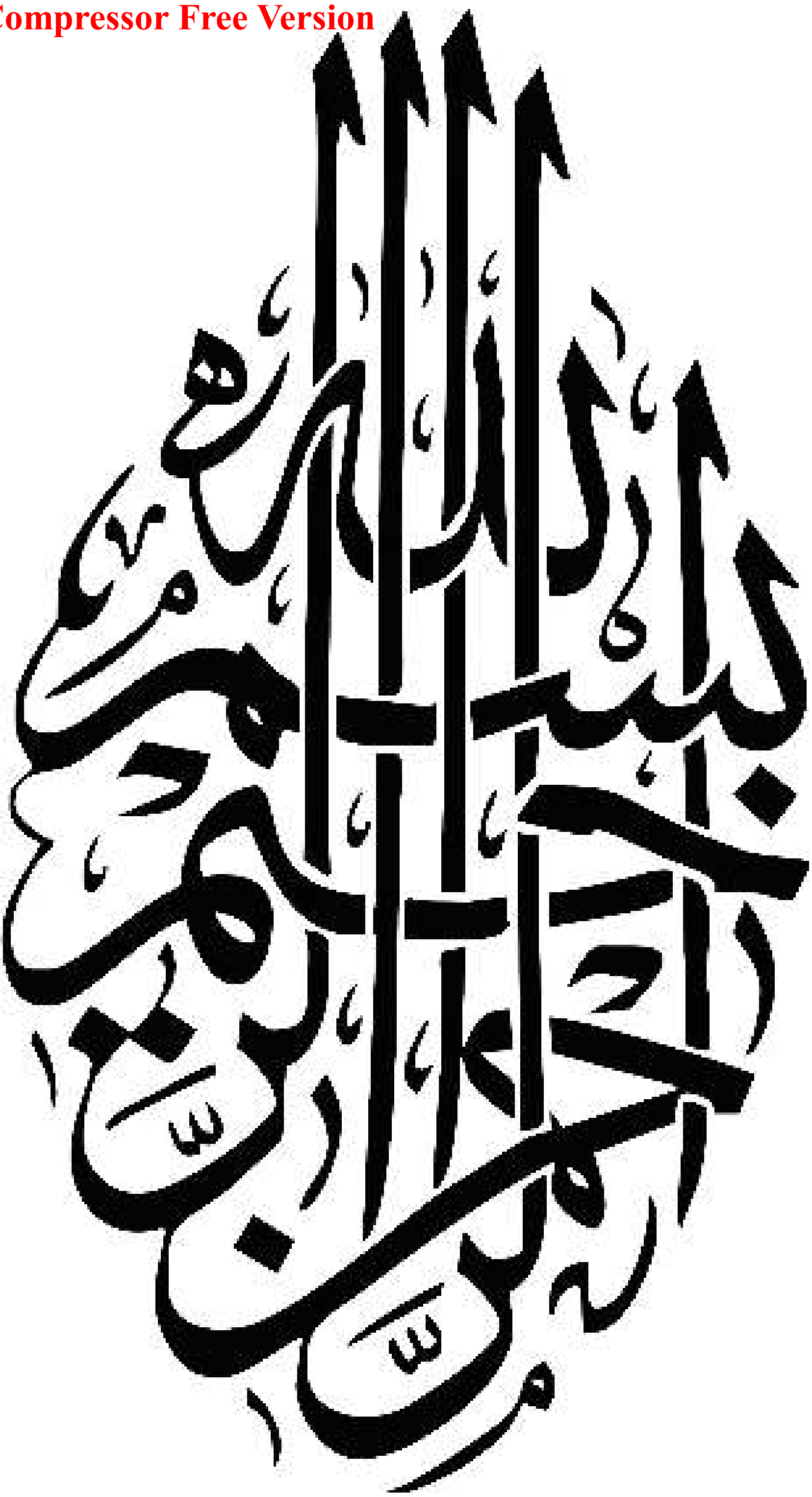
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش هندسه توپولوژی

رساله دکتری

مطالعه هندسی معادلات دیفرانسیل-انتگرال از مرتبه کسری

نگارنده: سعیده رشیدی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

اسفند ماه ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:
پیوست:

مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم سعیده رشیدی دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض گرایش هندسه توپولوژی به شماره دانشجویی ۹۴۰۰۳۹۵ ورودی ۹۴ ماه مهر سال ۱۳۹۷ در تاریخ ۱۳۹۹/۱۲/۱۱ از رساله نظری☑ / عملی☐ خود با عنوان : مطالعه هندسی معادلات دیفرانسیل-انتگرال از مرتبه کسری
دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۸۹ به درجه : عالی ..... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹– ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر سید رضا حجازی	استاد/ اساتید راهنما	استادیار	
	دکتر کاظم بی تقصیر	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
	دکتر مهدی نجفی خواه	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
	دکتر محمد ابری	استاد مدعو خارجی	استادیار	
	دکتر مهدی قولمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم سعیده رشیدی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

دانشکده ریاضی

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید و به پاس محبت‌های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند....
این رساله را به **پدرم**، **مادرم** و **همسرم** تقدیم می‌کنم.
پایان‌نامه خود را تقدیم کنید.

تقدیر و تشکر

تشکر و سپاس از استاد ارزشمند و پر مایه‌ام جناب آقای دکتر سید رضا حجازی که از محضر پر فیض تدریسشان و مساعدت‌های بی شائبه ایشان بهره‌ها برده‌ام و با رهنمودهای درستشان راه را از بیراهه برایم آشکار ساختند و پیمودن این مسیر را آسان نمودند. حال که با یاری ایشان خستگی‌های این راه را به امید و روشنی تبدیل کرده‌ام امیدوارم بتوانم در آیندهٔ نزدیک پاسخگوی محبت‌هایشان بوده و موجبات افتخار ایشان به شاگرد خود را فراهم نمایم.

بر خود لازم می‌دانم که از اساتید گرامی آقایان دکتر نجفی خواه از دانشگاه علم صنعت و دکتر ابری از دانشگاه دامغان و استاد گرانقدر دانشگاه صنعتی شاهرود، آقای دکتر بی‌تقصیر که زحمت داوری این رساله را برعهده گرفتند نهایت سپاسگذاری را به عمل آورده و از نظرات سودمندانه ایشان کمال تشکر و قدردانی را بنمایم.

سعیده رشیدی
اسفند ماه ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **سعیده رشیدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مطالعه هندسی معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری** ، تحت راهنمایی **سید رضا حجازی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سعیده رشیدی
اسفند ماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

موضوع محوری و بنیادی رساله دکتری حاضر، بررسی همه جانبه و فراگیر کاربرد گروه‌های لی و هندسه در معادلات دیفرانسیل_انتگرال کسری می‌باشد. انواعی از معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح و کسری و معادلات دیفرانسیل_انتگرال کسری در این رساله معرفی و نیز مقدماتی از حساب دیفرانسیل کسری بیان می‌شود. در ادامه مفهوم آنالیز گروهی به معادلات معرفی شده تعمیم داده می‌شود و پس از یافتن تقارن‌های این معادلات، با کمک گروه‌های تقارن جواب‌های ناوردا برای این معادلات یافته می‌شود. نشان داده خواهد شد که با کمک آنالیز گروهی لی، قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح و کسری محاسبه خواهند شد. این قوانین پایستگی راهنمای ما در یافتن جواب‌های جدید بر پایه تقارن‌ها هستند. با در نظر گرفتن شروط مناسب محک ناوردایی بی‌نهایت کوچک برای تعیین تقارن‌های لی معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری با هر دو مشتق کسری کاپوتو و ریمن_لیوویل، ساخته می‌شود. با کمک قضیه‌ای که در این رساله اثبات شده است قوانین پایستگی معادلات_دیفرانسیل انتگرال مرتبه کسری با استفاده از تقارن‌ها به دست خواهد آمد. برای سهولت در انجام محاسبات نرم افزار میپل معرفی و کاربرد آن در یافتن گروه‌های تقارن و قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح و کسری بیان خواهد شد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری، معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری، مشتق کاپوتو، مشتق ریمن_لیوویل، انتگرال کسری ریمن_لیوویل، تقارنهای لی، جواب‌های ناوردا، قضیه نوتر، معادلات اویلر_لاگرانژ، قوانین پایستگی، میپل.

لیست مقالات از پایان‌نامه

1. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi,Symmetry properties, similarity reduction and exact solutions of fractional Boussinesq equation, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 14(6) (2017), 1750083 (15 pages).

   Abstract: In this paper, some properties of the time fractional Boussinesq equation are presented. Group analysis of the time fractional Boussinesq equation with Riemann-Liouville derivative is performed and the corresponding optimal system of subgroups are determined. Next, we apply the obtained optimal systems for constructing reduced fractional ordinary differential equations (FODEs). Finally, we show how to derive exact solutions to time fractional Boussinesq equation via invariant subspace method.

2. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Analyzing Lie symmetry and constructing conservation laws for time-fractional Benny-Lin equation. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(12) (2017) 1750170 (25 pages).

   Abstract: This paper investigates the invariance properties of the time fractional Benny-Lin equation with Riemann-Liouville and Caputo derivatives. This equation can be reduced to the Kawahara equation, fifth-order Kdv equation, the Kuramoto-Sivashinsky equation and Navier-Stokes equation. By using the Lie group analysis method of fractional differential equations (FDEs), we derive Lie symmetries for the Benny-Lin equation. Conservation laws for this equation are obtained with the aid of the concept of nonlinear self-adjointness and the fractional generalization of the Noether's operators. Furthermore, by means of the invariant subspace method, exact solutions of the equation are also constructed.

3. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi and Elham Dastranj, Approximate symmetry analysis of nonlinear Rayleigh-wave equation. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15(4) (2018) 1850055 (18 pages).

   Abstract: In this paper, the Lie approximate symmetry analysis is applied to investigate the new exact solutions of the Rayleigh-wave equation. The power series method is employed to solve some of the obtained reduced ordinary differential equations with a small parameter. We yield the new analytical solutions with small parameter which is effectively obtained by the proposed method. The concept of nonlinear self-adjointness is used to construct the conservation laws for Rayleigh-wave equation. It is shown that this equation is approximately non-linearly self-adjoint and therefore desired conservation laws can be found using appropriate formal Lagrangians.

4. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Lie symmetry approach for The Vlasov–Maxwell system of equations, Journal of Geometry and Physics, 132 (2018) 1-12,

Abstract: The present paper is intended for the investigation of the fractional integro-differential system called Vlasov-Maxwell system. The method is based on using the geometric vector fields of the symmetries. This system arises for interaction of charged particles in plasma. The fractional derivative is considered in both the Caputo and Riemann-Liouville sense. Under some suitable conditions, we construct the infinitesimal criterion of invariance for detecting Lie symmetries of these equations. In this study, Lie symmetry method for constructing the similarity solutions of the considered system is implemented. The theory is constructed step by step and carefully to apply in the Vlasov-Maxwell system.

5. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Self-adjointness, Conservation laws and Invariant Solutions of the Buckmaster Equation, Computational Methods for Differential Equations, Accepted.

Abstract: The present paper considers the group analysis of extended (1+1)-dimensional Buckmaster equation and its conservation laws. Symmetry operators of Buckmaster equation are found via Lie algorithm of differential equations. The method of non-linear self-adjointness is applied to the considered equation. The infinite set of conservation laws associated with the finite algebra of Lie point symmetries of the Buckmaster equation is computed. The corresponding conserved quantities are obtained from their respective densities. Furthermore, the similarity reductions corresponding to the symmetries of the equation are constructed.

6. S.Reza Hejazi, A.Naderifard, S.Rashidi, Conservation Laws and Similarity Reduction of the Zoomeron Equation, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. Nauki. 14(3) (2016), 7-13.

Abstract: In this study, we consider a 4-th order (1+1)-dimensional PDE called

Zoomeron equation. Some conservation laws are derived based on direct method. We also derived some similarity solutions using the symmetries.

۷. سعیده رشيدي، سیدرضا حجازی، تقارن هاي معادله انتقال حرارت دو بعدي، کاهش مرتبه و جواب هاي دقیق، سیستم‌هاي مختلط و غیرخطي سال ۱، دوره ۱، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶ ، صص ۹ تا ۱۵.

چکیده: در این مقاله با بهره‌گیری از دسته‌اي از عملگرهای دیفرانسیلی به نام تقارن‌های معادلات دیفرانسیل به تحلیل جواب‌هاي دقیق معادله انتقال حرارت دو بعدی می‌پردازیم. بدین صورت که ابتدا معادله کلی انتقال حرارت دو بعدی را معرفی کرده سپس در حالت‌های خاص با به دست آوردن عملگرهای دیفرانسیلی مذکور در هر مرحله جوا ب‌های دقیق معادلات به‌دست آمده را خواهیم یافت. شایان ذکر است این روش قابل تعمیم به هر نوع دستگاه از معادلات دیفرانسیل است.

8. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Group Analysis and Similarity Solutions of the Buckmaster Equation, 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran, 15-13 July 2016.

   Abstract: This paper addresses an extended $(1 + 1)$-dimensional Buckmaster equation. By Lie method, the symmetries of Buckmaster equation are found. Then similarity reduction cor- responding to the symmetries of the equation in the question is constructed. Also the Lie symmetry analysis leads to many plethora of solutions to the equation.

9. S.Reza Hejazi, Saeede Rashidi, Approximate Symmetries and Conservation Laws of The Van der Pol Equation, Iranian Conference on Mathematical Physics,Qom University of Technology, p90, 3 November 2016.

   Abstract: This paper addresses a two dimensional differential equation that called Van der Pol equation. The first-order approximate symmetries for the Van der Pol equation by the method of approximate transformation groups are computed. Then the set of conservation law associated with the algebra of approximate symmetries of the Van der Pol equation is constructed.

10. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Exact Solutions of Time-Fractional Diffusivity Equation Using Lie Point Symmetry Method, 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali

Sina University, Hamedan, Iran, 22-25 August , 2017.

Abstract: Given a time fractional nonlinear partial differential equation. In this paper, we perform group analysis of the time fractional diffusivity equation with Riemann Liouville derivative. Lie point symmetries of this equation is investigated and compared. Examples of using the obtained symmetries for constructing exact solutions of the equation under consideration are presented. As a result, the reduced fractional ordinary differential equations are deduced, and some group invariant solutions in explicit form are obtained as well.

11. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Lie point symmetries for a class of fractional order integro-differential equations, 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, The institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran, 17-19 July 2018.

Abstract: The present paper is intended for the investigation of the fractional integro-differential equation. The fractional derivative is considered in both the Caputo and Riemann-Liouville sense. Under some suitable conditions, we construcrt the infinitesimal criterion of invariance for detecting Lie symmetries of these equations. An example is provided to illustrate the main results. This example shows that this approach is easy to implement and accurate when applied to fractional integro-differential equations.

12. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Lie symmetry analysis and similarity reduction of the time fractional Regularized Long-Wave equation, 49th Annual Iranian Mathematics Conference, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, 23-26 August, 2018.

Abstract: In this paper, group analysis of the time fractional Regularized Long-Wave equation with Riemann- Liouville derivative is performed. Using the Lie point symmetries of Regularized Long-Wave equation, it is shown that it can be transformed into a nonlinear ordinary differential equation of fractional order with a new dependent variable. In the reduced equation the derivative is in Erdélyi-Kober sense.

13. Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi, Symmetries, conservation laws and exact solutions of the time-Fractional diffusivity equation via Riemann-Liouville and Caputo derivatives, Submitted to Waves in Random and Complex Media.

14. S.Reza Hejazi, Saeede Rashidi, Symmetry analysis and conservation laws of the space-time fractional Klein-Gordon equation, Submitted to Journal of Geometric Mechanics.

فهرست مطالب

نمایه ٢١۵

فهرست جداول

فصل ۱

پیشگفتار

هنگام مواجهه با یک معادله دیفرانسیل معمولی و یا جزئی، اساسی‌ترین مسئله ای که ذهن را درگیر می‌کند ارائه روش حلی برای آن است. این همان چیزی است که سنگ بنای ابداع نظریه‌ای مهم توسط ماریوس سوفس لی[۱] در میانه قرن نوزدهم شد. نظریه‌ای گروه‌های پیوسته که لی ارائه نمود و اکنون در سراسر جهان به عنوان نظریه گروه‌های لی شناخته می‌شود دارای کاربردهای فراوانی در تمامی علوم ریاضی از جمله محض و کاربردی و همچنین فیزیک، مهندسی و سایر علومی است که بر پایه ریاضیات هستند. کاربردهای گروه‌های تقارن پیوسته لی بسیار متنوع و گوناگون هستند که از جمله آنها می‌توان توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریه ناوردا، نظریه انشعاب، توابع خاص، آنالیز عددی، نظریه کنترل، مکانیک کلاسیک، مکانیک کوآنتومی و غیره نام برد. باوجود این با اندک آشنایی با نظریه گروه لی درمی‌یابیم که کاربرد اصلی آن در زمینه معادلات دیفرانسیل است.

لی نشان داد که مسئله یافتن گروه تقارن از تبدیلات نقطه‌ای که یک معادله دیفرانسیل را ناوردا نگه می‌دارند، یعنی تقارن نقطه‌ای از یک معادله دیفرانسیل، به مسئله یافتن تقارن‌های خطی از معادلات مشخصه برای مولدهای بی‌نهایت کوچک آن کاهش می‌یابد. وی همچنین نشان داد که یک تقارن نقطه‌ای از یک معادله دیفرانسیل جزئی آن معادله را به یک معادله دیفرانسیل مرتبه کمتر کاهش می‌دهد و در مورد معادله دیفرانسیل معمولی این تقارن‌ها با کاهش مرتبه معادله و سپس یکبار انتگرال گیری جواب‌های معادله را نتیجه خواهند داد. از نتایج دیگری که لی به آن رسید آن بود که تقارن نقطه‌ای از یک معادله دیفرانسیل، خانواده

[۱] Marius Lie Sophus

یک پارمتری از هر جوابی از معادله دیفرانسیل که جواب ناوردای برخاسته از تقارن نباشد، تولید می‌کند.

داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیت‌های فراوانی دارد که از جمله آنها می‌توان به طبقه بندی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. این رده بندی به این صورت است که هر دو جوابی که به وسیله مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به یکدیگر باشند را در یک دسته در نظر می‌گیریم. از دیگر کاربردهای گروه تقارن قوانین پایستگی در فیزیک است. نوتر در سال ۱۹۱۸ قضیه‌ای اثبات کرد که ارتباط بین گروه‌های تقارن یک انتگرال تغییرات با ویژگی‌های معادلات اویلر_لاگرانژ را نشان می‌داد. از دیگر اقدامات نوتر برقراری تناظری یک به یک بین گروه‌های تقارن و قوانین پایستگی است. این تناظر منجر به ارائه نوعی از تقارن‌ها به نام تقارن‌های تعمیم یافته گردید. تفاوت اصلی این تقارن‌ها با تقارن‌های هندسی وابستگی آنها به مشتقات متغیرهای وابسته علاوه بر وابستگی به متغیرهای مستقل و وابسته است. هرگروه یک پارامتری یک مسئله تغییراتی که چه از تقارن‌های هندسی و چه از تقارن‌های تعمیم یافته نشأت بگیرد می‌تواند منجر به تولید قانون پایستگی گردد و به طور معکوس هر قانون پایستگی را می‌توان به یک مسئله تغییراتی این تقارن‌ها نظیر کرد.

حساب دیفرانسیل کسری شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی مشتق و انتگرال از مرتبه غیر صحیح می‌پردازد که به اختصار مشتق و انتگرال کسری نامیده می‌شوند. درست همزمان با شکل گیری حساب دیفرانسیل کلاسیک نخستین جرقه‌های حساب دیفرانسیل کسری نیز زده شد. در طول زمان حساب دیفرانسیل کسری توسط ریاضیدانان مشهوری چون لیوویل[۲]، گرونوالد[۳]، اویلر[۴]، لاگرانژ[۵]، هویساید[۶]، فوریه[۷]، آبل[۸] و دیگران پایه گذاری شد. حقیقت این است که هر دو عملگر مشتق و انتگرال عملگرهایی هستند که شامل مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح نیز به عنوان حالتی خاص هستند. حساب دیفرانسیل کسری دارای کاربردهای فراوانی در جریان شاره‌ها، نظریه کنترل دستگاه‌های مکانیکی، شبکه‌های الکترونیکی، آمار و احتمال، فرآیندهای دینامیکی در ساختارهای خود متشابه و متخلخل، الکتروشیمی، اپتیک، پردازش سیگنالی و بسیاری علوم دیگر است. حساب دیفرانسیل کسری ابزاری قدرتمند برای توصیف ویژگی‌های حافظه‌ای و وراثتی مواد و روندهای گوناگون ارائه می‌دهد. درحقیقت بسیاری از پدیده‌های فیزیکی فقط به زمان حال بستگی ندارند بلکه به تاریخچه زمانی پیشین خود نیز وابستگی دارند که در این صورت می‌توان آنها را با تئوری مشتق و انتگرال از مرتبه کسری مدل سازی کرد [۸، ۱۶، ۵۹، ۶۹، ۷۳، ۸۱، ۹۷، ۹۹]. این امتیاز اصلی مشتقات کسری در مقایسه با مدل‌های مرتبه صحیح آنها با وجود مهم و مؤثر بودن نادیده انگاشته شده است.

تعریف‌های متفاوتی برای مشتقات از مرتبه کسری وجود دارد ولی تمرکز ما در این رساله بر دو گونه معروف‌تر آن یعنی ریمن_لیوویل و کاپوتو است. روش‌های ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در مقالات متفاوت هستند ولی تعداد کمی از مقالات به

[۲] J. Liouville
[۳] Grünwald
[۴] Euler
[۵] Lagrange
[۶] Heaviside
[۷] Fourier
[۸] Abel

توسیع روش آنالیز گروهی لی به معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری پرداخته‌اند و این یکی از اهداف اصلی است که در این رساله دنبال می‌شود. در این رساله همچنین معادلات کمتر شناخته شدهٔ دیفرانسیل‐انتگرال از مرتبه کسری را معرفی می‌کنیم. این معادلات که شامل جملاتی از نوع انتگرال یا مشتق و یا متغیرهای دیفرانسیلی هستند، بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از جمله رسانش گرما در مواد را توصیف می‌کنند. بیشتر مقالات مرتبط با این معادلات به اثبات وجود و یکتایی جواب برای این معادلات پرداخته‌اند. در میان روش‌های اندکی که برای حل این معادلات ارائه شده روش آنالیز گروهی یک از بهترین روش‌هاست که در این رساله به آن پرداخته‌ایم.

در فصل دوم این رساله چنان که مرسوم است ابتدا به بیان پیش نیازها و سپس معرفی انواع معادلات دیفرانسیل از تقریبی و دیفرانسل‐انتگرال و سپس معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری و معادلات دیفرانسیل‐انتگرال مرتبه کسری پرداخته‌ایم. در این فصل همچنین مقدماتی از حساب دیفرانسیل کسری جهت آشنایی بیشتر خواننده ذکر شده است. در فصل سوم سعی شده است با دید فیزیکی و جبری به مفهوم تقارن و روش‌های برگرفته از آن در حل معادلات بپردازیم. در این فصل روش تقارن به انواع معادلات معرفی شده در فصل دوم بسط داده خواهد شد و برای هرکدام نیز مثالی مناسب جهت درک بهتر ارائه خواهد شد. در فصل چهارم چندین روش مختلف از جمله روش مستقیم، روش ابراگیموف و روش هرمان‐پل برای یافتن قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه و معایب و مزایای هر روش بیان خواهد شد. در فصل پنجم از روش‌های بیان شده در فصل چهارم برای یافتن قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل‐انتگرال مرتبه کسری بهره خواهیم گرفت. در فصل ششم نیز به معرفی نرم افزار محاسباتی Maple پرداخته شده است و با کمک این نرم افزار به اجرای الگوریتم یافتن تقارن و قوانین پایستگی برای انواع معادلات خواهیم پرداخت.

فصل ۲

پیش نیازها

مطالعهٔ این نوشتار مستلزم اشراف کامل به هندسهٔ منیفلدها است، لذا برای پرهیز از طولانی شدن کلام و ایجاد یکپارچگی مطالب از بیان مجدد بسیاری از تعاریف پایه چون منیفلدها و زیر منیفلدها، میدان‌های برداری، فرم‌های دیفرانسیلی، فضای مماس و ... خودداری می‌نماییم. لازم به ذکر است تعاریف یاد شده در اکثر کتاب‌های هندسه پایه همچون [۶۲، ۷۴، ۷۵، ۱۰۲]، یافت شده و خواننده در صورت لزوم می‌تواند به آنها مراجعه نماید. به جهت اهمیت فراوان ساختار معادلات در حل آنها و ارتباط آن با موضوع این نوشتار در این فصل به بیان مقدمات و معرفی انواع معادلات دیفرانسیل و نیز معرفی حساب دیفرانسیل کسری خواهیم پرداخت.

۱.۲ ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل

با انقلاب موثر در علم که پیشتر توسط اسحاق نیوتن پیش بینی شده بود، نقش کلیدی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در ریاضیات و کاربردهای فراوان آن آشکار شد. مثال‌های قابل توجهی از پدیده‌های بنیادین فیزیکی توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل‌سازی می‌شوند.

بیشتر معادلات دیفرانسیل جزئی بلافاصله پس از کشف آنها و یا به نام نخستین پیشنهاد کنندگان آنها نامگذاری می‌شوند، از جمله این زمینه‌ها و معادلات آنها، مکانیک کوانتومی

(معادلات شرودینگر[۱] و دیراک[۲])، نظریه نسبیت عام (معادله اینشتین[۳])، الکترومغناطیس (معادله ماکسول[۴])، علم اپتیک (معادلات ایکنال[۵]، ماکسول ـ بلاچ[۶]، شرودینگر غیر خطی)، مکانیک سیالات (معادلات اویلر[۷]، نویر[۸] ـ استوکس[۹]، کورتوج[۱۰] ـ دو ریس[۱۱])، ابر رسانایی (معادله گینزبرگ[۱۲] ـ لاندا[۱۳])، نظریه پلاسما (معادله ولاسو[۱۴])، مغناطیس و هیدرو دینامیک (معادلات ماکسول و نیز نویر ـ استوکس)، ترمو دینامیک (معادله گرما)، بررسی واکنش‌های شیمیایی (معادله کلموگروف[۱۵] ـ پتروسکی[۱۶] ـ پیسکونوف[۱۷])، مالی و اقتصاد (معادله بلک[۱۸] ـ شولز[۱۹])، علم عصب شناسی (معادله فیتزهوگ[۲۰] ـ ناگیومو[۲۱]) و بسیاری دیگر هستند برای مثال‌ها و نمونه‌های بیشتر به [۷۶] رجوع نمایید. مشکل اساسی اینجاست با وجود اینکه انواع این معادلات به عنوان مدل‌های فیزیکی اعم از فیزیک کلاسیک، کوانتوم و نسبیت شناخته شده‌اند، اکثر این معادلات دیفرانسیل جزئی به سختی قابل حل هستند. در اکثر موارد تنها راه محاسبه و درک راه حل‌های آنها، طراحی طرح‌های تقریبی پیچیده عددی و هندسی است. پس برای حل این معادلات نیازمند درک عمیقی از خواص تحلیلی پایه آنها هستیم. در این بخش ساختار هندسی این معادلات را بررسی خواهیم کرد.

منظور از یک معادله دیفرانسیل رابطه‌ای بین متغیرهای مستقل و متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته نسبت به متغیرهای مستقل است. فضای کامل را فضای تمام متغیرهای مستقل و وابسته در نظر می‌گیریم. در ادامه بعد از اندکی مقدمات به معرفی فضای جت می‌پردازیم [۷۵].

یک تابع هموار حقیقی مقدار p ـ متغیره $f(x^1,\cdots,x^p)$، دارای تعداد
$$p_k=\binom{p+k-1}{k}$$
مشتق جزئی متمایز از مرتبه k است که این مشتقات به صورت
$$\partial_J f(x)=\frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}\cdots\partial x^{j_k}}$$
خواهند بود که با اندیس‌های چندگانه متقارن $J=(j_1,\cdots,j_k)$ $p \geqslant j_k \geqslant 1$ از مرتبه $J \neq k$ نماد گذاری شده است. بنابراین اگر q متغیر وابسته $(u^1,\cdots,u^q)$ را داشته باشیم به تعداد $q_k=qp_k$ مختصات متمایز u_J^α، $1\leqslant\alpha\leqslant q$ برای نشان دادن تمامی مشتقات مرتبه k ـ ام متمایز $u_J^\alpha=\partial_J f^\alpha(x)$ از یک تابع $u=f(x)$ نیاز داریم.

برای فضای کامل $E=X\times U\simeq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$، فضای جت مرتبه n ـ ام
$$J^{(n)}=J^{(n)}E=X\times U^{(n)}$$

---

[۱] Schrödinger
[۲] Dirac
[۳] Einstein
[۴] Maxwell
[۵] Eikonal
[۶] Bloch
[۷] Euler
[۸] Navier
[۹] Stokes
[۱۰] Korteweg
[۱۱] de Vries
[۱۲] Ginzburg
[۱۳] Landa
[۱۴] Vlasov
[۱۵] Kolmogorov
[۱۶] Petrovsky
[۱۷] Piskounov
[۱۸] Black
[۱۹] Scholes
[۲۰] Fitzhugh
[۲۱] Nagumo

یک فضای اقلیدسی از بعد

$$p + p^{(n)} \equiv p + q\binom{p+n}{n}$$

است که مختصات آن شامل p متغیر مستقل x^i، q متغیر وابسته u^α و مختصات مشتق u^α_J، $\alpha = 1, \cdots, q$، از مرتبه $1 \leqslant J \leqslant n$ می‌باشد. نقاط در فضای عمودی (تار) $U^{(n)}$ با $u^{(n)}$ نمایش داده می‌شوند و شامل همه متغیرهای وابسته و مشتقات آنها تا مرتبه n می‌باشند. بنابراین مختصات نقطه معمولی $z \in J^{(n)}$ با $(x, u^{(n)})$ نمایش داده می‌شوند. چون مختصات مشتق $u^{(n)}$ یک زیر مجموعه از مختصات مشتق $u^{(n+k)}$ تشکیل می‌دهد پس یک نگاشت تصویری طبیعی $\pi^{n+k}_n : J^{(n+k)} \to J^{(n)}$ با رابطه $\pi^{n+k}_n(x, u^{(n+k)}) = (x, u^{(n)})$ روی فضای جت وجود دارد. قابل ذکر است که $\pi^n_0(x, u^{(n)}) = (x, u)$ یک تصویر از $J^{(n)}$ به $E = J^0$ است. اگر $M \subset E$ یک زیر مجموعه باز E باشد، سپس $J^{(n)}M = (\pi^n_0)^{-1}M \subset J^{(n)}E$ یک زیر مجموعه باز فضای جت مرتبه nــام است که تصویر را به M بازتاب می‌کند.

تعریف ۱.۱.۲. یک تابع هموار حقیقی مقدار $F : J^{(n)} \to \mathbb{R}$ که روی یک زیر مجموعه باز از فضای جت مرتبه nــام تعریف شده است، یک تابع دیفرانسیلی مرتبه nــام نامیده می‌شود.

هر معادله دیفرانسیلی مرتبه n از صفر قراردادن یک تابع دیفرانسیلی مرتبه nــام حاصل می‌شود. به عنوان مثال معادله لاپلاس[۲۲] در صفحه $u_{xx}+u_{yy} = 0$ توسط تابع دیفرانسیلی مرتبه دوم $F(x, u^{(2)}) = u_{xx} + u_{yy}$ که روی $J^{(2)}E$ تعریف شده و در آن $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ دارای مختصات (x, y, u) می‌باشد، به دست می‌آید. توجه داشته باشید که هر تابع دیفرانسیلی مرتبه nــام به طور خودکار یک تابع دیفرانسیلی روی هر فضای جت مرتبه بالاتر تعریف می‌کند و این صرفا با درنظر گرفتن مختصات $(x, u^{(n)})$ از $J^{(n)}$ به عنوان زیر مجموعه ای از مختصات $(x, u^{(n+k)})$ از $J^{(n+k)}$ صورت می‌گیرد. در واقع یک معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که مشتقات از یک تابع وابسته به یک یا چند متغیر را به یکدیگر مرتبط می‌کند. یک معادله دیفرانسیل، معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) نامیده می‌شود اگر تابع u فقط به یک متغیر بستگی داشته باشد و در صورت وابستگی u به بیشتر از یک متغیر آن معادله دیفرانسیل معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) نامیده می‌شود. مرتبه یک معادله دیفراسیل بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در آن معادله است. مرتبه یک معادله صفر است اگر هیچ مشتقی از تابع u در آن معادله ظاهر نشده باشد. دو نماد رایج برای نشان دادن مشتقات جزئی وجود دارد. نخست نماد آشنای لایبنیتز[۲۳] است که به صورت d بوده و برای نشان دادن مشتقات معمولی از یک تابع با یک متغیر به کار می‌رود، و نماد دوم ∂ می‌باشد و برای نشان داده مشتق یک تابع با بیش از یک متغیر به کار می‌رود. نماد خلاصه شده جایگزین برای نشان دادن مشتقات جزئی استفاده از اندیس است. برای مثال u_t نشان دهنده $\partial u/\partial t$ می‌باشد درحالیکه u_{xx} نشان دهنده $\partial^2 u/\partial x^2$ و برای نشان دادن $\partial^3 u/\partial x^2 \partial y$ از نماد فشرده u_{xxy} استفاده می‌کنیم.

---

[۲۲] Laplace

[۲۳] Leibniz

تعریف ۲.۱.۲. یک دستگاه mـ معادله دیفرانسیل مرتبه nـ ام به صورت

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, m, \tag{۱.۲}$$

نشان داده می‌شود که دارای p متغیر مستقل $x = (x^1, \cdots, x^p)$ و q متغیر وابسته به صورت $u = (u^1, \cdots, u^q)$ می‌باشد. $u^{(n)}$ نشان دهنده مشتقات u نسبت به x تا مرتبه n می‌باشد. دستگاه معادلات (۱.۲) که اغلب به اختصار با $\Delta = 0$ نمایش داده می‌شود، با صفر کردن یک مجموعه از توابع دیفرانسیلی $\Delta_\nu : J^{(n)} \to \mathbb{R}$ تعریف شده روی فضای جت مرتبه nـ ام حاصل می‌شود. تابع $\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \cdots, \Delta_m(x, u^{(n)}))$ در تمامی مؤلفه‌هایش هموار درنظر گرفته می‌شود. پس Δ یک نگاشت هموار از فضای جت $X \times U^{(n)}$ به فضای اقلیدسی m بعدی $\mathbb{R}^m$ می‌باشد.

دستگاه معادله دیفرانسیل (۱.۲) می‌تواند توسط یک چندگونای مشمول در فضای جت مرتبه nـ ام به فرم

$$\mathcal{S}_\Delta = \Big\{(x, u^{(n)}) | \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, m\Big\}, \tag{۲.۲}$$

نیز تعریف شود. این چند گونا شامل تمام نقاط $(x, u^{(n)}) \in J^{(n)}$ صادق در دستگاه معادلات می‌باشد. توابع تعریف شده Δ_ν همگی در همسایگی $\mathcal{S}_\Delta$ منظم هستند به این معنی که ماتریس ژاکوبین توابع Δ_ν نسبت به متغیرهای جت $(x, u^{(n)})$ همه جا روی $\mathcal{S}_\Delta$ رتبه ماکسیمال m را داشته باشد. اگر r رتبه دستگاه معادلات مفروض باشد $\mathcal{S}_\Delta$ یک زیر منیفلد از $J^{(n)}$ از بعد $p + q\binom{p+n}{n}$ می‌باشد. ما همچنین فرض می‌کنیم که نگاشت تصویری $\pi^n_X : J^{(n)} \to X$، $\mathcal{S}_\Delta$ را به روی زیر مجموعه باز از فضای متغیرهای مستقل می‌نگارد.

در ادامه برخی از انواع معادلات دیفرانسیل را که در این رساله با آنها روبه‌رو هستیم را بررسی خواهیم کرد.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل تقریبی

یکی از انواع پر کاربرد معادلات در فیزیک معادلات دیفرانسیل تقریبی هستند. این معادلات در صورت خود شامل پارامتر کوچکی به نام پارامتر اختلال هستند که آن را با ϵ نشان می‌دهیم. در تمامی این بخش ما معادلات تقریبی را در اولین مرتبه دقت در ϵ در نظر خواهیم گرفت. خواننده برای یافتن مثال‌ها و کاربردهای بیشتر این معادلات می‌تواند به منبع [۴۴] مراجعه نماید. در ادامه برخی تعاریف و نمادگذاری‌های مقدماتی ارائه خواهد شد.

۱.۲.۲ نمادها وتعریف ها

در این بخش ما با توابع $f(x, \epsilon)$ سر وکار داریم که از n متغیر $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ و یک پارامتر ϵ تشکیل شده است که این پارامتر موضعاً در یک همسایگی $\epsilon = 0$ در نظر گرفته می‌شود. این

توابع در ϵ، x ها و نیز در مشتق های مراتب بالاتر آنها نیز پیوسته هستند. در صورت صادق بودن تابع $f(x,\epsilon)$ در شرط

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x,\epsilon)}{\epsilon^p}=0,$$

می‌توان آن را به صورت $f(x,\epsilon)=O(\epsilon^p)$ نوشت که در این صورت f از مرتبه کمتر از ϵ^p گفته می شود . شرط بالا را به صورت دیگری نیز می توان بیان کرد، می گوییم یک ثابت $C>0$ وجود دارد که

$$|f(x,\epsilon)|\leqslant C|\epsilon|^{p+1};$$

یابه طور معادل می توان گفت یک تابع تحلیلی $\varphi(x,\epsilon)$ در همسایگی $\epsilon=0$ وجود دارد که :

$$f(x,\epsilon)=\epsilon^{p+1}\varphi(x,\epsilon).$$

اگر رابطه

$$f(x,\epsilon)-g(x,\epsilon)=O(\epsilon^p),$$

برقرار باشد آنگاه توابع f,g (با یک خطای $O(\epsilon^p)$) تقریباً مساوی گفته می شوند و به صورت زیر نوشته می شوند؛

$$f(x,\epsilon)=g(x,\epsilon)+O(\epsilon^p),$$

یا به اختصار می توان نوشت $f\approx g$. تساوی تقریبی که در بالا تعریف شد یک رابطه هم ارزی تعریف می کند. رده هم ارزی را می توان اینگونه تعریف کرد که $f(x,\epsilon)$ و $g(x,\epsilon)$ اعضای یک رده هم ارزی هستند اگر و فقط اگر $f\approx g$. یک تابع $f(x,\epsilon)$ را در نظر بگیرید، فرض کنید که چند جمله‌ای

$$f_0(x)+\epsilon f_1(x)+\cdots+\epsilon^p f_p(x)$$

چند جمله‌ای تقریبی از درجه p است که از بسط تیلور $f(x,\epsilon)$ حول $\epsilon=0$ در توانهای ϵ به دست آمده است . سپس هر تابع $f\approx g$ را می‌توان با بسط

$$g(x,\epsilon)=f_0(x)+\epsilon f_1(x)+\cdots+\epsilon^p f_p(x)+O(\epsilon^p)$$

نمایش داد. در نتیجه نمایش

$$f_0(x)+\epsilon f_1(x)+\cdots+\epsilon^p f_p(x)$$

نمایشی متعارف از رده هم ارزی توابع شامل f نامیده می‌شود. بنابر این، رده هم ارزی از توابع $f(x,\epsilon)\approx g(x,\epsilon)$ با مرتب کردن $(p+1)$ تابع $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_p(x)$ به دست می‌آید.

۲.۲.۲ معادلات تقریبی با پارامتر ϵ

در پاره ای از موارد معادلات دیفرانسیلی که در مدل سازی‌های ریاضی ظاهر می شوند با جمله‌ی شامل یک پارامتر کوچک ارائه می‌شوند [۴۲، ۴۳]. این پارامتر کوچک که آن را با ϵ نشان می‌دهیم، پارامتر اختلال نامیده می‌شود. صورت کلی این معادلات به شکل زیر است

$$F(z,\epsilon) \equiv F_0(z) + \epsilon F_1(z) \approx 0. \qquad (۳.۲)$$

معادله $F_0(z) = 0$ بخش غیر اختلال معادله تقریبی اختلال (۳.۲) نامیده می‌شود. به عنوان مثال معادله زیر یک معادله تقریبی است

$$F(x,y,\epsilon) \equiv y^{2+\epsilon} - \epsilon x^2 - 1 = O(\epsilon), \qquad (۴.۲)$$

بعد از بازنویسی معادله فوق با همان درجه دقت داریم:

$$F(x,y,\epsilon) \equiv y^2 - \epsilon(x^2 - y^2 \ln y) - 1 \approx 0. \qquad (۵.۲)$$

مثالی دیگر در میان معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه دوم با یک پارامتر کوچک، معادله نوسانگر

$$y'' + y + \epsilon(y'^3 - y') = 0, \qquad (۶.۲)$$

می‌باشد که به معادله ون در پل [۲۴] مشهور است و از جایگاه ویژه‌ای در مقالات برخوردار است. این معادله نخستین بار توسط یک فیزیک‌دان و مهندس برق اهل هلند به نام بالتازار ون در پول در آزمایشگاه کشف شد. در دینامیک این معادله، معادله یک نوسانگر غیر پایستار است که y نشان دهنده مکان نوسانگر بوده که تابعی از زمان است. در زیست شناسی این معادله در یک میدان مسطح به عنوان مدلی برای پتانسیل‌های عمل نورون‌ها گسترش یافته است و در حال حاضر به عنوان یک نوع چرخه محدود در مدارهای الکتریکی با استفاده از لوله‌های خلاء به کار می‌رود.

مثالی دیگر معادله اختلال غیر خطی موج است که به فرم زیر می‌باشد:

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x + \epsilon u_t = 0. \qquad (۷.۲)$$

این معادله نیز از معادلات دیفرانسیل جزئی مهم مرتبه دوم است که برای توصیف انتشار امواجی که در فیزیک کلاسیک روی می‌دهد، اعم از موج های مکانیکی (همچون امواج آب، امواج صوت و امواج زلزله) و امواج نوری به کار می‌رود. در حالت تقریبی پارامتر کوچکی از منبعی نامعلوم اختلالی در شکل انتشار امواج ایجاد میکند. بخش غیر اختلال معادله (۷.۲) به صورت $u_{tt} - (u^2 u_x)_x$ و بخش اختلال آن u_t می‌باشد. به همین صورت معادلات فراوان دیگری از معادلات دیفرانسیل تقریبی می‌توان مثال زد.

[۲۴] Van der Pol

۳.۲ معادلات دیفرانسیل_انتگرال

انواع زیادی از معادلات با عملگرهای غیر خطی وجود دارند از جمله معادلات دیفرانسیل ـ انتگرال، معادلات دیفرانسیل تأخیری، معادلات دیفرانسیل تصادفی و بسیاری دیگر که کمتر شناخته شده‌اند. این معادلات برای مدت‌های بسیار طولانی در ریاضیات و در بسیاری از علوم و کاربردهای مهندسی مورد مطالعه بوده‌اند. جهت دیدن مثال‌های بیشتر خواننده را به [۵۶] ارجاع می‌دهیم.

در ریاضیات، یک معادله دیفرانسیل_انتگرال (IDE) معادله‌ای است که هم زمان شامل انتگرال و مشتقات یک تابع است. اگر حدود یک انتگرال ثابت باشند آن معادله دیفرانسیل_انتگرال، معادله انتگرال فردهلم [۲۵] و اگر یکی از حدود انتگرال متغیر باشد، آن معادله، معادله‌ی انتگرال ولترا [۲۶] نامیده می‌شود [۱۰۳]. اگر تابعی نامعلوم تنها در درون انتگرال داشته باشیم آن معادله را معادله انتگرال نوع اول، و اگر تابعی نامعلوم در درون و بیرون انتگرال داشته باشیم آن معادله، معادله انتگرال نوع دوم نامیده می‌شود. برای مثال معادله انتگرال

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x-t)u(t)dt, \tag{۸.۲}$$

یک معادله انتگرال فردهلم ازنوع دوم است. جالب است بدانیم که هر معادله‌ای که شامل انتگرال و مشتقات از یک تابع نا معلوم $u(x)$ باشد معادله دیفرانسیل_انتگرال نامیده می‌شود.

با این توضیحات معادله انتگرال_دیفرانسیل از نوع فردهلم به صورت

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \qquad u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k},$$

و معادله دیفرانسیل_انتگرال از نوع ولترا به صورت زیر خواهد بود:

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \qquad u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}.$$

معروف‌ترین معادلات دیفرانسیل_انتگرال، معادلات جنبشی (KE) هستند که پایه نظریه‌های جنبشی گازهای رقیق، پلاسما، رادیواکتیو و لختگی را تشکیل می‌دهند. معادله جنبشی بولتزمن [۲۷] در دینامیک گازهای رقیق، معادلات لاندا و ولاسو در فیزیک پلاسما و معادله اسمولوچوسکی [۲۸] در نظریه انعقاد از این جمله هستند. معادلات جنبشی، تکامل زمانی تابع توزیع (DE) از برخی ذرات که با یکدیگر در فعل و انفعال هستند مانند مولکول‌های گاز، یون ها، الکترون‌ها، ذرات معلق و غیره را توصیف می‌کنند. DE به معنای یک تابع چگالی احتمال غیرعادی است که در فضای متغیرهای دینامیکی از ذرات تعریف شده است. سیستم معادلات دیفرانسیل_انتگرال (IDEs) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W\left(F(x,y,y_1,\cdots,y_m), \int_X f(x,y,y_1,\cdots,y_k)dx^1\cdots dx^l\right) = 0, \tag{۹.۲}$$

[۲۵] Fredholm
[۲۶] Volterra
[۲۷] Boltzmann
[۲۸] Smoluchowski

که n, m, k, l اعداد طبیعی دلخواه هستند و $l \leq n$ و $x = (x^1, \cdots, x^n)$ توابع W, F و f دلخواه هستند که باید به اندازه کافی منظم باشند تا وجود جواب برای این معادله را تضمین کنند. در این معادله حدود انتگرال ها (حوزه X) نیز دلخواه است. نماد y_m نشان دهنده مجموعه همه مشتقات جزئی از مرتبه m است:

$$y_m = \left\{ \frac{\partial^m y}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_m}} \equiv \partial_{x^{i_1}} \cdots \partial_{x^{i_m}} y \equiv y_{i_1 \cdots i_m} \right\}. \qquad (۱۰.۲)$$

معادله (۸.۲) در صورتی که $f = 0$ باشد به یک معادله دیفرانسیل جزئی تبدیل می‌شود. همانطور که بیان شد مثال‌های فراوانی از معادلات دیفرانسیل_انتگرال وجود دارند که در ادامه به دو نمونه از آنها اشاره خواهیم کرد.

معادله زیر ساده‌ترین مدل از معادله جنبشی بولتزمن است که معادله کاتس[۲۹] نامیده می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + F\frac{\partial f}{\partial v} = J(f, f), \qquad (۱۱.۲)$$

در معادله فوق داریم:

$$J(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int -\pi^{\pi} g(\theta)[f(v')f(w') - f(v)f(w)]d\theta. \qquad (۱۲.۲)$$

در اینجا $f = f(t, v, x)$ همان تابع توزیع DE و $J(f, f)$ عملگر برخورد انتگرال و F نیروی خارجی است. $g(\theta) = g(-\theta)$ کرنل وابسته به برهم‌کنش‌های ذرات با شرایط نرمال است که

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)d\theta = 1. \qquad (۱۳.۲)$$

به عنوان یک مثال مهم دیگر از معادلات دیفرانسیل_انتگرال می‌توان از دستگاه معادلات ولاسو_ماکسول نام برد. این دستگاه معادلات برای توصیف تابع توزیع اجزای باردار پلاسما همچون الکترون‌ها و یون‌های مثبت به کار می‌رود. صورت این دستگاه عبارتست از:

$$\begin{cases} \partial_t f_\alpha + u\partial_x f_\alpha + \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha} E\partial_u f_\alpha = 0, \\ \partial_t E + \displaystyle\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} u f_\alpha du = 0, \\ \partial_x E - \displaystyle\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha du = 0, \end{cases} \qquad (۱۴.۲)$$

که $E = E(t, x)$ مولفه x از میدان برداری $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$، u مؤلفه x از بردار سرعت $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$ و $f_\alpha = f(t, x, u)$ تابع توزیع مؤلفه‌های پلاسما هستند. در این دستگاه معادلات q_α و m_α به ترتیب بار و جرم این ذرات و ϵ_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ می‌باشد [۱۰۵].

---

[۲۹] Kac

۴.۲ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

حساب دیفرانسیل کسری در واقع همان تعمیم مفاهیم مشتق و انتگرال مرسوم از مرتبه صحیح به مرتبهٔ دلخواه غیر صحیح است. تاریخچهٔ این حساب به زمان اختراع حساب دیفرانسیل توسط لایبنیتز و نیوتن باز می‌گردد [۶۳]. معادلات دیفرانسیل کسری تعمیمی از معادلات دیفرانسیل سابق به مرتبهٔ غیر صحیح بوده و دارای کاربردهای زیادی در علوم مختلف هستند. مطالعات نشان داده است که مدل‌های دیفرانسیل کسری به دلیل توصیف دقیق‌تر پدیده‌های غیر خطی بسیار کارآمدتر از مدل‌های دیفرانسیل مرتبه صحیح هستند. در این بخش به معرفی مقدمات این حساب خواهیم پرداخت.

۱.۴.۲ تاریخچه محاسبات کسری

مفهوم مشتق شاید یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در بین تمامی رشته‌های ریاضی باشد. این مفهوم معنای فیزیکی دارد و می‌توان تفاسیر متعدد و واضحی از آن داشت، از این جمله می‌توان میزان تغییرات و رابطه‌ی بین فاصله‌ی طی شده با سرعت و شتاب معین را نام برد. ظاهراً مفهوم انتگرال مفهوم کاملاً متفاوتی است که معنای هندسی آن مساحت محصور در زیر نمودار است و در فیزیک می‌توان کاربردهای زیادی برای آن تعریف کرد. به عنوان مثال کار انجام شده در یک فرآیند ترمودینامیکی از انتگرال رابطه فشار و حجم به دست می‌آید. بدیهی است آنچه ما در اینجا به دنبال آن هستیم تعابیر مختلف هندسی و فیزیکی مشتق و انتگرال نبوده و در پی ارائه صورت غیر معمول کسری از این دو مفهوم هستیم.

ایده مشتق کسری در نخستین بار به مجموعه‌ای از نامه‌های رد و بدل شده بین لایبنیتز و هوپیتال[۳۰] در تاریخ سی‌ام سپتامبر ۱۶۹۵ نسبت داده می‌شود [۸۰]. آنچه هوپیتال پرسید این بود که اگر در مشتق $\frac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$، n را برابر با $\frac{1}{2}$ بگیریم چه روی خواهد داد؟ لایبنیتز پاسخ داد که احتمالاً $d^{\frac{1}{2}}$ را می‌توان به صورت یک سری نامتناهی نوشت. نخستین پرسشی که برای ما مطرح می‌شود این است که آیا $D^{\frac{1}{2}}$ وجود دارد؟ پاسخ آری است زیرا با دوبار اعمال اپراتور مذکور به $(D^{\frac{1}{2}})^2 = D$ خواهیم رسید. سوال دیگر این است که آیا D^n برای nهای منفی نیز وجود دارد یا خیر؟ پاسخ این است که اپراتور مطرح شده با توان منفی همان اپراتور انتگرال کسری است.

لایبتیز مکاتباتی هم با برنولی[۳۱] و والیس[۳۲] در رابطه با مشتقات با نمای کسری داشته است. به نظر می‌رسد نخستین مطالعات کم و بیش سیستماتیک در این زمینه به اوایل و اواسط قرن نوزدهم توسط لیوویل[۳۳] ، ریمن[۳۴] و هولمرن[۳۵] برمی‌گردد. هرچند در قرن هجدهم دانشمندانی از قبیل اویلر و لاگرانژ[۳۶] و... نیز در این زمینه کمک‌های شایانی داشته‌اند. آنچه

[۳۰] Hopital
[۳۱] J. Bernoulli
[۳۲] Wallis
[۳۳] J. Liouville
[۳۴] G. F. B. Riemman
[۳۵] Holmgren
[۳۶] Lagrange

بیان شد پایه‌ای برای شکل گیری مبحثی در ریاضیات به نام محاسبات کسری شد. در این رساله بیان خواهیم کرد که مشتقات و انتگرال‌های مرتبه کسری مانند نمونه های مرتبه صحیح آنها به سادگی قابل لمس و بسط بوده و بعد جدیدی از ریاضیات را به روی ما می‌گشایند.

تعاریف متفاوتی برای مشتق از مرتبه کسری وجود دارد از این جمله گرونوالد[۳۷]ـ لتنیکوف[۳۸]، ریز [۳۹]، کاپوتو[۴۰]، ریمن‌ـ لیوویل، میلر[۴۱] و راس[۴۲] می‌توان نام برد. نام آشناترین این تعاریف برای ما ریمن‌ـ لیوویل و کاپوتو هستند. مزایای فراوانی برای این دو مشتق می‌توان برشمرد، از جمله اینکه مشتق کاپوتو امکان فرمول بندی مسائل را باشرایط مرزی مرتبه صحیح به دست می‌دهد. همچنین امکان تبدیل مشتق کاپوتو با کمک تبدیل لاپلاس کار با این مشتق را جذاب می‌نماید. اما هریک از این تعاریف دارای نواقصی هستند که از سازگاری کامل آنها با مشتق مرتبه صحیح می‌کاهد. برای نمونه از ایراداتی که به مشتق کاپوتو وارد است این است که برای محاسبه مشتق مرتبه اول نیاز به دانستن مشتق مرتبه دوم داریم. مشتق ریمن‌ـ لیوویل نیز دارای نواقصی هست از جمله اینکه مشتق از عدد ثابت صفر نیست. با این همه به دلیل محبوبیت مشتق کاپوتو و ریمن‌ـ لیوویل در میان محققان به ویژه در بخش معادلات دیفرانسیل جزئی، تمرکز کار ما بر روی این دو مشتق استوار است. در چند دهه اخیر کتب و مقالات زیادی به ارائه و بسط حساب دیفرانسیل کسری اختصاص پیدا کرده‌اند. بررسی اجمالی درباره تاریخچه و گسترش حساب دیفرانسیل کسری توسط راس در [۹۵] ارائه شده است. در کتب مشابه در این زمینه مانند [۹۷] و [۷۳] بیشتر به تعاریف و ویژگی‌های عملگرهای مشتق و انتگرال از مرتبه کسری پرداخته شده است. مفصل‌ترین گردآوری از تعاریف مختلف مشتق کسری و کاربردهای آن در زمینه حساب کسری توسط ایگور پادلابنی[۴۳] در [۸۱] انجام شده است.

۲.۴.۲ تابع گاما

بنیادی‌ترین تعریف به زبان ساده برای تابع گاما همان بسط فاکتوریل برای تمامی اعداد حقیقی است. اگر بخواهیم یک تعریف جامع و کامل از تابع گاما داشته باشیم باید به حد زیر اشاره کنیم که توسط اویلر پیشنهاد شد:

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!N^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}.$$

اما تعریف انتگرالی آن اغلب رایج‌تر است:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x>0. \tag{۱۵.۲}$$

با کمک انتگرال جز به جز به رابطه بازگشتی $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ خواهیم رسید که نتیجه مستقیم از تعریف اویلر است. با فرض $\Gamma(1) = 1$، برای هر عدد صحیح مثبت n فاکتوریل

[۳۷] Grünwald
[۳۸] Letnikov
[۳۹] Riesz
[۴۰] Caputo
[۴۱] Miller
[۴۲] Ross
[۴۳] Igor Podlubny

را به صورت $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ خواهیم داشت. با بازنویسی رابطه بازگشتی به صورت $\Gamma(x-1) = \Gamma(x)/(x-1)$ درخواهیم یافت که $\Gamma(0)$ نامتناهی خواهد بود. برای $n \le N$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = (-N)(-N+1)\cdots(-n-2)(-n-1) = (-1)^{N-1}\frac{N!}{n!}.$$

معوکس $1/\Gamma(x)$ از تابع گاما برای تمامی xها تک مقدار و متناهی است که به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \sim \frac{x^{1/2-x}}{\sqrt{2\pi}}e^{x}, \quad x \to \infty.$$

برای تعمیم عملگرهای انتگرال و دیفرانسیل از مرتبه غیر صحیح از عبارت زیر بهره خواهیم برد:

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)},$$

که در آن j یک عدد صحیح غیرمنفی و q هرعددی می‌تواند باشد و ما از یک عبارت دوجمله‌ای به شکل

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)} = \binom{j-q-1}{j} = (-1)^j\binom{q}{j}, \tag{۱۶.۲}$$

برای بیان آن استفاده می‌کنیم. توجه به این نکته ضروری است که شیوه‌ی دیگری نیز برای بیان تابع گاما به صورت صریح وجود دارد و آن عبارت است از:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

نخستین جمله از عبارت فوق همان بسط سری برای تابع نمایی است و جمله دوم یک تابع کامل را تعریف می‌کند:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z} + \text{تابع کامل}, \quad z = -n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

در آنالیز مختلط یک تابع کامل که تابع انتگرال نیز نامیده می‌شود، یک تابع مختلط مقدار است که در تمام نقاط متناهی از دامنه‌اش روی صفحه اعداد مختلط، به طور مختلط دیفرانسیل پذیر است. نمونه‌های بسیار ساده از توابع کامل چند جمله‌ای ها و توابع نمایی هستند.

۳.۴.۲ عملگرهای دیفرانسیل و انتگرال کسری

لیوویل مطالعات وسیعی را در حسابان کسری انجام داد. وی دو تعریف مختلف از مشتقات کسری ارائه داد. در نخستین تعریف توابع را در سری نمایی

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(a_k x),$$

بسط داد. او مشتق مرتبه α سری فوق را با اعمال جمله به جمله، درست مانند حالتی که α یک عدد صحیح مثبت است تعریف کرد. سپس با تعمیم تعریف مشتق مرتبه صحیح $\frac{d^n}{dx^n}\exp(ax) = D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ به حالت کسری (با جایگذاری $n \in N$ با $\alpha \in \mathbb{C}$) فرمول زیر را به دست آورد:

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha \exp(a_k x). \tag{۱۷.۲}$$

محدودیت این تعریف به انتخاب α برای همگرایی سری (۱۷.۲) برمی‌گردد. این درحالیست که تعریف دوم محدودیتی در انتخاب α نداشت. اما به جای آن، محدودیت قوی‌تری روی نوع توابع به کار رفته داشت. لیوویل برای توابع از نوع $F(x) = \frac{1}{x^b}$ با پارامتر دلخواه b، مشتق کسری از مرتبه α را به صورت

$$D^\alpha x^{-b} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(b+\alpha)}{\Gamma(b)} x^{-b-\alpha}.$$

بسط داد. با وجود محدودیت‌های موجود در هر دو تعریف، لیوویل این تعاریف را در مقالات بعدی خود برای تعدادی از مسائل کاربردی در فیزیک، مکانیک و هندسه استفاده کرد. در سال ۱۸۴۷، ریمن تحقیقی روی تعمیم سری تیلور انجام داد. ریمن یک تعریف متفاوت پیشنهاد کرد که شامل یک انتگرال معین می‌شد و برای سری‌های توانی با نماهای غیر صحیح کاربردی بود. او تعریف انتگرال کسری از مرتبه α برای تابع مفروض $f(x)$ را به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \psi(x). \tag{۱۸.۲}$$

وجود تابع $\psi(x)$ به علت ابهام موجود در پایین انتگرال یعنی c است. از قرار معلوم این گرونوالد بود که نخستین بار نتایج ریمن و لیوویل را یکپارچه کرد و به یک فرمول انتگرال معین برای مشتق مرتبه αـام رسید. معادله (۱۸.۲) با حد پایین $c = 0$ و بدون تابع مکمل $\psi(x)$ همان چیزی است که امروزه انتگرال ریمن-لیوویل از مرتبه کسری نامیده می‌شود.

حال نکاتی را در مورد نماد ${}_cD_x^{-\alpha} f(x)$ در تعریف امروزی انتگرال کسری ریمن-لیوویل یادآوری می‌کنیم. نماد انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$${}_cD_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{۱۹.۲}$$

این نماد که هنوز در برخی از کتب جدید برای انتگرال کسری (و با جایگذاری α به جای $-\alpha$ در تعریف مشتق کسری) استفاده می‌شود، اولین بار توسط دیویس[۴۴] ساخته شد. اما این نمایش بسته به نوع انتخاب حد پایین، نام‌های مختلفی گرفته است؛ از جمله:

$${}_0D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad \text{فرمول ریمن}$$

(۲۰.۲)

$${}_{-\infty}D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt. \qquad \text{فرمول لیوویل}$$

[۴۴] H. T. Davis

این دو فرمول، علت نام‌گذاری فرمول (۱۹.۲) به ریمن–لیوویل را نشان می‌دهد.

با وجود اینکه نماد انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری فقط در علامت پارامتر α در (۱۹.۲) فرق می‌کند، تعویض انتگرال‌گیری کسری به مشتق‌گیری کسری، به طور مستقیم با تغییر علامت α در سمت راست (۱۹.۲) نمی‌تواند حاصل شود؛ این به این علت است که در واقع انتگرال $\int_c^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt$ به طور کلی واگراست. لذا مشتق ریمن–لیوویل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} {}_cD_x^{\alpha} f(x) &= {}_cD_x^{n-\beta} f(x) \\ &= {}_cD_x^n {}_cD_x^{-\beta} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_c^x (x-t)^{\beta-1} f(t)dt\right), \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

که $n = [\alpha]$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از α است و $0 < \beta = n - \alpha < 1$.

با استفاده از تعریف (۲۱.۲) به سادگی می توان نشان داد که مشتق کسری ریمن $(c = 0)$ برای تابع $f(x) = x^b$ با پارامتر دلخواه b برابر است با

$${}_0D_x^{\alpha} x^b = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-\alpha+1)} x^{b-\alpha}.$$

فرمول (۱۹.۲) اغلب به انتگرال کسری ویل[۴۵] منسوب است. در سال ۱۹۱۷ او با در نظر گرفتن تبدیل فوریه و انجام محاسباتی نشان داد که انتگرال کسری برای $0 < \alpha < 1$ را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$\begin{aligned} I_+^{\alpha}\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \\ I_-^{\alpha}\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{+\infty} (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

برخی از ویژگی‌های مشتقات ریمن–لیویل کار با آنها را سخت تر نموده و لزوم مفهوم توسعه یافته تری برای مشتقات کسری را نمایان می‌سازد. به عنوان مثال اگر عملگر مشتق در معادله دیفرانسیل کسری از نوع ریمن–لیوویل باشد شروط اولیه در این معادله به حالت کسری هستند این در حالیست که با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو شروط اولیه در معادلات دیفرانسیل کسری به حالت کلاسیک (مرتبه صحیح) می‌باشند.

۴.۴.۲ انتگرال کسری ریمن–لیوویل

یکی از تعاریفی که از یک انتگرال از مرتبه کسری مکرراً به آن برمی‌خوریم، تبدیل انتگرالی است که انتگرال ریمن–لیوویل نامیده می‌شود. برای شبیه سازی این تعریف ما فرمول کوشی[۴۶] برای انتگرال چندگانه را یادآوری می‌نماییم. فرض کنید $f(\zeta)$ پیوسته و در هر بازه متناهی $(0, t)$

[۴۵] Weyl
[۴۶] Cauchy

انتگرال‌پذیر باشد در این صورت داریم:

$$D^{-n}f(t) = \int_0^t \int_0^{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_1} f(t_0)dt_0 \cdots dt_{n-2}dt_{n-1}$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-n}}ds, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

که در آن $D^0 f(t) = f(t)$ و $f^{(-n)}$ یا D^{-n}، n بار انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد. جانشانی عدد صحیح n با عدد حقیقی α و فاکتوریل گسسته $(n-1)!$ با تابع پیوسته $\Gamma(n)$، انتگرال کسری ریمن_لیوویل زیر را

$$_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds,$$

نتیجه می‌دهد.اندیس‌های a و t دو حد مربوط به عملگر انتگرال گیری کسری در $_aI_t^\alpha f(t)$ را نمایش می‌دهند. در بعضی از کتب به جای انتگرال کسری I^α از نماد $R_D^{-\alpha}$ استفاده می‌کنند. با کمک انتگرال کسری ریمن_لیوویل حداقل دو تعریف متفاوت و کاربردی از مشتقات کسری می‌توانند فرمول بندی شوند. با این مقدمات اگر f یک تابع دو متغیره و $n = [\alpha] + 1$ یعنی $n - 1 < \alpha < n$ و نیز $t \in [0, T]$ باشد آنگاه انتگرال چپ ریمن_لیوویل از مرتبه α نسبت به متغیر t اینگونه تعریف می‌شود:

$$({}_0I_t^\alpha)f(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau,x)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau, \qquad t > 0. \tag{۲۳.۲}$$

برای تعریف انتگرال راست ریمن_لیوویل از مرتبه α داریم:

$$({}_tI_T^\alpha)f(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T \frac{f(\tau,x)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}d\tau, \qquad t < T. \tag{۲۴.۲}$$

با فرض اینکه $f(t)$ تابعی پیوسته برای $t \geq 0$ باشد ویژگی‌های زیر را برای انتگرال کسری ریمن_لیوویل می‌توان برشمرد.

- $\lim_{\alpha \to 0} I^\alpha(f(t)) = f(t),$
- $I_t^\alpha(I_t^\beta f(t)) = I_t^\beta(I_t^\alpha f(t)) = I_t^{\alpha+\beta}f(t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,$
- $I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha(f(t)) + I^\alpha(g(t)) \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C},$
- $I_t^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}t^{\alpha+\gamma}, \qquad I_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha,$

که $\gamma \geq -1$ و C عدد ثابت است. اثبات ویژگی‌های فوق در مرجع [۸۱] آمده است.

۵.۴.۲ مشتق کسری ریمن_لیوویل

مطالعه‌ای مختصر در حساب دیفرانسیل کسری نشان می‌دهد که بر خلاف حساب دیفرانسیل کلاسیک، مشتقات کسری ممکن است به روش‌های مختلفی تعریف شوند. روشی که اغلب

برای بیان این تعاریف استفاده می‌شود از انتگرال چندگانه و تعمیم آن به انتگرال از مرتبه کسری بهره می‌گیرد. مشتقات کسری سپس یا با تکرار انتگرال از مرتبه کسری (ایده لایبنیتز) و یا با مشتق مرتبه صحیح از انتگرال مرتبه کسری (پیشنهاد ریمن) تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۴.۲. برای تابع $f(x)$ که روی بازه $[a,b]$ تعریف می‌شودو $n=[\alpha]+1$، مشتق کسری چپ و راست ریمن–لیوویل نسبت به زمان از مرتبه $\alpha>0$ به ترتیب اینگونه تعریف می‌شود:

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = D_t^n({}_aI_t^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds, \qquad (۲۵.۲)$$

$$ {}_tD_b^\alpha f(t) = (-1)^n D_t^n({}_tI_b^{n-\alpha} f(t)) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \frac{f(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}}ds. \qquad (۲۶.۲)$$

برخی از ویژگی‌های اساسی مشتق ریمن–لیوویل در ذیل بیان شده است:

- ► $D_t^\alpha D_t^m f(t) = D_t^{\alpha+m} f(t) \neq D^m D^\alpha f(t), \quad m=0,1,2,\cdots$
- ► $D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) = f(t), \quad D_t^{\alpha-n} f(t) = I_t^{n-\alpha} f(t),$
- ► $D_t^\alpha t^\gamma = \dfrac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}, \quad D_t^\alpha C = \dfrac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha},$

فرض کنیم $\alpha>0$ و $\beta>0$ چنانچه $n-1<\alpha\leqslant n$ و $m-1<\beta\leqslant m$ و n و m متعلق به N باشند و $\alpha+\beta<n$ سپس داریم:

$$ ({}_aD_a^\alpha D^\beta) f(x) = ({}_aD^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^{m} ({}_aD^{\beta-j} f)(a) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} $$

که $\gamma \geq -1$ و C عدد ثابت است. اثبات ویژگی‌های فوق در مرجع [۸۱] آمده است.

۶.۴.۲ مشتق کسری کاپوتو

تعریف (۱.۴.۲) از مشتق کسری ریمن–لیوویل نقش مهمی در توسعه نظریه مشتق و انتگرال از مرتبه کسری و کاربردهای آن در ریاضیات محض از جمله حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح، تعریف توابع از کلاس جدید و جمع‌بندی سری‌ها ایفا نمود. با این حال تکنولوژی های جدید نیازمند به تجدید نظر خاص در تعاریف ریاضی از مشتق کسری بودند. مقالات منتشر شده بخصوص در زمینه ویسکوآلاستیسیته و مکانیک جامدات از مشتقات کسری برای توصیف بهتر ویژگی‌های مواد بهره می‌گرفتند [۸۵]. استفاده از مدل های ریاضی برای مدل سازی پدیده‌های ژئولوژیکی استفاده از معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری را رهنمون می‌شدند و درنتیجه لزوم فرمول‌بندی شرایط مرزی برای چنین معادلاتی حس می‌شد. متاسفانه مشتق ریمن–لیوویل منجر به شرایط مرزی شامل حد مشتق ریمن–لیوویل در پایین بازه $t=a$

خواهد شد، به عنوان مثال

$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-1}f(t)=b_1,$$
$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-2}f(t)=b_2,$$
$$\vdots$$
$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-n}f(t)=b_n,$$

که تمامی b_kها که $k=1,2,\cdots n$ ثابت هستند. در سال ۱۹۶۷ ریاضیدان ایتالیایی به نام کاپوتو مقاله‌ای منتشر کرد که حاوی تعریف جدیدی از اپراتور مشتقات از مرتبه کسری بود. یکی از بزرگترین امتیازات مشتق کاپوتو این است که شرایط مرزی برای معادلات دیفرانسیل کسری با مشتق کاپوتو، همان فرم معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح می‌باشد یعنی شامل حد مشتق مرتبه صحیح در پایین بازه $t=a$ خواهند بود.در ادامه تعریف این مشتق را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۲.۴.۲. برای تابع $f(x)$ که روی بازه $[a,b]$ تعریف می‌شود و $n=[\alpha]+1$، مشتق کسری چپ و راست کاپوتو نسبت به زمان از مرتبه $\alpha>0$ به ترتیب اینگونه تعریف می‌شود:

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}f(t)={}_aI_t^{n-\alpha}(D_t^nf(t))=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds, \tag{۲۷.۲}$$

$$ {}_t^CD_b^{\alpha}f(t)=(-1)^n{}_tI_b^{n-\alpha}(D_t^nf(t))=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b\frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}}ds. \tag{۲۸.۲}$$

یکی دیگر از ویژگی‌های مشتق کاپوتو این است که مشتق کاپوتو از عدد ثابت بر خلاف مشتق ریمن_لیوویل صفر می‌شود.

