)^{-1}C' \\
&= \Sigma^{\frac{1}{2}}\Gamma\Gamma'WB_2(B_2'WB_2)^{-1}B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
&= \Sigma^{\frac{1}{2}}\Gamma \begin{pmatrix} B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} WB_2(B_2'WB_2)^{-1}B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
&= \Sigma^{\frac{1}{2}}\Gamma \begin{pmatrix} B_1'WB_2(B_2'WB_2)^{-1} \\ B_2'WB_2(B_2'WB_2)^{-1} \end{pmatrix} B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
&= \Sigma^{\frac{1}{2}}\Gamma \begin{pmatrix} B_1'WB_2(B_2'WB_2)^{-1} \\ I \end{pmatrix} B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{۲۱. ۱}$$

با توجه به فرع ۴.۱ از آنجایی که  $\Gamma$  یک ماتریس متعامد است و  $W \sim W_p(I, n)$  در نتیجه:

$$U = \Gamma'W\Gamma \sim W_p(I, n)$$

پس

$$\begin{aligned}
U &= \Gamma'W\Gamma = \begin{pmatrix} B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} W(B_1 \quad B_2) \\
&= \begin{pmatrix} B_1'WB_1 & B_1'WB_2 \\ B_2'WB_1 & B_2'WB_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \sim W_p(I, n)
\end{aligned}
\tag{۲۲. ۱}$$

حال با استفاده از امید ریاضی توزیع ویشارت داریم:

$$E(U) = nI_p = n \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nI_r & 0 \\ 0 & nI_q \end{pmatrix} \tag{۲۳. ۱}$$

در نتیجه  $E(U_{12}) = 0$  و همچنین  $E(U_{12}|U_{22}) = 0$  زیرا:

$$0 = E(U_{12}) = E(E(U_{12}|U_{22}))$$

همچنین:

$$E(U_{12}U_{22}^{-1}) = E(E(U_{12}U_{22}^{-1}|U_{22})) = E(E(U_{12}|U_{22})U_{22}^{-1}) = E(0U_{22}^{-1}) = 0 \tag{۲۴. ۱}$$

بنابراین  $\hat{H}$  بر اساس رابطه (۲۲. ۱) به صورت زیر بدست می آید.

$$\hat{H} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\Gamma \begin{pmatrix} U_{12}U_{22}^{-1} \\ I \end{pmatrix} B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \tag{۲۵. ۱}$$

با استفاده از رابطه (۲۴.۱) برای  $E(\hat{H})$  داریم:

$$\begin{aligned} E(\hat{H}) &= \Sigma^{\frac{1}{2}} \Gamma E \left[ \begin{pmatrix} U_{12} & U_{22}^{-1} \\ I & \end{pmatrix} \right] B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}} \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}} (B_1 \quad B_2) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}} B_2 B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۲۴. ۱)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۷.۱) در رابطه (۲۴.۱) حکم  $E(\hat{H}) = H$  ثابت می‌شود.

۲) برای اثبات قسمت دوم از رابطه (۲۵.۱) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_2 (U_{22}^{-1} U_{12}' \quad I) \Gamma' \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \Gamma \begin{pmatrix} U_{12} & U_{22}^{-1} \\ I & \end{pmatrix} B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_2 (I + U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۲۷. ۱)$$

از سریواستوا و خطری<sup>۱</sup> (۱۹۷۹)، داریم:  $E(U_{12}' U_{12} | U_{22}) = r U_{22}$

پس  $E(U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) = r E(U_{22}^{-1})$

زیرا:

$$\begin{aligned} E(U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) &= E[E(U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1} | U_{22})] \\ &= E(U_{22}^{-1} E(U_{12}' U_{12}) U_{22}^{-1} | U_{22}) \\ &= r E(U_{22}^{-1} U_{22} U_{22}^{-1}) \\ &= r E(U_{22}^{-1}) \end{aligned}$$

در نتیجه از رابطه (۲۷.۱) داریم:

$$\begin{aligned} E(\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}) &= E \left[ \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_2 (I + U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_2 (I + r E(U_{22}^{-1})) B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۲۸. ۱)$$

بنا به فرع ۱.۲،  $U_{22} \sim W_q(I, n)$ ، و طبق لم ۱.۲،  $E(U_{22}^{-1}) = \frac{r}{n-q-1}$

پس رابطه (۱.۲۸) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} E(\hat{H}'\Sigma^{-1}\hat{H}) &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}B_2 \left( \underline{I} + rE(U_{22}^{-1}) \right) B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( 1 + \frac{r}{n-q-1} \right) \Sigma^{-\frac{1}{2}}B_2B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \right) \Sigma^{-\frac{1}{2}}B_2B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

با جایگذاری  $B_2$  و  $B_2'$  از رابطه (۱.۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} E(\hat{H}'\Sigma^{-1}\hat{H}) &= \left( \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \right) \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}C(C'\Sigma C)^{-\frac{1}{2}}(C'\Sigma C)^{-\frac{1}{2}}C'\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \right) C(C'\Sigma C)^{-1}C' \end{aligned}$$

(۳) برای اثبات قسمت سوم داریم:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{A}'\Sigma^{-1}\hat{A}\Sigma) &= \text{tr}((I - \hat{H})'\Sigma^{-1}(I - \hat{H})\Sigma) \\ &= \text{tr}[(\Sigma^{-1} - \hat{H}'\Sigma^{-1})(\Sigma - \hat{H}\Sigma)] \\ &= \text{tr}[I - \hat{H} - \hat{H}' + \hat{H}'\Sigma^{-1}\hat{H}\Sigma] \\ &= \text{tr}I - \text{tr}\hat{H} - \text{tr}\hat{H}' + \text{tr}\hat{H}'\Sigma^{-1}\hat{H}\Sigma \end{aligned}$$

چون  $\text{tr}\hat{H} = \text{tr}\hat{H}' = p - r$  و با توجه به اینکه  $\text{tr}I = p$

$$\text{tr}(\hat{A}'\Sigma^{-1}\hat{A}\Sigma) = p - 2(p - r) + \text{tr}\Sigma\hat{H}'\Sigma^{-1}\hat{H} \quad (۱.۲۹)$$

بنابراین با توجه به (۲) و اینکه  $q = p - r$  داریم:

$$\begin{aligned} E[\text{tr}(\hat{A}'\Sigma^{-1}\hat{A}\Sigma)] &= p - 2(p - r) + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \text{tr}(\Sigma C(C'\Sigma C)^{-1}C') \\ &= p - 2(p - r) + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \text{tr}(H) \\ &= p - 2(p - r) + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} (p - r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p - 2(p - r) + \left[1 + \frac{r}{n - q - 1}\right] (p - r) \\
 &= r + \frac{r(p - r)}{n - q - 1} = \frac{r(n - q - 1) + r(p - r)}{n - q - 1} \\
 &= \frac{r(n - 1)}{n - q - 1}
 \end{aligned}$$

■

### تعریف ۲۲.۱ توزیع گاما

تابع چگالی گاما به شرح ذیل تعریف می‌شود.

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta)}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

و به صورت  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  نمایش داده می‌شود.

### تعریف ۲۳.۱ توزیع کی دو

فرض کنید  $X_1, \dots, X_p \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ، آنگاه:

$$Y = \sum_{i=1}^p \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

دارای توزیع کی دو با  $p$  درجه آزادی است و می‌نویسیم  $Y \sim \chi_p^2$ .

تابع چگالی احتمال  $Y$  به صورت زیر است:

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} y^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

امید ریاضی و واریانس آن برابر است با:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= p \\
 \text{Var}(Y) &= 2p
 \end{aligned}$$

## تعریف ۲۴.۱ توزیع کی دو غیر مرکزی

اگر  $U_1, \dots, U_p$  مستقل از هم و دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu_i$ ،  $i = 1, \dots, p$ ، و واریانس یک باشند آنگاه  $Y = \sum_{i=1}^p U_i^2$  دارای توزیع کی دو غیر مرکزی با  $p$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $\lambda = \sum_{i=1}^p \mu_i^2$  است و با  $Y \sim \chi_p^2(\lambda)$  نشان می‌دهیم. و تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشد.

$$f(y) = e^{-\frac{\delta}{2}} F_1 \left( \frac{n}{2}; \frac{\delta y}{4} \right) \times \frac{e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma \left( \frac{n}{2} \right)}$$

قضیه ۱.۷ اگر  $Z$  دارای توزیع نرمال استاندارد و  $U$  دارای توزیع کی-دو با  $k$  درجه آزادی باشند و  $Z$  و  $U$  مستقل باشند آنگاه  $X = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$  دارای توزیع  $t$  با  $k$  درجه آزادی با تابع چگالی به صورت زیر است.

$$f(y) = \frac{\Gamma \left( \frac{k+n}{2} \right) |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(k\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma \left( \frac{k}{2} \right)} \left( 1 + \frac{(y-\mu)' \Sigma^{-1} (y-\mu)}{k} \right)^{-\frac{(k+n)}{2}}$$

برهان: برای اثبات به مود<sup>۱</sup> (۱۳۷۷) مراجعه کنید.

## تعریف ۲۵.۱ توزیع تی چند متغیره

بردار  $n$  مولفه‌ای  $\underline{X}$  دارای توزیع  $t$  چند متغیره  $n$  بعدی با پارامترهای  $\underline{\mu}$ ،  $\Sigma$  و  $v$  درجه آزادی است و با  $\underline{X} \sim t_n(\underline{\mu}, \Sigma, v)$  نشان می‌دهیم اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(\underline{y}) = \frac{\Gamma \left( \frac{v+n}{2} \right) |\Sigma|^{-1/2}}{(v\pi)^{n/2} \Gamma \left( \frac{v}{2} \right)} \left( 1 + \frac{(\underline{y}-\underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{y}-\underline{\mu})}{v} \right)^{-\frac{(v+n)}{2}}$$

برای آگاهی بیشتر در مورد این توزیع ناداراجا و کاتز<sup>۲</sup> (۲۰۰۵) را ببینید.

۱. Mood

2. Nadarajah and Kotz

### تعریف ۱.۲۶ توزیع فیشر

اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با چگالی زیر باشد

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{\left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)x\right]^{\frac{m+n}{2}}}, 0 < x < \infty$$

آنگاه گفته می‌شود متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع فیشر با  $m$  و  $n$  درجه آزادی است.

**قضیه ۱.۸** اگر  $U \sim \chi^2_p$  و مستقل از  $V \sim \chi^2_q$  باشد، آنگاه متغیر تصادفی

$$F = \frac{U/p}{V/q}$$

دارای توزیع  $F$  با  $p$  و  $q$  درجه آزادی است.

**برهان:** برای اثبات به مود (۱۳۷۷) مراجعه نمائید.

**لم ۱.۵** اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $F$  با  $q$  و  $p$  درجه آزادی باشد آنگاه  $\frac{1}{X}$  دارای توزیع  $F$  با  $p$  و  $q$  درجه آزادی است.

**برهان:** برای اثبات مود (۱۳۷۷) را ببینید.

میانگین و واریانس توزیع فیشر به ترتیب برابر اند با:

$$E(X) = \frac{q}{q-2} \quad n > 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2q^2(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)} \quad n > 4$$

## تعریف ۱. ۲۷ توزیع فیشر غیر مرکزی

توزیع  $F$  مرکزی از تقسیم دو توزیع کی دو مرکزی مستقل، بر درجه آزادی هایشان به دست می‌آید. حال اگر به جای توزیع کی دو مرکزی صورت، کی دو غیر مرکزی قرار دهیم، توزیع فیشر غیر مرکزی به دست می‌آید.

## تعریف ۱. ۲۸ تابع گامای چند متغیره

تابع گامای چند متغیره به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}\Gamma_p &= \int_{X>0} |X|^{a-\frac{p+1}{2}} \text{etr}(-X) dX \\ &= \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^p \left[ a + \frac{1-j}{2} \right]\end{aligned}$$

## ۱. ۶. ۱ خانواده توزیع نمایی

تعریف ۱. ۲۹ فرض کنید  $\mathbf{X}$  تکیه گاه متغیر تصادفی  $X$  و  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  فضای پارامتر جامع باشد گوئیم تابع احتمال  $f(\cdot): \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}^+$  عضو خانواده نمایی است هر گاه توابع اندازه پذیر  $T(\cdot)$  و  $S(\cdot)$  روی  $\mathcal{R}$  و توابع حقیقی  $Q(\cdot)$  و  $D(\cdot)$  روی  $\Theta$  وجود داشته باشند به طوریکه:

$$f_{\theta}(x) = \exp[Q(\theta)T(x) + D(\theta) + S(x)]I_A(x)$$

$A$  به  $\theta$  بستگی ندارد و

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

تابع نشانگر مجموعه  $A$  است.

از تعریف فوق نتایج زیر بدست می‌آیند.

۱. توزیع آماره  $S(X)$  عضو خانواده نمایی است.

۲. بر اساس یک نمونه  $X_1, X_2, \dots, X_n$  تصادفیبه حجم  $n$  از توزیع نمایی، توزیع توأم نیز عضو خانواده نمایی است.

۳. با تغییر پارامتر  $\eta = Q(\theta)$  می توان نتیجه گرفت:

$$f_{\eta}(x) = \exp \left[ \eta T(x) + D^*(\eta) + S(x) \right] I_A(x)$$

نیز متعلق به خانواده نمایی است که به آن خانواده نمایی طبیعی می گویند (که دارای خواص زیر می باشد) و داریم:

$$E(T(X)) = -D'^*(\eta) = \frac{-dD^*(\eta)}{d\eta}$$

$$\text{Var}(T(X)) = D''^*(\eta)$$

$$M_{T(X)}(S) = \exp \left( D^*(\eta) - D^*(S + \eta) \right)$$

برای مطالعه بیشتر به لهن و کسلا<sup>۱</sup> (۱۹۹۸) مراجعه شود.

## ۱. ۷ لم های اساسی

لم ۱. ۶ (اتحاد استاین)

فرض کنید  $\underline{Y} \sim N_p(\underline{\theta}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$  در این صورت به ازای تابع حقیقی مقدار  $\underline{h} = (h_1, \dots, h_p)$ :

$$E_{\theta} \left[ (\underline{y}_i - \underline{\theta}_i) h_i(\underline{y}) \right] = \sigma^2 E_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} h_i(\underline{y}) \right]$$

که در آن تابع  $\mathbf{h}: \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^p$  بینهایت مشتق پذیر است.

برهان: برای اثبات به استاین (۱۹۸۱) مراجعه کنید.

۱. Lehmann and Casella

## لم ۷.۱ (قاری ۱۳۸۷)

فرض کنید متغیر تصادفی  $W$  دارای توزیع کی دو با  $g$  درجه آزادی است،  $W \sim \chi_g^2$ . همچنین  $\phi(\cdot)$  تابعی اندازه پذیر بول است. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی  $n$  داریم:

$$E[W^n \phi(W)] = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{g}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} E[\phi(\chi_{2n+g}^2)]$$

برهان: با استفاده از تابع چگالی توزیع کی دو می توان نوشت:

$$\begin{aligned} E[W^n \phi(W)] &= \int_0^\infty W^n \phi(W) \frac{W^{\frac{g}{2}-1} e^{-\frac{W}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{g}{2}}}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} dW = \int_0^\infty \phi(W) \frac{W^{\frac{g}{2}+n-1} e^{-\frac{W}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{g}{2}}}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} dW \\ &= \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{g}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{W^{\frac{g+2n}{2}-1} e^{-\frac{W}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{g+2n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{g+2n}{2}\right)} \phi(W) dW \\ &= \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{g}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} E[\phi(\chi_{2n+g}^2)] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## لم ۸.۱ (قاری ۱۳۸۷)

برای هر تابع انتگرالپذیر  $h(\chi_r^2)$  از یک متغیر تصادفی  $\chi_r^2$  با  $r$  درجه آزادی تساوی زیر برقرار است.

$$E\left[\frac{h(\chi_r^2)}{\chi_r^2}\right] = \frac{1}{r-2} E[h(\chi_{r-2}^2)]$$

برهان: اگر در لم ۶ قرار دهیم،  $\phi(W) = h(\chi_r^2)$ ،  $n = -1$ ،  $g = r$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{h(\chi_r^2)}{\chi_r^2}\right] &= \frac{2^{-1} \Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} E[h(\chi_{r-2}^2)] \\ &= \frac{\left(\frac{r}{2} - 2\right)!}{2\left(\frac{r}{2} - 1\right)!} E[h(\chi_{r-2}^2)] \\ &= \frac{1}{r-2} E[h(\chi_{r-2}^2)] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### قضیه ۹.۱ (اندرسن (۲۰۰۳)، قضیه ۷,۷,۳)

اگر  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$  و توزیع پیشین  $\underline{\mu}, \Sigma$   $N(\underline{\mu} | \underline{v}, \frac{1}{K} \Sigma) \times \mathcal{W}^{-1}(\Sigma | \psi, m)$  باشد آنگاه توزیع پسین  $\underline{\mu}, \Sigma$  برای  $\underline{x}$  معلوم به صورت زیر بدست می آید.

$$N\left(\underline{\mu} \left| \frac{1}{N+K} (N\bar{\underline{x}} + K\underline{v}), \frac{1}{N+K} \Sigma \right. \right) \times \mathcal{W}^{-1}\left(\Sigma \left| \psi + ns + \frac{NK}{N+K} (\underline{x}_\alpha - \underline{v})(\underline{x}_\alpha - \underline{v})', N + m \right. \right). \quad (۳۰. ۱)$$

که در آن

$$\bar{\underline{x}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \underline{x}_\alpha}{N}, \quad S = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^N (\underline{x}_\alpha - \bar{\underline{x}})(\underline{x}_\alpha - \bar{\underline{x}})'$$

**برهان:** چون  $\bar{\underline{x}}$  و  $nS = A$  آماره های کامل هستند، توزیع توام  $\bar{\underline{x}}, A, \underline{\mu}, \Sigma$  برابر است با:

$$\frac{K^{\frac{1}{2}p} N^{\frac{1}{2}p} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}(N+m+p+2)} |A|^{-\frac{1}{2}(N-p-2)}}{2^{\frac{1}{2}(N+m+1)p} \pi^p \Gamma_p\left(\frac{1}{2}(N-1)\right) \Gamma_p\left(\frac{1}{2}m\right)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[N(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}) + \text{tr } A \Sigma^{-1} + K(\underline{\mu} - \underline{v})' \Sigma^{-1}(\underline{\mu} - \underline{v}) + \text{tr } \psi \Sigma^{-1}\right]\right\} \quad (۳۱. ۱)$$

عبارت داخل exp برابر است با:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\left\{(N+K)\underline{\mu}'\Sigma^{-1}\underline{\mu} - 2(N\bar{\underline{x}} + K\underline{v})\Sigma^{-1}\underline{\mu} + N\bar{\underline{x}}'\Sigma^{-1}\bar{\underline{x}} + K\underline{v}'\Sigma^{-1}\underline{v} + \text{tr}(A + \psi)\Sigma^{-1}\right\} \\ & = -\frac{1}{2}\left\{(N+K)\left[\underline{\mu} - \frac{1}{N+K}(N\bar{\underline{x}} + K\underline{v})\right]' \Sigma^{-1}\left[\underline{\mu} - \frac{1}{N+K}(N\bar{\underline{x}} + K\underline{v})\right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{NK}{N+K}(\bar{\underline{x}} - \underline{v})'\Sigma^{-1}(\bar{\underline{x}} - \underline{v}) + \text{tr}(A + \psi)\Sigma^{-1}\right\} \end{aligned}$$

حال اگر از عبارت (۳۲. ۱) نسبت به  $\underline{\mu}, \Sigma$  انتگرال بگیریم تابع چگالی توام  $A, \bar{\underline{x}}$  بدست می آید.

ابتدا با انتگرال گیری نسبت به  $\underline{\mu}$  عبارت زیر بدست می آید.

$$\frac{K^{\frac{1}{2}p} N^{\frac{1}{2}p} |\psi|^{\frac{1}{2}m} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}(N+m+p+1)} |A|^{-\frac{1}{2}(N-p-2)}}{(N+K)^{\frac{1}{2}p} 2^{\frac{1}{2}(N+m)p} \pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}(N-1)\right) \Gamma_p\left(\frac{1}{2}m\right)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\text{tr } A\Sigma^{-1} + \frac{NK}{N+K}(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})' \Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}}) + \text{tr} \psi \Sigma^{-1}\right]\right\} \quad (۳۲.۱)$$

با انتگرال گیری از عبارت به دست آمده نسبت به  $\Sigma$  و با استفاده از لم (۳.۱) داریم:

$$\frac{K^{\frac{1}{2}p} N^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p\left(\frac{N+m}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}(N-1)\right) \Gamma_p\left(\frac{1}{2}m\right) (N+K)^{\frac{1}{2}p}} \cdot |A|^{-\frac{1}{2}(N-p-2)} |\psi|^{\frac{1}{2}m} \left| \psi + A + \frac{NK}{N+K}(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})' \right|^{-\frac{1}{2}(N+m)} \quad (۳۳.۱)$$

حال برای بدست آوردن تابع چگالی شرطی  $\underline{\mu}$ ,  $\Sigma$  به شرط  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $A$  باید نسبت (۳۲.۱) را به (۳۴.۱) محاسبه کنیم، که در نتیجه خواهیم داشت.

$$\frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}(N+m+p+2)} \left| \psi + A + \frac{NK}{N+K}(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})' \right|^{\frac{1}{2}(N+m)}}{2^{\frac{1}{2}(N+m+1)p} \pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p\left(\frac{N+m}{2}\right)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(N+K)\left[\underline{\mu} - \frac{1}{N+K}(N\bar{\mathbf{x}} + K\underline{\mathbf{v}})\right]' \Sigma^{-1}\left[\underline{\mu} - \frac{1}{N+K}(N\bar{\mathbf{x}} + K\underline{\mathbf{v}})\right] + \text{tr}\left[\psi + A + \frac{NK}{N+K}(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}})'\right] \Sigma^{-1}\right]\right\} \quad (۳۴.۱)$$

حال عبارت (۳۵.۱) را مانند عبارت (۳۱.۱) می توان نوشت. ■

**قضیه ۱۰.۱** فرض کنید متغیر تصادفی  $\mathbf{W}$  در اندازه  $\mathbf{q} \times \mathbf{1}$  دارای توزیع نرمال چند متغیره  $\mathbf{q}$  بعدی با میانگین  $\underline{\theta}$  و ماتریس واریانس - کوواریانس  $\mathbf{I}_q$  باشد، و  $\Phi(\cdot)$  یک تابع اندازه پذیر بورل باشد، آنگاه:

$$E[\phi(\mathbf{W}'\mathbf{W})\mathbf{W}] = \theta E\left[\phi\left(\chi^2_{\left(\mathbf{q}+2, \frac{\theta'\theta}{2}\right)}\right)\right]$$

برهان: جاج و باک (۱۹۷۸) را ببینید.

**قضیه ۱۱.۱** اگر  $\mathbf{W}$  یک متغیر تصادفی در اندازه  $\mathbf{q} \times \mathbf{1}$  دارای توزیع نرمال  $\mathbf{q}$  بعدی با میانگین  $\underline{\theta}$  و ماتریس واریانس - کوواریانس  $\mathbf{I}_q$  باشد و  $\mathbf{A}$  ماتریس معین مثبت متقارن باشد آنگاه:

$$E[\phi(W'W)W'AW] = E\left[\phi\left(\chi^2_{(q+2, \frac{\theta'\theta}{2})}\right)\right] \text{tr}A + E\left[\phi\left(\chi^2_{(q+2, \frac{\theta'\theta}{2})}\right)\right] \theta'A\theta$$

برهان: جاج و باک (۱۹۷۸) را ببینید.

## ۱. ۸ روش نمونه گیری بوت استرپ<sup>۱</sup>

روش نمونه گیری ای است که با تبدیل از یک نمونه به دست می آید. عبارت دیگر نمونه گیری درون یک نمونه انجام می شود. روش بوت استرپ با تکیه بر نمونه شخصی انجام می شود که اغلب تنها منبعی است که یک محقق برای تحقیق دارد. و این امر بر اهمیت روش بوت استرپ می افزاید.

در این روش نمونه ای با جایگزینی از نمونه اصلی گرفته می شود بطوریکه هر نمونه گرفته شده با این روش مستقل و دارای توزیع برابر هستند. این روش در سال ۱۹۷۹ توسط افرون ارائه شد که توانست مشکل نبود نمونه بزرگ را از بین ببرد. با استفاده از این روش می توان برآوردهای نسبتاً دقیقی از پارامتر جامعه و ضرایب رگرسیونی بدست آورد. تفاوت این روش نمونه گیری با روش زیر نمونه گیری تصادفی در این است که نمونه گیری بوت استرپ نمونه گیری با جایگذاری از نمونه اصلی است در حالی که انتخاب های زیر نمونه گیری تصادفی بدون جایگذاری از مجموعه تمام زیر نمونه های ممکن است.

از مزایای این روش می توان به اجتناب از هزینه نمونه گیری جدید، چک کردن فرضیات پارامتریک و برآورد واریانس در چندک ها را اشاره کرد این روش در شرایطی که فرضیات پارامتریک پیچیده باشند و یا قادر به ایجاد آنها نباشیم استفاده می شود. و از معایب این روش می توان تنوع به دلیل تکرار محدود (مونت کارلو) و اتکا به نمونه معرف را نام برد.

در نتیجه در شرایطی که یک سوم حجم نمونه در دسترس باشد. با افزایش تکرار نمونه بوت استرپ و همین طور حجم نمونه بوت استرپ برآورد پارامترهای مدل به مقدار واقعی نزدیک و فاصله اطمینان

۱. Boot strap

کوچک خواهد شد. با مقایسه برآورد پارامترهای روش لجستیک و بوت استرپ، خطای برآورد در بوت استرپ به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. بنابراین وقتی نمونه به اندازه کافی بزرگ نباشد الگوریتم بوت استرپ راه مناسبی خواهد بود.

برای مطالعه بیشتر به افرون (۱۹۷۹) و افرون و تیشیرانی (۱۹۹۳) مراجعه کنید.

## فصل دوم

برآوردگرهای محدود شده در حالت یک متغیره

## ۱.۲ مقدمه

### ۱.۱.۲ بیان مسئله

در مسائل آماری، استفاده از اطلاع پیشین<sup>۱</sup> در خصوص بعضی از پارامترها یا در مواردی در مورد تمام پارامترهای مورد علاقه در مدل آماری تحت بررسی، اغلب منجر به استفاده از روشهای پیشرفته و تعمیم یافته‌ای می‌شود، که با توجه به قطعی بودن این اطلاع، به کار برده می‌شوند. استفاده از اطلاع پیشین معلوم در مدل‌های آماری، معمولاً به صورت یک قید<sup>۲</sup> مطرح است که در نهایت به مدل‌های محدود شده یا مقید منتج می‌شود. برآوردهای که بر اساس مدل‌های محدود شده بدست می‌آید، برآوردهای محدود شده (RE) نامیده می‌شود. اعتبار و کارایی برآوردهای محدود شده بر اساس قید اعمال شده بر روی فضای پارامتر، مورد سنجش و بررسی قرار می‌گیرند در حالی که در مورد برآوردهای محدود نشده (UE) در کل فضای پارامتر، بررسی می‌شوند. بنابراین نتایج بدست آمده بر پایه مدل‌های محدود شده و محدود نشده تنها با سنجش درستی و اعتبار محدودیت‌ها و قیود اعمال شده، می‌تواند معقول و کاربردی باشد. باید توجه کرد که انتخاب برآوردهای محدود شده در شرایطی که اطلاع پیشین درست نباشد، توجیه پذیر نیست.

از طرفی اگر با مسائلی سرو کار داشته باشیم که در مدل آماری از اطلاع پیشین غیر قطعی استفاده می‌شود بهتر است که بعضی اطلاعات پیشین را در عین اینکه ممکن است در اعتبار آنها شک و تردید داشته باشیم، در مدل لحاظ کنیم. در استنباط آماری این نوع اطلاع پیشین که به صورت یک سری قیود مورد استفاده قرار می‌گیرند اغلب با عنوان پارامتر مزاحم تعبیر می‌شوند. در این موارد برای رهایی از این

---

۱. Prior Information

۲. Constrained

عدم قطعیت، می توان از رهیافت فیشر استفاده کرد. بدین صورت که ابتدا قیود اعمال شده را آزمون کنیم چنانچه فرضیه درستی قیود رد نشد از برآوردهای محدود شده<sup>۱</sup> (RE) و چنانچه رد شد از برآوردهای محدود نشده<sup>۲</sup> (UE) استفاده کنیم. این ایده اولین بار توسط بنکرافت<sup>۳</sup> (۱۹۹۴) در بهبود برآورد واریانس در جدول آنالیز واریانس مورد استفاده قرار گرفت. برآوردگری که بر این اساس بدست می آید، برآوردهای آزمون اولیه<sup>۴</sup> (PTE) نامیده می شود. تعمیم های مختلفی از این روش را می توان در مجموعه کارهای فیشر<sup>۵</sup> (۱۹۵۶)، هان<sup>۶</sup> و بنکرافت (۱۹۶۸)، جاج<sup>۷</sup> و باک<sup>۸</sup> (۱۹۷۸)، صالح<sup>۹</sup> و سن<sup>۱۰</sup> (۱۹۷۸)، استاین<sup>۱۱</sup> (۱۹۸۱)، بنکرافت و هان (۱۹۸۳)، صالح (۲۰۰۶)، کیریبا<sup>۱۲</sup> و صالح (۲۰۰۶) و آرشی (۲۰۰۹) دید.

## ۲.۱.۲ کاربرد مسئله

در اکثر مواقع، اطلاع پیشین در مورد پارامترهای مدل آماری که برای توصیف داده های موجود بکار می رود ممکن است نامشخص باشد. اگر اطلاع پیشین نامشخص خواص نابرابری در روش برآورد داشته باشد آنگاه نتیجه گیری درباره این پارامترها بهتر خواهد شد. در آزمایش های بالینی، (بعنوان مثال داروهای جدید) ممکن است نتایج آزمایشات مشابه مختلف با هم مخلوط شوند تا اطلاعات به اندازه کافی کاملی را

---

۱. Restricted Estimator

۲. Unrestricted Estimator

۳. Bancroft

۴. Preliminary Test Estimator

۵. Fisher

۶. Han

۷. Judge

۸. Back

۹. Saleh

۱۰. Sen

۱۱. Stein

۱۲. Kibria

ارائه دهند که برای اثبات قابل اعتماد بودن برآورد و نتیجه گیری‌های آماری کافی باشد. در تجزیه و تحلیل آماری برای عوارض جانبی دارو، اغلب مدل رگرسیون لجستیک برای پیش بینی احتمال وقوع یک رویداد نامطلوب، وقتی یک دارو و یا ترکیبی از داروها مصرف می شوند، مورد استفاده قرار می گیرد.

اگر فرض شود که تأثیر داروها بر روی افراد مختلف در کشورهای مختلف منحصر به فرد است و برای تجزیه و تحلیل داده‌ها نمونه‌ای از مردم تمامی کشورها در نظر بگیریم، برآوردی که از این طریق بدست می‌آید ارزش‌تر از برآوردهایی خواهد بود که برای یک کشور خاص، بطور جداگانه بدست آورده‌ایم. با این حال، اگر فرض پیشین درباره مشابه بودن اثرات داروهای مطالعه شده درست نباشد، برآوردگری که بطور کلی بدست آورده‌ایم ممکن است غیر قابل اطمینان باشد واریبی قابل توجهی داشته باشد.

به عنوان مثال دوم، در مطالعه عوامل مرتبط با وزن کم نوزاد هنگام تولد، با استفاده از عواملی مانند سن مادر، قد، وضعیت سیگار کشیدن، فشار خون بالا و یا استرس به عنوان متغیرهای مستقل می‌توان مدل رگرسیون خطی را برای گروه‌های مختلف نژادی برازش داد. اگر فرض کنیم که معادلات رگرسیون برای گروه‌های مختلف نژادی مشابه‌اند، می‌توانیم مدل رگرسیون ساده را برای تمام گروه‌های نژادی برازش دهیم. که این مطلب نیز به صورت یک اطلاع پیشین است.

## ۲.۲ مدل جامعه

فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N \stackrel{iid}{\sim} N(\theta, 1)$ ، که در آن  $\theta \in \mathcal{R}$  میانگین و نامعلوم است. در حالت کلی که  $\theta \in \mathcal{R}$  بدون اعمال هیچگونه قیدی روی پارامتر  $\theta$ ، برآوردگر ML پارامتر  $\theta$  که در این حالت UE است عبارتست از:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

حال قصد داریم برآوردگر بیز محدود شده (CBE)<sup>۱</sup> را تحت تابع زیان متعادل (BL) و توابع زیان مرتبط بدست آوریم.

هر چه برآوردگری که بدست می آید مخاطره کمتری داشته باشد مسئله ما از اهمیت بیشتری برخوردار خواهد بود، بنابراین تابع زیانی که استفاده شده نقش مهمی را ایفا کرده و بهتر است که تابع زیان کاربردی و منطقی بکار برده شود.

## ۲.۳ تاریخچه

در این زمینه زلنر<sup>۲</sup> تابع زیان  $L^Z(\theta, t) = \omega \sum_{i=1}^n (X_i - t)^2 + (1 - \omega)(t - \theta)^2$  را برای اولین بار در سال ۱۹۹۴ مطرح کرد، که در آن از تابع زیان مربع خطا و کمترین مربعات خطا استفاده کرد و پس از ایشان محققان زیادی از این تابع زیان بهره جستند که در ادامه به چند مورد اشاره می کنیم.