از دیگر خصوصیاتی که می‌توان برای مشتق کاپوتو برشمرد عدم جابجایی آن با مشتق معمولی است. به طوریکه اگر فرض کنیم D^m عملگر مشتق معمولی از مرتبه صحیح m باشد آنگاه

$$ {}^CD_t^{\alpha}D_t^m={}^CD_t^{\alpha+m}\neq D_t^m\,{}^CD_t^{\alpha}.$$

۷.۴.۲ رابطه‌ی بین مشتق ریمن_لیوویل و مشتق کاپوتو

فرض کنید $\alpha\geq 0$ و $n=[\alpha]+1$ و $f\in A^1[a,b]$ چنان باشد که هر دو مشتق ${}_aD_t^{\alpha}$ و ${}_a^CD_t^{\alpha}$ برای آن وجود داشته باشد در این صورت رابطه‌ی زیر بین این دو مشتق برقرار خواهد بود:

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}f(t)={}_aD_t^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D^kf(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}. \tag{۲۹.۲}$$

۸.۴.۲ ویژگی‌های مشتقات کسری

در این بخش تمرکز ما بر ویژگی‌های پرکاربرد مشتقات کسری در محاسبات خواهد بود.

۱) خطی بودن

درست مشابه با مشتق مرتبه صحیح، مشتق کسری یک عملگر خطی است:

$$D_t^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D_t^{\alpha}f(t)+\mu D_t^{\alpha}g(t), \tag{۳۰.۲}$$

که D^{α} نشان دهنده هریک از مشتقات کسری بیان شده در بخش‌های قبل است.

۲) قاعده لایبنیتز برای مشتق کسری

قاعده لایبنیتز برای مشتقات کسری به صورت زیر است:

$$D_t^{\alpha}[f(t)g(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}f(t)D_t^{n}g(t). \tag{۳۱.۲}$$

۳) قاعده زنجیره‌ای برای مشتقات کسری

یکی از نتایج مفید قاعده لایبنیتز برای مشتق کسری از ضرب دو تابع، مشتق کسری از تابع ترکیب است. فرض کنید که $\Psi(t)$ یک تابع ترکیب باشد:

$$\Psi(t)=\Psi(\phi(t)),$$

مشتق کسری مرتبه αـام از تابع $\Psi(t)$ به صورت زیر است:

$$D_t^{\alpha}(\Psi(\phi(t)))=\frac{t^{\alpha}\Psi(\phi(t))}{\Gamma(1-\alpha)}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{\alpha}\frac{k!t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\sum_{m=1}^{k}(D_{\phi}^{m}\Psi(\phi))_{\phi=\phi(t)}\times$$
$$\times\sum\prod_{r=1}^{k}\frac{1}{a_r!}\left(\frac{(D_t^{r}\phi)(t)}{r!}\right)^{a_r}, \tag{۳۲.۲}$$

که $t>0$ و مجموع $\sum_k$ روی تمام ترکیبات مقادیر متغیر نامنفی $a_k,\cdots,a_2,a_1$ است چنان چه $\sum_{r=1}^{k} ra_r=k$ و نیز $\sum_r^k a_r=m$ را داریم.

۹.۴.۲ تبدیل لاپلاس از مشتقات کسری

این بخش را با معرفی تبدیل لاپلاس آغاز می‌کنیم. تابع $F(s)$ از متغیر مختلط s با تعریف

$$F(s)=L\{f(t):s\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt, \tag{۳۳.۲}$$

تبدیل لاپلاس از تابع $f(t)$ نامیده می‌شود. برای وجود این انتگرال تابع $f(t)$ باید از مرتبه نمایی α باشد؛ یعنی ثوابت مثبت T و M چنان وجود دارند که

$$e^{-\alpha t}|f(t)|\leq M,\qquad \forall t>T$$

به عبارت دیگر تابع $f(t)$ نباید رشد سریع‌تری نسبت به یک تابع نمایی معین زمانی که $t\to\infty$ داشته باشد. تابع اصلی $f(t)$ می‌تواند با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس از $F(s)$ به شکل

$$f(t)=L^{-1}\{F(s);t\}=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}F(s)ds,\qquad c=Re(s)>c_0, \tag{۳۴.۲}$$

بازیابی شود که c_0 در قست راست نیم صفحه کاملاً همگرای انتگرال لاپلاس (۲۱.۲) قرار دارد. این تبدیل از دیدگاه ما دارای دو ویژگی مهم است. نخست آنکه تبدیل لاپلاس از ضرب دو تابع برابر با ضرب تبدیل لاپلاس از آن دوتابع است یعنی:

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s). \tag{۳۵.۲}$$

دوم تبدیل لاپلاس از مشتق مرتبه صحیح nـام از تابع $f(t)$ است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \tag{۳۶.۲}$$

تبدیل لاپلاس از مشتق کسری ریمن_لیوویل

تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمن_لیوویل مرتبه α از تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{{}_0D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n). \tag{۳۷.۲}$$

تبدیل لاپلاس از مشتق کسری کاپوتو

تبدیل لاپلاس از مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \leq \alpha < n). \tag{۳۸.۲}$$

۱۰.۴.۲ تابع میتاگ_لفلر

تابع نمایی e^z، نقش مهمی در تئوری معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح ایفا می‌کند. تعمیم این تابع به حالت یک پارامتری که به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \tag{۳۹.۲}$$

توسط میتاگ_لفلر[۴۷]در سال ۱۹۰۵ معرفی شد. بعدها این تابع توسط محققین دیگری از جمله ویمن[۴۸] در سال ۱۹۰۵، پولارد[۴۹] در سال ۱۹۴۸ و هامبرت[۵۰] در سال ۱۹۵۳ بررسی شد. تابع دو پارامتری میتاگ_لفلر با تعریف

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \tag{۴۰.۲}$$

[۴۷] Mittage-Leffler
[۴۸] Wiman
[۴۹] Pollard
[۵۰] Humbert

که نقش مهمی در حساب دیفرانسیل کسری بازی می‌کند نخستین بار توسط آگروال[۵۱] در سال ۱۹۵۳ معرفی شد. باوجود اینکه آگروال و هامبرت مشترکاً به این تعریف دست یافتند ولی از همان نام و نمادگذاری میتاگ‌ـلفلر برای نشان دادن این تابع استفاده نمودند. روابط زیر به طور مستقیم از تعریف تابع میتاگ‌ـلفلر حاصل می‌شود:

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k)}=e^z, \tag{۴۱.۲}$$

$$E_{2,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(2+2k)}=\frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \tag{۴۲.۲}$$

$$E_{2,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+2k)}=\cosh\sqrt{z}. \tag{۴۳.۲}$$

قابل ذکر است که $E_\alpha=E_{\alpha,1}$. فرض کنید $\alpha,\beta,\gamma>0$ و $a\in\mathcal{R}$، در این صورت مشتق از تابع میتاگ‌ـلفلر به صورت زیر خواهد بود:

$$D^{\gamma}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})]=t^{\beta-\gamma-1}E_{\alpha,\beta-\gamma}(at^{\alpha}), \tag{۴۴.۲}$$

$$D^{\alpha}[E_{\alpha}(at^{\alpha})]=aE_{\alpha}(at^{\alpha}). \tag{۴۵.۲}$$

تبدیل لاپلاس از تابع میتاگ‌ـلفلر از مرتبه $\alpha>0$ عبارت است از:

$$L\left\{E_{\alpha}(at^{\alpha})\right\}=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-a},\qquad s>|a|^{1/\alpha}. \tag{۴۶.۲}$$

در حقیقت برای $s>a$ با استفاده از سری بسط تابع نمایی داریم

$$\frac{1}{s-\alpha}=\int_0^{\infty}e^{-st}e^{at}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\int_0^{\infty}e^{-st}t^kdt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{k!}{s^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{s^{k+1}}.$$

به طور مشابه برای تابع میتاگ‌ـلفلر نیز داریم:

$$\begin{aligned}L\left\{E_{\alpha}(at^{\alpha})\right\}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\alpha k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{s^{\alpha k+1}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{s^{\alpha k+1}}=s^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{(s^{\alpha})^{k+1}}=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-a}.\end{aligned}$$

با توجه به آنچه بیان شد، تبدیل لاپلاس از تابع $t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}L\{t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\}&=\int_0^{\infty}t^{\alpha k+\beta-1}e^{-st}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})dt\\&=\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}\mp a)^{k+1}},\qquad s>|a|^{1/\alpha},\end{aligned} \tag{۴۷.۲}$$

که منظور از $E^{(k)}_{\alpha,\beta}(z)=\frac{d^k}{dz^k}E_{\alpha,\beta}(z)$ مشتق مرتبه kـ ام است.

[۵۱] Agarwal

۵.۲ معادلات دیفرانسیل کسری

یک معادله دیفرانسیل کسری (FDE) معادله دیفرانسیلی است که دربردارنده مشتقات از نوع کسری است. معادلات دیفرانسیل کسری تعمیمی از معادلات دیفرانسیل با مرتبه صحیح هستند. در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل کسری به خاطر ظاهر تکرارشونده آنها در کاربردهای مختلف در مکانیک سیالات، الکتروشیمی، زیست شناسی، فیزیک ریاضی، احتمال، مهندسی و غیره بسیار مورد توجه و مطالعه بوده‌اند. معادلات دیفرانسیل کسری به دو دسته خطی و غیرـخطی تقسیم بندی می‌شوند. صورت کلی یک معادله دیفرانسیل کسری به این صورت است:

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, \cdots, D_t^{\alpha}u, {}^{C}D_x^{\beta}u, D_y^{\gamma}u, \cdots) = 0, \qquad (۴۸.۲)$$

که در آن F چند جمله‌ای برحسب $u = u(t, x, y, z, \cdots)$ و مشتقات مختلف مرتبه صحیح و یا کسری u نسبت به متغیرهای مستقل است. مرتبه مشتقات کسری به صورت $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ است. برای مثال به چند مورد از معروف‌ترین این معادلات اشاره خواهیم کرد.

مثال ۱.۵.۲. معادله‌ی کلاسیک هدایت گرما با صورت کلی

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial T}{\partial x}\right], \qquad x \in (0, \infty), t > 0,$$

از معادلات نام آشنا در ریاضیات و فیزیک است. در این معادله $T(x, t)$ دما در نقطه x در زمان t و D ضریب ثابت انتشار گرماست که همان سرعت انتقال گرما در یک ماده به خصوص از ناحیه گرم به ناحیه سرد است. همانطور که می‌توان حدس زد این معادله انتشار گرما را در یک ناحیه از یک ماده در طول زمان نشان می‌دهد. تعمیم این معادله بعدها توسط میناردی[۵۲] ارائه شد که در آن مشتق مرتبه صحیح نسبت به زمان با مشتق از مرتبه کسری جایگزین می‌شود:

$$\frac{\partial^{\alpha} T}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial T}{\partial x}\right], \qquad x \in (0, \infty), t > 0. \qquad (۴۹.۲)$$

که در آن $\frac{\partial^{\alpha} T}{\partial t^{\alpha}}$ نشان دهنده‌ی مشتق کسری ریمن‌ـلیوویل نسبت به زمان از مرتبه α است [۲۶]. این معادله نمونه‌ای از یک معادله دیفرانسیل کسری است.

مثال ۲.۵.۲. معادله کورتوج دوریس[۵۳] یا به اختصار KdV یک مدل ریاضی برای توصیف انتشار امواج در سطوح کم عمق آب است. صورت کلی معادلات از نوع KdV در حالت کسری نسبت به زمان به شکل زیر است

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = u_{N_x} + Au^{P}u_x, \quad 0 < \alpha < 1, \quad P > 0, \quad u_{N_x} = \frac{\partial^{N} u}{\partial x^{N}} \qquad (۵۰.۲)$$

با در نظرگرفتن $P = 1$ و نیز $N = 2, 3, 5$، معادله (۵۰.۲) به ترتیب به معادله کسری برگرز[۵۴]، KdV و KdV مرتبه پنجم تبدیل می‌شود [۴۰].

[۵۲] Mainardi
[۵۳] Korteweg-de Vries
[۵۴] Burgers

مثال ۳.۵.۲. یکی دیگر از معادلاتی که حالت کسری آن بسیار معروف و پرکاربرد است معادله انتشار می‌باشد [۲۹]. این معادله در فیزیک، رفتار حرکت جمعی میکرو ذرات را در یک ماده که ناشی از حرکت تصادفی هر میکرو ذره است، توصیف می کند. در ریاضیات این معادله در موضوعات مرتبط با فرآیند مارکوف[۵۵] مانند علوم مواد، علوم اطلاعات، علوم زندگی، علوم اجتماعی، و غیره بسیار پرکاربرد است. صورت این معادله عبارت است از:

$$D_t^{\alpha} u = (k(u) u_x)_x, \tag{۵۱.۲}$$

که u متغیر وابسته‌ای از زمان و مکان و $k(u)$ یک تابع، $0 < \alpha \leqslant 2$ و D_t^{α} نشان دهنده مشتق کسری نسبت به زمان می‌باشد. این معادله با تغییر بازه α به معادلات کسری متفاوتی تبدیل می‌شود. مثلا برای $\alpha \in (0,1)$ به معادله زیر انتشار، برای $\alpha = 1$ به معادله انتشار، برای $\alpha \in (1,2)$ به معادله انتشار موج و برای $\alpha = 2$ به معادله تکثیر موج تبدیل می‌شود.

برای حل یک معادله دیفرانسیل کسری روش‌های متفاوتی وجود دارد از قبیل روش تبدیل لاپلاس روش‌های تحلیلی از قبیل روش تبدیل ملین[۵۶]، روش تبدیل فوریه[۵۷]، روش سری های توانی، روش زیرفضای ناوردا و بسیاری از روش‌های عددی. یک روش مؤثر برای بررسی و ساختن جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری، روش آنالیز گروهی است. تقارن یکی از ویژگی‌های اساسی طبیعت و پدیده‌هایش است. به خوبی می‌دانیم که نظریه گروه‌ها یک ابزار فراگیر و راحت برای تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی است. ویژگی‌های تقارنی PDEها درگذشته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. اخیرا در برخی مقالات علمی نظریه کارآمد گروه تقارن به FDEها نیز بسط داده شده است. در فصل‌های آتی به طور مفصل این روش را شرح خواهیم داد.

۶.۲ معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری

همان‌طور که ابتداً اشاره شد حساب دیفرانسیل کسری دارای کاربردهای فراوانی در پردازش سیگنالی، دینامیک‌های پیچیده، بافت‌های بیولوژیکی، سیستم‌های گرمایی و رسانش گرما می‌باشد. در چند سال اخیر پژوهش‌های زیادی به معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری (FIDEs) تخصیص داده شده است. اکثر این مطالعات به اثبات قضایایی جهت اثبات وجود جواب برای این معادلات می‌پردازند. برخی دیگر به بررسی شرایط مرزی برای وجود جواب برای این معادلات پرداخته‌اند. در این میان اندک مطالعاتی با رویکرد هندسی با این مطالعات برخورد کرده اند. در میان پژوهش‌های هندسی انجام شده در خصوص معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری، برای این معادلات دو تعریف متفاوت دیده می‌شود. در ادامه به این تعاریف به اختصار خواهیم پرداخت.

[۵۵] Markov
[۵۶] Mellin
[۵۷] Fourier

۱.۶.۲ نخستین تعریف از معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری

فرض کنید $AC^m[a,b]$ نشان دهنده کلاس توابع $f(x)$ باشد به طوریکه این توابع به طور پیوسته روی بازه بسته‌ی $[a,b]$ تا مرتبه $m-1$ مشتق پذیر هستند و مشتق $f^{(m-1)}(x)$ کاملاً پیوسته است: $f^{(m-1)}(x) \in AC[a,b]$. شرط کافی برای وجود مشتق‌های کسری از نوع ریمن_لیوویل با تعریف (۲۵.۲) و (۲۶.۲) و کاپوتو با تعریف (۲۷.۲) و (۲۸.۲) برای تابع $\phi(x)$، این است که به بازه $AC^m[a,b]$ تعلق داشته باشد. معادلات دیفرانسیل شامل دو مفهوم است یک متغیرهای دیفرانسیلی و دیگری توابع دیفرانسیلی.

تعریف ۱.۶.۲. فرض کنید $x=(x^1,\cdots x^n)$ بردار متغیرهای مستقل و $u=u(x)$ متغیر وابسته باشد. متغیرهای دیفرانسیلی متغیرهای به صورت زیر هستند:

$$u_{(1)}=\{u_{i_1}\},\quad u_{(2)}=\{u_{i_1i_2}\},\cdots u_{(k)}=\{u_{i_1i_2\cdots i_k}\} \tag{۵۲.۲}$$

که با سیستم روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&u_{i_1}=D_{i_1}(u),\quad u_{i_1i_2}=D_{i_2}(u_{i_1})=D_{i_2}D_{i_1}(u),\quad \cdots\\&u_{i_1i_2\cdots i_k}=D_{i_k}(u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}})=D_{i_k}D_{i_{k-1}}\cdots D_{i_1}(u),\quad (i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

در این تعریف D_i نشان دهنده عملگر دیفرانسیل کلی نسبت به x^i است که تعریف زیر برای آن ارائه شده است:

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u_i\frac{\partial}{\partial u}+u_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}+u_{ijk}\frac{\partial}{\partial u_{jk}}+\cdots. \tag{۵۳.۲}$$

بعد از این مقدمه معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری را معرفی خواهیم کرد. در این نوع از معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری تعریف ما از متغیرهای وابسته با متغیرهای وابسته در معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح یا کسری یا متفاوت است. ابتدا فرض کنید Ω یک متوازی السطوح n_بعدی به صورت

$$\Omega=[a^1,b^1]\times[a^2,b^2]\times\cdots\times[a^n,b^n],\quad -\infty<a^i<b^i<\infty,\quad (i=1,\cdots,n).$$

باشد. در این تعریف ما سه نوع از عملگرها را در نظر می‌گیریم. هرکدام از این عملگرها به طور مستقل نسبت به هرکدام از مختصات $x^i(i=1,\cdots,n)$ از بردار متغیرهای مستقل $x\in\Omega$، عمل می‌کنند. این عملگرها به این صورت هستند: عملگرهای دیفرانسیل گیری D_i، عملگرهای انتگرال گیری کسری از سمت چپ $I_{i+}^{\alpha_i}\equiv {}_{a^i}I_{x_i}^{\alpha_i}$ از مرتبه $\alpha_i\in(0,1)$، و عملگرهای انتگرال گیری کسری از سمت راست $I_{i-}^{\beta_i}\equiv {}_{x^i}I_{b_i}^{\beta_i}$ ازمرتبه $\beta_i\in(0,1)$. با مرتب کردن این عملگرها در

یک ماتریس داریم:

$$B = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \cdots D_n \\ I_{1+}^{\alpha_1} & I_{2+}^{\alpha_2} & \cdots I_{n+}^{\alpha_n} \\ I_{1-}^{\beta_1} & I_{2-}^{\beta_2} & \cdots I_{n-}^{\beta_n} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i, \beta_i \in (0,1) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

درایه‌های این ماتریس به صورت زیر می‌باشند:

$$B_i^\delta = \begin{cases} I_{i+}^{\alpha_i}, & \delta = +1, \\ D_i, & \delta = 0, \\ I_{i-}^{\beta_i}, & \delta = -1. \end{cases} \tag{۵۴.۲}$$

حال ما مفهوم متغیرهای دیفرانسیلی را به حالت عملگرهای دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۲.۶.۲. متغیرهای $u_{[k]}$ نتیجه به‌کار بردن عملگرهای (۳.۲) برروی متغیرهای وابسته u بوده و با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &u_{[1]} = \{u_{i_1}^{\delta_1}\} \equiv \{B_{i_1}^{\delta_1}(u)\}, \\ &u_{[2]} = \{u_{i_1 i_2}^{\delta_1 \delta_2}\} \equiv \{B_{i_2}^{\delta_2}(u_{i_1}^{\delta_1})\} = \{B_{i_2}^{\delta_2} B_{i_1}^{\delta_1}(u)\}, \quad \cdots, \\ &u_{[k]} = \{u_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k}\} \equiv \{B_{i_k}^{\delta_k}(u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{k-1}})\} = \{B_{i_k}^{\delta_k} B_{i_{k-1}}^{\delta_{k-1}} \cdots B_{i_1}^{\delta_1}(u)\}, \quad \cdots, \\ &(i_1, i_2, \cdots, i_k = 1, 2, \cdots, n, \quad \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k = -1, 0, 1), \end{aligned} \tag{۵۵.۲}$$

این متغیرها، متغیرهای خطی دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری نامیده می‌شود. به وضوح مجموعه متغیرهای $u_{[k]}$ شامل مجموعه متغیرهای $u_{(k)}$ نیز می‌شود ($u_{(k)}$ حاصل به‌کاربردن عملگر مشتق کامل بر روی متغیرهای وابسته u است).

تعریف ۳.۶.۲. تابع تحلیلی F وابسته به تعداد متناهی متغیرهای $x, u, u_{[1]}, \cdots$ تابع دیفرانسیل_انتگرال کسری نامیده می‌شود. بالاترین مرتبه k از متغیرهای به فرم (۵۵.۲) در تابع دیفرانسیل_انتگرال

$$F = F(x, u, u_{[1]}, u_{[2]}, \cdots, u_{[k]}), \quad k < \infty, \tag{۵۶.۲}$$

مرتبه تابع نامیده می‌شود. مجموعه همه توابع دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه‌های متناهی را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم. با مقدمات بالا می‌توان معادله دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری را چنین تعریف کرد:

$$F = F(x, u, u_{[1]}, u_{[2]}, \cdots, u_{[k]}) = 0. \tag{۵۷.۲}$$

این معادله شامل عملگرهای دیفرانسیل و انتگرال از هر دو مرتبه صحیح و کسری است. پس می‌توان گفت که این معادله در حالت‌های خاص شامل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال

از مرتبه کسری، معادلات کسری با مشتق‌های ریمن_لیوویل و یا کاپوتو و دسته کمتر شناخته شده‌ی معادلات دیفرانسیل_انتگرال است.

به عنوان مثالی از این معادلات می‌توان به معادله نوسانگر کسری اشاره کرد [۶۶]:

$$ {}_xD_1^{\alpha}({}_0^CD_x^{\alpha}u) - w^2u = 0, \quad x \in (0,1), \quad \alpha \in (0,1), \tag{۵۸.۲}$$

در واقع می‌توان این معادله را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(-1)D_x\left({}_xI_1^{1-\alpha}({}_0I_x^{1-\alpha}D_x(u))\right) - w^2u = 0.$$

به وضوح دیده می‌شود که u یک متغیر دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری است. نمونه‌ای دیگر از این معادلات، معادله موج کسری

$$u_{tt} = -{}_x^CD_1^{\alpha}({}_0D_x^{\alpha}u), \quad x \in (0,1), \quad \alpha \in (0,1), \tag{۵۹.۲}$$

است. در معادله فوق نیز u یک متغیر دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری می‌باشد.

۲.۶.۲ دومین تعریف از معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری

دراین تعریف از معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری نوع تعریف متغیرهای مستقل وابسته تفاوتی با معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح یا کسری ندارد. این نوع از معادلات شامل جمله‌هایی از نوع انتگرال و مشتق از مرتبه کسری هستند. صورت کلی این معادلات به صورت

$$D_t^{\alpha}u(t,x) = G\left(F(t,x,u,u_1,\cdots,u_m), \int_X f(t,x,u,u_1,\cdots,u_k)dx^1\cdots dx^l\right), \tag{۶۰.۲}$$

و یا

$${}^CD_t^{\alpha}u(t,x) = G\left(F(t,x,u,u_1,\cdots,u_m), \int_X f(t,x,u,u_1,\cdots,u_k)dx^1\cdots dx^l\right), \tag{۶۱.۲}$$

است که P,m,k و l اعدا طبیعی دلخواه هستند به طوریکه $l \le p$ و $x = (x^1, x^2\cdots, x^p)$ متغیر مستقل و u یک متغیر وابسته از t و x و نیز D_t^{α} مشتق کسری از متغیر u نسبت به زمان از نوع ریمن_لیوویل و یا کاپوتو است. در این مشتق $0 < \alpha < 1$ و $t \in (0,T]$ درنظرگرفته می‌شود. توابع G,F و f دلخواه، پیوسته و منظم فرض می‌شوند که وجود جواب برای آنها تضمین شود. در معادلات (۶۰.۲) و (۶۱.۲) حدود انتگرال ناحیه X در نظر گرفته می‌شود که آن نیز دلخواه است. نماد u_m به صورت

$$u_m = \left\{\frac{\partial^m u}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_m}} \equiv \partial_{x^{i_1}}\cdots\partial_{x^{i_m}}u \equiv u_{i_1\cdots i_m}\right\},$$

نشان دهنده مشتق جزیی از مرتبه m است. هرکدام از معادلات فوق اگر $f = 0$ باشد به یک معادله دیفرانسیل کسری تبدیل می‌شود.

به عنوان یک مثال مهم از این معادلات می‌توان به دستگاه کسری ولاسوف_ماکسول

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha f + u\partial_x^\beta f + \dfrac{q}{m}E\partial_u f = 0, \\ \partial_t^\alpha E + \dfrac{q}{\epsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} uf du = 0, \\ \partial_x^\beta E - \dfrac{q}{\epsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f du = 0, \end{cases} \tag{۶۲.۲}$$

اشاره کرد [۸۹]. در دستگاه فوق $0 < \alpha, \beta \leq 1$ و $\partial_t^\alpha E, \partial_x^\beta f, \partial_t^\alpha f$ و $\partial_x^\beta E$ نشان دهنده مشتقات کسری ریمن_لیوویل هستند.

یادداشت

در این فصل سعی بر آن بود که مروری اجمالی بر ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل داشته باشیم. همانطور که اشاره شد انواع گسترده‌ای از معادلات دیفرانسیل برای کاربرد در علوم مهندسی مختلف و توصیف انواع پدیده‌ها از جمله پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی، مکانیکی، مغناطیسی، الکترومغناطیسی، کوانتومی و حتی اندام‌های حسی و نورون‌ها و غیره ظهور پیدا کرده‌اند. مدل سازی پدیده‌های طبیعی با کمک معادلات دیفرانسیل مستلزم شناخت ساختار و انواع گسترده آنهاست. در این فصل برخی از انواع پرکاربرد معادلات معرفی و برای شناخت بهتر مثال های ملموس از آنها ارائه شد. درست همزمان با شکل گیری حساب دیفرانسیل کلاسیک در قرن هجدهم حساب دیفرانسیل کسری نیز شکل گرفت. حساب دیفرانسیل کسری که دربرگیرنده مشتقات و انتگرال از مرتبه کسری است، نیز همچون نمونه کلاسیک آن دارای کاربردهای فراوانی است که آشنایی و کار با آن را جذاب می‌نماید. در فصلی که از پیش رو گذشت تاریخچه و تعاریف و مقدمات کار با حساب دیفرانسیل کسری بیان شد و در انتها گریزی نیز به موضوع اصلی مورد اشاره در این رساله یعنی معادلات کمتر شناخته شده‌ی دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری زدیم و مثال‌های از آنها ارائه کردیم. در فصل های آتی به تفصیل به روش های حل گروه معادلات معرفی شده در این فصل خواهیم پرداخت.

فصل ۳

گروه‌های تقارن معادلات دیفرانسیل و انتگرال

درحدود بیش از یک قرن پیش ریاضیدان نروژی ماریوس سوفس‌لی بسیاری از ایده‌های اساسی در پس روش‌های تقارنی را مطرح کرد. اکثر این ایده‌ها به طور پایه‌ای ساده و در عین حال چنان وسیع هستند که هنوز هم اساس بسیاری از تحقیقات را تشکیل می‌دهند. روش لی بسیار کاربردی و ارزشمند بوده و طیف وسیعی از ابراز قدرتمند را برای کار با معادلات جدید به کاربر داده و کسی نمی‌تواند نقش آنها هنگام کار با معادلات دیفرانسیل را نادیده بگیرد.

لی حل معادلات دیفرانسیل را توسط گروه‌های تقارنی و ناورداهای تولیدشده توسط آن‌ها مورد بررسی قرار داد، ایده این کار از آن‌جا شکل گرفته بود که اوریس گالوا[۱] از گروه جبری برای حل معادلات جبری استفاده کرده بود. سوفس لی مطالعات خود را بر گروه‌های پیوسته با هدف تکنیک‌های اکتشافی و سیستماتیک برای حل ODE ها آغاز نمود. این روش که مبتنی بر انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل است وی را بر آن داشت تا توان اعجاب‌انگیز خود را صرف گسترش نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل بر اساس مفهوم گروه‌های لی کند. زیرا این گروه‌ها علاوه بر کاربردهایی که در ریاضیات محض و کاربردی دارند در فیزیک، مهندسی و سایر علوم پایه نیز به کار گرفته می‌شوند. شاخه‌هایی چون توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریه‌ی ناورداها، نظریه‌ی انشعاب، توابع خاص، آنالیز عددی، نظریه‌ی کنترل، مکانیک

[۱] Évariste Galois

کوانتوم و کلاسیک، نسبیت و غیره به شدت با گروه‌های لی و کاربردهای آن سروکار دارند و اشراف به هر یک از این علوم لزوم کاربرد گروه‌های لی را به عنوان منبع اصلی در معادلات دیفرانسیل آشکار می‌سازد. البته شایان ذکر است که گروه‌های لی در بیشتر مواقع با دیدگاه محض خود در ریاضیات به کار برده نمی‌شوند، بلکه گاهی اوقات تحت عنوان گروه تقارنی یک دستگاه دینامیکی از معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند که بسیاری از ویژگی‌های ریاضی آن مثل حل‌پذیری، نیم‌ـسادگی و ... به طور مستقیم و غیرمستقیم رفتار دستگاه را تحلیل می‌کنند.

تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل هر تبدیلی از منیفلد جواب این دستگاه به توی خودش است. یعنی یک تبدیل تقارن هر جوابی از یک دستگاه را به جواب دیگر از همان دستگاه می‌نگارد. در نتیجه تقارن‌های پیوسته از دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت توپولوژیکی تعریف شده اند و از این رو فقط محدود به تقارن‌های نقطه‌ای نیستند. انواع گسترده‌ای از تقارن‌ها همچون نقطه‌ای، برخوردی، مرتبه بالاتر، تقارن‌های ضعیف، آینه‌ای، غیر کلاسیک و ... وجود دارند که در این فصل به برخی از آنها اشاره خواهیم کرد. در اصل هر دستگاه معادله دیفرانسیل جزئی دارای تقارن است. مسأله یافتن و استفاده از چنین تقارن‌هایی است. عملاً، برای پیدا کردن یک تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی باید تبدیلاتی را که به شکل موضعی روی فضاهای متناهی البعد شامل متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کنند را در نظر بگیریم. اگرچه همانطور که بعداً دیده می‌شود این تبدیلات محدود به متغیرهای مستقل و وابسته از یک دستگاه PDE نیستند. تقارنها روی جواب‌های دستگاه با تبدیلاتی که روی گراف آن‌ها اعمال کرده، عمل می‌کنند.

لی نشان داد که برای یافتن گروه لی از تبدیلات نقطه‌ایی که یک معادله دیفرانسیل اعم از معمولی و یا جزئی را ناوردا نگه می‌دارند (گروه تقارن) لازم است دستگاه خطی وابسته به معادلات مشخصه برای مولدهای بی‌نهایت کوچک آن را حل نماییم. وی همچنین نشان داد که تقارن‌های نقطه‌ای از یک معادله دیفرانسیل در حالت PDE موجب کاهش مرتبه معادله (بدون در نظر گرفتن هر شرایط ابتدایی اعمال شده) و در حالت ODE منتج به یافتن جواب‌های ویژه که تحت گروه تقارن ناوردا هستند به نام جواب‌های ناوردا و یا جواب‌های متشابه می‌شود. به علاوه او اثبات کرد که یک گروه تقارن از یک معادله دیفرانسیل، از هر جواب معلوم که جواب ناوردای ناشی از تقارن نباشد یک خانواده یک پارامتری از جواب‌ها را تولید می‌کند. مهم‌تر از همه اینکه کار لی قابل اجرا بر روی معادلات دیفرانسیل غیر خطی نیز هست.

داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دارای مزیت‌های فراوانی است که از آن جمله می‌توان به طبقه‌بندی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. این رده‌بندی اینگونه است که هر دو جوابی را که به وسیله برخی از مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به یکدیگر باشند را در یک دسته در نظر می‌گیریم. از دیگر استفاده‌های این گروه‌ها، امکان طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل بر اساس پارامتر یا تابعی دلخواه با کمک آنهاست. کاربرد مستقیم از نظریه لی بر روی معادلات دیفرانسیل جزئی به ویژه نوع غیر خطی آنها

محدود است. حتی اگر یک معادله دیفرانسیل جزئی دارای یک تقارن نقطه‌ای باشد از آنجا که جواب‌های ناوردای به دست آمده از این تقارن فقط زیر مجموعه کوچکی از مجموعه جواب‌های این معادله دیفرانسیل را نتیجه می‌دهد، از این رو تعداد کمی از مسائل شرایط مرزی را با کمک آن می‌توان حل کرد. تعمیم کار لی به معادلات دیفرانسیل جزئی، به یافتن کاربردهای بیشتر تقارن‌های نقطه‌ای در این معادلات تمرکز داشته است. از این کاربردها می‌توان به نگاشت‌های خطی سازی و یافتن جواب‌های مسائل شرایط مرزی، بسط فضاهای تقارن‌های یک دستگاه PDE داده شده به تقارن‌های موضعی و تقارن‌های مرتبه بالاتر، بسط کاربردهای تقارن‌ها به تقارن‌های تغییراتی که منجر به یافتن قوانین پایستگی برای دستگاه‌ها می‌شوند، یافتن جواب‌های بیشتر که ناشی از بسط روش لی به روش غیر کلاسیک است و حل مؤثر دستگاه خطی فرامعین از تقارن‌ها یا معادلات مشخصه چندتایی از طریق توسعه محاسبات نرم‌افزاری اشاره نمود. به کارگیری کامپیوتر و استفاده از نرم‌افزارهایی چون Maple و Mathematica در این زمینه مفید به فایده است زیراگروه‌های پیوسته دارای محاسباتی هستند که از روندی الگوریتمی پیروی می‌نمایند.

قبل از بیان مفاهیم اساسی تقارن، تعاریف و مقدماتی در خصوص گروه‌های لی را یادآور خواهیم شد.

۱.۳ گروه‌های لی و تبدیلات

تعریف ۱.۱.۳. یک گروه لی r–پارامتری، منیفلدی هموار r بعدی است به طوریکه دارای ساختار جبری گروه بوده و تمام خاصیت‌های آن را داراست و دو نگاشت ضرب و وارون‌ساز m و i که با ضابطه‌های

$$m : G \times G \to G, \qquad\qquad i : G \to G,$$
$$m(g.h) = g.h, \quad g, h \in G \qquad\qquad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G,$$

تعریف می‌شوند، نگاشت‌هایی هموار بین منیفلدها هستند.

مثال ۱.۱.۳. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^r$ با ساختار منیفلد یک مثال ساده از گروه لی است که عمل گروه در آن با بردار جمع $(x, y) \mapsto x + y$ و نگاشت وارون با بردار $-x$ تعریف می‌شود.

مثال ۲.۱.۳. به عنوانی مثالی دیگر از گروه‌های لی از گروه دوران در صفحه $G = \mathrm{SO}(2)$ یاد می کنیم که به صورت

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : 0 \leqslant \theta < 2\pi \right\},$$

است که در آن θ زاویه دوران است و عمل گروه با پارامتر ϵ به صورت زیر می‌باشد:

$$\Psi(\epsilon, (x, y)) = (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, x\sin\epsilon + y\cos\epsilon).$$

تعریف ۲.۱.۳. یک زیر گروه لی H از گروه لی G، زیر مجموعه و زیرمنیفلدی از آن است که خود نیز یک گروه لی است. نگاشت‌های i و m نیز به شکل مشابه برای H تعریف می‌شوند.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد. یک گروه تبدیل G که روی منیفلد M عمل می‌کند را در نظر بگیرید، با این شرط که نگاشت $\phi : G \times M \to M$ باضابطه $(g, x) \to g.x$ در شرایط زیر صدق کند:

$$i) \quad (g.h).x = g.(h.x),$$

$$ii) \quad e.x = x.$$

در این صورت می‌گوییم G از چپ روی M عمل می‌کند. به همین شکل می‌توان عمل از راست را نیز تعریف کرد. هرگاه G یک گروه تبدیل روی M و $g \in G$ باشد آنگاه g را یک تبدیل می‌نامیم. به ازای هر تبدیل g نگاشت تبدیل ϕ را می‌توان به صورت $\phi_g : M \to M$ بازنویسی کرد که به اختصار با $\phi_g = g$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in M$ باشد آنگاه مجموعه تمام تبدیلات x تحت گروه تبدیلات G یعنی $G.x = \{g.x : g \in G\}$ را مدار x تحت تبدیل G می‌نامیم. مدارها همگی زیر منیفلد هستند [۷۵].

آن دسته از اعضای G که به صورت عضو همانی عمل می‌کنند را به ازای $x \in M$ به صورت

$$G_x = \{g : g.x = x\},$$

نمایش داده و آن گروه را که زیرگروهی از G است، گروه پایدار ساز x نامند. G_M با تعریف $G_M = \bigcap_{x \in M} G_x$ را زیر گروه پایدار ساز فراگیر G نامیم. هرگاه $G_M = \{e\}$ باشد، آنگاه G به طور مؤثر عمل می‌کند و اگر ساختار G_M گسسته باشد، گوییم G به طور موضعاً مؤثر عمل می‌کند.

گروه تبدیلات G به طور آزاد روی M عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $x \in M$، داشته باشیم $G_x = \{e\}$. هرگاه عمل G تنها یک مدار تولید کند عمل را متعدی می‌نامند. در نهایت عمل G را نیم منظم نامند هرگاه کلیه مدارت G هم بعد باشند و منظم نامند اگر هر نقطه $x \in M$ دارای یک همسایگی به دلخواه کوچک باشد به طوریکه اشتراک آن با مدار p همبند باشد.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنید G یک گروه تبدیلات عمل کننده روی منیفلد M باشد. یک تابع Gـ ناوردای موضعی تابعی حقیقی مقدار مانند $I : M \to \mathbb{R}$ است که روی زیر مجموعه باز $U \subset M$ برای هر $x \in U$ و هر تبدیل $g \in V_x$ در همسایگی $V_x \subset G$ از عضو همانی به صورت $I(g.x) = I(x)$ تعریف می‌شود. اگر برای هر $x \in U$ و $g \in G$ به طوریکه $g.x \in U$ داشته باشیم $I(g.x) = I(x)$، آنگاه I را ناوردای فراگیر می‌نامیم.

۱.۱.۳ جبرلی

اگر G یک گروه لی باشد، میدان‌های برداری خاصی روی آن وجود دارند که تحت عمل گروه ناوردا هستند. این میدان‌های برداری ناوردا یک فضای برداری با بعد نامتناهی می‌سازند که به آن جبرلی یا مجموعه‌ی مولدهای بی‌نهایت کوچک G می‌گویند. اساساً هر ویژگی که در گروه لی مفروض باشد در جبرلی آن نیز یافت می‌شود.

تعریف ۵.۱.۳. فرض کنید G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد. میدان برداری $\mathbf{v}$ روی M را Gـ ناوردا گوییم هرگاه به ازای هر $g \in G$ و $x \in M$ که $g.x$ تعریف شود داشته باشیم $g_*(\mathbf{v}_x) = \mathbf{v}_{g.x}$.

تعریف ۶.۱.۳. فرض کنید G روی خودش از چپ (راست) عمل کند مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ (راست) را جبرلی چپ (راست) G گویند. ایزومورف بودن جبرلی چپ و راست بایکدیگر قابل اثبات است [۶۲]. جبرلی گروه لی G را با $\mathfrak{g}$ نشان می‌دهیم و درتمامی این نوشتار منظورمان از جبرلی، جبرلی چپ است.

قضیه ۱.۱.۳. هرگاه G یک گروه لی باشد در این صورت $\mathfrak{g} \simeq T_eG$. یعنی با یافتن فضای مماس هر گروه لی در عضو همانی گروه می‌توان جبر لی آن را یافت.

برهان. [۶۲]. □

مثال ۳.۱.۳. به عنوان مثالی برای جبرلی می‌توان به گروه لی خطی عام $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ اشاره کرد که جبر لی آن همان مجموعه ماتریس‌های مربعی $n \times n$ می‌باشند. جبرلی در گروه لی خطی خاص $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ نیز مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با اثر صفر می‌باشد.

۲.۱.۳ نگاشت نمایی

تعریف ۷.۱.۳. گروه لی G با جبرلی $\mathfrak{g}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\exp : \mathfrak{g} \to G$ را نگاشت نمایی نامند.

هرگاه U یک همسایگی $0 \in \mathfrak{g}$ و نیز V یک همسایگی $e \in G$ باشد آنگاه exp یک دیفئوموفیسم بین U و V برقرار می‌کند.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبرلی $\mathfrak{g}$ باشد در این صورت برای هر $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k \in \mathfrak{g}$ هر عضو G مثل g قابل بیان به صورت ضرب نگاشت‌های نمایی می‌باشد بدین معنا که

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \mathrm{o} \cdots \mathrm{o} \exp(\mathbf{v}_k).$$

پس با داشتن اعضای یک جبرلی و محاسبه‌ی نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آنها در هم می‌توان ضابطه تبدیل گروه را به دست آورد. برهان این قضیه در مرجع [۴۴] به تفصیل آمده است.

چنانچه مولد گروه را داشته باشیم برای به دست آوردن گروه تبدیل آن مولد می‌توان از نگاشت نمایی

$$\bar{x} = \exp^{aX}(x), \quad \bar{y} = \exp^{aX}(y), \tag{۱.۳}$$

استفاده کرد که در آن

$$\exp^{aX} = 1 + \frac{a}{1!}X + \frac{a^2}{2!}X^2 + \cdots + \frac{a^s}{s!}X^s + \cdots .$$

مثال ۴.۱.۳. مولد زیر را در نظر بگیرید:

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

برای اینکه با استفاده از نگاشت نمایی گروه تبدیل را پیدا کنیم باید $X^s(x)$ و $X^s(y)$ را برای $s = 1, 2, \cdots$ بیابیم چندجمله ابتدایی آن به شرح زیر است :

$$X(x) = x^2, \qquad X^2(x) = X(X(x)) = X(x^2) = 2!x^3, \qquad X^3(x) = X(2!x^3) = 3!x^4.$$

سپس به استقرا حدس می زنیم که

$$X^s(x) = s!x^{s+1}.$$

با کمک استدلال استقرایی حدس فوق را اثبات می‌نماییم. یعنی

$$X^{s+1}(x) = X(s!x^{s+1}) = (s+1)!x^2x^s = (s+1)!x^{s+2}.$$

به همین شکل برای y داریم:

$$X(y) = xy, \qquad X^2(y) = X(xy) = yX(x) + xX(y) = yx^2 + xxy = 2!yx^2,$$
$$X^3(y) = 2![yX(x^2) + x^2X(y)] = 3!yx^3,$$

پس مجدداً به استقرا حدس می‌زنیم:

$$X^s(y) = s!yx^s,$$

و با استفاده از استدلال استقرایی آن را اثبات می‌کنیم:

$$X^{s+1}(y) = s!X(yx^s) = s![syx^{s+1} + x^s(xy)] = (s+1)!yx^{s+1},$$

با جانشانی این عبارت در نگاشت نمایی به نتیجه

$$\exp^{aX}(x) = x + ax^2 + \cdots + a^s x^{s+1} + \cdots ,$$

خواهیم رسید. با بازنویسی طرف راست به صورت $x(1 + ax + \cdots + a^s x^s + \cdots)$ و این نکته که سری داخل پرانتز آشکارا بسط تیلور تابع $\frac{1}{1-ax}$ به شرط $|ax| < 1$ است داریم:

$$\bar{x} = \exp^{aX}(x) = \frac{x}{1-ax}.$$

همچنین به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\exp^{aX}(y) &= y + ayx + a^2yx^2 + \cdots + a^s yx^s + \cdots \\ &= y(1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^s yx^s + \cdots),\end{aligned}$$

در نتیجه :

$$\bar{y} = \exp^{aX}(y) = \frac{y}{1-ax}.$$

پس گروه تبدیلات مورد نظر عبارتند از:

$$\bar{x} = \frac{x}{1-ax}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{1-ax}.$$

۳.۱.۳ عمل گروه بی‌نهایت کوچک

فرض کنید G یک گروه از تبدیلات موضعی عمل کننده روی منیفلد M با تبدیل $\Psi(g,x) = g.x$ برای $(g,x) \in U \subset G \times M$ باشد. سپس عمل بی‌نهایت کوچک از جبرلی $\mathfrak{g}$ از G روی M وجود دارد. یعنی اگر $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ باشد آنگاه $\psi(\mathbf{v})$ را میدان برداری روی M تعریف می‌کنیم که شار آن منطبق بر عمل زیر گروه یک پارامتری $\exp(\epsilon\mathbf{v})$ از گروه G روی M است. این بدین معناست که برای $x \in M$ داریم:

$$\psi(\mathbf{v})|_x = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \Psi(\exp(\epsilon\mathbf{v}), x) = d\Psi_x(\mathbf{v}|_e), \tag{۲.۳}$$

که در آن $\Psi_x(g) \equiv \Psi(g.x)$ است. می‌توان ارجاع صریح به نگاشت Ψ را در نظر نگرفت و جبرلی $\mathfrak{g}$ را با نگاشت آن $\Psi(\mathfrak{g})$ که جبرلی میدان برداری روی M را تشکیل می‌دهند یکسان در نظر بگیریم. به عبارت دیگر برای ساختن جبرلی از گروه تبدیلات از فرمول زیر بهره می‌گیریم:

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \Psi(\epsilon, x) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \exp(\epsilon\mathbf{v})x, \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \tag{۳.۳}$$

میدان برداری $\mathbf{v}$ مولد بی‌نهایت کوچک از عمل گروه G نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱.۳. گروه دوران را درصفحه در نظر بگیرید:

$$\Psi(\epsilon, (x,y)) = (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, x\sin\epsilon + y\cos\epsilon).$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن یک میدان برداری به فرم $\mathbf{v} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$ است که برای آنها داریم:

$$\xi(x,y) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon) = -y,$$
$$\eta(x,y) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} (x\sin\epsilon + y\cos\epsilon) = x,$$

بنابراین $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ مولد بی‌نهایت کوچک این گروه است.

۴.۱.۳ ناوردایی بی‌نهایت کوچک

یک از توانمندی‌های عظیم نظریهٔ گروه‌های لی امکان جایگزینی شرایط غیرخطی و پیچیدهٔ ناوردایی یک زیر مجموعه یا تابع تحت یک گروه تبدیلات با شرط خطی و هم ارز ناوردایی بی‌نهایت کوچک تحت مولدهای بی‌نهایت کوچک از عمل گروه است. این محک بی‌نهایت کوچک به سادگی قابل اثبات بوده و کلید مهمی را برای تشخیص گروه‌های تقارن دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل در اختیارمان می‌گذارد.

گزاره ۱.۱.۳. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات همبند عمل کننده روی منیفلد M باشد. تابع هموار و حقیقی مقدار $I : M \to \mathbb{R}$ تحت گروه G ناورداست اگر و فقط اگر برای $x \in M$ و $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ داشته باشیم:

$$\mathbf{v}(I) = 0. \tag{۴.۳}$$

برهان. [۷۵]. □

هرگاه $u = I(x)$ یک تابع یک پارامتری و $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \xi^i(x)\partial/\partial x^i$ یک مولد بی‌نهایت کوچک باشد برای آنکه I یک ناوردا تحت G باشد باید $\mathbf{v}(I) = 0$ پس داریم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \xi^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \tag{۵.۳}$$

حال برای یافتن I دستگاه مشخصه زیر را حل می‌نماییم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \tag{۶.۳}$$

جواب کلی برای معادله فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I^1(x^1, \cdots x^m) = c_1, \cdots, I^{m-1}(x^1, \cdots x^m) = c_{m-1}, \tag{۷.۳}$$

که در آن $c_{m-1},\cdots c_1$ ثوابت انتگرال گیری و $I^i(x)$ها توابعی مستقل از c_jها هستند. $I^{m-1},\dots,I^1$ جواب‌هایی مستقل تابعی برای دستگاه (۶.۳) هستند که هر ناوردایی دیگری تابعی از آنهاست.

مثال ۶.۱.۳. عمل گروه $\mathrm{SO}(2)$ روی فضای سه متغیره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y,z)\longmapsto\left(x\cos\epsilon-y\sin\epsilon, x\sin\epsilon+y\cos\epsilon, \frac{\sin\epsilon+z\cos\epsilon}{\cos\epsilon-z\sin\epsilon}\right).$$

مولد بی‌نهایت کوچک از این عمل به فرم زیر است:

$$\mathbf{v}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

با حل دستگاه معادله مشخصهٔ

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{(1+z^2)},$$

دو تابع ناوردا به صورت $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\mathrm{w}=\dfrac{xz-y}{yz+x}$ به دست می‌آیند.

۵.۱.۳ امتداددهی

همانطور که پیشتر بیان شد فضای جت مرتبه nـام از اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به فضای مشتقات جزیی تا مرتبه nـام حاصل می‌شود و دارای بعد $p+qp^{(n)}$ است. با بررسی دقیق می‌توان دید که J^n یک ساختار هندسی دارد و این ساختار چیزی نیست جز یک کلاف برداری روی منیفلد X که بعد تارهای آن $qp^{(n)}$ است. این فضا دقیقا فضای لازم برای نشان دادن بسط تیلور تابع f است.

مثال ۷.۱.۳. فرض کنید $u=f(x,y)$ یک تابع با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته باشد. برای یافتن J^2 کافی است که مشتقات جزئی تابع را تا مرتبه دوم بنویسیم بنابر این داریم:

$$\mathrm{J}^2=\{(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{xy},u_{yy})\}\simeq\mathbb{R}^8$$

تعریف ۸.۱.۳. فضای جت مرتبه nـام یک تابع منهی متغیرهای مستقلش را امتداد تابع تا مرتبه nـام می‌نامیم و آن را با $u^{(n)}=f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم.

بنابر این امتداد مرتبه دوم تابع f در مثال قبل برابر است با:

$$f^{(2)}(x,y)=(f;f_x,f_y;f_{xx},f_{xy},f_{yy})$$

۲.۳ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

یک دستگاه l معادله دیفرانسیل مانند

$$\Delta_\sigma\left(x,u^{(n)}\right)=0,\qquad \sigma=1,\dots,l,$$

با p متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ و مشتقات u تا مرتبه n را در نظر می‌گیریم. این دستگاه برای توابع $\Delta : \mathrm{J}^n \to \mathbb{R}^m$ تعریف می‌شود. یک جواب هموار از چنین دستگاهی تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ به فرم $u = f(x)$ می‌باشد که

$$\Delta_\sigma \left(x, f^{(n)}(x) \right) = 0, \qquad \sigma = 1, \dots, l,$$

مشتقات جزئی تابع u از مرتبه r را با نماد زیر نمایش می دهند :

$$\begin{aligned} \partial^r u &= \{ u^\alpha_{j_1, \dots, j_r} | \alpha = 1, \dots, q;\ j_1, \dots, j_r = 1, \dots, p \} \\ &= \left\{ \frac{\partial^r u^\alpha (x)}{\partial x^{j_1}, \dots, \partial x^{j_r}} | \alpha = 1, \dots, q;\ j_1, \dots, j_r = 1, \dots, p \right\}. \end{aligned}$$

تعریف ۱.۲.۳. یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G است که روی یک زیرمجموعه باز از E مانند $\mathcal{O}$ عمل کرده، به‌طوری که هر جواب از دستگاه $\Delta = 0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند.

ابتدا به بیان نحوه عملکرد یک تبدیل مانند $g \in G$ روی یک تابع خواهیم پرداخت. از این پس گروه تبدیلات G یک گروه لی فرض می‌شود. تابع $u = f(x)$ را با گراف

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) : x \in \Omega \} \subset E,$$

در نظر می‌گیریم که در آن مجموعه Ω درون دامنهٔ تعریف تابع f قرار می‌گیرد. حال تبدیل g روی گراف تابع f را به شکل

$$g.\Gamma_f = \{ (\bar{x}, \bar{u}) : (x, u) \in \Gamma_f \},$$

تعریف می‌کنیم که لزوماً $g.\Gamma_f$ خود گراف تابعی جدید نخواهد بود. اما هرگاه G به طور هموار عمل کرده و عنصر همانی G، گراف f را ثابت نگه دارد، با انتخاب مناسب دامنهٔ Ω می‌توان دید که تبدیل g موضعاً حول عنصر همانی G گراف تابع f را ناوردا نگه می‌دارد، به این معنا که

$$g.\Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}}. \tag{۸.۳}$$

توجه داشته باشید که منظور از $\bar{f}$ در (۸.۳) همان تبدیل یافتهٔ گراف تابع f تحت تبدیل g است. یک روش کلی برای یافتن گراف تبدیل یافتهٔ تابع f موجود است که در ادامه اجمالاً به آن اشاره خواهیم کرد. تبدیل g را به فرم زیر درنظر بگیرید:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x.u) = (\varphi_g(x, u), \psi_g(x, u)), \tag{۹.۳}$$

که در آن φ_g و ψ_g توابعی هموار هستند. آنگاه مختصات گراف تابع $\bar{f}$ برای $x \in \Omega$ به صورت

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi_g(x, f(x)) = \varphi_g \mathrm{o} (\mathrm{Id} \times f)(x), \\ \bar{u} &= \psi_g(x, f(x)) = \psi_g \mathrm{o} (\mathrm{Id} \times f)(x), \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

تعریف می‌شود که در آن Id تابع همانی روی X است. برای یافتن $\bar{f}$ باید x را از رابطه (۱۰.۳) حذف نمود. به ازای $g = e$ واضح است که $\varphi_e \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f) = \mathrm{Id}$. به ازای یک g نزدیک عضو همانی e، ژاکوبین $\varphi \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)$ غیرتکین است و بنابراین با استفاده از قضیه تابع ضمنی داریم

$$x = [\varphi_g \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)]^{-1}(\bar{x}). \tag{۱۱.۳}$$

حال با جایگذاری (۱۱.۳) در $\bar{f}$ داریم:

$$\bar{f} = g.f = [\psi_g \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)]\,\mathrm{o}\,[\varphi_g \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)]^{-1},$$

لذا با حذف x و وارون کردن φ_g ضابطه $\bar{f}$ به شکل زیر ساخته می‌شود:

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = f(\varphi_g^{-1}(\bar{x})) = f(\varphi_{g^{-1}}(\bar{x})). \tag{۱۲.۳}$$

مثال ۱.۲.۳. فرض کنیم $p = q = 1$ و بنابر این $X \simeq U \simeq \mathbb{R}$. گروه دوران‌های $G = \mathrm{SO}(2)$ روی $E \simeq \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید [۷۵]. اگر θ عضوی از G باشد داریم:

$$(\bar{x},\bar{u}) = \theta.(x,u) = \big(x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta\big). \tag{۱۳.۳}$$

اما اگر فرض کنیم $u = f(x)$ یک تابع روی $\mathbb{R}^2$ با گراف Γ_f باشد واضح است که عمل $\mathrm{SO}(2)$ روی تابع f چیزی نیست جز دوران گراف آن به اندازهٔ زاویهٔ θ. بنابر این اگر f روی یک بازهٔ متناهی مانند $[a,b]$ تعریف شده و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد آنگاه $\theta.\Gamma_f$ خود گراف دوران یافتهٔ گراف تابع f می‌باشد. حال اگر تابع مفروض

$$f(x) = ax + b, \tag{۱۴.۳}$$

را در نظر بگیریم در این حالت واضح است که

$$(\bar{x},\bar{u}) = \theta.(x,u) = \Big(x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta\Big). \tag{۱۵.۳}$$

با حذف x از دستگاه خواهیم داشت:

$$x = \frac{\bar{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}. \tag{۱۶.۳}$$

پس برای یافتن تبدیل یافتهٔ تابع (۱۴.۳) تحت زاویهٔ θ، x را از (۱۶.۳) در $\bar{f}$ جایگذاری کرده و بنابر این $\bar{f}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\bar{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta}. \tag{۱۷.۳}$$

۱.۲.۳ امتداد دهی عمل گروه

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی یک زیر مجموعهٔ باز $M \subset X \times U$ از فضای متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کند. یک عمل القا شده از گروه G روی فضای جت مرتبه nـام $M^{(n)}$ وجود دارد که امتداد مرتبه nـام از عمل گروه G روی M نامیده می‌شود و آن را با $\mathrm{pr}^{(n)}G$ یا $G^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. این امتداد دهی چنان تعریف شده است که مشتقات تابع $u = f(x)$ را به مشتقات تابع تبدیل یافته $\bar{u} = \bar{f}(x)$ متناظر می‌کند. به بیان دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه nـام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. پس اگر g یک عنصر از گروه تبدیلات G باشد که در همسایگی همانی است تابع تبدیل آن $g.f$ نیز در همسایگی نقطهٔ متناظر $(\bar{x}_0, \bar{u}_0) = g.(x_0, u_0)$ تعریف می‌شود. آنگاه با درنظر گرفتن g به عنوان یک تابع به صورت $g : M \to M$، امتداد آن روی M به صورت:

$$g^{(n)} : M^{(n)} \to M^{(n)}, \tag{۱۸.۳}$$

با ضابطه $g^{(n)}.(x_0, u_0^{(n)}) = (\bar{x}_0, \bar{u}_0^{(n)})$ به ازای هر نقطهٔ دلخواه $(x_0, u_0^{(n)}) \in M^{(n)}$ تعریف می‌شود.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنیم $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ باشد. عمل گروه $\mathrm{SO}(2)$ روی E را همانند مثال ۱.۲.۳ در نظر می‌گیریم [۷۵]. می‌خواهیم این عمل را تا مرتبهٔ یک امتداد دهیم. در این حالت $\mathrm{J}^{(1)}(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(1)} \simeq \mathbb{R}^3$. می‌دانیم اگر $f(x) = u$ یک تابع روی E باشد آنگاه طبق تعریف ۸.۱.۳ امتداد مرتبه اول f را به صورت زیر داریم:

$$f^{(1)}(x) = (f(x), f'(x)).$$

فرض کنیم (x^0, u^0, u_x^0) نقطه‌ای از $\mathrm{J}^1(E)$ و θ تبدیلی از $\mathrm{SO}(2)$ باشد. هدف یافتن تبدیلی به صورت

$$\theta^{(1)}.(x^0, u^0, u_x^0) = (\bar{x}^0, \bar{u}^0, \bar{u}_x^0),$$

است.چند جمله‌ای

$$f(x) = u^0 + u_x^0(x - x^0) = u_x^0.x + (u^0 - u_x^0 x^0), \tag{۱۹.۳}$$

را که در آن $f(x^0) = u^0$ و $f'(x^0) = u_x^0$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به تابع (۱۹.۳) تبدیل یافتهٔ f تحت زاویهٔ θ تابع خطی زیر می‌باشد:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \theta.f(\bar{x}) = \frac{\sin\theta + u_x^0 \cos\theta}{\cos\theta - u_x^0 \sin\theta}\bar{x} + \frac{u^0 - x^0 u_x^0}{\cos\theta - u_x^0 \sin\theta}, \qquad u_x^0 \neq \cot\theta. \tag{۲۰.۳}$$

بنابراین

$$\bar{x}^0 = x^0 \cos\theta - u^0 \sin\theta,$$

و در نتیجه

$$\bar{u}^0 = \bar{f}(\bar{x}^0) = x^0 \sin\theta + u^0 \cos\theta.$$

حال با یک بار مشتقگیری از $\bar{u}^0$ داریم:

$$\bar{u}^0_x = \bar{f}'(\bar{x}^0) = \frac{\sin\theta + u^0_x \cos\theta}{\cos\theta - u^0_x \sin\theta}.$$

بنابر این ضابطهٔ امتداد مرتبهٔ اول عملگروه $\mathrm{SO}(2)^{(1)}$ روی $\mathrm{J}^{(1)}$ را می‌توان به فرم زیر نوشت.

$$\theta^{(1)}.(x,u,u_x) = \left(x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta, \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}\right), \ \ |\theta| < |\mathrm{arccot} u_x|.$$

در مثال فوق همانگونه که مشاهده می‌شود عمل $\mathrm{SO}(2)^{(1)}$ روی متغیرهای (x,u) همانند عمل $\mathrm{SO}(2)$ روی این متغیرهاست و تنها روی u_x به صورتی متفاوت عمل می‌کند. به طور کلی اگر $G^{(n)}$ روی $(x,u^{(n)})$ عمل کند، با تقلیل این عمل به مرتبهٔ $k \leq n$ عمل $G^{(n)}$ معادل عمل $G^{(k)}$ خواهد بود. به ویژه برای $k=0$ عمل $G^{(0)}$ با عمل G یکی است. بدین معنا که اگر $\pi^n_k : M^{(n)} \to M^{(n)}$ نگاشت تصویر طبیعی با ضابطهٔ $\pi^n_k(x,u^{(n)}) = (x,u^{(k)})$ باشد $u^{(k)}$ شامل آن دسته از مؤلفه‌های u^α_J است که در آن $\#J \leq k$. به عنوان مثال:

$$\pi^2_1(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = (x,y;u;u_x,u_y).$$

۲.۲.۳ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها

در این بخش، نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری را نیز می‌توان امتداد داد که از آن‌ها به‌عنوان مولدهای بی‌نهایت کوچک یاد می‌گردد. قابل ذکر است که این فرآیند نخستین گام در راستای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید که $\mathcal{O} \subset E$ مجموعه‌ای باز بوده و $F(x,u^{(n)})$ تابعی هموار روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ باشد. منظور از مشتق کامل F نسبت به x^i که آن را با $D_iF(x,u^{(n+1)})$ نمایش می‌دهیم، تابعی هموار است که روی $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ تعریف شده و دارای این ویژگی مهم می‌باشد که هرگاه $u=f(x)$ تابعی هموار باشد، آن‌گاه:

$$D_iF(x,f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}[F(x,f^{(n)}(x))].$$

شایان ذکر است که لم زیر که به‌طور متوسط از قاعده مشتق زنجیری حاصل می‌گردد، فرمول صریحی به منظور محاسبه مشتق کامل در قالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید [۷۵].

لم ۱.۲.۳. تابع $F(x,u^{(n)})$ را روی فضای جت $J^{(n)}(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $J=(j_1,\dots,j_k)$ یک اندیس چندگانه بوده و $u^\alpha_{J,i} = \frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i}$ باشد. آن‌گاه:

$$D_iF = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} u^\alpha_{J,i}\frac{\partial F}{\partial u^\alpha_J}, \qquad (۲۱.۳)$$

به‌عنوان مثال، هرگاه $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, y, u) باشد، آن گاه:

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots,$$
$$D_yF = \frac{\partial F}{\partial y} + u_y\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy}\frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxy}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots,$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x, y می‌باشند. به همین ترتیب، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J = (j_1, \dots, j_k)$ به‌صورت زیر بیان نمود:

$$D_J = D_{j_1} \cdot D_{j_2} \cdots D_{j_k}.$$

اکنون شرایط مهیا می‌باشد تا به ارائه قضیه‌ای بپردازیم که نحوه‌ی محاسبه امتداد میدان‌های برداری را به‌دست می‌دهد.

تعریف ۳.۲.۳. گیریم M یک زیرمجموعه باز از $E = X \times U$ و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی M با گروه یک‌ـ‌پارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ باشد. امتداد مرتبه nـ‌ام $\mathbf{v}$ را با $\mathbf{v}^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی $M^{(n)}$ بوده که به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه امتداد یافته یک‌ـ‌پارامتری $[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]^{(n)}$ می‌گویند. بدین معنا که:

$$\mathbf{v}^{(n)}\Big|_{(x,u^{(n)})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]^{(n)}(x, u^{(n)}), \qquad (x, u^{(n)}) \in M^{(n)}, \tag{۲۲.۳}$$

مثال ۳.۲.۳. عمل گروه $\mathrm{SO}(2)$ روی $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

نظیر عمل گروه یک‌ـ‌پارامتری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x, u) = (x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon),$$

می‌باشد. مطابق رابطه (۲۰.۳) داریم :

$$[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]^{(n)}(x, u, u_x) = \left(x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon, \frac{\sin\varepsilon + u_x\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - u_x\sin\varepsilon}\right),$$

به کمک فرمول (۲۲.۳) می‌توان دید که تبدیل برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(1)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}. \tag{۲۳.۳}$$

تعریف ۴.۲.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta : J^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن یعنی

$$\mathbb{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\right)_{m\times(p+qp^{(n)})},$$

از رتبه m باشد.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال تعریف‌شده در یک زیرمجموعه باز از E مانند $\mathcal{O}$ باشد، اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و $\mathbf{v}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، آن‌گاه $\Delta = 0$، G را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد. اگر:

$$\mathbf{v}^{(n)}(\Delta) = 0, \qquad \text{هرگاه} \qquad \Delta = 0. \tag{۲۴.۳}$$

برهان. [۷۴] $\square$

روش به کارگیری قضیه فوق مستلزم ارائه فرمول صریحی برای محاسبه امتداد یک میدان برداری است.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ باشد. امتدادمرتبه nـام میدان برداری $\mathbf{v}$ یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۲۵.۳}$$

روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ می‌باشد که ضرایب ϕ_α^J در (۲۵.۳) با فرمول

$$\phi_\alpha^J(x,u^{(n)}) = D_J\big(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\big) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{J,i}^\alpha\,, \tag{۲۶.۳}$$

ساخته می‌شوند. شایان ذکر است عبارت

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha,$$

در (۲۶.۳) را مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

برهان. قضیه را ابتدا به ازای $n = 1$ اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v})$ یک گروه یک‌ـپارامتری نظیر میدان برداری $\mathbf{v}$ باشد که تبدیل آن با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(\bar{x},\bar{u}) = g_\varepsilon.(x,u) = (\Phi_\varepsilon(x,u), \Psi_\varepsilon(x,u)),$$

و نیز داریم:

$$\begin{aligned} \xi^i(x,u) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Phi_\varepsilon^i(x,u), \qquad i = 1,\cdots,p, \\ \phi_\alpha(x,u) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Psi_\varepsilon^\alpha(x,u), \qquad \alpha = 1,\cdots,q, \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

به طوریکه Φ^i_ε و Ψ^α_ε مؤلفه‌های Φ_ε و Ψ_ε هستند. به ازای $(x,u)\in E$ و $(x,u^{(1)})\in J^1(\mathcal{O})$ تابع $u=f(x)$ با امتداد مرتبهٔ $u^{(1)}=f^{(1)}(x)$ و مؤلفه‌های $u^\alpha=f^\alpha(x)$ و $u^\alpha_i=\dfrac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i}$ مفروض است. با انتخاب ε به اندازهٔ کافی کوچک تبدیل f تحت g_ε خوش تعریف است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\bar{u}=\bar{f}_\varepsilon(\bar{x})=(g_\varepsilon.f)(\bar{x})=[\Psi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)]\mathrm{o}[\Phi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)^{-1}(\bar{x})].$$

با استفاده از مشتق زنجیره‌ای ماتریس ژاکوبین $\mathbb{J}\bar{f}_\varepsilon(x)=(\partial\bar{f}^\alpha_\varepsilon/\partial\bar{x}^i)$ با فرض $x=[\Phi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)]^{-1}(x)$ به شکل

$$\mathbb{J}\bar{f}_\varepsilon(\bar{x})=\mathbb{J}[\Psi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x).\Big\{\mathbb{J}[\Phi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x)^{-1}\Big\}, \tag{۲۸.۳}$$

نوشته می‌شود. بسط فرمول (۲۸.۳) امتداد مرتبه اول $g^{(1)}_\varepsilon$ را به دست می‌دهد. برای یافتن مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}^{(1)}$، باید از (۲۸.۳) نسبت به ε مشتق گرفته و در نهایت قرار دهیم $\varepsilon=0$. اگر $\Xi(\varepsilon)$ یک ماتریس مربعی وارون پذیر از توابع وابسته به ε باشد، آنگاه

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\Xi(\varepsilon)^{-1}]=-\Xi(\varepsilon)^{-1}\frac{d\Xi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Xi(\varepsilon)^{-1}.$$

هرگاه $\varepsilon=0$ باشد داریم:

$$\Phi_0(x,f(x))=x,\qquad \Psi_0(x,f(x))=f(x), \tag{۲۹.۳}$$

بنابراین اگر $\mathbb{I}$ ماتریس همانی $p\times p$ باشد آنگاه:

$$\mathbb{J}[\Phi_0\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x)=\mathrm{Id},\qquad \mathbb{J}[\Psi_0\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x)=\mathbb{J}f(x).$$

حال با مشتق گیری از (۲۸.۳) در نقطهٔ $\varepsilon=0$ و استفاده از قاعدهٔ لایبنیتز روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathbb{J}\bar{f}_\varepsilon(\bar{x})&=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathbb{J}[\Psi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x)-\mathbb{J}f(x).\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathbb{J}[\Phi_\varepsilon\mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x)\\&=\mathbb{J}[\phi\ \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x)-\mathbb{J}f(x).\mathbb{J}[\xi\ \mathrm{o}(\mathrm{Id}\times f)](x).\end{aligned} \tag{۳۰.۳}$$

توجه شود که در تساوی دوم عبارت بالا $\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^p)^T$ و $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_q)^T$ دو بردار ستونی هستند. درایه‌های ماتریس رابطهٔ (۳۰.۳) ضرایب ϕ^k_α عبارت $\partial/\partial u^\alpha_k$ را در $\mathbf{v}^{(1)}$ مشخص می‌کنند. به عنوان مثال درایهٔ (α,k)ـ ام برابر است با:

$$\phi^k_\alpha(x,f^{(1)}(x))=\frac{\partial}{\partial x^k}[\phi_\alpha(x,f(x))]-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}[\xi^i(x,f(x))].$$

لذا اگر قرار دهیم $u^\alpha_{k,i}=\partial^2u^\alpha/\partial x^k\partial x^i$، با بکارگیری مشتق کامل رابطهٔ بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi^k_\alpha(x,u^{(1)})&=D_k[\phi_\alpha(x,u)]-\sum_{i=1}^{p}D_k[\xi^k(x,u)]u^\alpha_i\\&=D_k\big[\phi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi^iu^\alpha_i\big]+\sum_{i=1}^{p}\xi^iu^\alpha_{ki}.\end{aligned} \tag{۳۱.۳}$$

حال قضیه را در حالت عمومی اثبات می‌کنیم. ابتدا باید توجه کنیم که $\mathrm{J}^{(n+1)}(\mathcal{O})$ را می‌توان به عنوان زیر فضایی از $\mathrm{J}^{(1)}(\mathrm{J}^{(n)}(\mathcal{O}))$ در نظر گرفت. (زیرا مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ـام u_J^α را می‌توان به عنوان مشتق مرتبهٔ اول مشتقات مرتبهٔ nـام در نظر گرفت.) پس به کمک استقرا می‌توان $\mathbf{v}^{(n)}$ را از روی $\mathbf{v}^{(n-1)}$ بدین صورت ساخت. فرض کنیم $\mathbf{v}^{(n-1)}$ یک میدان برداری در $\mathrm{J}^{(n-1)}(\mathcal{O})$ باشد. بنابراین با یک بار امتداد دادن آن به یک میدان برداری در $\mathrm{J}(\mathrm{J}^{(n-1)}(\mathcal{O}))$ می‌رسیم که ضرایب آن به ازای اندیس چندگانهٔ $1 \le k \le p$، $J = (j_1, \cdots, j_k)$ و $\alpha = 1, \cdots, q$ برابر با $u_{J,k}^\alpha = \partial u_J^\alpha / \partial x^k$ خواهند بود. حال با توجه به (۳۱.۳) ضرایب $\partial/\partial u_{J,k}^\alpha$ در امتداد مرتبهٔ اول $\mathbf{v}^{(n-1)}$ برابر خواهند بود با:

$$\phi_\alpha^{J,k} = D_k \phi_\alpha^J - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^k . u_{J,i}^\alpha. \tag{۳۲.۳}$$

حال کافی است نشان دهیم فرمول (۲۶.۳) در (۳۲.۳) صدق می‌کند. این امر در محاسبات

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^{J,k} &= D_k \left\{ D_J \big(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\big) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha \right\} - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi . u_{J,i}^\alpha \\
&= D_k D_J \left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^{p} (D_k \xi^i . u_{J,i}^\alpha + \xi^i u_{J,i,k}) - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^i . u_{J,i}^\alpha \\
&= D_k D_J \left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i,k} \, ,
\end{aligned}$$

قابل رؤیت است. □

مثال ۴.۲.۳. مجدداً گروه دوران $\mathrm{SO}(2)$ را که روی $X \times U \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عمل می‌کند را درنظر بگیرید. می‌دانیم که مولد بی‌نهایت کوچک آن به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u},$$

در این حالت $\xi = -u$ و $\phi = x$ است پس اولین امتداد از این میدان برداری به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{pr}^{(1)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x}$$

که در آن

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + u u_x) - u u_{xx} = 1 + u_x^2.$$

به همین شکل ضرایب ϕ^{xx} از $\partial/\partial u_{xx}$ در امتداد مرتبه مرتبه دوم $\mathbf{v}$ با روش زیر

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + u u_x) - u u_{xxx} = 3 u_x u_{xx},$$

یا با استفاده فرمول بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$\phi^{xx} = D_x \phi^x - u_{xx} D_x \xi = D_x(1 + u_x^2) + u_x u_{xx} = 3 u_x u_{xx}.$$

پس مولد بی‌نهایت کوچک امتداد مرتبه دوم گروه $SO(2)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{v}^{(2)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \qquad (۳۳.۳)$$

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات عمل کننده روی منیفلد M زیر مجموعهٔ $X \times U$ باشد.یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبه nـام از G یک تابع هموار مانند $I : M^{(n)} \to \mathbb{R}$ وابسته به x، u و مشتقات u است به طوریکه I تحت امتداد مرتبه nـام G ناورداست؛ به این معنا که:

$$I\big(g^{(n)}.(x, u^{(n)})\big) = I(x, u^{(n)}).$$

مثال ۵.۲.۳. به مثال (۶.۱.۳) باز می‌گردیم با توجه به تعریف (۵.۲.۳) ناوردای دیفرانسیلی مرتبهٔ صفر تابعی چون $I : E \to \mathbb{R}$ است که در شرط $I(g.(x,u)) = I(x,u)$ صدق می‌کند. می‌توان بررسی کرد که در اینجا $r = \sqrt{x^2+u^2}$ تابع مورد نظر است. بنابر این r یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبهٔ صفر یا یک ناوردای معمولی است. به همین ترتیب می‌توان دید که توابع

$$w = \frac{xu_x - u}{x + uu_x}, \qquad k = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}},$$

از سمت چپ به ترتیب ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه دوم و سوم هستند.