دی<sup>۳</sup> و همکاران (۱۹۹۹) و جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) درباره خواص نظریه تصمیم مطالعاتی داشته اند آنها همچنین درباره استفاده از برآوردگر هدف  $\delta_0$  بصورت کلی و موضوع بیزی<sup>۴</sup>، مجاز بودن<sup>۵</sup>، مخاطره کم<sup>۶</sup>، مینیماکس<sup>۷</sup> و... که تابع زیان مربع خطای نامتعادل را بطور مستقیم نتیجه می دهد، نیز مطالعاتی داشته اند. گوش<sup>۸</sup> و همکاران (۲۰۰۷ و ۲۰۰۸) مقالاتی راجع به برآوردگریز تجربی منتشر ساختند و بنسال و اگروال<sup>۹</sup> (۲۰۰۷) برای پیش بینی مدل های ابر جامعه<sup>۱۰</sup> بکار برده اند. تتنبرگ و

---

۱. Constrained Bayes Estimator

۲. Zellner

۳. Day

۴. Bayesianity

۵. Admissibility

۶. Dominance

۷. Minimacity

۸. Ghosh

۹. Basal and Aggarwal

۱۰. Super-Population

شالاب<sup>۱</sup> (۲۰۰۵) این تابع زیان را برای آنالیز رگرسیون با داده‌های گم شده بکار گرفتند و ولف و گودسیل<sup>۲</sup> (۲۰۰۳) برآوردگر  $\theta$  را در آنالیز سیگنالهای صوتی بدست آوردند، اخیراً جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۱۰) تعمیم این تابع زیان را برای ایجاد یک ابزار بلقوه برای تصمیم‌گیری در حالتی که انعطاف پذیری زیادی در انتخاب  $\rho$  و  $\delta_0$  وجود داشته باشد بکار گرفته‌اند.

مطالعات مشابهی در این زمینه توسط زلنر و رودریگ<sup>۳</sup> (۱۹۹۴)، و سنجرى فارسى پور و اصغرزاده (۲۰۰۴) و گش (۲۰۰۸) انجام شده است.

در ادامه کار تابع زیان متعادل وزنی تعریف شده در بخش ۳.۱ را در نظر گرفته‌ایم.

چنانچه فرضیه  $H_0: \theta = \theta_{00}$  درست باشد، آنگاه برآوردگر ML پارامتر  $\theta$  برابر است با  $\hat{\theta} = \theta_{00}$  که آن را برآوردگر محدود شده (RE) می‌نامیم.<sup>۴</sup>

## ۲.۴ ایده برآوردگر بیز محدود شده

حال اگر فرض کنید  $H_0: \theta = \theta_{00}$ ، آنگاه  $MLE(\theta)$  توسط  $\hat{\theta}$  بعنوان پارامتر محدود شده نمایش داده می‌شود و داریم  $\hat{\theta} = \theta_{00}$ ، ایده اصلی برآوردگر بیز در این است که اگر فرضیه  $H_0$  درست باشد نباید توزیع پیشین اطلاعاتی متفاوت از فرضیه  $H_0$  بدهد. به عبارت دیگر نباید فرضیه  $H_0$  و توزیع پیشین متفاوت از یکدیگر عمل کنند. برای این منظور توزیع پیشین را طوری در نظر می‌گیریم که تا حدودی اطلاع  $\theta = \theta_{00}$  را داشته باشد. به عبارتی محدودیت مورد نظر در توزیع پیشین اعمال می‌شود. حال از آنجایی که توزیع پسین از توزیع پیشین و تابع درست‌نمایی مشتق می‌شود این طور به نظر می‌رسد که این

---

۱. Toutenburg and Shalab

۲. Wolf and Godsill

۳. Rodrigues

۴. از نتایج این فصل مقاله پورحسینی و آرشی (۲۰۱۰b) و (۱۳۸۹) بدست آمده است.

محدودیت در توزیع پسین نیز دخیل است. در نهایت برآوردهای بیزی که از این توزیع پسین محدود شده بدست می‌آید برآوردهای بیز مقید (CBE) نامیده می‌شود.

در این قسمت برای ایجاد تطبیق بین توزیع پیشین و فرضیه  $H_0: \theta = \theta_{00}$  فرض می‌کنیم  $\theta$  دارای توزیع پیشین  $N(\theta_{00}, a)$  است، که در آن  $a \in \mathcal{R}^+$  معلوم می‌باشد. در نتیجه توزیع پسین با استفاده از قضیه

$$1.2. \text{ عبارتست از نرمال با میانگین } m = \frac{aN\bar{y} + \theta_{00}}{aN+1} \text{ و واریانس } V = \frac{a}{aN+1}.$$

## ۲.۵ برآوردهای CB تحت تابع زیان متعادل وزنی

در این بخش با توجه به تعریفی که از برآوردهای بیز محدود شده در بخش قبل ارائه دادیم، ساختار کلی برآوردهای بیز محدود شده را تحت تابع زیان متعادل وزنی بدست می‌آوریم. واضح است که محدودیت  $H_0: \theta = \theta_{00}$  تنها در ساختار توزیع پسین تاثیر دارد که باعث بوجود آمدن برآوردهای بیز محدود شده می‌شود. لذا می‌توان چنین استنباط کرد که با معلوم بودن توزیع پسین تحت محدودیت موردنظر (محدودیت اعمال شده روی توزیع پیشین) ساختار برآوردهای بیز محدود شده مشابه ساختار برآوردهای بیز در حالت عادی (بدون محدودیت) می‌باشد که در این راستا قضیه اساسی زیر را داریم:

### (\*\*) قضیه ۱.۲

الف) تحت زیان  $L_{\omega, \delta_0}(\theta; \delta)$  برآوردهای بیز  $\theta$  تحت پیشین  $\pi(\theta)$  برابر است با

$$\hat{\delta}_B = \omega \delta_0 + (1 - \omega) \frac{E[\theta r(\theta) | \underline{Y}]}{E[r(\theta) | \underline{Y}]}$$

ب) تابع مخاطره  $\hat{\delta}_B$  عبارت است از:

$$R_{\omega, \delta_0}(\theta; \delta) = \omega E[r(\theta)[(\theta - \delta_0)(-2\delta + \theta + \delta_0)] | \underline{Y}] + E[r(\theta)(\delta - \theta)^2 | \underline{Y}]$$

برهان:

الف) کافی است  $\delta$  ای پیدا کنیم که تابع زیر را که در آن  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$  می‌نیمم کند

$$\begin{aligned} R_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \delta) &= E[L_{\omega, \delta_0}(\theta; \delta) | \underline{Y}] = \\ &= \omega(\delta - \delta_0)^2 E[r(\theta) | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[r(\theta)(\delta - \theta)^2 | \underline{Y}] \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

در ادامه از (۱,۲) نسبت به  $\delta$  مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(L_{\omega, \delta_0}(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= 2\omega(\delta - \delta_0) E[r(\theta) | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[2r(\theta)(\delta - \theta) | \underline{Y}] = 0 \\ \Rightarrow 2\omega E[\delta r(\theta) | \underline{Y}] - 2\omega E[\delta_0 r(\theta) | \underline{Y}] + 2(1 - \omega) E[r(\theta)\delta | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) E[\theta r(\theta) | \underline{Y}] &= 0 \end{aligned}$$

و چون  $\delta$  تابعی از  $Y$  می‌باشد داریم:

$$\begin{aligned} 2\omega\delta E[r(\theta) | \underline{Y}] - 2\omega\delta_0 E[r(\theta) | \underline{Y}] + 2(1 - \omega)\delta E[r(\theta) | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) E[\theta r(\theta) | \underline{Y}] &= 0 \\ \Rightarrow 2\delta E[r(\theta) | \underline{Y}] - 2\omega\delta_0 E[r(\theta) | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) E[\theta r(\theta) | \underline{Y}] &= 0 \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین تساوی بر ۲ و طرفین - وسطین کردن تساوی، نتیجه به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_B = \hat{\delta} &= \frac{\omega\delta_0 E[r(\theta) | \underline{Y}]}{E[r(\theta) | \underline{Y}]} + \frac{(1 - \omega) E[\theta r(\theta) | \underline{Y}]}{E[r(\theta) | \underline{Y}]} \\ &= \omega\delta_0 + (1 - \omega) \frac{E[\theta r(\theta) | \underline{Y}]}{E[r(\theta) | \underline{Y}]} \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

همچنین با مشتق دوم گرفتن از عبارت ۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta^2} &= 2\omega E[r(\theta) | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[2r(\theta) | \underline{Y}] \\ &= 2E[r(\theta) | \underline{Y}] > 0 \end{aligned}$$

در نتیجه،  $\hat{\delta}_B$  برابر کمترین مقدار خواهد بود.

ب) با توجه به فرمول تابع مخاطره، نتیجه به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 R_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \hat{\delta}) &= E[L_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \hat{\delta}) | \underline{Y}] = E \left[ \omega r(\theta) (\hat{\delta} - \delta_0)^2 | \underline{Y} \right] + E \left[ (1 - \omega) r(\theta) (\hat{\delta} - \theta)^2 | \underline{Y} \right] \\
 &= E \left[ (\omega r(\theta) \hat{\delta}^2 + \omega r(\theta) \delta_0^2 - 2\omega r(\theta) \hat{\delta} \delta_0) | \underline{Y} \right] \\
 &\quad + E \left[ (r(\theta) \hat{\delta}^2 + r(\theta) \theta^2 - 2r(\theta) \hat{\delta} \theta - \omega r(\theta) \hat{\delta}^2 - \omega r(\theta) \theta^2 + 2\omega r(\theta) \hat{\delta} \theta) | \underline{Y} \right] \\
 &= E \left[ (\omega r(\theta) \delta_0^2 - 2\omega r(\theta) \hat{\delta} \delta_0 + r(\theta) \hat{\delta}^2 + r(\theta) \theta^2 - 2r(\theta) \hat{\delta} \theta - \omega r(\theta) \theta^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\omega r(\theta) \hat{\delta} \theta) | \underline{Y} \right] \\
 &= E \left[ \left( \omega r(\theta) (\delta_0^2 - 2\hat{\delta} \delta_0 - \theta^2 + 2\hat{\delta} \theta) + r(\theta) (\hat{\delta}^2 + \theta^2 - 2\hat{\delta} \theta) \right) | \underline{Y} \right] \\
 &= E \left[ \left( \omega r(\theta) ((\delta_0 - \theta)(\delta_0 + \theta - 2\hat{\delta})) + r(\theta) (\hat{\delta} - \theta)^2 \right) | \underline{Y} \right] \\
 &= \omega E \left[ r(\theta) \left[ ((\delta_0^2 - \theta^2) - 2\hat{\delta}(\delta_0 - \theta)) \right] | \underline{Y} \right] + E \left[ r(\theta) (\hat{\delta} - \theta)^2 | \underline{Y} \right] \quad \blacksquare \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

حال برآوردگر بیز CB را برای چند تابع وزنی مختلف تحت تابع زیان (3.1) و توزیع پیشین  $N(\theta_{00}, a)$  بدست می‌آوریم. برای جلوگیری از زیاده نویسی توابع زیر را معرفی می‌کنیم تا بتوانیم توابع مخاطره را به صورت خلاصه ارائه دهیم. برای این منظور فرض کنید:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= E(\theta | \underline{Y}) = \frac{aN\bar{Y} + \theta_{00}}{aN + 1}, \\
 \varphi_2 &= E(\theta^2 | \underline{Y}) = \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} \right)^2 + \frac{a}{aN + 1}, \\
 \varphi_3 &= E(\theta^3 | \underline{Y}) = \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} \right)^3 + 3 \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} \right) \left( \frac{a}{aN + 1} \right), \\
 \varphi_4 &= E(\theta^4 | \underline{Y}) = \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} \right)^4 + 6 \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} \right)^2 \left( \frac{a}{aN + 1} \right) + 3 \left( \frac{a}{aN + 1} \right)^2, \\
 \varphi_5 &= E(e^\theta | \underline{Y}) = e^{\frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} + \frac{a}{2aN + 2}}, \\
 \varphi_6 &= E(\theta e^\theta | \underline{Y}) = \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y} + a}{aN + 1} \right) e^{\frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} + \frac{a}{2aN + 2}}, \\
 \varphi_7 &= E(\theta^2 e^\theta | \underline{Y}) = \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{Y} + a}{aN + 1} \right)^2 + \frac{a}{aN + 1} e^{\frac{\theta_{00} + aN\bar{Y}}{aN + 1} + \frac{a}{2aN + 2}},
 \end{aligned}$$

فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره

$$\varphi_8 = E(\theta e^{-b\theta} | \underline{Y}) = \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} - ab}{aN + 1} \right) e^{-b \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1} + \frac{ab^2}{2aN+2}},$$

$$\varphi_9 = E(e^{\theta(1-b)} | \underline{Y}) = e^{(1-b) \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1} + \frac{a(1-b)^2}{2aN+2}},$$

(۴.۲)

## ۲.۵. ۱ مثال‌های شهودی

مثال ۲.۱ با در نظر گرفتن  $\theta = \mathbf{r}_1(\theta)$ ، برآوردهای بیز محدود شده و تابع مخاطره برآوردهای بیز محدود شده به شرح زیر بدست می‌آید.

برای بدست آوردن برآوردهای بیز محدود شده، ابتدا بدون در نظر گرفتن قضیه ۲.۱ داریم:

$$E[L_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \delta) | \underline{Y}] = \omega(\delta - \delta_0)^2 E[\theta | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[\theta(\delta - \theta)^2 | \underline{Y}]$$

حال با مشتق گرفتن از عبارت فوق و برابر صفر قرار دادن آن داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= 2\omega(\delta - \delta_0) E[\theta | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[2\theta(\delta - \theta) | \underline{Y}] = 0 \\ \Rightarrow 2\omega E[\delta\theta | \underline{Y}] - 2\omega E[\delta_0\theta | \underline{Y}] + 2(1 - \omega) E[\theta\delta | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) E[\theta^2 | \underline{Y}] &= 0 \\ \Rightarrow 2\delta E[\theta | \underline{Y}] - 2\omega\delta_0 E[\theta | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) [Var[\theta | \underline{Y}] + E^2[\theta | \underline{Y}]] &= 0 \\ \Rightarrow 2\delta \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right) - 2\omega\delta_0 \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right) - 2(1 - \omega) \left( \frac{a}{aN + 1} + \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \delta\varphi_1 = \omega\delta_0\varphi_1 + (1 - \omega)\varphi_2 \end{aligned}$$

(۵.۲)

در نتیجه  $\hat{\delta}_{CB}^{(1)} = \hat{\delta} = \omega\delta_0 + (1 - \omega) \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$  بدست می‌آید که معادل نتیجه بدست آمده توسط قضیه ۲.۱ می‌باشد.

حال برای بدست آوردن تابع مخاطره داریم:

$$\begin{aligned} R_{\omega, \bar{Y}}^{(1)}(\theta, \delta) &= E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta, \hat{\delta}) | \underline{Y}) \\ &= E \left[ \left( \omega r(\theta)(\delta_0^2 - \theta^2) - 2\omega r(\theta)(\delta_0 - \theta)\hat{\delta} + r(\theta)(\hat{\delta} - \theta)^2 \right) | \underline{Y} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E[(\omega\theta\delta_0^2 - \omega\theta^3 - 2\omega\theta\delta_0\hat{\delta} + 2\omega\theta^2\hat{\delta} + \theta\hat{\delta}^2 + \theta^3 - 2\theta^2\hat{\delta})|Y] \\
 &= \omega\left(\frac{\theta_{00} + a\bar{y}}{aN + 1}\right)\delta_0^2 + (1 - \omega)\left(\left(\frac{\theta_{00} + a\bar{y}}{aN + 1}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{aN + 1}\right)\left(\frac{\theta_{00} + a\bar{y}}{aN + 1}\right)\right) \\
 &\quad - \left\{2\omega\left(\frac{\theta_{00} + a\bar{y}}{aN + 1}\right)\delta_0 + (1 - \omega)\left[\left(\frac{\theta_{00} + a\bar{y}}{aN + 1}\right)^2 + \frac{a}{aN + 1}\right]\right\}\hat{\delta} + \left(\frac{\theta_{00} + a\bar{y}}{aN + 1}\right)\hat{\delta}^2 \\
 &= \omega\varphi_1\delta_0^2 + (1 - \omega)\varphi_3 - \{2\omega\varphi_1\delta_0 + (1 - \omega)\varphi_2\} \times \left(\omega\delta_0 + (1 - \omega)\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \\
 &\quad + \varphi_1 \times \left(\omega\delta_0 + (1 - \omega)\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2
 \end{aligned}
 \tag{۶.۲}$$

**مثال ۲.۲** در این مثال  $\mathbf{r}_2(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^2$  را در نظر می‌گیریم. در این حالت برآوردگر بیز محدود شده و تابع

مخاطره برآوردگر بیز محدود شده به شرح زیر بدست می‌آید.

برآوردگر بیز محدود شده را بدون در نظر گرفتن قضیه ۱.۲ بدست می‌آوریم.

$$E[L_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \delta)|\underline{Y}] = \omega(\delta - \delta_0)^2 E[\theta^2|\underline{Y}] + (1 - \omega)E[\theta^2(\delta - \theta)^2|\underline{Y}] \tag{۷.۲}$$

حال با مشتق گرفتن از عبارت (۷.۲) و برابر صفر قرار دادن آن داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta, \delta)|\underline{Y})}{\partial \delta} &= 2\omega(\delta - \delta_0)E[\theta^2|\underline{Y}] + (1 - \omega)E[2\theta^2(\delta - \theta)|\underline{Y}] = 0 \\
 \Rightarrow 2\omega E[\delta\theta^2|\underline{Y}] - 2\omega E[\delta_0\theta^2|\underline{Y}] + 2(1 - \omega)E[\theta^2\delta|\underline{Y}] - 2(1 - \omega)E[\theta^3|\underline{Y}] &= 0 \\
 \Rightarrow 2\delta E[\theta^2|\underline{Y}] - 2\omega\delta_0 E[\theta^2|\underline{Y}] - 2(1 - \omega)E[\theta^3|\underline{Y}] &= 0 \\
 \Rightarrow 2\delta \left[ \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right)^2 + \frac{a}{aN + 1} \right] - 2\omega\delta_0 \left[ \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right)^2 + \frac{a}{aN + 1} \right] \\
 \quad - 2(1 - \omega) \left[ \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right)^3 + 3 \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN + 1} \right) \left( \frac{a}{aN + 1} \right) \right] &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{\delta} = \omega\delta_0 + (1 - \omega)\frac{\varphi_3}{\varphi_2}
 \end{aligned}
 \tag{۸.۲}$$

همانطور که مشاهده می‌شود این نتیجه برابر نتیجه بدست آمده از قضیه ۱.۲ می‌باشد.

فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره

$$\hat{\delta}_{CB}^{(2)} = \hat{\delta} = \omega\delta_0 + (1 - \omega) \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \quad (۹.۲)$$

مرحله دوم محاسبه تابع مخاطره برای  $r_2(\theta) = \theta^2$  می باشد که با استفاده از تعریف تابع مخاطره و مجموعه عبارات (۴.۲) نتایج آن به شرح ذیل است.

$$\begin{aligned} R_{\omega, \bar{Y}}^{(2)}(\theta, \delta) &= E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta, \hat{\delta}) | \underline{Y}) \\ &= E \left[ \left( \omega r(\theta)(\delta_0^2 - \theta^2) - 2\omega r(\theta)(\delta_0 - \theta)\hat{\delta} + r(\theta)(\hat{\delta} - \theta)^2 \right) | \underline{Y} \right] \\ &= E \left[ \left( \omega\theta^2\delta_0^2 - \omega\theta^4 - 2\omega\theta^2\delta_0\hat{\delta} + 2\omega\theta^3\hat{\delta} + \theta^2\hat{\delta}^2 + \theta^4 - 2\theta^3\hat{\delta} \right) | \underline{Y} \right] \\ &= (1 - \omega)\varphi_4 + \omega\delta_0\varphi_2 \left[ (1 - \omega) \left( \delta_0 - \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \right) - \delta_0\omega \right] - 2(1 - \omega) \\ &\quad \times \varphi_3 \left( \omega\delta_0 + (1 - \omega) \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \right) + \varphi_2 \left( \omega\delta_0 + (1 - \omega) \frac{\varphi_3}{\varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

**مثال ۳.۲.** برای  $\mathbf{r}_3(\theta) = \mathbf{e}^\theta$  نیز مانند دو مثال قبل عمل می کنیم. برآوردهای محدود شده عبارت است از:

$$E[L_{\omega, \bar{Y}}(\theta; \delta) | \underline{Y}] = \omega(\delta - \delta_0)^2 E[e^\theta | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[e^\theta(\delta - \theta)^2 | \underline{Y}]$$

حال با مشتق گرفتن از عبارت فوق و برابر صفر قرار دادن آن داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= 2\omega(\delta - \delta_0) E[e^\theta | \underline{Y}] + (1 - \omega) E[2e^\theta(\delta - \theta) | \underline{Y}] = 0 \\ \Rightarrow 2\omega E[\delta e^\theta | \underline{Y}] - 2\omega E[\delta_0 e^\theta | \underline{Y}] + 2(1 - \omega) E[e^\theta \delta | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) E[\theta e^\theta | \underline{Y}] &= 0 \\ \Rightarrow 2\delta E[e^\theta | \underline{Y}] - 2\omega\delta_0 E[e^\theta | \underline{Y}] - 2(1 - \omega) E[\theta e^\theta | \underline{Y}] &= 0 \\ \Rightarrow 2\delta\varphi_5 - 2\omega\delta_0\varphi_5 - 2(1 - \omega) \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right) \varphi_5 &= 0 \\ \Rightarrow \hat{\delta} = \omega\delta_0 + (1 - \omega) \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right) \end{aligned}$$

(۱۱.۲)

همانند مثالهای قبل نتایج قضیه ۲.۱ برقرار است.

فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره

$$\hat{\delta}_{CB}^{(2)} = \hat{\delta} = \omega\delta_0 + (1 - \omega) \frac{\varphi_6}{\varphi_5} \quad (۱۲.۲)$$

تابع مخاطره برآوردهای محدود شده برای  $r_3(\theta) = e^\theta$  برابر است با:

$$\begin{aligned} R_{\omega, \bar{Y}}^{(3)}(\theta, \delta) &= E(L_{\omega, \bar{Y}}(\theta, \hat{\delta}) | \underline{Y}) \\ &= E \left[ \left( \omega r(\theta)(\delta_0^2 - \theta^2) - 2\omega r(\theta)(\delta_0 - \theta)\hat{\delta} + r(\theta)(\hat{\delta} - \theta)^2 \right) | \underline{Y} \right] \\ &= E \left[ \left( \omega e^\theta \delta_0^2 - \omega e^\theta \theta^2 - 2\omega e^\theta \delta_0 \hat{\delta} + 2\omega \theta e^\theta \hat{\delta} + e^\theta \hat{\delta}^2 + e^\theta \theta^2 - 2\theta e^\theta \hat{\delta} \right) | \underline{Y} \right] \\ &= \varphi_5 \left\{ \omega \delta_0 \left[ \delta_0(1 - 2\omega) - 2(1 - \omega) \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \omega \delta_0 + (1 - \omega) \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right) \right]^2 - 2(1 - \omega) \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right) \right. \\ &\quad \times \left( \omega \delta_0 + (1 - \omega) \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right) \right) \\ &\quad \left. + (1 - \omega) \left( a - 1 + \left( \frac{\theta_{00} + aN\bar{y} + a}{aN + 1} \right)^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (۱۳.۲)$$

نمودارهای ۱.۲ و ۲.۲ توابع مخاطره برآوردهای ارائه شده را برای مقادیر از پیش تعیین شده

$\delta_0$  و  $\theta_{00}$ ،  $a$ ،  $N$ ،  $\bar{y}$  نشان می‌دهند. با توجه به نتایج بدست آمده برآوردهای ارائه شده به راحتی نسبت

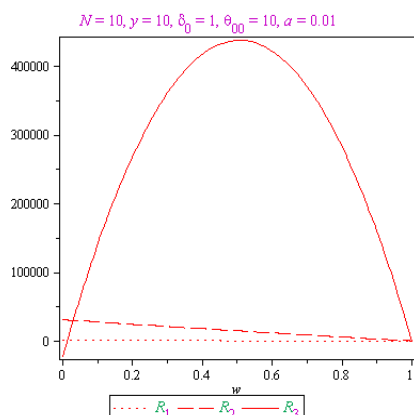
به  $\omega$  قابل مقایسه می‌باشند.

### نکته

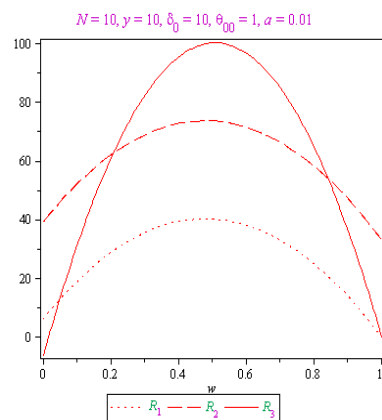
۱. با فرض  $r(\theta) = \frac{1}{\theta^q}$  برای  $q$  فرد، جواب تعریف نشده و برای  $q$  زوج، جواب بینهایت است.

۲.  $r(\theta) = \log \theta$  در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد.

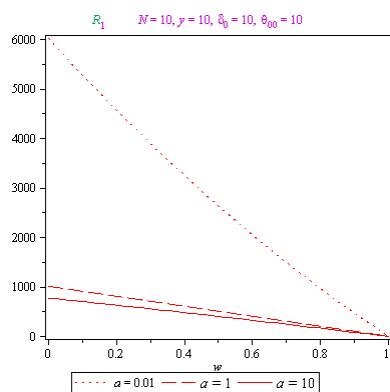
## فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره



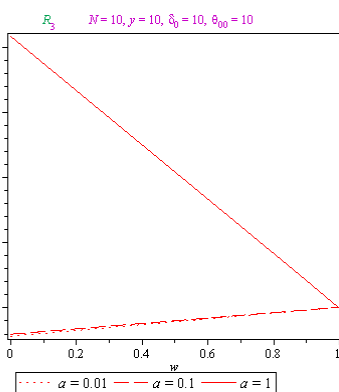
ب



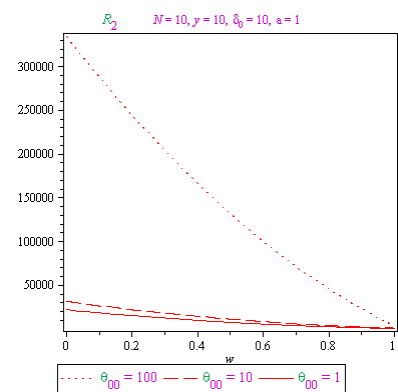
الف



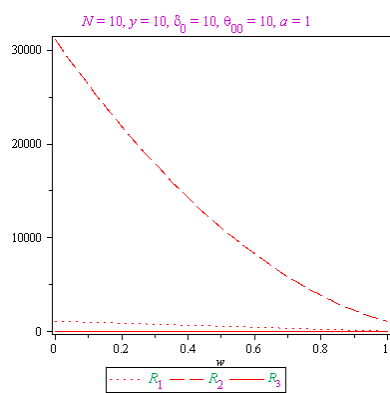
ه



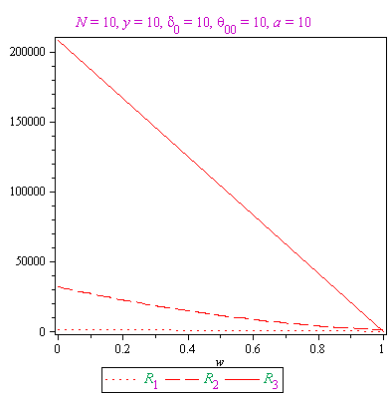
د



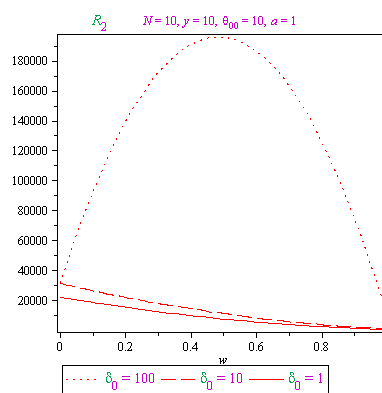
ج



ح



ز



و

نمودار ۲. مقایسه مخاطره ها برای  $N$  و  $Y$  های مختلف

## ۲.۶ برآوردگرهای بیز تحت تابع زیان متوازن تعمیم یافته

در این بخش برآورد نقطه‌ای بیز را برای یک پارامتر  $\theta$  ی نامعلوم از یک مدل  $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \sim F_\theta$  تحت تابع زیان متعادل

$$L_{\rho, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \rho(\delta_0, \delta) + (1 - \omega) \rho(\theta, \delta) \quad (۱۴.۲)$$

محاسبه خواهیم کرد، که در آن  $\rho(\theta, \delta)$  یک تابع زیان دلخواه است و  $\delta_0$  برآوردگر هدف انتخاب شده برای  $\theta$  را نمایش می‌دهد. این تابع زیان که به مقدار مشاهده شده  $\delta_0(Y)$  بستگی دارد، نزدیکی مقدار  $\delta$  را به هر دو مقدار برآوردگر هدف  $\delta_0$  و پارامتر نامعلوم  $\theta$  تحت تاثیر قرار می‌دهد.

در این مرحله ما یک ارتباط کلی بین برآوردگر بیز تحت تابع زیان متعادل  $\omega > 0$  و نامتعادل  $\omega = 0$  را بیان می‌کنیم.

وقتی  $\omega = 0$  است،  $L_{\rho, 0, \delta_0}$  را به طور ساده با  $L_0$  نمایش می‌دهیم مگر آن که بخواهیم درباره نقش  $\rho$  تاکید کنیم. حال نشان می‌دهیم که چگونه برآوردگر بیز  $\theta$  تحت تابع زیان متعادل  $L_{\rho, 0, \delta_0}$  می‌تواند به جای برآوردگر بیز  $\theta$ ، تحت تابع زیان  $L_0$  مطرح شود.

### (\*) قضیه ۲.۲

برای تمام  $\underline{Y}$  های که در رابطه  $\pi^*(\theta|y) = \omega 1_{\{\delta_0(y)\}}(\theta) + (1 - \omega) \pi(\theta|\underline{Y})$  (که یک ترکیب محدب از  $\delta_0(y)$  و پسین  $\pi(\theta|\underline{Y})$  است) صدق کنند برآوردگر بیز  $\delta_{\omega, \pi}(Y)$  تحت تابع زیان متعادل  $L_{\rho, 0, \delta_0}$  و پیشین  $\pi$  توسط جواب بیز  $\delta^*(Y)$  با توجه به  $(\pi^*(\theta|\underline{Y}), L_0)$  بدست می‌آید

برهان:

فرض کنید  $\mu_Y(\cdot)$  و  $\nu_Y(\cdot)$  اندازه احتمال  $\pi(\theta|Y)$  و  $\pi^*(\theta|Y)$  را به ترتیب نمایش دهند از تعریف  $\delta^*(y)$  داریم:

$$\begin{aligned}\delta_{\omega,\pi}(y) &= \operatorname{argmin}_{\delta} \int_{\Theta} \left\{ \omega \frac{\rho(\delta_0, \delta)}{f(y)I_a(y)=f(a)} + (1 - \omega)\rho(\theta, \delta) \right\} \pi(\theta|Y) d\mu_Y(\theta) \\ &= \operatorname{argmin}_{\delta} \int_{\Theta \cup \{\delta_0(y)\}} \{ \omega \rho(\theta, \delta) I_{\{\delta_0(y)\}}(\theta) + (1 - \omega)\rho(\theta, \delta) \} \pi(\theta|Y) d\mu_Y(\theta) \\ &= \operatorname{argmin}_{\delta} \int_{\Theta \cup \{\delta_0(y)\}} \{ \omega I_{\{\delta_0(y)\}}(\theta) \pi(\theta|Y) + (1 - \omega)\pi(\theta|Y) \} \rho(\theta, \delta) d\mu_Y(\theta) \\ &= \operatorname{argmin}_{\delta} \int_{\Theta \cup \{\delta_0(y)\}} \{ \omega I_{\{\delta_0(y)\}}(\theta) \pi(\delta_0(y)|Y) \\ &\quad + (1 - \omega)\pi(\theta|Y) \} \rho(\theta, \delta) d\mu_Y(\theta) \\ &= \operatorname{argmin}_{\delta} \int_{\Theta \cup \{\delta_0(y)\}} \{ \omega I_{\{\delta_0(y)\}}(\theta) + (1 - \omega)\pi(\theta|Y) \} \underbrace{\rho(\theta, \delta)}_{L_0(\theta, \delta)} d\mu_Y(\theta) \\ &= \operatorname{argmin}_{\delta} \int_{\Theta \cup \{\delta_0(y)\}} \{ \omega I_{\{\delta_0(y)\}}(\theta) + (1 - \omega)\pi(\theta|Y) \} L_0(\theta, \delta) d\nu_Y(\theta)\end{aligned}$$

یقیناً  $\delta^*(y)$  یک برآوردهای بیز تحت تابع زیان  $L_0$  نیست چون  $\pi^*(\theta|Y)$  پسینی که در رابطه با  $\pi$  باشد

نیست. در حالی که  $\delta_{\omega,\pi}(y)$  برآوردهای بیز تحت زیان  $L_{\omega,\rho,\delta_0}$  و پیشین  $\pi$  است. ■

**نکته:** قضیه ۲.۲ برای تابع زیان متعادل وزنی نیز کاربرد دارد. تابع زیان متعادل وزنی به صورت زیر

تعریف می‌شود.

$$L_{\rho,\omega,\delta_0}^r(\theta, \delta) = \omega r(\theta) \rho(\delta_0, \delta) + (1 - \omega) r(\theta) \rho(\theta, \delta) \quad (۱۵.۲)$$

که در آن  $r(\theta)$  تابع وزنی مثبت می‌باشد. به راحتی دیده می‌شود که برآوردهای بیز  $\theta$  تحت زیان  $L_{\rho,\omega,\delta_0}^r$  با

استفاده از پیشین  $\pi_0$  برابر است با برآوردهای بیز  $\theta$  تحت زیان  $L_{\rho,\omega,\delta_0}$  با استفاده از پیشین  $\pi \equiv r \times \pi_0$ .