تعریف ۶.۲.۳. ناورداهای دیفرانسیلی $I_1, \cdots, I_k$ را مستقل تابعی گوییم هرگاه

$$dI_1 \wedge \cdots \wedge dI_k \neq 0,$$

و اکیداً مستقل تابعی گوییم اگر

$$dx \wedge du^{(n-1)} \wedge dI_1 \wedge \cdots dI_k \neq 0.$$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی $\mathcal{O} \subset E$ باشند. در این صورت برای هر $n \in N$ ویژگی‌های زیر برقرارند:

$$1)(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})^{(n)} = \alpha\mathbf{v}^{(n)} + \beta\mathbf{w}^{(n)}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$2)[\mathbf{v}, \mathbf{w}]^{(n)} = [\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}].$$

برهان. [۷۵]. □

نتیجهٔ زیر به طور مستقیم از قضیه فوق می‌آید.

نتیجه ۱.۲.۳. فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه معادلات از رتبهٔ ماکسیمال تعریف شده روی $\mathcal{O} \subset E$ باشد. مجموعهٔ تمام تقارن‌های بی‌نهایت کوچک این دستگاه یک جبرلی از میدان‌های برداری روی $\mathcal{O}$ می‌سازد. علاوه بر آن اگر این جبرلی با بعد متناهی باشد، گروه تقارن‌های این سیستم یک گروه لی موضعی از تبدیلات روی $\mathcal{O}$ است.

 $\square$ برهان. [۷۵].

مثال ۶.۲.۳. معادلهٔ برگرز را می توان ساده‌ترین مدل ریاضی برای ترکیب دو عامل پراهمیت و اساسی رفتارهای غیر خطی و نیز پخش و اتلاف انرژی در حوزهٔ گسترده و پر از تنوع فیزیک و مکانیک امواج و دینامیک گازها به حساب آورد. این معادله نخستین بار در سال ۱۹۱۵ توسط هری بتمن[۲] معرفی شد. بعدها در سال ۱۹۴۸ ژوهانس مارتینوس برگرز[۳] مطالعه خود را بر روی آن آغاز کرد. این معادله یک PDE غیر خطی به شکل

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{۳۴.۳}$$

است که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف شده و به معادله پتانسیل برگرز معروف است [۷۵]. چون معادله مرتبه دوم است، برای یافتن تقارن‌ها لازم است که امتداد مرتبه دوم میدان برداری

$$\mathbf{v} = \xi^1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی E تعریف می‌شود تا مرتبه دو امتداد داده و با استفاده از قضیه (۱.۲.۳) تقارن‌ها را بیابیم.

امتداد مرتبه دوم $\mathbf{v}$ برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

و با استفاده از فرمول (۲۶.۳) و این‌که مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$، $Q = \phi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t$ است، ضرایب $\mathbf{v}^2$ یعنی $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{xt}, \phi^{tt}$ را در زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_xQ + \xi^1 u_{xx} = \phi_x + (\phi_u - \xi^1_x)u_x - \xi^2_x u_t - \xi^1_u u_x^2 - \xi^2_u u - x u_t,\\
\phi^t &= D_tQ + \xi^1 u_{xt} + \xi^2 u_{tt} = \phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2,\\
\phi^{xx} &= D_x^2Q + \xi^1 u_{xxx} + \xi^2 u_{xxt} = \phi_{xx} + (2\phi_{xu}\xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_x^2\\
&-2\xi^2_{xu}u_x u_t - \xi^1_{uu}u_x^3 - \xi^2_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi^1_x)u_{xx} - 2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} - 2\xi^2_u u_x u_{xt},\\
\phi^{xt} &= D_xD_tQ + \xi^1 u_{xxt} + \xi^2 u_{xtt} = \phi_{xt} + (\phi_{ut} - \xi^1_{xt})u_x + (\phi_{xu} - \xi^2_{xt})u_t\\
&-\xi^1_{ut}u_x^2 - \xi^2_{xu}u_t^2 + (\phi_{uu} - \xi^1_{xu} - \xi^1_{ut})u_x u_t - \xi^1_{uu}u_x^2 u_t - \xi^2_{uu}u_x u_t^2 - \xi^1_t u_{xx}\\
&+(\phi_u - \xi^1_x - \xi^2_t)u_{xt} - \xi^1_u u_{xx}u_t - 2\xi^1_u u_x u_{xt} - 2\xi^2_u u_t u_{xt} - \xi^2_x u_{tt} - \xi^2_u u_x u_{tt},\\
\phi^{tt} &= D_t^2Q + \xi^1 u_{ttt} + \xi^2 u_{xtt} = \phi_{tt} + (2\phi_{ut} - \xi^1_{tt})u_t - \xi^1_{tt}u_x\\
&+(\phi_{uu} - 2\xi^2_{ut}) - 2\xi^1_{ut}u_x u_t - \xi^2_{uu}u_t^3 - \xi^1_{uu}u_x u_t^2 + (\phi_u - 2\xi^2_t)u_{tt}\\
&-2\xi^1_t u_{xt} - 3\xi^2_u u_t u_{tt} - \xi^1_u u_x u_{tt} - 2\xi^1_u u_t u_x.
\end{aligned}$$

حال با اثر دادن $\mathbf{v}^{(2)}$ بر معادله برگرز داریم:

$$\phi^t = \phi^{xx} + 2u_x\phi^x, \tag{۳۵.۳}$$

---

[۲] Harry Bateman

[۳] Johannes Martinus Burgers

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۳.۳۵) به دستگاه PDE خطی

$$\begin{aligned}\phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2 \; &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_t \\ &+(\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_x^2 - 2\xi^2_{xu}u_x u_t \\ &-\xi^1_{uu}u_x^3 - \xi^2_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2_x)u_{xx} \\ &-2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} - \xi^2_u u_t u_{xx} \\ &-2\xi^2_u u_x u_{xt} + 2\phi_x u_x + 2(\phi_u - \xi^1_x)u_x^2 \\ &-2\xi^2_x u_t u_x - 2\xi^1_u u_x^3 - 2\xi^2_u u_x^2 u_t,\end{aligned}$$

می‌رسیم که با قرارداد $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ در بالا داریم:

$$\begin{aligned}\phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2 \; &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_t \\ &+(\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_t - (\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_{xx} \\ &-2\xi^2_{xu}u_x u_t - \xi^1_{uu}u_x^3 - \xi^2_{uu}u_t^2 + \xi^2_{uu}u_t u_{xx} \\ &+(\phi_u - 2\xi^1_x)u_{xx} - 2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} \\ &-\xi^2_u u_t u_{xx} - 2\xi^2_u u_x u_{xt} + 2\phi_x u_x \\ &+2(\phi_u - \xi^1_x)u_t - 2(\phi_u - \xi^1_x)u_{xx} \\ &-2\xi^2_x u_t u_x - 2\xi^1_u u_x^3 - 2\xi^2_u u_t^2 + 2\xi^2_u u_t u_{xx},\end{aligned}$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع u در دو طرف تساوی بالا به جدول (۳.۱) می‌رسیم. از معادله‌ی (۹) و (۱۱) در جدول مشخص می‌شود که ξ^2 نسبت به x و u مستقل است. همچنین از معادله‌ی (۱۰) مشخص می‌شود که ξ^1 نسبت به u مستقل است. از معادله‌ی (۶) نتیجه می‌شود $\phi_u = -\phi_{uu}$ بنابراین $\phi = \alpha(x,t)e^{-u} + \beta(x,t)$. پس از معادله‌ی (۳) نتیجه می‌شود که $\xi^2_t = 2\xi^1_x$ پس ξ^1 نسبت به x از درجه اول است یعنی $\xi^1_{xx} = 0$ پس با توجه به معادله‌ی (۲) نتیجه می‌شود $\xi^1_t = -2\phi_{xu} - 2\phi_x$ و در این صورت:

$$\xi^1_t = -2\phi_{xu} - 2\phi_x = -2\beta_x \Rightarrow \beta = -\tfrac{1}{8}\xi^2_{tt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t).$$

و از $\phi_t = \phi_{xx}$ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= c_1 + c_4 x + 2c_5 + 4c_6 xt, \\ \xi^2 &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \\ \phi &= \alpha(x,t)e^{-u} + c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2.\end{aligned}$$

که $c_1, \ldots, c_6$ ثوابت دلخواه هستند و $\alpha(x,t)$ جواب دلخواهی از معادله حرارت است $\alpha_t = \alpha_{xx}$.
بنابراین فضای جبر لی تقارن‌ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v_1} = \partial_x, \qquad \mathbf{v_2} = \partial_t, \qquad \mathbf{v_3} = \partial_u, \\ &\mathbf{v_4} = x\partial_x + 2t\partial_t, \qquad \mathbf{v_5} = 2t\partial_x - x\partial_u, \\ &\mathbf{v_6} = 4tx\partial_x + 4t^2 - (x^2 + 2t)\partial_u, \qquad \mathbf{v_\alpha} = \alpha(x,t)e^{-u}\partial_u.\end{aligned}$$

تک جمله‌ای‌ها	ضرایب	
1	$\phi_{xx} = \phi_t$	(۱)
u_x	$2\phi_{xu} - \xi^1_{xx} + 2\phi_x = -\xi^1_t$	(۲)
u_t	$\xi^2_{xx} + \phi_{uu} - 2\xi^1_{xu} + 2\phi_u - 2\xi_x = \phi_u - \xi^2_t$	(۳)
$u_x u_t$	$-2\xi^2_{xu} - 2\xi^2_x = \xi^1_u$	(۴)
u_t^2	$-\xi^2_{uu} - 2\xi^2_u = \xi^2_u$	(۵)
u_{xx}	$2\xi^1_{xu} - \phi_{uu} + \phi_u - 2\xi^1_x - 2\phi_u + 2\xi^1_x = 0$	(۶)
u_x^3	$\xi^1_{uu} - 2\xi^1_u = 0$	(۷)
$u_t u_{xx}$	$\xi^2_{uu} - \xi^2_u - 2\xi^2_u = 0$	(۸)
u_{xt}	$-2\xi^2_x = 0$	(۹)
$u_x u_{xx}$	$-3\xi^1_u = 0$	(۱۰)
$u_x u_{xt}$	$-2\xi^2_u = 0$	(۱۱)

جدول ۱.۳: جدول ضرایب و تک جمله‌ای‌ها

در نهایت با محاسبه تابع نمایی نظیر این میدان‌های برداری داریم:

$$\begin{aligned}
g_1 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_1)(x,t,u) = (x+\varepsilon, t, u),\\
g_2 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_2)(x,t,u) = (x, t+\varepsilon, u),\\
g_3 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_3)(x,t,u) = (x, t, u+\varepsilon),\\
g_4 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_4)(x,t,u) = (e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, u),\\
g_5 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_5)(x,t,u) = (x+2\varepsilon t, t, -2t\varepsilon^2 - x\varepsilon + u),\\
g_6 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_6)(x,t,u) = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right\}\right),\\
g_\alpha &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_\alpha)(x,t,u) = (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

اگر $u = f(x,t)$ یک جواب برای معادله‌ی مذکور باشد و تقارن‌ها را روی آن اثر دهیم، در این صورت جواب‌هایی جدید برای معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
u^1 &= f(x-\varepsilon, t),\\
u^2 &= f(x, t-\varepsilon),\\
u^3 &= f(x, t-\varepsilon),\\
u^4 &= f(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t),\\
u^5 &= f(x-2\varepsilon t, t) + \varepsilon x - \varepsilon^2 t,\\
u^6 &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right),\\
u^\alpha &= f(x,t) + \varepsilon\alpha(x,t).
\end{aligned}$$

به‌عنوان مثال بدیهی است که $u = c$ یک جواب از معادله (۴۲.۴) است. لذا با توجه به یک u^6 یک جواب جدید به شکل $\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}$ $u = \frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp$ به‌دست می آید.

مثال ۷.۲.۳. معادله باک مستر[۴] در توصیف جریان‌های ورقه‌های سیال با چسبندگی کم به کار می‌رود. دینامیک ورقه‌های متراکم نازک در بسیاری از پدیده‌ها چون خم شدن رخ می‌دهد. خم شدن گونه‌ای از ناپایداری است که در اجسام نازک در زمان فشرده سازی طولی بیشتر از آستانه تحمل شئ رخ داده و موجب خم شدن در خارج از صفحه می‌شود. خم شدن ورق‌های دوبعدی توسط افرادی چون باک مستر و ناخمن[۵] مورد مطالعه قرار گرفت. معادله باک مستر دو بعدی به صورت زیر است:

$$u_t = (u^4)_{xx} + (u^3)_{xx}. \tag{۳۶.۳}$$

معادله باک مستر معادله‌ای غیر خطی است که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. در این مثال قصد داریم تقارن‌های نقطه‌ای لی این معادله را بیابیم [۹۰]. گروه یک پارامتری از تبدیلات پیوسته‌ای که توسط این معادله پذیرفته می‌شوند به صورت

$$\bar{t} = \bar{t}(t,x,u), \qquad \bar{x} = \bar{x}(t,x,u), \qquad \bar{u} = \bar{u}(t,x,u),$$

هستند که هر جوابی از معادله باک مستر را به جوابی دیگر از این معادله نگاشت می‌کنند. میدان برداری وابسته به گروه تبدیلات فوق به صورت

$$\mathbf{v} = \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۳۷.۳}$$

است. با توجه به اینکه باک مستر یک معادله مرتبه دوم است لازم است میدان برداری فوق را تا مرتبه دوم امتداد بدهیم. امتداد مرتبهٔ دوم میدان برداری (۳۷.۳) را با کمک فرمول (۲۵.۳) برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

معادله باک مستر را به صورت

$$u_t - 4u_{xx}u^3 - 12u_x^2u^2 - 3u^2u_x = 0, \tag{۳۸.۳}$$

بازنویسی می‌کنیم. اگر طبق قضیه (۱.۲.۳) شرط ناوردایی

$$\mathbf{v}^{(2)}(u_t - 4u_{xx}u^3 - 12u_x^2u^2 - 3u^2u_x)\Big|_{(۳۸.۳)} = 0, \tag{۳۹.۳}$$

برقرار باشد این معادله مولد (۳۷.۳) را به عنوان مولد گروه تقارن می‌پذیرد. مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ به صورت $Q = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ است. با اثر دادن مولد $\mathbf{v}^{(2)}$ بر (۳۸.۳) به معادله مشخصه زیر خواهیم رسید:

$$\eta^t - 6\eta u_x u - 24\eta u u_x^2 - 12\eta u_{xx}u^2 - 3\eta^x u^2 - 24\eta^x u_x u^2 - 4\eta^{xx}u^3 = 0. \tag{۴۰.۳}$$

---

[۴] Buckmaster

[۵] Nachman

با کمک فرمول (۲۶.۳) ضرایب را در (۴۰.۳) به دست می‌آوریم.

$$\eta^x = D_xQ + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,$$

$$\eta^t = D_tQ + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2,$$

$$\eta^{xx} = D_x^2Q + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = \eta_{xx} + (2\eta_{xu}\xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3$$
$$-2\tau_{xu}u_x u_t - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt},$$

با جایگذاری ضرایب فوق در معادله (۴۰.۳) به دستگاه PDE خطی

$$\tau_u = \tau_x = \tau_{tt} = \xi_t = \xi_u = 0,$$
$$\xi_x = \tau_t, \qquad \eta = \tau_t u.$$

با حل دستگاه فوق مقادیر τ, ξ و η به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tau(x,t,u) = c_3 t + c_1, \qquad \xi(x,t,u) = -c_3 x + c_2, \qquad \eta(x,t,u) = -c_3 u, \tag{۴۱.۳}$$

که c_i ها ثوابتی دلخواه هستند. بنابراین فضای جبرلی تقارن ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۴۲.۳}$$

گروه یک پارامتری تولید شده توسط X_i ها به صورت زیر هستند:

$$G_1 : (t+\epsilon, x, u), \qquad G_2 : (t, x+\epsilon, u), \qquad G_3 : (te^{\epsilon}, xe^{-\epsilon}, ue^{-\epsilon}).$$

چون هر G_i یک گروه تقارن است، با استفاده از نگاشت نمایی می‌توان نشان داد که اگر $u = f(t,x)$ جوابی از معادله باک مستر باشند آنگاه توابع

$$u^{(1)} = f(t-\epsilon, x), \qquad u^{(2)} = f(t, x-\epsilon), \qquad u^{(3)} = f(e^{-\epsilon}t, e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}u),$$

که در آنها پارامتر ϵ یک عدد حقیقی است نیز جواب‌های دیگری برای این معادله هستند.

مثال ۸.۲.۳. گروه تقارن معادله انتقال حرارت را در یک منیفلد دو_بعدی تحلیل می‌کنیم [۳]. معادله انتقال حرارت را به صورت

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{۴۳.۳}$$

را در نظر می‌گیریم. همانگونه که می‌دانید این معادله انتشار گرما یا تغییرات دما را در طول زمان در یک ناحیه از ماده نشان می‌دهد. در این معادله سه متغیر مستقل t، x و y و یک متغیر وابسته u داریم، بنابراین $p = 3$ و $q = 1$ و $E = X \times U^{(2)}$. حال میدان برداری متناظر به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۴۴.۳}$$

امتداد دوم آن به‌صورت

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \eta^{ty} \frac{\partial}{\partial u_{ty}},$$

می‌باشد. طبق قضیه (۱.۲.۳) محک بی‌نهایت کوچک ناوردایی برای معادله (۴۳.۳) به صورت

$$0 = \mathbf{v}^{(2)}(u_t - u_{xx} - u_{yy})|_{u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0} = (\eta^t - \eta^{xx} - \eta^{yy})|_{u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0}, \qquad (۴۵.۳)$$

است. با کمک فرمول (۲۶.۳) ضرایب را در رابطهٔ فوق به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\eta^t &= D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} + \varphi u_{yt} \\
&= \eta_t - \varphi_t u_y - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \varphi_u u_t u_y - \tau_u u_t^2, \\
\eta^x &= D_x Q + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} + \varphi u_{xy} \\
&= \eta_x - \varphi_x u_y - \tau_x u_t + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_u u_x u_t - \varphi_u u_x u_y - \xi_u u_x^2, \\
\eta^y &= D_x Q + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} + \varphi u_{yy} \\
&= \eta_y - \tau_y u_t - \xi_y u_x + (\eta_u - \varphi_y) u_y - \xi_u u_x u_y - \tau_u u_y u_t - \varphi_u u_y^2, \\
\eta^{xx} &= -\tau_{uu} u_t u_x^2 - \xi_{uu} u_x^3 - \varphi_{uu} u_x^2 u_y - 2\tau_{xu} u_t u_x - 2\xi_{xu} u_x^2 - 2\varphi_{xu} u_x u_y + \eta_{uu} u_x^2 \\
&\quad -\tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{tx} - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\varphi_u u_x u_{xy} - \varphi_u u_y u_{xx} + 2u_x \eta_{xu} \\
&\quad -\tau_{xx} u_t - \xi_{x,x} u_x - \varphi_{x,x} u_y + \eta_u u_{xx} - 2\tau_x u_{tx} - 2\xi_x u_{xx} - 2\varphi_x u_{xy} + \eta_{xx}, \\
\eta^{yy} &= -\tau_{uu} u_t u_y^2 - \xi_{uu} u_x u_y^2 - \varphi_{uu} u_y^3 - 2\tau_{yu} u_t u_y - 2\xi_{yu} u_x u_y - 2\varphi_{yu} u_y^2 + \eta_{uu} u_y^2 \\
&\quad -\tau_u u_t u_{yy} - 2\tau_u u_y u_{ty} - \xi_u u_x u_{yy} - 2\xi_u u_y u_{xy} - 3\varphi_u u_y u_{yy} - \tau_{yy} u_t \\
&\quad -\xi_{yy} u_x - \varphi_{yy} u_y + 2u_y \eta_{yu} + \eta_u u_{yy} - 2\tau_y u_{ty} - 2\xi_y u_{xy} - 2\varphi_y u_{yy} + \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۴۵.۳) و فرمول‌های ارائه شده برای η^t، η^{xx} و η^{yy} داریم:

$$\begin{aligned}
0 = {} & \eta_t - \varphi_t u_y - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \varphi_u u_t u_y - \tau_u u_t^2 + \tau_{uu} u_t u_x^2 \\
& + \xi_{uu} u_x^3 + \varphi_{uu} u_x^2 u_y + 2\tau_{xu} u_t u_x + 2\xi_{xu} u_x^2 + 2\varphi_{xu} u_x u_y - \eta_{uu} u_x^2 \\
& + \tau_u u_t u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{tx} + 3\xi_u u_x u_{xx} + 2\varphi_u u_x u_{xy} + \varphi_u u_y u_{xx} - 2u_x \eta_{xu} \\
& + \tau_{xx} u_t + \xi_{x,x} u_x + \varphi_{x,x} u_y - \eta_u u_{xx} + 2\tau_x u_{tx} + 2\xi_x u_{xx} + 2\varphi_x u_{xy} - \eta_{xx} \\
& + \tau_{uu} u_t u_y^2 + \xi_{uu} u_x u_y^2 + \varphi_{uu} u_y^3 + 2\tau_{yu} u_t u_y + 2\xi_{yu} u_x u_y + 2\varphi_{yu} u_y^2 - \eta_{uu} u_y^2 \\
& + \tau_u u_t u_{yy} + 2\tau_u u_y u_{ty} + \xi_u u_x u_{yy} + 2\xi_u u_y u_{xy} + 3\varphi_u u_y u_{yy} + \tau_{yy} u_t \\
& + \xi_{yy} u_x + \varphi_{yy} u_y - 2u_y \eta_{yu} - \eta_u u_{yy} + 2\tau_y u_{ty} + 2\xi_y u_{xy} + 2\varphi_y u_{yy} - \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

با قرار دادن $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ ونیز برابر صفر قرار دادن ضرایب یک جمله‌ای‌ها داریم:

$$\eta_{tu} = -\frac{1}{2}\tau_{tt}, \quad \eta_{uu} = 0, \quad \eta_{ux} = -\frac{1}{2}\xi_t, \quad \eta_{uy} = -\frac{1}{2}\varphi_t, \quad \eta_{xx} = \eta_t - \eta_{yy},$$
$$\tau_u = \tau_x = \tau_y = \tau_{ttt} = \xi_u = \xi_{tt} = \varphi_u = \varphi_{tt} = \varphi_{tx} = \varphi_{xx} = 0,$$
$$\varphi_y = \frac{1}{2}\tau_t, \quad \xi_x = \frac{1}{2}\tau_t, \quad \xi_y = -\varphi_x. \tag{۴۶.۳}$$

حل دستگاه معادلات مشخصه (۴۶.۳) مقادیر زیر را برای τ، ξ، φ و η نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3,\\
\xi &= \frac{1}{2}(c_1 x - 4c_7)t + \frac{1}{2}c_2 x - c_4 y + c_8,\\
\varphi &= \frac{1}{2}(c_1 y + 2c_5)t + c_4 x + \frac{1}{2}y c_2 + c_6,\\
\eta &= -\frac{1}{8}c_1(x^2 + y^2 + 4t)u - \frac{1}{2}c_5 y u - c_7 x u + u c_9 + \alpha(t, x, y),
\end{aligned} \tag{۴۷.۳}$$

که $\alpha_t = \alpha_{xx} + \alpha_{yy}$ و نیز c_iها ثوابتی دلخواه هستند. بنابراین فضای جبرلی تقارن ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_3 = \partial_y, \quad \mathbf{v}_4 = u\partial_u,\\
&\mathbf{v}_5 = y\partial_x - x\partial_y, \quad \mathbf{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t,\\
&\mathbf{v}_7 = t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u, \quad \mathbf{v}_8 = t\partial_y - \frac{1}{2}yu\partial_u,\\
&\mathbf{v}_9 = \frac{1}{2}t^2\partial_t + \frac{1}{2}xt\partial_x + \frac{1}{2}ty\partial_y - \frac{1}{8}(x^2 + y^2 + 4t)u\partial_u,\\
&\mathbf{v}_\alpha = \alpha(t, x, y)\partial_u,
\end{aligned} \tag{۴۸.۳}$$

هر مولد بی‌نهایت کوچک مولد گروه یک‌ـپارامتری از تبدیلات به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
&G_1 : (t, x + \varepsilon, y, u),\\
&G_2 : (t + \varepsilon, x, y, u),\\
&G_3 : (t, x, y + \varepsilon, u),\\
&G_4 : (t, x, y, e^{\varepsilon} u),\\
&G_5 : (t, x + \varepsilon y, y - \varepsilon x, u),\\
&G_6 : (te^{2\varepsilon}, e^{\varepsilon} x, e^{\varepsilon} y, u),\\
&G_7 : \left(t, x + t\varepsilon, y, ue^{-\frac{1}{2}x\varepsilon}\right),\\
&G_8 : \left(t, x, y + \varepsilon t, ue^{-\frac{1}{2}y\varepsilon}\right),\\
&G_9 : \left(\frac{t}{1 - 4\varepsilon t}, \frac{x}{1 - 4\varepsilon t}, \frac{y}{1 - 4\varepsilon t}, u\sqrt{1 - 4\varepsilon t}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2 - \varepsilon y^2}{1 - 4\varepsilon t}\right\}\right),\\
&G_\alpha : (t, x, y, u + \varepsilon\alpha(t, x, y)).
\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $u=f(t,x,y)$ جوابی از معادله انتقال حرارت دو بعدی باشد بنابراین $\tilde{u}=f(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y})$ جواب جدیدی از آن است. گروه یک‌ــپارامتری

$$G_9(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u})=\left(\frac{t}{1-4\varepsilon t},\frac{x}{1-4\varepsilon t},\frac{y}{1-4\varepsilon t},u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2-\varepsilon y^2}{1-4\varepsilon t}\right]\right),$$

را در نظر می‌گیریم. سپس

$$\tilde{u}=f\left(\frac{t}{1+4\varepsilon t},\frac{x}{1+4\varepsilon t},\frac{y}{1+4\varepsilon t}\right)\frac{\exp\left(\frac{-\varepsilon x^2-\varepsilon y^2}{1+4\varepsilon t}\right)}{\sqrt{1+4\varepsilon t}},$$

نیز جوابی از معادله انتقال حرارت می‌باشد.

۳.۳ تبدیلات برخوردی

قبل از معرفی تبدیلات برخوردی لازم است با فرم‌های برخوردی آشنا شویم. مطالعه این بخش نیازمند دانستن مقدماتی درباره فرم‌های دیفرانسیلی که خواننده را به جهت آن به [۷۴] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۳. یک، یک‌ــفرم دیفرانسیلی θ روی فضای جت مرتبه nــام $J^{(n)}$ یک فرم برخوردی نامیده می‌شود اگر توسط تمام توابع امتداد یافته صفر شود. به عبارت دیگر اگر $u=f(x)$ هر تابع هموراری با امتداد مرتبه nــام $f^{(n)}:X\to J^{(n)}$ باشد، سپس نگاشت پس کشنده از θ به X با $f^{(n)}$ باید صفر شود، یعنی:

$$(f^{(n)})^*\theta=0.$$

مثال ۱.۳.۳. حالتی را با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته درنظر بگیرید. روی فضای جت مرتبه اول $J^{(1)}$ با مختصات $p=u_x,u,x$ یک یک‌ــفرم به صورت $\theta=adx+bdu+cdp$ است، که c,b,a توابعی از p,u,x هستند. تابع $u=f(x)$ دارای امتداد مرتبه اول $p=f'(x)$ است، درنتیجه $(f^{(1)})^*\theta$ برابر است با

$$[a(x,f(x),f'(x))+b(x,f(x),f'(x))f'(x)+c(x,f(x),f'(x))f''(x)]dx,$$

که برای تمامی f ها صفر خواهد شد اگر و تنها اگر $c=0$ و $a=-bp$. درنتیجه $\theta=b(x,u,p)\theta_0$ باید لزوماً ضریبی از فرم‌های برخوردی $\theta_0=du-pdx=du-u_xdx$ باشد. با انجام همین روند برای فضای جت مرتبه دوم $J^{(2)}$ با مختصات اضافه $q=u_{xx}$ محاسبات مشابه نشان می‌دهد که یک‌ــفرم $\theta=adx+bdu+cdp+edq$ یک فرم برخوردی است اگر و فقط اگر $\theta=b\theta_0+c\theta_1$، که $\theta_1=dp-qdx=du_x-u_{xx}dx$ فرم برخوردی پایهٔ بعدی است.

قضیه ۱.۳.۳. هر فرم برخوردی روی $J^{(n)}$ می‌تواند به صورت ترکیب خطی $\theta = \sum_{J,\alpha} P_J^\alpha \theta_J^\alpha$ با ضرایبی به صورت توابع هموار $P_J^\alpha(x, u^{(n)})$ از فرمهای برخوردی پایهٔ

$$\theta_J^\alpha = du_J^\alpha - \sum_{i=1}^{p} u_{J,i}^\alpha dx^i, \qquad \alpha = 1, \cdots, q, \quad 0 \leq J < n, \tag{۴۹.۳}$$

نوشته شود. در رابطهٔ فوق ما $\#J$ را مرتبهٔ فرم برخوردی θ_J^α می‌نامیم. قابل ذکر است که فرمهای برخوردی روی $J^{(n)}$ مرتبهٔ حداکثر $n-1$ دارند.

برهان. [۷۴]. □

قضیه ۲.۳.۳. یک برش $u^{(n)} = F(x)$ از فضای جت مرتبهٔ n، امتداد تابع $u = f(x)$ یعنی $F = f^{(n)}$ است اگر و فقط اگر F همه فرمهای برخوردی روی $J^{(n)}$ را صفر کند؛ به این معنی که:

$$F^* \theta_J^\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, q, \quad 0 \leq \#J < n, \tag{۵۰.۳}$$

یک زیر منیفلد p بعدی $\Gamma^{(n)} \subset J^{(n)}$ گراف تابع امتداد یافتهٔ $u = f^{(n)}(x)$ است اگر و فقط اگر همهٔ فرمهای برخوردی روی آن صفر شودیعنی $\theta_J^\alpha | \Gamma^{(n)} = 0$.

برهان. [۷۴]. □

فرض کنید n متغیر مستقل $x = (x^1, \cdots, x^n)$ و یک متغیر وابسته $u(x)$ داشته باشیم.

تعریف ۲.۳.۳. یک تبدیل برخوردی تبدیلی است به شکل

$$\begin{aligned} (\bar{x})^i &= f^i(x, u, \partial u), \\ \bar{u} &= g(x, u, \partial u), \\ \bar{u}_i &= h_i(x, u, \partial u), \end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

که در آن $i = 1, \cdots, n$ و نیز در فضای $(x, u, \partial u)$ یک به یک است و همچنین حافظ شرط برخوردی است، یعنی

$$d\bar{u} = \bar{u}_i d\bar{x}^i. \tag{۵۲.۳}$$

فرض بر آن است که توابع f^i و g به مشتقات مرتبه اول u وابستگی داشته باشند، در غیر اینصورت تبدیل برخوردی یک تبدیل نقطه‌ای است.

امتداد مرتبه nــام $g^{(n)} : J^{(n)} \to J^{(n)}$ از هر تبدیل نقطه‌ای g با این ویژگی شناخته می‌شود که این تبدیل هر گراف امتداد یافته از هر تابع را به گراف امتداد یافته از تابع تبدیل یافته نگاشت می‌کند. قضیه (۲.۳.۳) بیان می‌کند که $g^{(n)}$ فرمهای برخوردی را به فرمهای برخوردی می‌نگارد. از طرف دیگر، دیفئومورفیسم موضعی $\Psi : J^{(n)} \to J^{(n)}$ که هر فرم برخوردی را به

فرم برخوردی دیگر نگاشت می‌کند را درنظر بگیرید، چون گراف‌های توابع امتداد یافته با صفر کردن فرم‌های برخوردی روی آن شناخته می‌شوند، تصویر $\Psi[\Gamma_f^{(n)}]$ از گراف امتداد یافته یک تابع $u = f(x)$، گراف امتداد مرتبه nــام از تابع تبدیل یافتهٔ $u = \bar{f}(x)$ است. بنابر این $\Psi[\Gamma_f^{(n)}] = \Gamma_{\bar{f}}^{(n)}$ برای تعریف یک عمل از Ψ روی توابع $u = f(x)$ به کار گرفته می‌شود.

تعریف ۳.۳.۳. یک دیفئومورفیسم موضعی $\Psi : J^{(n)} \to J^{(n)}$ یک تبدیل برخوردی از مرتبه n تعریف می‌کند اگر حافظ فضای فرم‌های برخوردی باشد، به این معنی که اگر θ هر فرم برخوردی روی $J^{(n)}$ باشد، سپس $(\Psi^{(n)})^*\theta$ نیز یک فرم برخوردی است.

مثال ۲.۳.۳. تبدیل لژاندر[۶] که در مکانیک همیلتونی بسیار پر اهمیت است، یک تبدیل برخوردی مرتبه اول به شکل

$$\bar{x} = p, \quad \bar{u} = u - xp, \quad \bar{p} = -x, \tag{۵۳.۳}$$

است که در آن $p = u_x$ و نیز $\bar{p} = \bar{u}_{\bar{x}}$ [۷۴]. در این حالت فرم‌های برخوردی دقیقا با یکدیگر هماهنگ هستند یعنی

$$d\bar{u} - \bar{p}d\bar{x} = du - pdx,$$

پس (۵۳.۳) یک تبدیل برخوردی روی $J^{(1)}$ تعریف می‌کند.اگر $u = f(x)$ هر تابعی باشد، تبدیل لژاندر $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ از آن به صورت

$$\bar{x} = f'(x), \quad \bar{u} = f(x) - xf'(x),$$

تعریف می‌شود و موضعاً خوش‌تعریف است اگر و فقط اگر $f_{xx}(x) \neq 0$. با کمک قاعده زنجیره‌ای اثبات می‌شود که $\bar{p} = -x = -(f')^{-1}(\bar{x})$ که صادق در شرط برخوردی نیز هست.

تبدیل لژاندر حالت خاصی از یک تبدیل برخوردی مرتبهٔ اول به صورت

$$\bar{x} = \chi(x,u,p), \quad \bar{u} = \psi(x,u,p), \quad \bar{p} = \pi(x,u,p), \tag{۵۴.۳}$$

است که دارای یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. شرط اینکه (۵۴.۳) یک تبدیل برخوردی تعریف کند این است که

$$\Psi^*(d\bar{u} - \bar{p}d\bar{x}) = d\psi - \pi d\chi = \lambda(du - pdx), \tag{۵۵.۳}$$

که برای تابعی مانند $\lambda(x,u,p)$ به صورت زیر است:

$$\psi_x - \pi\chi_x = -p\lambda, \quad \psi_u - \pi\chi_u = \lambda, \quad \psi_p - \pi\chi_p = 0.$$

[۶] Legendre

با حذف λ نتیجه می‌گیریم که (۵۴.۳) باید روابط

$$\psi_x + p\psi_u = \pi(\chi_x + p\chi_u), \qquad \psi_p - \pi\chi_p = 0, \tag{۵۶.۳}$$

برای این تبدیلات صادق باشد. تبدیلات (۵۴.۳) یک تبدیل نقطه‌ای امتداد یافته تعریف می‌کنند اگر و فقط اگر χ و ψ مستقل از مختصات مشتق p باشند، که در این حالت شرط اول در (۵۶.۳) به فرمول امتداد مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود.

قضیه ۳.۳.۳. روابط (۵۱.۳) یک تبدیل برخوردی تعریف می‌کنند، اگر و تنها اگر توابع f^i، g و h_i برای $i = 1, \cdots p$ در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_i} &= h_j \frac{\partial f^j}{\partial u_i}, \\ \frac{\partial g}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial g}{\partial u} &= h_j \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial f^j}{\partial u} \right). \end{aligned} \tag{۵۷.۳}$$

برهان. فرض کنیم φ یک تبدیل برخوردی روی فضای جت مرتبه اول به فرم

$$\begin{aligned} &\varphi : J^{(1)} \to J^{(1)} \\ &(x^i, u, u_i) \to (f^i, g, h_i), \end{aligned}$$

باشد. در این صورت بنا به تعریف (۳.۳.۳)، φ باید حافظ فرم‌های برخوردی باشد، به این معنی که اگر $\theta = d\bar{u} - \bar{u}_i d\bar{x}^i$ یک فرم برخوردی باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned} &\varphi^* : \Omega(J^{(1)}) \to \Omega(J^{(1)}) \\ &\varphi^*(\theta) = \lambda\omega, \end{aligned}$$

که Ω فضای دوگان $J^{(1)}$ و λ تابعی از x، u و مشتق u نسبت به x و نیز ω یک فرم برخوردی روی $\Omega(J^{(1)})$ است. بنابر این

$$\begin{aligned} &\varphi^*(d\bar{u} - \bar{u}_j d\bar{x}^j) = d(u^* o\varphi) - (u_j^* o\varphi) d(x^{j*} o\varphi) \\ &\Rightarrow dg - h_j df^j = \lambda(du - u_i dx^i) \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i \right) - h_j \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f^j}{\partial u} du + \frac{\partial f^j}{\partial u_i} du_i \right) = \lambda du - \lambda u_i dx^i. \end{aligned}$$

از روابط بالا سه رابطه ذیل نتیجه گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^i} - h_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} &= -\lambda u_i, && (*) \\ \frac{\partial g}{\partial u} - h_j \frac{\partial f^j}{\partial u} &= \lambda, && (**) \\ \frac{\partial g}{\partial u_i} - h_j \frac{\partial f^j}{\partial u_i} &= 0, && (***) \end{aligned}$$

که رابطه $(***)$ نخستین رابطه (۵۷.۳) را بلافاصله نتیجه می‌دهد. در ادامه با ضرب $-u_i$ در $(**)$ و برابر قرار دادن آن با $(*)$ داریم:

$$-u_i \frac{\partial g}{\partial u} + u_i h_j \frac{\partial f^j}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x^i} - h_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i},$$

که این نیز فوراً رابطه دوم در (۵۷.۳) را نتیجه می‌دهد. لازم به ذکر است که تمامی روابط فوق برگشت پذیر هستند. □

حال فرض کنید تبدیل برخوردی (۵۱.۳) گروه لی یک–پارامتری از تبدیلات برخوردی به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}
(\bar{x})^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
\bar{u} &= u + \varepsilon \eta(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
\bar{u}_i &= u_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{۵۸.۳}$$

که در آن $i = 1, \cdots, p$ و نیز مولد بی‌نهایت کوچک آن به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \xi^i(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{۵۹.۳}$$

سپس قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۴.۳.۳. روابط (۵۸.۳) یک گروه لی یک–پارامتری از تبدیلات برخوردی تعریف می‌کنند اگر و فقط اگر توابع ξ و η در روابط زیر صدق کنند:

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_i} - u_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u_i} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۶۰.۳}$$

برهان. [۱۹]. □

۴.۳ تبدیلات مرتبه بالاتر

ملاحظه گردید که تبدیلات برخوردی تبدیلاتی با مشخصهٔ Q هستند که برای تحلیل معادلات PDE مرتبه اول مناسب هستند. اما چنین تبدیلاتی توانایی واکاویی و کنکاش در معادلات مرتبه بالاتر را ندارند. به همین جهت اولین بار لی به این موضوع پرداخت و سعی نمود به رفع این نقیصه بپردازد. به موازات لی، بکلاند[۷] پرسشی را اینگونه مطرح کرد که کدام تبدیلات هستند که فرم‌های دیفرانسیلی به شکل

$$du = u_i dx^i, \qquad du_i = u_{ij} dx^j, \tag{۶۱.۳}$$

[۷] A.V. Backlund

را ناوردا نگه می‌دارند؟ او پاسخ این سؤال را در تبدیلاتی یافت که نوع خاصی از تبدیلات خم‌ها در صفحه و رویه‌ها در فضای سه‌ـبعدی هستند. اما در سال ۱۸۷۴ لی توضیح داد که تبدیلاتی از مراتب بالاتر موجودند که واجد شرایط فوق هستند و این کشف لی خود مشوق بکلاند شد تا نتایج خود را به صورت عمیق تر و اصلاح شده در سال ۱۸۷۶ ارائه دهد. بکلاند تبدیلاتی را باضابطهٔ

$$\bar{x}^i = \xi^i(x, u^{(k)}), \qquad \bar{u}^\alpha = \psi^\alpha(x, u^{(k)}), \tag{۶۲.۳}$$

از فضای کامل E با متغیرهای مستقل $x = (x^1, \cdots, x^p)$ و وابسته $u = (u^1, \cdots, u^q)$ به فضای جت مرتبه kـام E معرفی کرد و نشان داد چنین تبدیلاتی فرم‌های (۶۱.۳) را ناوردا نگه می‌دارند. به اینگونه تبدیلات که در آن $u^{(k)}$ نشان دهندهٔ مشتقانت جزئی u می‌باشد، تبدیلات مرتبه بالاتر می‌گوییم که تبدیلی است یک به یک به توی $J^{(k)}(E)$ به شرط آنکه نه نقطه‌ای باشد نه برخوردی.

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای زیر

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= f^i(x, u, \varepsilon) = e^{\varepsilon \mathbf{v}} x^i, && i = 1, \cdots, p, \\ \bar{u}^\alpha &= g^\alpha(x, u, \varepsilon) = e^{\varepsilon \mathbf{v}} u^\alpha, && \alpha = 1, \cdots, q, \end{aligned} \tag{۶۳.۳}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

را در نظر بگیرید. حال خانواده‌ای از رویه‌های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ را فرض می‌کنیم که تحت تبدیلات (۶۳.۳) ناوردا نیستند. برای برخی از مقادیر ε این تبدیلات نقطهٔ (x, u) روی رویهٔ Θ را به نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{u})$ با معادلات

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= f^i(x, \Theta(x), \varepsilon), && i = 1, \cdots, p, \\ \bar{u}^\alpha &= g^\alpha(x, \Theta(x), \varepsilon), && \alpha = 1, \cdots, q, \end{aligned} \tag{۶۴.۳}$$

تبدیل می‌کند. برای این x, ε را می‌توان از روابط (۶۴.۳) با جایگذاری

$$x = f(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon),$$

حذف کرد. آنگاه

$$\bar{u} = g\Big(f(\bar{x}, \bar{u}, \varepsilon), \Theta(f(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon)), \varepsilon\Big) = g\Big(e^{-\varepsilon \mathbf{v}} \bar{x}, \Theta(e^{-\varepsilon \mathbf{v}}), \varepsilon\Big), \tag{۶۵.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \xi^i(\bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta_\alpha(\bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}. \end{aligned}$$

با جایگذاری (x, u, ε) به جای $(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon)$ در (۶۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} u &= g\Big(e^{\varepsilon \mathbf{v}} x, \Theta(e^{\varepsilon \mathbf{v}}), -\varepsilon\Big) \\ &= g\Big(f(x,u,\varepsilon), \Theta(f(x,u,\varepsilon)), -\varepsilon\Big). \end{aligned} \tag{۶۶.۳}$$

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید خانوادهٔ رویه های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ تحت تبدیلات (۶۳.۳) ناوردا باشد. در اینصورت تبدیل (۶۶.۳) این خانواده از رویه ها را به خانوادهٔ رویه های یک پارامتری $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x,\varepsilon)\}$ تصویر می کند.

برای تعمیم گروه‌های یک پارامتری یا برخوردی به تبدیلات یک پارامتری مراتب بالاتر لازم است نحوهٔ تصویر رویه‌ها را از دیدگاه عمل گروه روی فضای توابع $u = u(x)$ به جای عمل روی فضای کامل یا فضای جت مرتبه اول بررسی کنیم. چنین کاری را باید با تبدیل خانوادهٔ رویه‌های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ به خانوادهٔ رویه‌های یک پارامتری $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x,\varepsilon)\}$ تحت تبدیلات

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x, \\ \bar{u} &= \eta(x,\varepsilon) = (e^{\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}} u)\big|_{u=\Theta(x)}, \end{aligned}$$

انجام داد. اگر $\tilde{\mathbf{v}}$ مولد بی‌نهایت کوچک نظیر تبدیل فوق باشد. آنگاه تبدیلات (۶۳.۳) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, \Theta(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad i = 1 \cdots p, \\ \bar{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha(x, \Theta(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad \alpha = 1 \cdots q. \end{aligned} \tag{۶۷.۳}$$

برای یافتن $\eta^\alpha(x,\varepsilon)$ باید x را از معادله دوم (۶۷.۳) حذف کرد. از نخستین معادله در (۶۷.۳) داریم:

$$x^i = \bar{x}^i - \varepsilon \xi^i(\bar{x}, \Theta(\bar{x})) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad i = 1, \cdots, p. \tag{۶۸.۳}$$

اکنون با قراردادن (۶۸.۳) در (۶۷.۳) و بسط آن حول $\varepsilon = 0$ تابع η^α به صورت

$$\eta^\alpha(\bar{x},\varepsilon) = \Theta^\alpha(\bar{x}) + \varepsilon\Big[\eta^\alpha(\bar{x}, \Theta(\bar{x})) - \frac{\partial \Theta^\alpha(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \xi^i(\bar{x}, \Theta(\bar{x}))\Big] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۶۹.۳}$$

محاسبه می‌شود. حال با جایگذاری x به جای $\bar{x}$ در (۶۹.۳) تصویر تبدیل خانوادهٔ رویه‌های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x)\}$ را تحت تبدیلات یک پارامتری (۶۷.۳) به دست می‌آوریم. به بیان دیگر خانوادهٔ رویه‌های $\{u^\alpha = \Theta^\alpha(x,\varepsilon)\}$ به خانوادهٔ یک‌ـ پارامتری از رویه‌های

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha &= \eta(x,\varepsilon) \\ &= \theta^\alpha(x) + \varepsilon\Big[\eta^\alpha(x, \Theta(x)) - \frac{\partial \Theta^\alpha(x)}{\partial \bar{x}^i} \xi^i(x, \Theta(x))\Big] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, \cdots, q, \end{aligned}$$

تصویر می‌شوند. حال آن دسته از رویه‌هایی را درنظر بگیرید که تحت این تبدیل متغیرهای مستقل آنها ناوردا باقی می‌مانند به این معنا که

$$\begin{aligned}&\bar{x}^i = x^i, \quad i = 1, \cdots, p,\\&\bar{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\Big[\eta^\alpha(x,u) - u_i^\alpha \xi^i(x,u)\Big] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, \cdots, q.\end{aligned} \tag{۷۰.۳}$$

بنابر این مولد بی‌نهایت کوچک نظیر تبدیل فوق به شکل

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{q}\Big[\eta^\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p} u_i^\alpha \xi^i(x,u)\Big]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۷۱.۳}$$

نوشته می‌شود. این مولد بی‌نهایت کوچک را شکل مشخصه (تکاملی) مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ می‌نامند.

مثال ۱.۴.۳. اگر $E = \mathbb{R}^2$ و گروه تبدیل یک پارامتری انتقال باشد، آنگاه

$$\bar{x} = x + \varepsilon, \qquad \bar{u} = u,$$

لذا در این حالت داریم

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \tilde{\mathbf{v}} = -u_x\frac{\partial}{\partial u}.$$

اما در حالتی که تبدیل تجانسی به صورت

$$\bar{x} = e^\varepsilon x, \qquad \bar{u} = e^{2\varepsilon}u,$$

باشد، مولد بی‌نهایت کوچک تبدیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathbf{v} = (2u - xu_x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

۵.۳ تبدیلات موضعی

در ادامه نوعی دیگر از تبدیلات معرفی خواهد شد که تعمیمی از مفهوم گروه‌های لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای با مولد بی‌نهایت کوچک $\tilde{\mathbf{v}}$ به تبدیلی موضعی یک پارامتری مرتبه بالاتر با مولد بی‌نهایت کوچک به شکل

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{q}\tilde{\eta}^\alpha(x,u,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۷۲.۳}$$

است به گونه‌ای که مؤلفه‌های آن وابسته به مشتقات تا حداکثر مرتبه $n \geq 1$ می‌باشد.

تبدیل نظیر مولد (۷۲.۳) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}&\bar{x}^i = x^i, \quad i = 1, \cdots, p,\\&\bar{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\tilde{\eta}^\alpha(x,u^{(k)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, \cdots, q,\end{aligned} \tag{۷۳.۳}$$

نمایش داد. برای محاسبهٔ جملات مراتب بالاتر در تبدیل (۷۴.۳) باید مولد بی‌نهایت کوچک (۷۲.۳) را امتداد داد تا بتوان عمل این مولد را بر مشتقات بررسی کرد. بنابر این به ازای $\alpha = 1, \cdots, q$ و $i, j = 1, \cdots, p$ و نیز برای $k = 2, 3, \cdots$ و

$$\tilde{\eta}_i^{(1)\alpha} = D_i \tilde{\eta}^\alpha, \qquad \tilde{\eta}_{i_1,\cdots,i_k}^{(k)\alpha} = D_{i_k} \tilde{\eta}_{i_i \cdots i_{k-1}}^{(k-1)\alpha}, \tag{۷۴.۳}$$

مولد بی‌نهایت کوچک توسیع یافته (امتداد $\tilde{\mathbf{v}}$) با میدان برداری زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} = \tilde{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \tilde{\eta}_i^{(1)\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \cdots + \tilde{\eta}_{i_1,\cdots,i_k}^{(k)\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_k}^\alpha} + \cdots . \tag{۷۵.۳}$$

تعریف ۱.۵.۳. یک تبدیل موضعی مرتبه بالاتر از تبدیلات یک پارامتری به شکل

$$\bar{x}^i = x^i, \qquad i = 1, \cdots, p,$$
$$\bar{u}^\alpha = e^{\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)}} u^\alpha = u^\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} (\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)})^{(j-1)} \tilde{\eta}^\alpha, \qquad \alpha = 1, \cdots, q, \tag{۷۶.۳}$$

نوشته می‌شود.

هر تبدیل یک پارامتری از مرتبه بالاتر دارای دو ویژگی اصلی است که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

۱) هرتبدیل موضعی یک پارامتری هم ارز یک گروه لی از تبدیلات نقطه‌ای یک پارامتری است اگر و تنها اگر هر $\tilde{\eta}^\alpha$ به شکل

$$\tilde{\eta}^\alpha = \eta^\alpha(x, u) - u_i^\alpha \xi^i(x, u),$$

نوشته شود، یعنی هر $\tilde{\eta}^\alpha$ تنها نسبت به مشتقات مرتبه اول u_i^αها خطی باشد و هیچ بستگی به مشتقات مرتبه بالاتر u نداشته باشد.

۲) هر تبدیل موضعی یک پارامتری هم ارز یک گروه لی از تبدیلات برخوردی یک پارامتری است اگر و تنها اگر $q = 1$ بوده و $\tilde{\eta}^\alpha$ را بتوان به صورت

$$\tilde{\eta}^\alpha = \tilde{\eta}^\alpha(x, u^{(1)}),$$

نوشت. یعنی $\tilde{\eta}^\alpha$ها به صورت ترکیب خطی یا غیر خطی از مشتقات مرتبه اول u باشد.

قضیه ۱.۵.۳. یک تبدیل موضعی یک پارامتری با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = Q(x, u, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u},$$

هم ارز یک تبدیل برخوردی از گروه‌های لی یک پارامتری با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{(1)}(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_i},$$

می‌باشد، به قسمی که ضرایب این مولد در عبارات زیر صدق می‌کنند:

$$\xi^i(x,u^{(1)}) = \frac{\partial Q}{\partial u_i},$$
$$\eta(x,u^{(1)}) = u_i\frac{\partial Q}{\partial u_i} - Q, \qquad i=1,\cdots,p,$$
$$\eta_i^{(1)}(x,u^{(1)}) = -\frac{\partial Q}{\partial u_i} - u_i\frac{\partial Q}{\partial u}.$$

برهان. [۱۹] □

نتیجه مستقیم این قضیه آن است که هر تبدیل موضعی یک پارامتری با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \eta(x,u,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u},$$

به طور یکتا هم ارز با مولد بی‌نهایت کوچک یک تبدیل برخوردی از گروه‌های لی یک پارامتری می‌باشد که $\eta(x,u,^{(1)})$ مشخصهٔ آن است.

نکته مهمی که باید به آن توجه کرد آن است که تبدیلات موضعی یک پارامتری مراتب بالاتر، نه یک تبدیل موضعی یک پارامتری هستند و نه یک تبدیل برخوردی از گروه‌های لی یک پارامتری. چنین تبدیلاتی را تبدیل لی_بکلاند یا یک تبدیل نوتر می‌نامند.

مثال ۱.۵.۳. به ازای $p=q=1$ عملگر $\mathbf{v} = u_{xx}\partial/\partial u + \cdots$ تبدیل

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{u} = u + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}u_{2x}\,,$$

را تولید می‌کند که یک تبدیل مرتبه بالاتر است.

مثال ۲.۵.۳. مولد بی‌نهایت کوچک

$$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{2}u^2u_x + 2u_xu_{xxx} + \frac{3}{5}u_{xxxxx}\right)\frac{\partial}{\partial u},$$

یک تبدیل مرتبه بالاتر برای معادلهٔ KdV، $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ است.

۶.۳ تقارن‌های برخوردی و تقارن‌های مرتبه بالاتر

تبدیل موضعی یک پارامتری (۷۶.۳) دستگاه معادلات جزئی $\Delta = 0$ را ناوردا نگه می‌دارد اگر و تنها اگر امتداد مرتبه n_ام مولد بی‌نهایت کوچک تبدیل یعنی میدان برداری

$$\mathbf{v}^{(n)} = \tilde{\eta}^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \tilde{\eta}_i^{(1)\alpha}\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \cdots + \tilde{\eta}_{i_1\cdots i_n}^{(k)\alpha}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}^\alpha}, \qquad (۷۷.۳)$$

منیفلد جواب‌های معادله را در فضای جت مرتبه n_ام آن را ناوردا نگه دارد. یعنی هر خانواده از رویه جواب‌ها را به خانواده دیگری از رویه جواب‌ها بنگارد.

تعریف ۱.۶.۳. هر مولد بی‌نهایت کوچک تبدیل (۷۶.۳) که امتداد مرتبه nــام آن یعنی (۷۷.۳) دستگاه معادلات $\Delta = 0$ را ناوردا نگه دارد یک تقارن برخوردی یا تقارن مرتبه بالاتر برای دستگاه است.

قضیه‌ای که در ادامه می‌آید الگوریتم محاسبهٔ چنین تقارن‌هایی را ارائه داده و مشابه قضیه ناوردایی بی‌نهایت کوچک برای یافتن تقارن‌های نقطه‌ای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است.

قضیه ۱.۶.۳. هرگاه $\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{q} \tilde{\eta}^{\alpha}(x, u, u^{(k)})\partial/\partial u^{\alpha}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک از مرتبه $k \geq 0$ برای تبدیل موضعی یک پارامتری (۷۶.۳) و $\mathbf{v}^{(n)}$ امتداد مرتبه nــام آن باشد، آنگاه دستگاه معادلات $\Delta = 0$، $\mathbf{v}$ را به عنوان یک تقارن نقطه‌ای، برخوردی یا مرتبه بالاتر می‌پذیرد اگر و تنها اگر $\mathbf{v}^{(n)}(\Delta) = 0$.

در ادامه نوعی دیگر از تقارن‌ها معرفی می‌شوند که تقارن‌های نقطه‌ای برخوردی و مرتبه بالاتر حالت خاصی از آن‌ها هستند و از آنها به عنوان تقارن‌های تعمیم یافته یاد می‌شود.

تعریف ۲.۶.۳. یک میدان برداری تعمیم یافته به صورت

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^{\alpha}(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}, \tag{۷۸.۳}$$

بیان می‌شود به قسمی که توابع ξ^i و η^{α} توابع هموار می‌باشند.

به عنوان مثال $\mathbf{v} = xu_x\partial_x + u_{xx}\partial_u$ یک میدان برداری تعمیم یافته روی فضای $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است.

تعریف ۳.۶.۳. امتداد مرتبه nــام میدان برداری (۷۸.۳) یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^{p} \xi(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\#J \leq n} \eta_J^{\alpha}(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^{\alpha}},$$

است به طوریکه J یک اندیس چندگانه بوده و

$$\eta_J^{\alpha} = D_J \left(\eta^{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^{\alpha} \,. \tag{۷۹.۳}$$

با استفاده از این فرمول امتداد مرتبه اول میدان برداری در مثال فوق برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(1)} = xu_x \frac{\partial}{\partial x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} + \left[u_{xxx} - (xu_{xx} + u_x)u\right] \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

ضریب $\partial/\partial u_x$ در امتداد فوق از طریق $D_x(u_{xx} - xu_x^2) + xu_xu_{xx} = D_x(u_{xx}) - D_x(xu_x)u_x$ محاسبه می‌شود.

همانند تبدیلات مراتب بالاتر در قسمت قبل می‌توان امتداد مرتبه بی‌نهایت یک میدان برداری تعمیم یافته را تعریف کرد. به این صورت که اگر $\mathbf{v}$ یک میدان برداری تعمیم یافته باشد آنگاه:

$$\mathbf{v}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{J} \eta_J^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۸۰.۳}$$

و η_J^α با فرمول (۷۹.۳) بیان می‌شود. اما باید توجه کرد که اگر $F(x, u^{(n)})$ یک تابع دیفرانسیلی مرتبه nـام باشد، $\mathbf{v}^{(\infty)}(F) = \mathbf{v}^{(n)}(F)$ مجدداً یک تابع دیفرانسیلی است. به ویژه اگر F تنها به مشتقات تا مرتبه متناهی u وابسته باشد تعداد متناهی از جملات (۸۰.۳) برای محاسبه $\mathbf{v}^{(\infty)}(F)$ کافیست. از این گفته یک تعبیر هندسی برای میدان‌های برداری تعمیم یافته می‌توان استخراج کرد و آن این است که هر میدان برداری تعمیم یافته را می‌توان به عنوان یک تقارن بی‌نهایت کوچک برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مد نظر قرار داد. قضیه ناوردایی بی‌نهایت کوچک اینجا نیز برقرار است.

قضیه ۲.۶.۳. میدان برداری تعمیم یافته $\mathbf{v}$ یک تقارن بی‌نهایت کوچک تعمیم یافته برای دستگاه معادلات

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, m,$$

است، اگر و تنها اگر

$$\mathbf{v}^{(\infty)}(\Delta_\nu) = 0. \tag{۸۱.۳}$$

با توجه به این قضیه اگر ضرایب میدان برداری تعمیم یافته $\mathbf{v}$ به مشتقات مرتبه kـام وابسته باشد، آنگاه سمت راست فرمول (۸۰.۳) به مشتقات مرتبه $(n+k)$ـام وابسته می‌شود. برای آنکه رابطهٔ (۸۱.۳) روی کلیهٔ جواب‌ها اثر کند لازم است شرایطی روی Δ و امتداد مرتبه sـام آن $\Delta^{(s)}$ برای $s = 0, 1, \cdots$ قرار دهیم.

فرض فراگیر: کلیهٔ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کلاً غیر تباهیده هستند به این معنا که خود دستگاه و امتداد آنها هر دو از رتبه ماکسیمال و موضعاً حلپذیرند.

محاسبهٔ تقارن‌های تعمیم یافته در اصل مشابه محاسبهٔ تقارن‌های نقطه‌ای معادلات دیفرانسیل است. اما پیش از آن نوعی خاص از میدان‌های برداری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴.۶.۳. فرض کنید $Q(x, u^{(n)}) = (Q_1(x, u^{(n)}), \cdots, Q_q(x, u^{(n)}))$ یک qـتایی از توابع هموار دیفرانسیلی باشند. میدان برداری تعمیم یافته

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۸۲.۳}$$

را یک میدان برداری تکاملی و Q را مشخصهٔ آن می‌نامند. بنابراین می‌توان دید که یک میدان برداری تکاملی با صفر قرار دادن ضرایب ∂_{x^i} در میدان برداری تعمیم یافته ساخته می‌شود.

امتداد مرتبه بی‌نهایت میدان برداری (۸۲.۳) با رابطه

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha,J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

بیان می‌شوند. هرگاه مشخصهٔ یک میدان برداری تعمیم یافته را به صورت

$$Q_\alpha = \eta^\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, q, \tag{۸۳.۳}$$

بیان کنید آنگاه برای چنین میدان برداری تعمیم یافته‌ای می‌توان یک نمایش تکاملی به دست آورد. این مطلب در لم زیر آورده شده است.

لم ۱.۶.۳. یک میدان برداری تعمیم یافته یک تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ است اگر و تنها اگر $\mathbf{v}_Q$ نمایش تکاملی آن باشد.

حال به نحوه محاسبهٔ تقارن‌های تعمیم یافته بازمی‌گردیم. این روش تا حدودی شبیه محاسبهٔ سایر تقارن‌هاست با این شرط که ابتدا باید تقارن مورد نظر را به حالت تکاملی آن تبدیل کرد زیرا این امر به کاهش تعداد توابع مجهول از $p+q$ به q کمک می‌کند. در ادامه برای تبیین این روش چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱.۶.۳. هدف یافتن تقارن‌های تعمیم یافتهٔ معادله موج غیر خطی $u_t = uu_x$ است [۷۴]. ابتدا فرض کنید $\mathbf{v}_Q = Q(x,t,u^{(n)})\partial_u$ یک تقارن تعمیم یافته آن به شکل تکاملی باشد. به ازای هریک از مشتقات u نسبت به t می‌توان مقدار آن یعنی uu_x را از معادله قرار داد. با این روند به جای u_{xt}، $uu_{xx}+u_x^2$، به جای u_{tt}، $u^2u_{xx}+2uu_x^2$ و ... قرار می‌دهیم. پس هر تقارن به طور یکتا به مشخصهٔ $Q = Q(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$ نظیر می‌شود. حال شرط ناوردایی را بر معادله به صورت

$$\mathbf{v}^{(\infty)}(u_t - uu_x) = 0 \Rightarrow D_tQ = uD_xQ + u_xQ, \tag{۸۴.۳}$$

اعمال می‌کنیم، اما برای محاسبهٔ تقارن‌های مرتبه دوم به مشخصهٔ $Q = Q(x,t,u,u_x,u_{xx})$ نیازمندیم. لذا رابطهٔ (۸۴.۳) را می‌توان به صورت

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - u\frac{\partial Q}{\partial x} + u_x^2\frac{\partial Q}{\partial u_x} + 3u_xu_{xx}\frac{\partial Q}{\partial u_{xx}} = u_xQ,$$

بازنویسی کرد. با حل این معادله تابع Q به شکل

$$Q = u_x f\left(x + tu, u, t + \frac{1}{u_x}, \frac{u_{xx}}{u_x^3}\right),$$

به دست می‌آید. مطابق فرمول (۸۳.۳) مشخصهٔ معادله باید به صورت

$$Q = \eta(x,t,u) - u_x\xi^1(x,t,u) - uu_x\xi^2(x,t,u),$$

باشد که

$$\mathbf{v} = \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_t + \eta\partial_u,$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن است. به ازای تابعی چون $\eta = -t\eta - \xi^1 - u\xi^2$ مشخصه به فرم

$$Q = u - x\eta(x+tu, u) + (tu_x + 1)\eta(x+tu, u),$$

داریم. در این صورت می‌توان مقادیر بی‌شماری را برای ξ^1 و ξ^2 در نظر گرفت. در حالت خاصی که $\xi^1 + u\xi^2 = 0$، فرم تکاملی $\mathbf{v}$ بدیهی است، زیرا Q صفر می‌شود. پس هر تقارن هندسی معادله هم ارز با میدان برداری

$$\mathbf{v} = -(\eta + t\eta)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

به ازای $\xi^2 = 0$ است. حال اگر مسأله را به تقارن‌هایی تحدید کنید که عمل نظیر آن بر متغیرهای مستقل، مستقل از متغیرهای وابسته باشد (تبدیلات تصویرپذیر)، زیر گروه نظیر این تبدیلات توسط مولدهای بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \qquad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \qquad \mathbf{v}_3 = x\partial_x + t\partial_t,$$

$$\mathbf{v}_4 = a\partial_x + u\partial_u, \qquad \mathbf{v}_5 = t\partial_x - \partial_u, \qquad \mathbf{v}_6 = x\partial_t + u^2\partial_u,$$

$$\mathbf{v}_7 = xt\partial_x + t^2\partial_t - (x+tu)\partial_u, \qquad \mathbf{v}_8 = x^2\partial_x + xt\partial_t + (x+tu)u\partial_u,$$

تولید می‌شوند.