حال دنبال انتخابهای مختلف برای  $\rho$  با شرایط قضیه ۲.۲ هستیم که بتوانیم شواهد بیشتری داشته باشیم.

## ۲.۶ مثال‌های کاربردی

### مثال ۲.۴ (تعمیم تابع زیان مربع خطا)

در عبارت (۲.۱۵) با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = \rho_1(\theta, \delta) = r(\theta)(\delta - \theta)^2$  که در آن  $r(\theta) > 0$  می‌باشد تابع زیان تبدیل به

$$L_{\rho_1, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega r(\delta_0)(\delta - \delta_0)^2 + (1 - \omega)r(\theta)(\delta - \theta)^2$$

می‌شود بنابراین تحت تابع زیان  $L_0$  و پیشین  $\pi$  برآوردهای بیز به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{\delta}_{0, \pi}(y) = \frac{E_{\pi}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi}(r(\theta) | \underline{Y})}$$

که در آن  $(\forall y; E_{\pi}(\theta^i r(\theta) | \underline{Y}) < \infty, i = 0, 1)$ .

آنگاه برآوردهای بیز  $\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y)$  تحت تابع زیان  $L_{\rho_1, \omega, \delta_0}$  برابر است با:

$$\delta_{\omega, \pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(r(\theta) | \underline{Y})} = \frac{\omega \delta_0(y) r(\delta_0(\underline{Y})) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{\omega r(\delta_0(\underline{Y})) + (1 - \omega) E_{\pi}(r(\theta) | \underline{Y})}$$

از آنجا که تابع زیان فوق یک تابع زیان درجه دوم وزنی می‌باشد، برآوردهای بیز عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{\pi}(y) = \frac{E[r(\theta)\theta | \underline{Y}]}{E[r(\theta) | \underline{Y}]}$$

بنابراین جواب صحیح است حال اگر  $\omega \neq 0$  با توجه به قضیه ۲.۲ نتیجه حاصل می‌شود.

فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره

حال اگر در این مثال  $r(\theta) = 1, \delta_0 = \text{LSE}$  قرار دهیم تابع زیان تبدیل به تابع زیان درجه دوم متعادل خواهد شد و برآوردهای بیز آن به شرح زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) &= \frac{E_{\pi^*}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(r(\theta) | \underline{Y})} \\ &= \frac{\omega \delta_0(y) r(\delta_0(y)) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{\omega r(\delta_0(y)) + (1 - \omega) E_{\pi}(r(\theta) | \underline{Y})} \\ &= \frac{\omega \delta_0(y) r(\hat{\theta}) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta | \underline{Y})}{\omega r(\hat{\theta}) + (1 - \omega)} \\ &= \frac{\omega \delta_0(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta | \underline{Y})}{\omega + 1 - \omega} \\ &= \omega \delta_0(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta | \underline{Y})\end{aligned}$$

**مثال ۵.۲** با استفاده از تابع زیان (۵.۱) برآوردهای بیز تحت زیان  $L_0$  و  $L_{\rho_1, \omega, \delta_0}$  را بدست می آوریم.

$$L_{\rho_2, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega (h(\delta) - h(\delta_0))^2 + (1 - \omega) (h(\theta) - h(\delta))^2$$

تحت زیان  $L_0$  و پیشین  $\pi$  برآوردهای بیز  $\hat{\delta}_{0, \pi}(y)$  به شرح زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(L_0(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= \frac{\partial E((h(\theta) - h(\delta))^2 | \underline{Y})}{\partial \delta} \\ &= -2h(\delta) E((h(\theta) - h(\delta)) | \underline{Y}) = 0 \\ \Rightarrow \hat{\delta}_{0, \pi}(y) &= h^{-1}(E_{\pi}[h(\theta) | \underline{Y}])\end{aligned}$$

حال از قضیه ۲.۲ برآوردهای بیز  $\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y)$  را تحت  $L_{\rho_1, \omega, \delta_0}$  برابر است با:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = h^{-1}(E_{\pi^*}[h(\theta) | \underline{Y}]) = h^{-1}(\omega h(\delta_0(y)) + (1 - \omega) E_{\pi}[h(\theta) | \underline{Y}])$$

**مثال ۶.۲** (تابع زیان آنتروپی)

با توجه به تابع زیان (۶.۱) برآوردهای بیز  $\hat{\delta}_{0, \pi}(y)$  تحت تابع زیان  $L_0$  و پیشین  $\pi$  به شرح زیر بدست می آید.

$$L_{\rho_3, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \left( \frac{\delta_0}{\delta} - \log \left( \frac{\delta_0}{\delta} \right) - 1 \right) + (1 - \omega) \left( \frac{\theta}{\delta} - \log \left( \frac{\theta}{\delta} \right) - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(L_0(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= \frac{\partial E \left( \frac{\theta}{\delta} - \log \left( \frac{\theta}{\delta} \right) - 1 \mid \underline{Y} \right)}{\partial \delta} \\ &= E \left( -\frac{\theta}{\delta^2} - \frac{-\frac{\theta}{\delta^2}}{\frac{\theta}{\delta}} \mid \underline{Y} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\delta}_{0, \pi}(y) = E_{\pi}(\theta | \underline{Y})$$

و با استفاده از قضیه ۲.۲ برآوردگر بیز  $\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y)$  را تحت تابع زیان  $L_{\rho_1, \omega, \delta_0}$  بدست می آوریم.

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = E_{\pi^*}(\theta | \underline{Y}) = \omega \delta_0(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta | \underline{Y})$$

بعنوان یک مثال ساده فرض می کنیم  $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ، که در آن  $\alpha$  معلوم و  $\beta > 0$  است. از سوی

دیگر تابع زیان (۶.۱) با  $\delta_0(y) = \delta_{\text{mle}}(y) = \frac{y}{\alpha}$  و پیشین پیوسته  $\pi$  مانند

$$\text{Gamma} \left( \alpha + \gamma, \frac{1}{h+y} \right), \theta^{-1} \sim \text{Gamma} \left( \gamma, \frac{1}{h} \right); \gamma > -\alpha, h \geq 0$$

است و برآوردگر یکتای بیز  $\theta$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) &= \omega \delta_0(\underline{Y}) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta | \underline{Y}) \\ &= \omega \delta_0(y) + (1 - \omega) E_{\pi} \left( \frac{1}{\lambda} \mid \underline{Y} \right) \\ &= \omega \delta_0(y) + (1 - \omega) \frac{h + y}{\alpha + \gamma - 1} \end{aligned}$$

## مثال ۲.۷ تابع زیان نوع استاین

تابع زیان نوع استاین که در (۷.۱) تعریف شده است شامل زیان مثال قبل با  $\beta = -1$  نیز است و قضیه

۲.۲ را بخوبی توضیح می دهد. تحت تابع زیان  $L_0$  برآوردگر بیز  $\hat{\delta}_{0, \pi}(y)$  به شرح زیر محاسبه می شود.

$$L_{\rho_4, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \left( \left( \frac{\delta}{\delta_0} \right)^{\beta} - \beta \log \left( \frac{\delta}{\delta_0} \right) - 1 \right) + (1 - \omega) \left( \left( \frac{\delta}{\theta} \right)^{\beta} - \beta \log \left( \frac{\delta}{\theta} \right) - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{\pi}(L_0(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= \frac{\partial E_{\pi} \left( \left( \frac{\delta}{\theta} \right)^{\beta} - \beta \log \left( \frac{\delta}{\theta} \right) - 1 \mid \underline{Y} \right)}{\partial \delta} \\
 &= \beta \delta^{\beta-1} E_{\pi} \left( \frac{1}{\theta^{\beta}} \mid \underline{Y} \right) - \beta \frac{E_{\pi} \left( \frac{1}{\theta} \mid \underline{Y} \right)}{\delta E_{\pi} \left( \frac{1}{\theta} \mid \underline{Y} \right)} = 0 \\
 \Rightarrow \delta^{\beta} E_{\pi} \left( \frac{1}{\theta^{\beta}} \mid \underline{Y} \right) &= 1 \\
 \Rightarrow \hat{\delta}_{0,\pi}(y) &= \left[ E_{\pi} \left( \frac{1}{\theta^{\beta}} \mid \underline{Y} \right) \right]^{-\frac{1}{\beta}}
 \end{aligned}$$

و با استفاده از قضیه ۲.۲ به محاسبه برآوردهای بیز  $\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y)$  تحت زیان  $L_{\rho_1,\omega,\delta_0}$  می‌پردازیم.

$$\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) = \left[ E_{\pi^*} \left( \frac{1}{\theta^{\beta}} \mid \underline{Y} \right) \right]^{-\frac{1}{\beta}} = \left\{ \frac{\omega}{(\delta_0(y))^{\beta}} + (1 - \omega) E_{\pi} \left( \frac{1}{\theta^{\beta}} \mid \underline{Y} \right) \right\}^{-\frac{1}{\beta}}$$

**مثال ۸.۲** با در نظر گرفتن تابع زیان (۸.۱) تحت زیان  $L_0$  و پیشین  $\pi$  که در محدوده  $(0, \infty)$  تعریف

شده باشد برآوردهای بیز  $\hat{\delta}_{0,\pi}(y)$  را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{\pi}(L_0(\theta, \delta) | y)}{\partial \delta} &= \frac{\partial E_{\pi} \left( \left( \frac{\theta}{\delta} - 1 \right)^2 \mid \underline{Y} \right)}{\partial \delta} \\
 &= -\frac{2}{\delta^3} E_{\pi}(\theta(\theta - \delta) | \underline{Y}) = 0 \\
 \Rightarrow -\frac{2}{\delta^3} E_{\pi}(\theta^2 | \underline{Y}) &= -\frac{2\delta}{\delta^3} E_{\pi}(\theta | \underline{Y}) \\
 \Rightarrow \hat{\delta}_{0,\pi}(y) &= \frac{E_{\pi}(\theta^2 | \underline{Y})}{E_{\pi}(\theta | \underline{Y})}
 \end{aligned}$$

آنگاه  $\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y)$  تحت زیان  $L_{\rho_5,\omega,\delta_0}$  با استفاده از قضیه ۲.۲ برابر است با:

$$\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(\theta^2 | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(\theta | \underline{Y})} = \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^2 | \underline{Y})}{\omega \delta_0(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta | \underline{Y})}$$

## مثال ۹.۲ (تابع زیان Linex)

تابع زیان (۹.۱) را برای این مثال در نظر گرفته‌ایم

$$L_{\rho_6, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega(e^{a(\delta - \delta_0)} - a(\delta - \delta_0) - 1) + (1 - \omega)(e^{a(\delta - \theta)} - a(\delta - \theta) - 1)$$

تحت زیان  $L_0$  برآوردهاگر  $\hat{\delta}_{0, \pi}(y)$  را به شرح زیر می‌توان بدست آورد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\pi}(L_0(\theta, \delta) | \underline{Y})}{\partial \delta} &= \frac{\partial E_{\pi}((e^{b(\delta - \theta)} - b(\delta - \theta) - 1) | \underline{Y})}{\partial \delta} \\ &= E_{\pi}((be^{b(\delta - \theta)} - b) | \underline{Y}) = 0 \\ \Rightarrow E_{\pi}\left(\frac{e^{b\delta}}{e^{b\theta}} | \underline{Y}\right) &= 1 \\ \Rightarrow \log E_{\pi}(e^{-b\theta} | \underline{Y}) &= -b \delta_{0, \pi} \\ \Rightarrow \hat{\delta}_{0, \pi}(y) &= -\frac{1}{b} \log E_{\pi}(e^{-b\theta} | \underline{Y}) \end{aligned}$$

آنگاه  $\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y)$  تحت تابع زیان  $L_{\rho_6, \omega, \delta_0}$  با استفاده از قضیه ۲.۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) &= -\frac{1}{b} \log E_{\pi^*}(e^{-b\theta} | \underline{Y}) \\ &= -\frac{1}{b} \log[\omega e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega) E_{\pi}(e^{-b\theta} | \underline{Y})] \\ &= -\frac{1}{b} \log[\omega e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega) e^{-b \delta_{0, \pi}(y)}] \end{aligned}$$

مثال زیر تابع زیان متعادل حقیقی را بررسی می‌کند وقتی  $\rho$  در رابطه (۱،۱) از مدل حاصل می‌شود.

(برای مطالعه بیشتر به رابرت<sup>۱</sup> ۱۹۹۶ مراجعه کنید).

## مثال ۲.۱۰ (تابع زیان متعادل حقیقی)

برای مدل  $Y|\theta \sim f(y|\theta)$  با انتخاب  $\rho(\theta, \delta) = d(f(\cdot|\theta), f(\cdot|\delta))$  در  $(1,1)$  فاصله بین  $f(\cdot|\theta)$  و  $f(\cdot|\delta)$  را با  $d(\cdot, \cdot)$  نشان داده و تابع زیان متعادل اصلی به فرم زیر بدست می‌آید.

$$\omega d(f(\cdot|\delta_0), f(\cdot|\delta)) + (1 - \omega) d(f(\cdot|\theta), f(\cdot|\delta)) \quad (۱۷.۲)$$

می‌شود. با جایگذاری فواصل کولبک-لایبر<sup>۱</sup> و هلینگر<sup>۲</sup>، توابع زیان به ترتیب عبارتند از

$$L_{\omega, \delta_0}^{KL}(\theta, \delta) = \omega E_{\delta_0} \left[ \ln \frac{f(Y|\delta_0)}{f(Y|\delta)} \right] + (1 - \omega) E_{\theta} \left[ \ln \frac{f(Y|\theta)}{f(Y|\delta)} \right] \quad (۱۸.۲)$$

$$\begin{aligned} L_{\omega, \delta_0}^H(\theta, \delta) &= \omega \frac{1}{2} E_{\delta_0} \left[ \left( \sqrt{\frac{f(Y|\delta)}{f(Y|\delta_0)}} - 1 \right)^2 \right] + (1 - \omega) \frac{1}{2} E_{\theta} \left[ \left( \sqrt{\frac{f(Y|\delta)}{f(Y|\theta)}} - 1 \right)^2 \right] \\ &= 1 - \omega E_{\delta_0} \left[ \sqrt{\frac{f(Y|\delta)}{f(Y|\delta_0)}} \right] - (1 - \omega) E_{\theta} \left[ \sqrt{\frac{f(Y|\delta)}{f(Y|\theta)}} \right] \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

بنابراین با معلوم بودن برآوردگر بیز در حالت نامتعادل ( $\omega = 0$ ) و با توجه به قضیه ۲.۲ فهرستی از نمایش‌های بیز برای زیان‌هایی از نوع  $L^{KL}$  و  $L^H$  می‌توان ساخت. بعنوان مثال پارامترهای طبیعی خانواده نمایی با چگالی  $f(y|\theta) = e^{\theta T(y) - \psi(\theta)} h(y)$  (با توجه به اینکه اندازه  $\nu$  روی  $\mathcal{X}$  -متناهی است) تابع زیان به صورت زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} L_{\omega, \delta_0}^{KL}(\theta, \delta) &= \omega E_{\delta_0} [(\delta_0 - \delta)T(Y) - \psi(\delta_0) + \psi(\delta)] \\ &\quad + (1 - \omega) E_{\theta} [(\theta - \delta)T(Y) - \psi(\theta) + \psi(\delta)] \end{aligned} \quad (۲۰.۲)$$

۱ . Kullback-Leibler

۲. Hellinger

زیرا با توجه به تعریف ۲۹.۱ داریم:

$$L_{\omega, \delta_0}^{KL}(\theta, \delta) = \omega E_{\delta_0} \left[ \ln \frac{e^{\delta_0 T(y) - \psi(\delta_0)} h(y)}{e^{\delta T(y) - \psi(\delta)} h(y)} \right] + (1 - \omega) E_{\theta} \left[ \ln \frac{e^{\theta T(y) - \psi(\theta)} h(y)}{e^{\delta T(y) - \psi(\delta)} h(y)} \right]$$

$$L_{\omega, \delta_0}^{KL}(\theta, \delta) = \omega [(\delta_0 - \delta) \dot{\psi}(\delta_0) - \psi(\delta_0) + \psi(\delta)]$$

$$+ (1 - \omega) E_{\theta} [(\theta - \delta) \dot{\psi}(\theta) - \psi(\theta) + \psi(\delta)] \quad (۲۱.۲)$$

بعلاوه تحت  $L_0$  در (۲۱.۲) و پیشین  $\pi$  برآوردگر بیز  $\theta, \delta_{0,\pi}$  با حل معادله

$$\dot{\psi}(\delta_{0,\pi}(y)) = E_{\pi}(\dot{\psi}(\theta)|y)$$

بدست می‌آید. حال با توجه به قضیه ۲،۲ برای  $\delta_{\omega,\pi}(y)$  داریم:

$$\dot{\psi}(\delta_{\omega,\pi}(y)) = \omega \dot{\psi}(\delta_0(y)) + (1 - \omega) \dot{\psi}(\delta_{0,\pi}(y))$$

برای  $Y \sim N(\theta, 1)$  که در آن  $T(Y) = Y$  و  $E_{\theta}[T(Y)] = \dot{\psi}(\theta)$  برآوردگر بیز به صورت

$$\delta_{\omega,\pi}(y) = \omega \delta_0(y) + (1 - \omega) \delta_{0,\pi}(y)$$

بدست می‌آید.

به عبارت دیگر یک ترکیب خطی محدب از  $\delta_0$  و برآوردگر بیز  $\delta_{0,\pi}(y)$  است. همچنین بدیهی است که

خانواده نمایی حقیقی از توزیع‌های فوق با تابع زیان Hellinger به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$L_{\omega, \delta_0}^H(\theta, \delta) = 1 - \omega E_{\delta_0} \left[ e^{\frac{(\delta - \delta_0)T}{2} - \frac{\psi(\delta) - \psi(\delta_0)}{2}} \right] - (1 - \omega) E_{\theta} \left[ e^{\frac{(\delta - \theta)T}{2} - \frac{\psi(\delta) - \psi(\theta)}{2}} \right] \quad (۲۲.۲)$$

از تعریف ۲۹.۱ داریم:

$$L_{\omega, \delta_0}^H(\theta, \delta) = 1 - \omega \exp \left\{ -\psi(\delta_0) + \psi \left( \delta_0 + \frac{(\delta - \delta_0)}{2} \right) - \frac{\psi(\delta) - \psi(\delta_0)}{2} \right\}$$

$$- (1 - \omega) \exp \left\{ -\psi(\theta) + \psi \left( \theta + \frac{(\delta - \theta)}{2} \right) - \frac{\psi(\delta) - \psi(\theta)}{2} \right\}$$

$$= 1 - \omega \exp \left\{ \psi \left( \frac{\delta + \delta_0}{2} \right) - \frac{\psi(\delta) + \psi(\delta_0)}{2} \right\}$$

$$- (1 - \omega) \exp \left\{ \psi \left( \frac{\delta + \theta}{2} \right) - \frac{\psi(\delta) + \psi(\theta)}{2} \right\} \quad (۲۳.۲)$$

حال در مثال بالا برای  $N(\theta, 1)$  تابع زیان Hellinger عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 L_{\omega, \delta_0}^H(\theta, \delta) &= 1 - \omega \exp \left\{ \left( \frac{\delta + \delta_0}{2} \right)^2 - \frac{\delta^2 + \delta_0^2}{2} \right\} - (1 - \omega) \exp \left\{ \left( \frac{\delta + \theta}{2} \right)^2 - \frac{\delta^2 + \theta^2}{2} \right\} \\
 &= 1 - \omega \exp \left\{ \frac{\delta^2 + \delta_0^2 + 2\delta\delta_0}{4} - \frac{\delta^2 + \delta_0^2}{2} \right\} \\
 &\quad - (1 - \omega) \exp \left\{ \frac{\delta^2 + \theta^2 + 2\theta\delta}{4} - \frac{\delta^2 + \theta^2}{2} \right\} \\
 &= 1 - \omega \exp \left\{ -\frac{(\delta_0 - \delta)^2}{4} \right\} - (1 - \omega) \exp \left\{ -\frac{(\theta - \delta)^2}{4} \right\} \quad (۲۴.۲)
 \end{aligned}$$

و برای حالتی که  $\omega = 0$  به تابع زیان نرمال کراندار متعادل می‌توان مراجعه کرد.

در ادامه قصد داریم با جایگذاری توابع زیان معرفی شده در مثالهای ۲،۶ تا ۹،۲ در تابع زیان ۱۵،۲ مخاطره را برای وزنهای  $r_1(\theta) = \theta, r_2(\theta) = \theta^2, r_3(\theta) = e^\theta$  آن‌ها محاسبه کنیم.

**مثال ۱۱،۲** برای محاسبه مخاطره با استفاده از تابع زیان مثال ۶،۲ تابع زیان به شکل زیر بدست می‌آید

$$L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) = \omega r(\theta) \left[ \frac{\delta_0}{\delta} - \log \frac{\delta_0}{\delta} - 1 \right] + (1 - \omega) r(\theta) \left[ \frac{\theta}{\delta} - \log \frac{\theta}{\delta} - 1 \right]$$

برآوردگر بیز  $\hat{\delta}_{0, \pi}(y)$  تحت زیان  $L_0$  برابر است با:

$$\hat{\delta}_{0, \pi}(y) = \frac{E_{\pi}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi}(r(\theta) | \underline{Y})}$$

و  $\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y)$  تحت زیان  $L_{\rho, \omega, \delta_0}$  با استفاده از قضیه ۲،۲ برابر است با:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(r(\theta) | \underline{Y})} = \frac{\omega \delta_0(y) r(\delta_0(y)) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta r(\theta) | \underline{Y})}{\omega r(\delta_0(y)) + (1 - \omega) E_{\pi}(r(\theta) | \underline{Y})}$$

برای  $r_1(\theta) = \theta$  و با بکارگیری روابط (۴،۲) داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) \varphi_2}{\omega \delta_0(y) + (1 - \omega) \varphi_1} \quad (۲۵.۲)$$

فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره

با تعریف  $\Psi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta \log \theta}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1})^2}{2a}} d\theta$  تابع مخاطره به شرح ذیل می باشد.

$$\begin{aligned}
 E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) | y] &= \omega E\left\{\left[\frac{\theta \delta_0}{\delta} - \theta \log \frac{\delta_0}{\delta} - \theta\right] | \underline{Y}\right\} + (1 - \omega) E\left\{\left[\frac{\theta^2}{\delta} - \theta \log \frac{\theta}{\delta} - \theta\right] | \underline{Y}\right\} \\
 &= \omega \left\{\frac{\delta_0}{\delta} E(\theta | \underline{Y}) - E(\theta | \underline{Y}) \log \delta_0 + E(\theta | \underline{Y}) \log \hat{\delta} - E(\theta | \underline{Y})\right\} + \frac{1}{\delta} E(\theta^2 | \underline{Y}) \\
 &\quad - E(\theta \log \theta | \underline{Y}) + \log \hat{\delta} E(\theta | \underline{Y}) - E(\theta | \underline{Y}) \\
 &= \omega \left\{\frac{1}{\delta} E(\theta^2 | \underline{Y}) - E(\theta \log \theta | \underline{Y}) + \log \hat{\delta} E(\theta | \underline{Y}) - E(\theta | \underline{Y})\right\} \\
 &= \omega E(\theta | \underline{Y}) \left\{\frac{\delta_0}{\delta} - \log \delta_0\right\} + (\log \hat{\delta} - 1) E(\theta | \underline{Y}) \\
 &\quad + (1 - \omega) \left\{\frac{1}{\delta} E(\theta^2 | \underline{Y}) - E(\theta \log \theta | \underline{Y})\right\} \\
 &= \omega E(\theta | y) \left\{\frac{\delta_0(\omega \delta_0(y) + (1 - \omega)\varphi_1)}{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega)\varphi_2} - \log \delta_0\right\} \\
 &\quad + \left(\log \left(\frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega)\varphi_2}{\omega \delta_0(y) + (1 - \omega)\varphi_1}\right) - 1\right) \varphi_1 \\
 &\quad + (1 - \omega) \left\{\frac{\omega \delta_0(y) + (1 - \omega)\varphi_1}{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega)\varphi_2} \varphi_2 - \Psi_1\right\} \tag{۲۶.۲}
 \end{aligned}$$

انتگرال فوق در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد. در صورتی که در دستگاه اعداد مختلط دارای جواب است که جواب انتگرال فوق برای مقادیر مختلف پارامترهای  $a$  و  $\theta_{00}$  وقتی  $N=10$  و  $\bar{y} = 100$  در جدول ۱.۲ آمده است.

جدول ۱.۲ مقادیر  $\Psi_1$  به ازای واریانس ها و  $\theta_{00}$  های مختلف

الف

| $\theta_{00}$ | $a$                               | $\cdot$                           |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| ۰/۰۱          | -۰/۱۵۷۱                           | $۴/۷۹ + ۴/۴۷ \times ۱۰^{-۱۴} I$   |
| ۱             | $۳۶۳/۳۶ + ۱/۵۶ \times ۱۰^{-۱۱} I$ | $۳۰۹/۸۶ + ۶/۳۱ \times ۱۰^{-۱۲} I$ |
| ۱۰۰           | $۲۷۲/۹۷ + ۶/۵۱ \times ۱۰^{-۱۲} I$ | $۳۶۴/۴۱ + ۶/۱۴ \times ۱۰^{-۱۲} I$ |

ب

| $\theta_{00}$ | $a$  |                                    |
|---------------|------|------------------------------------|
| $100$         | $10$ | $110/0.6+4/0.8 \times 10^{-12} I$  |
| $1$           | $1$  | $348/0.5+1/0.56 \times 10^{-11} I$ |
| $100$         | $10$ | $364/45+6/11 \times 10^{-12} I$    |

برای وقتی که  $r_2(\theta) = \theta^2$  با تعریف  $\psi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2 \log \theta}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1})^2}{2a}} d\theta$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{\omega \delta_0^3 + (1-\omega) \varphi_3}{\omega \delta_0^2(y) + (1-\omega) \varphi_2} \quad (27.2)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) | Y] &= \omega \left\{ \frac{\delta_0}{\hat{\delta}} E(\theta^2 | Y) - E(\theta^2 | Y) \log \delta_0 \right\} + \frac{1}{\hat{\delta}} E(\theta^3 | Y) - E(\theta^2 \log \theta | Y) \\ &+ E(\theta^2 | Y) \log \hat{\delta} - E(\theta^2 | Y) - \omega \left\{ \frac{1}{\hat{\delta}} E(\theta^3 | Y) - E(\theta^2 \log \theta | Y) \right\} \\ &= \omega \varphi_2 \left\{ \frac{\delta_0}{\hat{\delta}} - \log \delta_0 \right\} + \varphi_2 \left( \log \left( \frac{\omega \delta_0^3 + (1-\omega) \varphi_3}{\omega \delta_0^2(y) + (1-\omega) \varphi_2} \right) - 1 \right) + (1-\omega) \\ &\times \left\{ \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1-\omega) \varphi_2}{\omega \delta_0^3 + (1-\omega) \varphi_3} \varphi_3 - \psi_2 \right\} \end{aligned} \quad (28.2)$$

این انتگرال نیز در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد. در صورتی که در دستگاه اعداد مختلط دارای جواب

است که جواب انتگرال فوق برای مقادیر مختلف پارامترهای  $a$  و  $\theta_{00}$  وقتی  $N=10$  و  $\bar{y} = 100$  در

جدول ۲.۲ آمده است.

جدول ۲.۲. مقادیر  $\Psi_2$  به ازای واریانس ها و  $\theta_{00}$  های مختلف

الف

| $\theta_{00}$ | a           |          |
|---------------|-------------|----------|
| ۰             | -۱۰         |          |
| ۰/۰۱          | -۰/۰۲+۰/۰۱I | ۱۸۲/۴۵   |
| ۱             | ۳۶۴۴۹/۰۱    | ۳۷۲۷۲/۱۲ |
| ۱۰۰           | ۴۵۹۴۰/۱۸    | ۴۵۹۵۰/۳۷ |

ب

| $\theta_{00}$ | a        |          |
|---------------|----------|----------|
| ۱۰            |          | ۱۰۰      |
| ۰/۰۱          | ۹۵۸/۸۶   | ۴۶۰۵۱/۷۶ |
| ۱             | ۳۸۱۰۵/۱۶ | ۴۶۵۲/۲۶  |
| ۱۰۰           | ۴۵۹۶۰/۵۶ | ۴۶۰۵۲/۳۱ |

و در نهایت برای  $r_3(\theta) = e^\theta$  وقتی تعریف  $\Psi_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^\theta \log \theta}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta$  را داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{\omega \delta_0(y) e^{\delta_0(y)} + (1-\omega) \varphi_6}{\omega e^{\delta_0(y)} + (1-\omega) \varphi_5} \quad (۲۹.۲)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) | Y] \\ = \omega \left\{ \frac{\delta_0}{\hat{\delta}} E(e^\theta | Y) - \log \delta_0 E(e^\theta | Y) \right\} + \log \hat{\delta} E(e^\theta | Y) - E(e^\theta | Y) \\ + (1 - \omega) \left\{ \frac{1}{\hat{\delta}} E(\theta e^\theta | Y) - E(e^\theta \log \theta | Y) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega \varphi_5 \left\{ \frac{\delta_0(\omega e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_5)}{\omega \delta_0(y) e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6} - \log \delta_0 \right\} \\
 &+ \left( \log \left( \frac{\omega \delta_0(y) e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6}{\omega e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_5} \right) - 1 \right) \varphi_5 \\
 &+ (1-\omega) \left\{ \frac{\omega e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_5}{\omega \delta_0(y) e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6} \varphi_6 - \psi_3 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{۳۰.۲}$$

انتگرال فوق در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد. در صورتی که در دستگاه اعداد مختلط دارای جواب است که جواب انتگرال فوق برای مقادیر مختلف پارامترهای  $a$  و  $\theta_{00}$  وقتی  $N=10$  و  $\bar{y} = 100$  در جدول ۳.۲ آمده است.

جدول ۳.۲ مقادیر  $\psi_3$  به ازای واریانس ها و  $\theta_{00}$  های مختلف

الف

| $\theta_{00}$<br>a | ۱۰-<br>۰                                          | ۰                                                 |
|--------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| ۰/۰۱               | $-۲/۹۹+۱/۴۶I$                                     | ۱۸۲/۴۵                                            |
| ۱                  | $۵/۷۵ \times ۱۰^{-۳۹} - ۲/۰۲ \times ۱۰^{-۱۹۳۱۶}I$ | $۱/۴۳ \times ۱۰^{-۴۰} - ۳/۶۲ \times ۱۰^{-۱۹۷۰۹}I$ |
| ۱۰۰                | ۰                                                 | ۰                                                 |

ب

| $\theta_{00}$<br>a | ۱۰<br>۰                                           | ۱۰۰ |
|--------------------|---------------------------------------------------|-----|
| ۰/۰۱               | $۲/۲۹ \times ۱۰^{-۸} - ۶/۰۷ \times ۱۰^{-۷۸۵۸}I$   | ۰   |
| ۱                  | $۳/۵۶ \times ۱۰^{-۴۰} - ۷/۲۹ \times ۱۰^{-۲۰۱۰۶}I$ | ۰   |
| ۱۰۰                | ۰                                                 | ۰   |

مثال ۱۲.۲ برای محاسبه مخاطره با استفاده از تابع زیان مثال ۷.۲ برای  $\mathbf{r}_1(\theta) = \theta$  و با جایگذاری  $\Psi_4$

$$\text{به جای } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{-\beta+1}}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta \text{ داریم}$$

$$L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) = \omega r(\theta) \left[ \left( \frac{\delta}{\delta_0} \right)^\beta - \beta \log \frac{\delta}{\delta_0} - 1 \right] + (1 - \omega) r(\theta) \left[ \left( \frac{\delta}{\theta} \right)^\beta - \beta \log \frac{\delta}{\theta} - 1 \right] \quad (۳۱.۲)$$

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(r(\theta)|Y)}{\left[ E_{\pi^*} \left( \frac{r(\theta)}{\theta^\beta} | Y \right) \right]^\beta} = \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta|Y)}{\omega \delta_0^{-\beta+1} + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^{-\beta+1}|Y)}$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta)|Y] &= \omega E \left\{ \left( \theta \left( \frac{\hat{\delta}}{\delta_0} \right)^\beta - \beta \theta \log \frac{\hat{\delta}}{\delta_0} - \theta \right) | Y \right\} \\ &+ (1 - \omega) E \left\{ \left( \theta \left( \frac{\hat{\delta}}{\theta} \right)^\beta - \beta \theta \log \frac{\hat{\delta}}{\theta} - \theta \right) | Y \right\} \\ &= \varphi_1 \left[ \omega \left( \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega) \varphi_1}{\delta_0 (\omega \delta_0^{-\beta+1} + (1 - \omega) \psi_4)} \right)^\beta + \omega \beta \log \delta_0 \right. \\ &\quad \left. - \beta \log \left( \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega) \varphi_1}{\omega \delta_0^{-\beta+1} + (1 - \omega) \psi_4} \right) - 1 \right] \\ &+ (1 - \omega) \left\{ \left( \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega) \varphi_1}{\omega \delta_0^{-\beta+1} + (1 - \omega) \psi_4} \right)^\beta \psi_4 + \beta \psi_1 \right\} \end{aligned} \quad (۳۲.۲)$$

هر دو انتگرال بدست آمده در تابع مخاطره فوق در دستگاه اعداد طبیعی جواب ندارند. برای  $\Psi_1 =$

$$\text{در } \bar{y} = 100 \text{ و } N=10 \text{ وقتی } \theta_{00} \text{ های مختلف و } a \text{ ها و } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta \log \theta}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta$$

جدول ۱.۲ قبلا محاسبه شده است و در مورد انتگرال  $\Psi_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{-\beta+1}}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta$  برای

هر  $a$  و  $\theta_{00}$  ممکن به ازای  $\beta$  فرد جواب بینهایت و به ازای  $\beta$  زوج تعریف نشده می‌باشد.

در حالتی که  $r_2(\theta) = \theta^2$  و با تعریف  $\Psi_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{-\beta+2}}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{\omega \delta_0^2 + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^2 | \underline{Y})}{\omega \delta_0^{-\beta+2} + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^{-\beta+2} | \underline{Y})} \quad (۳۳.۲)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) | \underline{Y}] &= \omega E \left\{ \left( \theta^2 \left( \frac{\hat{\delta}}{\delta_0} \right)^{\beta} - \beta \theta^2 \log \frac{\hat{\delta}}{\delta_0} - \theta^2 \right) \middle| \underline{Y} \right\} \\ &+ (1 - \omega) E \left\{ \left( \theta^2 \left( \frac{\hat{\delta}}{\theta} \right)^{\beta} - \beta \theta^2 \log \frac{\hat{\delta}}{\theta} - \theta^2 \right) \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= \omega E(\theta^2 | \underline{Y}) \left\{ \left( \frac{\hat{\delta}}{\delta_0} \right)^{\beta} + \beta \log \delta_0 \right\} - E(\theta^2 | y) [\beta \log \hat{\delta} + 1] \\ &+ (1 - \omega) \left\{ \hat{\delta}^{\beta} E \left( \left( \frac{1}{\theta} \right)^{\beta-2} \middle| \underline{Y} \right) + \beta E(\theta^2 \log \theta | \underline{Y}) \right\} \\ &= \omega \varphi_2 \left\{ \left( \frac{\omega \delta_0^2 + (1 - \omega) \varphi_2}{\delta_0 (\omega \delta_0^{-\beta+2} + (1 - \omega) \Psi_5)} \right)^{\beta} + \beta \log \delta_0 \right\} \\ &- \varphi_2 \left[ \beta \log \left( \frac{\omega \delta_0^2 + (1 - \omega) \varphi_2}{\omega \delta_0^{-\beta+2} + (1 - \omega) \Psi_5} \right) + 1 \right] \\ &+ (1 - \omega) \left\{ \left( \frac{\omega \delta_0^2 + (1 - \omega) \varphi_2}{\omega \delta_0^{-\beta+2} + (1 - \omega) \Psi_5} \right)^{\beta} \Psi_5 + \beta \Psi_2 \right\} \end{aligned}$$

(۳۴.۲)

در این مورد نیز دو انتگرال بدست آمده در دستگاه اعداد حقیقی بدون پاسخ هستند که جوابهای مختلف

برای  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2 \log \theta}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)(\theta - \frac{\theta_{00} + aNy}{aN+1})^2}{2a}} d\theta$  به ازای  $a$  ها و  $\theta_{00}$  های مختلف در جدول ۲.۲ آمده است.

ولی در مورد  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{-\beta+2}}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)(\theta - \frac{\theta_{00} + aNy}{aN+1})^2}{2a}} d\theta$  پاسخ برای هر  $a$  و  $\theta_{00}$  ممکن به ازای  $\beta$  زوج بینهایت و

به ازای  $\beta$  فرد تعریف نشده می باشد.

و در نهایت برای  $\mathbf{r}_3(\theta) = \mathbf{e}^\theta$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(r(\theta)|Y)}{\left[E_{\pi^*}\left(\frac{r(\theta)}{\theta^\beta} | Y\right)\right]^\beta} = \frac{\omega e^{\delta_0} + (1 - \omega)E_{\pi}(e^\theta | Y)}{\omega e^{\delta_0} \delta_0^{-\beta} + (1 - \omega)E_{\pi}(e^\theta \theta^{-\beta} | Y)} \quad (35.2)$$

با تعریف  $\psi_6 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^\theta \theta^{-\beta}}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)(\theta - \frac{\theta_{00} + aNy}{aN+1})^2}{2a}} d\theta$  داریم:

$$\begin{aligned} E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta) | Y] &= \omega E\left\{\left(e^\theta \left(\frac{\hat{\delta}}{\delta_0}\right)^\beta - \beta e^\theta \log \frac{\hat{\delta}}{\delta_0} - e^\theta\right) | Y\right\} \\ &+ (1 - \omega) E\left\{\left(e^\theta \left(\frac{\hat{\delta}}{\theta}\right)^\beta - \beta e^\theta \log \frac{\hat{\delta}}{\theta} - e^\theta\right) | Y\right\} \\ &= E(e^\theta | Y) \left\{\omega \left(\frac{\hat{\delta}}{\delta_0}\right)^\beta + \beta \omega \log \delta_0 - \beta \log \hat{\delta} - 1\right\} \\ &+ (1 - \omega) \{\hat{\delta}^\beta E(\theta^{-\beta} e^\theta | Y) + \beta E(e^\theta \log \theta | Y)\} \\ &= \varphi_5 \left\{\omega \left(\frac{\omega e^{\delta_0} + (1 - \omega)\varphi_5}{\delta_0 (\omega e^{\delta_0} \delta_0^{-\beta} + (1 - \omega)\psi_6)}\right)^\beta + \beta \omega \log \delta_0\right. \end{aligned}$$

$$-\beta \log \left( \frac{\omega e^{\delta_0} + (1 - \omega) \varphi_5}{\omega e^{\delta_0} \delta_0^{-\beta} + (1 - \omega) \psi_6} \right) - 1 \Bigg\} \\ + (1 - \omega) \left\{ \left( \frac{\omega e^{\delta_0} + (1 - \omega) \varphi_5}{\omega e^{\delta_0} \delta_0^{-\beta} + (1 - \omega) \psi_6} \right)^\beta \psi_6 + \beta \psi_3 \right\}$$

در این تابع مخاطره نیز دو انتگرال حل نشده داریم که در دستگاه اعداد حقیقی پاسخ ندارند بنابراین طبق

موارد قبلی جداولی طراحی شده است. برای  $\psi_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta} \log \theta}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aNy}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta$  نتایج را در

جدول ۳.۲ می توانید مشاهده کنید و پاسخ های ممکن برای  $\psi_6 =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta} \theta^{-\beta}}{\sqrt{\frac{2\pi a}{aN+1}}} e^{-\frac{(aN+1)\left(\theta - \frac{\theta_{00} + aNy}{aN+1}\right)^2}{2a}} d\theta$$

در جدول ۴.۲ آورده شده است.

جدول ۴.۲ مقادیر  $\psi_6$  به ازای واریانس ها و  $\theta_{00}$  های مختلف

الف

| $\theta_{00}$ | ۱۰-                     | .                        |
|---------------|-------------------------|--------------------------|
| a             |                         |                          |
| ۰/۰۱          | ۰/۰۰۰۲                  | ۶/۷۲ × ۱۰ <sup>۶</sup> I |
| ۱             | ۹/۳۴ × ۱۰ <sup>۴۴</sup> | ۲/۳۹ × ۱۰ <sup>۴۵</sup>  |
| ۱۰۰           | ۲/۳۱ × ۱۰ <sup>۴۹</sup> | ۲/۵۶ × ۱۰ <sup>۴۹</sup>  |

ب

| $\theta_{00}$ | ۱۰                      | ۱۰۰                     |
|---------------|-------------------------|-------------------------|
| a             |                         |                         |
| ۰/۰۱          | ۴/۷۶ × ۱۰ <sup>۱۱</sup> | ۲/۷۰ × ۱۰ <sup>۴۹</sup> |
| ۱             | ۶/۱۱ × ۱۰ <sup>۴۵</sup> | ۲/۸۲ × ۱۰ <sup>۴۹</sup> |
| ۱۰۰           | ۲/۵۸ × ۱۰ <sup>۴۹</sup> | ۲/۸۳ × ۱۰ <sup>۴۹</sup> |

مثال ۱۳.۲. برای محاسبه مخاطره با استفاده از تابع زیان مثال ۸.۲ برای  $\mathbf{r}_1(\theta) = \theta$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(\theta^2 r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(\theta r(\theta) | \underline{Y})} = \frac{\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^3 | \underline{Y})}{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^2 | \underline{Y})} \quad (۳۶.۲)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho,\omega,\delta_0}^r(\theta, \delta) | \underline{Y}] &= E \left\{ \omega r(\theta) \left( \frac{\delta_0}{\hat{\delta}} - 1 \right)^2 + (1 - \omega) r(\theta) \left( \frac{\theta}{\hat{\delta}} - 1 \right)^2 \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{\omega \theta \delta_0^2}{\hat{\delta}^2} - 2 \frac{\omega \theta \delta_0}{\hat{\delta}} + \frac{\theta^3}{\hat{\delta}^2} + \theta - \frac{2\theta^2}{\hat{\delta}} - \frac{\omega \theta^3}{\hat{\delta}^2} + \frac{2\omega \theta^2}{\hat{\delta}} \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= \frac{1}{\hat{\delta}^2} \left\{ (1 - \omega) E(\theta^3 | \underline{Y}) + \omega \delta_0^2 (E(\theta | \underline{Y})) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\hat{\delta}} \left\{ (1 - \omega) E(\theta^2 | \underline{Y}) + \omega \delta_0 E(\theta | \underline{Y}) \right\} + E(\theta | \underline{Y}) \\ &= \left[ \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) \varphi_2}{\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) \varphi_3} \right]^2 \{ (1 - \omega) \varphi_3 + \omega \delta_0^2 \varphi_1 \} \\ &\quad - \frac{2(\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) \varphi_2)}{\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) \varphi_3} \{ (1 - \omega) \varphi_2 + \omega \delta_0 \varphi_1 \} + \varphi_1 \end{aligned} \quad (۳۷.۲)$$

برای وقتی که  $r_2(\theta) = \theta^2$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(\theta^2 r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(\theta r(\theta) | \underline{Y})} = \frac{\omega \delta_0^4(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^4 | \underline{Y})}{\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^3 | \underline{Y})} = \frac{\omega \delta_0^4(y) + (1 - \omega) \varphi_4}{\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) \varphi_3} \quad (۳۸.۲)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho,\omega,\delta_0}^r(\theta, \delta) | \underline{Y}] &= E \left\{ \omega \theta^2 \left( \frac{\delta_0}{\hat{\delta}} - 1 \right)^2 + (1 - \omega) \theta^2 \left( \frac{\theta}{\hat{\delta}} - 1 \right)^2 \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{\omega \theta^2 \delta_0^2}{\hat{\delta}^2} - 2 \frac{\omega \theta^2 \delta_0}{\hat{\delta}} + \frac{\theta^4}{\hat{\delta}^2} - 2 \frac{\theta^3}{\hat{\delta}} + \theta^2 - \frac{\omega \theta^4}{\hat{\delta}^2} + 2 \frac{\omega \theta^3}{\hat{\delta}} \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= (1 - \omega) \left\{ \frac{1}{\hat{\delta}^2} E(\theta^4 | \underline{Y}) - \frac{2}{\hat{\delta}} E(\theta^3 | \underline{Y}) \right\} \\ &\quad + \left( \frac{\delta_0^2 - 2\omega \delta_0}{\hat{\delta}} + 1 \right) E(\theta^2 | \underline{Y}) \\ &= \left\{ (1 - \omega) \varphi_4 \times \left( \frac{\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) \varphi_3}{\omega \delta_0^4(y) + (1 - \omega) \varphi_4} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(1 - \omega)(\omega \delta_0^3(y) + (1 - \omega) \varphi_3)}{\omega \delta_0^4(y) + (1 - \omega) \varphi_4} \varphi_3 \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{(\delta_0^2 - 2\omega\delta_0)(\omega\delta_0^3(y) + (1-\omega)\varphi_3)}{\omega\delta_0^4(y) + (1-\omega)\varphi_4} + 1 \right) \varphi_2 \quad (39.2)$$

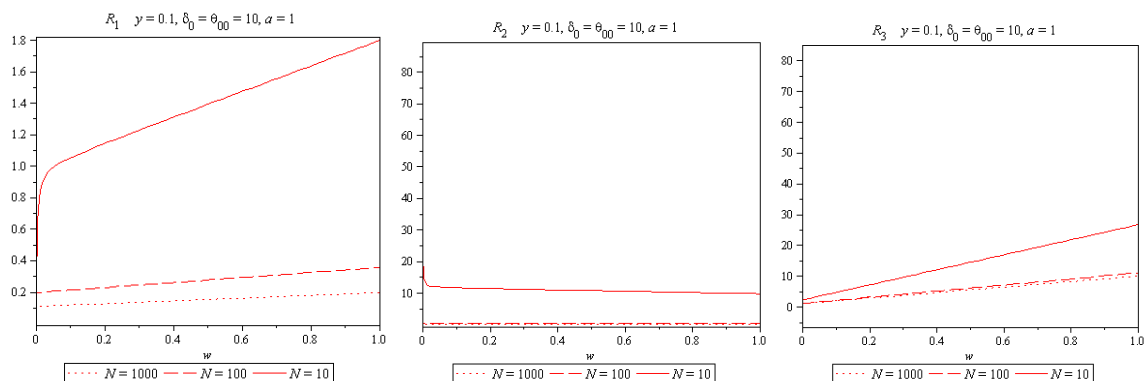
و در نهایت برای  $r_3(\theta) = e^\theta$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) = \frac{E_{\pi^*}(\theta^2 r(\theta) | \underline{Y})}{E_{\pi^*}(\theta r(\theta) | \underline{Y})} = \frac{\omega\delta_0^2(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)E_{\pi}(\theta^2 e^\theta | \underline{Y})}{\omega\delta_0(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)E_{\pi}(\theta e^\theta | \underline{Y})} \quad (40.2)$$

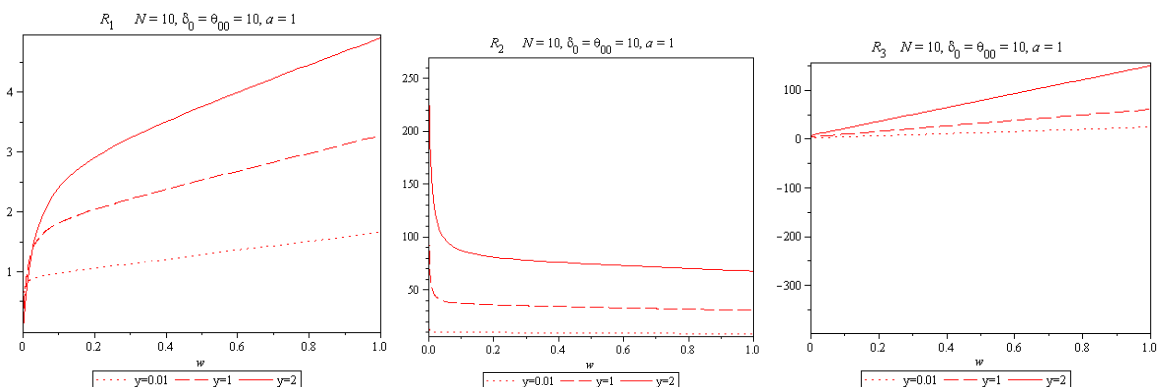
$$\begin{aligned} E[L_{\rho,\omega,\delta_0}^r(\theta, \delta) | \underline{Y}] &= E \left\{ \omega e^\theta \left( \frac{\delta_0}{\hat{\delta}} - 1 \right)^2 + (1-\omega) e^\theta \left( \frac{\theta}{\hat{\delta}} - 1 \right)^2 \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{\omega e^\theta \delta_0^2}{\hat{\delta}} - 2 \frac{\omega e^\theta \delta_0}{\hat{\delta}} + \frac{e^\theta \theta^2}{\hat{\delta}^2} - 2 \frac{e^\theta \theta}{\hat{\delta}} + e^\theta - \frac{\omega e^\theta \theta^2}{\hat{\delta}^2} + 2\omega \frac{e^\theta \theta^2}{\hat{\delta}} \middle| \underline{Y} \right\} \\ &= E(e^\theta | \underline{Y}) \left[ \frac{\omega\delta_0^2}{\hat{\delta}} - 2 \frac{\omega\delta_0}{\hat{\delta}} + 1 \right] - \frac{2(1-\omega)}{\hat{\delta}} E(\theta e^\theta | \underline{Y}) + \frac{1}{\hat{\delta}^2} (1-\omega) E(\theta^2 e^\theta | \underline{Y}) \\ &= \varphi_5 \left[ \frac{\omega\delta_0^2(\omega\delta_0(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6)}{\omega\delta_0^2 e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_7} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\omega\delta_0(\omega\delta_0(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6)}{\omega\delta_0^2(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_7} + 1 \right] \\ &\quad - \frac{2(1-\omega)(\omega\delta_0(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6)}{\omega\delta_0^2(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_7} \times \varphi_6 \\ &\quad + \left( \frac{\omega\delta_0(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_6}{\omega\delta_0^2(y)e^{\delta_0(y)} + (1-\omega)\varphi_7} \right)^2 \times (1-\omega)\varphi_7 \end{aligned} \quad (41.2)$$

برای بررسی رفتار برآوردگرها نسبت به هم، توابع مخاطره آنها که در روابط (37.2)، (39.2) و (41.2) آورده‌ایم را به ازای مقادیر ثابتی از  $N$ ،  $\bar{y}$ ،  $\delta_0$  و  $\theta_{00}$  رسم کردیم. با توجه به نمودارها ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش  $\bar{y}$  و  $a$  هر سه مخاطره روند نزولی به سمت صفر دارند. همچنین با کاهش  $\delta_0$  هر سه مخاطره روند نزولی به سمت صفر دارند. همواره به ازای مقادیر مختلف  $\omega \in [0,1]$ ، برای  $\bar{y}$  مخاطره  $R_3$  کمتر از دو مخاطره دیگر است.

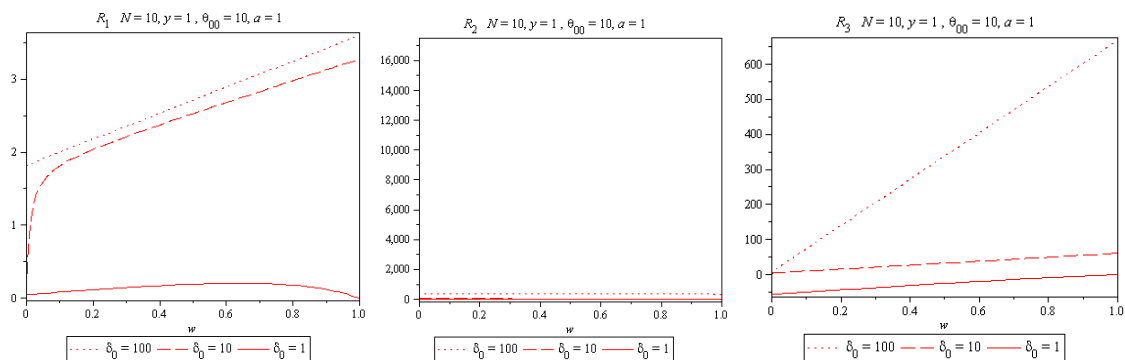
## فصل دوم برآوردگرهای محدود شده در حالت یک متغیره



نمودار ۲.۲. مقایسه مخاطره  $R_1$  و  $R_2$ ,  $R_3$  برای  $N$  های مختلف.

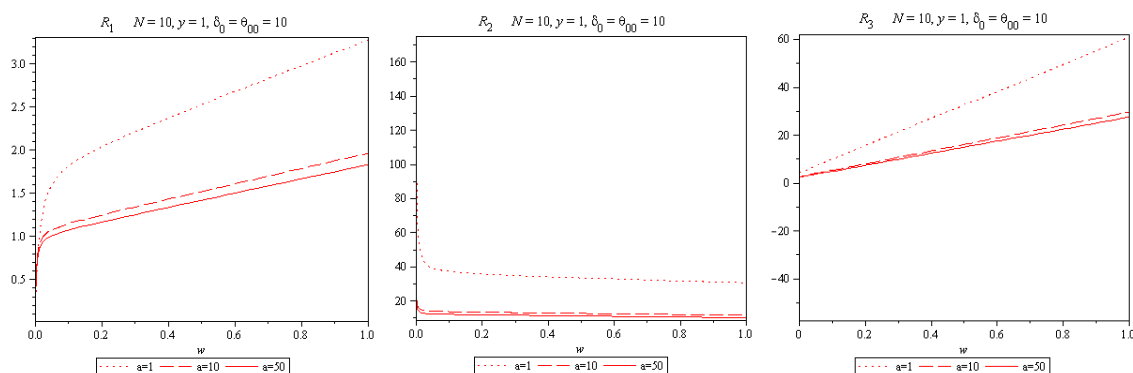


نمودار ۲.۳. مقایسه مخاطره  $R_1$  و  $R_2$ ,  $R_3$  برای  $\gamma$  های مختلف.



نمودار ۲.۴. مقایسه مخاطره  $R_1$  و  $R_2$ ,  $R_3$  برای  $\delta_0$  های مختلف.

## فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره



نمودار ۵.۲. مقایسه مخاطره  $R_1$  و  $R_2$ ,  $R_3$  برای واریانس های مختلف.

مثال ۱۴.۲. برای محاسبه مخاطره با استفاده از تابع زیان مثال ۹.۲ (تابع زیان لینکس) برای

$$r_1(\theta) = \theta \text{ داریم:}$$

$$\hat{\delta}_{\omega, \pi}(y) = \frac{1}{b} \log \frac{E_{\pi^*}(r(\theta)|Y)}{E_{\pi^*}(r(\theta)e^{-b\theta}|Y)} = \frac{1}{b} \log \left[ \frac{\omega r(\delta_0(y)) + (1 - \omega)E_{\pi}(r(\theta)|Y)}{\omega r(\delta_0(y))e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega)E_{\pi}(r(\theta)e^{-b\theta}|Y)} \right] \quad (۴۲.۲)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho, \omega, \delta_0}^r(\theta, \delta)|Y] &= E\{\omega r(\theta)[e^{b(\hat{\delta} - \delta_0)} - b(\hat{\delta} - \delta_0) - 1] \\ &+ (1 - \omega)r(\theta)[e^{b(\hat{\delta} - \theta)} - b(\hat{\delta} - \theta) - 1]|Y\} \\ &= E(\theta e^{-b\theta}|Y)e^{b\hat{\delta}}(1 - \omega) + E(\theta|Y)[\omega e^{b(\hat{\delta} - \delta_0)} + \omega b\delta_0 - b\hat{\delta} - 1] \\ &+ bE(\theta^2|Y)(1 - \omega) \\ &= \varphi_8 \exp \left\{ \log \left[ \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega)\varphi_1}{\omega \delta_0 e^{-b\delta_0} + (1 - \omega)\varphi_8} \right] \right\} (1 - \omega) \\ &+ \varphi_1 \left[ \omega e^{b \left( \frac{1}{a} \log \left[ \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega)\varphi_1}{\omega \delta_0 e^{-b\delta_0} + (1 - \omega)\varphi_8} \right] - \delta_0 \right)} + \omega b\delta_0 \right. \\ &\left. - b \left( \frac{1}{a} \log \left[ \frac{\omega \delta_0 + (1 - \omega)\varphi_1}{\omega \delta_0 e^{-b\delta_0} + (1 - \omega)\varphi_8} \right] \right) - 1 \right] + b\varphi_2(1 - \omega) \end{aligned}$$

(۴۳.۲)

برای وقتی که  $r_2(\theta) = \theta^2$  داریم:

$$\hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) = \frac{1}{b} \log \left[ \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^2 | \underline{Y})}{\omega \delta_0^2(y) e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega) E_{\pi}(\theta^2 e^{-b\theta} | \underline{Y})} \right] \quad (44.2)$$

$$\begin{aligned} E[L_{\rho,\omega,\delta_0}^r(\theta, \delta) | \underline{Y}] &= E\{\omega \theta^2 [e^{b(\hat{\delta}-\delta_0)} - b(\hat{\delta} - \delta_0) - 1] + (1 - \omega) \theta^2 [e^{b(\hat{\delta}-\theta)} - b(\hat{\delta} - \theta) - 1] | \underline{Y}\} \\ &= (1 - \omega) e^{b\hat{\delta}} E(\theta^2 e^{-b\theta} | y) + b(1 - \omega) E(\theta^3 | \underline{Y}) \\ &\quad + E(\theta^2 | \underline{Y}) [\omega e^{b(\hat{\delta}-\delta_0)} - 1 - b\hat{\delta}] \\ &= (1 - \omega) \exp \left\{ \log \left[ \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) \varphi_2}{\omega \delta_0^2(y) e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega) \varphi_8} \right] \right\} \varphi_8 + b(1 - \omega) \varphi_3 \\ &\quad + \varphi_2 \left[ \omega \exp \left\{ \log \left[ \frac{\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) \varphi_2}{\omega \delta_0^2(y) e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega) \varphi_8} \right] - b\delta_0 \right\} - 1 \right. \\ &\quad \left. - \log[\omega \delta_0^2(y) + (1 - \omega) \varphi_2] + \log[\omega \delta_0^2(y) e^{-b\delta_0(y)} + (1 - \omega) \varphi_7] \right] \end{aligned} \quad (45.2)$$

و در نهایت برای  $r_3(\theta) = e^{\theta}$  داریم:

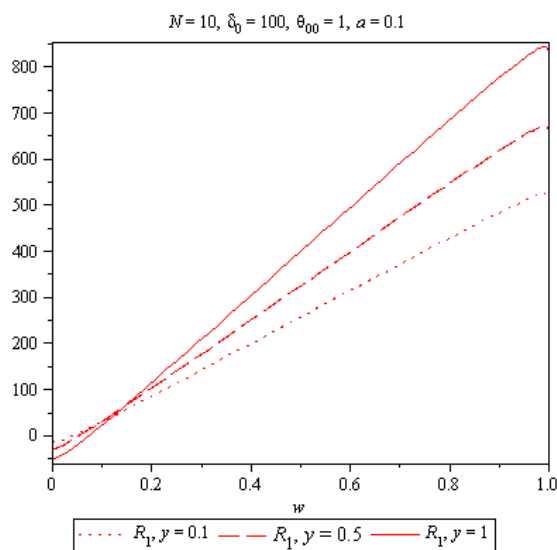
$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\omega,\pi}(y) &= \frac{1}{b} \log \left[ \frac{\omega e^{\delta_0(y)} + (1 - \omega) e^{\frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1} + \frac{a}{2aN+2}}}{\omega e^{(1-b)\delta_0(y)} + (1 - \omega) e^{(1-b)\frac{\theta_{00} + aN\bar{y}}{aN+1} + \frac{a(1-b)^2}{2aN+2}}} \right] \\ &= \frac{1}{b} \log \left[ \frac{\omega e^{\delta_0(y)} + (1 - \omega) \varphi_5}{\omega e^{(1-b)\delta_0(y)} + (1 - \omega) \varphi_9} \right] \end{aligned}$$

$$E[L_{\rho,\omega,\delta_0}^r(\theta, \delta) | \underline{Y}] \quad (46.2)$$

$$\begin{aligned} &= E\{\omega e^{\theta} [e^{b(\hat{\delta}-\delta_0)} - b(\hat{\delta} - \delta_0) - 1] \\ &\quad + (1 - \omega) e^{\theta} [e^{b(\hat{\delta}-\theta)} - b(\hat{\delta} - \theta) - 1] | \underline{Y}\} \\ &= E\{\omega e^{\theta} e^{b(\hat{\delta}-\delta_0)} + \omega b \delta_0 e^{\theta} + e^{\theta(1-b)} e^{b\hat{\delta}} \\ &\quad - b\hat{\delta} e^{\theta} + b\theta e^{\theta} - e^{\theta} - \omega e^{\theta(1-b)} e^{b\hat{\delta}} - \omega b \theta e^{\theta} | \underline{Y}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= b(1 - \omega)E(\theta e^\theta | \underline{Y}) + [\omega e^{b(\hat{\delta} - \delta_0)} + \omega b \delta_0 - y b \hat{\delta} - 1] \times E(e^\theta | \underline{Y}) \\
 &\quad + (1 - \omega)e^{b\hat{\delta}}E(e^{\theta(1-b)} | \underline{Y}) \\
 &= b(1 - \omega)\varphi_6 + \left[ \omega \exp \left\{ \log \left[ \frac{\omega e^{\delta_0(y)} + (1 - \omega)\varphi_5}{\omega e^{(1-b)\delta_0(y)} + (1 - \omega)\varphi_9} \right] - b\delta_0 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \omega b \delta_0 - \log \left[ \frac{\omega e^{\delta_0(y)} + (1 - \omega)\varphi_5}{\omega e^{(1-b)\delta_0(y)} + (1 - \omega)\varphi_9} \right] - 1 \right] \varphi_5 \\
 &\quad + (1 - \omega) \exp \left\{ \log \left[ \frac{\omega e^{\delta_0(y)} + (1 - \omega)\varphi_5}{\omega e^{(1-b)\delta_0(y)} + (1 - \omega)\varphi_9} \right] \right\} \varphi_9
 \end{aligned}$$

(۴۷.۲)

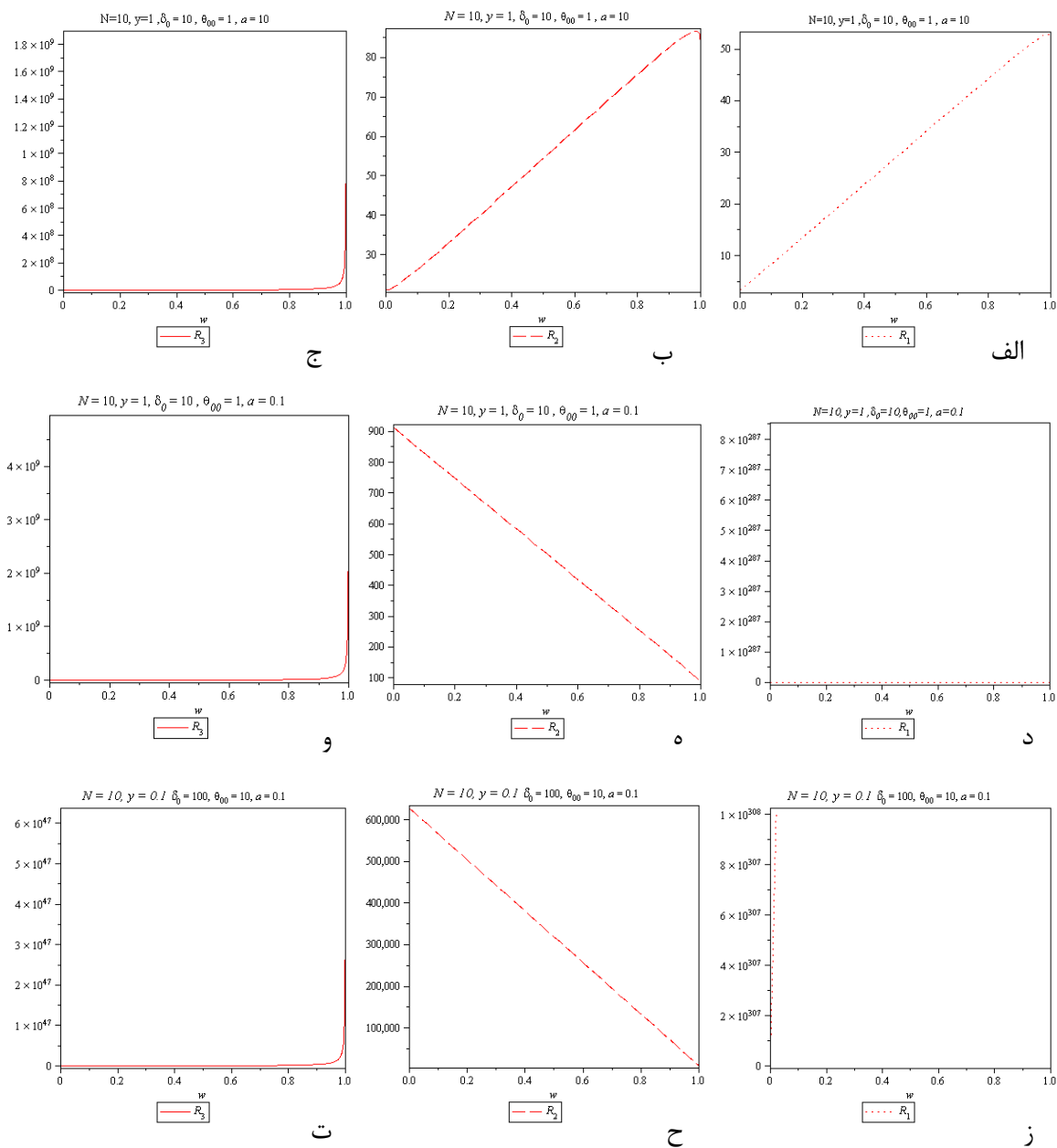


نمودار ۶.۲ مقایسه رفتار مخاطره  $R_1$  تحت تابع زیان لینکس.