مثال ۲.۶.۳. در این مثال تقارن‌های تعمیم یافتهٔ معادلهٔ برگر $u_t = u_{xx} + u_x^2$ محاسبه می‌شوند. مولد بی نهایت کوچک تکاملی $\mathbf{v} = Q(x,t,u^{(n)})\partial_u$ را با مشخصهٔ $Q = Q(x,t,u,u_x,u_{xx},Q_{xxx})$ در نظر بگیرید [۷۵]. مطابق مثال قبل با اعمال شرایط ناوردایی خواهیم داشت:

$$D_tQ = D_x^2Q + 2u_xD_xQ. \qquad (۸۵.۳)$$

با جایگذاری ضرایب لازم در (۸۵.۳) (به جای مشتق u نسبت به t مقدار آن را از معادله قرار دهید) Q نسبت به u_{xxx} دارای ترکیب آفین به شکل

$$Q = \alpha(t)u_{xxx} + Q'(x,t,u,u_x,u_{xx}),$$

است. با جایگذاری Q در (۸۵.۳) معادلهٔ زیر به دست می‌آید،

$$6\alpha u_{xx}u_{xxx} + \alpha_t u_{xxx} = Q'_{u_{xx}u_{xx}}u_{xxx}^2 + 2Q'_{u_xu_{xx}}u_{xx}u_{xxx} + 2Q'_{uu_{xx}}u_xu_{xxx} + 2Q'_{xu_{xx}}u_{xxx},$$

با حل آن نتیجه حاصل می‌شود که Q' نسبت به u_{xx} دارای ترکیب آفین

$$Q' = 3\alpha u_xu_{xx} + \left(\frac{1}{2}\alpha_t x + \beta(t)\right)u_{xx} + Q''(x,t,u,u_x),$$

است. اما ضریب u_{xx}^2 در (۸۵.۳) به صورت

$$6\alpha u_x + \alpha_t x + 2\beta = Q''_{u_x u_x},$$

است، بنابراین داریم:

$$Q = \alpha(u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + u_x^3) + \left(\frac{1}{2}\alpha_t x + \beta\right)(u_{xx} + u_x^2) \\ + \mathcal{A}(x,t,u)u_x + \mathcal{B}(x,t,u).$$

همچنین عبارت

$$\left(3\alpha_t u_x + \frac{1}{2}\alpha_{tt} x + \beta_t\right) u_{xx} = (2\mathcal{A}_u u_x + 3\alpha_t u_x + 2\mathcal{A}_x) u_x x,$$

تنها جمله‌ایست که شامل u_{xx} است. از این گفته برمی‌آید که $\mathcal{A}$ مستقل از u است و

$$\mathcal{A} = \frac{1}{8}\alpha_{tt} x^2 + \frac{1}{2}\beta_t x + \gamma(t).$$

ادامه محاسبات نشان می‌دهد که

$$\mathcal{B}(x,t,u) = \rho(x,t)e^{-u} + \sigma(x,t).$$

با محاسبهٔ ضریب u_xبه شکل

$$\frac{1}{8}\alpha_{ttt} x^2 + \frac{1}{2}\beta_{tt} x + \gamma_t = 2\sigma_x + \frac{1}{4}\alpha_{tt},$$

ضابطهٔ تابع σ به صورت

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{48}\alpha_{ttt} x^3 + \frac{1}{8}\beta_{tt} x^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_t - \frac{1}{8}\alpha_{tt}\right) x + \delta(t),$$

به دست می‌آید. در نهایت تنها جمله‌ای که در (۸۵.۳) که مستقل از مشتقات u است عبارت

$$\rho_t e^{-u} + \sigma_t = \rho_{xx} e^{-u} + \sigma_{xx},$$

است. پس می‌توان دید که تابع ρ یک جواب از معادلهٔ انتقال گرمای $\rho_t = \rho_{xx}$ است و توابع α, β, γ و δ در دستگاه معادلات

$$\alpha_{tttt} = \beta_{ttt} = 0, \quad \gamma_{tt} = \frac{1}{2}\alpha_{ttt}, \quad \delta_t = \frac{1}{4}\beta_{tt},$$

صدق می‌کنند.حل این دستگاه منتج به جواب‌های

$$\alpha(t) = c_9 t^3 + c_8 t^2 + c_7 t + c_6, \qquad \beta(t) = c_5 t^2 + c_4 t + c_3,$$
$$\gamma(t) = \frac{3}{2}c_9 t^2 + c_2 t + c_1, \qquad \delta(t) = \frac{1}{2}c_5 t + c_0,$$

شده به طوریکه $c_0, \cdots, c_9$ ثابت‌های دلخواهی هستند. لذا تقارن‌های تعمیم یافته مرتبه سوم معادلهٔ برگر دارای مشخصه‌هایی به صورت

$$
\begin{aligned}
&Q_0 = 1,\\
&Q_1 = u_x,\\
&Q_2 = tu_x + \frac{1}{2}x,\\
&Q_3 = u_{xx} + u_x^2,\\
&Q_4 = t(u_{xx} + u_x^2) + \frac{1}{2}xu_x,\\
&Q_5 = t^2(u_{xx} + u_x^2) + txu_x\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + x^2\right),\\
&Q_6 = u_{xxx} + 3u_xu_{xx} + u_x^3,\\
&Q_7 = t(u_{xxx} + 3u_xu_{xx} + u_x^3) + \frac{1}{2}x(u_{xx} + u_x^2),\\
&Q_8 = t^2(u_{xxx} + 3u_xu_{xx} + u_x^3 + tx(u_{xx} + u_x^2) + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}x^2\right)u_x,\\
&Q_9 = t^3(u_{xxx} + 3u_xu_{xx} + u_x^3) + \frac{3}{2}t^2x(u_{xx} + u_x^2) + \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}tx^2\right)u_x + \left(\frac{3}{4}tx + \frac{1}{8}x^3\right),
\end{aligned}
$$

به همراه یک مشخصهٔ بی‌نهایت بعدی

$$Q_\rho = \rho(x,t)e^{-u},$$

است. به راحتی می‌توان دید که مشخصه های $Q_0, \cdots, Q_5$ به همراه Q_ρ تقارن‌های نقطه‌ای معادله را تولید می‌کنند. مثلاً Q_4 هم ارز

$$\tilde{Q}_4 = tu_x + \frac{1}{2}xu_x,$$

بوده که مشخصهٔ نظیر مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v}_4 = -\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial t},$$

است.

۷.۳ تبدیلات تقریبی

یک تابع $f(x,\epsilon)$ را در نظر بگیرید فرض کنید

$$f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \cdots + \epsilon^p f_p(x),$$

چند جمله‌ای تقریبی از درجه p است که از بسط تیلور $f(x,\epsilon)$ حول $\epsilon = 0$ در توان‌های ϵ به دست آمده است . سپس هر تابع $g \approx f$ فرم زیر را دارد:

$$g(x,\epsilon) = f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \cdots + \epsilon^p f_p(x) + \mathcal{O}(\epsilon^p).$$

در نتیجه تابع

$$f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \cdots + \epsilon^p f_p(x),$$

یک نمایش متعارف از کلاس هم ارزی توابع شامل f نامیده می‌شود. بنابر این ،کلاس هم ارزی از توابع $f(x,\epsilon) \approx g(x,\epsilon)$ با مرتب کردن مجموعه $p+1$ تابع $f_0(x)$، $f_1(x)$، ...، $f_p(x)$ به دست می‌آید. واقعیت این است که در تئوری گروه‌های تبدیلات تقریبی مجموعه‌های مرتب از توابع برداری هموار وابسته به x و پارامتر گروهی a به صورت

$$f_0(x,a), f_1(x,a), \cdots, f_p(x,a),$$

در نظر گرفته می‌شوند. توابع مختصاتی در این تبدیلات به صورت

$$f_0^i(x,a), f_1^i(x,a), \cdots, f_p^i(x,a) \qquad i = 1, \cdots, n,$$

هستند. حال خانواده یک پارامتری G از تبدیلات تقریبی را با رابطه

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x,a) + \epsilon f_1^i(x,a) + \cdots + \epsilon^p f_p^i(x,a), \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{۸۶.۳}$$

تعریف می‌کنیم که نقاط $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ را به نقاط $\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n) \in \mathbb{R}^n$ می‌نگارد. مانند رده تبدیلات وارون پذیر

$$\bar{x} = f(x,a,\epsilon), \tag{۸۷.۳}$$

با توابع برداری $f = f(f^1, \cdots, f^n)$ چنانچه

$$f^i(x,a,\epsilon) \approx f_0^i(x,a) + \epsilon f_1^i(x,a) + \cdots + \epsilon^p f_p^i(x,a), \qquad i = 1, \cdots, n,$$

و a یک پارامتر حقیقی است. به علاوه شرط

$$f(x,0,\epsilon) \approx x,$$

نیز برقرار است. تبدیلات نقطه‌ای که در این فصل معرفی شد اینجا نیز برای هر مقدار a در یک همسایگی کوچک $a = 0$ تعریف می‌شود و این که در این همسایگی معادله $f(x,a,\epsilon) \approx x$، $a = 0$ را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱.۷.۳ (تبدیلات تقریبی). مجموعه تبدیلات (۸۷.۳) گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری نامیده می‌شود اگر شرط

$$f(f(x,a,\epsilon), b, \epsilon) \approx f(x, a+b, \epsilon),$$

برقرار باشد [۲].

ملاحظه ۱.۷.۳. اینجا برخلاف تئوری گروه لی، هرجا لازم باشد می‌توان f را با هر تابع دیگری مثل $f \approx g$ جایگزین کرد.

مثال ۱.۷.۳. فرض کنید $n=1$ و توابع زیر را در نظر بگیرید [۲]:

$$f(x,a,\epsilon) = x + a\left(1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon a\right),$$
$$g(x,a,\epsilon) = x + a\left((1+\epsilon x)\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon a\right)\right).$$

این توابع در اولین مرتبه دقت مساوی هستند، یعنی

$$g(x,a,\epsilon) = f(x,a,\epsilon) + \epsilon^2 \varphi(x,a), \qquad \varphi(x,a) = \frac{1}{2}a^2 x,$$

و در ویژگی گروه تقریبی صدق می‌کنند در حقیقت

$$\begin{aligned} f(g(x,a,\epsilon),b,\epsilon) &= g(x,a,\epsilon) + b\left(1 + \epsilon g(x,a,\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon b\right) \\ &= x + a(1+\epsilon x)\left(1+\frac{1}{2}\epsilon a\right) + b\left[1 + \epsilon x + \epsilon a(1+\epsilon x)\left(1+\frac{1}{2}\epsilon a\right) + \frac{1}{2}\epsilon b\right] \\ &= x + (a+b)\left[1 + \epsilon x + \frac{1}{2}(a+b)\right] + \epsilon^2 \varphi(x,a,b,\epsilon) \\ &= f(x,a+b,\epsilon) + \epsilon^2 \varphi(x,a,b,\epsilon), \end{aligned}$$

که $\varphi(x,a,b,\epsilon) = \frac{1}{2}a(ax + ab + 2bx + \epsilon abx)$ است.

مولد یک گروه تقریبی G که با (۸۷.۳) داده می‌شود کلاس عملگرهای خطی دیفرانسیلی مرتبه اول به صورت

$$\mathbf{v} = \xi^i(x,\epsilon)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{۸۸.۳}$$

می‌باشد به طوریکه

$$\xi^i(x,\epsilon) \approx \xi_0^i(x) + \epsilon\xi_1^i(x) + \cdots + \epsilon^p \xi_p^i(x),$$

و ضرایب میدان‌های برداری $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p$ با رابطه

$$\xi_\nu^i(x) = \left.\frac{\partial f_\nu^i(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \nu = 0,\cdots,p \quad i = 1,\cdots,n,$$

محاسبه می‌شوند. پس مولد گروه تقریبی به صورت

$$\mathbf{v} \approx (\xi_0^i(x) + \epsilon\xi_1^i(x) + \cdots + \epsilon^p\xi_p^i(x))\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{۸۹.۳}$$

است که از این پس به جای علامت تقریب در آن از نماد تساوی استفاده می‌کنیم. در بحث‌های تئوری، برابری‌ها با یک خطای $\mathcal{O}(\epsilon^p)$ از یک مرتبه دلخواه $p \geqslant 1$ در نظر گرفته می‌شود و نیز با قرار دادن $p=1$ عبارت‌ها ساده‌تر می‌شوند.

۱.۷.۳ معادلات تقریبی لی

گروه‌های تبدیل تقریبی یک پارامتری در مرتبه اول دقت را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x,a) + \epsilon f_1^i(x,a), \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۹۰.۳}$$

فرض کنید

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1, \tag{۹۱.۳}$$

یک عملگر تقریبی داده شده باشد که در آن داریم:

$$\mathbf{v}_0 = \xi_0^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \mathbf{v}_1 = \xi_1^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

تبدیل تقریبی متناظر(۹۰.۳) از نقاط x به نقاط $\bar{x} = \bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1$ با مختصات

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \epsilon \bar{x}_1^i, \tag{۹۲.۳}$$

که در آن

$$\bar{x}_0^i = f_0^i(x,a), \qquad \bar{x}_1^i = f_1^i(x,a),$$

با معادلات زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{d\bar{x}_0^i}{da} = \xi_0^i(\bar{x}_0), \qquad \bar{x}_0^i\big|_{a=0} = x^i, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{۹۳.۳}$$

$$\frac{d\bar{x}_1^i}{da} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_0^i(x)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\bar{x}_0} \bar{x}_1^k + \xi_1^i(\bar{x}_0), \qquad \bar{x}_1^i\big|_{a=0} = 0. \tag{۹۴.۳}$$

معادلات (۹۳.۳) و (۹۴.۳) معادلات تقریبی لی نامیده می‌شود. پس در صورت داشتن مولد با کمک این معادلات می‌توان تبدیلات را تعیین کرد. در ادامه بعد از بیان دو قضیه چند مثال ذکر خواهیم کرد .

قضیه ۱.۷.۳. فرض کنید که توابع $f(x,\epsilon)$ و $g(x,\epsilon)$ که در یک همسایگی از نقطه $(x_0, 0)$ تحلیلی هستند، در شرط

$$g(x,\epsilon) = f(x,\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^p),$$

صدق می‌کنند و نیز فرض کنید که $x = x(t,\epsilon)$ و $\bar{x} = \bar{x}(t,\epsilon)$ به ترتیب جواب‌هایی از مساله‌های زیر باشند

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\epsilon), \qquad x\big|_{t=0} = \alpha(\epsilon),$$
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = g(\bar{x},\epsilon), \qquad \bar{x}\big|_{t=0} = \beta(\epsilon),$$

که $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ و $\beta(\epsilon) = \alpha(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^p)$ سپس داریم:

$$\bar{x}(t,\epsilon) = x(t,\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^p).$$

مساله تقارن کوشی را به صورت

$$\frac{dx}{dt} \approx f(x,\epsilon), \quad x\Big|_{t=0} \approx \alpha(\epsilon),$$

در نظر بگیرید. معادله را در این مسأله می‌توان به صورت

$$\frac{dx}{dt} = g(x,\epsilon), \qquad g(x,\epsilon) \approx f(x,\epsilon),$$

بازنویسی کرد. شرط موجود در این مسأله را نیز می‌توان به حالت

$$x\Big|_{t=0} = \beta(\epsilon), \qquad \beta(\epsilon) \approx \alpha(\epsilon),$$

نوشت. این قضیه یکتایی حل را نتیجه می‌دهد. یعنی در صورت وجود یک جواب برای مساله کوشی هر جواب دیگری که با جواب اولیه تقریبا برابر باشد البته با یک خطای از مرتبه $\mathcal{O}(\epsilon^p)$ نیز یک جواب از این مساله است.

قضیه ۲.۷.۳. فرض کنید که تبدیلات (۸۷.۳) یک گروه تقریبی با میدان برداری مماس زیر تشکیل می‌دهند :

$$\xi(x,\epsilon) \approx \frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}\Big|_{a=0},$$

سپس تابع $f(x,a,\epsilon)$ در خاصیت زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a} \approx \xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon).$$

برعکس، برای هر تابع هموار $\xi(x,\epsilon)$، حل $x' = f(x.a,\epsilon)$ از مساله تقریبی کوشی

$$\frac{dx'}{da} \approx \xi(x',\epsilon), \qquad x'\Big|_{a=0} \approx x,$$

یک گروه یک پارامتری با پارامتر گروهی a تعیین می‌کند.

البته یادآوری این نکته بی ضرر نیست که مساله تقریبی کوشی همان معادله تقریبی لی است.

برهان. ابتدا طرف رفت را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $f(x,a,\epsilon)$ یک گروه تقریبی از تبدیلات $x' = f(x,a,\epsilon)$ می‌دهد. آنگاه بنابر تعریف (۱.۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} f(f(x,a,\epsilon),b,\epsilon) &\approx f(x,a+b,\epsilon) \\ &\Rightarrow f(f(x,a,\epsilon),0,\epsilon) + \frac{\partial f(f(x,a,\epsilon),b,\epsilon)}{\partial b}\Big|_{b=0}.b + \mathcal{O}(b) \\ &\approx f(x,a,\epsilon) + \frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}.b + \mathcal{O}(b), \end{aligned}$$

با استفاده از این مطلب که $f(x,0,\epsilon)\approx x$ و نیز فرض قضیه و تقسیم دو طرف عبارت اخیر بر b و در نهایت میل دادن عبارت حاصل به سمت صفر داریم :

$$\begin{aligned}
&f(x,a,\epsilon)+\xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon).b+\mathcal{O}(b)\\
&\approx f(x,a,\epsilon)+\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}.b+\mathcal{O}(b)\\
&\text{با تقسیم بر } b\ \ \xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon)+\frac{\mathcal{O}(b)}{b}\approx\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}+\frac{\mathcal{O}(b)}{b},\\
&\Longrightarrow \xi(f(x,a,\epsilon),\epsilon)\approx\frac{\partial f(x,a,\epsilon)}{\partial a}.
\end{aligned}$$

برای اثبات برگشت فرض کنید که تابع $x'=f(x,a,\epsilon)$ یک حل از مساله تقریبی کوشی است. برای اثبات اینکه $f(x,a,\epsilon)$ یک گروه تقریبی تعیین می‌کند، کافی است شرط تقریبی

$$f(f(x,a,\epsilon),b,\epsilon)\approx f(x,a+b,\epsilon),$$

را بررسی کنیم. طرف چپ و طرف راست عبارت بالا را با $k(b,\epsilon)$ و $k'(b,\epsilon)$ که در x,a ثابت هستند را به عنوان توابعی از (b,ϵ) نشان می‌دهیم. با توجه به فرض برگشت آن‌ها در مساله تقریبی کوشی صدق می‌کنند، یعنی:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial k}{\partial b}\approx\xi(k,\epsilon), && k\big|_{b=0}\approx g(x,a,\epsilon),\\
&\frac{\partial k'}{\partial b}\approx\xi(k',\epsilon), && k'\big|_{b=0}\approx g(x,a,\epsilon),
\end{aligned}$$

حال با توجه به قضیه (۱.۷.۳) این جواب یکتا است و تساوی تقریبی $k(b,\epsilon)\approx k'(b,\epsilon)$ را داریم و این شرط تقریبی مورد نظر را نتیجه می‌دهد. □

مثال ۲.۷.۳. فرض کنید $n=1$ باشد و نیز داشته باشیم

$$\mathbf{v}=(1+\epsilon x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

اینجا $\xi_0(x)=1$ و $\xi_1(x)=x$ و معادلات (۹۳.۳) و (۹۴.۳) به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}_0}{da}=1, && \bar{x}_0\big|_{a=0}=x,\\
&\frac{d\bar{x}_1}{da}=\bar{x}_0, && \bar{x}_1\big|_{a=0}=0,
\end{aligned}$$

و با حل آنها داریم:

$$\begin{aligned}
&\int d\bar{x}_0=\int da\Rightarrow\bar{x}_0=a+c\Rightarrow\bar{x}_0=a+x,\\
&\frac{d\bar{x}_1}{da}=\bar{x}_0\Rightarrow\int d\bar{x}_1=\int(a+c)da\\
&\Longrightarrow\bar{x}_1=\frac{a^2}{2}+ax+c\Rightarrow\bar{x}_1=ax+\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

در نتیجه گروه تبدیل تقریبی به شکل

$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon \left(ax + \frac{a^2}{2} \right),$$

می‌باشد.

مثال ۳.۷.۳. فرض کنید $n = 2$ باشد و مولد زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{v} = (1 + \epsilon x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon xy \frac{\partial}{\partial y},$$

اینجا $\xi_0(x, y) = (1, 0)$ و $\xi_1(x, y) = (x^2, xy)$ و معادلات (۹۳.۳) و (۹۴.۳) به صورت

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}_0}{da} = 1, && \frac{d\bar{y}_0}{da} = 0, && \bar{x}_0\big|_{a=0} = x, && \bar{y}_0\big|_{a=0} = y, \\
&\frac{d\bar{x}_1}{da} = (\bar{x}_0)^2, && \frac{d\bar{y}_1}{da} = \bar{x}_0 \bar{y}_0, && \bar{x}_1\big|_{a=0} = 0, && \bar{y}_1\big|_{a=0} = 0,
\end{aligned}$$

نوشته می‌شوند [۲]. با انتگرال گیری از معادلات فوق داریم:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_0 &= x + a, \qquad \bar{y}_0 = y, \\
\bar{x}_1 &= \int (x + a)^2 da = \int (x^2 + 2ax + a^2) da = ax^2 + a^2 x + \frac{a^3}{3}, \\
\bar{y}_1 &= \int (xy + ay) da = xya + \frac{a^2}{2} y.
\end{aligned}$$

در نتیجه گروه تقریبی به صورت

$$\begin{aligned}
\bar{x} &\approx x + a + \epsilon \left(ax^2 + a^2 x + \frac{a^3}{3} \right), \\
\bar{y} &\approx y + \epsilon \left(axy + \frac{a^2}{2} y \right),
\end{aligned}$$

خواهد بود.

مثال ۴.۷.۳. در این مثال نیز قصد داریم معادلات تقریبی لی را حل کنیم و گروه تبدیل تقریبی را برای مولد

$$\mathbf{v} = \left(t + \frac{\epsilon}{6} t \right) \frac{\partial}{\partial t} - \left(u + \frac{\epsilon}{3} tu \right) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{۹۵.۳}$$

بیابیم [۲]. در اینجا $\xi_0(t, u) = (t, -u)$ و $\xi_1(t, u) = (\frac{1}{6} t, \frac{-1}{3} tu)$ پس معادلات تقریبی لی به صورت

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{t}_0}{da} = \bar{t}_0, && \bar{t}_0\big|_{a=0} = t, \\
&\frac{d\bar{u}_0}{da} = -\bar{u}_0, && \bar{u}_0\big|_{a=0} = u,
\end{aligned}$$

نوشته می‌شوند و نیز داریم

$$\frac{d\bar{t}_1}{da} = \frac{1}{6}\bar{t}_0, \qquad \bar{t}_1\big|_{a=0} = 0,$$
$$\frac{d\bar{u}_1}{da} = \frac{-1}{3}\bar{t}_0\bar{u}_0, \qquad \bar{u}_1\big|_{a=0} = 0,$$

که با انتگرال گیری از معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\ln\bar{t}_0 = a + C \Rightarrow \ln t = C \Rightarrow \bar{t}_0 = \mathrm{e}^{a+t},$$
$$\ln\bar{u}_0 = C - a \Rightarrow \bar{u}_0 = \mathrm{e}^{u-a},$$

و

$$\frac{d\bar{t}_1}{da} = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^{a+t}) \Rightarrow \bar{t}_1 = \int\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{a+t}\right)da \Rightarrow \bar{t}_1 = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{a+t},$$
$$\frac{d\bar{u}_1}{da} = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{a+t})(\mathrm{e}^{u-a}) \Longrightarrow \bar{u}_1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t+u}a.$$

پس گروه تبدیلات تقریبی اینگونه عبارتند از:

$$\bar{t} \approx \mathrm{e}^{a+t} + \epsilon\frac{1}{6}\mathrm{e}^{a+t},$$
$$\bar{u} \approx \mathrm{e}^{u-a} + \epsilon\frac{1}{3}\mathrm{e}^{t+u}a.$$

۲.۷.۳ نگاشت نمایی تقریبی

یک روش دیگر نیز برای به دست آوردن گروه تبدیلات تقریبی با استفاده از مولد گروه تقریبی وجود دارد که به روش نگاشت نمایی معروف است که در ادامه به آن می‌پردازیم [۴۲].

قضیه ۳.۷.۳. عملگر

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1, \tag{۹۶.۳}$$

را با یک پارامتر کوچک ϵ که

$$\mathbf{v}_0 = \xi_0^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{v}_1 = \xi_1^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{۹۷.۳}$$

در نظر می‌گیریم. گروه تبدیل تقریبی متناظر

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \epsilon\bar{x}_1^i, \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{۹۸.۳}$$

با معادلات زیر تعیین می‌شوند :

$$\bar{x}_0^i = \mathrm{e}^{a\mathbf{v}_0}(x^i), \quad \bar{x}_1^i = \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg (\bar{x}_0^i), \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{۹۹.۳}$$

که در آن روابط

$$e^{a\mathbf{v}_0} = 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \cdots, \qquad (۱۰۰.۳)$$

و

$$\ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg = a\mathbf{v}_1 + \frac{a^2}{2!}[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1] + \frac{a^3}{3!}[\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]] + \cdots. \qquad (۱۰۱.۳)$$

را داریم. به عبارت دیگر عملگر تقریبی $X = \mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1$ گروه تبدیل تقریبی یک پارامتری تولید می‌کند که با نگاشت نمایی زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x}^i = (1 + \epsilon \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg)e^{a\mathbf{v}_0}(x^i), \qquad i = 1, \cdots, n. \qquad (۱۰۲.۳)$$

برهان. با جایگذاری عملگر(۹۶.۳) و نیز با توجه به تعریف بسط نمایی داریم:

$$e^{(\mathbf{v}_0+\epsilon\mathbf{v}_1)} = 1 + a(\mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1) + \frac{a^2}{2!}(\mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1)^2 + \frac{a^3}{3!}(\mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1)^3 + \cdots.$$

حال جملات از درجه یک در ϵ را به صورت

$$\begin{aligned} e^{a(\mathbf{v}_0+\epsilon\mathbf{v}_1)} \approx 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}X_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \cdots + \epsilon\Big\{a\mathbf{v}_1 \\ + \frac{a^2}{2!}(\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0) + \frac{a^3}{3!}(\mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^2) \\ + \frac{a^4}{4!}(\mathbf{v}_0^3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^3) + \cdots\Big\}, \end{aligned} \qquad (۱۰۳.۳)$$

به دست می‌آوریم. با استفاده از اتحادهای

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1], \\ &\mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^2 + 3[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]\mathbf{v}_0 + [\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]], \cdots, \end{aligned}$$

معادله (۱۰۳.۳) را به فرم

$$\begin{aligned} e^{a(\mathbf{v}_0+\epsilon\mathbf{v}_1)} \approx 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \cdots \\ + \epsilon\Big\{a\mathbf{v}_1\left(1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \cdots\right) \\ + \frac{a^2}{2!}[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]\left(1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \cdots\right) \\ + \frac{a^3}{3!}[\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]]\left(1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \cdots\right) + \cdots\Big\}, \end{aligned}$$

بازنویسی می‌کنیم. از این رو با استفاده از نگاشت نمایی داریم

$$e^{a(\mathbf{v}_0+\epsilon\mathbf{v}_1)} \approx (1 + \epsilon \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg)e^{a\mathbf{v}_0}. \qquad (۱۰۴.۳)$$

به عبارت دیگر نگاشت نمایی $\bar{x}^i = e^{a\mathbf{v}}(x^i)$ که برای عملگر (۹۶.۳) نوشته شده و در مرتبه اول دقت نسبت به ϵ محاسبه شده، فرم (۱۰۲.۳) را دارد.با محاسبه گروه تبدیلات (۹۸.۳) به معادله (۹۹.۳) می‌رسیم و این برهان را کامل می‌کند. □

مثال ۵.۷.۳. در این مثال قصد داریم با استفاده از قضیه (۲.۷.۲) گروه تبدیل تقریبی عملگر $\mathbf{v} = (1+\epsilon x)\frac{\partial}{\partial x}$ را به دست آوریم [۲]. اینجا $\mathbf{v}_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$ و $\mathbf{v}_0 = \frac{\partial}{\partial x}$ بنابر این

$$\mathbf{v}_0(x) = 1, \quad \mathbf{v}_0^2(x) = \mathbf{v}_0^3(x) = \cdots = 0,$$

و کروشه‌های تقریبی نیز به صورت

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1] = \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{v}_0,$$
$$[\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]] = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0] = 0, \cdots,$$

خواهند بود. در نتیجه

$$\bar{x}_0 = \mathrm{e}^{a\mathbf{v}_0}(x) = x + a,$$
$$\ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg = \left(a\mathbf{v} + \frac{a^2}{2!}\right)\frac{\partial}{\partial x},$$

پس گروه تبدیل تقریبی به شکل

$$\bar{x}_1 = \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg (\bar{x}_0) = \left(ax + \frac{a^2}{2!}\right)\frac{\partial}{\partial x}(x+a) = ax + \frac{a^2}{2!}.$$
$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon\left(ax + \frac{a^2}{2!}\right),$$

است.

حال با یک مثال کامل تر این بخش را به پایان می‌بریم.

مثال ۶.۷.۳. عملگر زیر را در نظر می‌گیریم [۲]:

$$\mathbf{v} = (1 + \epsilon[(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2])\frac{\partial}{\partial x^1} + 2\epsilon x^1\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right).$$

در اینجا $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1$ را به صورت زیر داریم:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\partial}{\partial x^1}$$
$$\mathbf{v}_1 = ((x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2)\frac{\partial}{\partial x^1}$$
$$+ 2x^1\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right).$$

عملگر $\mathbf{v}_0$ گروه تبدیل زیر را تولید می‌کند

$$\mathbf{v}_0(x^1) = 1, \qquad \mathbf{v}_0^2(x^1) = \mathbf{v}_0^3(x^1) = \cdots = 0$$
$$\bar{x}_0^1 = \exp^{aX_0}(x^1) = x^1 + a,$$
$$\bar{x}_0^j = x^j, \quad j = 2, 3, 4.$$

و کروشه‌های تقریبی را نیز به صورت

$$[\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1]=2\left(x^1+\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^2}+x^3\frac{\partial}{\partial x^3}+x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right),$$
$$[\mathbf{v}_0,[\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1]]=2\frac{\partial}{\partial x^1},\qquad [\mathbf{v}_0,[\mathbf{v}_0,[\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1]]]=0\cdots.$$

داریم. در نتیجه معادله (۱۰۱.۳) فرم زیر را می‌گیرد:

$$\ll a\mathbf{v}_0,a\mathbf{v}_1\gg=\left([(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2]a+x^1a^2+\frac{1}{3}a^3\right)\frac{\partial}{\partial x^1}$$
$$+(2ax^1+a^2)\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^2}+x^3\frac{\partial}{\partial x^3}+x^4\frac{\partial}{\partial x^4}\right).$$

بنابر این (۹۹.۳) نتیجه می‌دهد که

$$\bar{x}_1^1=\ll a\mathbf{v}_0,a\mathbf{v}_1\gg(\bar{x}_0^1)=[(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2]a+x^1a^2+\frac{1}{3}a^3,$$
$$\bar{x}_1^j=(2ax^1+a^2)x^j,\qquad j=2,3,4.$$

و سپس به گروه تبدیل تقریبی زیر می‌رسیم:

$$\bar{x}^1\approx\bar{x}_0^1+\epsilon\bar{x}_1^1=x^1+a+\epsilon\left([(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2]a+x^1a^2+\frac{1}{3}a^3\right),$$
$$\bar{x}^j\approx\bar{x}_0^j+\epsilon\bar{x}_1^j=x^j+\epsilon(2ax^1+a^2)x^j,\quad j=2,3,4.$$

۸.۳ تقارن‌های تقریبی

تعریف ۱.۸.۳. فرض کنید G یک گروه تبدیل تقریبی یک پارامتری باشد

$$\bar{z}^i=f(z.a.\epsilon)\equiv f_0^i(z,a)+\epsilon f_1^i(z,a),\qquad i=1,\cdots,N.\qquad (۱۰۵.۳)$$

یک معادله تقریبی

$$F(z,\epsilon)\equiv F_0(z)+\epsilon F_1(z)\approx 0,\qquad (۱۰۶.۳)$$

نسبت به G ناوردای تقریبی نامیده می‌شود و یا به عبارت دیگر G را به عنوان گروه تبدیلات تقریبی می‌پذیرد اگر $F(\bar{z},\epsilon)\approx F(f(z,a,\epsilon),\epsilon)=O(\epsilon)$ که $z=(z^1,\cdots,z^N)$ در معادله (۱۰۶.۳) صدق می‌کند. اگر $z=(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(k)})$ سپس (۱۰۶.۳) یک معادله تقریبی از مرتبه k نامیده می‌شود و G یک گروه تقارن تقریبی از معادلات دیفرانسیل است.

۱.۸.۳ معادلات مشخصه و تقارن‌های پایدار

قضیه زیریک محک برای تعیین تقارن‌های تقریبی یک معادله دیفرانسیل می‌دهد.

قضیه ۱.۸.۳. معادله (۱۰۶.۳) تحت گروه تبدیلات تقریبی (۱۰۵.۴) با مولد

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^1 \equiv \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} + \epsilon \xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{۱۰۷.۳}$$

ناوردا است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{v}F(z,\epsilon)\big|_{F\approx 0} = \mathcal{O}(\epsilon),$$

یا

$$[\mathbf{v}^0 F_0(z) + \epsilon(\mathbf{v}^1 F_0(z) + \mathbf{v}^0 F_1(z))]_{(۱۰۶.۳)} = \mathcal{O}(\epsilon). \tag{۱۰۸.۳}$$

برهان. معادله (۱۰۸.۳) با جایگذاری (۱۰۶.۳) و (۱۰۷.۳)در معادله مشخصه در مرتبه اول دقت نسبت به ϵ به دست می‌آید. عملگر (۱۰۷.۳) که در معادله (۱۰۸.۳) صدق می‌کند تقارن تقریبی بی‌نهایت کوچك، یا عملگر تقریبی پذیرفته شده توسط معادله (۱۰۶.۳) نامیده می‌شود و در نتیجه معادله (۱۰۸.۳) معادله تعیین برای تقارن‌های تقریبی نامیده می‌شود. □

در ادامه صورت کامل‌تری از این قضیه ذکر و اثبات آن را ارائه خواهیم کرد.

قضیه ۲.۸.۳. فرض کنید که تابع $F(z,\epsilon) = (F^1(z,\epsilon),\cdots,F^n(z,\epsilon))$، $n < N$ در متغیر های z,ϵ توأماً تحلیلی باشد و در شرط زیر صدق کند:

$$rank F'(z,0)|_{F(z,0)=0} = n, \tag{۱۰۹.۳}$$

که $F'(z,\epsilon) = \| \frac{\partial F^\nu(z,\epsilon)}{\partial z^i} \|$ برای $\nu = 1,\cdots,n$ و $i = 1,\cdots,N$. برای اینکه معادله تقریبی

$$F(z,\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^p), \tag{۱۱۰.۳}$$

تحت گروه تقریبی از تبدیلات زیر

$$\bar{z} = f(z,a,\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^p),$$

با مولد

$$\mathbf{v} = \xi(z,\epsilon)\frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi = \frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a=0} + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{۱۱۱.۳}$$

ناوردا باشد لازم و کافی است که

$$\mathbf{v}F(z,\epsilon)\big|_{(۱۱۰.۳)} = \mathcal{O}(\epsilon). \tag{۱۱۲.۳}$$

برهان. ابتدا لزوم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید شرط $F(f(z,a,\epsilon),\epsilon) \approx 0$ برای ناوردایی معادله تقریبی (۱۱۰.۳) برقرار باشد یعنی:

$$F(f(z,a,\epsilon),\epsilon)\big|_{(۱۱۰.۳)} = \mathcal{O}(\epsilon^p).$$

با استفاده از معادله مشخصه داریم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^1 = \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} + \epsilon \xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$$
$$\left(\xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} + \epsilon \xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\right)(F_0(z) + \epsilon F_1(z))\Big|_{F_0(z)+\epsilon F_1(z)\approx 0}$$
$$\xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}F_0(z) + \epsilon \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}F_1(z) + \epsilon \xi_1^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}F_0(z)\Big|_{F(z,\epsilon)\approx 0} = 0,$$

و این (۱۱۲.۳) را نتیجه می‌دهد.حال برگشت را اثبات می‌کنیم فرض کنید که (۱۱۲.۳) برای تابع $F(z,\epsilon)$ برقرار باشد که در شرط (۱۰۹.۳) صادق است، حال ناوردایی معادله تقریبی (۱۱۰.۳) را اثبات می‌کنیم. برای این منظور متغیرهای جدیدی را به صورت

$$y^N = H^{N-n}(z,\epsilon), \cdots, y^{n+1} = H^1(z,\epsilon), y^n = F^n(z,\epsilon), \cdots, y^1 = F^1(z,\epsilon),$$

به جای $z^1, \cdots, z^N$ معرفی می‌کنیم به طوریکه توابع $F^1, \cdots, F^n, H^1, \cdots, H^{N-n}$ مستقل تابعی هستند. (برای ϵ به اندازه کافی کوچک) در متغیرهای جدید معادله تقریبی اصلی (۱۰۹.۳) و (۱۱۱.۳) و شرط (۱۱۲.۳) به ترتیب فرم زیر را می‌گیرند:

$$y^\nu = \theta_p^\nu(y,\epsilon), \qquad \nu+1, \cdots, n,$$
$$\mathbf{v} = \eta^i(y,\epsilon)\frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \eta^i \approx \xi^j(x,\epsilon)\frac{\partial y^i(x,\epsilon)}{\partial x^j},$$
$$\eta^\nu(\theta_p^1, \cdots, \theta_p^n, y^{n+1}, \cdots, y^N) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \nu = 1, \cdots, n,$$

که در آن $\theta_p^\nu = \mathcal{O}(\epsilon^p)$ را داریم. بنابراین متغیرهای y با مساله تقریبی کوشی

$$\frac{d\bar{y}^\nu}{da} \approx \eta^\nu(\bar{y}^1, \cdots, \bar{y}^n, \bar{y}^{n+1}, \cdots, \bar{y}^N, \epsilon), \quad \bar{y}^\nu\big|_{a=0} = \theta_p^\nu(y,\epsilon),$$
$$\frac{d\bar{y}^k}{da} \approx \eta^k(\bar{y}^1, \cdots, \bar{y}^n, \bar{y}^{n+1}, \cdots, \bar{y}^N, \epsilon), \quad \bar{y}^k\big|_{a=0} = y^k, \quad k = n+1, \cdots, N,$$

تعیین می‌شوند. مطابق قضیه (۱.۷.۳) جواب این مساله یکتا است و این جواب به صورت $\bar{y} = (\theta_p^1, \cdots, \theta_p^n, y^{n+1}, \cdots, y^N)$ خواهد بود. با بازنویسی بر اساس متغیرهای اولیه به عبارت $F^\nu(\bar{z},\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^p)$ برای $\nu = 1, \cdots, n$ می‌رسیم و این یعنی معادله تقریبی $F(f(z,a,\epsilon),\epsilon) \approx 0$ و قضیه اثبات می‌شود. □

مثال ۱.۸.۳. فرض کنید $N = 2$ و $z = (x,y)$ و $p = 1$ ما گروه تقریبی از تبدیلات زیر را

$$\bar{x} \approx x + a + \left(x^2 a + x a^2 + \frac{a^3}{3}\right)\epsilon,$$
$$\bar{y} \approx y + \left(xya + y\frac{a^2}{2}\right)\epsilon, \tag{۱۱۳.۳}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = (1 + \epsilon x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon x y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{۱۱۴.۳}$$

در نظر می‌گیریم [۲]. قصد داریم نشان دهیم معادله تقریبی

$$F(x,y,\epsilon) \equiv y^{2+\epsilon} - \epsilon x^2 - 1 = \mathcal{O}(\epsilon), \qquad (۱۱۵.۳)$$

نسبت به تبدیلات (۱۱۳.۳) ناوردا است. نخست ناوردایی (۱۱۵.۳) را بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا معادله (۱۱۵.۳) را با همان درجه دقت به شکل

$$\bar{F}(x,y,\epsilon) \equiv y^2 - \epsilon(x^2 - y^2 \ln y) - 1 \approx 0,$$

بازنویسی می‌کنیم. سپس با استفاده از تبدیل (۱۱۳.۳) داریم

$$\begin{aligned}\bar{F}(\bar{x},\bar{y},\epsilon) &= \bar{y}^2 - \epsilon(\bar{x}^2 - \bar{y}^2 \ln \bar{y}) - 1 \approx y^2 - \epsilon(x^2 - y^2 \ln y) - 1 + \epsilon(2xa + a^2)(y^2 - 1)\\ &+ \epsilon(2xa + a^2)(y^2 - 1)\\ &= \bar{F}(x,y,\epsilon) + \epsilon(2xa + a^2)[\bar{F}(x,y,\epsilon) + \epsilon(x^2 - y^2 \ln y)]\\ &= [1 + \epsilon(2ax + a^2)]\bar{F}(x,y,\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon),\end{aligned}$$

که لزوم تساوی $F(f(z,a,\epsilon),\epsilon) \approx 0$ بیانگر این نکته است که $\bar{F}(\bar{x},\bar{y},\epsilon)|_{(۱۱۵.۳)} \approx 0$. این تابع در شرط ناوردایی (۱۰۹.۳) صدق می‌کند پس ناوردایی می‌تواند با کمک محک (۱۱۲.۳) برای عملگر (۱۱۴.۳) بررسی شود پس داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{v}F &= (2+\epsilon)\epsilon x y^{2+\epsilon} - 2\epsilon x(1 + \epsilon x^2)\\ &= 2\epsilon x(y^{2+\epsilon} - 1) + \mathcal{O}(\epsilon) = 2\epsilon x(F + \epsilon x^2) + \mathcal{O}(\epsilon)\\ &= 2\epsilon x F + 2\epsilon^2 x^3 + \mathcal{O}(\epsilon)\\ &= 2\epsilon x F + \mathcal{O}(\epsilon).\end{aligned}$$

چون $F = 0$ پس $\mathbf{v}F = 0$ و این نشان می‌دهد معادله F نسبت به گروه ناوردا است.

ملاحظه ۱.۸.۳. معادله مشخصه (۱۰۸.۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{v}^0 F_0(z) = \lambda(z) F_0(z), \qquad (۱۱۶.۳)$$

$$\mathbf{v}^1 F_0(z) + \mathbf{v}^0 F_1(z) = \lambda(z) F_1(z), \qquad (۱۱۷.۳)$$

که $\lambda(z)$ با معادله (۱۱۶.۳) تعیین و سپس در معادله (۱۱۷.۳) جایگذاری می‌شود. معادله اخیر باید برای تمام جواب‌های $F_0(z) = 0$ برقرار باشد.

با مقایسه معادله (۱۱۶.۳) با معادله مشخصه از تقارن‌های دقیق، قضیه زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۸.۳. اگر معادله (۱۰۶.۳) گروه تقریبی با مولد $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^1$ را بپذیرد که $\mathbf{v}^0 \neq 0$، آنگاه عملگر

$$\mathbf{v}^0 = \xi_0^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}, \tag{۱۱۸.۳}$$

یک تقارن برای معادله

$$F_0(z) = 0, \tag{۱۱۹.۳}$$

است.

ملاحظه ۲.۸.۳. از معادله (۱۱۶.۳)و (۱۱۷.۳) واضح است که اگر $\mathbf{v}^0$ یك تقارن کامل از معادله (۱۱۹.۳) باشد، سپس $\mathbf{v} = \epsilon \mathbf{v}^0$ یك تقارن تقریبی از معادله (۱۰۶.۳) است.

تعریف ۲.۸.۳. معادله (۱۱۹.۳) و (۱۰۶.۳) به ترتیب یك معادله غیر اختلال (غیر آشفته) و یک معادله اختلال نامیده می شوند. تحت شرایط قضیه ۳.۸.۳ عملگر $\mathbf{v}^0$ یک تقارن پایدار ازمعادله غیر اختلال (۱۱۹.۳) نامیده می شود. مولد تقارن تقریبی متناظر $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^1$ برای معادله اختلال $F_0(z) + \epsilon F_1(z) \approx 0$ در واقع یك تعمیم از تقارن بی نهایت کوچك $\mathbf{v}^0$ از معادله (۱۱۹.۳) با اختلال $\epsilon F_1(z)$ می باشد. اگر بیشتر تقارن های لی جبر از معادله (۱۱۹.۳) پایدار باشد می‌گوییم که معادله اختلال (۱۰۶.۳) تقارنهای معادله غیر اختلال را به ارث می‌برد.

۲.۸.۳ محاسبه تقارن های تقریبی

قضیه (۳.۸.۳) یك روش بی‌نهایت کوچك برای محاسبه تقارن‌های تقریبی (۱۰۷.۳) از معادلات دیفرانسیل با پارامتر کوچك، تعیین می‌کند. پیاده سازی این روش سه مرحله (گام) زیر را نیاز دارد.

نخستین گام: محاسبه تقارن‌های دقیق $\mathbf{v}^0$ از معادلات غیر اختلال $F_0(z) = 0$، با حل معادله مشخصه زیر

$$\mathbf{v}^0 F_0(z)\big|_{F_0(z)=0} = 0. \tag{۱۲۰.۳}$$

دومین گام: تعیین تابع کمکی H با خاصیت معادلات (۱۰۶.۳)، (۱۱۶.۳)،(۱۱۷.۳) و با معلوم بودن $\mathbf{v}^0$ و $F_1(z)$ به صورت زیر

$$H = \frac{1}{\epsilon}\left[\mathbf{v}^0(F_0(z) + \epsilon F_1(z))\big|_{F_0(z)+\epsilon F_1(z)=0}\right]. \tag{۱۲۱.۳}$$

سومین گام: محاسبه عملگر های $\mathbf{v}^1$ با حل معادله مشخصه به صورت زیر

$$\mathbf{v}^1 F_0(z)\big|_{F_0(z)=0} + H = 0. \tag{۱۲۲.۳}$$

۳.۸.۳ مثال‌های از تقارن‌های تقریبی

مثال ۲.۸.۳. در این مثال تقارن‌های تقریبی معادله غیرخطی موج

$$u_{tt} - (u^2u_x)_x + \epsilon u_t = 0, \tag{۱۲۳.۳}$$

که در فصل دوم معرفی شد را محاسبه می‌کنیم [۴۲]. مولدهای گروه تقریبی را به فرم کلی

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon\mathbf{v}^1 \equiv (\tau_0 + \epsilon\tau_1)\frac{\partial}{\partial t} + (\xi_0 + \epsilon\xi_1)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta_0 + \epsilon\eta_1)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۱۲۴.۳}$$

می‌نویسیم که $\tau_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu (\nu = 0, 1)$ توابع ناشناخته ای از x, t و u هستند.
نخستین گام: با حل معادله مشخصه (۱۲۰.۳) برای تقارن‌های دقیق $\mathbf{v}^0$ از معادله غیر اختلال

$$u_{tt} - (u^2u_x)_x = 0, \tag{۱۲۵.۳}$$

روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\tau_0 = C_1 + C_3t, \quad \xi_0 = C_2 + (C_3 + C_4)x, \quad \eta_0 = C_4u, \tag{۱۲۶.۳}$$

که $C_1, \cdots C_4$ ثوابت دلخواه هستند. در نتیجه

$$\mathbf{v}^0 = (C_1 + C_3t)\frac{\partial}{\partial t} + (C_2 + C_3x + C_4x)\frac{\partial}{\partial x} + C_4u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۱۲۷.۳}$$

به عبارت دیگر معادله (۱۲۵.۳) جبرلی چهار بعدی با پایه‌های زیر را می‌پذیرد:

$$\mathbf{v}_1^0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2^0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_4^0 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۱۲۸.۳}$$

دومین گام: اگر عبارت (۱۲۷.۳) از مولد $\mathbf{v}^0$ را در معادله (۱۲۱.۳) جایگذاری کنیم تابع مشخصه زیر حاصل می‌شود:

$$H = C_3u_t,$$

سومین گام: از حل معادله مشخصه (۱۲۲.۳)، داریم

$$\mathbf{v}^1(u_{tt} - u^2u_{xx} - 2uu_x^2)\Big|_{(۱۲۵.۳)} + C_3u_t = 0, \tag{۱۲۹.۳}$$

که $\mathbf{v}^1$ نشان دهنده امتداد عملگر $\mathbf{v}^1 = \tau_1\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial}{\partial u}$ به مشتق‌های u موجود در معادله (۱۲۳.۳) است. با جایگذاری $u_{tt} = (u^2u_x)_x$ در طرف چپ معادله (۱۲۹.۳) به چند جمله‌ای بر حسب متغیرهای u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx} خواهیم رسید. با مساوی صفر قراردادن ضرایب، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\tau_1 = \tau_1(t), \qquad \xi_1 = \xi_1(x), \qquad 3\tau_1'' = C_3, \qquad \xi_1'' = 0, \qquad \eta_1 = [\xi_1'(x) - \tau_1'(t)]u.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \tau_1 &= A_1 + A_3 t + \frac{1}{6}C_3 t^2, \\ \xi_1 &= A_2 + (A_3 + A_4)x, \\ \eta_1 &= \left(A_4 - \frac{1}{3}C_3 t\right)u. \end{aligned} \tag{۱۳۰.۳}$$

با جایگذاری(۱۲۶.۳) و (۱۳۰.۳) در (۱۲۴.۳) تقارن‌های تقریبی زیر را برای معادله (۱۲۳.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\epsilon}{6}\left(t^2\frac{\partial}{\partial t} - 2tu\frac{\partial}{\partial u}\right), \\ &\mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_5 = \epsilon\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_6 = \epsilon\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_7 = \epsilon\mathbf{v}_4, \quad \mathbf{v}_8 = \epsilon\mathbf{v}_3. \end{aligned} \tag{۱۳۱.۳}$$

ملاحظه ۳.۸.۳. توجه کنید که معادلات (۱۳۰.۳) مولد $\mathbf{v}_8 = \epsilon\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right)$ را نتیجه می‌دهند. البته در مرتبه اول دقت، عملگر $\mathbf{v}_8$ می تواند به فرم داده شده در (۱۳۱.۳) نوشته شود.

جدول زیر از کروشه لی، که در مرتبه اول دقت محاسبه شده، نشان می‌دهد که عملگرهای (۱۳۱.۳) يك جبرلي ۸ بعدی تولید می‌کند و در نتیجه یک گروه تبدیل تقریبی ۸ پارامتری تولید می‌کند.

$[\ ,\ ]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_7$	$\mathbf{v}_8$
$\mathbf{v}_1$	0	0	$\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}(\mathbf{v}_8 - \mathbf{v}_7)$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{v}_8 - \mathbf{v}_7)$	$-\mathbf{v}_2$	0	0	$-\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_6$	0	0
$\mathbf{v}_4$	0	$-\mathbf{v}_2$	0	0	0	$-\mathbf{v}_6$	0	0
$\mathbf{v}_5$	0	0	$\mathbf{v}_5$	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_6$	0	0	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_6$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_7$	0	$-\mathbf{v}_6$	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_8$	$-\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_6$	0	0	0	0	0	0

جدول ۲.۳: کروشه‌های تقریبی

جدول بالا نشان می‌دهد که اگرچه تقارن‌های $\mathbf{v}_8, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_5$ بدیهی هستند، ولی مطابق ملاحظه (۲.۸.۳) برای ساختن جبرلی و نیز برای ساختن گروه‌های تبدیل چند پارامتری نیز لازمند.

ملاحظه ۴.۸.۳. معادلات (۱۳۱.۳) نشان می‌دهد که همه تقارن‌های (۱۲۸.۳) از معادله (۱۲۵.۳) پایدار هستند در نتیجه معادله اختلال (۱۲۳.۳) تقارن‌های معادله غیر اختلال (۱۲۵.۳) را به ارث می‌برد.

مثال ۳.۸.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید [۴۲]:

$$u_{tt} - (u^{-4}u_x)_x + \epsilon u_t = 0. \qquad (۱۳۲.۳)$$

نخستین گام: معادله غیر اختلال

$$u_{tt} - (u^{-4}u_x)_x = 0, \qquad (۱۳۳.۳)$$

جبرلی ۵ بعدی مولدهای زیر را می‌پذیرد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1^0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2^0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \\ &\mathbf{v}_4^0 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \qquad (۱۳۴.۳)$$

دومین گام: معادله (۱۲۱.۳) تابع مشخصه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$H = C_3u_t + 2C_5tu_t + C_5u.$$

سومین گام: با حل معادله مشخصه (۱۲۲.۳) مقادیر C_3 و C_5 برابر صفر می‌شوند. حال مانند مثال قبل تقارن‌های تقریبی از معادله اختلال (۱۳۲.۳) را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3 = \epsilon\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \\ &\mathbf{v}_5 = \epsilon\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_6 = \epsilon\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_7 = \epsilon\mathbf{v}_4, \quad \mathbf{v}_8 = \epsilon\left(t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}\right). \end{aligned} \qquad (۱۳۵.۳)$$

معادلات (۱۳۵.۳) نشان می‌دهد که همه تقارن‌های (۱۳۴.۳) از معادله (۱۳۳.۳) پایدار نیستند یعنی عملگرهای

$$\mathbf{v}_3^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_5^0 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u},$$

از معادله (۱۳۳.۳) غیر پایدارند. درنتیجه معادله اختلال (۱۳۲.۳) تقارنهای معادله غیر اختلال (۱۳۳.۳) رابه ارث نمی‌برد.

ملاحظه ۵.۸.۳. معادلات (۱۲۳.۳) و (۱۳۲.۳) با پارامتر دلخواه $\epsilon \neq 0$ فقط سه تقارن دقیق دارد. یعنی تقارنهای دقیق معادله (۱۲۳.۳) عملگر های

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},$$

از (۱۳۱.۳) و تقارنهای دقیق از معادله(۱۳۲.۳) عملگر های

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u},$$

از معادله (۱۳۵.۳) هستند.

مثال ۴.۸.۳. در این مثال تقارن‌های تقریبی معادله ریلی_موج[۸] را به دست می‌آوریم [۸۸]. صورت کلی این معادله به فرم زیر است:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \epsilon(u_t - u_t^3). \qquad (۱۳۶.۳)$$

مولد گروه تقریبی از گروه تبدیلات تقریبی که توسط معادله (۱۳۶.۳) پذیرفته می‌شود را به صورت

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon\mathbf{v}^1 \equiv (\tau_0 + \epsilon\tau_1)\frac{\partial}{\partial t} + (\xi_0 + \epsilon\xi_1)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta_0 + \epsilon\eta_1)\frac{\partial}{\partial u}, \qquad (۱۳۷.۳)$$

در نظر می‌گیریم که τ_ν, ξ_ν و $\eta_\nu(\nu = 0, 1)$ توابعی نامعلوم از t، x و u هستند. با اثر گذاری امتداد مرتبه دوم از تقارن $\mathbf{v}^0$ روی معادله غیر اختلال

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \qquad (۱۳۸.۳)$$

و حل معادله مشخصه (۱۲۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{1}{20}(-15C_2t^2 - 5C_1yt - 30C_3xt + 20C_8t - 15C_2x^2) + C_9x + \frac{1}{2}C_2y^2\\
&\quad + yC_5 + C_{10},\\
\xi_0 &= -\frac{3}{4}C_3x^2 + \frac{1}{20}(-30C_2tx - 5C_1yx + 20C_8x) - \frac{3}{4}C_3t^2 - \frac{1}{2}C_3y^2 + tC_9\\
&\quad - yC_6 + C_{11},\\
\zeta_0 &= \frac{1}{2}C_1y^2 + \frac{1}{8}(8C_2ty + 8C_3xy + 8C_4y - C_1t^2 + C_1x^2) + C_5t + C_6x + C_7,\\
\eta_0 &= -\frac{1}{2}C_2tu - \frac{1}{2}C_3xu + \frac{3}{4}C_1yu + C_4u + C_8u,
\end{aligned} \qquad (۱۳۹.۳)$$

که $C_1, \cdots, C_{11}$ ثوابت دلخواه هستند. پس معادله (۱۳۸.۳) دارای تقارن‌های زیر است:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1^0 &= -\frac{1}{4}yt\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4}xy\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{8}x^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{3}{4}yu\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_2^0 &= \left(-\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{2}tx\frac{\partial}{\partial x} + yt\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}tu\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_3^0 &= -\frac{3}{2}xt\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_4^0 &= u\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_5^0 = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y},\\
\mathbf{v}_6^0 &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_7^0 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_8^0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_9^0 &= x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_{10}^0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_{11}^0 = \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \qquad (۱۴۰.۳)$$

---
[۸] Rayleigh-wave

حال با جایگذاری ترکیب خطی از مولدهای (۱۴۰.۳) در رابطه (۱۲۱.۳) تابع کمکی H به صورت

$$\begin{aligned}H = &-\frac{3}{2}C_2uu_t^2 + \frac{11}{2}C2tu_t^3 - \frac{7}{2}u_tC_2t + \frac{11}{2}C_3xu_t^3 - \frac{7}{2}u_tC_3x + \frac{17}{4}C_1yu_t^3\\ &-\frac{9}{4}u_tC_1y - \frac{3}{2}u_xtC_3 - \frac{3}{2}u_xC_2x - 3C_9u_t^2u_x - \frac{1}{4}u_ytC_1 + u_yC_2y - 3C_5u_t^2u_y\\ &+u_yC_5 - C_8u_t^3 + u_tC_8 + 4C_4u_t^3 - 2u_t1C_4 + u_yC_9 + \frac{1}{2}uC_2 + \frac{9}{2}C_3tu_t^2u_x\\ &+\frac{9}{2}C_2xu_t^2u_x + \frac{3}{4}C_1tu_t^2u_y - 3C_2yu_t^2u_y,\end{aligned} \tag{۱۴۱.۳}$$

به دست می‌آید. بعد از محاسبه تابع کمکی H، هدف محاسبه عملگرهای $\mathbf{v}^1$ است که با حل معادله مشخصه تقارن‌های تقریبی برای معادله اختلال (۱۳۶.۳) را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= -\frac{1}{4}yt\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4}xy\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{8}x^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{3}{4}yu\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_2 &= \left(-\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{2}tx\frac{\partial}{\partial x} + yt\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}tu\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_3 &= -\frac{3}{2}xt\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathbf{v}_4 &= u\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_5 = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y},\\
\mathbf{v}_6 &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_7 = \frac{\partial}{\partial y},\\
\mathbf{v}_8 &= t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + \epsilon\left(-\frac{1}{8}(t^2 + x^2)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4}tx\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}tu\frac{\partial}{\partial u}\right),\\
\mathbf{v}_9 &= x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_{10} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_{11} = \frac{\partial}{\partial x},\\
\mathbf{v}_{12} &= \epsilon\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_{13} = \epsilon\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_{14} = \epsilon\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_{15} = \epsilon\mathbf{v}_4, \quad \mathbf{v}_{16} = \varepsilon\mathbf{v}_5,\\
\mathbf{v}_{17} &= \epsilon\mathbf{v}_6, \quad \mathbf{v}_{18} = \epsilon\mathbf{v}_7, \quad \mathbf{v}_{19} = \epsilon\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad \mathbf{v}_{20} = \epsilon\mathbf{v}_9,\\
\mathbf{v}_{21} &= \epsilon\mathbf{v}_{10}, \quad \mathbf{v}_{22} = \epsilon\mathbf{v}_{11}.
\end{aligned} \tag{۱۴۲.۳}$$

مولد تقریبی $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon\mathbf{v}^1$ گروه تبدیلات تقریبی یک‌ـ‌پارامتری را $\bar{x}_i = \bar{x}_i^0 + \epsilon\bar{x}_i^1$ که در آن $(i = 1, \cdots n)$، با استفاده از نگاشت نمایی تقریبی تولید می‌نماید. به عبارت دیگر برای هر مولد $\mathbf{v}_i$ گروه تبدیل تقریبی g_i با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\bar{x}_i^0 = e^{a\mathbf{v}^0}(x_i) \quad \bar{x}_i^1 = \ll a\mathbf{v}^0, a\mathbf{v}^1 \gg (\bar{x}_i^0), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{۱۴۳.۳}$$

که در آن $x_4 = u, x_3 = y, x_2 = x, x_1 = t$ و

$$\exp(a\mathbf{v}^0) = 1 + a\mathbf{v}^0 + \frac{a^2}{2!}(\mathbf{v}^0)^2 + \frac{a^3}{3!}(\mathbf{v}^0)^3 + \cdots, \tag{۱۴۴.۳}$$

و نیز

$$\ll a\mathbf{v}^0, a\mathbf{v}^1 \gg (\bar{x}_i^0) = a\mathbf{v}^1 + \frac{a^2}{2!}[\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1] + \frac{a^3}{3!}[\mathbf{v}^0, [\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1]] + \cdots. \tag{۱۴۵.۳}$$

پس داریم:

$$
\left\{\begin{array}{l}
g_1:(t,x,y,u)\mapsto\left(-\frac{1}{4}ayt+t,-\frac{1}{4}axy+x,\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{8}x^2\right)a+y,\frac{3}{4}ayu+u\right),\\
g_2:(t,x,y,u)\mapsto\left(\left(-\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)a+t,-\frac{3}{2}atx+x,aty+y,-\frac{1}{2}atu+u\right),\\
g_3:(t,x,y,u)\mapsto\left(-\frac{3}{2}atx+t,\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}x^2\right)a+x,axy+y,-\frac{1}{2}atu+u\right),\\
g_4:(t,x,y,u)\mapsto(t,x,ye^a,ue^a),\\
g_5:(t,x,y,u)\mapsto((-\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^{-a}+(\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^a,x,-(-\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^{-a}+(\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^a,u),\\
g_6:(t,x,y,u)\mapsto(t,-y\sin(a)+x\cos(a),y\cos(a)+x\sin(a),u),\\
g_7:(t,x,y,u)\mapsto(t,x,y+a,u),\\
g_8:(t,x,y,u)\mapsto\left(\left(t-\frac{1}{8}\epsilon t^2-\frac{1}{8}\epsilon x^2\right)a+t,ax-\frac{1}{4}a\epsilon tx+x,y,au-\frac{1}{4}a\epsilon tu\right),\\
g_9:(t,x,y,u)\mapsto((-\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^{-a}+(\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^a,-(-\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^{-a}+(\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^a,y,u),\\
g_{10}:(t,x,y,u)\mapsto(t+a,x,y,u),\\
g_{11}:(t,x,y,u)\mapsto(t,x+a,y,u),\\
g_{12}:(t,x,y,u)\mapsto\Big(\left(-\frac{1}{4}ayt+t\right)e^\epsilon,\left(-\frac{1}{4}axy+x\right)e^\epsilon,\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{8}x^2\right)ae^\epsilon\\
\qquad\qquad+ye^\epsilon,\left(\frac{3}{4}ayu+u\right)e^\epsilon\Big),\\
g_{13}:(t,x,y,u)\mapsto\Big(\left(-\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)ae^\epsilon+te^\epsilon,\left(-\frac{3}{2}atx+x\right)e^\epsilon,\\
\qquad\qquad(aty+y)e^\epsilon,\left(-\frac{1}{2}atu+u\right)e^\epsilon\Big),\\
g_{14}:(t,x,y,u)\mapsto\Big(\left(-\frac{3}{2}atx+t\right)e^\epsilon,\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}x^2\right)ae^\epsilon+xe^\epsilon,\\
\qquad\qquad(axy+y)e^\epsilon,\left(-\frac{1}{2}atu+u\right)e^\epsilon\Big),\\
g_{15}:(t,x,y,u)\mapsto(t,x,ye^{\epsilon a},ue^{\epsilon a}),\\
g_{16}:(t,x,y,u)\mapsto((-\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^{-\epsilon a}+(\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^{\epsilon a},x,(\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^{\epsilon a}-(-\frac{y}{2}+\frac{t}{2})e^{-\epsilon a},u),\\
g_{17}:(t,x,y,u)\mapsto(t,-y\sin(\epsilon a)+x\cos(\epsilon a),y\cos(\epsilon a)+x\sin(\epsilon a),u),\\
g_{18}:(t,x,y,u)\mapsto(t,x,y+\epsilon a,u),\\
g_{19}:(t,x,y,u)\mapsto(te^{\epsilon a},xe^{\epsilon a},y,ue^{\epsilon a}),\\
g_{20}:(t,x,y,u)\mapsto((-\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^{-\epsilon a}+(\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^{\epsilon a},(\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^{\epsilon a}-(-\frac{x}{2}+\frac{t}{2})e^{-\epsilon a},y,u),\\
g_{21}:(t,x,y,u)\mapsto(t+\epsilon a,x,y,u),\\
g_{22}:(t,x,y,u)\mapsto(t,x+\epsilon a,y,u).
\end{array}\right. \tag{۱۴۶.۳}
$$

۹.۳ تحلیل تقارنی لی معادلات دیفرانسیل کسری

تجزیه و تحلیل تقارن‌های گروه لی معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری نخستین بار توسط گازیزوف[۹] و همکارانش در مقاله [۲۸] به معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری توسیع داده شد. خواننده جهت آگاهی بیشتر در این خصوص می‌تواند به منابع [۱۴، ۱۵، ۲۴، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۵۷، ۶۰، ۹۶، ۱۰۴] رجوع نماید. لازم به ذکر است در اکثر مقالات مشتق در این

[۹] Gazizov

معادلات یکی از دو نوع ریمن_لیوویل و یا کاپوتو است. گازیزوف و همکارانش در [۲۸] مشتق معادلات دیفرانسیل کسری را از نوع ریمن_لیوویل در نظر گرفته و فرمول امتداد را برای یافتن تقارن‌های نقطه‌ای این معادلات یافته‌اند. آنچه در ادامه بیان خواهد شد تعمیمی از نظریه گروه تقارن لی به معادلات دیفرانسیل کسری است.

۱.۹.۳ تقارن‌های نقطه‌ای معادلات دیفرانسیل معمولی کسری

معادله FODE شامل یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x, y, {}_aD_x^{\alpha}y, {}_aD_x^{\alpha+1}y, \cdots) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \tag{۱۴۷.۳}$$

فرض کنید معادله (۱۴۷.۳) تحت یک گروه لی یک پارامتری (ε) از تبدیلات نقطه‌ای پیوسته

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{y}^{(n)}(\bar{x}) = y^{(n)}(x) + \varepsilon\eta^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad n \in N\\
&{}_aD_{\bar{x}}^{\alpha}\bar{y} = {}_aD_x^{\alpha}y + \varepsilon\eta^{(\alpha)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{۱۴۸.۳}$$

ناورداست که ξ و η بی‌نهایت کوچک‌ها و $\eta^{(n)}$ و $\eta^{(\alpha)}$ امتداد مرتبه n_ام و α_ام بی‌نهایت کوچک‌ها هستند. می‌دانیم که امتداد مرتبه n_ام η در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\eta^{(n)} = D(\eta^{(n-1)}) - y^{(n)}D(\xi),$$

که در آن D عملگر مشتق کامل است و با رابطه زیر داده می‌شود:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y} + y^{(2)}\frac{\partial}{\partial y^{(1)}} + \cdots$$

به طوریکه $y^{(n)}$ نمایانگر مشتق مرتبه n_ام y نسبت به x است. بسط $\eta^{(n)}$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\eta^{(n)} = D^n(\eta - \xi y^{(1)}) + \xi y^{(n+1)}. \tag{۱۴۹.۳}$$

چون حد پایین انتگرال در تعریف مشتق ریمن_لیوویل ثابت است، بنابر این آن نیز باید تحت تبدیلات (۱۴۸.۳) ناوردا باشد، چنین شرط ناوردایی نتیجه زیر را در پی دارد:

$$\xi(x,y)|_{x=a} = 0. \tag{۱۵۰.۳}$$

قضیه ۱.۹.۳. امتداد مرتبه α_ام ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) وابسته به مشتق کسری ریمن_لیوویل به صورت زیر است:

$$\eta^{(\alpha)} = {}_aD_x^{\alpha}(\eta - \xi y^{(1)}) + \xi\, {}_aD_x^{\alpha+1}y. \tag{۱۵۱.۳}$$

برهان. یادآوری می‌کنیم که قاعده لایبنیتز تعمیم یافته با رابطه

$$ {}_aD_x^\alpha\big(f(x)g(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_aD_x^{\alpha-n}f(x)g^{(n)}(x), \qquad \alpha>0, \tag{۱۵۲.۳}$$

بیان می‌شود که در آن داریم $\binom{\alpha}{n}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)}$. با استفاده از قاعده لایبنیتز تعمیم یافته برای $f=1$ و $g=y$ داریم:

$$ {}_aD_{\bar{x}}^\alpha\bar{y}(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{(\bar{x}-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\bar{y}^{(n)}(\bar{x}). \tag{۱۵۳.۳}$$

با بکارگیری رابطه (۱۵۳.۳) در رابطه (۱۴۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\eta^{(\alpha)} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[{}_aD_{\bar{x}}^\alpha\bar{y}(\bar{x})\right]_{\varepsilon=0} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{(x-a)^{n-\alpha}\eta^{(n)}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\xi\frac{(n-\alpha)(x-a)^{n-\alpha-1}y^{(n)}}{\Gamma(n-\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{۱۵۴.۳}$$

با جایگذاری رابطه (۱۴۹.۳) در رابطه (۱۵۴.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\eta^{(\alpha)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}D^n(\eta-\xi y^{(1)}(x)) + \sum_{n=0}^{\infty}\xi\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}y^{(n+1)}(x)\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\xi\binom{\alpha}{n}\frac{(n-\alpha)(x-a)^{n-\alpha-1}y^{(n)}}{\Gamma(n-\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{۱۵۵.۳}$$

به علاوه، با بکار بردن (۱۵۳.۳) در نخستین جمله و جایگزینی n با $n-1$ در دومین جمله و جایگذاری $n=0$ در سومین جمله از معادله (۱۵۵.۳) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\eta^{(\alpha)} &= {}_aD_x^\alpha(\eta-\xi y^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty}\xi\binom{\alpha}{n-1}\frac{(x-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}y^{(n)}(x)\\ &\quad-\xi\frac{\alpha(x-a)^{-\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}y(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\xi\binom{\alpha}{n}\frac{(n-\alpha)(x-a)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{۱۵۶.۳}$$

با استفاده از رابطهٔ $\binom{\alpha}{n-1}+\binom{\alpha}{n}=\binom{\alpha+1}{n}$ نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\eta^{(\alpha)} &= {}_aD_x^\alpha(\eta-\xi y^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty}\xi\binom{\alpha+1}{n}\frac{(x-a)^{n-\alpha-1}\xi y^{(n)}}{\Gamma(n-\alpha)}\\ &= {}_aD_x^\alpha(\eta-\xi y^{(1)}) + \xi\,{}_aD_x^{\alpha+1}y\\ &= {}_aD_x^\alpha(\eta) - {}_aD_x^\alpha\left(\xi y^{(1)}\right) + \xi\,{}_aD_x^{\alpha+1}y,\end{aligned} \tag{۱۵۷.۳}$$

که این همان فرمول امتداد مورد نظر است. توجه به این نکته ضروری است که زمانی که $\alpha=n$ فرمول امتداد با همان نمونه کلاسیک آن برای PDE ها یعنی (۱۴۹.۳) برابر است. □

لازم به ذکر است که فرمول (۱۵۷.۳) را می‌توان به شکل ساده‌تری که انجام محاسبات بی‌نهایت کوچک‌ها با آن راحت‌تر باشد، نیز نوشت. با استفاده از رابطه

$$ {}_aD_x^\alpha\left(y^{(1)}(x)\right) = {}_aD_x^{\alpha+1}y - \frac{(x-a)^{-\alpha-1}y(a)}{\Gamma(-\alpha)}, \tag{۱۵۸.۳}$$

که در منبع [۸۱] برای مشتق ریمن_لیوویل از مشتق مرتبهٔ صحیح یک تابع ارائه شده است، و نیز با توجه به رابطهٔ (۱۵۰.۳) و اینکه در رابطهٔ (۱۵۸.۳) داریم، $\xi(a)=0$، پس دومین جمله در طرف راست رابطهٔ (۱۵۷.۳) به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$ {}_aD_x^\alpha\left(\xi y^{(1)}(x)\right) = {}_aD_x^\alpha(D(\xi y) - yD\xi) = {}_aD_x^{\alpha+1}(\xi y) - {}_aD_x^\alpha(yD\xi) \tag{۱۵۹.۳} $$

و بنابر این:

$$ \eta^{(\alpha)} = {}_aD_x^\alpha(\eta) + {}_aD_x^\alpha(yD\xi) - {}_aD_x^{\alpha+1}(\xi y) + \xi {}_aD_x^{\alpha+1}y. \tag{۱۶۰.۳} $$

با بکارگیری قاعده لایبنیتز تعمیم یافته (۱۵۲.۳) در رابطهٔ (۱۶۰.۳) و همچنین استفاده از رابطهٔ $\binom{\alpha}{n}\binom{\alpha+1}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$ می‌توان نوشت:

$$ \begin{aligned} \eta^{(\alpha)} &= {}_aD_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} {}_aD_x^{\alpha-n} y D_x^{n+1}\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n} {}_aD_x^{\alpha+1-n} y D_x^{n}\xi \\ &= {}_aD_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} {}_aD_x^{\alpha-n} y D_x^{n+1}\xi + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n+1} {}_aD_x^{\alpha-n} y D_x^{n+1}\xi \\ &= {}_aD_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{n-\alpha}{n+1}\right) {}_aD_x^{\alpha-n} y D_x^{n+1}\xi. \end{aligned} \tag{۱۶۱.۳} $$

۲.۹.۳ تحلیل تقارن لی دستگاه دو معادله‌ای از ODEهای کسری

دستگاه دو معادله‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری با مشتق ریمن_لیوویل به صورت

$$ \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = f(t,u,v), \tag{۱۶۲.۳} $$
$$ \frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} = g(t,u,v), \tag{۱۶۳.۳} $$

با توابع دلخواه f و g در نظر بگیرید. فرض کنید معادلات (۱۶۲.۳) و (۱۶۳.۳) تحت گروه یک پارامتری (ε) از تبدیلات نقطه‌ای پیوسته

$$ \begin{aligned} \bar{t} &= t + \varepsilon\xi(t,u,v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \varepsilon\eta_u(t,u,v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{v} &= v + \varepsilon\eta_v(t,u,v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ {}_aD_{\bar{t}}^\alpha\bar{u} &= {}_aD_t^\alpha u + \varepsilon\eta_u^{(\alpha)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ {}_aD_{\bar{t}}^\alpha\bar{v} &= {}_aD_t^\alpha v + \varepsilon\eta_v^{(\alpha)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} $$

ناوردا باشند. در تبدیلات فوق $\eta_u^{(\alpha)}$ و $\eta_v^{(\alpha)}$ مولدهای بی‌نهایت کوچکی هستند که به فرم سری‌های زیر نوشته می‌شوند:

$$\eta_u^{(\alpha)} = {}_aD_t^\alpha(\eta_u) - \alpha D_t(\xi)\,{}_aD_t^\alpha(u) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\binom{n-\alpha}{n+1}\,{}_aD_t^{\alpha-n}(u)D_t^{n+1}(\xi),$$
$$\eta_v^{(\alpha)} = {}_aD_t^\alpha(\eta_v) - \alpha D_t(\xi)\,{}_aD_t^\alpha(v) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\binom{n-\alpha}{n+1}\,{}_aD_t^{\alpha-n}(v)D_t^{n+1}(\xi).$$

مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}$ را به صورت

$$\mathbf{v} = \xi(t,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta_u(t,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_v(t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}, \tag{۱۶۴.۳}$$

در نظر می‌گیریم. معادلات مشخصه برای یافتن ضرایب عملگر بی‌نهایت کوچک (۱۶۴.۳) از تبدیلات هم‌ارزی از معادلات زیر نتیجه می‌شوند:

$$\left(\eta_u^{(\alpha)} - \xi\frac{\partial f}{\partial t} - \eta_u\frac{\partial f}{\partial u} - \eta_v\frac{\partial f}{\partial v}\right)\Big|_{\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha}=f(t,u,v),\,\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha}=g(t,u,v)} = 0,$$
$$\left(\eta_v^{(\alpha)} - \xi\frac{\partial g}{\partial t} - \eta_u\frac{\partial g}{\partial u} - \eta_v\frac{\partial g}{\partial v}\right)\Big|_{\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha}=f(t,u,v),\,\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha}=g(t,u,v)} = 0.$$

با حل معادلات مشخصه فوق تقارن‌های نقطه‌ای دستگاه دو معادله‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری به دست خواهد آمد [۷۹].

مثال ۱.۹.۳. به عنوان مثال معادله کسری ریکاتی[۱۰] با مشتق کسری ریمن–لیوویل به فرم

$${}_aD_x^\alpha y(x) = Ay^2 + By + C, \quad x > 0, \quad \alpha \in (0,1), \tag{۱۶۵.۳}$$

با توابع دلخواه A، B و C از x در نظر بگیرید. فرض کنیم معادله ریکاتی تحت یک گروه یک‌ـپارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بی‌نهایت کوچک (۱۴۸.۳) ناورداست [۷۹]. بنابراین معادله ناوردایی به صورت

$$\eta^{(\alpha)} = \xi\left[\frac{dA}{dx}y^2 + \frac{dB}{dx}y + \frac{dC}{dx}\right] + \eta(2Ay + B), \tag{۱۶۶.۳}$$

خواهد بود که $y(x)$ در معادله‌ی (۱۶۵.۳) صدق می‌کند. با جایگذاری بسط $\eta^{(\alpha)}$ ارائه شده در (۱۶۱.۳)، در معادله (۱۶۶.۳) به رابطهٔ زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}{}_aD_x^\alpha(\eta) &+ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\binom{n-\alpha}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}\,{}_aD_x^{\alpha-n}y\\ &= \eta(2Ay + B) + \xi\left[\frac{dA}{dx}y^2 + \frac{dB}{dx}y + \frac{dC}{dx}\right],\end{aligned} \tag{۱۶۷.۳}$$

که به طور کلی برای مولدهای بی‌نهایت کوچک $\xi(x,y)$ و $\eta(x,y)$ قابل حل نیست. به منظور حل (۱۶۷.۳)، فرض می‌کنیم مولدهای بی‌نهایت کوچک به فرم زیر باشند:

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = p(x)y + q(x),$$

[۱۰] Riccati

که $p(x)$ و $q(x)$ توابع دلخواه نامعلومی هستند که تعیین خواهند شد. با جایگذاری روابط فوق در معادله (۱۶۷.۳) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&{}_aD_x^\alpha q(x) + \left[p(x) - \alpha\frac{d\xi}{dx}\right] {}_aD_x^\alpha y + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left[\frac{d^n p}{dx^n} + \binom{n-\alpha}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}\right] {}_aD_x^{\alpha-n} y \\
&= [p(x)y + q(x)](2Ay + B) + \xi\left[\frac{dA}{dx}y^2 + \frac{dB}{dx}y + \frac{dC}{dx}\right].
\end{aligned}
$$

با بکارگیری معادله ریکاتی در رابطه فوق داریم:

$$
\begin{aligned}
&{}_aD_x^\alpha q(x) - \alpha\frac{d\xi}{dx}Ay^2 - \alpha\frac{d\xi}{dx}By + \left[p(x) - \alpha\frac{d\xi}{dx}\right]C \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left[\frac{d^n p}{dx^n} + \binom{n-\alpha}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}\right] {}_aD_x^{\alpha-n} y \\
&= Ap(x)y^2 + 2Aq(x)y + Bq(x) + \xi\left[\frac{dA}{dx}y^2 + \frac{dB}{dx}y + \frac{dC}{dx}\right].
\end{aligned}
$$

به وضوح معادله فوق به دستگاه فرا معین زیر از معادلات مشخصه شکافته خواهد شد:

$$A\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{\alpha}\frac{dA}{dx}\xi = \frac{p(x)}{\alpha}A, \tag{۱۶۸.۳}$$

$$B\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{\alpha}\frac{dB}{dx}\xi = -2\frac{q(x)}{\alpha}A, \tag{۱۶۹.۳}$$

$$C\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{\alpha}\frac{dC}{dx}\xi = \frac{1}{\alpha}[p(x)C - {}_0D_x^\alpha q(x) - Bq(x)], \tag{۱۷۰.۳}$$

$$\frac{d^n p}{dx^n} + \binom{n-\alpha}{n+1}\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{۱۷۱.۳}$$

معادله (۱۷۱.۳) با توجه به $\xi(0) = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$\xi(x) = cx^{n+1}, \quad p(x) = c(\alpha - n)x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

به طوریکه c ثابت دلخواه است. از معادله (۱۶۸.۳) خواهیم داشت:

$$A(x) = k_1 x^{n(1-\alpha)-2\alpha},$$

که k_1 نیز ثابت دلخواه است. از معادلات (۱۶۹.۳) و (۱۷۰.۳) می‌توان نتیجه گرفت که $q(x) = 0$ یا $q(x) \neq 0$. به یاد داشته باشید زمانی که $q(x) = 0$ آنگاه $B(x)$ و $C(x)$ با ثوابت دلخواه k_1 و k_2 به فرم زیر خواهند بود:

$$B(x) = k_2 x^{-(n+1)\alpha}, \quad C(x) = k_3 x^{-n(\alpha+1)}.$$

بنابر این معادله ریکاتی با صورت کلی:

$$ {}_aD_x^\alpha y = x^{-n\alpha}\left[k_1 x^{n-2\alpha}y^2 + k_2 x^{-\alpha}y + k_3 x^{-n}\right], \tag{۱۷۲.۳}$$

تحت گروه تبدیلات

$$\bar{x} = x + \varepsilon c x^{n+1},$$
$$\bar{y} = y + \varepsilon c(\alpha - n)x^n y,$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = x^{n+1}\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha - n)x^n y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

ناوردا می‌باشد.

۱۰.۳ تقارن‌های نقطه‌ای لی معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری

در این بخش جزئیاتی درباره تحلیل تقارن لی برای معادلات دیفرانسیل کسری با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته را ارائه خواهیم کرد. معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\partial_t^\alpha u = F(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots), \qquad \Delta = \partial_t^\alpha u - F, \tag{۱۷۳.۳}$$

که در آن t, x متغیر مستقل و u متغیر وابسته بوده $u_x, u_{xx}\cdots$ مشتقات جزیی u نسبت به x و $\partial_t^\alpha u$ نماد مشتق کسری u نسبت به زمان می‌باشد.

فرض کنیم G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و $\mathbf{v}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، همچنین $\mathcal{O}$ یک زیرمجموعه باز از $E = X \times U$ و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه یک‌ـپارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ باشد. امتداد مرتبه (α, n)ـام $\mathbf{v}$ را با $\mathbf{v}^{(\alpha,n)}$ نشان می‌دهیم، که یک میدان برداری روی فضای جت مرتبه (α, n)ـام بوده و به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک‌ـپارامتری $\left[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\right]^{(\alpha,n)}$ می‌گویند. بدین معنا که:

$$\mathbf{v}^{(\alpha,n)}\Big|_{(x,u^{(n)})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\right]^{(\alpha,n)}(x, u^{(n)}), \tag{۱۷۴.۳}$$

با این تعاریف مقدماتی، فرض کنیم G به عنوان یک گروه یک پارامتری لی با پارامتر ε از تبدیلات بی نهایت کوچک به صورت زیر داده شده باشد:

$$\bar{t} = \varphi(t, x, u, \varepsilon), \qquad \bar{x} = \psi(t, x, u, \varepsilon), \qquad \bar{u} = \pi(t, x, u, \varepsilon). \tag{۱۷۵.۳}$$

بر طبق نظریه گروه‌های لی، ساختن گروه تقارن G با تعیین تبدیلات بی نهایت کوچک آن هم

ارز است پس داریم:

$$
\begin{aligned}
&\bar{t} = t + \varepsilon\tau(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{x} = x + \varepsilon\xi(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{u} = u + \varepsilon\eta(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{u}^{\alpha}_{\bar{t}} = u^{\alpha}_{t} + \varepsilon\eta^{\alpha,t}(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{u}_{\bar{x}} = u_x + \varepsilon\eta^{x}(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = u_{xx} + \varepsilon\eta^{xx}(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = u_{xxx} + \varepsilon\eta^{xxx}(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{۱۷۶.۳}
$$

جبرلی وابسته به گروه (۱۷۶.۳) توسط میدان برداری

$$
\mathbf{v} = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۱۷۷.۳}
$$

تولید می‌شود که مؤلفه های آن از روابط

$$
\frac{d\bar{t}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \tau(t,x,u), \qquad \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \xi(t,x,u), \qquad \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \zeta(t,x,u), \tag{۱۷۸.۳}
$$

محاسبه می‌شوند. مطابق با محک بی‌نهایت کوچک، معادله (۱۷۳.۳) گروه تبدیلات (۱۷۶.۳) را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر اثر مولد امتداد یافته (مرتبه امتداد بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله است.) روی معادله (۱۷۳.۳) روی منیفلد جوابهای آن صفر شود. به عبارت دیگر

$$
\mathbf{v}^{(\alpha,n)}(\Delta)\big|_{\Delta=0} = 0, \qquad \alpha \in (0,1). \tag{۱۷۹.۳}
$$

امتداد مرتبه (α,n) میدان برداری $\mathbf{v}$ برابر است با

$$
\mathbf{v}^{(\alpha,n)} = \mathbf{v} + \eta^{\alpha,t}\partial_{\partial^{\alpha}_{t}u} + \eta^{x}\partial_{u_x} + \eta^{xx}\partial_{u_{xx}} + \eta^{xxx}\partial_{u_{xxx}} + \eta^{xxxx}\partial_{u_{xxxx}} + \cdots, \tag{۱۸۰.۳}
$$

که ضرایب امتداد η^{x} ، η^{xx}، η^{xxx} و... با فرمول‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\eta^{x} = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\
&\eta^{xx} = D_x(\eta^{x}) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi),\\
&\eta^{xxx} = D_x(\eta^{xx}) - u_{txx} D_x(\tau) - u_{xxx} D_x(\xi),\\
&\eta^{xxxx} = D_x(\eta^{xxx}) - u_{txxx} D_x(\tau) - u_{xxxx} D_x(\xi),\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{۱۸۱.۳}
$$

نمادهای D_t و D_x بیان کننده مشتق کلی نسبت به t و x هستند و با روابط زیر ارائه می‌شوند:

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{xt}\partial_{u_x} + \cdots ,$$
$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \cdots .$$

ضریب $\eta^{\alpha,t}$ در اپراتور (۱۸۰.۳) با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\eta^{\alpha,t} = D_t^{\alpha}(\eta) + \xi D_t^{\alpha}(u_x) - D_t^{\alpha}(\xi u_x) + D_t^{\alpha}(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u).$$

با استفاده از قاعده لایبنیتز تعمیم‌یافته که با فرمول زیر داده می‌شود:

$$D_t^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n f(t) D_t^{\alpha-n} g(t),$$

که در آن

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1-n)}, \qquad D_t^0 f(t) = f(t), \qquad D_t^{n+1} f(t) = D_t(D_t^n f(t)),$$

تساوی‌های زیر به دست خواهد آمد:

$$\xi D_t^{\alpha}(u_x) - D_t^{\alpha}(\xi u_x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x),$$

و

$$D_t^{\alpha}(uD_t(\tau)) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u) = -\alpha D_t(\tau) D_t^{\alpha} u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n}(u).$$

در نتیجه داریم:

$$\eta^{\alpha,t} = D_t^{\alpha}(\eta) - \alpha D_t(\tau) D_t^{\alpha} u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n}(u).$$

قاعده زنجیری تعمیم‌یافته برای تابع ترکیب به فرم زیر است

$$\frac{d^{\alpha} f(g(t))}{dt^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n}|_{z=g(t)},$$

که در آن U_n با عبارت

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k(t) \partial_t^{\alpha}(g^{n-k}(t)),$$

ارائه می‌شود. بعد از انجام این محاسبات به عبارت صریحی برای دیفرانسیل کسری خواهیم رسید:

$$D_t^{\alpha} = \partial_t^{\alpha} \eta + \eta_u \partial_t^{\alpha} u - u \partial_t^{\alpha} \eta_u + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_u \partial_t^{\alpha-n} u + \mu,$$

و μ در رابطه بالا از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\mu=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{l}\frac{t^{n-\alpha}}{k!\Gamma(n+1-\alpha)}(-u)^{l}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}}(u^{k-l})\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial t^{n-m}\partial u^{k}}.$$

توجه به این نکته ضروری است که اگر η نسبت به متغیر وابسته u خطی باشد آنگاه μ برابر صفر است و دلیل آن وجود مشتق $\frac{\partial^k \eta}{\partial u^k}, k\geq 2$ در رابطه μ است. در نهایت با خلاصه کردن استدلال‌های آورده شده به فرمول صریح زیر برای $\eta^{\alpha,t}$ خواهیم رسید

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha,t}=&\sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n}\partial_t^n\eta_u-\binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)\right]\partial_t^{\alpha-n}u-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^n(\xi)\partial_t^{\alpha-n}(u_x)\\&+\partial_t^{\alpha}\eta+(\eta_u-\alpha D_t(\tau))\partial_t^{\alpha}u-u\partial_t^{\alpha}\eta_u+\mu.\end{aligned}\tag{۱۸۲.۳}$$

برای مشخص کردن تقارن‌های پذیرفته شده توسط معادله (۱۷۳.۳)، عملگر دیفرانسیلی $\mathbf{v}^{(\alpha,n)}$ را روی معادله (۱۷۳.۳) اثر داده و سپس روابط به دست آمده را بر حسب متغیرهای وابسته و مشتقات آنها دسته‌بندی کرده و ضرایب آنها را برابر صفر قرار می‌دهیم. آنچه در نتیجه این اعمال به دست آورده ایم دسته‌ای از معادلات مشخص از نوع PDEها و FDE ها هستند. با حل این معادلات مشخصه به تقارنهای معادله مورد بحث خواهیم رسید.

مثال ۱.۱۰.۳. معادله کسری برگر تعمیم‌یافته

$$\partial_t^{\alpha}u=u_{xx}+Au^pu_x,\tag{۱۸۳.۳}$$

را در نظر می‌گیریم [۹۶]. با قراردادن $\alpha=1$ و $p=1$ معادله فوق به معادله برگر شناخته شده تبدیل می‌شود. قصد داریم تقارن‌های این معادله کسری را با روش بیان شده در این بخش بیابیم. با استفاده از رابطه (۱۷۹.۳) محک ناوردایی برای معادله کسری برگر به صورت

$$\left(\eta^{(\alpha,t)}-\eta^{xx}-Au^p\eta^x-p\eta u^{p-1}u_x\right)\Big|_{(۱۸۳.۳)}=0,\tag{۱۸۴.۳}$$

خواهد بود. با جایگزین کردن جملات $\eta^{(\alpha,t)},\eta^{xx},\eta^x$ از روابط (۱۸۱.۳) و (۱۸۲.۳) درمی‌یابیم که معادله فوق به $u_x,u_{xx},u_{xt},u_t,\cdots$ و $D_t^{\alpha-n}u, D_t^{\alpha-n}u_x$ برای $n=1,2,\cdots$ بستگی دارد. با برابر صفر قراردادن توانهای مختلف از مشتقات u به یک سیستم فرامعین از معادلات خطی کسری و غیر کسری خواهیم رسید. این معادلات از این قرارند:

$$\begin{aligned}&\xi_u=\xi_t=\tau_u=\tau_x=\eta_{uu}=0,\\&\binom{\alpha}{n}\partial_t^n(\eta_u)-\binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)=0\quad n=1,2,\cdots,\\&\xi''(x)-Au^p\alpha\tau'(t)-2\eta_{xu}+Au^p\xi'(x)-Ap\eta u^{p-1}=0,\\&2\xi'(x)-\alpha\tau'(t)=0,\quad \partial_t^{\alpha}(\eta)-u\partial_t^{\alpha}(\eta_u)-\eta_{xx}-Au^p\eta_x=0.\end{aligned}\tag{۱۸۵.۳}$$

در نتیجه با حل این دستگاه توابع ξ,τ و η به صورت

$$\xi=C_0x+C_1,\qquad \tau=\frac{2C_0t}{\alpha},\qquad \eta=\frac{-C_0u}{p},\tag{۱۸۶.۳}$$

با ثوابت دلخواه C_0 و C_1 به دست می‌آیند. پس مولدهای بی‌نهایت کوچک برای معادله (۱۸۳.۳) عبارتند از:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{u}{p}\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۱۸۷.۳}$$

هریک از این مولدهای بی‌نهایت کوچک، مولد یک گروه یک‌ـپارامتری به شرح زیر است

$$G_1 : (x+\varepsilon, t, u),$$
$$G_2 : (xe^{\varepsilon}, te^{\frac{2}{\alpha}\varepsilon}, ue^{\frac{1}{p}\varepsilon}).$$

یعنی اگر $u(x,t)$ جوابی از معادله برگر باشد آنگاه تبدیل یافته این جواب تحت این گروه تبدیلات یعنی $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{t})$ نیز جوابی برای این معادله می‌باشد.

برای معادله‌ای که به جای مشتق ریمن‌ـلیوویل شامل مشتق کاپوتو نیز باشد با بسط تبدیلات بی‌نهایت کوچک به مشتق کسری کاپوتو داریم:

$${}^{C}\bar{u}_t^{\alpha} = {}^{C}u_t^{\alpha} + \varepsilon\, {}^{C}\eta^{\alpha,t}(t,x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۱۸۸.۳}$$

و فرمول امتداد در آن به صورت زیر است:

$${}^{C}\eta^{\alpha,t} = {}^{C}D_t^{\alpha}(\eta) + \xi\, {}^{C}D_t^{\alpha}(u_x) - {}^{C}D_t^{\alpha}(\xi u_x) + \tau D_t^{\alpha}(u_t) - D_t^{\alpha}(\tau u_t). \tag{۱۸۹.۳}$$

مثال ۲.۱۰.۳. معادله کسری بنی‌ـلین[۱۱] یک FPDE مرتبه پنجم به صورت

$$u_t^{\alpha} + uu_x + u_{xxx} + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma u_{xxxxx} + u_x = 0, \tag{۱۹۰.۳}$$
$$0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

است [۸۷]. هدف این مثال توسیع روش آنالیز گروه لی در معادلات دیفرانسیل کسری به چهار حالت متفاوت از مشتقات برای معادله بنی‌ـلین است. برای $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ معادله (۱۹۰.۳) به معادله کاواهارا[۱۲]

$$u_t + \lambda uu_x + \mu u_{xxx} + \gamma u_{xxxxx} = 0, \tag{۱۹۱.۳}$$

تبدیل می‌شود که برای ثوابت دلخواه λ, μ و γ، امواج آب با کشش سطحی را توصیف می‌کند. برای $\lambda = 0$ معادله کاواهارا به معادله KdV مرتبه پنجم تبدیل می‌شود. در حالتی دیگر برای $\alpha = 1$، $\gamma = 0$ و $\beta = 1$ معادله (۱۹۰.۳) به معادله کاروموتوـسیواشینسکی[۱۳]

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \tag{۱۹۲.۳}$$

تبدیل می‌شود که توصیف کننده امواج در غشاء نازک از مایعی در حال سقوط است. هدف ما در این مثال فرمول بندی تعمیم‌های زمان‌ـکسری معادله بنی‌ـلین و نیز محاسبه گروه‌های

[۱۱] Benny-Lin
[۱۲] Kawahara
[۱۳] Kuramoto-Sivashinsky

تقارن آنهاست. تحت این فرض‌ها تعمیم‌های معادله کسری بنی_لین نسبت به زمان به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$u_t = -J_t^{\alpha}(uu_x + u_{xxx} + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma u_{xxxxx} + u_x), \tag{۱۹۳.۳}$$

$$u_t = -D_t^{1-\alpha}(uu_x + u_{xxx} + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma u_{xxxxx} + u_x), \tag{۱۹۴.۳}$$

$$\begin{aligned} u_t = &-((J_t^{\alpha}u)(J_t^{\alpha}u_x) + J_t^{\alpha}u_{xxx} + \beta(J_t^{\alpha}u_{xx} + J_t^{\alpha}u_{xxxx}) \\ &+\gamma J_t^{\alpha}u_{xxxxx} + J_t^{\alpha}u_x)), \end{aligned} \tag{۱۹۵.۳}$$

$$\begin{aligned} u_t = &-((D_t^{1-\alpha}u)(D_t^{1-\alpha}u_x) + D_t^{1-\alpha}u_{xxx} + \beta(D_t^{1-\alpha}u_{xx} + D_t^{1-\alpha}u_{xxxx}) \\ &+\gamma D_t^{1-\alpha}u_{xxxxx} + D_t^{1-\alpha}u_x). \end{aligned} \tag{۱۹۶.۳}$$

که در آنها J_t^{α} و $D_t^{1-\alpha}$ به ترتیب انتگرال چپ ریمن_لیوویل و مشتق چپ کسری از نوع ریمن_لیوویل از مرتبه $1-\alpha$ نسبت به زمان هستند. معادلات فوق را می‌توان به گونه‌ای بازنویسی کرد که در آن سمت راست آنها دقیقا سمت راست معادله کلاسیک بنی_لین باشد. در حقیقت با عمل کردن عملگر D_t^{α} روی دو سمت معادله (۱۹۳.۳) و جایگذاری متغیر مستقل v به جای u و نیز بهره‌گیری از ویژگی‌های مشتق ریمن_لیوویل به معادله زیر خواهیم رسید:

$$D_t^{\alpha}v_t = -(vv_x + v_{xxx} + \beta(v_{xx} + v_{xxxx}) + \gamma v_{xxxxx} + v_x). \tag{۱۹۷.۳}$$

با این روش معادله (۱۹۴.۳) نیز به صورت

$$u_t = -D_tJ_t^{\alpha}(uu_x + u_{xxx} + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma u_{xxxxx} + u_x),$$

تبدیل می‌شود. با انتگرال گیری از دو طرف معادله نسبت به t داریم:

$$u(t,x) - u(0,x) = -J_t^{\alpha}(uu_x + u_{xxx} + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma u_{xxxxx} + u_x).$$

حال مانند قبل عملگر مشتق کاپوتو ${}^{C}D_t^{\alpha}$ را بر روی دو طرف معادله بالا اعمال می‌نماییم. بعد از جایگزینی u با v داریم:

$${}^{C}D_t^{\alpha}v = -(vv_x + v_{xxx} + \beta(v_{xx} + v_{xxxx}) + \gamma v_{xxxxx} + v_x). \tag{۱۹۸.۳}$$

در معادله (۱۹۵.۳) یک متغیر را به صورت $v = J_t^{\alpha}u$ معرفی می‌کنیم. در این صورت واضح است که $D_t^{\alpha}v = u$ پس معادله (۱۹۵.۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$D_t^{1+\alpha}v = -(vv_x + v_{xxx} + \beta(v_{xx} + v_{xxxx}) + \gamma v_{xxxxx} + v_x). \tag{۱۹۹.۳}$$

سرانجام در معادله (۱۹۶.۳) تغییر متغیر می‌دهیم و متغیر وابسته آن را به صورت $u = J_t^{1-\alpha}v$ معرفی می‌کنیم. چون $D_t^{1-\alpha}J_t^{1-\alpha}v = v$ و نیز $u_t = D_tJ_t^{1-\alpha}v = D_t^{\alpha}v$ پس این معادله می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$D_t^{\alpha}v = -(vv_x + v_{xxx} + \beta(v_{xx} + v_{xxxx}) + \gamma v_{xxxxx} + v_x). \tag{۲۰۰.۳}$$

درنتیجه ما به چهار تعمیم (۲۰۰.۳)_(۱۹۷.۳) متفاوت از معادله کسری بنی_لین خواهیم رسید. به خاطر داشته باشید که در معادلات (۱۹۸.۳) و (۲۰۰.۳) مرتبه مشتق کسری یکی کمتر خواهد بود و این معادلات با قرار دادن $\alpha = 1$ به معادله کلاسیک بنی_لین تبدیل می‌شوند. مرتبه مشتق کسری در معادلات (۱۹۷.۳) و (۱۹۹.۳) بین بازه $(1, 2)$ خواهد بود و با قرار دادن $\alpha = 0$ به معادله کلاسیک بنی_لین تبدیل می‌شوند. با این توضیحات می‌توان معادلات (۲۰۰.۳)_(۱۹۷.۳) را به فرم کلی زیر بازنویسی کرد:

$$F(t, x, u, D_t^{\chi(\alpha)}u, u_x, \cdots, u_{xxxxx}) \equiv D_t^{\chi(\alpha)}u + uu_x + u_{xxx} + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma u_{xxxxx} + u_x. \quad (۲۰۱.۳)$$

در اینجا هر یک از انواع عملگرهای کسری در (۲۰۰.۳)_(۱۹۷.۳) را با $D_t^{\chi(\alpha)}$ نشان می‌دهیم. حال تقارن‌های این معادلات را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید که معادله (۲۰۱.۳) تحت گروه یک پارامتری (ϵ)

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t + \epsilon\tau(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{x} &= x + \epsilon\xi(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u} &= u + \epsilon\eta(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u}_{\bar{t}}^{\alpha} &= u_t^{\alpha} + \epsilon\eta_{\alpha}^{0}(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u}_{\bar{x}} &= u_x + \epsilon\eta_1^1(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &= u_{xx} + \epsilon\eta_2^1(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} &= u_{xxx} + \epsilon\eta_3^1(t, x, u) + O(\epsilon^2),\\
&\vdots
\end{aligned} \quad (۲۰۲.۳)$$

ناورداست. به طوریکه ξ، τ ضرایب بی‌نهایت کوچک و η_1^1، η_2^1، η_3^1 و η_{α}^0 مولد های از مرتبه ۱، ۲، ۳ و α هستند. جبرلی وابسته به این تقارن‌ها مجموعه میدان‌های برداری به فرم زیر است:

$$\mathbf{v} = \tau(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \quad (۲۰۳.۳)$$

اگر این میدان برداری یک تقارن برای معادله(۲۰۱.۳) تولید کند سپس باید در شرط ناوردایی زیر صدق کند؛

$$\mathbf{v}^{(\alpha,5)}\mathbf{v}(F(t, x, u, \mathcal{D}_t^{\gamma(\alpha)}u, u_x, \cdots, u_{xxxxx}))\Big|_{(F=0)} = 0, \quad (۲۰۴.۳)$$

که امتداد مولد (۲۰۳.۳) برای معادله (۲۰۱.۳) به صورت زیر است:

$$\mathbf{v}^{(\alpha,5)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_{\alpha}^{0}\frac{\partial}{\partial(\mathcal{D}_t^{\gamma(\alpha)}u)} + \eta_1^1\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_2^1\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_3^1\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta_4^1\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \eta_5^1\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}, \quad (۲۰۵.۳)$$

همچنین η_1^1، η_2^1 و η_5^1 عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\eta_1^1 &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi)\\
\eta_2^1 &= D_x(\eta_1^1) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi)\\
\eta_3^1 &= D_x(\eta_2^1) - u_{txx} D_x(\tau) - u_{xxx} D_x(\xi)\\
\eta_4^1 &= D_x(\eta_3^1) - u_{txxx} D_x(\tau) - u_{xxxx} D_x(\xi)\\
\eta_5^1 &= D_x(\eta_4^1) - u_{txxxx} D_x(\tau) - u_{xxxxx} D_x(\xi).
\end{aligned}$$
(۲۰۶.۳)

به عنوان مثال فرمول امتداد برای η_5^1 به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\eta_5^1 = D_x(\eta_4^1) &- u_{txxxx} D_x(\tau) - u_{xxxxx} D_x(\xi)\\
&-30\tau_{xxuu}u_t u_x u_{xx} - 30\tau_{xuuu}u_t u_{xx}{u_x}^2 - 60\tau_{xuu}u_x u_{tx}u_{xx} - 20\tau_{xuu}u_x u_t u_{xxx}\\
&-10\tau_{uuuu}u_t u_{xx}{u_x}^3 - 30\tau_{uuu}u_{tx}u_{xx}{u_x}^2 - 10\tau_{uuu}u_t u_{xxx}{u_x}^2 - 5u\tau_{uu}u_x u_t u_{xxxx}\\
&-20\tau_{uu}u_x u_{tx}u_{xxx} - 15\tau_{uuu}u_x u_t {u_{xx}}^2 - 30\tau_{uu}u_x u_{xx}u_{txx} - 60\xi_{uu}u_x u_{xx}u_{xxx}\\
&-10\tau_{uu}u_t u_{xx}u_{xxx} + 5\eta_{xuuuu}{u_x}^4 - \xi_{xuuuu}{u_x}^5 + 15\eta_{xuu}{u_{xx}}^2 - 10\tau_{xx}u_{txxx}\\
&+5\eta_{xu}u_{xxxx} - 10\xi_{xx}u_{xxxx} + 10\eta_{xxu}u_{xxx} - 10\xi_{xxx}u_{xxx} - 10\xi_{xxxuu}{u_x}^3\\
&-5\xi_{xxxxu}{u_x}^2 + 10\eta_{xxxuu}{u_x}^2 + 5\eta_{xxxxu}u_x - \tau_{xxxxx}u_t - \xi_{xxxxx}u_x\\
&-5\tau_{xxxx}u_{t,x} - 5\xi_{xxxx}u_{xx} - 10\xi_{xxuuu}{u_x}^4 + 10\eta_{xxuuu}{u_x}^3 - 30\xi_{xxu}{u_{xx}}^2\\
&+\eta_{uuuuu}{u_x}^5 - \xi_{uuuuu}{u_x}^6 - 15\xi_{uu}{u_{xx}}^3 - 10\xi_u{u_{xxx}}^2 - 5\tau_x u_{txxxx}\\
&-5\xi_x u_{xxxxx} - 50\xi_{xuuu}u_{xx}{u_x}^3 + 30\eta_{xuuu}u_{xx}{u_x}^2 - 30\tau_{xuu}u_{txx}{u_x}^2\\
&-30\xi_{xxxu}u_x u_{xx} - 10\tau_{xxuuu}u_t{u_x}^3 - 30\tau_{xxuu}u_{tx}{u_x}^2 - 60\xi_{xxuu}u_{xx}{u_x}^2\\
&-30\tau_{xxu}u_{tx}u_{xx} - 30\tau_{xxu}u_x u_{txx} - 10\tau_{xxu}u_t u_{xxx} - 40\xi_{xxu}u_x u_{xxx}\\
&-5\tau_{xxxxu}u_t u_x - 10\tau_{xxxu}u_t u_{xx} - 20\tau_{xxxu}u_x u_{tx} - 45\xi_{uuu}{u_x}^2{u_{xx}}^2\\
&-5\tau_{uuuu}{u_x}^4 u_{tx} - 15tau_{uu}u_{tx}{u_{x,x}}^2 + 10\eta_{uu}u_{xx}u_{xxx} - 10\tau_u u_{xx}u_{txxx}\\
&-15\xi_u u_{xx}u_{xxxx} - 5\tau_u u_{tx}u_{xxxx} - 10\tau_u u_{txx}u_{xxx} - 5\tau_u u_x u_{txxxx}\\
&-\tau_u u_t u_{xxxxx} - 6\xi_u u_x u_{xxxxx} + 5\eta_{uu}u_x u_{xxxx} + 15\eta_{uuu}u_x{u_{xx}}^2\\
&-15\xi_{uuuu}{u_x}^4 u_{x,x} + 10\eta_{uuuu}{u_x}^3 u_{xx} - 10\tau_{uuu}{u_x}^3 u_{txx} - 20\xi_{uuu}{u_x}^3 u_{xxx}\\
&+10\eta_{uuu}{u_x}^2 u_{xxx} - 15\xi_{uu}{u_x}^2 u_{xxxx} - 10\tau_{uu}{u_x}^2 u_{txxx} - 20\tau_{xu}u_{tx}u_{xxx}\\
&-15\tau_{xuu}u_t{u_{xx}}^2 - 30\tau_{xu}u_{xx}u_{txx} - 50\xi_{xu}u_{x,x}u_{xxx} - 20\tau_{xu}u_x u_{txxx}\\
&-5\tau_{xu}u_t u_{xxxx} - 25\xi_{xu}u_x u_{xxxx} + 20\eta_{xxu}u_x u_{xxx} - 75\xi_{xuu}u_x{u_{xx}}^2 + 10\eta_{xxxu}u_{xx}\\
&-5\tau_{xuuuu}u_t{u_x}^4 - 20\tau_{xuuu}{u_x}^3 u_{tx} - 50\xi_{xuu}u_{xxx}{u_x}^2 + 30\eta_{xxuu}u_x u_{xx} + \eta_{xxxxx}\\
&-10\tau_{xxxuu}u_t{u_x}^2 - 10\tau_{xxx}u_{txx} + \eta_u u_{xxxxx} - \tau_{uuuuu}u_t{u_x}^5.
\end{aligned}$$
(۲۰۷.۳)

بنابراین محک ناوردایی برای معادله (۲۰۱.۳) عبارتست از:

$$\left(\eta_\alpha^0 + \eta u_x + \eta_1^1 u + \eta_3^1 + \beta(\eta_2^1 + \eta_4^1) + \gamma\eta_5^1 + \eta_1^1\right)\big|_{F=0} = 0. \tag{۲۰۸.۳}$$

حال با جایگذاری مقادیر η_1^1، η_2^1، η_3^1 و η_5^1 از رابطه‌های فوق و نیز برابر صفر قراردادن توان‌های مشتق u با صفر و نیز حل دستگاه‌های معادلات مشخصه درمی‌یابیم که معادلات (۲۰۰.۳)_(۱۹۷.۳) دارای تقارن نقطه‌ای زیر هستند:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{۲۰۹.۳}$$

معادله (۲۰۱.۳) بدون جمله u_x و با $\beta = 0$ به همان معادله کاواهارا تبدیل می‌شود و دارای تقارن نقطه‌ای زیر است:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{۲۱۰.۳}$$

معادله (۲۰۱.۳) با $\beta = 0$ و صفر در نظر گرفتن ضرایب uu_x و u_x به معادله KdV مرتبه پنجم تبدیل می‌شود و تقارن‌های زیر را می‌پذیرد:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_3 = g(t,x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۲۱۱.۳}$$

که در اینجا $g = g(t,x)$ هر جواب دلخواهی از معادله $D_t^{\chi(\alpha)} g = g_{xxx} + \gamma g_{xxxxx}$ است. معادله (۲۰۱.۳) با $\beta = 1$، $\gamma = 0$ و حذف u_x و u_{xxx} به معادله کاروموتو_سیواشینسکی و مشابه با معادله کاواهارا تقارن زیر را دارد:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{۲۱۲.۳}$$

معادله (۲۰۱.۳) با $\gamma = 0$ و نیز صفر کردن ضرایب u_{xxx} و u_{xxxx} به معادله نویر_استوکس تبدیل می‌شود و تقارن‌های زیر را برای آن نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۲۱۳.۳}$$

۱۱.۳ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل_انتگرال

یک سیستم معادلات دیفرانسیل_انتگرال (IDEs) را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$W\left(F(x,y,y_1,\cdots,y_m), \int_X f(x,y,y_1,\cdots,y_k)dx^1\cdots dx^l\right) = 0, \tag{۲۱۴.۳}$$

که n,m,k,l اعداد طبیعی دلخواه هستند و $l \le n$ و $x = (x^1,\cdots,x^n)$ توابع W,F و f دلخواه و منظم هستند تا وجود جواب برای این معادله را تضمین کنند. در این معادله حدود انتگرال

ها (حوزه X) نیز دلخواه است. نماد y_m نشان دهنده مجموعه همه مشتقات جزئی از مرتبه m است:

$$y_m = \left\{ \frac{\partial^m y}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_m}} \equiv \partial_{x^{i_1}} \cdots \partial_{x^{i_m}} y \equiv y_{i_1 \cdots i_m} \right\}. \qquad (۲۱۵.۳)$$

معادله (۲۱۴.۳) در صورتی که $f = 0$ باشد به یک معادله دیفرانسیل تبدیل می‌شود. در تئوری‌های ریاضی محض و کاربردی توجه خاص به مطالعه معادلات دیفرانسیل_انتگرال به روش جواب‌های ناوردا صورت گرفته است، که البته این روش به طور مستقیم با خواص تقارنی این معادلات در ارتباط است. در این بخش قصد داریم به بررسی تقارن های این دسته از معادلات بپردازیم. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۱۴.۳) را در نظر بگیرید. ما به دنبال یک گروه تقارن لی از تبدیلات نقطه‌ای به صورت

$$\tilde{x}^i = e^{\varepsilon \mathbf{v}} x^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x,y) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{y} = e^{\varepsilon \mathbf{v}} y = x^i + \varepsilon \eta(x,y) + O(\varepsilon^2), \qquad (۲۱۶.۳)$$

هستیم به طوریکه مولد بی‌نهایت کوچک این گروه تبدیلات که توسط این معادله پذیرفته می‌شود عبارتست از:

$$\mathbf{v} = \xi^i(x,y)\partial_{x^i} + \eta(x,y)\partial_y. \qquad (۲۱۷.۳)$$

اکنون ما این گروه تبدیلات نقطه‌ای را به فضای جت از متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته به شکل زیر بسط خواهیم داد:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^i &= e^{\varepsilon \mathbf{v}^{(m)}} x^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x,y) + O(\varepsilon^2), \\
\tilde{y} &= e^{\varepsilon \mathbf{v}^{(m)}} y = y + \varepsilon \eta(x,y) + O(\varepsilon^2), \\
\tilde{y}_i &= e^{\varepsilon \mathbf{v}^{(m)}} y_i = y_i + \varepsilon \eta_i(x,y,y_1) + O(\varepsilon^2), \\
&\vdots \\
\tilde{y}_{i_1 \cdots i_m} &= e^{\varepsilon \mathbf{v}^{(m)}} y_{i_1 \cdots i_m} = y_{i_1 \cdots i_m} + \varepsilon \eta_{i_1 \cdots i_m}(x,y,y_1,\cdots,y_m) + O(\varepsilon^2). \qquad (۲۱۸.۳)
\end{aligned}$$

مولد تعمیم یافته این گروه تبدیلات به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{v} + \eta_i \partial_{y_i} + \cdots + \eta_{i_1 \cdots i_m} \partial_{y_{i_1} \cdots y_{i_m}}. \qquad (۲۱۹.۳)$$

ضرایب $\eta_i, \cdots, \eta_{i_1 \cdots i_m}$ که در گروه تبدیلات بسط داده شده ظاهر شده‌اند توسط روابط بازگشتی زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\eta_i &= D_i \eta - y_i D_i \xi^j, \\
&\vdots \\
\eta_{i_1 \cdots i_m} &= D_{i_m} \eta_{i_1 \cdots i_{m-1}} - y_{i_1 \cdots i_{m-1} j} D_{i_m} \xi^j + \cdots . \qquad (۲۲۰.۳)
\end{aligned}$$

مشتق کلی D_i به صورت

$$D_i = \partial_i + y_i\partial_y + y_{ij}\partial_{(y_j)} + y_{ii_1\cdots i_n j}\partial_{(y_{i_1\cdots i_n})} + \cdots, \qquad (۲۲۱.۳)$$

تعریف می‌شود.

۱.۱۱.۳ محک ناوردایی برای معادلات دیفرانسیل_انتگرال

ناوردایی یک معادله به معنای ناوردایی فضای جواب‌های آن است. پس تبدیلات نقطه‌ای (۲۱۸.۳) هر جواب $y(x)$ از معادله را به جواب دیگر $\tilde{y}(\tilde{x})$ از این معادله می‌نگارد. به تعبیر هندسی، اگر جواب‌های $y(x)$ با گرافشان در فضای جت نمایش داده شوند، این به این معنی است که محک زیر برقرار باقی می‌ماند:

$$W(F, I) = 0 \Longrightarrow W(\tilde{F}, \tilde{I}) = 0, \qquad (۲۲۲.۳)$$

که I همان جمله حاوی انتگرال در معادله (۲۱۴.۳) است و $\tilde{I}$ و $\tilde{F} \equiv F(\tilde{0})$ با بسط تبدیلات به دست آمده‌اند. بنا به تعریف (۲۲۲.۳) ما تبدیلات تعمیم یافته (۲۱۸.۳) را روی معادلات دیفرانسیل_انتگرال اعمال می‌کنیم، سپس با توسیع توابع W, F و f در سری تیلور این توابع و تغییر متغیر در انتگرال، تغییر (۲۱۴.۳) را برحسب مولد توسیع یافته (۲۱۹.۳) بیان خواهیم کرد. از تعریف تقارن (۲۲۲.۳) درمی‌یابیم که این تغییر باید برای تمامی مقادیر ε برابر صفر باشد. پس در نهایت به یک محک ناوردایی برای معادله (۲۱۴.۳) خواهیم رسید. برای یک دستگاه از معادلات با p متغیر مستقل $y = (y^1, \cdots, y^p)$ برخی تغییرات کوچک بدیهی هستند و نتایج این محک قابل اعمال به هرمعادله از دستگاه می‌باشد. با بسط تابع W به سری تیلور داریم:

$$W(\tilde{F}, \tilde{I}) = W(F, I) + \frac{\partial W}{\partial F}\Delta F + \frac{\partial W}{\partial I}\Delta I + \cdots.$$

تغییرات ΔF از جمله دیفرانسیلی معادله (۲۱۴.۳) با بسط سری تیلور F به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y_1}, \cdots, \tilde{y_m}) - F(x, y, y_1, \cdots, y_m)\\
&= F\Big(x^1 + \varepsilon\xi^1 + O(\varepsilon^2), \cdots, x^n + \varepsilon\xi^n + O(\varepsilon^2), y + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2), y_1 + \varepsilon\eta_1 + O(\varepsilon^2),\\
&\cdots, y_n + \varepsilon\eta_n + O(\varepsilon^2), y_{i_1,\cdots i_m} + \varepsilon\eta_{i_1\cdots i_m} + O(\varepsilon^2)\Big) - F(x, y, y_1, \cdots, y_m)\\
&= \varepsilon\left[\xi^i\partial_{x^i}F + \eta\partial_y F + \eta_i\partial_{y_i}F + \cdots + \eta_{i_1\cdots i_m}\partial_{y_{i_1}}\cdots\partial_{y_{i_m}}F\right] + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

به سبب تعریف مولد بی نهایت کوچک (۲۱۹.۳)می‌توانیم نتایج بالا را به فرم

$$\Delta F = \varepsilon\mathbf{v}^{(m)}F(x, y, y_1, \cdots, y_m) + O(\varepsilon^2),$$

بازنویسی کنیم. بنابر این شرط $\Delta F = 0$ ما را به محک ناوردایی

$$\mathbf{v}^{(m)} F(x, y, y_1, \cdots, y_m) = 0,$$

برای معادلات دیفرانسیل می‌رساند. حال تغییرات قسمت انتگرال از معادله (۲۱۴.۳) را تحت تبدیلات (۲۱۸.۳) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta I = \int_{\tilde{x}} f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_k) d\tilde{x}^1 \cdots d\tilde{x}^l - \int_X f(x, y, y_1, \cdots, y_k) dx^1 \cdots dx^l,$$

ازین پس تا پایان محاسبات، متغیرها را در انتگرال اول تحت تبدیلات (۲۱۸.۳) تغییر خواهیم داد، یعنی:

$$\{\tilde{x}^1 \cdots \tilde{x}^l\} \mapsto \{x^1 \cdots x^l\}.$$

در این صورت عناصر ماتریس ژاکوبی برابر خواهند بود با

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + O(\varepsilon^2), \qquad i, j = 1, \cdots, l.$$

به دلیل اینکه عناصر غیر قطری ماتریس از مرتبه $O(\varepsilon^2)$ هستند، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial(\tilde{x}^1 \cdots \tilde{x}^l)}{\partial(x^1 \cdots x^l)} = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\right) \cdots \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \xi^l}{\partial x^l}\right) + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + O(\varepsilon^2).$$

در نتیجه تغییر ΔI از جمله انتگرال عبارتست از:

$$\begin{aligned} \Delta I = \int_X \Bigg[& \left(1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right) f\Big(x^1 + \varepsilon \xi^1 + O(\varepsilon^2), \cdots, x^n + \varepsilon \xi^n + O(\varepsilon^2), \\ & y + \varepsilon \eta + O(\varepsilon^2), y_1 + \varepsilon \eta_1 + O(\varepsilon^2), \cdots, y_n + \varepsilon \eta_n + O(\varepsilon^2), \cdots, \\ & y_{i_1, \cdots i_k} + \varepsilon \eta_{i_1 \cdots i_k} + O(\varepsilon^2)\Big) - f(x, y, y_1, \cdots, y_k) \Bigg] dx^1 \cdots dx^l + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

با بسط تابع f به سری تیلور داریم:

$$\begin{aligned} \Delta I = \varepsilon \int_X \Bigg[& \xi^i \partial_{x^i} f + \eta \partial_y f + \eta_i \partial_{y_i} f + \cdots \\ & + \eta_{i_1 \cdots i_k} \partial_{y_{i_1}} \cdots \partial_{y_{i_k}} f + f \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \Bigg] dx^1 \cdots dx^l + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

اگر از نقطه نظر تعریف مولد تعمیم یافته (۲۱۹.۳) به موضوع بنگریم نتایج بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Delta I = \varepsilon \int_X \left[\mathbf{v}^{(k)} f(x, y, y_1, \cdots, y_k) + f(x, y, y_1, \cdots, y_k) \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \right] dx^1 \cdots dx^l + O(\varepsilon^2).$$

از محاسبات ارائه شده در بالا می‌بینیم که رابطه (۲۲۲.۳) به محک بی‌نهایت کوچک زیر از ناوردایی معادلات دیفرانسیل_انتگرال از نوع (۲۱۴.۳) تحت تبدیلات (۲۱۶.۳) منجر می‌شود:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial F}\mathbf{v}^{(m)}F+\frac{\partial W}{\partial I}\int_X\left[\mathbf{v}^{(k)}f+f\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right]dx^1\cdots dx^l\right)\bigg|_{(۲۱۴.۳)}=0. \qquad (۲۲۳.۳)$$

برای یافتن تقارن‌های یک سیستم از معادلات به فرم (۲۱۴.۳)، باید محک ناوردایی (۲۲۳.۳) را برای هریک از معادلات سیستم بکار برد. تعمیم موارد فوق به حالتی که معادله بیش از یک جمله انتگرال دارد ساده است. برای مثال اگر

$$I_1=\int_{X_1}f(.)dx^1\cdots dx^l,\quad I_2=\int_{X_2}g(.)dx^1\cdots dx^p,\quad\cdots$$

جملات انتگرال در معادله (۲۱۴.۳) باشد، سپس در محک ناوردایی جمله زیر به صورت مجموع ظاهر خواهد شد

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}\int_{X_1}\left[\mathbf{v}^{(k)}f+f\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right]dx^1\cdots dx^l+$$
$$+\frac{\partial W}{\partial I_2}\int_{X_2}\left[\mathbf{v}^{(k)}g+g\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right]dx^1\cdots dx^p+\cdots.$$

در حالتی که معادله (۲۱۴.۳) به صورت $W=F+I$ (به عنوان مثال معادله ولاسوف_ماکسول[۱۴]) باشد، محک ناوردایی (۲۲۳.۳) به صورت زیر خواهد بود

$$\left(\mathbf{v}^{(m)}+\int_X\left[\mathbf{v}^{(k)}f+f\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right]dx^1\cdots dx^l\right)\bigg|_{(۲۱۴.۳)}=0.$$

در به‌کاربردن این محک بر معادلات دیفرانسیل_انتگرال، جملات اضافی را حذف و فقط به نوشتن جملات ضروری کفایت می‌کنیم. سپس روابط به دست آمده را بر حسب متغیرهای وابسته و مشتقات آنها دسته‌بندی کرده و ضرایب آنها را برابر صفر قرار می‌دهیم. به آنچه که می‌رسیم سیستمی از معادلات است که به آن معادلات مشخصه می‌گوییم. این معادلات معادلاتی دیفرانسیل_انتگرال و خطی برای ضرایب ξ^i,η هستند و مولد بی‌نهایت کوچک (۲۱۷.۳) توسط آن‌ها تعیین می‌شوند.

مثال ۱.۱۱.۳ سیستم معادلات ولاسوف_ماکسول را برای پلاسماهای غیر برخوردیِ چند مؤلفه‌ای یک بعدی بدون میدان مغناطیسی عبارتست از:

$$\begin{aligned}&\partial_t f_i+u\partial_x f_i+\frac{q_i}{m_i}E\partial_u f_i=0,\\&\partial_t E+\sum_i\frac{q_i}{\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}uf_idu=0,\\&\partial_x E+\sum_i\frac{q_i}{\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}f_idu=0.\end{aligned}\qquad (۲۲۴.۳)$$

[۱۴] Vlasov-Maxwell

در این معادلات $E = E(t,x)$ مؤلفه x از میدان برداری الکتریکی $E = (E,0,0)$، u مؤلفه x بردار سرعت $v = (u,0,0)$ و $f_i = f_i(t,x,u)$ تابع توزیع از مؤلفه iـ پلاسما و همچنین q_i و m_i به ترتیب بار و جرم iـ ذره‌ها می‌باشند [۱۰۵]. در این سیستم ϵ_0 ثابت گذردهی الکتریکی خلأ است.

در این حالت مولدهای (۲۱۷.۳) از تبدیلات نقطه‌ای به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{v} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \rho\partial_u + \sum_i \eta_i\partial_{f_i} + \zeta\partial_E. \tag{۲۲۵.۳}$$

با استفاده از محک ناوردایی (۲۲۳.۳) داریم

$$0 = \partial_{f_i}\tau = \partial_{f_i}\xi = \partial_{f_i}\rho = \partial_E\tau = \partial_E\xi = \partial_E\rho,$$

و با در نظر داشتن این نکته که حدود انتگرال در تمامی انتگرال‌ها $\pm\infty$است، معادلات مشخصه عبارت خواهند بود از:

$$\begin{aligned}
&0 = \partial_t\zeta = \partial_x\zeta = \partial_{f_i}\zeta, \quad 0 = u\partial_u\tau - \partial_u\xi,\\
&0 = \partial_t\eta_i + u\partial_x\eta_i + \frac{q_i}{m_i}E\partial_u\eta_i, \quad 0 = u\partial_t\tau - \partial_t\rho\xi + \rho + u^2\partial_x\tau - u\partial_x\xi,\\
&0 = \sum_j E\left(\frac{q_i}{m_i} - \frac{q_j}{m_j}\right)(\partial_u f_j)\partial_{f_j}\eta_i, \quad 0 = \sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\left(u\int f_j du - \int u f_j du\right)\partial_E\eta_i,\\
&0 = (\partial_t\tau - \partial_E\zeta)\sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\int u f_j du - (\partial_t\xi)\sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\int f_j du +\\
&\qquad + \sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\int(\rho f_j + u\eta_j + u f_j\partial_u\rho)du,\\
&0 = (\partial_E\zeta - \partial_x\xi)\sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\int f_j du - (\partial_x\tau)\sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\int u f_j du - \sum_j \frac{q_j}{\epsilon_0}\int(\eta_j + f_j\partial_u\rho)du.
\end{aligned}$$

در معادلات مشخصه فوق j اندیس دیگری است که با i برابر نیست. به سادگی می‌توان از معادلات مشخصه به فرمول‌های زیر رسید:

$$0 = \partial_u\tau = \partial_u\xi = \partial_t\eta_i = \partial_x\eta_i = \partial_u\eta_i = \partial_E\eta_i = \partial_{f_j}\eta_i, \quad \forall\, i \neq j, \quad \zeta = \lambda_1 E,$$

و برای هر i، دو معادله دیفرانسیل‌ـانتگرال آخر ما را به معادلات زیر می‌رساند:

$$0 = \int[f_i(u\partial_u\tau - \lambda_1 u + \rho + u\partial_u\rho)u\eta_i]du, \quad 0 = \int[f_i(\lambda_1 - \partial_x\xi + u\partial_x\tau - \partial_u\rho)\eta_i]du.$$

ما فرض می‌کنیم که تبدیلات نقطه‌ای (۲۱۸.۳) توابعی تحلیلی از (t,x,u,f_i) هستند. در نهایت با کمک محاسبات جواب‌های زیر را برای معادلات مشخصه به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\tau = -\frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_3, \quad \xi = \frac{1}{3}(\lambda_1 - 2\lambda_2)x + \lambda_4 t + \lambda_5,\\
&\rho = \frac{1}{3}(2\lambda_1 - \lambda_2)u + \lambda_4, \quad \eta_i = \lambda_2 f_i, \quad \zeta = \lambda_1 E.
\end{aligned}$$

در روابط بالا $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$ پارامترهای دلخواه هستند. با جایگذاری این جواب‌ها در مولد بی‌نهایت کوچک (۲۲۵.۳) و برابر صفر قرار دادن همه پارامترها بجز یکی، که آن نیز برابر صفر فرض می‌شود، به مولدهای زیر خواهیم رسید:

$$\mathbf{v}_1 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_3 = t\partial_x + \partial_u, \tag{۲۲۶.۳}$$
$$\mathbf{v}_4 = -t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u + 3E\partial_E, \quad \mathbf{v}_5 = -t\partial_t - 2x\partial_x - u\partial_u + 3\sum_i f_i\partial_{f_i},$$

که این مولدها جبرلی گروه تبدیلات نقطه‌ای تقارنی معادلات ولاسوف_ماکسول را تولید می‌کند. جابجاگرهای (کروشه‌های لی) غیر صفر بین مولدها با روابط زیر ارائه می‌شوند:

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3] = \mathbf{v}_2, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4] = -\mathbf{v}_1, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5] = -\mathbf{v}_1, \quad [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4] = \mathbf{v}_2,$$
$$[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5] = -2\mathbf{v}_2, \quad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = 2\mathbf{v}_3, \quad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5] = -\mathbf{v}_3.$$

۱۲.۳ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری

در فصل دوم سه گونه از معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری به صورت‌های (۵۷.۲)، (۶۰.۲) و (۶۱.۲) معرفی و برای آنها مثال‌هایی نیز ارائه شد. در این بخش قصد داریم تقارن‌های این معادلات را با کمک مثال‌هایی شرح دهیم.

معادله دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری را به صورت

$$F = F(x, u, u_{[1]}, u_{[2]}, \cdots, u_{[k]}) = 0. \tag{۲۲۷.۳}$$

با متغیرهای خطی دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری معرفی شده در رابطهٔ (۵۵.۲) در نظر بگیرید. این معادله شامل عملگرهای دیفرانسیل و انتگرال از هر دو مرتبه صحیح و کسری است. پس می‌توان گفت که این معادله در حالت‌های خاص شامل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال از مرتبه کسری، معادلات کسری با مشتق‌های ریمن_لیوویل و یا کاپوتو و دسته کمتر شناخته شده‌ی معادلات دیفرانسیل_انتگرال است.

۱.۱۲.۳ تقارن‌های نقطه‌ای لی

فرض کنید G یک گروه یک_پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای به صورت زیر باشد

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x, u, \varepsilon), \quad \varphi^i|_{\varepsilon=0} = x^i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$\bar{u} = \psi(x, u, \varepsilon), \quad \psi|_{\varepsilon=0} = u, \tag{۲۲۸.۳}$$

که عملگر بی‌نهایت کوچک متناظر با این گروه به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \tag{۲۲۹.۳}$$

و مختصات‌های آن از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\xi^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \qquad \eta = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{۲۳۰.۳}$$

در آنالیز گروهی کلاسیک، اولین، دومین و سایر امتدادهای گروه G به متغیرهای دیفرانسیلی مربوطه $u_{(1)}$، $u_{(2)}$ و غیره معرفی شده است. می‌دانیم امتداد مولد بی‌نهایت کوچک گروه $G_{(k)}$ به متغیرهای دیفرانسیلی تا مرتبه kـام (عملگر امتداد یافتهٔ مرتبهٔ kـام) به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{k} \zeta_{i_1, i_2, \cdots, i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1, i_2, \cdots, i_s}}. \tag{۲۳۱.۳}$$

مختصات $\zeta_{i_1, i_2, \cdots, i_s}$ با فرمول امتداد داده می‌شود که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\zeta_{i_1, i_2, \cdots, i_s} = D_{i1} D_{i_2} \cdots D_{i_s}(W) + \xi^j u_{j i_1, i_2, \cdots, i_s}, \qquad W = \eta - \xi^j u_j.$$

می‌توان نشان داد که امتداد عملگر گروه $G_{[k]}$ به تمام متغیرهای دیفرانسیل‌ـانتگرال تا مرتبه kـام صورت زیر را دارد:

$$\mathbf{v}_{[k]} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{k} \zeta^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s}_{i_1, i_2, \cdots, i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s}_{i_1, i_2, \cdots, i_s}}. \tag{۲۳۲.۳}$$

که در آن

$$\zeta^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s}_{i_1, i_2, \cdots, i_s} = B^{\delta_s}_{i_s} \cdots B^{\delta_2}_{i_2} B^{\delta_1}_{i_1}(W) + \xi^j D_j(u^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s}_{i_1, i_2, \cdots, i_s}), \tag{۲۳۳.۳}$$

بطوریکه جمعوند نه تنها روی اندیس‌های i_r بلکه روی δ_r نیز هست که در آن $(r = 1, 2, \cdots, s)$.

مثال ۱.۱۲.۳ به عنوان مثالی از این معادلات می‌توان به معادله نوسانگر کسری

$${}_xD_1^{\alpha}({}_0^C D_x^{\alpha} u) - w^2 u = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \alpha \in (0, 1), \tag{۲۳۴.۳}$$

اشاره کرد. با استفاده از رابطه (۲۳۲.۳) و (۲۳۳.۳) در می‌یابیم که این معادله دارای تقارن $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$ است. همچنین امتداد این عملگر انتقال به مشتق کاپوتو به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} + [-{}_0^C D_x^{\alpha}(u_x) + D_x({}_0^C D_x^{\alpha} u)] \frac{\partial}{\partial ({}_0^C D_x^{\alpha} u)}. \tag{۲۳۵.۳}$$

که با توجه به ارتباط بین مشتق کاپوتو با ریمن که در فصل دوم مطرح شد داریم:

$${}_0^C D_x^{\alpha}(u_x) = D_x({}_0^C D_x^{\alpha} u) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{u_x(0)}{x^{\alpha}},$$

که در صورت برقرار بودن شرط $u_x(0) = 0$ عملگر انتقال x دارای امتداد صفر به مشتق کسری کاپوتو است.

حال معادله دیفرانسیل_انتگرال کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$D_t^{\alpha}u(t,x) = G\left(F(t,x,u,u_1,\cdots,u_m), \int_X f(t,x,u,u_1,\cdots,u_k)dx^1\cdots dx^l\right), \qquad (۲۳۶.۳)$$

که P,m,k و l اعدا طبیعی دلخواه هستند به طوریکه $l \leq p$ و $x = (x^1, x^2\cdots, x^p)$ متغیر مستقل و u یک متغیر وابسته از t و x و نیز D_t^{α} مشتق کسری از متغیر u نسبت به زمان از نوع ریمن_لیوویل و یا کاپوتو است. در اینجا به دنبال گروه تقارن لی از تبدیلات نقطه‌ای

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t + \epsilon\tau(t,x^i,u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{x}^i &= x^i + \epsilon\xi^i(t,x^i,u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u} &= u + \epsilon\eta(t,x^i,u) + O(\epsilon^2), \qquad i = 1,2\cdots,p,
\end{aligned} \qquad (۲۳۷.۳)$$

می‌باشیم که توسط این معادلات پذیرفته می‌شوند. برطبق نظریه آنالیز گروه‌های لی، مولد بی‌نهایت کوچک از (۲۳۷.۳) برای $i = 1.\cdots,p$ به صورت:

$$\mathbf{v} = \tau(t,x^i,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t,x^i,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(t,x^i,u)\frac{\partial}{\partial u}, \qquad (۲۳۸.۳)$$

خواهد بود. برای تعیین این گروه فقط کافی است جبرلی وابسته به آن را بیابیم. با توسیع تبدیلات نقطه‌ای به فضای جت متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته، این تبدیلات به صورت:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_t^{\alpha} &= u^{\alpha,t} + \epsilon\eta_t^{\alpha}(t,x^i,u) + O(\epsilon^2),\\
\bar{u}_i &= u_i + \epsilon\eta_i(t,x^i,u,u_1) + O(\epsilon^2),\\
&\vdots\\
\bar{u}_{i_1\cdots i_m} &= u_{i_1\cdots i_m} + \epsilon\eta_{i_1\cdots i_m}(t,x^i,u,u_1,\cdots,u_m) + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \qquad (۲۳۹.۳)$$

و مولد تعمیم یافته آن نیز به صورت

$$\mathbf{v}^{(\alpha,m)} = \mathbf{v} + \eta^{\alpha,t}\partial_{u_t^{\alpha}} + \eta_i\partial_{u_i} + \cdots + \eta_{i_1\cdots i_m}\partial_{u_{i_1\cdots i_m}}, \qquad (۲۴۰.۳)$$

خواهند بود که $\eta_i,\cdots,\eta_{i_1\cdots i_m}$ و $\eta^{(\alpha,t)}$ ضرایب بی‌نهایت کوچک تعمیم یافته از مراتب ۱ تا m و α هستند.