همانطور که نمودار (۸.۲ الف، ب و ج) نشان می‌دهد برای نمونه‌ی ۱۰ تایی با میانگین یک و با فرض اینکه نمونه از توزیع پیشین  $N(1,10)$  پیروی کند و همچنین با در نظر گرفتن  $\delta_0 = 1$ ، با افزایش  $\omega$  مخاطره‌ها نیز افزایش می‌یابند بعبارت دیگر هر چه اثر نیکویی برازش را در تابع زیان بیشتر می‌کنیم توابع مخاطره  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$  افزایش می‌یابند البته قابل ذکر است که این افزایش برای  $R_3$  وقتی  $\omega \rightarrow 1$  اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر با مقایسه نمودار (۸.۲ الف، د و ز) مشاهده می‌کنیم که با کاهش واریانس توزیع

## فصل دوم برآوردهای محدود شده در حالت یک متغیره

پیشین و همچنین با کاهش میانگین نمونه رفتار  $R_1$  تغییر می کند. رفتار  $R_2$  نیز با کاهش واریانس تغییر چشم گیری دارد.



نمودار ۷.۲ مقایسه مخاطره های  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$  تحت تابع زیان لینکس برای مثال های مختلف

## فصل سوم

برآوردگرهای محدود شده در حالت چند

متغیره

### ۳.۱ مقدمه

فرض کنید  $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_N \stackrel{iid}{\sim} N_p(\theta, \Sigma)$  که در آن  $\theta$  بردار میانگین و  $\Sigma$  ماتریس کواریانس معین مثبت و نامعلوم می باشند. برآوردهای ML پارامتر  $\theta$  برابر است با

$$\bar{\underline{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i$$

که در حقیقت UE می باشد.

جیمز<sup>۱</sup> و استاین (۱۹۶۱) و موریس و افرون<sup>۲</sup> (۱۹۷۲ و ۱۹۷۶) برآورد پارامتر برداری  $\theta$  را در مدل فوق، هنگامی که  $\Sigma$  به ترتیب معلوم و نامعلوم بود بدست آوردند؛ و سریواستاوا و صالح (۲۰۰۵) برآورد  $\theta$  را تحت زیر فضای محدود شده روی بردار پارامتر  $\theta$  برای  $\Sigma$  نامعلوم محاسبه کردند. در مقالات عنوان شده تابع زیان درجه دوم برای مطالعه و نمایش برآوردهای بکار برده شد. سنجر فارسی پور و اصغر زاده (۲۰۰۳) برآوردهای بیز را برای مدل فوق تحت تابع زیان BL بدست آوردند که در ادامه کار ایشان، آرشی (۲۰۰۹) نتایج حاصل از یافته‌های آن‌ها را به برآوردهای آزمون مقدماتی تعمیم داد. مطالعات قابل توجهی نیز توسط رودرینگ و زلنر (۱۹۹۴)، چانگ و کیم<sup>۳</sup> (۱۹۹۷)، سنجر فارسی پور و اصغر زاده (۲۰۰۴)، گمز<sup>۴</sup> (۲۰۰۶)، و گش و همکاران (۲۰۰۸) با استفاده از تابع زیان BL انجام شده است.

همانطور که در فصل قبل نیز مطرح شد هر چه برآوردهای که بدست می‌آید مخاطره کمتری داشته باشد مسئله ما از اهمیت بیشتری برخوردار خواهد بود، بنابراین تابع زیانی که مورد استفاده قرار می‌گیرد نقش مهمی را ایفا می‌کند و بهتر است که تابع زیان کاربردی و منطقی بکار برده شود.

۱ . James

۲ . Efron and Morris

۳ . Chung and Kim

۴ . Gomez

تابع زیان زیر را در نظر بگیرید

$$L_{\omega, \underline{\delta}_0}^W(\underline{\theta}; \underline{\delta}) = \omega r(\|\underline{\theta}\|^2)(\underline{\delta} - \underline{\delta}_0)' W(\underline{\delta} - \underline{\delta}_0) + (1 - \omega) r(\|\underline{\theta}\|^2)(\underline{\delta} - \underline{\theta})' W(\underline{\delta} - \underline{\theta})$$

دی (۱۹۹۹) مجاز بودن برآوردهای بیز  $\underline{\theta}$  را تحت تابع زیان فوق با چشم پوشی از  $r(\cdot)$  و تعریف  $W = I_p$  برای  $\omega = 0$  بررسی کرد.

ما در این فصل علاقه مندیم تحت یک زیر فضای محدود شده بر روی بردار پارامتر  $\underline{\theta}$  رفتار برآوردهای CB و بیز تجربی محدود شده<sup>۱</sup> (CEB) با تابع زیان فوق، زمانی که  $r(\|\underline{\theta}\|^2) = \theta'\theta$  است، مورد مطالعه قرار دهیم.<sup>۲</sup>

### ۳.۲ روش CB برای بدست آوردن برآوردهای

در این بخش برآورد بیزی پارامتر برداری  $\underline{\theta}$  را هنگامی که بر آن محدودیت  $\underline{\theta} = B\underline{\eta}$  که در آن B یک ماتریس معین معلوم  $p \times r$  با رتبه r و  $\underline{\eta} \in \mathcal{R}^p$  اعمال شده است، که منجر به برآوردهای CB می شود، را مورد بررسی قرار می دهیم. برآوردهای CB کاربرد های زیادی در اختصار داده ها<sup>۳</sup>، بهینه سازی<sup>۴</sup>، فیلترینگ مصنوعی بیزی<sup>۵</sup>، آنالیز تصادفی محدب<sup>۶</sup> و یادگیری ممیزی<sup>۷</sup> دارد به کار می بریم.

۱. Constrained Empirical Bayes

۲. از نتایج این فصل مقاله پورحسینی و آرشی (۲۰۱۰ a) بدست آمده است.

۳. Data reduction

۴. Optimization

۵. Bayesian artificial filtering

۶. Convex stochastic analysis

۷. Discriminative learning

فصل سوم برآوردهای محدود شده در حالت چند متغیره

(\*\*) قضیه ۱.۳ اگر برای ماتریس معین معلوم  $B$  با رتبه  $r$  و  $\eta \in \mathbb{R}^+$  فرضیه  $H_0: \underline{\theta} = B\underline{\eta}$  درست باشد

آنگاه برآوردهای ML پارامتر  $\underline{\theta}$  بعنوان برآوردهای محدود شده برابر است با

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\theta}} &= B\hat{\underline{\eta}} \\ &= B(B'S^{-1}B)^{-1}\underline{B}'S^{-1}\underline{Y}\end{aligned}$$

(۱.۳)

$$S = \sum_{i=1}^N (\underline{Y}_i - \underline{\bar{Y}})' (\underline{Y}_i - \underline{\bar{Y}})$$

برهان: برای اثبات از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده می کنیم و ابتدا به جای  $\underline{\theta}$  ،  $B\underline{\eta}$  قرار می دهیم.

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}L(\underline{\theta}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{Np}|\Sigma|^N}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} (\underline{Y}_i - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\underline{Y}_i - \underline{\theta}) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{Np}|\Sigma|^N}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} (\underline{Y}_i - B\underline{\eta})' \Sigma^{-1} (\underline{Y}_i - B\underline{\eta}) \right\} \\ &= \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} [\underline{Y}_i' \Sigma^{-1} \underline{Y}_i - \underline{Y}_i' \Sigma^{-1} B\underline{\eta} - (B\underline{\eta})' \Sigma^{-1} \underline{Y}_i + (B\underline{\eta})' \Sigma^{-1} B\underline{\eta}] \right\}}{\sqrt{(2\pi)^{Np}|\Sigma|^N}} \\ &= \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} [\underline{Y}_i' \Sigma^{-1} \underline{Y}_i - \underline{Y}_i' \Sigma^{-1} B\underline{\eta} - \underline{\eta}' B' \Sigma^{-1} \underline{Y}_i + \underline{\eta}' B' \Sigma^{-1} B\underline{\eta}] \right\}}{\sqrt{(2\pi)^{Np}|\Sigma|^N}}\end{aligned}$$

حال با مشتق گیری از  $\ln L(B\underline{\eta})$  نسبت به  $\underline{\eta}$  می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(B\underline{\eta})}{\partial \underline{\eta}} &= \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \left[ -\frac{1}{N} \ln((2\pi)^{Np}|\Sigma|^N) + \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} (\underline{Y}_i - B\underline{\eta})' \Sigma^{-1} (\underline{Y}_i - B\underline{\eta}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \left( -(\underline{Y}_i' \Sigma^{-1} B)' - B' \Sigma^{-1} \underline{Y}_i + 2B' \Sigma^{-1} B \hat{\underline{\eta}} \right) \right] = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -B'\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N Y_i - B'\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N Y_i + 2NB'\Sigma^{-1}B\hat{\eta} = 0$$

$$\Rightarrow 2NB'\Sigma^{-1}B\hat{\eta} = B'\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N Y_i + B'\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N Y_i$$

$$\Rightarrow (B'\Sigma^{-1}B)\hat{\eta} = B'\Sigma^{-1}\bar{Y}$$

$$\Rightarrow \hat{\eta} = (B'\Sigma^{-1}B)^{-1}B'\Sigma^{-1}\bar{Y}$$

(۲.۳)

چون  $\Sigma$  مجهول است با توجه به ماردیا (۱۳۷۶)  $\hat{\Sigma} = S$  پس می توان نوشت:

$$\hat{\eta} = (B'S^{-1}B)^{-1}B'S^{-1}\bar{Y}$$

و اثبات کامل است. ■

باتوجه به اینکه فرضیه  $H_0: \theta = B\eta$ ، را برای بدست آوردن  $MLE(\theta)$  بکار بردیم در نتیجه  $\hat{\theta}$  بدست آمده برآورده محدود شده است و داریم  $\hat{\theta} = B\hat{\eta}$ . حال چون قصد داریم برآوردهای بیز محدود شده را محاسبه کنیم، با توجه به مطالبی که در فصل دوم آورده ایم اگر فرضیه  $H_0$  درست باشد از آنجا که توزیع پسین با توزیع پیشین مرتبط است محدودیت اعمال شده روی توزیع پسین نیز اعمال خواهد شد. لذا برآوردهای بیز محدود شده را می توانیم با همان روش برآوردهای بیز بدست بیاوریم.

در بیشتر موارد از درستی فرضیه  $H_0$  اطلاع کافی نداریم اما تنها فرض می کنیم که این فرضیه برقرار باشد. بنابراین بهتر است که مقدار این فرضیه در نظر گرفته شده را در برآورد بردار میانگین  $\theta$  لحاظ کنیم. یک انتخاب منطقی در نظر گرفتن ترکیب محدب از دو برآوردهای  $\bar{x}$  و  $\hat{\theta}$  است. در حقیقت نشان می دهیم که چنین برآوردهای یک برآوردهای بیز تجربی<sup>۱</sup> (EBE) است.

۱. Empirical Bayes Estimator

### ۳.۲.۱ برآوردگرهای محدود شده تحت تابع زیان متعادل وزنی

در این بخش با توجه به تعریف برآوردگر بیز محدود شده ساختار کلی برآوردگرهای بیز محدود شده را برای پارامتر چند متغیره تحت تابع زیان متعادل وزنی بدست می‌آوریم. واضح است که محدودیت  $H_0: \underline{\theta} = B\underline{\eta}$  تنها در ساختار توزیع پسین تاثیر دارد و باعث بوجود آمدن برآوردگر بیز محدود شده می‌شود. لذا می‌توان چنین استنباط کرد که با معلوم بودن توزیع پسین تحت محدودیت موردنظر (محدودیت اعمال شده روی توزیع پیشین) ساختار برآوردگر بیز محدود شده مشابه ساختار برآوردگر بیز در حالت عادی (بدون محدودیت) می‌باشد که در این راستا قضیه اساسی زیر را داریم.

#### (\*\*) قضیه ۳.۲

تحت زیان (۴.۱) برآوردگر بیز  $\underline{\theta}$  تحت پیشین  $\pi(\underline{\theta})$  برابر است با

$$\hat{\underline{\theta}}_B = \omega \bar{\underline{Y}} + (1 - \omega) \frac{E[\underline{\theta} r(\|\underline{\theta}\|^2) | \underline{Y}]}{E[r(\|\underline{\theta}\|^2) | \underline{Y}]} \quad (۳.۳)$$

برهان:

$\delta$  را به قسمی می‌یابیم که مخاطره زیر را، که در آن  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$  می‌نیمم کند.

$$\begin{aligned} R_{\omega, \bar{\underline{Y}}}^{\Sigma^{-1}}(\underline{\theta}; \underline{\delta}) &= E[L_{\omega, \bar{\underline{Y}}}^{\Sigma^{-1}}(\underline{\theta}; \underline{\delta}) | \underline{Y}] \\ &= \omega E[r(\|\underline{\theta}\|^2) | \underline{Y}] (\underline{\delta} - \bar{\underline{Y}})' \Sigma^{-1} (\underline{\delta} - \bar{\underline{Y}}) \\ &\quad + (1 - \omega) E[r(\|\underline{\theta}\|^2) | \underline{Y}] (\underline{\delta} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\underline{\delta} - \underline{\theta}) \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

حال برای بدست آوردن برآوردهای محدود شده همانطور که در بخش ۳.۱ گفتیم باید از (۳.۴) نسبت به  $\underline{\delta}$  مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E \left[ L_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\underline{\theta}; \underline{\delta}) \middle| \underline{Y} \right]}{\partial \underline{\delta}} \\ &= \omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \frac{\partial \left[ \underline{\delta}' \Sigma^{-1} \underline{\delta} - \underline{\delta}' \Sigma^{-1} \underline{\bar{Y}} - \underline{\bar{Y}}' \Sigma^{-1} \underline{\delta} + \underline{\bar{Y}}' \Sigma^{-1} \underline{\bar{Y}} \right]}{\partial \underline{\delta}} \\ &+ (1 - \omega) \frac{\partial E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \left[ \underline{\delta}' \Sigma^{-1} \underline{\delta} - \underline{\delta}' \Sigma^{-1} \underline{\theta} - \underline{\theta}' \Sigma^{-1} \underline{\delta} + \underline{\theta}' \Sigma^{-1} \underline{\theta} \right] \middle| \underline{Y} \right]}{\partial \underline{\delta}} = 0 \\ \Rightarrow & \omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \left[ 2 \Sigma^{-1} \underline{\hat{\delta}} - \underbrace{\Sigma^{-1} \underline{\bar{Y}} - \Sigma^{-1} \underline{\bar{Y}}}_{-2 \Sigma^{-1} \underline{\bar{Y}}} \right] \\ &+ (1 - \omega) E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \left[ 2 \Sigma^{-1} \underline{\hat{\delta}} - \underbrace{\Sigma^{-1} \underline{\theta} - \Sigma^{-1} \underline{\theta}}_{-2 \Sigma^{-1} \underline{\theta}} \right] \middle| \underline{Y} \right] \\ &= 2 \omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \Sigma^{-1} (\underline{\hat{\delta}} - \underline{\bar{Y}}) + (1 - \omega) 2 \Sigma^{-1} E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) (\underline{\hat{\delta}} - \underline{\theta}) \middle| \underline{Y} \right] = 0 \end{aligned}$$

و چون  $\underline{\delta}$  تابعی از  $\underline{Y}$  می باشد داریم:

$$\begin{aligned} & \omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \underline{\hat{\delta}} - \omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \underline{\bar{Y}} + (1 - \omega) E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \underline{\hat{\delta}} \\ & - (1 - \omega) E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \underline{\theta} \middle| \underline{Y} \right] = 0 \\ \Rightarrow & \underline{\hat{\delta}}_B = \frac{\omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \underline{\bar{Y}} + (1 - \omega) E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \underline{\theta} \middle| \underline{Y} \right]}{E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right]} \\ &= \omega \underline{\bar{Y}} + (1 - \omega) \frac{E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \underline{\theta} \middle| \underline{Y} \right]}{E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right]} \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

حال با مشتق دوم گرفتن از (۵.۳) نسبت به  $\underline{\delta}$  داریم،

فصل سوم برآوردگرهای محدود شده در حالت چند متغیره

$$\begin{aligned}\frac{\partial E \left[ L_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\underline{\theta}; \underline{\delta}) \middle| \underline{Y} \right]}{\partial \underline{\delta}} &= 2\omega E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \Sigma^{-1} + 2(1 - \omega) \Sigma^{-1} E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] \\ &= 2\Sigma^{-1} E \left[ r \left( \|\underline{\theta}\|^2 \right) \middle| \underline{Y} \right] > 0\end{aligned}$$

در نتیجه  $\hat{\underline{\delta}}_B$  برابر کمترین مقدار خواهد بود. ■

در این قسمت برای بدست آوردن برآوردگر بیز، ابتدا فرض می کنیم توزیع پیشین روی  $\underline{\theta} \in \mathcal{R}^p, \Sigma > 0$  به صورت زیر باشد.

$$p(\underline{\theta}, \Sigma) \doteq p(\underline{\theta}|\Sigma)p(\Sigma).$$

(\*) قضیه ۳.۳

اگر  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$  و توزیع پیشین  $\underline{\mu}, \Sigma$  به صورت

$$\pi(\underline{\mu}, \Sigma) = \pi(\underline{\mu}|\Sigma) \pi(\Sigma) = N\left(\underline{\mu}|\underline{v}, \frac{1}{K}\Sigma\right) \times \mathcal{W}^{-1}(\Sigma|\psi, m)$$

باشد آنگاه توزیع پسین  $\underline{\mu}$  برای  $\bar{\underline{y}}, S$  معلوم به صورت

$$\frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(N+m+1)\right] |\Lambda|^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(N+m+1-p)\right] \left[1 + (N+K) (\underline{\mu} - \underline{\mu}^*)' \Lambda^{-1} (\underline{\mu} - \underline{\mu}^*)\right]^{\frac{1}{2}(N+m-1)}}$$

(۶.۳)

که در آن  $\underline{\mu}^* = \frac{1}{N+K} (N\bar{\underline{y}} + K\underline{v})$  و  $\Lambda = \left[ nS + \psi + \frac{NK}{N+K} (\bar{\underline{y}} - \underline{v}) (\bar{\underline{y}} - \underline{v})' \right]$  است بدست می آید.

**برهان:** همانطور که از فصل اول به یاد داریم توزیع توام  $\underline{\mu}, \Sigma$  را با عبارت (۳۵.۱) نمایش دادیم حال با

انتگرال گیری از عبارت (۳۵.۱) نسبت به  $\Sigma$  توزیع  $\underline{\mu}$  را بدست می آوریم.

برای راحتی کار تساویهای زیر را در نظر می گیریم.

$$\Lambda = \Psi + A + \frac{NK}{N+K} (\bar{\underline{y}} - \underline{v}) (\bar{\underline{y}} - \underline{v})',$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Phi)\Sigma^{-1} &= \text{tr} \left[ \Lambda + (N+K) (\underline{\mu} - \underline{\mu}^*) (\underline{\mu} - \underline{\mu}^*)' \right] \Sigma^{-1} \\ &= \left[ (N+K) \left[ \underline{\mu} - \frac{1}{N+K} (N\bar{\underline{y}} + K\underline{v}) \right]' \Sigma^{-1} \left[ \underline{\mu} - \frac{1}{N+K} (N\bar{\underline{y}} + K\underline{v}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \left[ \Psi + A + \frac{NK}{N+K} (\bar{\underline{y}} - \underline{v}) (\bar{\underline{y}} - \underline{v})' \right] \Sigma^{-1} \right] \end{aligned}$$

$$\int_{\underline{\Sigma} > 0} \frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}(N+m+p+2)} |\Lambda|^{\frac{1}{2}(N+m)}}{2^{\frac{1}{2}(N+m+p+1)} \pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p \left( \frac{N+m}{2} \right)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\Phi) \Sigma^{-1} \right\} d\Sigma \quad (۷.۳)$$

با توجه به لم (۳.۱) که در فصل اول آورده‌ایم انتگرال (۷.۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Lambda|^{\frac{1}{2}(N+m)}}{2^{\frac{1}{2}(N+m+p+1)} \pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p \left( \frac{N+m}{2} \right)} \int_{\Sigma > 0} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}(N+m+1+p+1)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\Phi) \Sigma^{-1} \right\} d\Sigma \\ &= \frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Lambda|^{\frac{1}{2}(N+m)} \Gamma_p \left( \frac{1}{2} (N+m+1) \right) |\Phi|^{-\frac{1}{2}(N+m+1)}}{\pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma_p \left( \frac{N+m}{2} \right)} \quad (۸.۳) \end{aligned}$$

از تعریف گامای چند متغیره (تعریف ۲۸.۱) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Lambda|^{\frac{1}{2}(N+m)} |\Phi|^{-\frac{1}{2}(N+m+1)} \pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{j=1}^p \Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+1) + \frac{1-j}{2} \right)}{\pi^{\frac{1}{2}p} \pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{j=1}^p \Gamma \left( \frac{N+m}{2} + \frac{1-j}{2} \right)} \\ &= \frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Lambda|^{\frac{1}{2}(N+m)} |\Phi|^{-\frac{1}{2}(N+m+1)}}{\pi^{\frac{1}{2}p}} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+1) \right) \cdot \Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+0) \right) \cdots \Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+2-p) \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+0) \right) \cdot \Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m-1) \right) \cdots \Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+1-p) \right)} \\ &= \frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} |\Lambda|^{\frac{1}{2}(N+m)} |\Phi|^{-\frac{1}{2}(N+m+1)}}{\pi^{\frac{1}{2}p}} \frac{\Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+1) \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} (N+m+1-p) \right)} \end{aligned}$$

حال با توجه به فرع ۱.۱ داریم

$$\frac{(N+K)^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(N+m+1)\right] |\Lambda|^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(N+m+1-p)\right] \left[1 + (N+K)(\underline{\mu} - \underline{\mu}^*)' \Lambda^{-1} (\underline{\mu} - \underline{\mu}^*)\right]^{\frac{1}{2}(N+m-1)}}$$

بنابراین نتیجه حاصل می شود. ■

حال در این قسمت فرض می کنیم توزیع پیشین  $(\underline{\theta}, \Sigma)$  به صورت زیر باشد.

$$\begin{aligned} \underline{\theta} | \Sigma &\sim N_p(\underline{B}\eta, K^{-1}\Sigma), \quad K > 0, \\ \Sigma &\sim W_p^{-1}(Q, m), \quad m > 2p, \end{aligned}$$

که در آن  $Q$  یک ماتریس معین مثبت است. توابع چگالی  $\underline{\theta} | \Sigma$  و  $\Sigma$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} p(\underline{\theta} | \Sigma) &\propto |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{K}{2}(\underline{\theta} - \underline{B}\eta)' \Sigma^{-1} (\underline{\theta} - \underline{B}\eta)\right], \\ p(\Sigma) &\propto |Q|^{-\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr} Q \Sigma^{-1}\right], \end{aligned}$$

آنگاه با توجه به قضیه ۳،۳ توزیع پیسین  $\underline{\theta}$ ، توزیع تی چندگانه (MT) بصورت زیر است.

$$\underline{\theta} | \bar{Y}, S \sim t_p(\underline{\theta}_*, \Lambda, N+m+1+p)$$

که تابع چگالی آن عبارتست از:

$$p(\underline{\theta} | \bar{Y}, S) = \frac{(N+K)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{N+m+1}{2}\right) |\Lambda|^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left(\frac{N+m+1-p}{2}\right)} \cdot \left[1 + (N+K)(\underline{\theta} - \underline{\theta}_*)' \Lambda^{-1} (\underline{\theta} - \underline{\theta}_*)\right]^{-\frac{1}{2}(N+m-1)} \quad (۹.۳)$$

که در آن  $\underline{\theta}_*$  و  $\Lambda$  به ترتیب برابرند با

$$\underline{\theta}_* = \frac{1}{N+K} (N\bar{Y} + K\underline{B}\eta)$$

$$\underline{\Lambda} = \left[ nS + Q + \frac{NK}{N+K} (\bar{Y} - \underline{B}\eta) (\bar{Y} - \underline{B}\eta)' \right], \quad n = N-1$$

بر اساس مطالبی که گفته شد، می‌توانیم فرم دقیق برآوردگر بیز را تحت توزیع پسین  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  محاسبه کنیم. اگر چه به خاطر وجود تابع وزنی  $r(\cdot)$  در برآوردگر  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  این فرم یک فرم کاملاً دقیق نخواهد بود.

آرشی (۲۰۰۹) مسئله را وقتی  $r(\|\underline{\theta}\|^2) = 1$  مورد بررسی قرار داد. ما قصد داریم برای حالت  $r(\|\underline{\theta}\|^2) = \underline{\theta}'\underline{\theta}$  مسئله را حل کنیم. از آنجا که محاسبه امید ریاضی تابع پسین از تابع  $r(\cdot)$  با استفاده از توزیع  $MT$  آسان نیست، ترکیب مقیاسی از توزیع  $MT$  را به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌دهیم.

اگر  $\underline{u} \sim t_p(\underline{\mu}, V, \gamma_0)$  باشد تابع چگالی آن می‌تواند صورت آمیخته مقیاسی توزیع‌های نرمال نوشته شود. به عبارتی

$$\begin{aligned} f(\underline{u}) &= \int_0^\infty \frac{|\omega^2 V|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\omega^2}(\underline{u} - \underline{\mu})' V^{-1}(\underline{u} - \underline{\mu})\right] h(\omega) d\omega \\ &= \int_0^\infty \mathcal{N}_p(\underline{\mu}, \omega^2 V) h(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

که آمیزه‌ای از توزیع نرمال چندگانه  $\mathcal{N}_p(\underline{\mu}, \omega^2 V)$  و  $\omega$  که از توزیع گامای معکوس با تابع چگالی زیر است.

$$h(\omega) = \frac{2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^{\frac{\gamma_0}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)} \omega^{-(\gamma_0+1)} \exp\left(\frac{-\gamma_0}{2\omega^2}\right) \quad (۱۱.۳)$$

یا به طور مشابه می‌توان گفت،  $\gamma_0 \omega^{-2}$  از توزیع کی دو با  $\gamma_0$  درجه آزادی پیروی می‌کند.

محاسبات فوق به صورت تکنیک شرطی کردن در زیر خلاصه شده است.

لم ۱.۳ (کیبریا و جردر، ۲۰۰۶)

اگر  $\underline{X}|\Omega = \omega \sim \mathcal{N}_p(\underline{\mu}, \omega^2 \Sigma)$  و  $\Omega$  دارای توزیع گامای معکوس با پارامتر  $\gamma_0$  باشد آنگاه  $\underline{X} \sim t_p(\underline{\mu}, V, \gamma_0)$  می‌باشد.

فصل سوم برآوردهای محدود شده در حالت چند متغیره

حال با توجه به لم ۱،۳ برای  $\underline{\theta}|\underline{Y}, S \sim t_p(\underline{\theta}_*, \Lambda, N + m + 1 - p)$  داریم:

$$(\underline{\theta}|\underline{Y}, S)|\Omega = \omega \sim \mathcal{N}_p(\underline{\theta}_*, \omega^2 \Lambda) \quad (۱۲.۳)$$

### ۲.۲.۳ روش CEB

همان طور که در فصل یک اشاره شد برای محاسبه برآوردهای CEB کافی است برآوردهای CB را بدست آورده و برآوردهای پارامترهای توزیع پیشین را در آن جایگذاری کنیم. در این قسمت با توجه به رابطه ۵.۳، صورت برآوردهای CB را به ازای  $r(\|\underline{\theta}\|^2) = \underline{\theta}'\underline{\theta}$  بدست می آوریم. برای این منظور با استفاده از رابطه (۱۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} E[r(\|\underline{\theta}\|^2)|\underline{Y}] &= E(\underline{\theta}'\underline{\theta}|\underline{Y}) \\ &= EE[(\underline{\theta}'\underline{\theta}|\underline{Y})|\Omega = \omega] \\ &= E\left\{[\text{tr cov}(\underline{\theta}|\underline{Y})|\Omega = \omega] + (E[(\underline{\theta}|\underline{Y})|\Omega = \omega])'(E[(\underline{\theta}|\underline{Y})|\Omega = \omega])\right\} \\ &= E(\omega^2 \text{tr}(\Lambda) + \underline{\theta}'_* \underline{\theta}_*) \\ &= v \text{tr}(\Lambda) + \underline{\theta}'_* \underline{\theta}_* \end{aligned} \quad (۱۳.۳)$$

زیرا  $E(\omega^2) = v$  که در آن  $\gamma_0 = N + m + 1 - p$ ،  $v = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 2}$ ، حال برای محاسبه

$$E[r(\|\underline{\theta}\|^2)\underline{\theta}|\underline{Y}] = E[(\underline{\theta}'\underline{\theta})\underline{\theta}|\underline{Y}]$$

با استفاده از (۱۲.۳) و با تغییر متغیر  $\underline{x} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta}$  و لم ۱.۶ داریم:

$$\begin{aligned}
 E[(\underline{\theta}'\underline{\theta})\underline{\theta}|\underline{Y}] &= EE\{[(\underline{\theta}'\underline{\theta})\underline{\theta}|\underline{Y}]\Omega = \omega\} \\
 &= EE\left\{\left[(\underline{x}'\Lambda\underline{x})\Lambda^{\frac{1}{2}}\underline{x}\right]\underline{Y}\middle|\Omega = \omega\right\} \\
 &= E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}E\left[(\underline{x}'\Lambda\underline{x})\underline{x}|\underline{Y}\right]\middle|\Omega = \omega\right\} \\
 &= E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}E\left\{\left[(\underline{x}'\Lambda\underline{x})\left(\underline{x} - \Lambda^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta}_* + \Lambda^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta}_*\right)\right]\underline{Y}\right\}\middle|\Omega = \omega\right\} \\
 &= E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}E\left\{\left[(\underline{x}'\Lambda\underline{x})\left(\underline{x} - \Lambda^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta}_*\right)\right]\underline{Y}\right\}\middle|\Omega = \omega\right\} \\
 &\quad + E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}E\left\{\left[(\underline{x}'\Lambda\underline{x})\left(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta}_*\right)\right]\underline{Y}\right\}\middle|\Omega = \omega\right\} \\
 &\stackrel{6.1}{=} E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}E\left\{\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial\underline{x}}(\underline{x}'\Lambda\underline{x})\right]\underline{Y}\right\}\middle|\Omega = \omega\right\} \\
 &\quad + E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}E\left\{[(\underline{x}'\Lambda\underline{x})|\underline{Y}]\Omega = \omega\right\}\underline{\theta}_*\right\} \\
 &= E\left\{\Lambda^{\frac{1}{2}}E\left\{[\omega^2(2\Lambda\underline{x})|\underline{Y}]\Omega = \omega\right\}\right\} + E\{E[(\underline{\theta}'\underline{\theta})|\underline{Y}]\Omega = \omega\}\underline{\theta}_* \\
 &= E\left\{2\Lambda^{\frac{1}{2}}\omega^2\Lambda E\{(\underline{x}|\underline{Y})|\Omega = \omega\}\right\} + E\{[\omega^2\text{tr}(\Lambda) + \underline{\theta}'_*\underline{\theta}_*]\underline{\theta}_*\} \\
 &= E\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\omega^2\Lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta}_* + v\text{tr}(\Lambda)\underline{\theta}_* + \underline{\theta}'_*\underline{\theta}_*\underline{\theta}_*\right) \\
 &= 2v\Lambda\underline{\theta}_* + v\text{tr}(\Lambda)\underline{\theta}_* + \underline{\theta}'_*\underline{\theta}_*\underline{\theta}_* \tag{۱۴.۳}
 \end{aligned}$$

با جایگذاری روابط (۱۳.۳) و (۱۴.۳) در رابطه (۳.۳) برآوردگر CB به صورت زیر بدست می آید.

$$\hat{\underline{\theta}}_{CB} = \omega\bar{\underline{Y}} + (1 - \omega)\frac{2v\Lambda\underline{\theta}_* + v\text{tr}(\Lambda)\underline{\theta}_* + \underline{\theta}'_*\underline{\theta}_*\underline{\theta}_*}{v\text{tr}(\Lambda)\underline{\theta}_* + \underline{\theta}'_*\underline{\theta}_*} \tag{۱۵.۳}$$

حال اگر بجای  $B\underline{\eta}$ ،  $\hat{\underline{\theta}}$  را که در رابطه (۱.۳) بدست آورده ایم جایگذاری کنیم برآوردگر CEB به شرح زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{CEB} = \omega \bar{Y} + \frac{(1 - \omega)}{\left[ v \operatorname{tr} \left( nS + Q + \frac{NK}{N+K} (\bar{Y} - B\hat{\eta}) (\bar{Y} - B\hat{\eta})' \right) + (N\bar{Y} + KB\hat{\eta})' (N\bar{Y} + KB\hat{\eta}) \right]} \\ \times \left\{ \frac{2}{N+K} v \left( nS + Q + \frac{NK}{N+K} (\bar{Y} - B\hat{\eta}) (\bar{Y} - B\hat{\eta})' \right) (N\bar{Y} + KB\hat{\eta}) \right. \\ \left. + \frac{1}{N+K} v \operatorname{tr} \left( nS + Q + \frac{NK}{N+K} (\bar{Y} - B\hat{\eta}) (\bar{Y} - B\hat{\eta})' \right) (N\bar{Y} + KB\hat{\eta}) \right. \\ \left. + \frac{1}{(N+K)^3} (N\bar{Y} + KB\hat{\eta})' (N\bar{Y} + KB\hat{\eta}) (N\bar{Y} + KB\hat{\eta}) \right\} \end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

همانطور که مشاهده می‌شود محاسبه مخاطره برآوردگر CEB تحت تابع زیان BL که توسط عبارت (۱۶.۳) نشان داده شده است کار ساده‌ای نیست، از طرف دیگر ماتریس B معرفی شده در (۱.۳) نقش اساسی در نمایش تابع مخاطره دارد. در ادامه برای نمایش تابع مخاطره از روش شبیه سازی بوت استرپ استفاده می‌کنیم.