۲.۱۲.۳ محک ناوردایی برای معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری

ناوردایی معادلات دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری به معنای ناوردایی فضای جواب آن است. پس گروه تبدیلات هر جوابی $u(t,x)$ از یک معادله دیفرانسیل_انتگرال را به جواب

دیگر $\bar{u}(\bar{t},\bar{x})$ از این معادله به صورت زیر می‌نگارد:

$$D_t^\alpha u(t,x) = G\left(F(t,x,u,u_1,\cdots,u_m), \int_X f(t,x,u,u_1,\cdots,u_k)dx^1\cdots dx^l\right) \tag{۲۴۱.۳}$$
$$\Downarrow$$
$$D_t^\alpha \bar{u}(\bar{t},\bar{x}) = G\left(F(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m), \int_{\bar{X}} f(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_k)d\bar{x}^1\cdots d\bar{x}^l\right). \tag{۲۴۲.۳}$$

برای سادگی صورت ظاهری معادله (۲۳۶.۳) را تغییر می‌دهیم و بعد از انتقال مشتق کسری به سمت راست آن را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$H\left(F(t,x,u,u_t^\alpha,u_1,\cdots,u_m), \int_X f(t,x,u,u_1,\cdots,u_k)dx^1\cdots dx^l\right) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$H(F,I) = 0, \tag{۲۴۳.۳}$$

که در آن I به معنی جمله حاوی انتگرال است. مطابق تعریف (۲۴۳.۳) تبدیلات را روی معادله دیفرانسیل–انتگرال اعمال نموده جملات را تا مرتبه اول دقت نسبت به ε بسط می‌دهیم. حال H، F و f را بسط سری تیلور می‌دهیم. سپس تغییرات را برحسب مولدهای توسعه یافته بیان می‌کنیم. با بسط تابع H در سری تیلور داریم:

$$H(\bar{F},\bar{I}) = H(F,I) + \frac{\partial H}{\partial F}\Delta F + \frac{\partial H}{\partial I}\Delta I + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 H}{\partial^2 F}\Delta^2 F + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 H}{\partial^2 I}\Delta^2 I + \cdots.$$

برای محاسبهٔ تغییرات ΔF در بخش دیفرانسیلی در معادله (۲۴۳.۳)، می‌توان تابع F را بسط سری تیلور داد، یعنی:

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_t^\alpha,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m) - F(t,x,u,u_t^\alpha,u_1,\cdots,u_m)\\
&= F\Big(t+\epsilon\tau+O(\epsilon^2), x^1+\epsilon\xi^1+O(\epsilon^2),\cdots,x^n+\epsilon\xi^n+O(\epsilon^2), u+\epsilon\eta+O(\epsilon^2),\\
&\quad u_t^\alpha+\epsilon\eta^{\alpha,t}+O(\epsilon^2), u_1+\epsilon\eta_1+O(\epsilon^2),\cdots,u_n+\epsilon\eta_n+O(\epsilon^2),\cdots,\\
&\quad u_{i_1,\cdots i_m}+\epsilon\eta_{i_1,\cdots i_m}+O(\epsilon^2)\Big) - F(t,x,u,u_t^\alpha,u_1,\cdots,u_m)\\
&= \epsilon\Big[\tau\partial_t F + \xi^i\partial_{x^i}F + \eta\partial_u F + \eta^{\alpha,t}\partial_{u_t^\alpha}F + \eta_i\partial_{u_i}F + \cdots + \eta_{i_1,\cdots i_m}\partial_{u_{i_1}}\cdots\partial_{u_{i_m}}F\Big]\\
&\quad + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

با استفاده از تعریف مولد تعمیم یافته (۲۴۰.۳) نتایج بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta F = \epsilon\mathbf{v}^{(\alpha,m)}F(t,x,u,u_t^\alpha,u_1,\cdots,u_m) + O(\epsilon^2).$$

بنابراین شرط $\Delta F = 0$ نتیجه می‌دهد که $\mathbf{v}^{(\alpha,m)}F(t,x,u,u_t^\alpha,u_1,\cdots,u_m) = 0$ که محک ناوردایی برای معادلهٔ دیفرانسیل انتگرال نامیده می‌شود. حال تغییرات جملهٔ انتگرال را در معادلهٔ (۲۴۳.۳) را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta I = \int_{\bar{X}} f(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_k)d\bar{x}^1\cdots d\bar{x}^l - \int_X f(t,x,u,u_1,\cdots,u_k)dx^1\cdots dx^l,$$

تحت تبدیلات (۲۳۷.۳) و (۲۳۹.۳) متغیرها را در اولین انتگرال تغییر می‌دهیم:

$$\left\{\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^l\right\} \mapsto \left\{x^1, \cdots, x^l\right\}.$$

پس عناصر ماتریس ژاکوبی عبارتند از:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta_{ij} + \epsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + O(\epsilon^2), \qquad i, j = 1, \cdots, l.$$

چون عناصر غیر قطری در ماتریس از مرتبه $O(\epsilon)$ هستند پس داریم:

$$\frac{\partial(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^l)}{\partial(x^1, \cdots, x^l)} = \left(1 + \epsilon\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\right) \cdots \left(1 + \epsilon\frac{\partial \xi^l}{\partial x^l}\right) + o(\epsilon^2) = 1 + \epsilon \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + O(\epsilon^2).$$

متعاقباً تغییرات ΔI از جمله انتگرال به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_X \Bigg[\left(1 + \epsilon \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + O(\epsilon^2)\right) f\Big(& t + \epsilon\tau + O(\epsilon^2), x^1 + \epsilon\xi^1 + O(\epsilon^2), \cdots, \\ & x^n + \epsilon\xi^n + O(\epsilon^2), u + \epsilon\eta + O(\epsilon^2), u_1 + \epsilon\eta_1 + O(\epsilon^2), \cdots, u_n + \epsilon\eta_n + O(\epsilon^2), \\ & \cdots, u_{i_1,\cdots i_k} + \epsilon\eta_{i_1,\cdots i_k} + O(\epsilon^2)\Big) - f(t, x, u, u_1, \cdots, u_k)\Bigg] dx^1 \cdots dx^l + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

با بسط تابع f به سری تیلور خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta I = \epsilon \int_X \Bigg[& \tau\partial_t f + \xi^i \partial_{x^i} f + \eta\partial_u f + \eta_i \partial_{u_i} f + \cdots \\ & + \eta_{i_1,\cdots i_k} \partial_{u_{i_1}} \cdots \partial_{u_{i_k}} f + f \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\Bigg] dx^1 \cdots dx^l + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

با نگاهی دوباره به تعریف مولد توسعه یافته (۲۴۰.۳)، می‌توان نتایج فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \Delta I = \epsilon \int_X \Bigg[& \mathbf{v}^{(k)} f(t, x, u, u_1, \cdots, u_k) \\ & + f(t, x, u, u_1, \cdots, u_k) \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\Bigg] dx^1 \cdots dx^l + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

با محاسبات ارائه شده قابل مشاهده است که محک ناوردایی برای معادلات دیفرانسیل_انتگرال به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial F}\mathbf{v}^{(\alpha,m)} F + \frac{\partial H}{\partial I} \int_X \left[\mathbf{v}^{(k)} f + f \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right] dx^1 \cdots dx^l\right)\Bigg|_{H(F,I)=0} = 0. \quad (۲۴۴.۳)$$

و در حالتی که داشته باشیم $H = F + I$ محک ناوردایی عبارتست از:

$$\left(\mathbf{v}^{(\alpha,m)} F + \int_X \left[\mathbf{v}^{(k)} f + f \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right] dx^1 \cdots dx^l\right)\Bigg|_{H=0} = 0. \quad (۲۴۵.۳)$$

مثال ۲.۱۲.۳. معادله دیفرانسیل_انتگرال از مرتبه کسری

$$D_t^\alpha u + u_{xxx} + uu_x + \int_{-\infty}^{+\infty} udx = 0, \qquad (۲۴۶.۳)$$

را در نظر می‌گیریم.که $u = u(t,x)$ یک متغیر وابسته از متغیر های مستقل t و x است، $0 < \alpha < 1$ و D_t^α مشتق کسری ریمن_لیوویل نسبت به t است. در این حالت مولد تعمیم یافته برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(\alpha,3)} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \eta^{\alpha,t}\partial_{u_t^\alpha} + \eta^\alpha\partial_{u_x} + \eta^{xxx}\partial_{u_{xxx}}. \qquad (۲۴۷.۳)$$

با استفاده از تبدیلات (۲۳۷.۳) و (۲۳۹.۳) محک ناوردایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\eta^{\alpha,t} + \eta^{xxxx} + \eta u_x + u\eta^x + \int [\eta + u\xi_x]dx\right)\Big|_{(۲۴۶.۳)} = 0. \qquad (۲۴۸.۳)$$

این در حالی است که فرم η^x و η^{xxx} به شکل صریح زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\eta^x &= \eta_x + \eta_u u_x - \tau_x u_t - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_t u_x,\\
\eta^{xxx} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxu} - \xi_{xxx})u_x - \tau_{xxx}u_t + 3(\eta_{xuu} - \xi_{xxu})u_x^2 - 3\tau_{xxu}u_x u_t\\
&\quad +(\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu})u_x^3 + 3(\eta_{xu} - \xi_{xx})u_{xx} - 3\tau_{xx}u_{xt} - 3\tau_{xuu}u_x^2 u_t\\
&\quad +3(\eta_{uu} - 3\xi_{xu})u_x u_{xx} - 3\tau_{xu}u_t u_{xx} - 6\tau_{xu}u_{xt}u_x - 3\tau_x u_{xxt} + (\eta_u - 3\xi_x)u_{xxx}\\
&\quad -\xi_{xxx}u_x^4 - 6\xi_{uu}u_x^2 u_{xx} - 3\tau_{uu}u_x^2 u_{tx} - \tau_{uuu}u_x^3 u_t - 3\xi_u u_{xx}^2 3\tau_u u_{xxt}u_x\\
&\quad -3\tau_u u_{xt}u_{xx} - 3\tau_{uu}u_{xx}u_x u_t - 4\xi_u u_{xxx}u_x\tau_u u_{xxx}u_t.
\end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت $\eta^{\alpha,t}$ از معادله (۱۸۲.۳) و برابر صفر قراردادن ضرایب مشتقات u به دستگاه معادله مشخصهٔ زیر خواهیم رسید (حدود انتگرال حذف شده‌اند):

$$\begin{aligned}
&\xi_u = \xi_t = \tau_u = \tau_x = \xi_{xxx} = \eta_{uu} = 0,\\
&\binom{\alpha}{n}\partial_t^n\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad \text{برای} \quad n = 1, 2, \cdots,\\
&\eta - u\xi_x + 3\eta_{xxu} + \alpha u\tau_t = 0,\\
&\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0,\\
&\alpha\tau_t - 3\xi_x = 0,\\
&\partial_t^\alpha\eta - u\partial_t^\alpha\eta_u + \eta_{xxx} + u\eta_x = 0,\\
&\alpha\tau_t\int udx - \eta_u\int udx + \int(\eta + u\xi_x)dx = 0.
\end{aligned} \qquad (۲۴۹.۳)$$

آخرین معادله دیفرانسیل_انتگرال ما را به نتیجه زیر می‌رساند:

$$\int [u(\alpha\tau_t - \eta_u) + \eta + u\xi_x]\, dx = 0.$$

با حل این دستگاه معادلات مشخصه مولدهای بی‌نهایت کوچک را خواهیم داشت:

$$\xi = c_1, \quad \tau = c_2, \quad \eta = 0. \tag{۲۵۰.۳}$$

معادله (۲۴۶.۳) تبدیل انتقال در زمان را نمی‌پذیرد زیرا این معادله نسبت به زمان دارای مشتق کسری ریمن_لیوویل است و چون حد پایین انتگرال در تعریف این مشتق ثابت است، بنابراین معادله $t = 0$ باید نسبت به تبدیلات (۲۳۹.۳) ناوردا باشد و این ناوردایی موجب شرط

$$\tau(t, x, u)|_{t=0} = 0,$$

می‌شود. پس انتقال مکان با مولد $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$ تنها تقارن نقطه‌ای معادله (۲۴۶.۳) است.

مثال ۳.۱۲.۳. به عنوان یک مثال مهم از این معادلات می‌توان به دستگاه کسری ولاسو_ماکسول

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha f + u\partial_x^\beta f + \dfrac{q}{m}E\partial_u f = 0, \\ \partial_t^\alpha E + \dfrac{q}{\epsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} uf du = 0, \\ \partial_x^\beta E - \dfrac{q}{\epsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f du = 0, \end{cases} \tag{۲۵۱.۳}$$

اشاره کرد. در دستگاه فوق $0 < \alpha, \beta \leq 1$ و $\partial_t^\alpha f$، $\partial_x^\beta f$، $\partial_t^\alpha E$ و $\partial_x^\beta E$ نشان دهنده مشتقات کسری ریمن_لیوویل هستند [۸۹]. مولد بی‌نهایت برای این دستگاه به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \rho\partial_u + \eta\partial_f + \zeta\partial_E. \tag{۲۵۲.۳}$$

پس محک ناوردایی به صورت

$$\begin{cases} \left(\eta^{\alpha,t} + u\eta^{\beta,x} + \rho\partial_x^\beta f + \dfrac{q}{m}\zeta\partial_u f + \dfrac{q}{m}E\eta^u\right)\Big|_{(۲۵۱.۳)} = 0, \\ \left[\zeta^{\alpha,t} + \dfrac{q}{\epsilon_o}\displaystyle\int\left(\rho f + u\eta + (uf)\dfrac{\partial\rho}{\partial u}\right)du\right]\Big|_{(۲۵۱.۳)} = 0, \\ \left[\zeta^{\beta,x} - \dfrac{q}{\epsilon_o}\displaystyle\int\left(\eta + f\dfrac{\partial\rho}{\partial u}\right)du\right]\Big|_{(۲۵۱.۳)} = 0, \end{cases} \tag{۲۵۳.۳}$$

نوشته می‌شود که $\eta^{\alpha,t}, \eta^{\beta,x}, \zeta^{\alpha,t}, \zeta^{\beta,x}$ ضرایب امتداد مولد بی‌نهایت کوچک از مرتبه کسری هستند. صورت صریح این مولدهای بی‌نهایت کوچک عبارتند از:

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha,t} &= \partial_t^\alpha\eta + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n}\partial_t^n\eta_f - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)\right]\partial_t^{\alpha-n}f \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\partial_t^n\eta_E\partial_t^{\alpha-n}E - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^n(\xi)\partial_t^{\alpha-n}f_x \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^n(\rho)\partial_t^{\alpha-n}f_u + (\eta_f - \alpha D_t\tau)\partial_t^\alpha f \\ &+(\eta_E\partial_t^\alpha E - E\partial_t^\alpha\eta_E) - f\partial_t^\alpha\eta_f + \mu_{1,1}^t + \mu_{1,2}^t, \end{aligned} \tag{۲۵۴.۳}$$

$$\eta^{\beta,x} = \partial_x^\beta \eta + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\beta}{n}\partial_x^n \eta_f - \binom{\beta}{n+1}D_x^{n+1}(\xi)\right]\partial_x^{\beta-n} f$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta}{n}\partial_x^n \eta_E \partial_x^{\beta-n}E - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta}{n}D_x^n(\tau)\partial_x^{\beta-n}f_t$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta}{n}D_x^n(\rho)\partial_x^{\beta-n}f_u + (\eta_f - \beta D_x\xi)\partial_x^\beta f$$
$$+(\eta_E\partial_x^\beta E - E\partial_x^\beta \eta_E) - f\partial_x^\beta \eta_f + \mu_{1,1}^x + \mu_{1,2}^x, \qquad (۲۵۵.۳)$$

$$\zeta^{\alpha,t} = \partial_t^\alpha \zeta + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n}\partial_t^n \zeta_E - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)\right]\partial_t^{\alpha-n} E$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\partial_t^n \zeta_f \partial_t^{\alpha-n}f - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^n(\xi)\partial_t^{\alpha-n}E_x$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^n(\rho)\partial_t^{\alpha-n}E_u + (\zeta_E - \alpha D_t\tau)\partial_t^\alpha E$$
$$+(\zeta_f\partial_t^\alpha f - f\partial_t^\alpha \zeta_f) - E\partial_t^\alpha \zeta_E + \mu_{2,1}^t + \mu_{2,2}^t, \qquad (۲۵۶.۳)$$

$$\zeta^{\beta,x} = \partial_x^\beta \zeta + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\beta}{n}\partial_x^n \zeta_E - \binom{\beta}{n+1}D_x^{n+1}(\xi)\right]\partial_x^{\beta-n} E$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta}{n}\partial_x^n \zeta_f \partial_x^{\beta-n}f - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta}{n}D_x^n(\tau)\partial_x^{\beta-n}E_t$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta}{n}D_x^n(\rho)\partial_x^{\beta-n}E_u + (\zeta_E - \beta D_x\xi)\partial_x^\beta E$$
$$+(\zeta_f\partial_x^\beta f - f\partial_x^\beta \zeta_f) - E\partial_x^\beta \zeta_E + \mu_{2,1}^x + \mu_{2,2}^x, \qquad (۲۵۷.۳)$$

که $\mu_{1,1}^t$، $\mu_{1,2}^t$، $\mu_{2,1}^x$ و $\mu_{2,2}^x$ با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\mu_{1,1}^t = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}$$
$$\times(-f)^r\frac{\partial^m}{\partial t^m}(f^{k-r})\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial t^{n-m}\partial f^k},$$
$$\mu_{1,2}^t = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}$$
$$\times(-E)^r\frac{\partial^m}{\partial t^m}(E^{k-r})\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial t^{n-m}\partial E^k},$$
$$\mu_{2,1}^x = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\beta}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\frac{x^{n-\beta}}{\Gamma(n+1-\beta)}$$
$$\times(-f)^r\frac{\partial^m}{\partial x^m}(f^{k-r})\frac{\partial^{n-m+k}\zeta}{\partial x^{n-m}\partial f^k},$$
$$\mu_{2,2}^x = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\beta}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\frac{x^{n-\beta}}{\Gamma(n+1-\beta)}$$
$$\times(-E)^r\frac{\partial^m}{\partial x^m}(E^{k-r})\frac{\partial^{n-m+k}\zeta}{\partial x^{n-m}\partial E^k}. \qquad (۲۵۸.۳)$$

$\mu^x_{1,1}$، $\mu^x_{1,2}$، $\mu^t_{2,1}$ و $\mu^t_{2,1}$ مشابه با (۲۵۸.۳) تعریف می‌شوند. با استفاده از فرمول‌های امتداد و برابر صفر قراردادن ضرایب یک جمله‌ای‌های مختلف در مشتقات جزئی f و E نسبت به x, t و u، مجموعه معادلات مشخصه به فرم زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\partial_f \tau = \partial_E \tau = \partial_f \xi = \partial_E \xi = \partial_f \rho = \partial_E \rho = \partial_f \zeta = \partial_E \eta = 0,\\
&\partial_x \tau = \partial_u \tau = \partial_x \rho = \partial_t \rho = \partial_t \xi = \partial_u \xi = 0,\\
&\binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_f - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad \text{برای} \quad n = 1, 2, \cdots,\\
&\binom{\alpha}{n} \partial_t^n \zeta_E - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad \text{برای} \quad n = 1, 2, \cdots,\\
&\binom{\beta}{n} \partial_x^n \eta_f - \binom{\beta}{n+1} D_x^{n+1}(\xi) = 0 \quad \text{برای} \quad n = 1, 2, \cdots,\\
&\binom{\beta}{n} \partial_x^n \zeta_E - \binom{\beta}{n+1} D_x^{n+1}(\xi) = 0 \quad \text{برای} \quad n = 1, 2, \cdots,\\
&\alpha u \partial_t \tau - \beta u \partial_x \xi + \rho = 0, \qquad \frac{q}{m}(\alpha \partial_t \tau E + \zeta - E \partial_u \rho) = 0,\\
&(\alpha \partial_t \tau - \partial_E \zeta)\left(\frac{q}{\epsilon_0} \int du u f\right) + \frac{q}{\epsilon_0} \int du [\rho f + u\eta + (uf)\partial_u \rho] = 0,\\
&(\partial_E \zeta - \beta \partial_x \xi)\left(\frac{q}{\epsilon_0} \int du f\right) - \frac{q}{\epsilon_0} \int du [\eta + f \partial_u \rho] = 0,\\
&\partial_t^\alpha \eta - f \partial_t^\alpha \eta_f + u \partial_x^\beta \eta - u f \partial_x^\beta \eta_f + \frac{q}{m} E \partial_u \eta = 0,\\
&\partial_t^\alpha \zeta - E \partial_t^\alpha \zeta_E = 0, \qquad \partial_x^\beta \zeta - E \partial_x^\beta \zeta_E = 0.
\end{aligned}
$$

با انتگرال گیری از سیستم نامتناهی از FDEها و FIDEهای فوق به جواب کلی

$$
\begin{aligned}
&\tau = c_3 t + c_4, \qquad \xi = c_1 x + c_2, \qquad \rho = u(c_1 \beta - c_3 \alpha),\\
&\eta = -c_1 \beta f - c_3 \alpha f, \qquad \zeta = E(c_1 \beta - 2c_3 \alpha),
\end{aligned}
\tag{۲۵۹.۳}
$$

با ثوابت دلخواه $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ خواهیم رسید. به علاوه چون حد پایین a از انتگرال در عملگر مشتق ریمن_لیوویل و عملگر مشتق کاپوتو ثابت است، معادله $t = 0$ و $x = 0$ باید تحت تبدیلات ناوردا باشند و شروط

$$
\tau|_{t=0} = 0, \qquad \xi|_{x=0} = 0. \tag{۲۶۰.۳}
$$

را برای $a = 0$ خواهیم داشت. با برابر صفر قراردادن همه پارامترهای (۲۵۹.۳) به جز یکی که آن را هم برابر 1 فرض می‌کنیم، مولدهای زیر حاصل می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + \beta u \frac{\partial}{\partial u} - \beta f \frac{\partial}{\partial f} + \beta E \frac{\partial}{\partial E},\\
&\mathbf{v}_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u \frac{\partial}{\partial u} - \alpha f \frac{\partial}{\partial f} - 2\alpha E \frac{\partial}{\partial E}.
\end{aligned}
\tag{۲۶۱.۳}
$$

۱۳.۳ کاربرد تقارن‌ها در کاهش مرتبه معادلات و یافتن جواب‌های دقیق

هنگامیکه با یک دستگاه پیچیده از معادلات دیفرانسیل جزئی که به طور مثال توصیف کننده یک پدیدهٔ فیزیکی است، مواجهه می‌شویم اولین هدف یافتن جواب‌های دقیق برای دستگاه مورد نظر است. یکی از روش‌های یافتن جواب، روش عددی است که می‌تواند تقریب خوبی برای جواب دستگاه بدهد. روشی که در اینجا تحت عنوان روش ناوردای گروهی ارائه خواهد شد، تکنیک مناسبی برای یافتن جواب‌های متشابه می‌باشد که به کمک آنها می‌توانیم دسته وسیعی از جواب‌های دستگاه را به دست آوریم. مفهوم جواب‌های ناوردای گروهی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی تا سال ۱۸۵۰ به طور متنوعی در متون مختلف ارائه شد تا اینکه لی در یکی از مقالاتش، [۶۴]، آن را به معنای امروزی بیان کرد. لی در این مقاله به آن دسته از جواب‌های ناوردای گروهی پرداخت که تحت تبدیلات برخوردی ناوردا هستند. در این مقاله وی نشان داد که جواب‌های معادلات دیفرانسیل جزئی با دو متغیر مستقل که تحت یک گروه یک پارامتری ناوردا هستند با حل معادلات دیفرانسیل معمولی امکان پذیر است. اما متأسفانه لی پیش از آن که بتواند اکتشافات خود را کاربردی سازد چشم از جهان فروبست. چندی پس از مرگ لی، ا. جی. ا مورگان[۱۵] [۷۰]، و میشل[۱۶] [۶۸]، حالت‌های خاص از نتایج لی در مورد گروه تقارن یک پارامتری را گسترش دادند. به دنبال آنها اوزیاناکوف[۱۷] [۷۸]، نیز نتایج تعمیم یافته‌تری را بدون آگاهی از یافته‌های لی به دست آورد. اما پیش از این تلاش‌ها تعداد زیادی مثال در نوشته‌های مختلف در مورد جواب‌های ناوردای گروهی ارائه شده بود، غافل از آنکه همگی حالت‌های خاص از کشفیات ریاضیدانان فوق بوده است.

این جواب‌ها تأثیرات بسیار وسیعی در توضیح رفتار جواب‌های دقیق دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی دارند. اولین قضیه یا به عبارتی قضیه بنیادی که در این بحث می‌توان به آن اشاره کرد آن است که آن دسته از جواب‌های دستگاه که تحت یک گروه تقارنی rـ پارامتری ناورداست را می‌توان با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل که مرتبهٔ آن r واحد از مرتبهٔ دستگاه اصلی کمتر است، به دست آورد. به خصوص اگر تعداد پارامترهای گروه تقارن یکی کمتر از تعداد متغیرهای مستقل باشد، یعنی $r = p - 1$، آنگاه کلیهٔ جواب‌های ناوردای گروهی با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به دست می‌آیند. حتی در برخی موارد می‌توان دید که جواب‌های ناوردای گروهی که پیدا می‌شوند همان جواب‌های دقیقی هستند که هدف نهایی حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی است.

[۱۵] A. J. A. Morgan
[۱۶] A. D. Michal
[۱۷] L. V. Ovsiannikov

۱.۱۳.۳ ساختن جواب‌های ناوردای گروهی

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مانند $\Delta = 0$ که روی یک زیر مجموعهٔ باز مانند $\mathcal{O}$ از فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^{p+q}$، تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات موضعی باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل می‌کند. به طور کلی جواب $u = f(x)$ از این دستگاه را یک جواب Gــناوردا می‌گوییم اگر تحت تبدیلات گروه ناوردا باقی بماند. به تعبیر دیگر یک جواب Gــناوردا از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مانند $u = f(x)$ جوابی است که گراف آن $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \subset \mathcal{O}$ موضعاً یک زیر مجموعهٔ Gــناوردا از $\mathcal{O}$ است.

تعریف ۱.۱۳.۳. $u = \Theta(x)$ با مؤلفه‌های $u^\alpha = \Theta^\alpha(x)$، $\alpha = 1, \cdots, q$، جواب ناوردا از دستگاه PDE، $\Delta_\nu(x, u, u^{(n)}) = 0$ حاصل از تقارن نقطه‌ای است اگر و تنها اگر

(i) $u^\alpha = \Theta^\alpha(x)$ برای هر α یک منیفلد ناوردا نسبت به تقارن نقطه‌ای باشد.

(ii) $u = \Theta(x)$ جوابی از $\Delta_\nu(x, u, u^{(n)}) = 0$ باشد.

از تعریف نتیجه می‌شود که اگر دستگاه PDE، $\Delta_\nu(x, u, u^{(n)}) = 0$ دارای تقارن نقطه‌ای با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad (۲۶۲.۳)$$

یا به طور معادل فرم تکاملی مولد بی‌نهایت کوچک زیر باشد

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{q}\left[\eta^\alpha(x,u) - \sum_{t=1}^{p} u_i^\alpha \xi^i(x,u)\right]\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

که $\xi(x,u) = (\xi^1(x,u), \cdots, \xi^p(x,u))$ و نیز $\xi(x,u) \neq 0$ و همچنین $u = \Theta(x)$جواب ناوردا از دستگاه و حاصل از تقارن نقطه‌ای آن است اگر و تنها اگر $u = \Theta(x)$ در شرایط زیر صدق کند:

(i)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}(u^\alpha - \Theta^\alpha(x))|_{u=\Theta(x)} = 0, && \alpha = 1, \cdots, q,\\
&\leftrightarrow \eta^\alpha(x, \Theta(x)) - \xi^i(x, \Theta(x))\frac{\partial \Theta^\alpha(x)}{\partial x^i} = 0, && \alpha = 1, \cdots, q, \qquad (۲۶۳.۳)\\
&\leftrightarrow \tilde{\mathbf{v}} u^\alpha|_{u=\Theta(x)} = 0, && \alpha = 1, \cdots, q,
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\Delta_\nu(x, u, \cdots, \partial^{(n)}u) = 0, \quad u = \Theta(x), && \nu = 1, \cdots, l,\\
&\leftrightarrow \Delta_\nu(x, \Theta(x), \partial\Theta(x), \cdots, \partial^{(n)}\Theta(x)) = 0, && \nu = 1, \cdots, l. \qquad (۲۶۴.۳)
\end{aligned}$$

در (۲۶۴.۳)، $\partial^{(j)}\Theta(x)$ عبارت است از $\partial^{(j)}\Theta^\alpha(x)/(\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_j})$ که در آن $i_j = 1, \cdots, p$ و نیز $j = q, \cdots, n$. جواب‌های معادلات در (۲۶۳.۳) رویه‌هایی ناوردا نسبت به تقارن نقطه‌ای $\mathbf{v}$

هستند. معادلات (۲۶۳.۳) و (۲۶۴.۳) در حقیقت بیانگر روشی برای یافتن جواب‌های خاص از دستگاه PDE، $\Delta_\nu(x,u,u^{(n)})=0$ هستند.

با داشتن تقارن نقطه‌ای دستگاه PDE با مولد v برای حل دستگاه خطی از معادلات مشخصه (۲۶۳.۳) و (۲۶۴.۳) به دو روش می‌توان عملکرد و جواب‌های ناوردای $u=\Theta(x)$ را یافت.

۲.۱۳.۳ روش صورت‌های ناوردا

معادلات مشخصه برای $u=\Theta(x)$ را به صورت

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x,u)}=\cdots=\frac{dx^p}{\xi^p(x,u)}=\frac{du^1}{\eta^1(x,u)}=\cdots=\frac{du^q}{\eta^q(x,u)} \qquad (۲۶۵.۳)$$

در نظر بگیرید. قصد داریم ابتدا شرایط ناوردایی رویه (۲۶۳.۳)، با توجه به معادلات مشخصه فوق را بیابیم. اگر $y^1(x,u),\cdots,y^{p-1}(x,u)$ و $v^1(x,u),\cdots,v^q(x,u)$، $p+q-1$ ثابت‌های مستقل تابعی حاصل از حل دستگاه معادلات مشخصه از ODE (۲۶۵.۳) با ژاکوبین $\frac{\partial(v^1,\cdots,v^q)}{\partial(u^1,\cdots,u^p)}\neq 0$ باشند، آنگاه جواب عمومی $u=\Theta(x)$ از معادلات (۲۶۳.۳)، به صورت ضمنی به شکل ناوردایی زیر بیان می‌شود:

$$v^\lambda(x,u)=H^\lambda(y^1(x,u),\cdots,y^{p-1}(x,u)), \qquad (۲۶۶.۳)$$

که H^λ تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه است و $\lambda=1,\cdots,q$ توجه به این نکته ضروری است که $y^1(x,u),\cdots,y^{p-1}(x,u)$ و $v^1(x,u),\cdots,v^q(x,u)$، $p+q-1$ ناورداهای مستقل تابعی نسبت به گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای با مولد v می‌باشند. بنابراین مختصات کانونیک برای گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای با مولد v هستند. فرض کنید $y^p(x,u)$، $(p+q)$–امین مختصات کانونیک باشد که در $\mathrm{v}y^p=1$ صادق است. اگر دستگاه $\Delta(x,u)$ توسط تبدیل نقطه‌ای معکوس پذیر متناظرش به دستگاه $\tilde\Delta(y,v)$، با متغیرهای مستقل $y=(y^1,\cdots,y^p)$ و متغیرهای وابسته $v=(v^1,\cdots,v^q)$ تبدیل شود، آنگاه دستگاه تبدیل شده $\tilde\Delta(y,v)$، دارای تقارن نقطه‌ای انتقال است که عبارت است از

$$\begin{aligned}
(y^*)^i&=y^i, \qquad i=1,\cdots,p-1,\\
(y^*)^p&=y^p+\varepsilon,\\
(v^*)^\lambda&=v^\lambda, \qquad \lambda=1,\cdots,q.
\end{aligned}$$

بنابراین متغیر y^p به طور صریح در دستگاه PDE تبدیل شده $\tilde\Delta(y,v)$ ظاهر نمی‌شود و در نتیجه این دستگاه دارای جواب‌های خصوصی به فرم (۲۶۶.۳) است که به نوبه خود به طور ضمنی توابع $u=\Theta(x)$ را تعریف می‌کند به طوریکه آنها جواب‌های ناوردا از دستگاه $\Delta(x,u)$ می‌باشند، یعنی، دستگاه $\Delta(x,u)$ دارای جواب‌های ناوردایی است که به طور ضمنی بر اساس

فرم ناوردای (۲۶۶.۳) به دست می‌آیند. در حالت خاص، این جواب‌های ناوردا با حل دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل با $p-1$ متغیر مستقل $y^1, \cdots, y^{p-1}$ و q متغیر وابسته $v^1, \cdots, v^q$ حاصل می‌شوند. دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل با جایگذاری فرم ناوردا (۲۶۶.۳) در دستگاه $\Delta(x,u)$ به دست می‌آید. فرض بر آن است که این حالت به دستگاه معادلات دیفرانسیل با معادله تکین منجر نشود. توجه کنید که اگر $\partial\xi/\partial u = 0$ آنگاه برای $i = 1, \cdots, p-1$، داریم $y^i = y^i(x)$. در این حالت وقتی $\Delta(x,u)$ دارای دو متغیر مستقل است، یعنی $p = 2$، دستگاه کاهش یافته به یک دستگاه ODE با $y^i = y^1$ به عنوان متغیر مستقل تبدیل خواهد شد.

۳.۱۳.۳ روش جایگذاری مستقیم

لزوم استفاده از این شیوه هنگامی ضروری است که نتوان معادلات شرط رویه ناوردا (۲۶۴.۳) را حل کرد، یعنی نتوان جواب عمومی برای دستگاه ODE مشخصه (۲۶۶.۳) یافت. بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $\xi^p(x,u) \neq 0$ در این صورت دستگاه (۲۶۵.۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^p} = \frac{\eta^\lambda(x,u)}{\xi^p(x,u)} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\xi^i(x,u)}{\xi^p(x,u)} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^i}, \quad \lambda = 1, \cdots, q. \tag{۲۶۷.۳}$$

بنابر (۲۶۷.۳) و دیفرانسیل آن نتیجه می‌شود که هر جمله‌ای شامل مشتقات u نسبت به متغیر مستقل x^p را می‌توان بر حسب جملاتی از x و u همانند مشتقات u نسبت به متغیرهای مستقل $x^1, \cdots, x^{p-1}$ نمایش داد. بنابراین بعد از جایگذاری مستقیم (۲۶۷.۳) و مشتقات آن برای هر مشتق جزئی نسبت به x^p که در دستگاه ظاهر شده است، به طور مستقیم یک دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل شامل q متغیر وابسته $u^1, \cdots, u^q$، $p-1$ متغیر مستقل $x^1, \cdots, x^{p-1}$، مشتقات $u^1, \cdots, u^q$ نسبت به $x^1, \cdots, x^{p-1}$ و پارامتر x^p حاصل می‌شود. جواب $u = \Phi(x^1, \cdots, x^{p-1} : x^p)$ از دستگاه معادلات کاهش یافته، سبب تولید جواب ناوردای $u = \Theta(x)$ برای دستگاه $\Delta(x,u)$ می‌شود.

مثال ۱.۱۳.۳. معادله KdV یک PDE با ضابطهٔ $u_{xxx} + uu_x + u_t = 0$ با گروه تقارن چهار_بعدی است که جبرلی نظیر آن با مولدهای زیر تولید می‌شوند:

انتقال مکان	$\mathbf{v}_1 = \partial_x,$
انتقال زمان	$\mathbf{v}_2 = \partial_t,$
حرکت گالیله‌ای	$\mathbf{v}_3 = t\partial_x + \partial_u,$
تجانس	$\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u.$

می‌خواهیم معادله را نسبت به مولدهای انتقال جبرلی کاهش دهیم [۷۵]. محاسبه نشان می‌دهد که $y = x - ct$ و $v = u$ دو ناوردای نظیر تبدیلات انتقال معادله هستند. با استفاده از

قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای مشتقات موجود در معادله را برحسب y و v می‌نویسیم.

$$u_t = u_y y_t = v_y y_t = -cv_y, \quad v_x = u_y y_x = v_y,$$
$$u_{xxx} = v_{yyy} y_x = v_{yy}.$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله KdV معادلهٔ ODE

$$v_{yyy} + vv_y - cv_y = 0, \tag{۲۶۸.۳}$$

حاصل می‌شود که با دوبار انتگرال‌گیری پی‌درپی معادلهٔ مرتبه اول

$$3v_y^2 + v^3 - 3cv^2 - 6k_1 v + k_2 = 0, \tag{۲۶۹.۳}$$

به دست می‌آید.جواب عمومی معادلهٔ KdV که با حل معادلهٔ (۲۶۹.۳) حاصل می‌شود تابعی بیضوی از $(x-ct+\delta)$ است که آن را با $u = f(x-ct+\delta)$ نشان می‌دهیم. اگر $u \to 0$ و $|x| \to \infty$ آنگاه در معادلهٔ (۲۶۹.۳) k_1 و k_2 هر دو صفر شده و جواب

$$u = 3c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}y + \delta\right),$$

به دست می‌آید که در آن پارامتر c سرعت انتشار موج است. با جایگذاری $x - ct$ به جای y در جواب فوق، جواب

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(x-ct) + \delta\right),$$

حاصل می‌شود که به ازای $c = 0$ جواب تکین $u = -12/(x+\delta)^2$ به دست خواهد آمد. جواب‌های فوق نمونه‌ای از جواب‌های ناوردای گروهی برای معادلهٔ KdV هستند که از آنها به جواب‌های موج سیار یاد می‌شود. اما جواب‌های ناوردای گروهی به این نوع از جواب‌هات محدود نمی‌شوند. در ادامه قصد داریم جواب‌های ناوردای گروهی نظیر تبدیل حرکت گالیله‌ای را به دست آوریم. به ازای $t > 0$، $y = t$ و $v = tu - x$ ناورداهای مستقل تابعی این تبدیل بوده و مشتقات جدید عبارتند از:

$$u_t = (yv_y - v - x)y^{-2}, \quad u_x = y^{-1}, \quad u_{xxx} = 0.$$

حال باجایگذاری این مشتقات در معادلهٔ KdV معادلهٔ $v_y = 0$ نتیجه می‌شود که حل آن منجر به جواب ناوردای گروهی $u = \dfrac{x+\delta}{t}$ برای تبدیل حرکت گالیله‌ای می‌گردد. اما به ازای $t > 0$

$$y = t^{-1/3}x, \quad v = t^{2/3}u,$$

دو ناوردای مستق نظیر تبدیل تجانس می‌باشند و مشتقات جدید با در نظر گرفتن این ناورداها عبارتند از:

$$u_t = \frac{1}{3}t^{-5/3}(yv_y + 2v), \quad u_x = t^{-1}v_y, \quad u_{xxx} = t^{-5/3}v_{yyy}.$$

بنابراین معادلهٔ کاهش یافته تحت این تبدیل ODE زیراست:

$$v_{yyy} + vv_y - \frac{1}{3}yv_y - \frac{2}{3}v = 0.$$

حل این معادلهٔ مرتبه سوم با روش‌های موجود ممکن نیست اما تحت تبدیل $v = dw/dy - 1/6w^3$ معادلهٔ فوق به معادلهٔ

$$w_{yyy} - \frac{1}{6}w^2 w_y - \frac{1}{3}yw_y - \frac{1}{3}w = 0,$$

تبدیل شده که با یکبار انتگرال گیری به معادلهٔ

$$w_{yy} - \frac{1}{18}w^3 - \frac{2}{3}yw - k = 0,$$

کاهش می‌یابد که قابل حل است و حل آن جواب ناوردای گروهی نظیر تبدیل تجانس را می‌سازد.

مثال ۲.۱۳.۳. معادله دیفرانسیل کسری انتشار

$$D_t^{\alpha} u = ku_{xx}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{۲۷۰.۳}$$

که k در آن یک ثابت است را در نظر بگیرید [۲۹]. با فرض اینکه عملگر مشتق در این معادله ریمن_لیوویل و یا کاپوتو باشد، این معادله عملگرهای زیر را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha}{2}x\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathbf{v}_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathbf{v}_\infty = h(t,x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

جواب ناوردا تحت گروه تبدیلات با مولد

$$\mathbf{v}_1 + \rho\mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \rho u\frac{\partial}{\partial u},$$

به فرم زیر است:

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\rho x}\phi(t),$$

که $\phi(t)$ در معادله زیر صادق است:

$$D_t^{\alpha}\phi(t) = k\rho^2\phi(t),$$

که برای مشتق کسری ریمن_لیوویل جواب

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\rho x}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(k\rho^2 t^{\alpha}),$$

و برای مشتق کاپوتو جواب

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\rho x}E_{\alpha,1}(k\rho^2 t^{\alpha}),$$

را نتیجه می‌دهد. لازم به ذکر است که در این دو جواب $E_{\alpha,\beta}$ همان تابع میتاگ_لفلر با تعریف $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{z^m}{\Gamma(\alpha z+\beta)}$ است.

مثال ۳.۱۳.۳. جریان شعاعی در درون یک چاه در مخزن دایره‌ای را در نظر بگیرید. ترکیب قانون پایستگی انرژی و قانون دارسی برای جریان استاتیک برای سیال با تراکم‌پذیری کم و یا ثابت، یک PDE نتیجه می‌دهد که معادله توزیع کننده نامیده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}=\frac{\phi\mu c_t}{0.000264k}\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

در این معادله ρ فشار در فاصله r از چاه در زمان t و نیز ϕ، μ، c_t و k ثوابتی از مسأله هستند که تابعی از ρ نیستند. c_t تراکم‌پذیری، k نفوذپذیری، μ کشسانی و ϕ تخلل پذیری مستقل از فشار در این فرمول هستند. این معادله یکی از معادلات بسیار مهم و پر کاربرد در مهندسی نفت است [۹۱]. در صورتی که مشتق دوم در این معادله را در حالت کسری و نیز ضریب $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ را ثابت η فرض کنیم معادله را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{\partial^\alpha \rho}{\partial t^\alpha}=\eta\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}+\frac{\eta}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}, \tag{۲۷۱.۳}$$

در این معادله $0<\alpha<1$ و $t\in(0,T], (T\leq\infty)$ است. تقارن های معادله (۲۷۲.۳) به صورت :

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_1=\alpha r\frac{\partial}{\partial r}+2t\frac{\partial}{\partial t}+(\rho\alpha-\rho)\frac{\partial}{\partial \rho},\\ &\mathbf{v}_2=2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial \rho},\qquad \mathbf{v}_3=\rho\frac{\partial}{\partial \rho},\qquad \mathbf{v}_\infty=h(r,t)\frac{\partial}{\partial \rho}.\end{aligned} \tag{۲۷۲.۳}$$

خواهند بود. متغیرهای متشابه متناظر با مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}_1$ با حل معادله مشخصه زیر یافت می‌شوند:

$$\frac{dr}{\alpha r}=\frac{dt}{2t}=\frac{d\rho}{\rho\alpha-\rho}. \tag{۲۷۳.۳}$$

در این حالت ناورداها به صورت $r^{-2/\alpha}t$ و $\rho r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ هستند. حال به دنبال کاهش مرتبه معادله (۲۷۱.۳) با یک جواب به فرم

$$\rho(t,r)=r^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\theta(tr^{\frac{-2}{\alpha}}).$$

هستیم. پس معادله (۲۷۱.۳) با مشتق کسری ریمن–لیوویل دارای جواب متشابه به فرم زیر است:

$$\rho(t,r)=r^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\theta(z),\qquad z=tr^{\frac{-2}{\alpha}}.$$

به منظور یافتن معادله دیفرانسیل معمولی برای $\theta(z)$ نیازمند انجام محاسبات زیر خواهیم بود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha \rho}{\partial t^\alpha}&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\rho(r,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}r^{\frac{-2}{\alpha}}\frac{d}{dz}\int_0^z\frac{r^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\theta(y)r^{-2}}{(z-y)^\alpha}r^{\frac{2}{\alpha}}dy\\ &=r^{\frac{-2\alpha+2}{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dz}\int_0^z\frac{\theta(y)}{(z-y)^\alpha}dy,\end{aligned} \tag{۲۷۴.۳}$$

 در رابطهٔ فوق $y=\tau r^{\frac{-2}{\alpha}}$ است. در نتیجه داریم:

$$\partial_t^{\alpha}\rho(t,r)=r^{\frac{-2\alpha+2}{\alpha}}\partial_z^{\alpha}\theta(z). \tag{۲۷۵.۳}$$

با جایگذاری عبارت بالا در معادله (۲۷۱.۳)، به معادله کاهش یافته زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}\partial_z^{\alpha}\theta(z)&=r^{\frac{\alpha-3}{\alpha}}\eta\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\theta(tr^{\frac{-2}{\alpha}})+r^{\frac{\alpha-5}{\alpha}}\eta\frac{2-2\alpha}{\alpha^2}\theta'(tr^{\frac{-2}{\alpha}})+tr^{\frac{-4}{\alpha}}\eta\frac{2\alpha+4}{\alpha^2}\theta'(tr^{\frac{-2}{\alpha}})\\&+t^2r^{\frac{-6}{\alpha}}\eta\frac{4}{\alpha^2}\theta''(tr^{\frac{-2}{\alpha}})+r^{\frac{\alpha-3}{\alpha}}\eta\frac{\alpha-1}{\alpha}\theta(tr^{\frac{-2}{\alpha}})+tr^{\frac{\alpha-5}{\alpha}}\eta\frac{-2}{\alpha}\theta(tr^{\frac{-2}{\alpha}}).\end{aligned} \tag{۲۷۶.۳}$$

حال جواب ناوردا تحت گروه با مولد $\mathbf{v}_2$ را به دست می‌آوریم. با انتگرال گیری از شرط رویه ناوردای

$$2\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dr}{r},$$

متغیرهای ناوردا t و $\sqrt{r}$ را خواهیم داشت. بنابراین معادله (۲۷۱.۳) با مشتق ریمن_لیوویل دارای جواب ناوردای $\rho(t,r)=\sqrt{r}\theta(t)$ است. با وارد کردن این جواب در معادله (۲۷۱.۳) خواهیم داشت:

$$D_t^{\alpha}\rho(t,r)=\left(-\frac{\eta}{4}\right)r^{-3/2}\theta(t)+\left(\frac{\eta}{2r}\right)r^{-1/2}\theta(t).$$

بنابراین معادله کاهش یافته زیر را خواهیم داشت:

$$D_t^{\alpha}\theta(t)=\left(\frac{\eta}{4r^2}\right)\theta(t), \tag{۲۷۷.۳}$$

معادله فوق با کمک تکنیک تبدیل لاپلاس قابل حل است. یادآوری می‌کنیم که تبدیل لاپلاس از مشتق کسری ریمن_لیوویل از مرتبه $\alpha>0$ به صورت زیر است:

$$L\{\mathcal{D}_t^{\alpha}f(t)\}=s^{\alpha}\bar{f}(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k\left(D_t^{\alpha-k-1}f(t)\right)_{t=0},\quad n-1\le\alpha<n. \tag{۲۷۸.۳}$$

پس با اعمال تبدیل لاپلاس از دو طرف (۲۷۷.۳) خواهیم داشت:

$$s^{\alpha}L\{\theta(t)\}-\sum_{k=1}^{n-1}s^0[D_t^{\alpha-k-1}\theta(t)]_{t=0}=\left(\frac{\eta}{4r^2}\right)\bar{\theta}(s), \tag{۲۷۹.۳}$$

که می‌تواند به فرم زیر نیز نوشته شود:

$$\bar{\theta}(s)\left(s^{\alpha}-\frac{\eta}{4r^2}\right)=s^0,$$

با اعمال معکوس تبدیل لاپلاس بر دو طرف رابطهٔ فوق داریم:

$$\theta(t)=t^{\alpha-1}\mathbf{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\eta}{4r^2}t^{\alpha}\right), \tag{۲۸۰.۳}$$

که جواب دقیق زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\rho(t,r)=\sqrt{r}t^{\alpha-1}\mathbf{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\eta}{4r^2}t^{\alpha}\right), \tag{۲۸۱.۳}$$

که در آن $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(z)$ تابع دو_پارامتری میتاگ_لفلر است. باید بدانیم که تبدیل لاپلاس از تابع $t^{\alpha k+\beta-1}\mathbf{E}^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned}L\left\{t^{\alpha k+\beta-1}\mathbf{E}^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})\right\}&=\int_0^{\infty}t^{\alpha k+\beta-1}e^{-st}\mathbf{E}^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})dt\\&=\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}\mp a)^{k+1}},\quad \Re(s)>|a|^{\frac{1}{\alpha}},\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{E}^{(k)}_{\alpha,\beta}(y)\equiv\frac{d^k}{dy^k}\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(y)$ مشتق تابع میتاگ_لفلر است. حال معادله (۲۷۷.۳) را در حالتی که مشتق کسری در آن کاپوتو است در نظر بگیرید:

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{t}\theta(t)=\left(\frac{\eta}{4r^2}\right)\theta(t). \tag{۲۸۲.۳}$$

تبدیل لاپلاس از مشتق کاپوتو با مرتبه $\alpha>0$ به صورت زیر است:

$$L\{{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{t}f(t)\}=s^{\alpha}\bar{f}(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\quad n-1<\alpha\leq n. \tag{۲۸۳.۳}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر دو طرف (۲۸۲.۳) به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$s^{\alpha}\bar{\theta}(s)-s^{\alpha-1}\theta(0)=\left(\frac{\eta}{4r^2}\right)\bar{\theta}(s). \tag{۲۸۴.۳}$$

برای به دست آوردن جواب غیر بدیهی فرض می‌کنیم که $\theta(0)=b$ که b یک ثابت دلخواه غیر صفر است، پس خواهیم داشت:

$$\bar{\theta}(s)=\frac{s^{\alpha-1}b}{s^{\alpha}-\left(\frac{\eta}{4r^2}\right)}, \tag{۲۸۵.۳}$$

بنابراین با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس جواب دقیق

$$\rho(t,r)=\sqrt{r}b\mathbf{E}_{\alpha,1}\left(\frac{\eta}{4r^2}t^{\alpha}\right). \tag{۲۸۶.۳}$$

را خواهیم ساخت.

یادداشت

در فصلی که از پیش رو گذشت سعی شد تا به طور بنیادی با مفهوم تقارن‌های معادلات دیفرانسیل و انواع آن‌ها آشنا شویم. در ادامه برخی از کاربردهای گروه‌های تقارن در حل معادلات دیفرانسیل و بیان ویژگی‌های معادلات ارائه شد. تقارن نقش مهمی در زمینه‌های

مختلف در طبیعت ایفا می‌کند. همانگونه که میدانیم روش لی یک روش موثر و قدرتمند برای به دست آوردن جواب‌های دقیق برای معادلات دیفرانسیل می‌باشد. روش محاسبهٔ گروه تقارن به وسیلهٔ فرمول امتداد نخستین بار توسط لی بنا شد و اولور[۱۸] فرمول صریح را برای محاسبهٔ تقارن‌ها ارائه کرد [۷۷]. مراجع بی‌شماری وجود دارند که به تقارن‌های معادلات دیفرانسیل و تحلیل هندسی آنها پرداخته‌اند که خواننده جهت آشنایی بهتر می‌تواند به [۱۹، ۴۱، ۷۵، ۹۸] مراجعه نماید.

در دهه‌های گذشته معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری به دلیل استفاده روز افزون آن‌ها در توصیف پدیده‌های غیرخطی مختلف در فیزیک، اقتصاد، بیولوژی، مهندسی و سایر علوم بسیار مورد توجه بوده‌اند. مقالات زیادی به بررسی ویژگی‌های معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری و ساختن جواب‌های دقیق برای آنها پرداخته‌اند. شایان ذکر است روش‌های فراوانی برای ساختن جواب‌های عددی، دقیق و صریح برای FDEهای غیر خطی وجود دارند که از جمله آنها می‌توان به روش تجزیه ادومین[۱۹]، روش تبدیل، روش اختلال هوموتوپی، روش زیر_معادله و روش تکرار تغییرات اشاره کرد. اخیرا نویسندگان بسیاری تلاش نموده‌اند تا روش‌های آنالیز گروهی لی را به معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری بسط دهند (برای مثال [۲۴، ۲۶، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۹۶]). در این فصل نیز سعی ما بر آن بود که ناوردایی معادلات دیفرانسیل کسری تحت گروه تبدیلات را برای ساختن جواب دقیق برای آنها به کار بگیریم. در این راستا روش بی‌نهایت کوچک را برای بررسی ناوردایی FDEها تحت یک گروه دلخواه از تبدیلات نقطه‌ای به کار گرفتیم. در نهایت از تقارن‌های به دست آمده برای انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی با مشتقات کسری و نیز برای یافتن جواب‌های ویژه برای معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتق کسری ریمن_لیوویل و نیز کاپوتو استفاده نمودیم. آنچه در اینجا برای نخستین بار بررسی شد تعمیم روش آنالیز گروهی لی به معادلات دیفرانسیل انتگرال با مرتبه کسری بود که بعد از بیان تئوری کلی با کمک چند مثال بسط و شرح داده شد.

---
[۱۸] Olver

[۱۹] Adomin

فصل ۴

قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل

قوانین پایستگی برای درک ما از جهان فیزیکی اساسی هستند، آنها توصیف می کنند که کدام یک از فرآیندها می توانند یا نمی توانند در طبیعت اتفاق بیفتند. به عنوان مثال، قانون پایستگی از انرژی بیان می کند که مقدار کل انرژی در یک سیستم ایزوله تغییر نمی کند، هر چند ممکن است تغییر شکل دهد. قوانین پایستگی دارای تعاریف مختلفی در فیزیک و ریاضی هستند. در فیزیک، یک قانون پایستگی به معنای تغییر نکردن یک ویژگی مشخص قابل اندازه گیری از یک سیستم فیزیکی ایزوله با وجود تغییر سیستم در طول زمان است. از جمله قوانین پایستگی دقیق می‌توان قانون پایستگی انرژی، پایستگی حرکت خطی، پایستگی حرکت زاویه ای و پایستگی بار الکتریکی را نام برد. نمونه‌های بسیاری از قوانین پایستگی تقریبی نیز در فیزیک وجود دارد که از آن جمله می‌توان به پایستگی مقادیری مانند جرم، تقارن زوج‌ها، تعداد لپتون، تعداد باریون و غیره نام برد. این مقادیر در رده‌های خاصی از فرآیندهای فیزیکی، اما نه در همه موارد حفظ می شود.

یک قانون پایستگی موضعی معمولا به صورت ریاضی به عنوان یک معادله دیفرانسیل جزئی که رابطه‌ای بین مقدار یک کمیت و انتقال آن کمیت را می‌دهد، بیان می‌شود. این قانون بیان می کند که مقدار پایستگی یک کمیت در یک نقطه یا درون حجم فقط می‌تواند با مقدار کمیت که در حجم یا خارج از آن جریان دارد، تغییر کند. یکی از نتایج مهم در مورد قوانین پایستگی قضیه نوتر[۱] است. این قضیه بیان می کند که بین هر قانون پایستگی و یک تقارن متمایز در

[۱] Noether

طبیعت یک تناظر یک به یک موجود است پس مفهوم قانون پایستگی به مفهوم تقارن وابسته است.

در مطالعه معادلات دیفرانسیل قوانین پایستگی دارای فواید زیادی هستند. آنها برای تحقیق انتگرال‌پذیری نگاشت‌های خطی و برای اثبات وجود و یکتایی جواب‌ها مهم هستند. این قوانین پایستگی همچنین برای آنالیز پایداری و رفتار عمومی جواب‌ها و توسعه روش‌های عددی استفاده می‌شوند. قانون پایستگی یک دستگاه PDE نمایشی به فرم دیورژانس است که روی تمام جواب‌های دستگاه PDE صفر می‌شود. در حالت کلی هر نمایش دیورژانس غیر بدیهی که قانون پایستگی موضعی از دستگاه PDE را نتیجه می‌دهد، از ضرایب موضعی (فاکتورها)، مرتبط به متغیرهای مستقل و وابسته و همچنین تعداد متناهی مشتقات متغیرهای وابسته به دست می‌آید. ثابت می‌شود که هر نمایش دیورژانس، وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته توسط عملگرهای اویلر پوچ می‌شود. برعکس، اگر عملگرهای اویلر مربوط به متغیرهای وابسته ظاهر شده در نمایشی شامل متغیرهای مستقل و مشتقات متغیرهای وابسته نمایش را پوچ سازد، آنگاه آن نمایش یک نمایش دیورژانس خواهد بود. بنابراین هر دستگاه PDE دارای قانون پایستگی است اگر و تنها اگر مجموعه‌ای از ضرایب موضعی موجود باشد که ترکیب خطی آنها با هر PDE در دستگاه، توسط عملگرهای اویلر مربوط به هر متغیر وابسته پوچ شود.

بنابر این مسأله یافتن قوانین پایستگی یک دستگاه PDF، به مسأله یافتن مجموعه‌ای از ضرایب موضعی منتهی می‌شود که ترکیب خطی آنها با هر PDE دستگاه توسط عملگرهای اویلر پوچ می‌شود. به علاوه، برای هر مجموعه‌ای از ضرایب موضعی که باعث تولید قانون پایستگی می‌شود یک فرمول انتگرالی برای بدست آوردن شار و چگالی‌های قانون پایستگی وجود دارد. اغلب آنها از محاسبه مستقیم بعد از مشخص شدن ضرایب موضعی به دست می‌آیند که معمولاً از آن به عنوان روش مستقیم برای محاسبهٔ قوانین پایستگی یاد می‌کنند.

در سال ۱۹۱۸ نوتر نشان داد که اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل یک اصل تغییراتی را بپذیرد، آنگاه هر گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای که عمل تابعی را پایا نگه دارد یک قانون پایستگی را نتیجه خواهد داد. در حالت خاص، نوتر فرمولی برای شار قوانین پایستگی ارائه نمود. در سال ۱۹۲۱ اریک بسیل_هاگن[۲] قضیه نوتر را توسیع داد. در سال ۱۹۶۷ بویر نشان داد که تمام چنین قوانین پایستگی چگونه توسط گروه‌های لی از تبدیلات نقطه‌ای به فرم پیچشی حاصل می‌شوند.

در سال‌های فردی به نام نیل اچ. ابراگیموف[۳] مفهوم کلی خود الحاقی غیرخطی که برپایه مفهوم لاگرانژی قراردادی است را برای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح معرفی نموده است [۴۶]_[۴۹]. وی ثابت نمود که قوانین پایستگی به تقارن‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی خود الحاق و یا دستگاه‌هایی از این معادلات وابسته است. وی همچنین نشان داد الگوریتم سومندی که پیشتر در [۵۰] و [۵۱] معرفی شده بود برای این معادلات نیز قابل استفاده است.

---

[۲] Erich Bessel-Hagen

[۳] Nail H. Ibragimov

مؤلفه‌های برادر پایستگی در این الگوریتم با اثر دادن عملگرهای نوتر بر لاگرانژی به دست می‌آیند. با این رویکرد قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح و یا دستگاهی متشکل ازاین معادلات که تنها دارای لاگرانژی قراردادی هستند، با استفاده از قوانین پایستگی آنها ساخته می‌شوند ([۹]، [۱۱]، [۱۳]، [۲۳]، [۵۴]، [۵۵]). در این فصل تمامی روش‌های یاد شده برای یافتن قوانین پایستگی را ذکر خواهیم کرد.

۱.۴ قوانین پایستگی موضعی

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $R(x,u) := \Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0$ را با p متغیر مستقل $x = (x^1, \cdots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, \cdots, u^q)$ از مرتبه n به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta_\nu(x,u,u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, l. \tag{۱.۴}$$

تعریف ۱.۱.۴. قانون پایستگی موضعی برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ نمایشی به فرم دیورژانس

$$D_i\Phi^i[u] = D_1\Phi^1[u] + \cdots + D_n\Phi^n[u] = 0, \tag{۲.۴}$$

است که برای همهٔ جواب‌های دستگاه PDE برقرار است. در رابطهٔ (۲.۴)، برای $n, i = 1, \cdots$، $\Phi^i[u] = \Phi^i(x,u,\partial u, \cdots, \partial^r u)$ را شارهای قانون پایستگی می‌نامند و بزرگترین مرتبهٔ مشتق (r) که در نمایش $\Phi^i[u]$ ظاهر شده است را مرتبهٔ قانون پایستگی گویند.

ملاحظه ۱.۱.۴. اگر یکی از متغیرهای مستقل $R(x,u)$ زمان t باشد، آنگاه قانون پایستگی (۲.۴) به صورت

$$D_t\Psi[u] + D_1\Phi^1[u] + \cdots + D_{n-1}\Phi^{n-1}[u] = 0, \tag{۳.۴}$$

خواهد بود که $\Psi[u]$ را چگالی قانون پایستگی می‌نامند .

مثال ۱.۱.۴. هر دستگاه PDE معین تعداد نامتناهی قوانین پایستگی موضعی دارد. یکی از مثال‌های معروف در این زمینه معادلهٔ KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

است [۲۰]. علاوه بر قوانین پایستگی جرم، گشتاور و انرژی که به ترتیب با روابط

$$D_t(u) + D_x\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) = 0,$$
$$D_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) + D_x\left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0,$$
$$D_t\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) + D_x\left(\frac{1}{8}u^4 - uu_x^2 + \frac{1}{2}(u^2u_{xx} + u_{xx}^2) - u_xu_{xxx}\right) = 0,$$

داده می‌شوند، معادلهٔ KdV یک دنبالهٔ نامتناهی از قوانین پایستگی موضعی نیز دارند که با عبارت

$$D_t\left(\frac{5}{72}u^4-\frac{5}{6}uu_x^2+\frac{1}{2}u_{xx}^2\right)+D_x\Big(\frac{1}{18}u^5-\frac{5}{12}u^2u_x^2+\frac{5}{6}u_x^2u_{xx}$$
$$+\frac{4}{3}uu_{xx}^2-\frac{5}{3}uu_xu_{xxx}-\frac{1}{2}u_{xxx}^2+u_{xx}u_{xxxx}\Big)=0,$$

ارائه می‌شود. معادله KdV قوانین پایستگی موضعی به صورت

$$D_t\left(\frac{1}{2}tu^2-xu\right)+D_x\left(-\frac{1}{2}xu^2+tuu_{xx}-\frac{1}{2}tu_x^2-xu_{xx}+u_x\right)=0,$$

دارد که در آن جملاتی با وابستگی مستقیم به متغیرهای x و t ظاهر شده‌اند. این قانون پایستگی برای توصیف حرکت مرکز جرم در یک موج سطحی به کار می‌رود.

تعریف ۲.۱.۴ قانون پایستگی (۲.۴)، یک قانون پایستگی بدیهی برای دستگاه $R(x,u)$ است اگر $\Phi^i[u]=M^i[u]+H^i[u]$ شارهای آن باشند که $M^i[u]$ و $H^i[u]$ توابعی از x، u و مشتقات u هستند به طوریکه $M^i[u]$ روی جواب‌های دستگاه صفر شود و رابطهٔ $D_iH^i[u]\equiv 0$ برقرار باشد.

به عنوان مثال دستگاه PDE

$$v_x=u,\qquad v_t=K(u)u_x,$$

دارای قانون پایستگی بدیهی از مرتبهٔ اول

$$D_t\left[u(u-v_x)\right]+D_x\left[2(v_t-k(u)u_x)\right]=0,$$

و نیز قانون پایستگی بدیهی از مرتبهٔ دوم به صورت

$$D_t(u_{xx})-D_x(u_{tx})=0,$$

است. به عنوان یک مثال مهم از قوانین پایستگی بدیهی می‌توان $\mathrm{div}(\mathrm{Curl}f)=0$ را در نظر گرفت که در آن $f(x)$ تابعی برداری در $\mathbb{R}^3$ است.

تعریف ۳.۱.۴ دو قانون پایستگی $D_i\Phi^i[u]=0$ و $D_i\Psi^i[u]=0$ را معادل نامند اگر

$$D_i(\Phi^i[u]-\Psi^i[u])=0,$$

یک قانون پایستگی بدیهی باشد. یک رده هم ارزی از قوانین پایستگی شامل قوانین پایستگی معادل با یک قانون پایستگی غیر بدیهی است.

در ادامه به بررسی انواع روش‌های مختلف برای یافتن قوانین پایستگی یک دستگاه PDE خواهیم پرداخت.

۲.۴ ضرایب نامعین تابعی برای قوانین پایستگی

در حالت کلی، برای دستگاه $R(x,u)$، قوانین پایستگی غیر بدیهی از ترکیب خطی معادلات دستگاه $R(x,u)$ با ضرایب تابعی خاصی (فاکتورها، مشخصه‌ها) که نمایش دیورژانس غیر بدیهی را نتیجه می‌دهند، به دست می‌آیند. برای یافتن چنین نمایش‌هایی، متغیرهای وابسته و مشتقات آنها که در دستگاه PDE یا ضرایب تابعی ظاهر شده‌اند، با توابع دلخواهی جایگزین می‌شوند. با چنین عملی نمایش‌های دیورژانسی حاصل روی تمام جواب‌های دستگاه PDE، $R(x,u)$ صفر می‌شوند.

در حالت خاص، مجموعه‌ای از ضرایب تابعی $\Lambda_\nu[U]_{\nu=1}^l = \Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)_{\nu=1}^l$ برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ نمایش دیورژانسی را تولید می‌کنند اگر اتحاد

$$\Lambda_\nu[U]\Delta_\nu[U] \equiv D_i\Phi^i[U], \tag{۴.۴}$$

برای توابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد، آنگاه روی جواب $U(x)=u(x)$، اگر $\Lambda_\nu[U]$ ناتکین باشد، دارای یک قانون پایستگی به صورت

$$\Lambda_\nu[u]\Delta_\nu[u] = D_i\Phi^i[u] = 0, \tag{۵.۴}$$

است. ضریب تابعی $\Lambda_\nu[U]$ تکین است، هرگاه روی جواب $U(x)=u(x)$ از دستگاه PDE، $R(x,u)$ تابع تکین باشد. در عمل ضرایب تابعی ناتکین مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا با در نظر گرفتن ضرایب تابعی تکین به نمایش‌های دیورژانسی خواهیم رسید که قانون پایستگی برای دستگاه نمی‌باشند. در این حالت یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ به یافتن مجموعه‌ای از ضرایب تابعی موضعی کاهش پیدا می‌کند.

تعریف ۱.۲.۴. عملگر اویلر_لاگرانژ برای U^j برای $j=1,\cdots,q$ به صورت

$$E_{U^j} = \frac{\partial}{\partial U^j} - D_i\frac{\partial}{\partial U_i^j} + \cdots + (-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial U^j_{i_1\cdots i_s}} + \cdots, \tag{۶.۴}$$

تعریف می‌شود.

با محاسبهٔ مستقیم، می‌توان دید که عملگر اویلر_لاگرانژ هر نمایش دیورژانسی به صورت $D_i\Phi^i[U]=0$ را پوچ می‌کند. در حالت خاص، اتحاد

$$E_{U^j}(D_i\Phi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)) \equiv 0, \quad j=1,\cdots,q, \tag{۷.۴}$$

برای هر $U(x)$ دلخواه برقرار است. عکس این مطلب نیز صادق است یعنی تنها نمایش اسکالری که توسط عملگر اویلر پوچ می‌شود نمایش دیورژانس است. این موضوع به قضیه زیر منتج می‌شود.

قضیه ۱.۲.۴. معادلات $E_{U^j}F(x,U,\partial U,\cdots,\partial^s U)\equiv 0$، $j=1,\cdots,q$ برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است اگر و تنها اگر

$$F(x,U,\partial U,\cdots,\partial^s U)\equiv D_i\Psi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^{s-1}U),$$

برای توابع $\Psi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^{s-1}U)$ که در آن $i=1,\cdots,q$ برقرار باشد.

برهان. [۲۰]. □

بنا به قضیه (۱.۲.۴) قضیه زیر ارتباط بین ضرایب تابعی موضعی و قوانین پایستگی موضعی را مشخص می‌کند.

قضیه ۲.۲.۴. مجموعه‌ای از ضرایب تابعی موضعی ناتکین $\{\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\}_{\nu=1}^{l}$ قوانین پایستگی دستگاه $R(x,u)=\Delta_\nu(x,u^{(n)})$ را تولید می‌کند اگر و تنها اگر اتحاد

$$E_{U^j}(\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\Delta_\nu(x,u^{(n)}))\equiv 0,\quad j=1,\cdots,q, \tag{۸.۴}$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد.

برهان. [۲۰]. □

از مجموعه معادلات (۸.۴) مجموعه‌ای از معادلات مشخصهٔ خطی برای یافتن تمام ضرایب تابعی قوانین پایستگی دستگاه $R(x,u)$ نتیجه می‌شود. چون معادلات (۸.۴) برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، می‌توان U^j و تمام مشتقات آن را به عنوان متغیرهای مستقلی نسبت به x^i در نظر گرفت، بنابراین دستگاه PDE خطی (۸.۴) به دستگاه خطی از معادلات مشخصه تبدیل می‌شود که جواب‌های آن مجموعه‌هایی از ضرایب تابعی موضعی برای دستگاه PDE، $R(x,u)$ خواهند بود.

توجه به این نکته مهم است برای دستگاه PDE که بر اساس مشتقات پیشرو قابل حل باشد، عکس قضیه (۲.۲.۴) برقرار است. در حالت خاص، فرض کنید هر PDE از دستگاه مرتبه r، $R(x,u)$ را بتوان به فرم حل شده

$$R^\nu[u]=u^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}-G^\nu(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)=0,\quad \nu=1,\cdots,l, \tag{۹.۴}$$

نوشت به طوریکه $s\leqslant k$، $1\leqslant j_\nu\leqslant q$، $1\leqslant i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}\leqslant p$. در (۹.۴)، $\{u^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}\}$ مجموعه‌ای شامل تعداد l مشتق پیشرو مستقل خطی از مرتبه S است با این ویژگی که هیچ کدام از آن‌ها و مشتقات مربوط به آن‌ها در $\{G^\nu[u]\}_{\nu=1}^{l}$ ظاهر نشده‌اند. بنابر این بدون کاستن از کلیت مسأله تمام مشتقات پیشرو و مشتقات مربوط به آنها را می‌توان در شارهای $\Phi^i[U]$ از قوانین پایستگی حذف کرد. قضیه زیر از این مطلب نتیجه می‌شود.

قضیه ۳.۲.۴. برای هر قانون پایستگی موضعی $D_i\Phi^i[U]=0$ از دستگاه $R(x,u)$ که به فرم حل شده (۹.۴) بیان شده، قوانین پایستگی موضعی معادلی وجود داردکه می‌توان آن‌ها را به فرم مشخصه

$$D_i\tilde{\Phi}^i[U]=\tilde{\Lambda}_\nu[U](U^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}-G^\nu[U]), \qquad (۱۰.۴)$$

با جملاتی از مجموعهٔ ضرایب موضعی ناتکین $\{\tilde{\Lambda}_\nu[U]\}_{\nu=1}^{l}$ و شارهایی که شامل جملات $U^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}$ نیستند، نوشت.

برهان. [۲۰]. □

اهمیت اصلی قضیه (۳.۲.۴) در این است که به طور اساسی تمام قوانین پایستگی حاصل شده از ضرایب تابعی، دستگاه $R(x,u)$ را که به فرم حل شده بیان شده، تا حد هم ارزی مشخص می‌کند.

۳.۴ روش مستقیم برای ساختن قوانین پایستگی

قضیه‌های (۲.۲.۴) و (۳.۲.۴)، روش الگوریتمی را برای یافتن قوانین پایستگی ارائه می‌دهند که به آن روش مستقیم می‌گویند و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

۱) برای دستگاه $R(x,u)$ مجموعه ضرایب تابعی $\{\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\}_{\nu=1}^{l}$ را بیابید.

۲) معادلات مشخصه (۸.۴) را برای تابع دلخواه $U(x)$ به منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل نمایید.

۳) شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)$ را پیدا کنید که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\Lambda_\nu(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U)\Delta_\nu(x,u^{(n)})\equiv D_i\Phi^i(x,U,\partial U,\cdots,\partial^r U). \qquad (۱۱.۴)$$

۴) هر شار و ضریب تابعی یک قانون پایستگی $D_i\Phi^i(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u)\equiv 0$ برای تمام جواب‌های $u(x)$ نتیجه می‌دهد.

در عمل برای حل معادلات مشخصهٔ (۸.۴) بهتر است دستگاه $R(x,u)$ را در حالت حل شده نسبت به مشتق‌های پیشرو نوشت. در حالت خاص وقتی دستگاه $R(x,u)$ به صورت حل شده نوشته می‌شود قضیه (۳.۲.۴) تضمین می‌کند که تمام قوانین پایستگی موضعی به دست آیند. به علاوه در حالت دستگاه حل شده، ضرایب تابعی تکین (که قانون پایستگی تولید نمی‌کنند) و بدیهی (که قوانین پایستگی بدیهی را نتیجه می‌دهند) حذف خواهند شد و در نتیجه، شارها را می‌توان به صورت مستقیم با مقایسه طرفین معادله (۱۱.۴)، یا در حالت‌های پیچیده از

ضرایب تابعی یا دستگاه PDE با انتگرال گیری پیدا کرد. البته انتگرال گیری تیردار برخی از موارد بسیار پیچیده خواهد شد که برای رفع این مشکل از عملگر هوموتوپی استفاده خواهیم کرد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

۱.۳.۴ فرم کوشی ـ کوالسکی

در حالت کلی، تناظر یک به یک بین مجموعه‌های ضرایب تابعی موضعی غیر بدیهی و شارهای غیر بدیهی تنها برای دستگاه‌های PDE که فرم کوشی ـ کوالسکی[۴] می‌پذیرند برقرار است.

تعریف ۱.۳.۴ دستگاه $R(x,u)$ به فرم کوشی ـ کوالسکی نسبت به متغیر مستقل x^j است، اگر دستگاه نسبت به بیشترین مرتبه مشتق هر متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل x^j قابل حل باشد، یعنی

$$\frac{\partial^{s_\nu}}{\partial(x^j)^{s_\nu}}u^\nu = G^\nu(x,u,\partial u,\cdots,\partial^r u), \quad 1\leq s_\nu\leq r, \quad \nu=1,\cdots,q, \tag{۱۲.۴}$$

که در آن همه مشتق‌های نسبت به x^j که در سمت راست هر PDE از (۱۲.۴) ظاهر شده است دارای مرتبه کمتری از مشتق‌های سمت چپ است.

قضیه ۱.۳.۴ فرض کنید دستگاه PDE فرم کوشی ـ کوالسکی (۱۲.۴) را بپذیرد. در این صورت تمام قوانین پایستگی موضعی غیر بدیهی از ضرایب تابعی نتیجه می‌شود. به علاوه تناظر یک به یکی بین رده‌های هم ارزی از قوانین پایستگی و مجموعه‌های ضرایب تابعی مستقل از مشتق‌های u^ν نسبت به x^j وجود دارد.

برهان. [۱۰]. □

باید به این نکته توجه نمود که فرم کوشی ـ کوالسکی از یک دستگاه PDE نسبت به مشتق‌های پیشرو برای تمام متغیرهای وابسته حالت خاصی از دستگاه حل شده است. بنابراین یک دستگاه PDE فرم کوشی ـ کوالسکی می‌پذیرد اگر تعداد متغیرهای وابسته آن با تعداد PDEهای دستگاه برابر باشد.

برای درک بهتر روش مستقیم قوانین پایستگی مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۴ دستگاه معادلات غیر خطی تلگراف ($u^1=u$، $u^2=v$) به صورت

$$\begin{aligned} R^1[u,v] &= v_t-(u^2+1)u_x-u=0,\\ R^2[u,v] &= u_t-v_x=0, \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

تعریف می‌شود [۲۰]. این دستگاه به فرم کوشی ـ کوالسکی مرتبه اول، با مشتق‌های پیشرو v_t و u_t است. باید ضرایب تابعی موضعی به فرم

$$\Lambda_1=\xi(x,t,U,V), \qquad \Lambda_2=\phi(x,t,U,V), \tag{۱۴.۴}$$

[۴] Kovalevskaya

را برای دستگاه PDE بیابیم. جملات عملگر اویلر_لاگرانژ عبارتند از

$$E_U = \frac{\partial}{\partial U} - D_x\frac{\partial}{\partial U_x} - D_t\frac{\partial}{\partial U_t}, \qquad E_V = \frac{\partial}{\partial V} - D_x\frac{\partial}{\partial V_x} - D_t\frac{\partial}{\partial V_t}.$$

معادلات مشخصه (۸.۴) برای ضرایب تابعی (۱۴.۴) به صورت

$$E_U\left[\xi(x,t,U,V)(V_t-(U^2+1)U_x-U)+\phi(x,t,U,V)(U_t-V_x)\right]\equiv 0,$$

(۱۵.۴)

$$E_V\left[\xi(x,t,U,V)(V_t-(U^2+1)U_x-U)+\phi(x,t,U,V)(U_t-V_x)\right]\equiv 0,$$

خواهند بود به طوریکه $U(x,t)$ و $V(x,t)$ توابع دلخواهی از متغیرهای مستقل هستند. معادلات (۸.۴) نسبت به U_t, V_t, U_x و V_x به دستگاه PDE خطی

$$\begin{aligned} &\phi_V-\xi_U=0, && \phi_U-(U^2+1)\xi_V=0,\\ &\phi_x-\xi_t-U\xi_V=0, && (U^2+1)\xi_x-\phi_t-U\xi_U-\xi=0 \end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

تجزیه می‌شوند. جواب‌های دستگاه مشخصه (۱۶.۴) پنج مجموعه از ضرایب تابعی موضعی از مرتبه صفر به شکل

$$\begin{aligned} &(\xi_1,\phi_1)=(0,1), && (\xi_2,\phi_2)=\left(t,x-\frac{1}{2}t^2\right),\\ &(\xi_3,\phi_3)=(1,-t), && (\xi_4,\phi_4)=\left(e^{x+\frac{1}{2}U^2+V},Ue^{x+\frac{1}{2}U^2+V}\right),\\ &(\xi_5,\phi_5)=\left(e^{x+\frac{1}{2}U^2-V},-Ue^{x+\frac{1}{2}U^2-V}\right), \end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

می‌باشند که هر $(\xi.\phi)$ یک قانون پایستگی غیر بدیهی از مرتبهٔ صفر با مشخصه

$$D_t\Psi(x,t,U,V)+D_x\Phi(x,t,U,V)\equiv\xi(x,t,U,V)R^1[U,V]+\phi(x,t,U,V)R^2[U,V],$$

تولید می‌کند. با مساوی قرار دادن جملات مشتق مشابه در طرفین رابطهٔ فوق، عبارات

$$\begin{aligned} &\Psi_U=E_U\Psi=\phi, && \Psi_V=E_V\Psi=\xi,\\ &\Phi_U=\xi\frac{\partial R^1}{\partial U_x}+\phi\frac{\partial R^2}{\partial U_x}, && \Phi_V=\xi\frac{\partial R^1}{\partial V_x}+\phi\frac{\partial R^2}{\partial V_x}=-\phi,\\ &\Psi_t+\Phi_x=-U\xi, \end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

حاصل می‌شوند و با انتگرال گیری از معادلات (۱۸.۴) برای هر مجموعه‌ای از ضرایب تابعی، پنج قانون پایستگی مستقل خطی مرتبه صفر برای دستگاه PDE، (۱۳.۴) به صورت

$$\begin{aligned} &D_tu+D_x[-v]=0,\\ &D_t\left[(x-\frac{1}{2}t^2)u+tv\right]+D_x\left[(-x+\frac{1}{2}t^2)v-t(\frac{1}{3}u^3+u)\right]=0,\\ &D_t[v-tu]+D_x\left[(tv-(\frac{1}{3}u^3+u)\right]=0,\\ &D_t\left[e^{x+\frac{1}{2}u^2+v}\right]+D_x\left[-ue^{x+\frac{1}{2}u^2+v}\right]=0,\\ &D_t\left[e^{x+\frac{1}{2}u^2-v}\right]+D_x\left[ue^{x+\frac{1}{2}u^2-v}\right]=0, \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

به دست می‌آیند. برای جزئیات بیشتر به [۲۱] مراجعه نمایید.

۴.۴ قضیه نوتر

در سال ۱۹۱۸ امی نوتر الگوریتم مشهور خود (قضیه نوتر) برای یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که اصل تغییراتی را می‌پذیرند، ارائه نمود [۷۱]. زمانی که دستگاه معادلات دیفرانسیل اصل تغییراتی را می‌پذیرد، آنگاه اکسترم‌های اصل تغییراتی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را نتیجه می‌دهد که آنها را معادلات اویلر لاگرانژ می‌نامند. در این حالت نوتر نشان داد که اگر یک تقارن نقطه‌ای از اصل تغییراتی موجود باشد، آنگاه شارهای قانون پایستگی موضعی توسط فرمولی صریح شامل بی‌نهایت کوچک‌هایی از تقارن نقطه‌ای و لاگرانژی (چگالی لاگرانژی) از اصل تغییراتی به دست می‌آیند.

۱.۴.۴ معادلات اویلر ـ لاگرانژ

تابعک $J[u]$ با n متغیر مستقل $x=(x^1,\cdots,x^n)$ و m تابع دلخواه $U=(U^1(x),\cdots,U^m(x))$ و مشتق‌های آنها تا مرتبهٔ k که روی دامنه Ω تعریف شده اند را به صورت

$$J[U]=\int_\Omega L[U]dx=\int_\Omega L(x,U,\partial U,\cdots,\partial^k U)dx, \tag{۲۰.۴}$$

در نظر بگیرید. تابع $L[U]=L(x,U,\partial U,\cdots,\partial^k U)$ را لاگرانژی و تابعک $J[U]$ را اصل تغییراتی می‌نامند. تغییر بی‌نهایت کوچک از U به صورت $U(x)\to U(x)+\varepsilon v(x)$ است که در آن $v(x)$ تابعی است که خودش و مشتقات آن از مرتبه $k-1$ بر روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω صفر می‌شوند. تغییر متناظر در لاگرانژی $L[U]$ به شکل

$$\begin{aligned}\delta L&=L(x,U+\varepsilon v,\partial U+\varepsilon\partial v,\cdots,\partial^k U+\varepsilon\partial^k v)-L(x,U,\partial U,\cdots,\partial^k U)\\&=\varepsilon\left(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma}v^\sigma+\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_j}v^\sigma_j+\cdots+\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{j_1\cdots j_k}}v^\sigma_{j_1\cdots j_k}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{۲۱.۴}$$

است و با چندین بار انتگرال گیری جز به جز می‌توان نشان داد که

$$\delta L=\varepsilon(v^\sigma E_{U^\sigma}(L[U])+D_iW^i[U,v])+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۲۲.۴}$$

که E_{U^σ} عملگر اویلرـلاگرانژ نسبت به U^σ است و $W^i[U,v]$ با رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned}W^i[U,v]=v^\sigma&\left(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_i}+\cdots+(-1)^{k-1}D_{j_1}\cdots D_{j_{k-1}}\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1\cdots j_{k-1}}}\right)\\&+v^\sigma_{j_1}\left(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1}}+\cdots+(-1)^{k-2}D_{j_2}\cdots D_{j_{k-1}}\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1j_2\cdots j_{k-1}}}\right)\\&+\cdots+v^\sigma_{j_1\cdots j_{k-1}}\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1j_2\cdots j_{k-1}}}.\end{aligned} \tag{۲۳.۴}$$

بنا به نمایش (۲۲.۴) و قضیه دیورژانس، تغییر متناظر در $J[U]$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\delta J &= J[U+\varepsilon v] - J[U] = \int_\Omega \delta L dx \\ &= \varepsilon \int_\Omega \Big(v^\sigma E_{U^\sigma}(L[U]) + D_l W^l[U,v] \Big) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \left(\int_\Omega v^\sigma E_{U^\sigma}(L[U]) dx + \int_{\partial\Omega} W^l[U,v] n^l dS \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

که $\int_{\partial\Omega}$ بیانگر انتگرال سطح روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω با $n=(n^1,\cdots,n^n)$ به عنوان بردار نرمال برون سوی یکه است. بنابراین، اگر $U=u(x)$ اکسترمم $J[U]$ باشد، آنگاه جمله $\mathcal{O}(\varepsilon)$ از δJ باید صفر شود و بنابراین:

$$\int_\Omega v^\sigma E_{u^\sigma}(L[U]) dx = 0, \tag{۲۵.۴}$$

که $v(x)$ تابع دلخواه تعریف شده روی دامنه Ω است. بنابراین، اگر $U=u(x)$ اکسترمم $J[U]$ باشد، آنگاه $u(x)$ باید در دستگاه PDE

$$E_{u^\sigma}(L[U]) = \frac{\partial L[U]}{\partial u^\sigma} + \cdots + (-1)^k D_{j_1}\cdots D_{j_k} \frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma_{j_1\cdots j_k}} = 0,\ \sigma=1,\cdots,m, \tag{۲۶.۴}$$

صدق کند. معادلات (۲۶.۴) را معادلات اویلر لاگرانژ می‌نامند که اکسترمم $U=u(x)$ از اصل تغییراتی $J[u]$ در این معادلات صادق است. بنابراین قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۴.۴. اگر تابع هموار $U(x)=u(x)$ اکسترمم اصل تغییراتی

$$J[U] = \int_\Omega L[U] dx,$$

با $L[U] = L(x,U,\partial U,\cdots,\partial^k U)$ باشد، آنگاه $u(x)$ در معادلات اویلر_لاگرانژ (۲۶.۴) صدق می‌کند.

۲.۴.۴ الگوریتم نوتر از قضیه نوتر

در این بخش به بیان الگوریتم نوتر از قضیه نوتر خواهیم پرداخت. در این الگوریتم لازم است که اصل تغییراتی $J[U]$ تحت گروه لی یک_پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= x^i + \varepsilon\xi^i(x,U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad i=1,\cdots,n, \\ \tilde{U}^\alpha &= U^\alpha + \varepsilon\eta^\alpha(x,U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \alpha=1,\cdots,m,\end{aligned} \tag{۲۷.۴}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \xi(x,U)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,U)\frac{\partial}{\partial U^\alpha} = \sum_{i=1}^n \xi^i(x,U)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(x,U)\frac{\partial}{\partial U^\alpha}, \tag{۲۸.۴}$$

ناوردا باشد. ناوردایی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\int_{\tilde{\Omega}} L[\tilde{U}]d\tilde{x} = \int_{\Omega} L[U]dx,$$

که $\tilde{\Omega}$ تصویر Ω تحت تبدیل نقطه‌ای (۲۷.۴) است. ژاکوبین تبدیل (۲۷.۴) عبارتست از:

$$\mathrm{J} = \det(D_i\tilde{x}^i) = 1 + \varepsilon D_i\xi^i(x,U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۲۹.۴}$$

در این صورت $d\tilde{x} = \mathrm{J}dx$. به علاوه، چون (۲۷.۴) گروه لی از تبدیلات است، بنابر این عبارت $L[\tilde{U}] = \mathrm{e}^{\varepsilon \mathbf{v}^{(k)}} L[U]$ برقرار است که دارای جملاتی از توسیع مرتبه kـام بی‌نهایت کوچک (۲۸.۴) است. در نتیجه در الگوریتم نوتر، گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۴) تقارن نقطه‌ای برای $J[U]$ است اگر و تنها اگر رابطه

$$\int_{\Omega} (\mathrm{J}\mathrm{e}^{\varepsilon\mathbf{v}^{(k)}} - 1)L[U]dx = \varepsilon \int_{\Omega} \Big(L[U](D_i\xi^i(x,U)) + \mathbf{v}^{(k)}L[U]\Big)dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۳۰.۴}$$

برای هر $U(x)$ برقرار باشد. بنابراین، اگر $J[U]$ دارای تقارن نقطه‌ای (۲۷.۴) باشد، آنگاه جمله $\mathcal{O}(\varepsilon)$ در (۳۰.۴) صفر خواهد شد و در نتیجه اتحاد زیر برقرار است:

$$L[U]D_i\xi^i(x,U) + \mathbf{v}^{(k)}L[U] \equiv 0. \tag{۳۱.۴}$$

می‌دانیم که گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۴) با خانواده‌ای از تبدیلات موضعی به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i, \qquad i = 1, \cdots, n, \\ \tilde{U}^\alpha &= U^\alpha + \varepsilon[\eta^\alpha(x,U) - U_i^\alpha\xi^i(x,U)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, \cdots, m, \end{aligned} \tag{۳۲.۴}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک امتداد یافته مرتبه kـام متناظرش یعنی $\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$ که با جایگذاری U به جای u توسط روابط (۷۰.۳) و (۷۱.۳) بیان شدند، معادل است.

تحت تبدیل (۳۲.۴)، تغییر بی‌نهایت کوچک $U(x) \to U(x) + \varepsilon v(x)$ دارای مؤلفه‌های

$$v^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U] = \eta^\alpha(x,U) - U_i^\alpha\xi^i(x,U),$$

با جملاتی از تبدیل (۳۲.۴)می‌باشند. بعلاوه، بنابر خواص گروهی از (۳۲.۴) نتیجه می‌شود که

$$\delta L = \varepsilon\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}L[U] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۳۳.۴}$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است

$$\int_{\Omega} \delta L dx = \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}^{(k)}L[U]dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{۳۴.۴}$$

بعد از مقایسه روابط (۳۴.۴) و (۲۴.۴) با $v^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U] = \eta^\alpha(x,U) - U_i^\alpha\xi^i(x,U)$، داریم

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}L[U] \equiv \tilde{\eta}^\alpha E_{U^\alpha}(L[U]) + D_iW^i[U,\tilde{\eta}^\alpha[U]], \tag{۳۵.۴}$$

که در آن $W^i[U,\tilde{\eta}^\alpha[U]]$ توسط رابطه (۲۳.۴) بیان می‌شود.

لم ۱.۴.۴. فرض کنید $\mathbf{v}^{(k)}$ امتدادمرتبه kــ ام مولد بی‌نهایت کوچک از گروه یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۴) و $\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$ امتداد مرتبه kــ ام مولد بی‌نهایت کوچک از تبدیلات یک پارامتری معادل آن (۳۲.۴) باشد. اگر $F(U) = F(x, U, \partial U, \cdots, \partial^k U)$ تابع دلخواهی باشد، آنگاه اتحاد زیر برقرار است

$$\mathbf{v}^{(k)}F[U] + F[U]D_i\xi^i(x,U) \equiv \tilde{\mathbf{v}}^{(k)}F[U] + D_i(F[U]\xi^i(x,U)). \qquad (۳۶.۴)$$

برهان. [۲۰]. □

بنابر آنچه در بالا آمد، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۴.۴. (قضیه نوتر). فرض کنید دستگاه $R(x,u)$، (۱.۴) از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد، یعنی دستگاه PDE مفروض، مجموعه‌ای از معادلات اویلرــ لاگرانژ (۲۵.۴) باشد که جواب‌های $u(x)$ اکسترمم $U(x) = u(x)$ اصل تغییراتی $J[U]$ (۲۰.۴) با لاگرانژی $L[U]$ باشد. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۴) تقارن نقطه‌ای از $J[U]$ باشد و نیز $W^i[U,u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطهٔ (۲۵.۴) تعریف شده باشد. در این صورت اولاً رابطهٔ

$$\tilde{\eta}^\alpha[U]E_{U^\alpha}(L[U]) \equiv -D_i\Big(\xi^i(x,U)L[U] + W^i[U,\tilde{\eta}^\alpha[U]]\Big), \qquad (۳۷.۴)$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. یعنی $\{\tilde{\eta}^\alpha[U]\}_{\alpha=1}^m$ مجموعه‌ای از ضرایب تابعی از دستگاه اویلرــ لاگرانژ (۲۵.۴) است. ثانیاً قانون پایستگی موضعی

$$D_i\Big(\xi^i(x,u)L[u] + W^i[u,\tilde{\eta}^\alpha[u]]\Big) = 0, \qquad (۳۸.۴)$$

برای هر جواب $u = \Theta(x)$ از دستگاه اویلرــ لاگرانژ (۲۵.۴)برقرار است.

برهان. در اتحاد (۳۶.۴) قراردهید $F[U] = L[U]$، در این صورت از اتحاد (۳۱.۴) نتیجه می‌شود، رابطه

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}L[U] + D_i(L[U]\xi(x,U)) \equiv 0, \qquad (۳۹.۴)$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. در رابطهٔ (۳۹.۴) به جای $\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}L[U]$ از رابطهٔ (۳۶.۴) مساویش را قرار دهید، آنگاه (۳۷.۴) حاصل می‌شود. اگر $U(x) = u(x)$ جواب دستگاه اویلرــ لاگرانژ (۲۵.۴) باشد، آنگاه سمت چپ رابطهٔ (۳۷.۴) صفر می‌شود و قانون پایستگی (۳۸.۴) به دست می‌آید. □

۳.۴.۴ تعمیم قضیه نوتر

در سال ۱۹۶۷، بویر[۵]، [۱۸] قضیه‌ی نوتر را برای یافتن قوانین پایستگی حاصل از تبدیلات مرتبه بالاتر، تعمیم داد. در این حالت خاص، اصل تغییراتی $J[U]$ ، نسبت به تبدیلات مرتبه

[۵] T. H. Boyer

بالاتر یک پارامتری ناوردا است هرگاه لاگرانژی آن، یعنی $L[U]$، نسبت به چنین تبدیلاتی ناوردا باشد.

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنید

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{m} \tilde{\eta}^\alpha(x, U, U^{(s)}) \frac{\partial}{\partial U^\alpha}, \tag{۴۰.۴}$$

مولد بی‌نهایت کوچک تبدیلات موضعی مرتبه بالاتر با امتداد $\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)}$ باشد، که

$$\tilde{\eta}^\alpha[U] \equiv \tilde{\eta}^\alpha[x, U, U^{(s)}],$$

این تبدیل یک تقارن موضعی برای $\mathrm{J}\,[U]$ است اگر وتنها اگر

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} L[U] \equiv D_i A^i[U], \tag{۴۱.۴}$$

برای مجموعه ای از توابع $A^i[U] = A^i(x, U, \partial U, \ldots, \partial^r U)$ ، برقرار باشد. در رابطهٔ فوق $\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)}$به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} = \tilde{\eta}^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \tilde{\eta}_i^{(1)\mu} \frac{\partial}{\partial u_i^\mu} + \ldots + \tilde{\eta}_{i_1\ldots i_p}^{(p)\mu} \frac{\partial}{\partial u_{i_1\ldots i_p}^\mu} + \cdots .$$

تعریف ۲.۴.۴. تبدیل موضعی

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \tilde{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon \tilde{\eta}^\alpha(x, u^{(k)}) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \end{aligned}$$

بامولد بی‌نهایت کوچک $\tilde{\mathbf{v}}$، که یک تقارن موضعی برای $\mathrm{J}\,[U]$ است را، تقارن تغییراتی برای $\mathrm{J}\,[U]$ می‌نامند.

قضیه ۳.۴.۴. **(تعمیم بویر از قضیه نوتر).** فرض کنید دستگاه PDE، مانند $R(x, U)$، از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد، یعنی، دستگاه PDE مفروض، مجموعه ای از معادلات اویلر_ لاگرانژ (۲۵.۴) باشد که جوابهای $u(x)$ اکسترمم $U(x) = u(x)$ از اصل تغییراتی $\mathrm{J}\,[U]$ ، با لاگرانژی $L\,[U]$ باشد. گروه لی یک پارامتری از تبدیلات موضعی بامولد بی‌نهایت کوچک (۴۰.۴)، به عنوان تقارن تغییراتی از $\mathrm{J}\,[U]$ در نظر بگیرید. چناچه $W^1[U, u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۲۳.۴) تعریف شده باشد، در اینصورت

- رابطه

$$\tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(L\,[U]) \equiv D_i \left(A^i[U] - W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]\right), \tag{۴۲.۴}$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، یعنی $\{\tilde{\eta}^\alpha[U]\}_{\alpha=1}^m$ ، مجموعه‌ای از ضرایب تابعی برای دستگاه اویلر_ لاگرانژ (۲۳.۴) است.

- قانون پایستگی موضعی

$$D_i\left(W^i[U,\tilde{\eta}^\alpha[u]] - A^i[u]\right) = 0, \tag{۴۳.۴}$$

برای هر جواب $u = \Theta(x)$ از دستگاه اویلر_لاگرانژ (۲۳.۴) برقرار است.

برهان. برای تبدیل موضعی با مولد (۴۰.۴)، تغییر بی‌نهایت کوچک $U(x) \to U(x) + \varepsilon v(x)$ دارای مؤلفه‌های $\tilde{v}^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U]$ است. بنابراین، معادله (۳۳.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta L = \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} L[U] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۴۴.۴}$$

اما از (۲۲.۴) داریم

$$\delta L = \varepsilon\Big(\tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(L[U]) + D_i(W^i[U,\tilde{\eta}[U]])\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{۴۵.۴}$$

بنابر این

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} L[U] = \tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(L[U]) + D_i(W^i[U,\tilde{\eta}[U]]), \tag{۴۶.۴}$$

برای توابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. از آنجاییکه تبدیل موضعی (۴۰.۴) تقارن تغییراتی $\mathrm{J}[U]$ است، در نتیجه معادلات (۴۱.۴) برقرار است. باجایگزینی $\tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} L[U]$ در (۴۶.۴) از (۴۱.۴)، اتحاد (۴۲.۴) نتیجه می‌شود. اگر $U(x) = u(x)$ جواب دستگاه اویلر_لاگرانژ (۲۵.۴) باشد، آنگاه سمت چپ رابطهٔ (۴۲.۴) صفر می‌شود و قانون پایستگی (۴۳.۴) به دست می‌آید. □

قضیه ۴.۴.۴. اگر قانون پایستگی از قضیه نوتر حاصل شده باشد، آنگاه قانون پایستگی مذکور از تعمیم قضیه نوتر (الگوریتم بویر) نیز به دست می آید.

برهان. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۴) منجر به قانون پایستگی شده باشد. در این صورت اتحاد (۳۹.۴) برقرار است. در نتیجه داریم:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(k)} L[U] = \tilde{\mathbf{v}}^{(\infty)} L[U] = D_i A^i[U], \tag{۴۷.۴}$$

بطوریکه در آن $A^i[U] = D_i(L[U]\xi^i(x,U))$. اما معادله (۴۷.۴) تنها شرط برای گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای که تقارن تغییراتی از $\mathrm{J}[U]$ است. بنابر این، قانون پایستگی یکسانی برای تعمیم قضیه نوتر به دست می‌آید. □

مثال ۱.۴.۴. معادله موج کلین_گوردون[۶] به صورت

$$R[u] = u_{xt} + g(u) = 0, \tag{۴۸.۴}$$

---

[۶] Klein-Gordon

تعریف می‌شود که $g(u)$ جمله برهم کنش غیر خطی عمومی معادله می‌باشد [۴۰]. این معادله دارای اصل تغییراتی و لاگرانژی، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{J}\,[U] = \int \mathcal{L}[U]\mathrm{d}t\mathrm{d}x, \tag{۴۹.۴}$$

$$L[U] = -\frac{1}{2}U_tU_x + h(U), \qquad h'(U) = g(U). \tag{۵۰.۴}$$

تقارن‌های معادله کلین ـ گوردون از قرار زیر

$$\mathbf{v}_1 = u_t\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathbf{v}_2 = u_x\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathbf{v}_3 = (tu_t - xu_x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۵۱.۴}$$

محاسبه شده‌اند. هر سه تقارن فوق، تقارن تغییراتی برای اصل تغییراتی $\mathrm{J}\,[U]$، هستند. عمل امتداد یافته تقارن‌های فوق روی لاگرانژی (۵۰.۴) ، نمایش‌های دیورژانسی زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_1^{(\infty)}\mathcal{L}[U] &= -D_t\left(\frac{1}{2}U_tU_x + h(U)\right),\\
\tilde{\mathbf{v}}_2^{(\infty)}\mathcal{L}[U] &= -D_x\left(\frac{1}{2}U_tU_x + h(U)\right),\\
\tilde{\mathbf{v}}_3^{(\infty)}\mathcal{L}[U] &= -D_t\left(\frac{1}{2}tU_tU_x + th(U)\right) + D_x\left(\frac{1}{2}xU_tU_x + xh(U)\right).
\end{aligned} \tag{۵۲.۴}$$

بنا به الگوریتم بویر تقارن‌های (۵۱.۴)، منجر به ضرایب تابعی زیر می‌شوند:

$$\Lambda_1[U] = \tilde{\eta}_1[U] = U_t, \quad \Lambda_2[U] = \tilde{\eta}_2[U] = U_x, \quad \Lambda_3[U] = \tilde{\eta}_3[U] = tU_t - xU_x. \tag{۵۳.۴}$$

در این مثال باتوجه به سادگی ضرایب تابعی می‌توان با انتگرال‌گیری، شارهای قوانین پایستگی را یافت ولی در اینجا با استفاده از قضیه نوتر شارها را محاسبه می کنیم.

قرار دهید $x^2 = x$ و $x^1 = t$. ابتدا مقادیر $W^i[U,\mathrm{v}]$ رابرای $i = 1,2$، با استفاده از لاگرانژی (۵۰.۴)، و کمک گرفتن از رابطه (۲۳.۴) محاسبه می‌کنیم. این مقادیر عبارتند از:

$$W^1[U,\mathrm{v}] = -\frac{1}{2}\mathrm{v}U_x, \qquad W^2[U,\mathrm{v}] = -\frac{1}{2}\mathrm{v}U_t. \tag{۵۴.۴}$$

سپس با استفاده از رابطهٔ (۵۲.۴) برای سه قانون پایستگی داریم:

$$\begin{aligned}
(A_1^1, A_1^2) &= \left(-\frac{1}{2}U_tU_x - h(U), 0\right),\\
(A_2^1, A_2^2) &= \left(0, -\frac{1}{2}U_tU_x - h(U)\right),\\
(A_3^1, A_3^2) &= \left(-\frac{1}{2}tU_tU_x - th(U), \frac{1}{2}xU_tU_x + h(U)\right).
\end{aligned} \tag{۵۵.۴}$$

در اینصورت سه قانون پایستگی، متناظر با (۵۲.۴) بدین ترتیب

$$\begin{aligned}
&D_t\left(h[u]\right) - D_x\left(\frac{1}{2}U_t^2\right) = 0,\\
&D_x\left(h[u]\right) - D_t\left(\frac{1}{2}U_x^2\right) = 0,\\
&D_t\left(\frac{1}{2}xU_x^2 + th[u]\right) - D_x\left(\frac{1}{2}tU_t^2 + xh[u]\right) = 0,
\end{aligned} \tag{۵۶.۴}$$

به دست می‌آیند. برای مشاهده جزئیات بیشتر محاسبات، به منبع [۴۲] مراجعه نمایید.

۴.۴.۴ محدودیت‌های قضیه نوتر

محدودیت‌های ذاتی مختلفی برای استفاده از قضیه نوتر به منظور یافتن قوانین پایستگی موضعی دستگاه $R(x,u)$ وجود دارد. اولین آن‌ها به دستگاه‌های تغییراتی مربوط می‌شود یعنی عملگر خطی کننده (مشتق فرشه) متناظر با $R(x,u)$ باید خود الحاق باشد. درنتیجه تعداد PDEهای دستگاه باید با تعداد متغیرهای وابسته یکسان باشند. برای اطلاع از جزئیات بیشتر می‌توانید به مراجع [۲۰] و [۷۵] مراجعه نمایید. به علاوه باید فرمول صریحی برای لاگرانژی $L[U]$ یافت که معادلات اویلر_لاگرانژ آن دستگاه تغییراتی رانتیجه می‌دهد.

همچنین مشکلاتی در محاسبه تقارن‌های تغییراتی از دستگاه PDE تغییرات وجود دارد. اول اینکه، برای دستگاه PDE مفروض، باید تقارن‌های موضعی وابسته به مشتقات متغیرهای وابسته را تا مرتبه مورد نظر یافت. دوم، بعد از یافتن فرمول صریح برای لاگرانژی $L[U]$ باید بررسی نمود که کدام یک از تقارن‌های دستگاه، لاگرانژی $L[U]$ را ناوردا نگه می‌دارند، یعنی کدام تقارن، تقارن تغییراتی است.

سرانجام، روش نوتر وابسته به مختصات است، زیرا تحت عمل تبدیلات نقطه‌ای (برخوردی) دستگاه معادلاتی که دارای اصل تغییراتی است ممکن است به دستگاهی تبدیل شود که دارای اصل تغییراتی نباشد.

روش مستقیم برای یافتن قوانین پایستگی فارغ از تمام مسائل فوق می‌باشد. این روش را به طور مستقیم برای هر دستگاه PDE که تغییراتی باشد یا نباشد، می‌توان به کار برد. به علاوه لزومی برای داشتن اطلاعاتی از وجود یا عدم وجود لاگرانژی نیست.

روش مستقیم مستقل از انتخاب مختصات می‌باشد. این اصل منجر به این نتیجه می‌شود که تبدیلات نقطه‌ای (برخوردی) قوانین پایستگی را به قوانین پایستگی می‌نگارند.

در روش مستقیم معادلات مشخصه (۸.۴) برای هر تابع دلخواهی مانند $U(x)$ برقرارند، در صورتی که در دستگاه‌های تغییراتی، معادلات مشخصهٔ تقارن‌ها زیر مجموعه معادلات مشخصه ضرایب تابعی هستند. از طرفی حل معادلات مشخصه ضرایب تابعی به سختی حل معادلات مشخصه تقارن‌های موضعی نیست.

اگر دستگاه PDE دارای اصل تغییراتی باشد و لاگرانژی آن به دست آمده باشد می‌توان روش مستقیم را با روش نوتر ترکیب نمود. به این ترتیب که ابتدا، با استفاده از روش مستقیم ضرایب تابعی مربوط به قوانین پایستگی موضعی را یافت و سپس تقارن‌های تغییراتی هرکدام را محاسبه کرد. در مرحله دوم، برای هر تقارن تغییراتی فرم دیورژانس متناظر با هرکدام را توسط الگوریتم بویر به دست آورد. در مرحله سوم، با استفاده از فرمول (۲۳.۴) در ارتباط با فرمول بویر (۴۳.۴) قوانین پایستگی را یافت. البته با این ترکیب ضعف روش مستقیم که همان یافتن شار و چگالی متناظر با هر ضریب تابعی است برطرف خواهد شد ولی سختی کار

همچنان باقی است.

۵.۴ روش ابراگیموف

نظر به محدودیت‌های قضیه نوتر و نیز دشواری یافتن لاگرانژی برای معادلات دیفرانسیل، ابراگیموف در مقاله اش [۵۲] تعریف جدیدی از معادله الحاقی برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی ارائه کرد و لاگرانژیی برای هر معادله دیفرانسیل دلخواه (خطی یا غیرخطی) بدست آورد. بنابراین، برای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل که تعداد معادلاتش با تعداد متغیرهای وابسته برابر باشد می‌توان از قضیه نوتر استفاده کرد. از آنجاییکه معادلات الحاقی تمام تقارن‌های معادله اصلی را به ارث می‌برند می‌توان یک تناظر میان قوانین پایستگی با هر یک از گروه‌های تقارن نقطه‌ای، برخوردی، مرتبه بالاتر (لی بکلاند) برقرار نمود و قوانین پایستگی رو بدون لاگرانژی کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل محاسبه کرد. در این بخش با استفاده از قضیه ابراگیموف [۴۶] ، [۴۸] و [۵۲] فرمول دقیقی برای یافتن قوانین پایستگی ارائه می‌دهیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $R(x,u) := \Delta^{\sigma}[u]$ از مرتبه k با n متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^n)$ و m متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^m)$ با فرض $N = m$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta^{\alpha}[u] = \Delta^{\alpha}\left(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u\right) = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, m. \tag{۵۷.۴}$$

اگر

$$L = \sum_{\beta=1}^{m} v^{\beta} \Delta^{\beta}\left(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u\right), \tag{۵۸.۴}$$

لاگرانژی قراردادی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵۷.۴) باشد، دراین صورت معادلات الحاقی برای دستگاه (۵۷.۴)، به صورت

$$(\Delta^{\alpha})^{*}\left(x, u, v, \partial u, \dots, \partial^k u, \partial^k v\right) = \frac{\delta L}{\delta u^{\alpha}} = 0, \tag{۵۹.۴}$$

تعریف می‌شود به قسمی که $v = (v^1, \dots, v^m)$ متغیرهای وابسته جدید هستند و $\delta/\delta u^{\alpha}$، عملگر اویلر_لاگرانژ است، که با رابطه

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \cdots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1 \cdots i_s}}, \qquad \alpha = 1, \cdots m, \tag{۶۰.۴}$$

می‌توان به آن اشاره کرد.

تعریف ۱.۵.۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵۷.۴) را خود الحاق غیر خطی گویند هرگاه دستگاه الحاقی (۵۹.۴) روی همه جواب‌های u از دستگاه (۵۷.۴)، با جایگذاری

$$v^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x, u) \qquad \alpha = 1, \dots, m,$$

به طوری که $\varphi(x,u) \neq 0$، صدق کند. به عبارت دیگر

$$(\Delta^\alpha)^* \left(x, u, \varphi(x,u), \ldots, u^{(s)}, \varphi^{(s)}\right) = \lambda_\alpha^\beta \Delta^\beta, \tag{۶۱.۴}$$

که $\lambda_\alpha^\beta = \lambda_\alpha^\beta \left(x, u, \partial u, \ldots, \partial^s u\right)$ ها ضرایب هستند و $\varphi^{(\sigma)}$ مشتق‌هایی به صورت

$$\varphi^{(\sigma)} = \{D_{i_1} \cdots D_{i_\sigma} \left(\varphi^\alpha(x,u)\right)\}, \qquad \sigma = 1, \cdots, s,$$

و v و φ بردارهای m بعدی $v = (v^1, \cdots, v^m)$ و $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ هستند.

مفهوم خود الحاقی غیرخطی شامل سه زیر رده است. در تعریف فوق، دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵۷.۴) را اکیداً خود الحاق گویند، هرگاه معادله الحاقی به دست آمده از (۵۹.۴)، با جایگذاری $v = u$ تبدیل به خود معادله با یک ضریب λ شود. با جایگذاری $v = \varphi(u)$، و در صورتی که شرط $\varphi\prime(u) = \|\frac{\partial \varphi\prime(u)}{\partial u^\beta}\|$ و $\varphi\prime(u) \neq 0$ برقرار باشد دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵۷.۴) را شبه خود الحاق می‌نامند. هرگاه جایگذاری $v = \varphi(x,u)$ شامل x و u باشد دستگاه معادلات را خود الحاق ضعیف می‌نامند و اگر $v = \varphi\left(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u\right)$، آن را خود الحاق غیرخطی با جایگذاری دیفرانسیلی می‌نامند.

مثال ۱.۵.۴. معادله KdV

$$u_t = u_{xxx} + u u_x,$$

در نظر بگیرید. قصد داریم نوع خودالحاقی این معادله را مشخص نماییم [۴۳]. لاگرانژی قراردادی برای این معادله عبارت است از:

$$L = v(u_t - u_{xxx} - u u_x) = v u_t - v u_{xxx} - v u u_x.$$

عملگر اویلر_لاگرانژ نیز برای این معادله به صورت

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial}{\partial u_t} - D_x D_x D_x \frac{\partial}{\partial u_{xxx}},$$

تعریف می‌شود. بنابر این معادله الحاق به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta u} &= -v u_x - D_x(-vu) - D_t(v) - (D_x)^3(-v) \\ &= u v_x - v_t + v_{xxx},\end{aligned}$$

که به وضوح با تبدیل v به u به معادله KdV تبدیل خواهد شد. پس معادله KdV یک معادله اکیداً خود الحاق است.

مثال ۲.۵.۴. معادله غیر خطی موج را در حالت

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t^2 - u_x^2 = 0,$$

در نظر بگیرید. لاگرانژی قراردادی برای این معادله عبارت است از:

$$L = vF = vu_{tt} - vu_{xx} + vu_t^2 - vu_x^2.$$

با اعمال عملگر اویلر–لاگرانژ بر این لاگرانژی خواهیم دید که معادله الحاقی برای معادله غیر خطی موج به صورت زیر است [۴۳]:

$$F^* = \frac{\delta L}{\delta u} = v_{tt} - v_{xx} - 2vu_{tt} - 2u_tv_t + 2vu_{xx} + 2u_xv_x = 0, \qquad (۶۲.۴)$$

که به وضوح با تبدیل v به u به معادله موج غیر خطی تبدیل نخواهد شد پس این معادله اکیداً خود الحاق نیست. حال $v = \varphi(u)$ در نظر می‌گیریم، با داشتن لاگرانژی قراردادی به فرم

$$L = \varphi u_{tt} - \varphi u_{xx} + \varphi u_t^2 - \varphi u_x^2, \qquad (۶۳.۴)$$

معادله الحاقی به صورت زیر است که آن را با ضریبی از معادله برابر می‌گیریم:

$$\varphi'(2u_{tt} - 2u_{xx} - u_t^2 + u_x^2) + \varphi(-2u_{tt} + 2u_{xx}) + \varphi''(u_t^2 - u_x^2) = \\ = \lambda(u_{tt} - u_{xx}) + \lambda(u_t^2 - u_x^2),$$

با انجام محاسبات در می‌یابیم با جایگذاری $v = e^u$ معادله غیر خطی موج به یک معادله شبه خود الحاق تبدیل می‌شود.

مثال ۳.۵.۴. معادله تکاملی مرتبه دوم غیر خطی

$$u_t = \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + \left(h\left(u\right)u_z\right)_z, \qquad (۶۴.۴)$$

انتقال حرارت را با مواد ناهمسانگرد توصیف می‌کند که ضریب انتشار حرارت تحت تاثیر دما است [۴۳]. ضرایب مثبت و دلخواه $f\left(u\right)$، $g\left(u\right)$، $h\left(u\right)$ مستقل خطی هستند و هیچ یک ثابت نیستند یعنی

$$f'\left(u\right) \neq 0 \qquad g'\left(u\right) \neq 0, \qquad h'\left(u\right) \neq 0. \qquad (۶۵.۴)$$

فرم بسط داده شده معادله (۶۴.۴) به صورت

$$F \equiv -u_t + f\left(u\right)u_{xx} + g\left(u\right)u_{yy} + h\left(u\right)u_{zz} + f'\left(u\right)u_x^2 + g'\left(u\right)u_y^2 + h'\left(u\right)u_z^2,$$

می‌باشد و با استفاده از رابطه (۵۹.۴) معادله الحاقی (۶۴.۴) عبارت است از:

$$F^* \equiv -v_t + f\left(u\right)v_{xx} + g\left(u\right)v_{yy} + h\left(u\right)v_{zz} = 0.$$

با جایگذاری $v = \varphi(t, x, y, z, u)$ و مشتقات لازم

$$v_\alpha \equiv \mathrm{D}_\alpha\left(\varphi\right) = \varphi_u u_\alpha + \varphi_\alpha, \qquad \alpha = t, x, y, z,$$

$$v_{\alpha\alpha} \equiv \mathrm{D}_\alpha^2\left(\varphi\right) = \varphi_u u_{2\alpha} + \varphi_{uu}u_\alpha^2 + 2\varphi_{\alpha u}u_\alpha + \varphi_{2\alpha}, \qquad \alpha = t, x, y, z,$$

در شرط خود الحاقی غیر خطی (۶۱.۴)، خواهیم داشت:

$$\lambda = 0, \quad \varphi_u = 0, \quad v_t = \varphi_t, \quad v_{xx} = \varphi_{xx}, \quad v_{yy} = \varphi_{yy}, \quad v_{zz} = \varphi_{zz}.$$

درنتیجه شرط خود الحاقی غیرخطی به رابطه زیر کاهش داده می‌شود،

$$-\varphi_t + f(u)\,\varphi_{xx} + g(u)\,\varphi_{yy} + h(u)\,\varphi_{zz} = 0.$$

بنا به استقلال خطی $f(u)$، $g(u)$، $h(u)$ و شرایط (۶۵.۴) داریم:

$$\varphi_t = 0, \qquad \varphi_{xx} = 0, \qquad \varphi_{yy} = 0, \qquad \varphi_{zz} = 0.$$

ازحل معادلات بالا در یک دستگاه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$v = a_1xyz + a_2xy + a_3xz + a_4yz + a_5x + a_6y + a_7z + a_8, \tag{۶۶.۴}$$

بنابراین معادله در شرایط خود الحاقی غیرخطی با جایگذاری v در (۶۶.۴) صادق است.

قضیه ۱.۵.۴. (قضیه ابراگیموف) فرض کنیم که دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵۷.۴)، یک معادله خود الحاق غیر خطی باشد. در این صورت هر تقارن نقطه‌ای، برخوردی و مراتب بالاتر دستگاه (۵۷.۴)، منجر به یک قانون پایستگی به فرم $\mathrm{D}_i\left(C^i\right) = 0$، می‌شود که مؤلفه‌های C^i از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} C^i = \xi^i L + W^\sigma &\left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\sigma} - \mathrm{D}_j\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\sigma}\right) + \mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma}\right) - \ldots\right] \\ +\mathrm{D}_j\left(W^\sigma\right)&\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\sigma} - \mathrm{D}_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma}\right) + \ldots\right] + \mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\left(W^\sigma\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} - \ldots\right] + \ldots \end{aligned} \tag{۶۷.۴}$$

به طوریکه که در آن $W^\sigma = \eta^\sigma - \xi^j u_j^\sigma$ و $L = v^\beta \Delta^\beta$.

برهان. اتحاد عملگری نوتر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v} + D_i(\xi^i) = W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i\mathbf{N}^i. \tag{۶۸.۴}$$

در این اتحاد $\mathbf{v}$ مولد بی‌نهایت کوچک به صورت

$$\mathbf{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{i_1i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2}^\alpha} + \cdots, \tag{۶۹.۴}$$

است که ضرایب ξ^i و η^α در آن توابع دلخواه هستند و دیگر ضرایب آن با فرمول امتداد به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\zeta_i^\alpha = D_i(W^\alpha) + \xi^j u_{ij}^\alpha, \qquad \zeta_{i_1i_2}^\alpha = D_{i_1}D_{i_2}(W^\alpha) + \xi^j u_{ji_1i_2}^\alpha. \tag{۷۰.۴}$$

در اتحاد (۶۸.۴)، $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}$ عملگر اویلر_لاگرانژ بوده و همچنین عملگر $\mathbf{N}^i$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{N}^i = \xi^i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \cdots D_{j_s}(W^\alpha) \frac{\delta}{\delta u^\alpha_{ii_1\cdots i_s}}, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۷۱.۴}$$

یادآور می‌شویم که قضیه نوتر، وابسته به قوانین پایستگی با تقارن‌های معادلات دیفرانسیل که از اصول تغییرات نتیجه می‌شود، ابتداً با کمک حساب تغییرات اثبات شده است و این اثبات در واقع جایگزینی برای آن است. یعنی چنانچه معادلات اویلر_لاگرانژ را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, m. \tag{۷۲.۴}$$

و نیز فرض کنیم مولد (۶۹.۴) توسط معادله (۷۲.۴) به عنوان تقارن پذیرفته می‌شود و نیز انتگرال تغییرات

$$\int L(x, u, , u_{(1)}, \cdots) dx,$$

تحت گروه تبدیلات با مولد $\mathbf{v}$ ناوردا باقی می‌ماند، سپس تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\mathbf{v}(L) + D_i(\xi^i)L = 0. \tag{۷۳.۴}$$

بنابراین، اگر دو سوی رابطهٔ (۶۸.۴) را روی L اعمال کنیم، به این صورت که:

$$\mathbf{v}(L) + D_i(\xi^i)L = W^\alpha \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} + D_i[\mathbf{N}^i(L)],$$

با درنظر گرفتن (۷۲.۴) و (۷۳.۴)، خواهیم دید که بردار با مؤلفه‌های

$$C^i = \mathbf{N}^i(L), \qquad 1 = 1, \cdots, n, \tag{۷۴.۴}$$

در معادلهٔ قانون پایستگی

$$D_i(C^i)|_{(۷۲.۴)} = 0, \tag{۷۵.۴}$$

صدق می‌کند. در هنگام محاسبهٔ قوانین پایستگی، عملگر (۷۱.۴) را فقط محدود به مشتق‌های درگیر در لاگرانژی خواهیم کرد و C^i ها از رابطهٔ (۶۸.۴) محاسبه خواهند شد و این برهان را کامل می‌کند.

□

گزاره ۱.۵.۴. یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبهٔ یک به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$L[y] = a_0 y^{(s)} + a_1 y^{(s-1)} + \cdots + a_{s-2} y'' + a_{s-1} y' + a_s y, \tag{۷۶.۴}$$

که $a_i = a_i(x)$ و $L[y]$ یک دیفرانسیل کامل است اگر به صورت

$$L[y] = D_x\big(\Psi(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)})\big), \qquad (۷۷.۴)$$

باشد. تابع $\phi(x)$ یک عامل انتگرال گیری برای معادله (۷۶.۴) است اگر و تنها اگر $z = \phi(x)$ که $\phi(x) \neq 0$ یک جواب از معادلهٔ الحاق

$$L^*[z] = 0, \qquad (۷۸.۴)$$

باشد. با دانستن جواب $\phi(x)$ از معادله الحاق (۷۸.۴) می‌توان مرتبهٔ معادله (۷۶.۴) را با انتگرال گیری از معادله

$$\phi(x)L[y] = D_x\left(\Psi(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)})\right),$$

و نوشتن آن به شکل

$$\Psi(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}) = C_1, \qquad (۷۹.۴)$$

کاهش داد. در معادله (۷۹.۴) C_1 یک ثابت دلخواه و Ψ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\Psi = \mathbf{N}(zL[y])\big|_{w=y}. \qquad (۸۰.۴)$$

برهان. [۴۳]. □

مثال ۴.۵.۴. معادله مرتبهٔ دوم همگن زیر را در نظر بگیرید [۴۳]:

$$f'' + \frac{\sin x}{x^2} f' + \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right) f = 0. \qquad (۸۱.۴)$$

طرف چپ این معادله در شرط دیفرانسیل کلی یعنی $\frac{\delta F}{\delta f} = 0$ صدق نمی‌کند زیرا

$$\frac{\delta}{\delta f}\left[f'' + \frac{\sin x}{x^2} f' + \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right) f\right] = \frac{\sin x}{x^2}.$$

بنابر این گزاره (۱.۵.۴) را در مورد آن می‌توان به کار برد. معادله الحاق برای معادلهٔ (۸۱.۴) به صورت زیراست

$$z'' + \frac{\sin x}{x^2} z' + \frac{\sin x}{x^3} z = 0.$$

جواب بدیهی برای معادله الحاق فوق $z = x$ است، که با جایگذاری آن در (۸۰.۴) داریم:

$$\Psi = \mathbf{N}\left[x f'' + \frac{\sin x}{x} f' + \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) f\right] = \frac{\sin x}{x} w - w + x w'.$$

بنابراین رابطهٔ (۷۹.۴) برای این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x f' + \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) f = C_1.$$

با انتگرال گیری از این معادله خطی مرتبه اول جواب کلی برای معادله (۸۱.۴) را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f = \left(C_2 + C_1 \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{\sin x}{x^2} dx} dx\right) x e^{-\int \frac{\sin x}{x^2} dx}.$$

مثال ۵.۵.۴. معادله باک مستر را در نظر بگیرید:

$$u_t = (u^4)_{xx} + (u^3)_x. \tag{۸۲.۴}$$

لاگرانژی قراردادی برای این معادله به صورت

$$L = v\left(u_t - 4u^3 u_{xx} - 12u^2 u_x^2 - 3u^2 u_x\right), \tag{۸۳.۴}$$

است و معادله الحاقی برای آن عبارت است از:

$$F^* \equiv -v_t - 4u^3 v_{xx} + 3u^2 v_x. \tag{۸۴.۴}$$

که با انجام محاسبات در می‌یابیم این معادله یک معادله غیر خطی خود الحاق با ضریب $v = C$ است که C یک عدد ثابت است [۹۰]. می‌خواهیم قوانین پایستگی را برای این معادله محاسبه کنیم. تقارن‌های معادله باک مستر به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۸۵.۴}$$

با توجه به غیر خطی خود الحاق بودن معادله و چون لاگرانژی (۸۳.۴) روی جواب‌های معادله صفر می‌شود می‌توان جمله ξL را از رابطه (۶۷.۴) حذف نمود و با توجه به مشتق‌های موجود در لاگرانژی رابطه (۶۷.۴) را برای این معادله به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$C^i = W^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_j\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right)\right] + D_j(W^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right]. \tag{۸۶.۴}$$

با استفاده از رابطه فوق و لاگرانژی (۸۳.۴) و نیز جایگذاری $v = A$ بردارهای پایستگی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} C^1 &= WA, \\ C^2 &= W[-24u^2 u_x A - 3u^2 A - D_x(-4u^3 A)] + D_x(W)(-4u^3 A). \end{aligned} \tag{۸۷.۴}$$

قانون پایستگی برای عملگر $\mathbf{v}_1$: عملگر $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}$ با مشخصه $W = -u_t$ بردار پایستگی به صورت $C = (C^1, C^2)$ با مؤلفه‌های زیر را نتیجه می‌دهد:

$$C^1 = -Au_t, \qquad C^2 = A\left(12u^2 u_x u_t + 3u^2 u_t + 4u^3 u_{tx}\right). \tag{۸۸.۴}$$

حال با انجام عملیات مفید و کمتر بدیهی زیر به قوانین پایستگی جدید خواهیم رسید. فرض کنید:

$$C^1|_{(۸۲.۴)} = \tilde{C}^1 + D_2(H^2) + \cdots + D_n(H^n). \tag{۸۹.۴}$$

بنابراین بردار پایستگی $C=(C^1,C^2,\cdots,C^m)$ می‌تواند با بردار هم ارز

$$\tilde{C}=(\tilde{C^1},\tilde{C^2},\cdots,\tilde{C^m})=0, \qquad (۹۰.۴)$$

جایگزین شود که مؤلفه‌های آن عبارتند از:

$$\tilde{C^1},\quad \tilde{C^2}=C^2+D_1(H^2),\cdots,\quad \tilde{C^m}=C^m+D_1(H^m). \qquad (۹۱.۴)$$

رسیدن از بردار $C=(C^1,C^2,\cdots,C^m)$ به بردار (۹۰.۴)، بر اصل جابه‌جای پذیر بودن عملگر مشتق کلی استوار است به این معنا که:

$$D_1D_2(H^2)=D_2D_1(H^2),\quad D_1D_n(H^n)=D_nD_1(H^n),$$

بنابراین معادله پایستگی

$$\left[D_t(C^1)+D_x(C^2)\right]\Big|_{(۸۲.۴)}=0, \qquad (۹۲.۴)$$

برای بردار $C=(C^1,C^2,\cdots,C^m)$ هم ارز با معادلهٔ پایستگی زیر است:

$$[D_i(\tilde{C^i})]_{(۸۲.۴)}=0.$$

با در نظر گرفتن عملیات فوق برای بردار (۸۸.۴) به بردارهای پایستگی

$$\tilde{C^1}=-Au_t-u_{tx},\quad \tilde{C^2}=A\left(12u^2u_xu_t+3u^2u_t+4u^3u_{tx}\right)+u_{tt}, \qquad (۹۳.۴)$$

خواهیم رسید. پس معادله پایستگی برای بردارهای (۹۳.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}D_t(\tilde{C^1})+D_x(\tilde{C^2})&=Au_{tt}-u_{ttx}+24Auu_tu_x^2+12Au^2u_tu_{xx}+24Au^2u_xu_{tx}\\&+6Auu_xu_t+3Au^2u_{tx}+12Au^2u_xu_{tx}+4Au^3u_{txx}+u_{ttx}\Big|_{(۸۲.۴)}=0.\end{aligned}$$

قانون پایستگی برای عملگر $\mathbf{v}_2$: عملگر $\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial x}$ با مشخصه $W=-u_x$ بردار پایستگی به صورت $C=(C^1,C^2)$ با مؤلفه‌های زیر را داراست:

$$C^1=-Au_x,\qquad C^2=A\left(12u^2u_x^2+3u^2u_x+4u^3u_{xx}\right). \qquad (۹۴.۴)$$

می‌توان مشاهده کرد که اگر C^1 را به صورت $-Au_x-u_{xx}+D_x(u_x),$ بنویسیم با انتقال جمله $D_x(u_x)$ از C^1 به C^2 داریم:

$$\tilde{C^1}=-Au_x-u_{xx},\quad \tilde{C^2}=A\left(12u^2u_x^2+3u^2u_x+4u^3u_{xx}\right)+u_{tx}. \qquad (۹۵.۴)$$

قانون پایستگی برای عملگر $\mathbf{v}_3$: عملگر $\mathbf{v}=t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}$ با مشخصه $W=-u-tu_t+xu_x$ منجر به بردار پایستگی به صورت $C=(C^1,C^2)$ با مؤلفه‌های زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}C^1&=A(-u-tu_t+xu_x),\\C^2&=A(12u^3u_x+3u^3-12xu^2u_x^2-3xu^2u_x\\&\quad+12tu^2u_xu_t+3tu^2u_t-4xu^3u_{xx}+4tu^3u_{xt}).\end{aligned} \qquad (۹۶.۴)$$

۶.۴ بهینه سازی روش مستقیم

ضعف عمده روش مستقیم در محاسبه شارها و چگالی‌های قانون پایستگی موضعی بود، چرا که در این روش یا باید به صورت مستقیم، دو چند جمله‌ای براساس متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها جستجو کرد که در نمایش دیورژانسی صادق باشند یا این که با فرمول‌های خاصی که معمولاً شامل انتگرال گیری از جملات متعدد می‌باشند به هدف خود رسید، درصورتیکه در موارد پیچیده که دستگاه PDE شامل مشتقات مراتب بالا است انتگرال گیری به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد. در این بخش به معرفی روش دیگری برای یافتن قوانین پایستگی خواهیم پرداخت، که تا حد زیادی می‌تواند ضعف عمده روش مستقیم را در محاسبه شارها و چگالی‌های قانون پایستگی مرتفع کند .

۱.۶.۴ الگوریتم روش هرمان_ پل

در سال ۲۰۱۰ ویلی هرمان[۷] و داگلاس پل[۸] روشی را برای یافتن قوانین پایستگی ارائه کردند که بر اساس روش‌هایی از حساب تغییرات، جبر خطی و هندسه دیفرانسیل استوار است [۳۷، ۸۲] . الگوریتم هرمان_ پل برای یافتن قوانین پایستگی موضعی به شرح زیر است :

۱. در این روش PDE مورد نظر باید به صورت تکاملی باشد. به این معنا که اگر t را به عنوان متغیر تکاملی در نظر بگیریم مشتق متغیر وابسته u نسبته به t باید بر اساس دیگر مشتقات وابسته بیان شود.

۲. چگالی ها را به صورت ترکیب خطی (با ضرایب نامعین) از جملاتی در نظر بگیرید که نسبت به تقارن های تجانس PDE ناوردا باشند.

۳. چون معادله به فرم تکاملی است می توان جملات u_t را از معادله حذف کرد و از این مساله که اثر عملگر اویلر بر عبارت دقیق باقی مانده، حاصلی برابر با صفر دارد؛ استفاده نمود تا به دستگاه خطی از ضرایب نامعین برسیم. با حل این دستگاه، ضرایب در نظر گرفته شده محاسبه می شوند.

۴. پس از مشخص شدن ضرایب با استفاده از عملگر هوموتوپی، (که در ادامه تعریف خواهد شد.) شارهای متناظر با ضرایب مفروض، محاسبه می‌شوند.

۵. قوانین پایستگی متناظر با چگالی و شارهای بدست آمده محاسبه می شوند.

از محدودیت‌های اعمال این روش این است که معادله مفروض باید به فرم تکاملی نوشته شود، که همیشه چنین امکانی وجود ندارد. محدودیت دوم آنکه چگالی در نظر گرفته شده باید

[۷] Willy Hereman

[۸] Douglas Poole

دارای تقارن‌های تجانسی باشد که ممکن است چنین تقارن‌هایی موجود نباشند. در ادامه، به معرفی یک عملگر هوموتوپی خاص که در [۸۴] مطرح شده است، می‌پردازیم. بنابراین، عملگر هوموتوپی تعریف شده در ذیل، با عملگرهای مطرح شده در [۲۰، ۲۵] که برحسب عملگرهای اویلر مرتبه بالاتر ساخته می‌شوند، متفاوت می‌باشد.

تعریف ۱.۶.۴. عملگر هوموتوپی دو بعدی، عملگر برداری است، با دو مؤلفه

$$\left(H^x_{u(x,t)}(f), H^t_{u(x,t)}(f)\right), \qquad (۹۷.۴)$$

که در آن

$$H^x_{u(x,t)}(f) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{q} I^x_{u^j}(f)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda},$$
$$H^t_{u(x,t)}(f) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{q} I^t_{u^j}(f)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad (۹۸.۴)$$

و توابع زیر انتگرال $I^x_{u^j(x,t)}(f)$ و $I^t_{u^j(x,t)}(f)$عبارتند از

$$I^x_{u^j}(f) = \sum_{k_1=1}^{M_1^j}\sum_{k_2=0}^{M_2^j}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k2} B^x u^j_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\right]\frac{\partial f}{\partial u^j_{x^{k_1}t^{k_2}}},$$
$$I^t_{u^j}(f) = \sum_{k_1=0}^{M_1^j}\sum_{k_2=1}^{M_2^j}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k2-1} B^t u^j_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\right]\frac{\partial f}{\partial u^j_{x^{k_1}t^{k_2}}}, \qquad (۹۹.۴)$$

که M_1^j و M_2^j به ترتیب مشتقات f در u، نسبت به x و t می باشند. ضرایب ترکیبیاتی عبارتند از

$$B^x = B(i_1,i_2,k_1,k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_1}\binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_1-i_1-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}}, \qquad (۱۰۰.۴)$$

$$B^t = B(i_1,i_2,k_1,k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_2}\binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_2-i_2-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_2}}. \qquad (۱۰۱.۴)$$

تعریف ۲.۶.۴. عملگر هوموتوپی سه بعدی، عملگر برداری است، با سه مؤلفه

$$\left(H^t_{u(t,x,z)}f, H^x_{u(t,x,x)}f, H^z_{u(t,x,x)}f\right), \qquad (۱۰۲.۴)$$

که در آن مؤلفه x به فرم زیر است

$$H^x_{u(t,x,z)}(f) = \int_0^1\left(\sum_{j=1}^{q} I^x_{u^j}(f)\right)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad (۱۰۳.۴)$$

و مؤلفه‌های t و z به طور مشابه تعریف می‌شوند. تابع زیر انتگرال $I^x_{u^j(t,x,z)}(f)$ عبارت است از

$$I^x_{u^j}(f) = \sum_{k_1=1}^{M_1^j}\sum_{k_2=0}^{M_2^j}\sum_{k_3=0}^{M_3^j}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k2}\sum_{i_3=0}^{k3} B^x u^j_{x^{i_1}t^{i_2}z^{i_3}}\right.$$
$$\left.(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}(-D_z)^{k_3-i_3}\right]\frac{\partial f}{\partial u^j_{x^{k_1}t^{k_2}z^{k_3}}}. \qquad (۱۰۴.۴)$$

ضریب ترکیباتی در رابطه فوق به صورت

$$B^x = \frac{\binom{i_1+i_2+i_3}{i_1}\binom{i_2+i_3}{i_2}\binom{k_1+k_2+k_3-i_1-i_2-i_3-1}{k_1-i_1-1}\binom{k_2+k_3-i_2-i_3}{k_2-i_2}}{\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1}\binom{k_2+k_3}{k_2}}, \qquad (۱۰۵.۴)$$

تعریف می شود. به طور مشابه $I^t_{u^j}f$، $I^z_{u^j}f$، B^t و B^z قابل تعریف هستند.

قضیه ۱.۶.۴. فرض کنید $f = f\left(t, x, \mathbf{u}^{(M)}(t,x)\right)$ تابعی دقیق باشد، یعنی تابعی چون F به صورت $F = F\left(t, x, \mathbf{u}^{(M-1)}(t,x)\right)$ موجود باشد که $f = \mathrm{Div}F$. در این صورت برای حالت دو بعدی رابطه $F = \mathrm{Div}^{-1}(f) = \left(H^t_{u(t,x)}(f), H^x_{u(t,x)}(f)\right)$ برقرار است. به طور مشابه در حالت سه بعدی داریم $F = \mathrm{Div}^{-1}(f) = \left(H^t_{u(t,x,z)}(f), H^x_{u(t,x,x)}(f), H^z_{u(t,x,x)}(f)\right)$.

برهان. [۸۳]. □

۲.۶.۴ روش مستقیم بهینه شده

همانگونه که مشاهده شد الگوریتم روش مستقیم در چهار مرحله پیاده سازی می‌شود. مرحله نخست در نظر گرفتن تابعی نامعین برای یافتن مجموعه ضرایب تابعی نامعین قوانین پایستگی موضعی است. در این مرحله این امکان وجود دارد که از محکی استفاده نمود تا مرتبه مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل تا حدودی مشخص شود. این محک استفاده از دستور فاکتور انتگرال برای دستگاه PDE است. فاکتورهای انتگرال دستگاه PDE را می‌توان با کمک نرم افزار میپل با یک دستور ساده محاسبه نمود. مرتبه مشتقاتی که در فاکتورهای انتگرال ظاهر می‌شوند با مرتبه مشتقاتی که در ضرایب تابعی ظاهر می‌شوند در اکثر موارد یکسان است. بنابراین هنگام در نظر گرفتن ضرایب تابعی، کافیست مرتبه مشتقات مورد نظر را تا مرتبه مشتقات فاکتورهای انتگرال در نظر بگیریم.

تغییر بعد در مرحله سوم الگوریتم روش مستقیم اتفاق می‌افتد یعنی جایی که شارها و چگالی به صورت مستقیم با حل (۱۱.۴) محاسبه می‌شوند. چرا که در برخی موارد معادلات مشخصه (۱۱.۴) برای بعضی از معادلات و دستگاه‌های PDE قابل حل نمی‌باشند. در این مرحله با استفاده از عملگر هوموتوپی شارها و چگالی‌ها را می‌یابیم که ابزار مفیدی برای اینکار است. با تغییراتی که بیان شد، الگوریتم روش مستقیم را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

۱. فاکتورهای انتگرال دستگاه $R(x,u)$ را برای مشخص شدن مرتبه مشتقات ظاهر شده در ضرایب تابعی به کمک نرم افزار میپل محاسبه نمایید.

۲. برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R(x,u)$ می‌بایست به جستجوی ضرایبی در آن به فرم $\{\Lambda_\sigma(x, U, \ldots, \partial^r U)\}_{\sigma=1}^{l}$ بپردازید.

۳. معادلات مشخصه (۸.۴) را برای تابع دلخواه $u(x)$ به‌منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل نمایید.

۴. از عملگر هوموتوپی برای یافتن شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i[u]$ استفاده نمایید.

۵. در نهایت، هر شار و ضریب تابعی ، یک قانون پایستگی $D_i\Phi^i(x,u,\ldots,\partial^r u)=0$ برای تمام جواب های $u(x)$ نتیجه می‌دهد.

مثال ۱.۶.۴ معادله KdV به فرم $F[x,u]=u_t-uu_x-u_{xxx}=0$ را در نظر بگیرید. همان طور که در روش مستقیم آمده است، ضرایب برای معادله KdV به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= 1,\\ \Lambda_2 &= u,\\ \Lambda_3 &= tu+x,\\ \Lambda_4 &= \frac{u^2}{2}+u_{xx},\end{aligned}$$

که متناظر باهر Λ_i می‌توان قوانین پایستگی را با استفاده از روش هرمان_پل بدست آورد [۸۴]. در اینجا به دلیل روند طولانی محاسبات، قوانین پایستگی متناظر با ضریب

$$\Lambda_3=tu+x, \tag{۱۰۶.۴}$$

را به دست می‌آوریم و سایر نتایج مشابه می‌باشند که از آوردن آنها اجتناب می‌شود. ابتدا f را به صورت حاصلضربی از ضریب Λ_3 در معادله F به صورت

$$f=\Lambda_3.F[x,u]=(tu+x)(u_t-uu_x-u_{xxx}), \tag{۱۰۷.۴}$$

می‌نویسیم. بیشترین مرتبه مشتق نسبت به x وt به ترتیب ۳ و۱ می باشد و این یعنی رابطه (۹۹.۴) برای این معادله عبارت است از:

$$I_u^t(f)=\sum_{k_1=0}^{3}\sum_{k_2=1}^{1}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k2-1}B^t u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\right]\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}.$$

اگر در این رابطه $k_1=0$ و $k_2=1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$I_u^t(f) \;=\; \left[\sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=0}^{0}B^t u(-D_x)^0(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_t}=u(tu+x),$$

$$\begin{aligned}\psi^t_{u(x,t)}(f) &= \int_0^1 (I^t(f))[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}=\int_0^1(\lambda u(\lambda tu+x))\,\frac{d\lambda}{\lambda}\\ &= \frac{u^2}{2}t+xu,\end{aligned}$$

سایر حالت‌های $k_2=1$ با $(k_1=1$ و$k_1=2$ و$k_1=3)$ صفر خواهند شد. برای تابع زیر انتگرال $I_u^x(f)$ این رابطه به شکل

$$I_u^x(f)=\sum_{k_1=1}^{3}\sum_{k_2=0}^{1}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k2}B^x u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\right]\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}}, \tag{۱۰۸.۴}$$

خواهد بود که با حالت بندی آن برای K_iهای مختلف، حالات زیر را خواهیم داشت:

• حالت (۱) : $k_1 = 1$ و $k_2 = 0$

$$I_1^x = \left[\sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=0}^{0} B^x u(-D_x)^0(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_x} = -u(tu^2 + ux),$$

• حالت (۲) : $k_1 = 2$ و $k_2 = 0$

$$I_2^x = \left[\sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=0}^{0} B^x u(-D_x)^0(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_x} = -u^2(tu + x),$$

• حالت (۳) : $k_1 = 3$ و $k_2 = 0$

$$I_3^x = \left[\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{i_2=0}^{0} B^x u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{2-i_1}(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}},$$

•• حالت (۱*۳) : $i_1 = 0$ و $i_2 = 0$

$$I_{3*1}^x = B^x\left[u(-D_x)^2(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = -tuu_{xx},$$

•• حالت (۲*۳) : $i_1 = 1$ و $i_2 = 0$

$$I_{3*2}^x = B^x\left[u_x(-D_x)^1(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = u_x(tu_x + 1),$$

•• حالت (۳*۳) : $i_1 = 2$ و $i_2 = 0$

$$I_{3*3}^x = B^x\left[u_{xx}(-D_x)^0(-D_t)^0\right]\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = -u_{xx}(tu + x),$$

بنابراین مؤلفه x از تابع زیر انتگرال به صورت

$$I^x(f) = -u(tu^2 + ux) - tuu_{xx} + u_x(tu_x + 1) - u_{xx}(tu + x),$$

خواهد بود. لذا شار تولید شده متناظر با ضریب Λ_3 ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi^x = \int_0^1 (I^x(f))[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-1}{3}tu^3 - \frac{1}{2}u^2x + \frac{1}{2}tu_x^2 - tuu_{xx} - xu_{xx} + u_x. \qquad (۱۰۹.۴)$$

به طریق مشابه می‌توان متناظر با ضرایب Λ_1 وΛ_2 و Λ_4 نیز قوانین پایستگی را محاسبه کرد که نتایج آن را در جدول (۱.۴) خلاصه کرده ایم.

۷.۴ قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل تقریبی

ساختن قوانین پایستگی اهمیت علمی مفهوم خود الحاقی را نشان می‌دهد. به این معنا که قوانین پایستگی به تقارن‌های تمام معادلات دیفرانسیل خطی و یا غیر خطی خود الحاق وابسته است. مفهوم خود الحاقی را به معادلات دیفرانسیل تقریبی نیز می‌توان تعمیم داد.