آرشی (۲۰۰۹) مدل بیزی ارائه شده در این فصل را برای  $N=۲۵$  مشاهده (که در اندرسن (۲۰۰۳) آمده و از فرت (۱۹۲۱) گرفته شده است) که شامل اندازه های طول و عرض سر پسر اول و دوم خانواده بود، برازش داد. ما حال با توجه به روش شبیه سازی بوت استرپ، به تعداد S بار از  $N=۲۵$  مشاهده داده شده نمونه مجدد می‌گیریم و تابع مخاطره در این حالت با استفاده از فرمول زیر قابل محاسبه است.

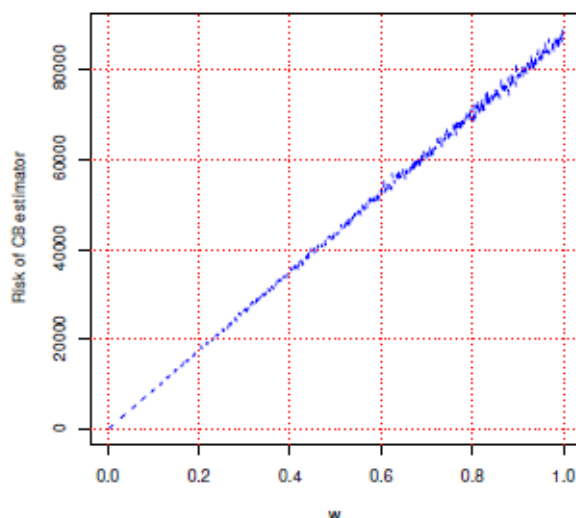
$$R_{\omega, \bar{Y}}^{Ip}(\underline{\theta}, \underline{\delta}) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s L_{\omega, \bar{Y}}^{Ip}(\underline{\theta}, \underline{\delta})$$

به ازای مقادیر معلوم

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v = 5, K = 0.001$$

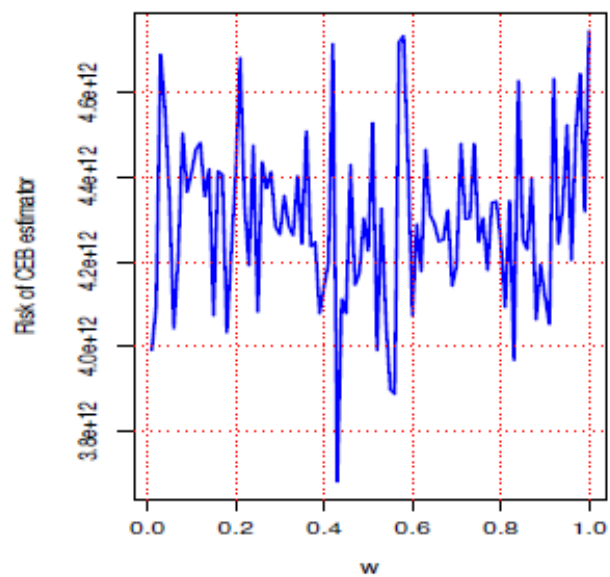
نمودار تابع مخاطره CB در شکل ۱.۳ و نمودار تابع مخاطره CEB در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می کنید CEB هموار نیست بنابراین برآوردهای بیز در این شرایط پیشنهاد نمی شود. و تابع مخاطره CB با افزایش  $\omega$  افزایش می یابد، بعبارت دیگر با افزایش  $\omega$  اثر نیکویی برآزش بیشتر و اثر خطای برآورد کمتر می شود.

از طرف دیگر مخاطره های محاسبه شده برای برآوردهای CEB و CB بزرگتر از مخاطره MLE برای B داده شده می باشد. لازم به یادآوری است که این نتایج فقط برای این مثال خاص درست می باشد، در شرایط دیگر ممکن است جواب متفاوتی بدست آید.



شکل ۱.۳ مخاطره برآوردهای CB

فصل سوم برآوردهای محدود شده در حالت چند متغیره



شکل ۲.۳. مخاطره برآوردگر CEB

## فصل چهارم

برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع

زیان متعادل موزون

## ۱.۴ مقدمه

همانند فصل قبل در این فصل نیز فرض می‌کنیم  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \stackrel{iid}{\sim} N_p(\underline{\theta}, \Sigma)$  که در آن  $\underline{\theta} \in \mathcal{R}^p$  بردار میانگین و  $\Sigma > 0$  ماتریس کواریانس معین مثبت و نامعلوم می‌باشند. برآوردگر ML پارامتر  $\underline{\theta}$  برابر است با

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (۱.۴)$$

که UE می‌باشد.

در این فصل فرض می‌کنیم زیان مورد استفاده در اندازه‌گیری دقت برآوردگرها، همان تابع زیان متعادل موزون معرفی شده در ۴.۱ به صورت زیر باشد.

$$L_{\omega, \underline{\delta}_0}^W(\underline{\theta}; \underline{\delta}) = \omega r(\|\underline{\theta}\|^2) (\underline{\delta} - \underline{\delta}_0)' W (\underline{\delta} - \underline{\delta}_0) + (1 - \omega) r(\|\underline{\theta}\|^2) (\underline{\delta} - \underline{\theta})' W (\underline{\delta} - \underline{\theta}) \quad (۲.۴)$$

حال با انجام یک سری محدودیت خطی بر روی فضای پارامتر، برآوردگر محدود شده پارامتر  $\underline{\theta}$  را بدست می‌آوریم. همانطور که در فصل اول نیز اشاره شده مدل محدود شده با اعمال قید بر روی فضای پارامتر آن بدست می‌آید و برآوردگری که برای پارامترها، تحت این مدل محاسبه می‌شود برآوردگر محدود شده است.

فرضیه  $H_0: \underline{\theta} = B\underline{\eta}$  را بعنوان قید اعمال شده بر روی فضای پارامتر در نظر می‌گیریم. که در آن  $B$  یک ماتریس معلوم  $p \times r$  از پیش تعیین شده و  $\underline{\eta} \in \mathcal{R}^r$  است. در این حالت برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم  $\underline{\theta}$  همانطور که در قضیه ۱.۳ نیز مطرح شده به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\hat{\underline{\theta}} = B\hat{\underline{\eta}} = B(B'S^{-1}B)'B'S^{-1}\bar{Y} \quad (۳.۴)$$

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون

با بکارگیری تابع زیان (۲.۴) که در آن  $\bar{Y}$  به صورت (۱.۴) معرفی شده است و با مشتق‌گیری از آن نسبت به  $\underline{\delta}$  و برابر صفر قرار دادن آن برآوردگر بیز به شرح ذیل بدست می‌آید.

$$\hat{\underline{\delta}}_B = \omega \bar{Y} + (1 - \omega) \frac{E[r(\|\underline{\theta}\|^2) \underline{\theta} | \underline{Y}]}{E[r(\|\underline{\theta}\|^2) | \underline{Y}]} \quad (۴.۴)$$

که در قضیه ۳.۲ اثبات شده است. با فرض  $r(\|\underline{\theta}\|^2) = 1$  برآوردگر بیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\hat{\underline{\delta}}_B = \omega \bar{Y} + (1 - \omega) E[\underline{\theta} | \underline{Y}] \quad (۵.۴)$$

همانند فصل سه توزیع پیشین را توزیع نرمال-ویشارت معکوس در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{aligned} \underline{\theta} | \Sigma \sim N_p(\underline{B}\eta, K^{-1}\Sigma), \quad K > 0, \\ \Sigma \sim W_p^{-1}(Q, m), \quad m > 2p, \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

که در آن  $Q$  به عنوان یک ماتریس معین مثبت تعریف می‌شود. آنگاه توزیع پسین  $\underline{\theta}$  طبق قضیه (۳.۳) توزیع MT خواهد بود.

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_* &= \frac{1}{N + K} (N\bar{Y} + KB\eta) \\ \Lambda &= \left[ nS + Q + \frac{NK}{N + K} (\bar{Y} - B\eta)(\bar{Y} - B\eta)' \right], \text{ و } n = N - 1 \end{aligned}$$

در نتیجه برآوردگر  $\hat{\underline{\delta}}_{CB}$  به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\delta}}_{CB} &= \omega \bar{Y} + (1 - \omega) \frac{1}{N + K} (N\bar{Y} + KB\eta) \\ &= \frac{(N + K)\omega \bar{Y} + (1 - \omega) (N\bar{Y} + KB\eta)}{N + K} \\ &= \frac{\omega N\bar{Y} + \omega K\bar{Y} + N\bar{Y} + KB\eta - \omega N\bar{Y} - \omega KB\eta}{N + K} \\ &= \frac{\omega K + N}{N + K} \bar{Y} + \frac{(1 - \omega)K}{N + K} B\eta \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

که در آن  $K$  مجهول است. برآوردگر بیز پارامتر  $\theta$ ، یعنی  $\hat{\delta}_{CB}$  به پارامترهای مجهول  $\eta$ ،  $K$  وابسته است که برآوردگر  $B\eta$ ، پارامترهای توزیع پیشین می‌باشند. با جایگذاری این پارامترها در برآوردگر بیز پارامتر  $\theta$ ، برآوردگر بیز تجربی پارامتر  $\theta$  بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{CEB}(k) &= \frac{\omega K + N}{N + K} \bar{Y} + \frac{(1 - \omega)K}{N + K} \hat{\theta} \\ &= \frac{\omega K \bar{Y} - K \bar{Y} + K \bar{Y} + N \bar{Y}}{N + K} + \frac{(1 - \omega)K}{N + K} \hat{\theta} \\ &= -\frac{(1 - \omega)K}{N + K} \bar{Y} + \bar{Y} + \frac{(1 - \omega)K}{N + K} \hat{\theta} \\ &= \bar{Y} - \frac{(1 - \omega)K}{N + K} (\bar{Y} - \hat{\theta})\end{aligned}\quad (۸.۴)$$

از آنجایی که قصد ما بدست آوردن برآوردگری برای  $\theta$ ، تحت فرضیه  $H_0$  می‌باشد. بنابراین احتیاج به برآورد  $K$  داریم.

می‌دانیم آماره آزمونی که راثو<sup>۱</sup> (۱۹۵۹) برای آزمون فرض  $H_0: \theta = B\eta$  در مقابل  $H_1: \theta \neq B\eta$  پیشنهاد کرده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T^2 = N \bar{Y}' C (C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y}, \quad m = N - q, \quad q = p - r \quad (۹.۴)$$

که در آن  $C$  یک ماتریس  $p \times q$  است بطوریکه  $C'B = 0$ . (برای اطلاعات بیشتر به سیرواستاوا و صالح ۲۰۰۵ مراجعه کنید)

از طرفی

$$N \bar{Y}' C (C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y} \sim \chi_q^2(\Delta^2)$$

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زبان متعادل موزون

که  $\Delta^2 = N\theta' C(C' \Sigma C) C' \bar{Y}$  همچنین با توجه به قضیه ۱.۷ چون  $S \sim W_p(\Sigma, n)$  و  $C$  یک ماتریس  $p \times q$

است، پس  $C' S C \sim W_p(C' \Sigma C, n)$ . بنابراین با در نظر گرفتن  $a = N^{\frac{1}{2}} C' \bar{Y}$  در قضیه ۱.۷ و با توجه به قضیه

۳.۵. ۲ ماردیا (۱۳۷۶) داریم:

$$\frac{N \bar{Y}' C(C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y}}{N \bar{Y}' C(C' S C)^{-1} C' \bar{Y}} \sim \chi_m^2, \quad m = n - q + 1$$

که می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} T^2 &= N \bar{Y}' C(C' S C)^{-1} C' \bar{Y} \\ &= \frac{N \bar{Y}' C(C' S C)^{-1} C' \bar{Y}}{N \bar{Y}' C(C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y}} N \bar{Y}' C(C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y} \\ &= \frac{N \bar{Y}' C(C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y}}{\left[ \frac{N \bar{Y}' C(C' \Sigma C)^{-1} C' \bar{Y}}{N \bar{Y}' C(C' S C)^{-1} C' \bar{Y}} \right]} \sim \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

که صورت و مخرج مستقلند. (قضیه ۳.۵. ۲ ماردیا را ببینید.) پس

$$\mathcal{L}_N = \frac{m}{q} T^2 \sim F_{q,m}(\Delta^2) \quad (۱۱.۴)$$

که  $F_{q,m}(\Delta^2)$  نشان دهنده توزیع فیشر غیر مرکزی با  $(q, m)$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $\Delta^2$  است.

از طرفی

$$\frac{m}{q} (1 + K)^{-1} N \bar{Y}' C(C' S C)^{-1} C' \bar{Y} = (1 + K)^{-1} \mathcal{L}_N \sim F_{q,m}$$

لذا کمیت مجهول با توجه به لم ۱.۵

$$E\left(\frac{1}{F_{q,m}}\right) = (1 + K) E(\mathcal{L}_N^{-1}) = \frac{q}{q - 2} \quad q > 2, p > r + 2$$

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون

بنابراین  $(1 + K)$  می‌تواند توسط مضربی از  $\mathcal{L}_N^{-1}$  برآورد شود. بطور کلی فرض کنید  $g(\mathcal{L}_N)$  یک تابع حقیقی مقدار از  $\mathcal{L}_N$  و یک برآوردگر از  $(1 + K)$  باشد، آنگاه برآوردگر ۸.۴ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{CEB}(K) &= \bar{Y} - g(\mathcal{L}_N)(\bar{Y} - \hat{\theta}) \\ &= \hat{\theta} + \{1 - g(\mathcal{L}_N)\}(\bar{Y} - \hat{\theta})\end{aligned}$$

در ادامه مطالب به ازای  $g(\mathcal{L}_N)$  های مختلف سه برآوردگر بدست می‌آوریم و سپس مخاطره آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. (برای آگاهی بیشتر در خصوص آماره آزمون و برآوردگر  $g(\mathcal{L}_N)$  به مرجع شماره [۴] مراجعه کنید).

## ۴.۲ معرفی برآوردگرها

در این بخش سه انتخاب برای  $g(\mathcal{L}_N)$  در نظر می‌گیریم. و سه برآوردگر برای بردار میانگین  $\theta$  بدست خواهیم آورد.

### ۱. برآوردگر محدود نشده

اگر  $g(\mathcal{L}_N) = 0$  آنگاه

$$\hat{\theta}_{EB}(\tau) = \bar{Y}$$

که همان برآوردگر ML برای پارامتر  $\theta$  است.

### ۲. برآوردگر محدود شده

اگر  $g(\mathcal{L}_N) = 1$  آنگاه

$$\hat{\theta}(\tau) = \hat{\theta}$$

که برآوردگر تحت فرضیه  $H_0$  را نتیجه می‌دهد.

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زبان متعادل موزون

همان طور که در فصل ۲ و ۳ اشاره شد گاهی اوقات از صحت درستی فرضیه  $H_0$  اطلاع نداریم و از آن جایی که درستی یا نادرستی فرضیه  $H_0$  تأثیر بسزایی در انتخاب برآوردگر مناسب دارد بهتر است طبق راهکار فیشر، ابتدا فرضیه  $H_0$  را آزمون و سپس با مشخص شدن نتیجه آزمون یکی از دو برآوردگر UE و RE را انتخاب کنیم.

### ۳. برآوردگر آزمون اولیه

طبق این استراتژی ابتدا مجموع فرضیه  $\begin{cases} H_0 : \underline{\theta} = B\underline{\eta} \\ H_1 : \underline{\theta} \neq B\underline{\eta} \end{cases}$  را آزمون می‌کنیم. بدین صورت اگر فرضیه  $H_0$  رد شود برآوردگر غیر محدود شده انتخاب می‌شود و چنانچه فرضیه  $H_0$  پذیرفته شود برآوردگر محدود شده را بعنوان برآوردگر  $\underline{\theta}$  در نظر می‌گیریم. پس اگر فرض کنیم،

$$\begin{aligned} g(\mathcal{L}_N) &= I(\mathcal{L}_N \leq F_{q,m}(\alpha)) \\ &= I\left(T^2 \leq \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha)\right) \\ &= I(T^2 \leq a_\alpha) = I_{a_\alpha}(T^2) a_\alpha = \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \end{aligned} \quad (۱۲.۴)$$

آنگاه برآوردگر آزمون اولیه به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\theta}}^{PT}(\hat{\tau}) &= \bar{\underline{Y}} - (\bar{\underline{Y}} - \hat{\underline{\theta}}) I_{a_\alpha}(T^2) \\ &= \bar{\underline{Y}} (1 - I_{a_\alpha}(T^2)) + \hat{\underline{\theta}} I_{a_\alpha}(T^2) \end{aligned}$$

که  $\mathcal{L}_{N,\alpha}$  نقطه  $100\alpha$  درصد بالایی توزیع  $F_{q,m}$  و  $I(A)$  تابع نشانگر از مجموعه  $A$  است.

رفتار برآوردگر PT به اندازه آزمون یا سطح معنی داری  $(0 < \alpha < 1)$ ، بستگی دارد. بسته به نتیجه آزمون،  $\hat{\underline{\theta}}^{PT}$  به یکی از نقاط مرزی  $\hat{\underline{\theta}}$  یا  $\bar{\underline{Y}}$  تبدیل می‌شود.

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون

قبل از اینکه محاسبات مربوط به اریبی و مخاطره را انجام دهیم توجه به این نکته که توزیع  $T^2$  طبق رابطه (۱۶.۱) و با توجه به آماره آزمون رانو که در آن  $T^2 = N\bar{Y}'C(C'\Sigma C)^{-1}C'\bar{Y}$  به صورت زیر می باشد ضروری است.

$$\begin{aligned} T^2 &= N\bar{Y}'C(C'\Sigma C)^{-1}C'\bar{Y} \\ &= N\bar{Y}'\Sigma^{-\frac{1}{2}}B_2(B_2'WB_2)^{-1}B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\bar{Y} \\ &= \underline{Z}_2'U_{22}^{-1}\underline{Z}_2, \underline{Z}_2 = N^{\frac{1}{2}}B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\bar{Y}, U_{22} = B_2'WB_2 \end{aligned}$$

که در آن  $U_{22} \sim W_q(I, n)$  مستقل از  $\underline{Z}_2 \sim N_q(\xi_2, I)$  است، و  $\xi_2$  پارامتر غیر مرکزی می باشد که به صورت زیر تعریف می شود

$$\xi_2 = N^{\frac{1}{2}}B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\underline{\theta} = N^{\frac{1}{2}}(C'\Sigma C)^{-\frac{1}{2}}C'\underline{\theta} \quad (۱۳.۴)$$

حال به بررسی رفتار برآوردگرها از نظر اریبی می پردازیم.

#### ۳.۴ اریبی برآوردگرها

قضیه ۱.۴ (قاری ۱۳۸۷)

اریبی برآوردگرهای معرفی شده  $U$ ،  $R$  و  $PT$  به ترتیب به صورت زیر می باشد.

$$۱) B_1(\hat{\underline{\theta}}_1) = B_1(\bar{\underline{Y}}) = 0$$

$$۲) B_2(\hat{\underline{\theta}}_2) = B_2(\hat{\underline{\theta}}) = -H\underline{\theta}$$

$$۳) B_3(\hat{\underline{\theta}}^{PT}) = -H\underline{\theta}G_{q+2,m}\left(\frac{q}{q+2}F_{q+2,m}(\alpha); \Delta^2\right)$$

که در آن:  $\Delta^2 = N\underline{\theta}'C(C'\Sigma C)^{-1}C'\underline{\theta}$ ،  $\alpha = \frac{q-2}{m+2}$ ،  $q = p - r$ ،  $m = N - q$ ،  $H = \Sigma C(C'\Sigma C)^{-1}$  و

$G_{q+2,m}\left(\frac{q}{q+2}F_{q+2,m}(\alpha); \Delta^2\right)$  تابع توزیع غیر مرکزی فیشر با  $q + 2$  و  $m$  درجه آزادی و پارامتر غیر

مرکزی  $\Delta^2$  است.

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زبان متعادل موزون

برهان: به راحتی مشاهده می شود.

$$\mathcal{B}_1(\bar{X}) = E(\bar{X} - \underline{\theta}) = E(\underline{\theta} - \underline{\theta}) = 0$$

و برای اریبی برآوردگر محدود شده با استفاده از رابطه (۳.۴) و لم (۴.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2(\hat{\underline{\theta}}) &= E(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}) \\ &= E(\underline{B}(\underline{B}'\underline{S}^{-1}\underline{B})^{-1}\underline{B}'\underline{S}^{-1}\bar{\underline{Y}} - \underline{\theta}) \\ &= E(\hat{\underline{A}}\bar{\underline{Y}} - \underline{\theta}) = E((\underline{I} - \hat{\underline{H}})\bar{\underline{Y}} - \underline{\theta}) \\ &= E(\bar{\underline{Y}} - \hat{\underline{H}}\bar{\underline{Y}} - \underline{\theta}) = -E(\hat{\underline{H}}\bar{\underline{Y}})\end{aligned}$$

از آنجایی که  $\hat{\underline{H}}$  تابعی از  $\underline{S}$  است و  $\bar{\underline{Y}}$  و  $\underline{S}$  مستقلند، پس  $\hat{\underline{H}}$  و  $\bar{\underline{Y}}$  نیز مستقل خواهند بود، در نتیجه با استفاده از لم (۴.۱) قسمت (۱) عبارت فوق را می توان به شکل زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2(\hat{\underline{\theta}}) &= -E(\hat{\underline{H}}\bar{\underline{Y}}) \\ &= -E(\hat{\underline{H}})E(\bar{\underline{Y}}) \\ &= -\underline{H}\underline{\theta}\end{aligned}$$

حال برای محاسبه اریبی PTE طبق لم (۴.۱) و رابطه (۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3(\hat{\underline{\theta}}^{PT}) &= E[\bar{\underline{Y}} - (\bar{\underline{Y}} - \hat{\underline{\theta}})\underline{I}_{a_\alpha}(T^2)] - \underline{\theta} \\ &= -E[(\bar{\underline{Y}} - \hat{\underline{\theta}})\underline{I}_{a_\alpha}(T^2)] \\ &= -E[(\bar{\underline{Y}} - (\underline{I} - \hat{\underline{H}})\bar{\underline{Y}})\underline{I}_{a_\alpha}(T^2)] \\ &= -E[\hat{\underline{H}}\bar{\underline{Y}}\underline{I}_{a_\alpha}(T^2)]\end{aligned}$$

با شرطی کردن عبارت فوق روی  $\bar{\underline{Y}}$  و با توجه به اینکه  $\hat{\underline{H}}$  و  $\bar{\underline{Y}}$  از هم مستقلند، همچنین با توجه به قسمت

(۱) لم (۴.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3(\hat{\underline{\theta}}^{PT}) &= -E[E(\hat{H}\bar{Y}I_{a_\alpha}(T^2)|\bar{Y})] \\ &= E[E(\hat{H}|\bar{Y})\bar{Y}I_{a_\alpha}(T^2)] \\ &= -E[H\bar{Y}I_{a_\alpha}(T^2)]\end{aligned}$$

در این قسمت با بکارگیری روابط (۱۷.۱) و (۱۳.۴) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3(\hat{\underline{\theta}}^{PT}) &= -E\left[\Sigma^{\frac{1}{2}}B_2B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\bar{Y}I_{a_\alpha}(\underline{Z}_2'U_{22}^{-1}\underline{Z}_2)\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{N}}\Sigma^{\frac{1}{2}}B_2E\left[N^{\frac{1}{2}}B_2'\Sigma^{-\frac{1}{2}}\bar{Y}I_{a_\alpha}(\underline{Z}_2'U_{22}^{-1}\underline{Z}_2)\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{N}}\Sigma^{\frac{1}{2}}B_2E\left[\underline{Z}_2I_{a_\alpha}(\underline{Z}_2'U_{22}^{-1}\underline{Z}_2)\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{N}}\Sigma^{\frac{1}{2}}B_2E\left[\underline{Z}_2I_{a_\alpha}\left(\frac{\underline{Z}_2'U_{22}^{-1}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2'\underline{Z}_2}\underline{Z}_2'\underline{Z}_2\right)\right]\end{aligned}$$

از آنجایی که می دانیم  $\underline{Z}_2 \sim N_q(\xi_2, I)$  مستقل از  $\chi_m^2$  از  $\frac{\underline{Z}_2'\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2'U_{22}^{-1}\underline{Z}_2} \sim \chi_m^2$  است. (طبق قضیه ۳.۶ از سریواستاوا و

خطری (۱۹۷۹)) با بکارگیری قضیه ۱۰.۱ و با فرض  $\phi(W'W) = I_{a_\alpha}(\underline{Z}_2'\underline{Z}_2)$  می توان نتیجه گرفت:

$$\mathcal{B}_3(\hat{\underline{\theta}}^{PT}) = -\frac{1}{\sqrt{N}}\Sigma^{\frac{1}{2}}B_2\xi_2E\left[I_{a_\alpha}\left(\frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2}\right)\right]$$

با جایگذاری مقادیر  $B_2$  و  $\xi_2$  اریبی برآوردگر آزمون اولیه به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3(\hat{\underline{\theta}}^{PT}) &= -\frac{1}{\sqrt{N}}N^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}C(C'\Sigma C)^{-\frac{1}{2}}(C'\Sigma C)^{-\frac{1}{2}}C'\underline{\theta}E\left[I_{a_\alpha}\left(\frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2}\right)\right] \\ &= -\Sigma C(C'\Sigma C)^{-1}C'\underline{\theta}P\left[\frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \frac{q}{m}F_{q,m}(\alpha)\right] \\ &= -H\underline{\theta}P\left[\frac{m}{q+2}\frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \frac{qm}{m(q+2)}F_{q,m}(\alpha)\right] \\ &= -H\underline{\theta}P\left[F_{q+2,m}(\Delta^2) < \frac{q}{q+2}F_{q,m}(\alpha)\right] \\ &= -H\underline{\theta}G_{q+2,m}\left(\frac{q}{q+2}F_{q,m}(\alpha); \Delta^2\right)\end{aligned}$$

■

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون

نکته: برای  $\alpha = 1$  اریبی  $\hat{\theta}^{PT}$  برابر با اریبی برآوردگر غیر محدود شده یعنی  $\bar{Y}$  است، در حالی که برای

$\alpha = 0$ ، اریبی  $\hat{\theta}^{PT}$  برابر با اریبی برآوردگر محدود شده یعنی  $\hat{\theta}$  است.

#### ۴.۴ محاسبه مخاطره برآوردگرهای مطرح شده

در این قسمت مخاطره برآوردگرهای ارائه شده را با استفاده از تابع زیان متعادل وزنی (۴.۲) محاسبه می‌کنیم.

(\*) قضیه ۴.۲ مخاطره برآوردگرهای  $U$ ،  $R$  و  $PT$  به ترتیب عبارتند از:

$$۱) R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\bar{Y}, \underline{\theta}) = (1 - \omega) \frac{1}{N} p$$

$$\begin{aligned} ۲) R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\theta}, \underline{\theta}) &= (1 - \omega) E \left[ (\hat{\theta} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \underline{\theta}) \right] + \omega E \left( \bar{Y}' H' \Sigma^{-1} H \bar{Y} \right) \\ &= \frac{(1 - \omega)}{N} \left( p - \frac{q(n - p - 1)}{n - q - 1} + \frac{n - q + r - 1}{n - q - 1} \Delta^2 \right) \\ &\quad + \frac{\omega}{N} \left( q + \Delta^2 + \frac{r(q + \Delta^2)}{(m - 2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳) R_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}^{PT}, \underline{\theta}) &= (1 - \omega)E \left[ (\hat{\underline{\theta}}^{PT} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\hat{\underline{\theta}}^{PT} - \underline{\theta}) \right] + \omega E \left( \underline{Y}' H' \Sigma^{-1} H \underline{Y} \right) + \omega(1 - \omega)^2 \\
 &\times E \left[ I \left( T^2 < \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) (\underline{Y} - \hat{\underline{\theta}})' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \hat{\underline{\theta}}) \right] \\
 &= \frac{(1 - \omega)}{N} \left\{ p - q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \right. \\
 &+ \frac{r}{m-2} G_{q+2,m} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \Bigg] \\
 &+ \Delta^2 \left[ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &- G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \\
 &+ \left. \left. \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right\} \\
 &+ \frac{\omega(1 - \omega)^2}{N} \left\{ q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \right. \\
 &+ \frac{r}{m-2} G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \Bigg] \\
 &+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

برهان: ۱) مخاطره UE عبارت است از:

$$R_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\underline{Y}, \underline{\theta}) = \omega E \left[ (\underline{Y} - \underline{\delta}_0)' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \underline{\delta}_0) \right] + (1 - \omega) E \left[ (\underline{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \underline{\theta}) \right]$$

$\underline{\delta}_0$  یک برآوردگر دلخواه از  $\underline{\theta}$  می باشد. با در نظر گرفتن  $\underline{\delta}_0 = \underline{Y}$  داریم:

$$\begin{aligned}
 R_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\underline{Y}, \underline{\theta}) &= \omega E \left[ (\underline{Y} - \underline{Y})' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \underline{Y}) \right] + (1 - \omega) E \left[ (\underline{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \underline{\theta}) \right] \\
 &= (1 - \omega) E \left[ (\underline{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\underline{Y} - \underline{\theta}) \right]
 \end{aligned}$$

(۱۴.۴)

با توجه به اینکه  $\underline{Y} \sim N_p(\underline{\theta}, \Sigma)$  می توان نتیجه گرفت:

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون

$$\bar{Y} \sim N_p\left(\underline{\theta}, \frac{1}{N}\Sigma\right), \quad \underline{Z} = N^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\bar{Y} - \underline{\theta}) \sim N_p(\underline{0}, I)$$

می‌دانیم که  $\underline{Z}'\underline{Z} = N(\bar{Y} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\bar{Y} - \underline{\theta}) \sim \chi_p^2$ ؛ بنابراین رابطه (۱۴.۴) را می‌توان به صورت زیر

بازنویسی کرد:

$$R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\bar{Y}, \underline{\theta}) = (1 - \omega)E\left[(\bar{Y} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\bar{Y} - \underline{\theta})\right] = \frac{(1 - \omega)}{N}E(\chi_p^2) = \frac{(1 - \omega)}{N}p \quad (۱۵.۴)$$

(۲) برای مخاطره برآوردگر محدود شده داریم:

$$R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}) = (1 - \omega)E\left[(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})\right] + \omega E\left[(\hat{\underline{\theta}} - \bar{Y})'\Sigma^{-1}(\hat{\underline{\theta}} - \bar{Y})\right] \quad (۱۶.۴)$$

با جایگذاری مقدار  $\hat{\underline{\theta}}$  از رابطه ۳.۴، عبارت دوم سمت راست تساوی (۱۶.۴) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} \omega E\left[(\hat{\underline{\theta}} - \bar{Y})'\Sigma^{-1}(\hat{\underline{\theta}} - \bar{Y})\right] &= \omega E\left[(B(B'S^{-1}B)'\bar{Y} - \bar{Y})'\Sigma^{-1}(B(B'S^{-1}B)'\bar{Y} - \bar{Y})\right] \\ &= \omega E\left[\left((I_p - \hat{H} - I_p)\bar{Y}\right)'\Sigma^{-1}\left((I_p - \hat{H} - I_p)\bar{Y}\right)\right] \\ &= \omega E\left[\bar{Y}'\hat{H}'\Sigma^{-1}\hat{H}\bar{Y}\right] \end{aligned} \quad (۱۷.۴)$$

و برای محاسبه عبارت اول سمت راست تساوی (۱۶.۴) با تعریف  $\hat{A} = B(B'S^{-1}B)'\bar{Y}$  داریم:

$$\begin{aligned} (1 - \omega)E\left[(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})\right] &= (1 - \omega)E\left[(\hat{A}\bar{Y} - \hat{A}\underline{\theta} + \hat{A}\underline{\theta} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{A}\bar{Y} - \hat{A}\underline{\theta} + \hat{A}\underline{\theta} - \underline{\theta})\right] \\ &= (1 - \omega)\left\{E\left[(\hat{A}\bar{Y} - \hat{A}\underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{A}\bar{Y} - \hat{A}\underline{\theta})\right] + E\left[(\hat{A}\underline{\theta} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{A}\underline{\theta} - \underline{\theta})\right]\right. \\ &\quad \left.+ E\left[(\hat{A}\bar{Y} - \hat{A}\underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{A}\underline{\theta} - \underline{\theta})\right] + E\left[(\hat{A}\underline{\theta} - \underline{\theta})'\Sigma^{-1}(\hat{A}\bar{Y} - \hat{A}\underline{\theta})\right]\right\} \\ &= (1 - \omega)\left\{E\left[(\bar{Y} - \underline{\theta})'\hat{A}'\Sigma^{-1}\hat{A}(\bar{Y} - \underline{\theta})\right] + E\left[\underline{\theta}'(\hat{A} - I)'\Sigma^{-1}\underline{\theta}(\hat{A} - I)\right]\right. \\ &\quad \left.+ 2E\left[(\bar{Y} - \underline{\theta})'\hat{A}'\Sigma^{-1}(\hat{A} - I)\underline{\theta}\right]\right\} \end{aligned}$$

$$= (1 - \omega) \left\{ E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A} (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right] + E[\underline{\theta}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \underline{\theta}] \right. \\ \left. - 2E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{H} \underline{\theta} \right] \right\} \quad (۱۸.۴)$$

با توجه به اینکه  $\hat{A}$  و  $\hat{H}$  توابعی از  $\underline{S}$  هستند و  $\bar{Y}$  و  $S$  مستقلند، پس در جمله آخر تساوی (۱۸.۴)  $\hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{H} \underline{\theta}$  و  $(\bar{Y} - \underline{\theta})$  از هم مستقلند. همچنین چون  $\bar{Y}$  یک برآوردگر ناریب برای  $\underline{\theta}$  می‌باشد، پس جمله آخر تساوی (۱۸.۴) مساوی صفر است و با جایگذاری روابط (۱۷.۴) و (۱۸.۴) در رابطه (۱۶.۴) داریم:

$$R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}) = (1 - \omega) \left\{ E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A} (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right] + E[\underline{\theta}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \underline{\theta}] \right\} + \omega E \left[ \bar{Y}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} \right] \\ = (1 - \omega) \left\{ E \left[ \text{tr} \hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A} (\bar{Y} - \underline{\theta})' (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right] + \underline{\theta}' E[\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}] \underline{\theta} \right\} \\ + \omega E \left[ \text{tr} \left( \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y}' \bar{Y} \right) \right] \\ = (1 - \omega) \left\{ \text{tr} \left\{ (\hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A}) E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right] \right\} + \underline{\theta}' E[\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}] \underline{\theta} \right\} \\ + \omega \text{tr} \left[ \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} E \left( \bar{Y}' \bar{Y} \right) \right] \\ = (1 - \omega) \left\{ \text{tr} \left[ (\hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A}) \text{Cov}(\bar{Y}) + \underline{\theta}' E[\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}] \underline{\theta} \right] \right\} \\ + \omega \left\{ \text{tr} \left[ (\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}) \left( \text{Cov}(\bar{Y}) + E(\bar{Y}' \bar{Y}) \right) \right] \right\} \\ = (1 - \omega) \left\{ \frac{1}{N} \left[ \text{tr}(\hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A} \Sigma) \right] + \underline{\theta}' E[\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}] \underline{\theta} \right\} \\ + \omega \left\{ \text{tr} \left[ (\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}) \left( \frac{1}{N} \Sigma + \underline{\theta}' \underline{\theta} \right) \right] \right\}$$

با استفاده از لم ۴.۱ قسمت (۲) و (۳) و با توجه به اینکه  $E[\text{tr}(A)] = \text{tr}(A)$  می‌توان نوشت:

$$R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}) = (1 - \omega) \left\{ \frac{1}{N} E[\text{tr}(\hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A} \Sigma)] + \underline{\theta}' E[\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}] \underline{\theta} \right\} \\ + \omega \left\{ E \left[ \text{tr} \left( \frac{1}{N} \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \Sigma \right) \right] + E[\text{tr}(\underline{\theta}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \underline{\theta})] \right\} \\ = (1 - \omega) \left\{ \frac{1}{N} E[\text{tr}(\hat{A}' \Sigma^{-1} \hat{A} \Sigma)] + \underline{\theta}' E[\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}] \underline{\theta} \right\} \\ + \omega \frac{1}{N} \left\{ \text{tr} \left[ E(\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \Sigma) \right] + \text{tr}[\underline{\theta}' E(\hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H}) \underline{\theta}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \omega) \left\{ \frac{1}{N} \times \frac{r(n-1)}{n-q-1} + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \underline{\theta}' C (C' \Sigma C)^{-1} C' \underline{\theta} \right\} \\
 &+ \omega \left\{ \text{tr} \left[ \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \cdot \frac{1}{N} C (C' \Sigma C)^{-1} C' \Sigma \right] \right. \\
 &\left. + \text{tr} \left[ \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \underline{\theta}' C (C' \Sigma C)^{-1} C' \Sigma \underline{\theta} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

حال با توجه به روابط (۱۶.۱) و (۳۰.۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 R_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}) &= \frac{(1 - \omega)}{N} \left\{ \frac{r(n-1)}{n-q-1} + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \xi_2' \xi_2 \right\} \\
 &+ \frac{\omega}{N} \left\{ \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \text{tr}(B_2' B_2) + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \xi_2' \xi_2 \right\} \\
 &= \frac{(1 - \omega)}{N} \left\{ \frac{r(n-1)}{n-q-1} + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \Delta^2 \right\} \\
 &+ \frac{\omega}{N} \left\{ \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \text{tr}(I_q) + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \Delta^2 \right\} \\
 &= \frac{(1 - \omega)}{N} \left\{ p - \frac{q(n-p-1)}{n-q-1} + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \Delta^2 \right\} \\
 &+ \frac{\omega}{N} \left\{ q + \Delta^2 + \frac{r(q + \Delta^2)}{m-2} \right\}
 \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

(۳) مخاطره PTE به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$R_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}^{\text{PT}}, \underline{\theta}) = (1 - \omega) E \left[ (\hat{\underline{\theta}}^{\text{PT}} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\hat{\underline{\theta}}^{\text{PT}} - \underline{\theta}) \right] + \omega E \left[ (\hat{\underline{\theta}}^{\text{PT}} - \underline{Y})' \Sigma^{-1} (\hat{\underline{\theta}}^{\text{PT}} - \underline{Y}) \right] \tag{۲۰.۴}$$

با جایگذاری رابطه (۱۳.۴) در عبارت اول، سمت راست تساوی فوق برابر است با:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \omega)E \left[ \left( (\bar{Y} - \underline{\theta}) - (\bar{Y} - \hat{\theta})I_{a_\alpha}(T^2) \right)' \Sigma^{-1} \left( (\bar{Y} - \underline{\theta}) - (\bar{Y} - \hat{\theta})I_{a_\alpha}(T^2) \right) \right] \\
 &= (1 - \omega)E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \underline{\theta}) - (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \hat{\theta})I_{a_\alpha}(T^2) \right. \\
 &\quad \left. - \left( (\bar{Y} - \hat{\theta})I_{a_\alpha}(T^2) \right)' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right. \\
 &\quad \left. + \left( (\bar{Y} - \hat{\theta})I_{a_\alpha}(T^2) \right)' \Sigma^{-1} \left( (\bar{Y} - \hat{\theta})I_{a_\alpha}(T^2) \right) \right] \\
 &= (1 - \omega) \left\{ E \left( (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \hat{A}\bar{Y})I_{a_\alpha}(T^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left( (\bar{Y} - \hat{A}\bar{Y})I_{a_\alpha}(T^2) \right)' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( (\bar{Y} - \hat{A}\bar{Y})I_{a_\alpha}(T^2) \right)' \Sigma^{-1} \left( (\bar{Y} - \hat{A}\bar{Y})I_{a_\alpha}(T^2) \right) \right] \right\} \\
 &= (1 - \omega) \left\{ E \left( \frac{1}{N} p \right) - 2E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} I_{a_\alpha}(T^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + E \left[ \bar{Y}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} I_{a_\alpha}(T^2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

(۲۱.۴)

با شرطی کردن عبارت دوم تساوی آخر روی  $\bar{Y}$  عبارت دوم سمت راست تساوی (۲۱.۴) را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\begin{aligned}
 E \left[ E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} I_{a_\alpha}(T^2) | \bar{Y} \right] \right] &= E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} \underbrace{E(\hat{H} | \bar{Y})}_{\hat{H}, \bar{Y} \text{ مستقلند}} \bar{Y} I_{a_\alpha}(T^2) \right] \\
 &= E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} \underbrace{E(\hat{H})}_H \bar{Y} I_{a_\alpha}(T^2) \right]
 \end{aligned}$$

حال با استفاده از روابط (۱۷.۱) و (۱۳.۴) و (۳۰.۱) داریم:

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زبان متعادل موزون

$$\begin{aligned}
 E \left[ (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} H \bar{Y} I_{a\alpha}(T^2) \right] &= \frac{1}{N} E \left[ N (\bar{Y} - \underline{\theta})' \Sigma^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} B_2 B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \bar{Y} \right] I_{a\alpha}(T^2) \\
 &= \frac{1}{N} E \left[ \left( N^{\frac{1}{2}} B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\bar{Y} - \underline{\theta}) \right)' \left( N^{\frac{1}{2}} B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \bar{Y} \right) \right] I_{a\alpha}(T^2) \\
 &= \frac{1}{N} E \left[ (\underline{Z}_2 - \xi_2)' \underline{Z}_2 \right] I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{۲۲.۴}$$

همچنین با استفاده از روابط (۲۷.۱) و (۱۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 E \left[ \bar{Y}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} I_{a\alpha}(T^2) \right] &= \frac{1}{N} E \left\{ N^{\frac{1}{2}} \bar{Y}' \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_2 (I + U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) N^{\frac{1}{2}} B_2' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \bar{Y} I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{N} E \left\{ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (I + U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

با شرطی کردن عبارت فوق روی  $U_{22}$  می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{N} E \{ E[\underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (I + U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1}) | U_{22}] I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \} \\
 &= \frac{1}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (1 + E(U_{22}^{-1} U_{12}' U_{12} U_{22}^{-1} | U_{22})) I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (1 + r U_{22}^{-1}) I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{N} E \left[ \left( \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 + \frac{r \underline{Z}_2' U_{22}^{-1} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2' \underline{Z}_2} \right) I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (1 + r \chi_m^{-2}) I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{۲۳.۴}$$

با جایگذاری روابط (۲۲.۴) و (۲۳.۴) در (۲۱.۴) و با استفاده از رابطه (۱۳.۴) مخاطره را به شرح زیر

محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
 R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}^{PT}, \underline{\theta}) &= \frac{(1-\omega)}{N} \left\{ p - 2E \left[ (\underline{Z}_2 - \xi_2)' \underline{Z}_2 I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \right. \\
 &+ E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (1 + r\chi_m^{-2}) I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \Big\} \\
 &+ \omega E \left\{ \left( \bar{Y} - (1-\omega)I \left( T^2 \leq \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) (\bar{Y} - \hat{\underline{\theta}}) - \bar{Y} \right) \right. \\
 &\times \Sigma^{-1} \left( \bar{Y} - (1-\omega)I \left( T^2 \leq \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) (\bar{Y} - \hat{\underline{\theta}}) - \bar{Y} \right)' \Big\} \\
 &= \frac{(1-\omega)}{N} \left\{ p + E \left[ \left( 2\underline{Z}_2' \underline{Z}_2 + 2\xi_2' \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 + r\underline{Z}_2' \underline{Z}_2 \chi_m^{-2} \right) I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \right\} \\
 &+ \omega E \left\{ \left( (1-\omega)I \left( T^2 \leq \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) (\bar{Y} - \hat{\underline{\theta}}) \right) \right. \\
 &\times \Sigma^{-1} \left( (1-\omega)I \left( T^2 \leq \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) (\bar{Y} - \hat{\underline{\theta}}) \right)' \Big\} \\
 &= \frac{(1-\omega)}{N} \left\{ p + E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] + 2E \left[ \xi_2' \underline{Z}_2 I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \right. \\
 &+ r \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 \chi_m^{-2} I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \Big\} \\
 &+ \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left\{ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) (\bar{Y} - \hat{\underline{\theta}}) \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \hat{\underline{\theta}})' \right\}
 \end{aligned}
 \tag{۲۴.۴}$$

برای محاسبه جمله دوم از گروه اول در رابطه (۲۴.۴) با استفاده از قضیه ۱۱.۱ با فرض  $A = I_q$  و

$$\phi(W'W) = I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right);$$

$$E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] = E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \text{tr} I_q + \xi_2' \xi_2 E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_{q+4}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right]$$

می دانیم  $\text{tr} I_q = q$  و با نام گذاری  $\Delta^2 = \xi_2' \xi_2$  نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned}
 & E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\
 &= q \left[ p \left( \frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\
 &+ \Delta^2 \left[ p \left( \frac{\chi_{q+4}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\
 &= q \left[ p \left( \frac{m}{q+2} \frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \frac{mq}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\
 &+ \Delta^2 \left[ p \left( \frac{m}{q+4} \frac{\chi_{q+4}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \frac{mq}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\
 &= q \left[ p \left( F_{q+2,m}(\Delta^2) < \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\
 &+ \Delta^2 \left[ p \left( F_{q+4,m}(\Delta^2) < \frac{q}{q+4} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\
 &= q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \\
 &+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

(۲۵.۴)

از سوی دیگر با استفاده از قضیه ۱.۱۰ و با فرض  $\phi(W'W) = I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right)$  جمله سوم از گروه

اول رابطه (۲۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 2\xi_2' E \left[ \underline{Z}_2 I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] &= 2\xi_2' \xi_2 E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] = 2\Delta^2 \left[ p \left( \frac{m}{q+2} \frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} < \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{mq}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] = 2\Delta^2 \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

(۲۶.۴)

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زبان متعادل موزون

در نهایت با استفاده از لم ۴.۱ و با فرض  $h(\chi_f^2) = I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right)$  برای جمله چهارم از گروه اول رابطه (۲۴.۴) داریم:

$$rE \left[ \underline{Z}'_2 \underline{Z}_2 \chi_m^{-2} I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] = \frac{r}{m-2} E \left[ \underline{Z}'_2 \underline{Z}_2 \chi_m^{-2} I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right]$$

حال با بکارگیری قضیه ۱.۱.۱، با فرض  $A = I_q$  و  $\phi(W'W) = I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right)$  داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{m-2} E \left[ \underline{Z}'_2 \underline{Z}_2 \chi_m^{-2} I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\ &= \frac{r}{m-2} E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_{m-2}^2} \right) \right] \text{tr} I_q + \xi'_2 \xi_2 E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_{q+4}^2(\Delta^2)}{\chi_{m-2}^2} \right) \right] \\ &= \frac{r}{m-2} \left\{ q \left[ p \left( \frac{\chi_{q+2}^2(\Delta^2)}{\chi_{m-2}^2} < \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \right\} \\ &+ \Delta^2 \left[ p \left( \frac{\chi_{q+4}^2(\Delta^2)}{\chi_{m-2}^2} < \frac{q}{m} F_{q,m}(\alpha) \right) \right] \\ &= \frac{r}{m-2} \left\{ q \left[ G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\ &+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

(۲۷.۴)

حال به محاسبه گروه دوم از رابطه (۲۴.۴) به صورت زیر می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} & \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left\{ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) (\bar{Y} - \hat{\theta}) \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \hat{\theta})' \right\} \\ &= \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) (\bar{Y} - \hat{A}\bar{Y})' \Sigma^{-1} (\bar{Y} - \hat{A}\bar{Y}) \right] \\ &= \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ I_{a_\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \bar{Y}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} \right] \end{aligned}$$

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زبان متعادل موزون

در این مرحله با توجه به اینکه عبارت فوق معادل عبارت آخر تساوی ۴. ۲۱ می‌باشد. برای جلوگیری از زیاده نویسی جواب نهایی به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \omega(1-\omega)^2 E \left[ I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \bar{Y}' \hat{H}' \Sigma^{-1} \hat{H} \bar{Y} \right] &= \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 (1 + r\chi_m^{-2}) I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\ &= \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] + \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 r\chi_m^{-2} I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (۲۸.۴)$$

حال با به کار بردن قضیه ۱۱.۱ و لم ۸.۱ به ترتیب برای جمله اول و دوم عبارت (۲۸.۴) و با توجه به رابطه (۲۵.۴) و (۲۷.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &\frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] + \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} E \left[ \underline{Z}_2' \underline{Z}_2 r\chi_m^{-2} I_{a\alpha} \left( \frac{\chi_q^2(\Delta^2)}{\chi_m^2} \right) \right] \\ &= \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} \left\{ q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \Delta^2 \left[ p G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} \left\{ q \left[ G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \Delta^2 \left[ G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (۲۹.۴)$$

در نهایت مخاطره برآوردگر PT به شرح زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 & R_{\omega, \underline{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}^{PT}, \underline{\theta}) \\
 &= \frac{(1-\omega)}{N} \left\{ p - q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \left. \right\} + 2\Delta^2 \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \\
 &+ \frac{r}{m-2} \left\{ q \left[ G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &+ \Delta^2 \left[ p G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \left. \right\} \\
 &+ \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} \left\{ q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \\
 &+ \frac{r}{m-2} \left\{ q \left[ G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \left. \right\} \\
 &= \frac{(1-\omega)}{N} \left\{ p - q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &+ \frac{r}{m-2} G_{q+2,m} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \left. \right] \\
 &+ \Delta^2 \left[ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &- G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \\
 &+ \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \left. \right] \\
 &+ \frac{\omega(1-\omega)^2}{N} \left\{ q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &+ \frac{r}{m-2} G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \Delta^2 \left[ G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) + \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \Bigg\}$$

(۳۰.۴)

که در آن  $G_{r,s}(\cdot; \Delta^2)$  تابع توزیع، توزیع فیشر غیر مرکزی با  $(r, s)$  درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی  $\Delta^2$  می باشد. ■

#### ۵.۴ مقایسه برآوردگرها

در مقایسه  $\bar{Y}$  و  $\hat{\theta}$  با استفاده از توابع مخاطره بدست آمده در قضیه ۴.۲ برآوردگر  $\bar{Y}$  به خوبی برآوردگر  $\hat{\theta}$  است اگر و فقط اگر،

$$0 \leq R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\bar{Y}, \underline{\theta}) \leq R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\theta}, \underline{\theta})$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(1-\omega)}{N} p$$

$$\leq \frac{(1-\omega)}{N} \left\{ p - \frac{q(n-p-1)}{n-q-1} + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \Delta^2 \right\} + \frac{\omega}{N} \left( q + \Delta^2 + \frac{r(q+\Delta^2)}{(m-2)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \Delta^2 \leq \frac{\frac{1}{N} \left\{ -\frac{q(n-p-1)}{m-2} \right\}}{\left[ \frac{(n-q+r-1)}{N(m-2)} \right]} = -\frac{q(n-p-1)}{(n-q+r-1)}$$

(۳۱.۴)

برای مقایسه برآوردگر ناریب  $\bar{Y}$  و  $\hat{\theta}^{PT}$  از تابع مخاطره درجه دو استفاده می کنیم. یعنی با قرار دادن  $\omega = 0$  در توابع زیان بدست آمده برآوردگر  $\hat{\theta}^{PT}$  به خوبی  $\bar{Y}$  است اگر و فقط اگر،

$$0 \leq R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\theta}^{PT}, \underline{\theta}) \leq R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\bar{Y}, \underline{\theta})$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{N} \left\{ p - q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) + \frac{r}{m-2} G_{q+2,m} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &\quad + \Delta^2 \left[ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right\} \leq \frac{1}{N} p \\
 \Rightarrow \Delta^2 &\left\{ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) - G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right\} \\
 &\leq q \left\{ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) + \frac{r}{m-2} G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right\} \\
 \Rightarrow \Delta^2 &\leq q \left\{ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) + \frac{r}{m-2} G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right\} \\
 &\quad \times \left[ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) - G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right]^{-1} \\
 &\hspace{15cm} (۳۲.۴)
 \end{aligned}$$

به ازای مقادیری از فضای پارامتر که نامساوی (۳۲.۴) برقرار است همواره برآوردگر  $\hat{\underline{\theta}}^{PT}$  به خوبی

برآوردگر ناریب  $\bar{Y}$  می باشد، در غیر این صورت برآوردگر ناریب  $\bar{Y}$  برتر است.

در نهایت برای مقایسه  $\hat{\underline{\theta}}$  و  $\hat{\underline{\theta}}^{PT}$  می توان گفت  $\hat{\underline{\theta}}^{PT}$  به خوبی برآوردگر  $\hat{\underline{\theta}}$  است اگر و فقط اگر،

$$0 \leq R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}^{PT}, \underline{\theta}) \leq R_{\omega, \bar{Y}}^{\Sigma^{-1}}(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta})$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{N} \left\{ -q \left[ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) + \frac{r}{m-2} G_{q+2,m} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+2)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \right. \\
 &\quad + \Delta^2 \left[ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right] \left. \right\} \\
 &\leq \frac{1}{N} \left\{ -\frac{q(n-p-1)}{n-q-1} + \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \Delta^2 \right\} \\
 \Rightarrow 0 &\leq \Delta^2 \leq q \left\{ G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) + \frac{r}{m-2} G_{q+2,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{(q+2)m} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n-p-1}{n-q-1} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ 2G_{q+2,m} \left( \frac{q}{q+2} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) - G_{q+4,m} \left( \frac{q}{q+4} F_{q+4,m}(\alpha); \Delta^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r}{m-2} G_{q+4,m-2} \left( \frac{q(m-2)}{m(q+4)} F_{q,m}(\alpha); \Delta^2 \right) - \frac{n-q+r-1}{n-q-1} \right\}^{-1} \\
 &\hspace{15cm} (33.4)
 \end{aligned}$$

حال اگر نامساوی (33.4) درست باشد آنگاه همواره برآوردگر  $\hat{\theta}^{PT}$  به خوبی برآوردگر  $\hat{\theta}$  می‌باشد، در غیر این صورت برآوردگر  $\hat{\theta}$  برتر خواهد بود.

#### ۴.۶ مثال کاربردی

این بخش را اختصاص می‌دهیم به یک مثال عددی تا کاربرد برآوردگرهای ارائه شده را نشان دهیم.

**مثال ۴.۱** داده‌های زیر شامل اندازه‌های طول و عرض سر اولین و دومین پسر خانواده که از مجموعه  $N=25$  تایی بدست آمده می‌باشند. این داده‌ها از مرجع اندرسن (2003) که از فرت (1921) گرفته شده‌اند می‌باشند. داده‌ها در جدول ۴.۱ آمده‌اند.

جدول ۱.۴ طول و عرض سر برادران

| ردیف | طول سر<br>پسر اول | عرض سر<br>پسر اول | طول سر<br>پسر دوم | عرض سر<br>پسر دوم |
|------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| ۱    | ۱۹۱               | ۱۵۵               | ۱۷۹               | ۱۴۵               |
| ۲    | ۱۹۵               | ۱۴۹               | ۲۰۱               | ۱۵۲               |
| ۳    | ۱۸۱               | ۱۴۸               | ۱۸۵               | ۱۴۹               |
| ۴    | ۱۸۳               | ۱۵۳               | ۱۸۸               | ۱۴۹               |
| ۵    | ۱۷۶               | ۱۴۴               | ۱۷۱               | ۱۴۲               |
| ۶    | ۲۰۸               | ۱۵۷               | ۱۹۲               | ۱۵۲               |
| ۷    | ۱۸۹               | ۱۵۰               | ۱۹۰               | ۱۴۹               |
| ۸    | ۱۹۷               | ۱۵۹               | ۱۸۹               | ۱۵۲               |
| ۹    | ۱۸۸               | ۱۵۲               | ۱۹۷               | ۱۵۹               |
| ۱۰   | ۱۹۲               | ۱۵۰               | ۱۸۷               | ۱۵۱               |
| ۱۱   | ۱۷۹               | ۱۵۸               | ۱۸۶               | ۱۴۸               |
| ۱۲   | ۱۸۳               | ۱۴۷               | ۱۷۴               | ۱۴۷               |
| ۱۳   | ۱۷۴               | ۱۵۰               | ۱۸۵               | ۱۵۲               |
| ۱۴   | ۱۹۰               | ۱۵۹               | ۱۹۵               | ۱۵۷               |
| ۱۵   | ۱۸۸               | ۱۵۱               | ۱۸۷               | ۱۵۸               |
| ۱۶   | ۱۶۳               | ۱۳۷               | ۱۶۱               | ۱۳۰               |
| ۱۷   | ۱۹۵               | ۱۵۵               | ۱۸۳               | ۱۵۸               |
| ۱۸   | ۱۸۶               | ۱۵۳               | ۱۷۳               | ۱۴۸               |
| ۱۹   | ۱۸۱               | ۱۴۵               | ۱۸۲               | ۱۴۶               |
| ۲۰   | ۱۷۵               | ۱۴۰               | ۱۶۵               | ۱۳۷               |
| ۲۱   | ۱۹۲               | ۱۵۴               | ۱۸۵               | ۱۵۲               |
| ۲۲   | ۱۷۴               | ۱۴۳               | ۱۷۸               | ۱۴۷               |
| ۲۳   | ۱۷۶               | ۱۳۹               | ۱۷۶               | ۱۴۳               |
| ۲۴   | ۱۹۷               | ۱۶۷               | ۲۰۰               | ۱۵۸               |
| ۲۵   | ۱۹۰               | ۱۶۳               | ۱۸۷               | ۱۵۰               |

فصل چهارم: برآوردگر آزمون اولیه بردار میانگین تحت تابع زیان متعادل موزون

در این مثال  $p = 4$  می‌باشد. آرشی (۲۰۰۹) نشان داد که توزیع پیشین ارائه شده در این فصل برای این داده‌ها مناسب است. به منظور استفاده از PTE و RE نیاز به ماتریس B داریم، همچنین باید  $\underline{C}$  ای تعریف کنیم که داشته باشیم:  $C'B = 0$ . (روشهای ساده بدست آوردن C را بطوریکه  $C'B = 0$  برقرار باشد، می‌توانید در سیروستاوا (۲۰۰۲) ببینید)

با این فرضیات، فرض کنید می‌خواهیم آزمون فرض صفر زیر را انجام دهیم.

$$H_0: \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 100 \\ 500 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

با استفاده از داده‌ها داریم:

$$\bar{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} 185.72 \\ 151.12 \\ 183.84 \\ 149.24 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 95.2933 & 52.8683 & 69.6617 & 46.1117 \\ 52.8683 & 54.3600 & 51.3117 & 35.0533 \\ 69.6617 & 51.3117 & 100.8067 & 56.5400 \\ 46.1117 & 35.0533 & 56.5400 & 45.0233 \end{bmatrix}$$

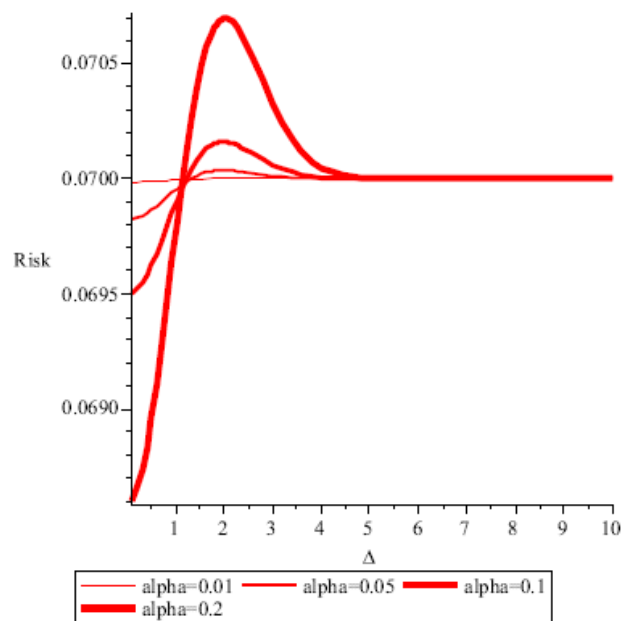
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\hat{\underline{\theta}} = \begin{bmatrix} 4.86 \\ 40.85 \\ 22.86 \\ 55.45 \end{bmatrix}, T^2 = 5073.41 \Rightarrow \hat{\underline{\theta}}^{PT} = \begin{bmatrix} 185.72 \\ 151.12 \\ 183.84 \\ 149.24 \end{bmatrix} - (1 - \omega)I \left( 9119.28 \leq \frac{2}{23} F_{2,23}(\alpha) \right)$$

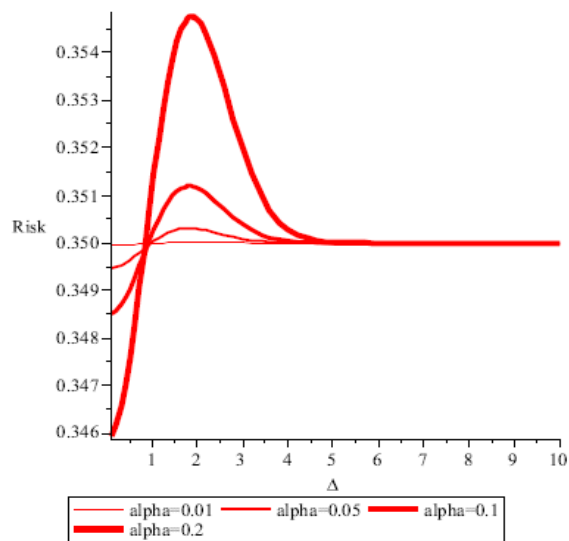
با توجه به اینکه  $T^2$  به اندازه کافی بزرگ می‌باشد و  $I \left( 9119.28 \leq \frac{2}{23} F_{2,23}(\alpha) \right) = 0$ ، هر تصمیم دلخواهی راجع به سطح معنی‌داری می‌توانیم بگیریم. بنابراین برای هر مقدار دلخواه  $\alpha$  فرضیه صفر رد می‌شود.

اگر چه با استفاده از تساوی فوق و این که  $\mathcal{L}_N = 104868.20$ ، همواره فرضیه صفر رد می‌شود ولی با در نظر گرفتن  $g(\mathcal{L}_N) = 10^5 \mathcal{L}_N^{-1}$  می‌توان نتیجه بهتری بدست آورد (قبول فرضیه صفر).

در پایان نمودار تابع مخاطره PTE به ازای مقادیر  $\alpha$  ی مختلف در شکل های ۱.۴ و ۲.۴ آمده اند.



نمودار ۱.۴ مخاطره PTE برای  $\omega = 0.9$



نمودار ۲.۴ مخاطره PTE برای  $\omega = 0.5$

## پیشنهادهات و آینده تحقیق

با توجه به نتایج بدست آمده در این مجموعه و موضوعات مطرح شده می‌توان در آینده بر روی موارد ارائه شده در زیر تحقیق کرد. لازم به ذکر است که بعضی از این موارد در دست مطالعه و بررسی نویسنده این پایان‌نامه می‌باشد.

✓ در خصوص نتایج فصل دوم می‌توان تعمیم‌های زیر را در نظر گرفت.

۱. با توجه به این که در نظر گرفتن واریانس جامعه معلوم کاربرد زیادی در رویارویی با داده‌های واقعی ندارد، می‌توان نتایج را برای واریانس مجهول نیز ارائه داد.

۲. برآوردگر آزمون اولیه را مطابق فرضیه  $H_0: \theta = \theta_{00}$  ارائه کرده و خواص آن را بدست آورد.

✓ در خصوص نتایج فصل چهارم، می‌توان برآوردگر آزمون اولیه را برای حالت  $r(\|\theta\|^2) = \theta'\theta$  نیز بدست آورد.

✓ در فصل‌های سوم و چهارم تنها وزن‌های ۱ و  $\theta'\theta$  برای  $r(\|\theta\|^2)$  در نظر گرفته شده است که می‌توان تعمیم‌هایی برای حالت  $\log \theta'\theta$  و  $(\theta'\theta)^k$  به ازای  $k \in \mathcal{R}$  نیز ارائه کرد.

✓ به عنوان تعمیمی از نتایج فصل‌های ۳ و ۴، می‌توان مدل جامعه را به خانواده توزیع‌های بیضی‌گون<sup>۱</sup> که بسیار کلی تر و کامل تر از توزیع نرمال چند متغیره است، تغییر داد.

✓ در تمام نتایج ارائه شده در خصوص برآوردگر بیز محدود شده مربوط به فرضیه‌های از نوع تساوی مانند

$\theta = \theta_{00}$  یا  $\theta \leq B\eta$  می‌باشند. به عنوان تعمیم می‌توان این مطالب را برای حالت‌های قید نامساوی<sup>۲</sup> مانند

$\theta \leq \theta_{00}$  یا  $\theta \leq B\eta$  در نظر گرفت.

---

۱. Elliptically contoured distributions

۲. Inequality constraint

✓ با توجه به این که برآوردگر آزمون اولیه از نوع برآوردگرهای بهبود یافته می باشد می توان نتایج فصول ۳ و

۴ را برای برآوردگر بهبود یافته انقباضی نوع استاین<sup>۱</sup> نیز مورد بررسی قرار داد.

✓ به عنوان تعمیمی در خصوص تابع زیان های ارائه شده می توان نتایج این تحقیق را برای تابع زیان نرمال

منعکس شده<sup>۲</sup> و تابع زیان لینکس کران دار<sup>۳</sup> نیز تعمیم داد.

---

۱. Stein-type shrinkage

۲. Reflected normal loss

۳. Bounded LINEX

## برنامه‌های کامپیوتری

### با استفاده از نرم افزارهای Maple و R

به ازای مقادیر مختلف  $N, y = \bar{y}, \omega, x = \delta_0, u = \theta_{00}, a$  نمودارها رسم شده‌اند.

### مثال ۱.۲، مثال ۲.۲ و مثال ۳.۲

Restart:

$$\begin{aligned}
 R1 := & \text{unapply} \left( \omega \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot x^2 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right) \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \right) \right. \\
 & - \left( 2 \cdot \omega \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot x + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1} \right) \right) \cdot \left( \omega \cdot x \right. \\
 & \left. \left. + (1 - \omega) \cdot \frac{\left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1} \right)}{\left( \frac{\theta_{00} + a \cdot \bar{y}}{a \cdot N + 1} \right)} \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \omega \cdot x + (1 - \omega) \cdot \frac{\left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1} \right)}{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)} \right)^2, N, y, \omega, x, u, a \right):
 \end{aligned}$$

R2

$$\begin{aligned}
&:= unapply \left( (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^4 + 6 \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right) + 3 \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad + \omega \cdot x \cdot \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( (1 - \omega) \cdot \left( x - \frac{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right)}{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1}} \right) \right) \\
&\quad - 2 \cdot (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right) \right) \cdot \left( \omega \cdot x \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right)}{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1}} \right) \\
&\quad \left. + \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \omega \cdot x + (1 - \omega) \cdot \frac{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a \cdot N + 1} \right)}{\left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a \cdot N + 1}} \right)^2, N, y, \omega, x, u, a \right):
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R3 := unapplyexp \left( \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right) \cdot \left( \omega \cdot x \cdot \left( x \cdot (1 - 2 \cdot \omega) \right. \right. \\
&\quad - 2 \cdot (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y + a}{a \cdot N + 1} \right) \left. \left. + \left( \omega \cdot x + (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y + a}{a \cdot N + 1} \right) \right)^2 \right. \right. \\
&\quad - 2 \cdot (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y + a}{a \cdot N + 1} \right) \cdot \left( \omega \cdot x + (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y + a}{a \cdot N + 1} \right) \right) \\
&\quad \left. \left. + (1 - \omega) \cdot \left( a - 1 + \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y + a}{a \cdot N + 1} \right)^2 \right) \right) \right), N, y, \omega, x, u, a \right):
\end{aligned}$$

Wiyh (plots):

P1:=plot(evalf(R1(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P2:=plot(evalf(R2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P3:=plot(evalf(R3(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P11:=plot(evalf(R1(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P12:=plot(evalf(R1(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P13:=plot(evalf(R1(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P21:=plot(evalf(R2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P22:=plot(evalf(R2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P23:=plot(evalf(R2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P31:=plot(ev

```

alf(R3(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P32:=plot(evalf(R3(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P33:
=plot(evalf(R3(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):
Disply(P1,P2,P3);Disply(P11,P12,P13);Disply(P21,P22,P23);Disply(P31,P32,P33);

```

restatrt

$$\begin{aligned}
 Rt := unapply & \left( \left( \frac{\omega \cdot x^2 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1} \right)}{\omega \cdot x^3 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \right)} \right)^2 \cdot \left( (1 - \omega) \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 \right. \right. \right. \\
 & + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \Big) + \omega \cdot x^2 \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \\
 & - \frac{\omega \cdot x^2 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1} \right)}{\omega \cdot x^3 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \right)} \cdot \left( (1 - \omega) \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{a}{a.N+1} \right) + \omega \cdot x \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \right) + \frac{u+a.N.y}{a.N+1}, N, y, \omega, x, u, a \Big):
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Rt2 := unapply & \left( (1 - \omega) \cdot \left( \frac{\omega \cdot x^3 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \right)}{\omega \cdot x^4 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^4 + 6 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) + 3 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right)^2 \right)} \right)^2 \right. \\
 & \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^4 + 6 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) + 3 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right)^2 \right) \\
 & - \frac{2 \cdot (1 - \omega) \cdot \left( \omega \cdot x^3 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \right) \right)}{\omega \cdot x^4 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^4 + 6 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) + 3 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right)^2 \right)} \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 \right. \\
 & \left. + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \right) + \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1} \right) \\
 & \left( \frac{(x^2 - 2 \cdot \omega \cdot x) \left( \omega \cdot x^3 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) \right) \right)}{\omega \cdot x^4 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^4 + 6 \cdot \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right) + 3 \cdot \left( \frac{a}{a.N+1} \right)^2 \right)} + 1 \right), N, y, \omega, x, u, a \Big);
 \end{aligned}$$

Ret

$$\begin{aligned}
&:= \text{unapply} \left( \exp \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a}{2.a.N + 2} \right) \right. \\
&\quad \left( \frac{\omega.x^2. \left( \omega.x.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right). \exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right) \right)}{\omega.x^2.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1}.\exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right)} \right. \\
&\quad \left. - 2. \frac{\omega.x. \left( \omega.x.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right). \exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right) \right)}{\omega.x^2.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1}.\exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right)} + 1 \right) \\
&\quad - \frac{2.(1-\omega). \left( \omega.x.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right). \exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right) \right)}{\omega.x^2.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1}.\exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right)} \\
&\quad . \left( \frac{u + a.N.y + a}{a.N + 1} \right). \exp \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a}{2.a.N + 2} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\omega.x.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right). \exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right)}{\omega.x^2.\exp(x) + (1-\omega). \left( \left( \frac{u+a.N.y+a}{a.N+1} \right)^2 + \frac{a}{a.N+1}.\exp \left( \frac{u+a.N.y}{a.N+1} + \frac{a}{2.a.N+2} \right) \right)} \right)^2 \\
&\quad \left. - \omega). \left( \left( \frac{u + a.N.y + a}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1}.\exp \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a}{2.a.N + 2} \right) \right), N, y, \omega, x, u, a \right) :
\end{aligned}$$

P1:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P2:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P3:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P11:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P12:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P13:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P21:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P22:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P23:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P31:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P32:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P33:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):

Disply(P1,P2,P3);Disply(P11,P12,P13);Disply(P21,P22,P23);Disply(P31,P32,P33);

مثال ١٥.٢

restart

$b := 5; Rt:$

$$\begin{aligned}
 &= unapply \left( \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right) \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right) \right. \\
 &\times \exp \left( \log \left( \frac{\omega.x + (1 - \omega) \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1}}{\omega.x \cdot \exp(-b.x) + (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right) \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right)} \right) \right) \cdot \exp(1 \\
 &- \omega) + \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right) \cdot \omega. \\
 &\times \left( \exp \left( \frac{b}{a} \cdot \log \left( \frac{\omega.x + (1 - \omega) \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1}}{\omega.x \cdot \exp(-b.x) + (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right) \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right)} \right) \right. \right. \\
 &- b.x \left. \right) + \omega.b.x \\
 &- \left( \frac{b}{a} \cdot \log \left( \frac{\omega.x + (1 - \omega) \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1}}{\omega.x \cdot \exp(-b.x) + (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right) \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right)} \right) \right) \\
 &- b \left. \right) + b \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \right) \cdot (1 - \omega), N, y, w, x, u, a \Big):
 \end{aligned}$$

Rt2

$$\begin{aligned}
&:= unapply \left( \left( \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right) \right) \cdot (1 \right. \\
&- \omega) \cdot \exp \left( \log \left( \frac{\omega.x^2 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \right)}{\omega.x^2 \cdot \exp(-b.x) + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right) \right)} \right) \right) \\
&+ b \cdot (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right) \cdot \left( \frac{a}{a.N + 1} \right) \right) + \left( \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \right) \cdot \\
&\left( \omega \cdot \exp \left( \log \left( \frac{\omega.x^2 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \right)}{\omega.x^2 \cdot \exp(-b.x) + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right) \right)} \right) \right) \right. \\
&- b.x \left. \right) - 1 - \log \left( \omega.x^2 + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \right) \right) \\
&+ \log \left( \omega.x^2 \cdot \exp(-b.x) + (1 - \omega) \cdot \left( \left( \frac{u + a.N.y - a.b}{a.N + 1} \right)^2 + \frac{a}{a.N + 1} \right) \right. \\
&\left. \cdot \exp \left( -b \cdot \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a.b^2}{2.a.N + 2} \right) \right) \Big), N, y, \omega, x, u, a \Big);
\end{aligned}$$

$$Ret := unapply \left( b \cdot (1 - \omega) \cdot \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a}{a.N + 1} \right) \cdot \exp \left( \frac{u + a.N.y}{a.N + 1} + \frac{a}{a.N + 1} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \omega \cdot \exp \left( \log \left( \frac{\omega \cdot \exp(x) + (1 - \omega) \cdot \exp \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right)}{\omega \cdot \exp((1 - b) \cdot x) + (1 - \omega) \cdot \exp \left( (1 - b) \cdot \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a(1 - b)^2}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - b \cdot x \right) + \omega \cdot b \cdot x - \log \left( \frac{\omega \cdot \exp(x) + (1 - \omega) \cdot \exp \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right)}{\omega \cdot \exp((1 - b) \cdot x) + (1 - \omega) \cdot \exp \left( (1 - b) \cdot \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a(1 - b)^2}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right)} \right) \right. \\
& \left. - 1 \right) + \exp \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right) + (1 - \omega) \\
& \cdot \exp \left( \log \left( \frac{\omega \cdot \exp(x) + (1 - \omega) \cdot \exp \left( \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right)}{\omega \cdot \exp((1 - b) \cdot x) + (1 - \omega) \cdot \exp \left( (1 - b) \cdot \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a(1 - b)^2}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right)} \right) \right) \\
& \cdot \exp \left( (1 - b) \cdot \frac{u + a \cdot N \cdot y}{a \cdot N + 1} + \frac{a(1 - b)^2}{2 \cdot a \cdot N + 2} \right), N, y, \omega, x, u, a):
\end{aligned}$$

```

P1:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P2:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=
dash):P3:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P11:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,l
inestyle=dot):P12:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P13:=plot(evalf(Rt(N,y,w,x,u,a)),
w=0..1,linestyle=solid):P21:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P22:=plot(evalf(Rt2(N,y
,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P23:=plot(evalf(Rt2(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):P31:=plot(e
valf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dot):P32:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=dash):P3
3:=plot(evalf(Ret(N,y,w,x,u,a)),w=0..1,linestyle=solid):

```

```

Disply(P1,P2,P3);Disply(P11,P12,P13);Disply(P21,P22,P23);Disply(P31,P32,P33);

```

فصل سوم

# bootstrap method for simulation

```

ratio <- function(x,na.rm=F){

```

```

rbind(mean(x[,1]),mean(x[,2]),mean(x[,3]),mean(x[,4]))

```

```

cov(x)

ybar1=matrix(apply(x,2,mean),byrow=F)

cov(x)->s1

#b is eny matrix

b=matrix(c(1,0,-1,2,0,1,2,2),byrow=T,4,2)

#we estimate theta hat

t(b)%*%solve(s1)%*%b->k

t(b)%*%solve(s1)%*%ybar1->p

solve(k)%*%p->p1

theta.hat1=b%*%p1

#k is positive parametes

#N count of sample for each variable

k=3

N=25

#this part we estimate theta star

theta.star1=(N*ybar1+k*theta.hat1)

theta.star2=theta.star1/(N+k)

#this part we calcuelat landa

q=matrix(0,4,4)

diag(q)=1

part1=(ybar1-theta.hat1)%*%t(ybar1-theta.hat1)

landa1=q+(N-1)*s1+(N*k)/(N+k)*part1

return(theta.hat1,s1)

}

```

```

require(boot)

boot(y, ratio, R=1, stype="i")

y=matrix(scan(),25,4,byrow=T)

۱۴۵ ۱۷۹ ۱۵۵ ۱۹۱

۱۵۲ ۲۰۱ ۱۴۹ ۱۹۵

۱۴۹ ۱۸۵ ۱۴۸ ۱۸۱

۱۴۹ ۱۸۸ ۱۵۳ ۱۸۳

۱۴۲ ۱۷۱ ۱۴۴ ۱۷۶

۱۵۲ ۱۹۲ ۱۵۷ ۲۰۸

۱۴۹ ۱۹۰ ۱۵۰ ۱۸۹

۱۵۲ ۱۸۹ ۱۵۹ ۱۹۷

۱۵۹ ۱۹۷ ۱۵۲ ۱۸۸

۱۵۱ ۱۸۷ ۱۵۰ ۱۹۲

۱۴۸ ۱۸۶ ۱۵۸ ۱۷۹

۱۴۷ ۱۷۴ ۱۴۷ ۱۸۳

۱۵۲ ۱۸۵ ۱۵۰ ۱۷۴

۱۵۷ ۱۹۵ ۱۵۹ ۱۹۰

۱۵۸ ۱۸۷ ۱۵۱ ۱۸۸

```

۱۳۰ ۱۶۱ ۱۳۷ ۱۶۳

۱۵۸ ۱۸۳ ۱۵۵ ۱۹۵

۱۴۸ ۱۷۳ ۱۵۳ ۱۸۶

۱۴۶ ۱۸۲ ۱۴۵ ۱۸۱

۱۳۷ ۱۶۵ ۱۴۰ ۱۷۵

۱۵۲ ۱۸۵ ۱۵۴ ۱۹۲

۱۴۷ ۱۷۸ ۱۴۳ ۱۷۴

۱۴۳ ۱۷۶ ۱۳۹ ۱۷۶

۱۵۸ ۲۰۰ ۱۶۷ ۱۹۷

۱۵۰ ۱۸۷ ۱۶۳ ۱۹۰

```
col.ybar=rbind(mean(y[,1]),mean(y[,2]),mean(y[,3]),mean(y[,4]))
```

```
#####
```

```
#####bootstrap method for genrate data of matrix y#####
```

```
#####frist we must get one sample of each variable(y1,y2,y3,y4)####
```

```
r=function(y,na.rm=T){
```

```
mean.risk.ybar=c()
```

```
#risk.theta.hat=c()
```

```
mean.risk=c()
```

```
seq(.001,1,.001)->w
```

```
mean.risk.theta.hat=c()
```

```
for(j in 1:100){
```

```
  y5=matrix(0,25,4)
```

```
  ybar=matrix(0,4,1)
```

```
  s=matrix(0,4,4)
```

```
  theta.hat=matrix(0,4,1)
```

```
  theta.star=matrix(0,4,1)
```

```
  landa=matrix(0,4,4)
```

```
  theta.ceb=matrix(0,4,1)
```

```
  risk=c()
```

```
  risk.ybar2=c()
```

```
  risk.theta.hat2=c()
```

```
  for (i in 1:100){
```

```
    replicate(1,sample(y[,1],rep=T,25))->y1
```

```
    replicate(1,sample(y[,2],rep=T,25))->y2
```

```
    replicate(1,sample(y[,3],rep=T,25))->y3
```

```

replicate(1,sample(y[,4],rep=T,25))->y4

#sample(1:10,4,rep=T)->l

#u=cbind(y1[l[1]],y2[l[2]],y3[l[3]],y4[l[4]])

u=cbind(y1,y2,y3,y4)

#y55=cbind(y1,y2,y3,y4)

y55=u

#####

ybar1=matrix(apply(y55,2,mean),byrow=F)

cov(y55)->s1

#b is eny matrix

#b=matrix(c(-.01,0,0,0,0,.01,-.02,0),byrow=T,4)

#b=matrix(c(1,0,-1,2,0,1,2,2),byrow=T,4)

b=matrix(c(.01,-1,1,-1,-.01,0,0,0),4)

#we estimate theta hat

t(b)%*%solve(s1)%*%b->k

t(b)%*%solve(s1)%*%ybar1->p

solve(k)%*%p->p1

theta.hat1=b%*%p1

#k is positive parametes

#N count of sample for each variable

k=.0001

```

N=25

#this part we estimate theta star

theta.star1=(N\*ybar1+k\*theta.hat1)

theta.star2=theta.star1/(N+k)

#this part we calculate lambda

q=matrix(0,4,4)

diag(q)=1

part1=(ybar1-theta.hat1)%\*%t(ybar1-theta.hat1)

landa1=q+(N-1)\*s1+(N\*k)/(N+k)\*part1

#we get theta constrained empirical bayes

\*\*\*\*\*#for estimate constrained empirical bayes lambda must be positive

theta.ceb1=w[j]\*ybar1

theta.ceb4=abs(landa1)^.5\*%theta.star1

v=.01

#theta.ceb.total=matrix(0,3,3)

theta.ceb2=(v)\*landa1\*%theta.star1

(v\*sum(diag(landa1))+t(theta.star1)%\*(theta.star1))->lo

as.numeric(lo)->lo

theta.ceb3=lo^-1\*theta.ceb2

theta.ceb3+theta.ceb4)->km

```
theta.ceb5=(1-w[j])*(km)
```

```
theta.ceb1=(theta.ceb1+theta.ceb5)
```

```
*****#this part we estimate emprical restricted bayes risk*****
```

```
*****#we need the theta parameter*****
```

```
theta=theta.hat1
```

```
W=matrix(0,4,4)
```

```
diag(W)=1
```

```
#W=solve(s1)
```

```
*****#we suposs that it know parameter
```

```
part1=w[j]*t(theta)%*%theta
```

```
part2=t(theta.star1-ybar1)%*%W*(theta.star1-ybar1)
```

```
part3=t(theta)%*%(theta)
```

```
part4=t(theta.star1-theta.hat1)%*%W*(theta.star1-theta.hat1)
```

```
risk1=part1*part2+(1-w[j])*part3*part4
```

```
*****#risk of ybar*****
```

```
part6=t(ybar1-theta)%*%(ybar1-theta)
```

```
risk.ybar1=(1-w[j])*part3*part6
```

```
#####estimate risk theta hat#####
```

```
part8=t(theta.hat1-ybar1)%*(theta.hat1-ybar1)
```

```
risk.theta.hat1=w[j]*part8
```

```
#####out put of function#####
```

```
y5=cbind(y5,y55)
```

```
ybar=cbind(ybar,ybar1)
```

```
s=cbind(s,s1)
```

```
theta.hat=cbind(theta.hat,theta.hat1)
```

```
theta.star=cbind(theta.star,theta.star2)
```

```
landa=cbind(landa,landa1)
```

```
theta.ceb=cbind(theta.ceb,theta.ceb1)
```

```
risk.ybar2=c(risk.ybar2,risk.ybar1)
```

```
risk.theta.hat2=c(risk.theta.hat2,risk.theta.hat1)
```

```
risk=c(risk,risk1)
```

```
}
```

```
#####y5 is matrix of multivariate
```

```
y5[,c(-1,-2,-3,-4)]->y5
```

```
ybar[,c(-1)]->ybar
```

```

s[,c(-1,-2,-3,-4)]->s
theta.hat[,-1]->theta.hat
theta.star[,-1]->theta.star
landa[,c(-1,-2,-3,-4)]->landa
apply(ybar,2,mean)->mean.ybar
apply(theta.hat,2,mean)->mean.theta.hat
#theta.ceb[,c(-1)]=theta.ceb

mean.risk.ybar=c(mean.risk.ybar,mean(risk.ybar2))

mean.risk.theta.hat=c(mean.risk.theta.hat,mean(risk.theta.hat2))

mean.risk=c(mean.risk,mean(risk,na.rm=T))

#risk[,-1]=risk

}

return(y5,ybar,s,theta.hat,theta.star,landa,

mean.ybar,mean.theta.hat,theta.ceb,risk,mean.risk,mean.risk.ybar

,risk.theta.hat2,mean.risk.theta.hat)

}

r(y)->kj
kj$mean.risk->risk.ceb
kj$mean.risk.ybar->risk.mle

```

```
w=seq(.01,1,.01)
```

```
plot(risk.mle~w,col=10,type="l",lwd=2,axes=F,font.lab=6,ylab="risk compare mle ana  
CEB",col.lab=10,col.axis="blue",col.main="red")
```

```
grid(c=3)
```

```
title(main="compare two methods for estimate theta",col.main=54,font.main=6)
```

```
par(new=T)
```

```
plot1=plot(risk.ceb~w,col=4,type="l",lwd=2,font.axis=8,axes=T,font.lab=8,ylab="Risk of CEB  
estimator",col.lab="black",col.axis="black",col.main="red")
```

```
grid(c="red")
```

```
savePlot("c:\\work\\my project\\CEB1.eps",plot1)
```

```
plot(risk.ceb~w,col=4,type="l",ylim=c(min(risk.ceb,risk.mle)-100,max(risk.mle,risk.ceb)+100))
```

```
par(new=T)
```

```
plot(risk.mle~w,col=3,type="l",ylim=c(min(risk.ceb,risk.mle)-100,max(risk.ceb,risk.mle)+100))
```

```
kj$mean.risk.theta.hat->risk.theta.hat
```

```
plot2=plot(risk.theta.hat~w,col=4,type="l",lty=2,lwd=2,font.axis=8,axes=T,font.lab=8,ylab="Ris  
k of CB estimator",col.lab="black",col.axis="black",col.main="red")
```

```
grid(c="red")
```

```
savePlot("c:\\work\\my project\\CB.eps",plot2)
```

```

plot(risk.ceb~w,col=3,type="l",axes=F)

par(new=T)

plot(risk.theta.hat~w,col=4,type="l",axes=T,ylab="Risk of CB estimator")

plot(risk.ceb~w,col=4,type="l",ylim=c(min(risk.theta.hat,risk.mle)-
100,max(risk.theta.hat,risk.ceb)+100))

par(new=T)

plot(risk.theta.hat~w,col=3,type="l",ylim=c(min(risk.theta.hat,risk.ceb)-
100,max(risk.theta.hat,risk.ceb)+100))

#seq(.01,1,.01)->w

#theta.ceb.total=matrix(0,4,4)

#risk=matrix(0,1,1)

#mean.risk=c()

#mean.theta.ceb=c()

#we get heta restricted emprical bayes

#we get heta restricted emprical bayes

#theta.ceb1=w[i]*ybar1

#theta.ceb4=landa1^.5%*%theta.hat1

v=5

#theta.ceb.total=matrix(0,3,3)

#theta.ceb2=(2*v)*landa1

#theta.ceb3=(theta.ceb2)/(v*t(landa1)+matrix(rep(t(theta.star1)%*%theta.star1,16),4))

```

```

)#theta.ceb3+theta.ceb4)->km

#theta.ceb5=(1-w[i])*(km)

#theta.ceb=(matrix(rep(theta.ceb1,9),3)+theta.ceb5)

#theta.ceb.total=cbind(theta.ceb.total,theta.ceb)

#mean.theta.ceb=c(mean.theta.ceb,mean(theta.ceb))

*****#we need the theta parameter*****

#theta=theta.hat1

#W=matrix(0,4,4)

#diag(W)=1

*****#we suppose that it know parameter

#part1=w[i]*t(theta)%*%theta

#part2=t(theta.star1-ybar1)%*%W*%(theta.star1-ybar1)

#part3=t(theta)%*%(theta)

#part4=t(theta.star1-theta.hat1)%*%W*%(theta.star1-theta.hat1)

#risk1=part1*part2+(1-w[i])*part3*%part4

#risk=cbind(risk,risk1)

#mean.risk=c(mean.risk,mean(risk1))

r(y)$theta.hat->lk

apply(lk,1,mean)

seq(.01,1,.01)->w

theta.ceb.total=matrix(0,4,1)

risk=matrix(0,4,1)

```

```

mean.risk=c()

mean.theta.ceb=c()

for (i in 1:100){

theta.ceb1=w[i]*ybar

theta.ceb4=landa^.5*%%theta.hat

v=5

#theta.ceb.total=matrix(0,3,3)

theta.ceb2=(2*v)*landa

theta.ceb3=(theta.ceb2)/(v*t(landa)+t(theta.hat)*%%theta.hat)

theta.ceb5=(1-w[i])*(theta.ceb3+theta.ceb4)

theta.ceb=(theta.ceb1+theta.ceb5)

theta.ceb.total=cbind(theta.ceb.total,theta.ceb)

mean.theta.ceb=c(mean.theta.ceb,mean(theta.ceb))

*****#we need the theta parameter*****

theta=theta.hat

W=matrix(0,4,4)

diag(W)=1

*****#we suppose that it know parameter

part1=w[i]*t(theta)*%%theta

part2=t(theta.star-ybar)*%%W*%%(theta.star-ybar)

```

```

part3=t(theta)%*%(theta)

part4=t(theta.star-theta.hat)%*%W*%(theta.star-theta.hat)

risk1=part1*part2+(1-w[i])*part3*%part4

risk=cbind(risk,risk1)

mean.risk=c(mean.risk,mean(risk1))

}

diff=c()

e=c(1,4,5,8,9,12,13,16,17,20,21,24,25,28,29,

,۳۲.۳۳.۳۶.۳۷.۴۰.۴۱.۴۴.۴۵.۴۸.۴۹.۵۲.۵۳.۵۶.۵۷.۶۰

۶۱.۶۴.۶۵.۶۸.۶۹.۷۲.۷۳.۷۶.۷۷.۸۰.۸۱.۸۴.۸۵.۸۸.۸۹.۹۲

,۹۳.۹۶.۹۷.۱۰۰)

#while(i<=100){

diff=c()

for (i in 1:length(e)-1 )

{

diff=c(diff,sum(apply(y,2,mean)-apply(y5[,e[i]:e[i+1]],2,mean)))

i=i+1

}

i=1:25

require(base)

```

## مراجع

۱. الکساندر، مود- فرانکین. آ. گریبیل- دون. س. بوز. ترجمه علی مشکانی، مقدمه ای بر نظریه آمار، چاپ اول، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، پاییز ۱۳۷۷.
۲. کانتی ماردیا- جان کنت- جان بی بی. ترجمه محمد مهدی طباطبایی، تحلیل چند متغیره، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.
۳. کریم نژاد، ع، ۱۳۸۸، پایان نامه ارشد، برآوردیابی میانگین کران دار توزیع نرمال، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی.
۴. قاری، ب، ۱۳۸۷، پایان نامه ارشد، بررسی رفتار برآوردگرهای نوع استاین در مدل نرمال، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
۵. نارایان سی. جری. ترجمه ابوالقاسم بزرگ نیا، استنباط آماری چند متغیره، چاپ اول، انتشارات آستان قدس رضوی، مرداد ۱۳۶۶.
6. Anderson, T. W. (2003). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 3<sup>rd</sup> ed., John Wiley, New York.
7. Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M., (2009). Improved variance estimation under subspace restriction, J. Mult. Anal., **100**, 1725-1760.
8. Arashi, M (2009). Preliminary test Estimation of mean vector under balanced loss Function, J. Statist. Res., **43**(2), 55-65.
9. Bancroft, T. A. (1994). On biases in estimation due to the use of the preliminary test of significance. Ann. Math. Statist., **15**, 190-204.
10. Berger, J. O. (1985). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag
11. Chang, Y. and Kim, C. (1997). Simultaneous estimation of the multivariate normal mean under balanced loss Function, Comm. Statist-Theory Meth., **26**, 1599-1611.

12. Dey, D., Ghosh, M. and Strawderman, W.E., (1999). On the estimation with balanced loss Function, *Statist. Prob. Lett.*, **45**, 97-101.
13. Efron, B. and Morris, C., (1972). Empirical Bayes on vector of observations: an extension of Stein's method, *Biometrika.*, **59**, 335-347.
14. Efron, B. and Morris, C., (1976). Multivariate empirical Bayes and estimation of covariate matrices, *Ann. Math. Statist.*, 22-32.
15. 1979. "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife." *Annals of Statistics* 7:1—26.
16. Efron, B. and Tibshirani, R. J., (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.
17. Fisher, R. A. (1956). *Statistical Methods in Scientific Inference*, Oliver and Boyd, London.
18. Ghosh, M, Kim M. J. and Kim D. H. (2008). Constrained Bayes and empirical Bayes estimation under random effects normal ANOVA model with balanced loss function, *J. Statist. Plan. Inf.*, **138**, 2017-2028.
19. Gomez-Deniz, E. (2006). On the use of the weighted balanced loss Function to obtain credibility premiums, *em Int. Conf. Math. Statist. Modelling in Honor of Enrique Castillo.*, 28-30.
20. Han, C. P. and Bancroft, T. A. (1968). On pooling means when variance is unknown. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **563**, 1333-1342.
21. James, A. (1964). Distribution of matrix variate and latent roots derived from normal samples, *Ann. Math. Statisti.*, **35**, 475-501.
22. James, W. and Stein, C., (1961). Estimation with quadratic loss, *Proceeding of Forth Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability.*, **1**, 361-379.
23. Jozani, M. J, Marchand, E. and Parsian, A (2006). On estimation with weighted balanced-type loss function, *Statist. Prob. Lett.*, 76 773-780.
24. Jozani, M. J, Marchand, E. and Parsian, A (2010). *Bayesian and Robust Bayesian analysis under a general class of balanced loss function*, Springer-Verlag.

25. Judge, G. C. and Back, M. E. (1978). Statistical Implications of Pre-test and Stein-rule Estimator in Econometrics, North Holland, Amesterdam.
26. Kiberia, B. M. G. Saleh, A. K. Md. E. (2004). Preliminary test ridge regression estimation with Students t errors and conflicting test-estimation, *Metrika.*, **52**(2), 105-124.
27. Kiberia, B. M. G. Saleh, A. K. Md. E. (2006). Optimum critical value for pretest estimators, *Comm. Statist. Simu. Comp.*, **35**(2), 309-319.
28. Lehmann, E. L and Casella, G., (1998), Theory of point estimation, Secound ed. Springer-New York.
29. Nadarjah, S. and Kotz, S. (2005), Mathematical properties of the multivariate t distribution, *Acta Appl. Math.*, **89**, 53-84.
30. Rodrigues, J. and Zellner A. (1994). Weighted balanced loss function and estimation of the mean time to failure, *Comm. Statist - Theory Meth.*, bf23, 3609-3616.
31. Saleh, A. K. Md. E. and Sen, P. K. (1978). Nonparametric Estimation of Location Parameters after a Preliminary Test on Regression. *Ann. Statist.*, **6**, 154-168.
32. Saleh, A. K. Md. E. (2006). Theory of Preliminary Test and Stein-Type Estimation with Applications, John Wiley, New York.
33. Sanjari Farsipour, N. and Asgharzadeh, A. (2003). Bayesian multivariate normal analysis under balanced loss function, *Pak. J. Statist.*, 19,231-240.
34. Sanjari Farsipour, N. and Asgharzadeh, A. (2004). Estimation of a normal mean relative to balanced loss function, *Statist. Papers.*, 45, 279-286.
35. Searle, S. R. (1982), Matrix Algebra Useful for Statistics, Joun Wiley, New York.
36. Sirvestava, M. S. and Ehsanes Saleh, A. K. Md., (2005). Estimation of the mean vector of a multivariate normal distribution: subspace hypothesis, *J. Multivariate Analysis.*, 96, 55-72.
37. Sirvestava, M. S. and Khatri, C. G., (1979). An Introduction to Multivariate Analysis, North-Holland, New York.

38. Stein, C. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Statist.*, **9**, 1135-1151.
39. Yalian, Li. and Yang, Hu., (2010). A new ridge-type estimator in stochastic restricted linear regression, *Statistics.*, Vol. 00, 1-8.
40. Yang, Hu. And Jianwen, Xu., (2007). An alternative stochastic restricted Liu estimator in linear regression, *Statistical Papers*.
41. Zellner A. (1994). Bayesian and non- Bayesian estimation using balanced loss function. In: Berger, J. O. and Gupta, S. S. (Eds), *Statistical Decision Theory and Methods V*, Springer, New Uork., pp. 337-390.

## **Abstract**

One of the important issues in theoretical statistics is the estimation and studying of their specifications on unknown parameters of the statistical models. About the estimation, estimators are compared together by different items like: bias, risk, efficiency and ...; one of the items which is mostly recognized by the investigators, is the level of estimators's risk under specific loss function. In other words, the lower the risk the better the estimator would be. Using old known information in statistical models is usually considered as a term which at last results in restricted models. The estimator, created by restricted models is called restricted estimator (RE).

In this thesis for the normal and multivariate normal models, the constrained Bayes estimator (CEB) and other types of estimators like: preliminary test estimator (PTE) and the constrained empirical Bayes estimator (CEBE) (in some parts) are considered and their risks are compared together.

Key words: Balanced loss function, Multivariate Student's t, Normal-inverted Wishart, Constraid Bayes estimator, Emperical Bayes estimator, Preliminary test estimator.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mathematic**

***Constrained Bayes estimators under balanced loss  
function***

**Maryam Pourhosseini**

**Supervisor:**

**Dr. Mohammad Arashi**

**June 2011**