جدول ۱.۴: چگالی و شارهای متناظر با ضرایب Λ_i با استفاده از روش هرمان_پل

Λ_i	ψ_i^t	ϕ_i^x
$\Lambda_1 = 1$	$\psi_1^t = u$	$\phi_1^x = -\frac{1}{2}u^2 - uu_{xx}$
$\Lambda_2 = u$	$\psi_2^t = \frac{1}{2}u^2$	$\phi_2^x = \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{3}u^3 - u_{xx}$
$\Lambda_3 = tu + x$	$\psi_3^t = \frac{1}{2}tu^2 + xu$	$\phi_3^x = -\frac{1}{3}tu^3 - \frac{1}{2}u^2x + \frac{1}{2}tu_x^2 - tuu_{xx} - xu_{xx} + u_x$
$\Lambda_4 = \frac{1}{2}u^2 + u_{xx}$	$\psi_4^t = \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}uu_{xx}$	$\phi_4^x = -\frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{2}(uu_{xt} + u^2u_{xx} - u_xu_t - u_{xx}^2)$

در اینجا روند یافتن قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی را به کمک یک مثال شرح می‌دهیم. در فصل پیش در مثال (۴.۸.۳) تقارن‌های تقریبی معادله ریلی_موج را یافتیم. عملگر غیر خطی این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - \varepsilon(u_t - u_t^3) = 0. \qquad (۱۱۰.۴)$$

لاگرانژی قراردادی برای معادله ریلی_موج به صورت زیر معرفی می‌شود [۸۸]:

$$L = v[u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - \varepsilon(u_t - u_t^3)]. \qquad (۱۱۱.۴)$$

بنابراین، عملگر الحاقی F^* برای عملگر غیر خطی (۱۱۰.۴) عبارت است از:

$$F^* \equiv \frac{\delta L}{\delta u} = v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} + \varepsilon v_t - 3\varepsilon v_t u_t^2 - 6\varepsilon v u_t u_{tt}, \qquad (۱۱۲.۴)$$

که در آن $\frac{\delta}{\delta u}$ عملگر اویلر_لاگرانژ با فرم زیر است

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial u_{i_1,\cdots i_s}}. \qquad (۱۱۳.۴)$$

معادله (۱۱۰.۴) را به طور تقریبی خود الحاق نامیم اگر ضریبی تقریبی که به طور بدیهی صفر نیست به صورت

$$v \approx \varphi(t,x,y,u) + \varepsilon\psi(t,x,y,u), \qquad (۱۱۴.۴)$$

چنان موجود باشد که F با تعریف (۱۱۰.۴) و F^* با تعریف (۱۱۲.۴) به طور تقریبی در معادله با مرتبه اول دقت در ε زیر صادق باشند:

$$F^*\big|_{v=\varphi+\varepsilon\psi} = \lambda F. \qquad (۱۱۵.۴)$$

توجه داشته باشید که معادله غیر اختلال $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ غیر خطی خود الحاق است یعنی با معادله الحاقی $v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} = 0$ با جایگذاری

$$v = a_1txy + a_2tx + a_3ty + a_4xy + a_5t + a_6x + a_7y + a_8u + a_9, \qquad (۱۱۶.۴)$$

با ثوابت دلخواه $a_1, \cdots a_9$ منطبق است. پس در حالت معادله اختلال (۱۱۰.۴) به تقابل ضریب v با فرم

$$v = a_1txy + a_2tx + a_3ty + a_4xy + a_5t + \\ +a_6x + a_7y + a_8u + a_9 + \varepsilon\psi(t, x, y, u). \qquad (۱۱۷.۴)$$

هستیم. بعد از جایگذاری (۱۱۷.۴) در تعریف (۱۱۲.۴) از F^*، جمله بدون ε در معادله (۱۱۵.۴) با ساختار جایگذاری (۱۱۶.۴) حذف می‌شود و $\lambda = a_8$ را نتیجه می‌دهد. سپس معادله (۱۱۵.۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\varepsilon u_t(2\psi_{tu} + a_8) + \varepsilon u_t^2(\psi_{uu} - 3a_1xy - 3a_2x - 3a_3y - 3a_5) + \varepsilon u_{tt}\psi_u - 2\varepsilon u_x\psi_{xu} \\ -\varepsilon u_x^2\psi_{uu} - \varepsilon u_{xx}\psi_u - 2\varepsilon u_y\psi_{yu} - \varepsilon u_y^2\psi_{uu} - \varepsilon u_{yy}\psi_u - 3\varepsilon u_t^3a_8 \\ +\varepsilon u_tu_{tt}(-6a_1txy - 6a_2tx - 6a_3ty - 6a_4xy - 6a_5t - 6a_6x - 6a_7y - 6a_8u - 6a_9) \\ +\varepsilon(\psi_{tt} - \psi_{xx} - \psi_{yy} + a_1xy + a_2x + a_3y + a_5) = -\varepsilon a_8u_t + \varepsilon a_8u_t^3. \qquad (۱۱۸.۴)$$

جمله با ضریب u_{tt} در نخستین خط از معادله (۱۱۸.۴) نتیجه می‌دهد که:

$$\psi_u = 0,$$

پس داریم:

$$\psi_{xu} = \psi_{uu} = \psi_{tu} = \psi_{yu} = 0.$$

بنابرای دومین پرانتز در خط اول (۱۱۸.۴) صفر خواهد شد و سپس نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} = \psi_{yy} = 0,$$

بعد از محاسبات و انتگرال گیری معادله و حل معادلات فوق داریم:

$$\psi = a_{10}txy + a_{11}tx + a_{12}ty + a_{13}xy + a_{14}t + a_{15}x + a_{16}y + a_{17}.$$

در نتیجه معادله ریلی_موج تقریباً خود الحاق است و ضریب خود الحاقی تقریبی به صورت زیر است:

$$v \approx a_1txy + a_2tx + a_3ty + a_4xy + a_5t + a_6x + a_7y + a_8u + a_9 + \varepsilon(a_{10}txy \\ +a_{11}tx + a_{12}ty + a_{13}xy + a_{14}t + a_{15}x + a_{16}y + a_{17}). \qquad (۱۱۹.۴)$$

حال می‌توان قوانین پایستگی تقریبی را به صورت

$$[D_t(C^t) + D_x(C^x) + D_y(C^y)]|_{(۱۱۰.۴)} = 0, \qquad (۱۲۰.۴)$$

بسازیم. که C^t و C^y بردارهای پایستگی هستند و می‌توانند به فرم زیر نوشته شوند:

$$C^i = W\left(\frac{\partial L}{\partial u_i} - D_j\frac{\partial L}{\partial u_{ij}} + D_{jk}\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}} - \cdots\right) + D_j(W)\left(\frac{\partial}{\partial u_{ij}} - D_k\frac{\partial}{\partial u_{ijk}} + \cdots\right) + \cdots . \qquad (۱۲۱.۴)$$

برای معادله ریلی‌ــ موج (۱۰۹.۴) با استفاده از تقارن‌های تقریبی (۱۴۲.۳)، فرمول کلی (۱۲۱.۴) و جایگذاری ضریب تقریبی (۱۱۹.۴) بردارهای پایستگی عبارتند از:

$$C^t = W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tt}}\right)\right] + D_t(W)\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} = W[-\varepsilon v + 3\varepsilon u_t^2 v - v_t] + D_t(W)v,$$

$$C^x = W\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} = W[v_x] - D_x(W)v$$

$$C^y = W\left[-D_y\left(\frac{\partial L}{\partial u_{yy}}\right)\right] + D_y(W)\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} = W[v_y] - D_y(W)v, \qquad (۱۲۲.۴)$$

به طوریکه در آنها W مشخصه مولد $\mathbf{v}$ است. به عنوان مثال مولد $\mathbf{v}_8$ را از (۱۴۲.۳) در نظر بگیرید. در این حالت داریم:

$$W = u - tu_t - xu_x + \varepsilon\left(-\frac{1}{4}tu + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_t + \frac{1}{4}txu_x\right).$$

سپس این محاسبات را با جایگذاری ضریب تابعی تقریبی (۱۱۹.۴) با ضرایب دلخواه به صورت $a_1 = a_{11} = 1, a_2 = \cdots = a_{10} = a_{12} = \cdots = a_{17} = 0$ ساده‌تر می‌نماییم. پس ضریب خود الحاقی تقریبی در این حالت به صورت

$$v = txy + \varepsilon txy,$$

است. بنابراین قوانین پایستگی تقریبی (در مرتبه اول دقت در ε) برای تقارن $\mathbf{v}_8$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}
C^t &= (u - tu_t - xu_x)(-\varepsilon txy + 3\varepsilon txyu_t^2 - xy - \varepsilon xy) - \varepsilon xy\Bigg(-\frac{1}{4}tu \\
&\quad + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_t + \frac{1}{4}txu_x\Bigg) + (-tu_{tt} - xu_{tx})(txy + \varepsilon txy) \\
&\quad + \varepsilon txy\left(-\frac{1}{4}u + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_{tt} + \frac{1}{4}xu_x + \frac{1}{4}txu_{tx}\right), \\
C^x &= (u - tu_t - xu_x)(ty + \varepsilon ty) + \varepsilon ty\left(-\frac{1}{4}tu + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_t + \frac{1}{4}txu_x\right) \\
&\quad + (tu_{tx} + xu_{xx})(txy + \varepsilon txy) - \varepsilon txy\left(\frac{1}{4}xu_t + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_{tx} + \frac{1}{4}txu_{xx}\right), \\
C^y &= (u - tu_t - xu_x)(tx + \varepsilon tx) + \varepsilon tx\left(-\frac{1}{4}tu + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_t + \frac{1}{4}txu_x\right) \\
&\quad (-u_y + tu_{ty} + xu_{xy})(txy + \varepsilon txy) \\
&\quad - \varepsilon txy\left(-\frac{1}{4}tu_y + \frac{1}{8}(t^2+x^2)u_{ty} + \frac{1}{4}txu_{xy}\right).
\end{aligned}$$

به طور مشابه قوانین پایستگی برای سایر تقارن‌های تقریبی (۱۴۲.۴) قابل محاسبه هستند.

یادداشت

همانگونه که اشاره شد، از نقطه نظر فیزیکی و ریاضی قوانین پایستگی ابزار بسیار قدرتمندی در مطالعه معادلات دیفرانسیل هستند. اگر دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد مطالعه دارای قوانین پایستگی باشد انتگرال‌پذیری و وجود جواب برای آن تضمین می‌شود. ارتباط بین تقارن‌ها و قوانین پایستگی که نقش اساسی در فیزیک مدرن ایفا می‌کند، نخستین بار در یک مقاله ارزشمند توسط نوتر معرفی شد [۷۱]. با این وجود این روش برای یافتن قوانین پایستگی دارای نواقصی است از جمله اینکه این روش قابل تعمیم به معادلات دیفرانسیل تکاملی یا معادلات دیفرانسیل از مرتبه فرد نیست. به علاوه یک تقارن از معادلات اویلرـ لاگرانژ باید در یک شرط اضافی صادق باشد و آن ناوردا نگه داشتن انتگرال تغییرات است. وجود این نواقص سایرین رابر آن داشت تا در صدد رفع این موانع برآیند. در [۵۳] تعمیمی از قضیه نوتر توسط ابراگیموف ارائه شده است که شرط لازم و کافی برای وجود قوانین پایستگی را اثبات می‌کند. بر اساس اتحاد عملگری نوتر که به مولد بی‌نهایت کوچک از گروه تبدیلات، عملگر دیفرانسیلی اویلرـ لاگرانژ و عملگرهای نوتر وابسته است، یک الگوریتم ساده و کارآمد برای ساختن قوانین پایستگی با استفاده از تقارن‌های معادلاتی که لاگرانژی می‌پذیرند، ساخته می‌شود. در فصلی که از پیش رو گذشت نشان دادیم که مفهوم خود الحاقی خطی یا غیر خطی برای معادلاتی که لاگرانژی در مفهوم کلاسیک آن را ندارند، برای ساختن قوانین پایستگی بسیار مهم و کاربردی است. نکته مهم اینکه این روش قابل تعمیم به هر دستگاهی از معادلات خطی یا غیر خطی نیز هست و به سادگی می‌توان قوانین پایستگی را برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل ساخت.

فصل ۵

قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری

پیشتر دانستیم که اگر یک معادله دیفرانسیل یک معادله اویلر_لاگرانژ باشد، قوانین پایستگی برای این معادله با استفاده از قضیه نوتر با کمک تقارن‌های تغییراتی نقطه‌ای از این معادله ساخته می‌شوند. یاد آوری می‌کنیم که یک معادله دیفرانسیل اویلر_لاگرانژ از اصل تغییراتی با مینیمم سازی انتگرال تغییرات با یک تابع لاگرانژی به عنوان انتگرالده در آن به دست می‌آید. نخستین بار در سال ۱۹۹۶ فردی به نام ریو[1] لاگرانژیی وابسته به مشتقات کسری را معرفی نمود[۹۴]. در طول دو دهه گذشته تعمیم‌های بسیاری از معادلات اویلر_لاگرانژ با انواع مشتق‌های کسری ارائه شده است [۵، ۶، ۷، ۳۹، ۶۱، ۹۴]. برپایه این نتایج تعمیم کسری از قضیه نوتر ساخته شد [۱۲، ۱۷، ۲۷، ۶۵، ۶۷، ۷۲]. همچنین در مواردی نیز قوانین پایستگی کسری برای معادلات و دستگاهایی که دارای لاگرانژی هستند به دست آمده است. با این اوصاف بیشتر معادلات پر کاربرد در فیزیک مانند معادله انتشار کسری، معادلات انتقال و معادلات جنبشی کسری معادلات اویلر_لاگرانژ نبوده و دارای لاگرانژی به مفهوم کلاسیک آن نیستند. بنابراین برای این معادلات، قوانین پایستگی با استفاده از قضیه نوتر قابل دستیابی نیست و نیازمند رویکرد جدیدی برای یافتن آنها هستیم.

همانگونه که می‌دانیم ابراگیموف روش جایگزینی برای یافتن قوانین پایستگی برای معادلات

[1] Riewe

دیفرانسیل مرتبه صحیح که فاقد لاگرانژی هستند ارائه نمود. این روش برپایه مفهوم خود الحاقی غیر خطی بر اساس لاگرانژی قراردادی استوار است. وی ثابت نمود که قوانین پایستگی می‌توانند به تقارن‌های معادلات دیفرانسیلی که غیر خطی خود الحاقی هستند و یا دستگاه‌هایی متشکل از این معادلات وابسته شوند. مؤلفه‌های بردارهای پایستگی بر طبق الگوریتمی که او اثبات کرد با اعمال عملگرهای نوتر بر تابع لاگرانژی حاصل می‌شوند. با کمک این رویکرد قوانین پایستگی برای تمامی معادلات مرتبه صحیح و یا دستگاه‌هایی متشکل از آنها که تنها دارای لاگرانژی قراردادی هستند با کمک تقارن‌های آنها ساخته می‌شوند [۹، ۴۷، ۴۸، ۴۹].

در این فصل، بعد از تعمیم قضیه نوتر به معادلات دیفرانسیل کسری، نشان می‌دهیم که مفهوم خود الحاقی غیر خطی قابل تعمیم به معادلات دیفرانسیل کسری که دارای لاگرانژی در مفهوم کلاسیک آن نیستند نیز بوده و از این مفهوم می‌توان برای ساختن قوانین پایستگی برای چنین معادلاتی بهره جست.

۱.۵ قضیه نوتر برای معادلات کسری از حساب تغییرات

منیفلد $M = T \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ را به عنوان فضای کامل در نظر بگیرید. این فضا شامل p متغیر مستقل $t = (t_1, t_2, \cdots, t_p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, u^2, \cdots, u^q)$ است. در اینجا $u^{(n)}$ نشان دهنده مشتقات u تا مرتبه n است و $m \leq \alpha, \beta < m+1$ نشان دهنده مرتبه مشتقات کسری هستند. فرض کنیدکه میدان برداری به صورت

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{q} \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

و مشخصه q مؤلفه‌ای $Q = (Q_1, \cdots, Q_q)$ این میدان برداری به صورت

$$Q_\sigma(t, u^{(1)}) = \eta_\sigma - \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial u^\sigma}{\partial t_i}, \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, q,$$

باشد. امتداد مرتبه nـام این میدان برداری به صورت

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}_Q^{(n)} + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i, \tag{۱.۵}$$

است که در آن $\mathbf{v}_Q$ و $\mathbf{v}_Q^{(n)}$ با روابط

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\sigma=1}^{q} Q_\sigma(t, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\sigma}, \qquad \mathbf{v}_Q^{(n)} = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{J} D_J Q_\sigma \frac{\partial}{\partial u_J^\sigma},$$

داده می‌شوند. جمع در روابط فوق روی اندیس چندگانه $J = (j_1, \cdots, j_k)$ با $1 \leq j_k \leq p$ و $k \geq 0$ است.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید f و g از کلاس C^1 روی بازه $[a,b]$ باشند و $\nu \in \mathbb{R}_0$ در این صورت نماد گذاری زیر را معرفی می‌نماییم:

$$D_t^\nu(f,g) = -g\,{}_tD_b^\nu f + f\,{}_aD_t^\nu g.$$

در رابطه فوق $t \in [a,b]$ است [۵۸].

تعریف ۲.۱.۵. کمیت $P(t,u,\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u)$ کمیت پایستگی کسری گفته می‌شود اگر و فقط اگر به فرم زیر باشد

$$P(t,u,\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u) = \sum_{i=1}^m P_i^1(t,u,\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u) P_i^2(t,u,\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u),$$

برای $m \in N$ و توابعی به فرم P_i^1 و P_i^2 که در رابطه

$$D_t^{\gamma_i}\left(P_i^{j_i^1}(t,u,\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u) P_i^{j_i^2}(t,u,\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u)\right) = 0,$$

برای $\gamma_i \in \{\alpha,\beta,1\}$، $j_i^1 = 1$ و $j_i^2 = 2$ یا $j_i^1 = 2$ و $j_i^2 = 1$ بر روی تمامی جواب‌های معادلات اویلر_لاگرانژ کسری صادق هستند.

تعریف ۳.۱.۵. برای $1 \le k \le q$ عملگر اویلر مرتبه k_ام با رابطه

$$E_k = \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + {}_tD_b^\alpha \frac{\partial}{\partial_a D_t^\alpha u} + {}_aD_t^\beta \frac{\partial}{\partial_t D_b^\beta u}, \tag{۲.۵}$$

داده می‌شود که در آن برای $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ داریم $\frac{d}{dt} = {}_aD_t^\alpha$ و $-\frac{d}{dt} = {}_tD_b^\beta$ و رابطه فوق به معادله اویلر_لاگرانژ استاندارد تبدیل می‌شود.

قضیه ۱.۱.۵. فرض کنید $L(u)$ تابعکی به صورت

$$L(u) = \int_a^b L(t,u^{(n)},\ {}_aD_t^\alpha u,\ {}_tD_b^\beta u)dt, \tag{۳.۵}$$

باشد که روی مجموعه توابع $u(t)$، دارای مشتقاتی پیوسته کسری چپ و راست ریمن_لیوویل از مرتبه α و β روی بازه $[a,b]$، تعریف شده‌اند و همچنین این توابع در شرایط مرزی $u(a) = u_a$ و $u(b) = u_b$ صادق هستند. آنگاه شرط لازم برای اینکه $L(u)$ دارای اکسترمم در تابع $u(t)$ باشد آن است که $u(t)$ در معادله اویلر_لاگرانژ زیر صادق باشد:

$$E_k(L) = 0, \qquad k = 1,\cdots,q. \tag{۴.۵}$$

برهان. [۲۷] $\square$

تعریف ۴.۱.۵. یک گروه موضعی از تبدیلات G که روی منیفلد $M \subset C \times U$ عمل می‌کند یک گروه تقارن تغییرات از (۳.۵) است اگر به ازای $u = f(t)$ که روی $\Omega \subseteq C$ تعریف شده باشد و گراف آن در M قرار می‌گیرد، $g \in G$ چنان باشد که $\bar{u} = \bar{f}(\bar{t}) = g.f(\bar{t})$. در این صورت

$$\int_\Omega L(t,f^{(n)}(t),\ {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u)dt = \int_{\bar{\Omega}} L(\bar{t},\bar{f}^{(n)}(\bar{t}),\ {}_aD_{\bar{t}}^\alpha \bar{u}, {}_{\bar{t}}D_b^\beta \bar{u})d\bar{t}. \tag{۵.۵}$$

لازم به ذکر است برای هر $g \in G$ گروه تبدیلات

$$(\bar{t}, \bar{u}) = g.(t, u) = (\Psi(t, u, \varepsilon), \Pi(t, u, \varepsilon)),$$

می‌تواند به عنوان تغییر متغیر در نظر گرفته شود، پس می‌توان (۳.۵) را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\int_{\bar{\Omega}} L(\bar{t}, \bar{f}^{(n)}(\bar{t}),\ {}_aD_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{u}, {}_{\bar{t}}D_b^{\beta}\bar{u})\mathrm{det}J_g(t, u^1)dt, \tag{۶.۵}$$

که ماتریس ژاکوبین دارای درایه‌های زیر است:

$$J_g^{ij}(t, u, \varepsilon) = D_i\Psi^j(t, u, \varepsilon).$$

قضیه ۲.۱.۵. گروه همبند از تبدیلات G که روی منیفلد M عمل می‌کند، یک گروه تقارن تغییراتی از تابعک (۳.۵) است اگر و فقط اگر رابطه

$$\mathbf{v}^{(\alpha,\beta)}(L) + L\mathrm{Div}\xi = 0, \tag{۷.۵}$$

برای هر مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i\frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{q}\eta^j\frac{\partial}{\partial u^j},$$

از گروه G، برقرار باشد. شایان ذکر است که $\mathrm{Div}\xi$ در رابطه (۷.۵) نشان دهنده دیورژانس کلی از p_تایی $\xi = (\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^p)$ است.

برهان. چون رابطهٔ (۵.۵) و (۶.۵) برای همه توابع $u = f(x)$ برقرار است، انتگرالده‌ها باید برای هر $(t, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ با یکدیگر برابر باشند به این معنا که:

$$L(\bar{t}, \bar{f}^{(n)}(\bar{t}),\ {}_aD_{\bar{t}}^{\alpha}\bar{u}, {}_{\bar{t}}D_b^{\beta}\bar{u})\mathrm{det}J_g(t, u^1) = L(t, f^{(n)}(t),\ {}_aD_t^{\alpha}u, {}_tD_b^{\beta}u)dt. \tag{۸.۵}$$

برای به دست آوردن نسخه بی‌نهایت کوچک از رابطه (۸.۵)، قرار می‌دهیم $g = g_\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v})$ و پس از مشتق گیری نسبت به ε داریم:

$$(\mathbf{v}^{(\alpha,\beta)}(L) + L\mathrm{Div}\xi)\mathrm{det}J_{g_\varepsilon} = 0,$$

زیرا

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{det}J_{g_\varepsilon}(t, u^{(1)})] = \mathrm{Div}\xi(g_\varepsilon^{(1)}.(t, u^{(1)}))\mathrm{det}J_{g_\varepsilon}(t, u^{(1)}),$$

و نیز

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\varepsilon=0}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]^{(n)}(t, u^{(n)}) = \mathbf{v}^{(n)}|_{(t,u^{(n)})}, \qquad \forall(t, u^{(n)}) \in M^{(n)}.$$

در $\varepsilon = 0$، g_ε نگاشت همانی است. به این ترتیب لزوم (۷.۵) اثبات شد و اثبات برگشت نیز بدیهی است [۵۸]. □

قضیه ۳.۱.۵. فرض کنید G یک گروه تقارن تغییراتی از (۵.۵) باشد و همچنین

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{q} \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

مولد بی‌نهایت کوچک از G باشد. آنگاه $Q = (Q_1, \cdots, Q_q)$ مشخصه قانون پایستگی برای معادلات اویلر_لاگرانژ $E(L) = 0$ است. به عبارت دیگر یک p_تایی از توابع به صورت $P(x, u^{(\alpha,\beta)}) = (P_1, P_2, \cdots, P_p)$ چنان موجود است که

$$\mathrm{Div} P = Q.E(L) = \sum_{\nu=1}^{q} Q_\nu E_\nu(L).$$

برهان. با جایگذاری فرمول امتداد (۱.۵) در (۷.۵) داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{v}^{(\alpha,\beta)}(L) + L \mathrm{Div}\xi \\
&= \mathbf{v}_Q^{(\alpha,\beta)}(L) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i L + L \sum_{i=1}^{p} D_i \xi^i \\
&= \mathbf{v}_Q^{(\alpha,\beta)}(L) + \mathrm{Div}(L\xi) \\
&= \sum_{\alpha,J} D_J Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \mathrm{Div}(L\xi) \\
&= \sum_{\alpha,J} Q_\alpha (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \mathrm{Div}\left(Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + L\xi\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha E_\alpha(L) + \mathrm{Div} P.
\end{aligned}$$

پس ثابت کردیم $P = Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + L\xi$ قانون پایستگی برای معادله اویلر_لاگرانژ است. □

مثال ۱.۱.۵. اگر $\mathbf{v} = \eta \partial u$ یک تقارن تغییراتی برای تابعک

$$L(u) = \int_a^b L(t, u, u^1, {}_aD_t^\alpha u) dt,$$

باشد، با توجه به آنکه برای این تقارن $\xi = 0$ و مشخصه $Q = \eta$ است، بنابراین دیورژانس تابع P در قضیه (۳.۱.۵) در این مثال به روش زیر محاسبه می‌شود [۵۸]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{(\alpha)}(L) + L\mathrm{Div}\xi - Q.E(L) &= \left(\eta \partial u + \frac{\partial \eta}{\partial t} \partial_{u_t} + {}_aD_t^\alpha \eta \partial_{{}_aD_t^\alpha u}\right)(L) - \eta\big(\partial_u L \\
&\quad - D_t \partial_{u_t^\alpha} L + {}_tD_b^\alpha \partial_{{}_aD_t^\alpha u} L\big) \\
&= \frac{\partial \eta}{\partial t} \partial_{u_t} L + \eta D_t \partial_{u_t^\alpha} L + {}_aD_t^\alpha \eta \partial_{{}_aD_t^\alpha u} L - \eta\, {}_tD_b^\alpha \partial_{{}_aD_t^\alpha u} L \\
&= D_t\left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_t^\alpha}\right) + {}_aD_t^\alpha (\partial_{{}_aD_t^\alpha} L, \eta).
\end{aligned}$$

مثال ۲.۱.۵. اگر $\mathbf{v} = \xi \partial t + \eta \partial u$ یک تقارن تغییراتی برای تابعک

$$L(u) = \int_a^b L(t, u, {}_aD_t^\alpha u, {}_tD_b^\beta u) dt,$$

باشد، از آنجاییکه مشخصه برای این تقارن به صورت

$$Q = \eta - \xi \frac{\partial u}{\partial t},$$

است [۵۸]. بنابراین دیورژانس تابع P در قضیه (۳.۱.۵) در این مثال عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}^{(\alpha)}(L) + L\mathrm{Div}\xi - Q.E(L) = \xi\partial_t L + \xi\partial_u L\frac{\partial u}{\partial t} + \xi\partial_{u_t^\alpha} L\, {}_aD_t^{\alpha+1}u \\
&\xi\partial_{{}_aD_t^\alpha u}L\, {}_tD_b^{\beta+1}u + L\frac{\partial \xi}{\partial t} - \eta\, {}_tD_b^\alpha \partial_{u_t^\alpha}L + {}_tD_a^\alpha \eta \partial_{u_t^\alpha}L - \eta_a D_t^\beta \partial_{{}_aD_t^\alpha u}L + {}_tD_a^\beta \eta \partial_{{}_aD_t^\alpha u}L \\
&+\xi\frac{\partial u}{\partial t}{}_tD_b^\alpha \partial_{u_t^\alpha}L - \partial_{u_t^\alpha}L\, {}_aD_t^\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\xi\right) + \xi\frac{\partial u}{\partial t}{}_aD_t^\beta \partial_{{}_aD_t^\alpha u}L - \partial_{{}_aD_t^\alpha u}L\, {}_aD_t^\beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\xi\right) \\
&= D(L\xi) + D^\alpha(\partial_{u_t^\alpha}L, \eta) - D^\beta(\partial_{{}_aD_t^\alpha u}L, \eta) - D^\alpha\left(\partial_{u_t^\alpha}L, \xi\frac{\partial u}{\partial t}\right) - D^\beta\left(\partial_{{}_aD_t^\alpha u}L, \xi\frac{\partial u}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

۲.۵ خود الحاقی غیر خطی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری

تعریف قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری مشابه تعریف آنها برای معادلات مرتبه صحیح است. یعنی چناچه فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه کسری با دو متغیر مستقل t و x و یک متغیر وابسته u داشته باشیم، بردار $C = (C^t, C^x)$ که مؤلفه‌ها در آن به صورت $C^t = C^t(t, x, u, \cdots)$ و $C^x = C^x(t, x, u, \cdots)$ هستند، بردار پایستگی برای معادله مورد نظر نامیده می‌شود اگر برای تمام جواب‌های معادله کسری در معادله پایستگی زیر صدق کند:

$$D_tC^t + D_xC^x = 0. \qquad (۹.۵)$$

یک قانون پایستگی یک قانون پایستگی بدیهی برای معادله نامیده می‌شوند اگر مؤلفه‌های C^t و C^x از آن روی تمام جواب‌های معادله صفر شوند.

مثال ۱.۲.۵. معادله انتشار زمان_کسری (۲۷۰.۳) را در حالتی که k تابعی از u به صورت زیر

$$D_t^\alpha u = (K(u)u_x)_x, \qquad \alpha \in (0, 2), \quad t \in (0, T]. \qquad (۱۰.۵)$$

است را در نظر بگیرید. این معادله با در نظر گرفتن مشتق کسری ریمن_لیوویل می‌تواند به فرم قانون پایستگی (۹.۵) به صورت:

$$C^t = D_t^{n-1}({}_0I_t^{n-\alpha}u), \qquad C^x = -k(u)u_x, \quad n = 1, 2,$$

نوشته شود. در حالتیکه مشتق معادله از نوع کاپوتو است می‌تواند به فرم پایستگی زیر نوشته شود:

$$C^t =_0 I^{n+1-\alpha}(D_t^n u), \qquad C^x = -k(u)u_x, \quad n = 1, 2.$$

معادله انتشار زمان کسری (۱۰.۵) درست همانند معادله انتشار کلاسیک یک معادله اویلر_لاگرانژ نیست. این به این معناست که معادله (۱۰.۵) نمی‌تواند از اصل تغییراتی با مینیمم سازی لاگرانژی وابسته به متغیرهای x و t و u و هر مشتق و انتگرال مرتبه صحیح و یا کسری وابسته به u، نتیجه شود. پس معادله (۱۰.۵) دارای لاگرانژی به مفهوم کلاسیک آن نیست. لاگرانژی قراردادی برای معادله (۱۰.۵) به صورت زیراست:

$$L = v(t,x)[D_t^\alpha u - k'(u)u_x^2 - k(u)u_{xx}], \tag{۱۱.۵}$$

که در آن v یک متغیر جدید است. با این لاگرانژی قراردادی عمل انتگرال به صورت

$$\int_0^T \int_\Omega L(t,x,u,v,D_t^\alpha u, u_x, u_x x)dxdt, \tag{۱۲.۵}$$

تعریف می‌شود. حال عملگر اویلر_لاگرانژ نسبت به u متناظر با عمل (۱۲.۵) به فرم

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^\alpha)^* \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \tag{۱۳.۵}$$

است که $(D_t^\alpha)^*$ عملگر الحاقی از D_t^α است. برای مشتقات کسری ریمان_لیوویل و کاپوتو عملگرهای الحاقی متناظر به فرم زیر هستند:

$$\begin{aligned} ({}_0D_t^\alpha)^* &= (-1)^n \, {}_tI_T^{n-\alpha}(D_t^n) \equiv {}_t^C D_T^\alpha, \\ ({}_0^C D_t^\alpha)^* &= (-1)^n D_t^n \, ({}_tI_T^{n-\alpha}) \equiv {}_tD_T^\alpha. \end{aligned} \tag{۱۴.۵}$$

در اینجا ${}_tI_T^{n-\alpha}$ عملگر راست انتگرال کسری از مرتبه $n-\alpha$ است. مشابه حالت معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه صحیح، معادله الحاقی برای معادلات دیفرانسیل کسری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\delta L}{\delta u} = 0. \tag{۱۵.۵}$$

به عنوان مثال معادله الحاقی برای معادله انتشار زمان_کسری به فرم زیر خواهد بود:

$$(D_t^\alpha)^* v - k(u)v_{xx} = 0, \quad n = [\alpha]+1, \quad \alpha \in (0,2). \tag{۱۶.۵}$$

حال می‌توان مفهوم خود الحاقی غیر خطی را برای معادلات دیفرانسیل کسری تعریف نمود. معادله (۱۰.۵) غیر خطی خود الحاق است اگر معادله الحاقی (۱۶.۵) برای تمام جواب‌های u از معادله با جایگذاری $v = \varphi(t,x,u)$ به شرط آنکه $\varphi(t,x,u)$ مخالف صفر باشد، صادق باشد.

۳.۵ عملگرهای کسری نوتر

با توجه به آنکه ساختن قوانین پایستگی با روش مستقیم با استفاده از قضیه نوتر بسیار سخت است، روش ساده‌تری برای یافتن این قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح

در فصل قبل ارائه شد. در این روش مؤلفه‌های بردار پایستگی از عمل عملگرهای نوتر بر لاگرانژی حاصل می‌شوند. این عملگرها از اتحاد عملگری یا همان اتحاد نوتر به دست می‌آیند. برای حالت مفروض با دو متغیر مستقل t و x و یک متغیر وابسته $u(t,x)$ این اتحاد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{v}} + D_t(\xi^0)I + D_x(\xi^1)I = W\frac{\delta}{\delta u} + D_t\mathbf{N}^t + D_x\mathbf{N}^x. \qquad (۱۷.۵)$$

در اتحاد فوق I عملگر همانی، $\frac{\delta}{\delta u}$ عملگر اویلر_لاگرانژ، $\mathbf{N}^t$ و $\mathbf{N}^x$ عملگرهای نوتر و $\tilde{\mathbf{v}}$ امتداد مناسب از مولد گروه تقارن نقطه‌ای لی است که برای تمام مشتقات مرتبه صحیح و یا کسری از متغیر وابسته در گیر در معادله عبارت است از:

$$\mathbf{v} = \xi^0(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

که مشخصه آن به صورت $W = \eta - \xi^0 u_t - \xi^1 u_x$ است. امتداد گروه تبدیلات نقطه‌ای عمل کننده روی فضایی با متغیرهای کسری در بخش (۱۰.۳) و فرمول‌های (۱۸۲.۳) و (۱۸۹.۳) از فصل سوم به تفصیل شرح داده شده است. برای حالتی که مشتق کسری نسبت به زمان موجود در معادله از نوع ریمن_لیوویل باشد عملگر $\mathbf{N}^t$ به صورت

$$\mathbf{N}^t = \xi^0 I + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k {}_0D_t^{\alpha-1-k}(W)D_t^k\frac{\partial}{\partial({}_0D_t^\alpha u)} - (-1)^n J\left(W, D_t^n\frac{\partial}{\partial({}_0D_t^\alpha u)}\right), \qquad (۱۸.۵)$$

و در حالتی که مشتق کسری نسبت به زمان موجود در معادله به صورت کاپوتو باشد عملگر $\mathbf{N}^t$ به صورت

$$\mathbf{N}^t = \xi^0 I + \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k(W)D_T^{\alpha-1-k}\frac{\partial}{\partial({}_0^C D_t^\alpha u)} - J\left(D_t^n(W), \frac{\partial}{\partial({}_0^C D_t^\alpha u)}\right), \qquad (۱۹.۵)$$

است. در روابط فوق آنچه با J نشان داده شده است، انتگرالی است که با رابطه

$$J(f,g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\int_t^T \frac{f(\tau,x)g(\mu,x)}{(\mu-\tau)^{\alpha+1-n}}d\mu d\tau, \qquad (۲۰.۵)$$

تعریف می‌شود و دارای ویژگی زیر است:

$$D_tJ(f,g) = f\ {}_tI_T^{n-\alpha}g - g\ {}_0I_t^{n-\alpha}f. \qquad (۲۱.۵)$$

در صورتیکه مشتق کسری نسبت به متغیر x نداشته باشیم $\mathbf{N}^x$ مانند حالت کلاسیک آن خواهد بود. حال برای هر جواب از معادله دیفرانسیل کسری و هر مولد پذیرفته شده از آن معادله، دو سمت اتحاد نوتر (۱۷.۵) را روی لاگرانژی قردادی اثر می‌دهیم. با این اعمال سمت چپ اتحاد نوتر به صورت زیر خواهد بود:

$$(\tilde{\mathbf{v}}L + D_t(\xi^0)L + D_x(\xi^1)L)\,|_{(\mathrm{FDE})=0} = 0,$$

به دلیل غیر خطی خود الحاق بودن معادله دیفرانسیل کسری، معادله اویلر_لاگرانژ برابر صفر می‌شود پس سمت راست اتحاد عملگری نوتر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_t(\mathbf{N}^t L) + D_x(\mathbf{N}^x L)\Big|_{(\text{FDE})=0} = 0, \tag{۲۲.۵}$$

بنابراین بردارهای قوانین پایستگی به طور صریح از رابطهٔ زیر حاصل می‌شوند:

$$C^t = \mathbf{N}^t L, \qquad C^x = \mathbf{N}^x L \tag{۲۳.۵}$$

مثال ۱.۳.۵. معادله بنی_لین که در مثال (۲.۱۰.۳) معرفی شد را مجدداً درنظر بگیرید. که $D_t^{\chi(\alpha)}$ نشان دهنده هریک از انواع عملگرهای مشتقات کسری نسبت به زمان است. عملگر الحاقی F^* به عملگر غیر خطی F از معادله با رابطه

$$F^* = \frac{\delta L}{\delta u} = (D_t^{\chi(\alpha)})^* v - v_x u + \beta(v_{xx} + v_{xxxx}) - v_{xxx} - \gamma v_{xxxxx} - v_x, \tag{۲۴.۵}$$

داده می‌شود [۸۷]. لاگرانژی قراردادی برای معادله بنی_لین به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$L = vF = vD_t^{\chi(\alpha)} u + vuu_x + vu_{xxx} + \beta v(u_{xx} + u_{xxxx}) + \gamma v u_{xxxxx} + vu_x, \tag{۲۵.۵}$$

فرض کنیم t به بازه $[0, T]$ تعلق داشته باشد، سپس عملگر اویلر_لاگرانژ $\frac{\delta}{\delta u}$ به صورت زیر است:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^{\chi(\alpha)})^* \frac{\partial}{\partial (D_t^{\chi(\alpha)} u)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \cdots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1,\cdots i_s}}. \tag{۲۶.۵}$$

در رابطه فوق $(D_t^{\chi(\alpha)})^*$ عملگر الحاقی از $(D_t^{\chi(\alpha)} u)$ است. عملگر الحاقی برای هریک از عملگرهای مشتق در نظر گرفته شده برای این معادله در مثال (۲.۱۰.۳)، به طور مجزا تعریف می‌شود. با این مقدمات عملگر الحاقی برای حالت‌های مختلف مشتق در این معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}
(D_t^{\chi(\alpha)})^* &\equiv (D_t^\alpha D_t)^* = {}_tD_T^\alpha D_t, \\
(D_t^{\chi(\alpha)})^* &\equiv ({}^C D_t^\alpha)^* = {}_tD_T^\alpha, \\
(D_t^{\chi(\alpha)})^* &\equiv (D_t^{1+\alpha})^* = {}_t^C D_T^{1+\alpha}, \\
(D_t^{\chi(\alpha)})^* &\equiv (D_t^\alpha)^* = {}_t^C D_T^\alpha.
\end{aligned} \tag{۲۷.۵}$$

حال تمام $\varphi(t,x,u)$هایی که امکان غیر خطی خود الحاق کردن معادله کسری_زمان بنی_لین را فراهم می‌کند را محاسبه می‌کنیم. در رابطه (۲۵.۵) جایگذاری $\varphi(t,x,u)$ به صورت زیر است:

$$\varphi = \phi(t)\psi(x). \tag{۲۸.۵}$$

با جایگذاری عبارت فوق در معادله (۲۴.۵) داریم:

$$\begin{aligned}
&\psi(x)(D_t^{\chi(\alpha)})^*(\phi(t)) \\
&\quad + \phi(t)\big[\beta\left(\psi''(x) + \psi''''(x)\right) - \psi'(x)(1+u) - \psi'''(x) - \gamma\psi'''''(x)\big] = 0,
\end{aligned}$$

معادله فوق به دو معادله زیر تفکیک می‌شود:

$$(D_t^{\chi(\alpha)})^*(\phi(t)) = 0,$$
$$\beta\left(\psi''(x) + \psi''''(x)\right) - \psi'(x)(1+u) - \psi'''(x) - \gamma\psi'''''(x) = 0.$$

تابع $\phi(t)$ به نوع عملگر مشتق کسری $D_t^{\chi(\alpha)}$ وابسته است. پس با حل نخستین معادله از معادلات فوق داریم:

$$(D_t^{\chi(\alpha)})^*\phi(t) = (D_t^{\alpha}D_t(\phi(t)))^* = 0: \quad \phi(t) = c_1(T-t)^{\alpha} + c_2, \tag{۲۹.۵}$$
$$(D_t^{\chi(\alpha)})^*\phi(t) = ({}^{C}D_t^{\alpha}\phi(t))^* = 0: \quad \phi(t) = c_1(T-t)^{\alpha-1}, \tag{۳۰.۵}$$
$$(D_t^{\chi(\alpha)})^*\phi(t) = (D_t^{1+\alpha}\phi(t))^* = 0: \quad \phi(t) = c_1 t + c_2, \tag{۳۱.۵}$$
$$(D_t^{\chi(\alpha)})^*\phi(t) = (D_t^{\alpha}\phi(t))^* = 0 \quad \phi(t) = c_1. \tag{۳۲.۵}$$

که c_1 و c_2 ثوابت دلخواه هستند. لازم به ذکر است در معادله (۳۱.۵) از تبدیل لاپلاس برای مشتق کاپوتو کسری_زمان استفاده می‌شود به این معنا که:

$$L_t^{C}D_T^{\alpha}\phi(t) = s^{\alpha}\phi(s) - 1 \Rightarrow \phi(t) = c_1 t^n + c_2 t^{n-1},$$

که برای $0 < \alpha < 1$ جواب $\phi(t) = c_1(t) + c_2$ را نتیجه می‌دهد. برای معادله بنی_لین $\psi(x)$ ثابت است . برای معادله کاواهارا $\psi(x)$ به صورت

$$\psi(x) = c_1 + c_2\exp\left[\frac{-1}{2}\frac{\sqrt{-2\gamma(1+\sqrt{-4\gamma u+1})}x}{\gamma}\right] \tag{۳۳.۵}$$
$$+c_3\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2\gamma(1+\sqrt{-4\gamma u+1})}x}{\gamma}\right] + c_4\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma(-1+\sqrt{-4\gamma u+1})}x}{\gamma}\right]$$
$$+c_5\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma(-1+\sqrt{-4\gamma u+1})}x}{\gamma}\right].$$

است. برای معادله KdV مرتبه پنجم $\psi(x)$ به صورت زیر است:

$$\psi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma}}\right) + c_5\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\gamma}}\right). \tag{۳۴.۵}$$

برای معادله کاروموتو_سیواشینسکی $\psi(x)$ عبارت است از:

$$\psi(x) = c_1 + c_2\exp\left[-\frac{1}{12}\frac{\begin{array}{c}(I(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{2/3}\sqrt{3}\\ +(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{2/3}+12I\sqrt{3}-12)x\end{array}}{(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{1/3}}\right]$$
$$+c_3\exp\left[\frac{1}{12}\frac{\begin{array}{c}(I(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{2/3}\sqrt{3}\\ -(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{2/3}+12I\sqrt{3}+12)x\end{array}}{(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{1/3}}\right]$$
$$+c_4\exp\left[\frac{1}{6}\frac{((108u+12\sqrt{81u^2+12})^{2/3}-12)x}{(108u+12\sqrt{81u^2+12})^{1/3}}\right]. \tag{۳۵.۵}$$

و در نهایت برای معادله نویر_استوکس $\psi(x)$ داریم:

$$\psi(x) = c_1 + c_2 e^{ux}. \tag{۳۶.۵}$$

پس ثابت شد که معادله (۲۴.۵) در تمامی حالات خود غیر خطی خود الحاق است. به دلیل اینکه معادله (۲۴.۵) مشتق کسری نسبت به x ندارد، مؤلفه x از بردار پایستگی با فرمول کلی برای محاسبه بردارهای پایستگی وابسته به تقارن‌ها یافت می‌شود.عملگر نوتر $\mathbf{N}^x$ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^x &= \xi\mathcal{I} + W\left(\frac{\partial}{\partial u_x} - D_x\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + D_x^4\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}\right)\\ &+D_x(W)\left(\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - D_x\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}\right)\\ &+D_x^2(W)\left(\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} - D_x\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}\right) + D_x^3(W)\Bigg(\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}}\\ &-D_x\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}\Bigg) + D_x^4(W)\left(\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}\right).\end{aligned} \tag{۳۷.۵}$$

اگر مشتق کسری نسبت به زمان در معادله به صورت $D_t^\alpha u_t$ باشد، آنگاه $\mathbf{N}^t$ به فرم زیر است:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^t &= \tau\mathcal{I} + J_t^{1-\alpha}D_t(W)\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u_t)} - W_t J_T^{1-\alpha}D_t\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u_t)}\\ &+J\left(D_t(W), D_t\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u_t)}\right),\end{aligned} \tag{۳۸.۵}$$

برای ${}^C D_t^\alpha$ مؤلفه $\mathbf{N}^t$ به صورت:

$$\mathbf{N}^t = \tau\mathcal{I} + W_t J_T^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial({}^C D_t^\alpha u)} - J\left(D_t(W), \frac{\partial}{\partial({}^C D_t^\alpha u)}\right), \tag{۳۹.۵}$$

است و برای $D_t^{1+\alpha}u$ مؤلفه $\mathbf{N}^t$ به صورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^t &= \tau\mathcal{I} + D_t^\alpha(W)\frac{\partial}{\partial(D_t^{1+\alpha}u)} - J_t^{1-\alpha}(W)D_t\frac{\partial}{\partial(D_t^{1+\alpha}u)}\\ &+-J\left(W, D_t^2\frac{\partial}{\partial(D_t^{1+\alpha}u)}\right),\end{aligned} \tag{۴۰.۵}$$

خواهد بود و برای $D_t^\alpha u$ مؤلفه $\mathbf{N}^t$ عبارت است از:

$$\mathbf{N}^t = \tau\mathcal{I} + J_t^{1-\alpha}(W)\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u)} + J\left(W, D_t\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u)}\right). \tag{۴۱.۵}$$

- قصد داریم قوانین پایستگی را برای معادله‌ای که مشتق کسری نسبت به زمان در آن به صورت $D_t^{\alpha+1}$ است، محاسبه نماییم. لاگرانژی (۲۵.۵) با جایگذاری $v = \varphi(t,x)$ با تابع $\phi(t)$ که با رابطه (۲۹.۵) تعریف می‌شود و $\psi(x) = c$، عبارت است از :

$$\begin{aligned}L &= (c_1(T-t)^\alpha + c_2)\big(D_t^{\alpha+1}u + uu_x + \beta(u_{xx} + u_{xxxx})\\ &+u_{xxx} + \gamma u_{xxxxx} + u_x\big).\end{aligned} \tag{۴۲.۵}$$

با استفاده از (۳۸.۵) و در نظر گرفتن مشخصه به صورت $W=-u_x$ از تقارن (۲۰۹.۱) بردار پایستگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} C^t &= c_1\Big[(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_{tx}+\alpha u_x J_T^{1-\alpha}((T-t)^{\alpha-1}) \\ &\quad -\alpha J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big]+c_2 J_t^{1-\alpha}u_{tx} \\ &= c_1\Big[(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_{tx}+\Gamma(1+\alpha)u_x \\ &\quad -\alpha J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big]+c_2 J_t^{1-\alpha}u_{tx}, \\ C^x &= -(c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\left(uu_x+\beta(u_{xx}+u_{xxxx})+u_{xxx}+\gamma u_{xxxxx}+u_x\right). \end{aligned} \tag{۴۳.۵}$$

- برای یافتن قوانین پایستگی برای معادله‌ای که مشتق کسری نسبت به زمان در آن به صورت ${}^{C}D_t^{\alpha}$ است، لاگرانژی (۲۵.۵) با جایگذاری $v=\varphi(t,x)$ با تابع $\phi(t)$ با عبارت (۳۰.۵) و $\psi(x)=c$، به شکل زیر تعریف خواهد شد:

$$\begin{aligned} L &= (c_1(T-t)^{\alpha-1})\big({}^{C}D_t^{\alpha}u+uu_x+\beta(u_{xx}+u_{xxxx}) \\ &\quad +u_{xxx}+\gamma u_{xxxxx}+u_x\big). \end{aligned} \tag{۴۴.۵}$$

با بکارگیری (۳۹.۵) و مشخصه $W=-u_x$ از تقارن (۲۰۹.۳) بردار پایستگی عبارت است از:

$$\begin{aligned} C^t &= c_1\Big[-u_x J_T^{1-\alpha}((T-t)^{\alpha-1})+J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big] \\ &= c_1\Big[-u_x\Gamma(\alpha)+J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big], \\ C^x &= -(c_1(T-t)^{\alpha-1})\left(uu_x+\beta(u_{xx}+u_{xxxx})+u_{xxx}+\gamma u_{xxxxx}+u_x\right). \end{aligned} \tag{۴۵.۵}$$

- در حالتی که مشتق کسری نسبت به زمان از مرتبه $D_t^{1+\alpha}$ است، لاگرانژی (۲۵.۵) با جایگذاری $v=\varphi(t,x)$ با تابع $\phi(t)$ تعریف شده در (۳۱.۵) و نیز $\psi(x)=c$، فرم زیر را خواهد داشت:

$$\begin{aligned} L &= (c_1 t+c_2)\big(D_t^{1+\alpha}u+uu_x+\beta(u_{xx}+u_{xxxx}) \\ &\quad +u_{xxx}+\gamma u_{xxxxx}+u_x\big). \end{aligned} \tag{۴۶.۵}$$

با بهره گیری از مؤلفه N^t با تعریف (۴۰.۵) و مشخصه $W=-u_x$ از تقارن (۲۰۹.۳) بردار پایستگی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} C^t &= -c_1\Big[tD_t^{\alpha}(u_x)-J_t^{1-\alpha}(u_x)\Big]-c_2 D_t^{\alpha}(u_x), \\ C^x &= (c_1 t+c_2)\left(uu_x+\beta(u_{xx}+u_{xxxx})+u_{xxx}+\gamma u_{xxxxx}+u_x\right). \end{aligned} \tag{۴۷.۵}$$

- برای محاسبه قوانین پایستگی برای معادله‌ای که مشتق کسری نسبت به زمان در آن به صورت D_t^α است، لاگرانژی (۲۵.۵) با جایگذاری $v = \varphi(t, x)$ با تابع $\phi(t)$ که با رابطه (۳۲.۵) تعریف می‌شود و $\psi(x) = c$، به صورت زیر است:

$$L = (c_1)\big(D_t^\alpha u + uu_x + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + u_{xxx} + \gamma u_{xxxxx} + u_x\big). \qquad (۴۸.۵)$$

با استفاده از (۴۱.۵) و در نظر گرفتن مشخصه به صورت $W = -u_x$ از تقارن (۲۰۹.۳) بردار پایستگی به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} C^t &= c_1 J_t^{1-\alpha}(u_x), \\ C^x &= c_1 \left(uu_x + \beta(u_{xx} + u_{xxxx}) + u_{xxx} + \gamma u_{xxxxx} + u_x\right). \end{aligned} \qquad (۴۹.۵)$$

حال قوانین پایستگی را برای معادله کاواهارا با فرم کلی

$$D_t^{\chi(\alpha)} u + \lambda u u_x + \mu u_{xxx} + \gamma u_{xxxxx} = 0, \qquad (۵۰.۵)$$

در چهار حالت مشتق کسری معرفی شده، به دست می‌آوریم. این معادله تقارنی به صورت $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$ دارد پس $W = -u_x$ و $\psi(x)$ نیز با رابطه (۳۳.۵) به دست می‌آید. قوانین پایستگی متناظر با این معادله در جدول (۱.۵) آمده‌اند.

برای معادله KdV مرتبه پنجم

$$D_t^{\chi(\alpha)} u + \mu u_{xxx} + \gamma u_{xxxxx} = 0, \qquad (۵۱.۵)$$

که دارای تقارن‌هایی به صورت

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathbf{v}_3 = g(t, x)\frac{\partial}{\partial u},$$

است و $\psi(x)$ با رابطه (۳۴.۵) ارائه می‌شود، قوانین پایستگی متناظر در جدول (۲.۵) آمده اند.

معادله کوروموتو–سیواشینسکی در حالت کسری

$$D_t^{\chi(\alpha)} u + uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \qquad (۵۲.۵)$$

تقارنی به صورت $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$ دارد پس $W = -u_x$ و $\psi(x)$ نیز با رابطه (۳۵.۵) به دست می‌آید. قوانین پایستگی متناظر با این معادله در جدول (۳.۵) آمده‌اند.

قوانین پایستگی برای معادله نویر–استوکس

$$D_t^{\chi(\alpha)} u + uu_x + u_{xx} = 0, \qquad (۵۳.۵)$$

در چهار حالت از مشتقات کسری با تقارن‌هایی به صورت

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u}.$$

و $\psi(x)$ با رابطه (۳۶.۵)، در جدول (۴.۵) آمده اند.

جدول ۱.۵: قوانین پایستگی برای معادله کاواهارا با مشتقات کسری

نوع مشتق کسری	مؤلفه پایستگی $C^{t,x}$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{\alpha+1}$	$C^t = \psi(x)c_1\Big[(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_{tx} + \Gamma(1+\alpha)u_x$ $+\alpha J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big] + c_2\psi(x)J_t^{1-\alpha}u_{tx},$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\Big[-u_x\big(\lambda u\psi(x)+\mu D_x^2(\psi(x))$ $+\gamma D_x^4(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma D_x^3(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(\mu\psi(x)+\gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x))$ $-u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = {}^{C}D_t^{\alpha}$	$C^t = \psi(x)c_1\Big[-u_x\Gamma(\alpha) + J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha-1})\Big[-u_x\big(\lambda u\psi(x)+\mu D_x^2(\psi(x))+\gamma D_x^4(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma D_x^3(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(\mu\psi(x)$ $+\gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{1+\alpha}$	$C^t = -\psi(x)c_1\Big[tD_t^{\alpha}(u_x) - J_t^{1-\alpha}(u_x)\Big] - c_2\psi(x)D_t^{\alpha}(u_x),$ $C^x = (c_1t+c_2)\Big[-u_x\big(\lambda u\psi(x)+\mu D_x^2(\psi(x))+\gamma D_x^4(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma D_x^3(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(\mu\psi(x)$ $+\gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{\alpha}$	$C^t = -c_1\psi(x)J_t^{1-\alpha}(u_x),$ $C^x = (c_1)\Big[-u_x\big(\lambda u\psi(x)+\mu D_x^2(\psi(x))+\gamma D_x^4(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma D_x^3(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(\mu\psi(x)$ $+\gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$

۴.۵ قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری

در این بخش قصد داریم عملگرهای نوتر و اتحاد عملگری نوتر را به معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه بسط داده و به کمک آنها قوانین پایستگی این معادلات را بیابیم. تابعک $\Psi[u]$ را با یک تابع دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری L بر حسب متغیرهای مستقل $x=(x^1,\cdots x^n)$ و متغیر وابسته u از مرتبه k_ام به عنوان انتگرالده روی دامنه Ω، را در نظر بگیرید:

$$\Psi[u] = \int_{\Omega} L(x,u,u_{[1]},u_{[2]},\cdots,u_{[k]})dx, \qquad L\in\mathcal{F}. \qquad (۵۴.۵)$$

تابع $L(x,u,u_{[1]},u_{[2]},\cdots,u_{[k]})$ لاگرانژی و تابعک $\Psi[u]$ عمل انتگرال نامیده می‌شود.

جدول ۲.۵: بردارهای پایستگی برای معادله KdV مرتبه پنجم با مشتقات کسری

نوع مشتق کسری	W	مؤلفه پایستگی $C^{t,x}$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{\alpha+1}$	$-u_x$	$C^t = \psi(x)c_1\Big[(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_{tx} + \Gamma(1+\alpha)u_x + \alpha J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big] + c_2\psi(x)J_t^{1-\alpha}u_{tx},$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\Big[-u_x\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) - u_{xxx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
	u	$C^t = \psi(x)c_1\Big[(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_t + \Gamma(1+\alpha)u - \alpha J(u_t,(T-t)^{\alpha-1})\Big] + c_2\psi(x)J_t^{1-\alpha}u_t,$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\Big[u\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) + u_x\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) + u_{xx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) - \gamma u_{xxx}D_x(\psi(x)) + u_{xxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = {}^{C}D_t^{\alpha}$	$-u_x$	$C^t = \psi(x)c_1\Big[-u_x\Gamma(\alpha) + J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha-1})\Big[-u_x\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) - u_{xxx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
	u	$C^t = \psi(x)c_1\Big[u\Gamma(\alpha) - J(u_t,(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha-1})\Big[u\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) + u_x\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) + u_{xx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) - \gamma u_{xxx}D_x(\psi(x)) + u_{xxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{1+\alpha}$	$-u_x$	$C^t = -\psi(x)c_1\Big[tD_t^{\alpha}(u_x) - J_t^{1-\alpha}(u_x)\Big] - c_2\psi(x)D_t^{\alpha}(u_x),$ $C^x = (c_1t+c_2)\Big[-u_x\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) - u_{xxx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
	u	$C^t = \psi(x)c_1\Big[tD_t^{\alpha}(u) - J_t^{1-\alpha}(u)\Big] + c_2\psi(x)D_t^{\alpha}(u),$ $C^x = (c_1t+c_2)\Big[u\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) + u_x\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) + u_{xx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) - \gamma u_{xxx}D_x(\psi(x)) + u_{xxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{\alpha}$	$-u_x$	$C^t = -c_1\psi(x)J_t^{1-\alpha}(u_x),$ $C^x = c_1\Big[-u_x\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) - u_{xx}\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) - u_{xxx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) + \gamma u_{xxxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxxx}\gamma\psi(x)\Big].$
	u	$C^t = c_1\psi(x)J_t^{1-\alpha}(u),$ $C^x = c_1\Big[u\big(\mu D_x^2(\psi(x)) + \gamma D_x^4(\psi(x))\big) + u_x\big(-\mu D_x(\psi(x)) - \gamma(D_x^3(\psi(x)))\big) + u_{xx}\big(\mu\psi(x) + \gamma D_x^2(\psi(x))\big) - \gamma u_{xxx}D_x(\psi(x)) + u_{xxxx}\gamma\psi(x)\Big].$

جدول ۳.۵: بردارهای پایستگی برای معادله کوروموتوـسیواشینسکی با مشتقات کسری

نوع مشتق کسری	مؤلفه پایستگی $C^{t,x}$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{\alpha+1}$	$C^t = \psi(x)c_1\Big[(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_{tx} + \Gamma(1+\alpha)u_x$ $+\alpha J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big] + c_2\psi(x)J_t^{1-\alpha}u_{tx},$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\Big[-u_x\big(u\psi(x) - D_x(\psi(x)) - D_x^3(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(\psi(x)+D_x^2(\psi(x))\big) + u_{xxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxx}\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = {}^{C}D_t^{\alpha}$	$C^t = \psi(x)c_1\Big[-u_x\Gamma(\alpha) + J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x = (c_1(T-t)^{\alpha-1})\Big[-u_x\big(u\psi(x) - D_x(\psi(x)) - D_x^3(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(\psi(x)+D_x^2(\psi(x))\big) + u_{xxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxx}\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{1+\alpha}$	$C^t = -\psi(x)c_1\Big[tD_t^{\alpha}(u_x) - J_t^{1-\alpha}(u_x)\Big] - c_2\psi(x)D_t^{\alpha}(u_x),$ $C^x = (c_1t+c_2)\Big[-u_x\big(u\psi(x) - D_x(\psi(x)) - D_x^3(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(\psi(x)+D_x^2(\psi(x))\big) + u_{xxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxx}\psi(x)\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)} = D_t^{\alpha}$	$C^t = -c_1\psi(x)J_t^{1-\alpha}(u_x),$ $C^x = (c_1)\Big[-u_x\big(u\psi(x) - D_x(\psi(x)) - D_x^3(\psi(x))\big)$ $-u_{xx}\big(\psi(x)+D_x^2(\psi(x))\big) + u_{xxx}D_x(\psi(x)) - u_{xxxx}\psi(x)\Big].$

با فرض اینکه تابع $u(x)$ در شرایط

$$
\begin{aligned}
&u(x^1,\cdots,x^n)|_{x^r=a^r} = \mu_r^a(x^1,\cdots,x^{r-1},x^{r+1},\cdots,x^n),\\
&u(x^1,\cdots,x^n)|_{x^r=b^r} = \mu_r^b(x^1,\cdots,x^{r-1},x^{r+1},\cdots,x^n),\\
&B_{i_s}^{\delta_s}\cdots B_{i_1}^{\delta_1}(u)|_{x^r=a^r} = \mu_{ri_1\cdots i_s}^{a\delta_1\cdots\delta_s}(x^1,\cdots,x^{r-1},x^{r+1},\cdots,x^n),\\
&B_{i_s}^{\delta_s}\cdots B_{i_1}^{\delta_1}(u)|_{x^r=b^r} = \mu_{ri_1\cdots i_s}^{b\delta_1\cdots\delta_s}(x^1,\cdots,x^{r-1},x^{r+1},\cdots,x^n),\\
&(i_1,\cdots,i_s = 1,2,\cdots,n, \quad \delta_1,\cdots,\delta_s = -1,0,1),\\
&(s=1,2,\cdots,k-1, \quad r=1,2,\cdots,n),
\end{aligned}
\tag{۵۵.۵}
$$

در مرز دامنه Ω با توابع ثابت $\mu_{r\cdots}^{a\cdots}$ و $\mu_{r\cdots}^{b\cdots}$ صدق کند، اکسترمم تابعک (۵۴.۵) را محاسبه می‌کنیم. یادآور می‌شویم که در این تعریف ما سه نوع از عملگرها را در نظر می‌گیریم. هرکدام از این عملگرها به طور مستقل نسبت به هرکدام از مختصات $x^i(i=1,\cdots,n)$ از بردار متغیرهای مستقل $x\in\Omega$، عمل می‌کنند. این عملگرها به این صورت هستند: عملگرهای دیفرانسیل گیری D_i، عملگرهای انتگرال گیری کسری از سمت چپ $I_{i+}^{\alpha_i} \equiv {}_{a^i}I_{x^i}^{\alpha_i}$ از مرتبه $\alpha_i\in(0,1)$، و عملگرهای انتگرال گیری کسری از سمت راست $I_{i-}^{\beta_i} \equiv {}_{x^i}I_{b_i}^{\beta_i}$از مرتبه $\beta_i\in(0,1)$. با مرتب

جدول ۴.۵: بردارهای پایستگی برای معادله نویر_استوکس با مشتقات کسری

نوع مشتق کسری	W	مؤلفه پایستگی $C^{t,x}$
$D_t^{\chi(\alpha)}=D_t^{\alpha+1}$	$-u_x$	$C^t=(d_1+d_2e^{ux})\Big[c_1(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}u_{tx}+c_2J_t^{1-\alpha}u_{tx}$ $+c_1\Gamma(1+\alpha)u_x+\alpha c_1J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x=(c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\Big[-u_x(d_1u-d_2xu_xe^{ux})$ $-u_{xx}(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
	$-(\alpha u+2tu_t+\alpha xu_x)$	$C^t=(d_1+d_2e^{ux})\Big[-c_1(T-t)^{\alpha}J_t^{1-\alpha}(\alpha u_t+2u_t$ $+2tu_{tt}+\alpha xu_{tx})-c_1\Gamma(1+\alpha)(\alpha u_t+2u_t+2tu_{tt}$ $+\alpha xu_{tx})+c_2\psi(x)J_t^{1-\alpha}u_t+c_1\alpha J((\alpha u_t+$ $+2u_t+2tu_{tt}+\alpha xu_{tx}),(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x=(c_1(T-t)^{\alpha}+c_2)\Big[(-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x)(d_1u$ $-d_2xu_xe^{ux})+(-2\alpha u_x-2tu_{tx}-\alpha xu_{xx})(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)}={}^CD_t^{\alpha}$	$-u_x$	$C^t=(d_1+d_2e^{ux})c_1\Big[-u_x\Gamma(\alpha)+J(u_{tx},(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x=(c_1(T-t)^{\alpha-1})\Big[-u_x(d_1u-d_2xu_xe^{ux})$ $-u_{xx}(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
	$-(\alpha u+2tu_t+\alpha xu_x)$	$C^t=(d_1+d_2e^{ux})c_1\Big[(-(\alpha u+2tu_t+\alpha xu_x)\Gamma(\alpha)$ $-J((\alpha u_t+2u_t+2tu_{tt}+\alpha xu_{tx}),(T-t)^{\alpha-1})\Big],$ $C^x=(c_1(T-t)^{\alpha-1})\Big[(-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x)(d_1u$ $-d_2xu_xe^{ux})+(-2\alpha u_x-2tu_{tx}-\alpha xu_{xx})(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)}=D_t^{1+\alpha}$	$-u_x$	$C^t=(d_1+d_2e^{ux})\Big[-c_1tD_t^{\alpha}(u_x)+c_1J_t^{1-\alpha}(u_x)$ $-c_2D_t^{\alpha}(u_x)\Big],$ $C^x=(c_1t+c_2)\Big[-u_x(d_1u-d_2xu_xe^{ux})$ $-u_{xx}(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
	$-(\alpha u+2tu_t+\alpha xu_x)$	$C^t=(d_1+d_2e^{ux})\Big[c_1tD_t^{\alpha}((-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x))$ $-c_1J_t^{1-\alpha}(-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x)+c_2D_t^{\alpha}(-\alpha u$ $-2tu_t-\alpha xu_x)\Big],$ $C^x=(c_1t+c_2)\Big[(-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x)(d_1u$ $-d_2xu_xe^{ux})+(-2\alpha u_x-2tu_{tx}-\alpha xu_{xx})(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
$D_t^{\chi(\alpha)}=D_t^{\alpha}$	$-u_x$	$C^t=-c_1(d_1+d_2e^{ux})J_t^{1-\alpha}(u_x),$ $C^x=c_1\Big[-u_x(d_1u-d_2xu_xe^{ux})-u_{xx}(d_1+d_2e^{ux})\Big].$
	$-(\alpha u+2tu_t+\alpha xu_x)$	$C^t=c_1(d_1+d_2e^{ux})J_t^{1-\alpha}(-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x),$ $C^x=c_1\Big[(-\alpha u-2tu_t-\alpha xu_x)(d_1u-d_2xu_xe^{ux})$ $+(-2\alpha u_x-2tu_{tx}-\alpha xu_{xx})(d_1+d_2e^{ux})\Big].$

کردن این عملگرها در یک ماتریس داریم:

$$B = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \cdots D_n \\ I_{1+}^{\alpha_1} & I_{2+}^{\alpha_2} & \cdots I_{n+}^{\alpha_n} \\ I_{1-}^{\beta_1} & I_{2-}^{\beta_2} & \cdots I_{n-}^{\beta_n} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i, \beta_i \in (0,1) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

درایه‌های این ماتریس به صورت زیر می‌باشند:

$$B_i^\delta = \begin{cases} I_{i+}^{\alpha_i}, & \delta = +1, \\ D_i, & \delta = 0, \\ I_{i-}^{\beta_i}, & \delta = -1. \end{cases} \tag{۵۶.۵}$$

لم ۱.۴.۵. شرط لازم برای آنکه تابعک (۵۴.۵) مقدار اکسترمم خود را در تابع $u(x) \in AC^k(\Omega)$ که در شروط (۵۵.۵) صادق است، اختیار کند این است که این تابع در معادله اویلر ـ لاگرانژ زیر صادق باشد:

$$\frac{\delta L}{\delta u} = 0, \tag{۵۷.۵}$$

که عملگر اویلر ـ لاگرانژ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{s=1}^{k} (B_{i_1}^{\delta_1})^* (B_{i_2}^{\delta_2})^* \cdots (B_{i_s}^{\delta_s})^* \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_s}^{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s}}. \tag{۵۸.۵}$$

برهان. [۶۶]. □

عملگرهای مزدوج $(B_{i_j}^{\delta_j})^*, (j = 1 \cdots s)$ به عملگرهای (۵۶.۵) به صورت

$$(B_i^\delta)^* = \begin{cases} I_{i-}^{\alpha_i}, & \delta = +1, \\ -D_i, & \delta = 0, \\ I_{i+}^{\beta_i}, & \delta = -1, \end{cases} \tag{۵۹.۵}$$

تعریف می‌شوند زیرا در واقع داریم:

$$D_i^* = -D_i, \quad (I_{i+}^\alpha)^* \equiv ({}_{a^i}I_{x^i}^\alpha)^* = {}_{x^i}I_{b^i}^\alpha \equiv I_{i-}^\alpha,$$
$$(I_{i-}^\beta)^* \equiv ({}_{x^i}I_{b^i}^\beta)^* = {}_{a^i}I_{x^i}^\beta \equiv I_{i+}^\beta.$$

به علاوه عملگر $J_{(i)}^\delta$ که روی زوج مرتب از توابع $\{f(x), g(x)\}$ $(x \in \Omega)$ عمل می‌کند با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$J_{(i)}^\delta f, g = \begin{cases} -\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{a^i}^{x^i} \int_{x^i}^{b^i} \frac{f|_{x^i=t} g|_{x^i=s}}{(s-t)^{1-\alpha_i}} ds dt, & \delta = +1, \\ fg, & \delta = 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\beta_i)} \int_{a^i}^{x^i} \int_{x^i}^{b^i} \frac{f|_{x^i=s} g|_{x^i=t}}{(s-t)^{1-\beta_i}} ds dt, & \delta = -1. \end{cases} \tag{۶۰.۵}$$

عملگرهای $J^{\delta}_{(i)}$ و B^{δ}_{i} با اتحاد زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$D_i(J^{\delta}_{(i)}\{f,g\}) = B^{\delta}_{i} f \cdot g - f \cdot (B^{\delta}_{i})^{*} g. \tag{۶۱.۵}$$

همانگونه که می‌دانیم، اتحاد عملگری نوتر برای متغیرهای دیفرانسیلی و تابع دیفرانسیل مرتبه k_ام F فرمی به صورت زیر دارد:

$$\mathbf{v}^{(k)}(F) + D_t(\tau)F + D_{x^i}(\xi^i)F = W\frac{\delta F}{\delta u} + D_t(\mathbf{N}^{(k)}_{t}F) + D_x(\mathbf{N}^{(k)}_{x^i}F), \tag{۶۲.۵}$$

که $\mathbf{v}^{(k)}$ امتداد مناسب از مولد گروه لی و $W = \eta - \tau u_t - \xi^i u_i$ مشخصه آن و $\mathbf{N}_t$ و $\mathbf{N}_{x^i}$ عملگرهای نوتر هستند که با رابطه زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{(k)}_{x^i}F &= \xi^i F + W\left(\frac{\partial F}{\partial u_i} + \sum_{s=1}^{k-1}(-1)^s D_{j_1}\cdots D_{j_s}\frac{\partial F}{\partial u_{ij_1\cdots j_s}}\right) + \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} D_{l_1}\cdots D_{l_r}(W)\left[\frac{\partial F}{\partial u_{il_1\cdots l_r}} + \sum_{s=1}^{k-1-r}(-1)^s D_{j_1}\cdots D_{j_s}\frac{\partial F}{\partial u_{il_1\cdots l_r j_1\cdots j_s}}\right].\end{aligned} \tag{۶۳.۵}$$

مشابه همین فرمول برای $\mathbf{N}^{(k)}_{t}$ نیز وجود دارد.

قضیه ۱.۴.۵. برای متغیرهای دیفرانسیل_انتگرال کسری، اتحاد عملگری نوتر مرتبه کسری را به صورت زیر داریم:

$$\mathbf{v}_{[k]}(F) + D_i(\xi^i)F = W\frac{\delta F}{\delta u} + D_i(\mathbf{N}^{i}_{[k]}F). \tag{۶۴.۵}$$

در اینجا عملگرهای کسری نوتر $\mathbf{N}^{i}_{[k]}$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{i}_{[k]}F &= \xi^i F + J^{\delta_1}_{(i)}\left\{W, \frac{\partial F}{\partial u^{\delta_1}_{i}}\right\} + \sum_{s=2}^{k}\left[J^{\delta_1}_{(i)}\left\{W, (B^{\delta_2}_{j_2})^{*}\cdots(B^{\delta_s}_{j_s})^{*}\frac{\partial F}{\partial u^{\delta_1\delta_2\cdots\delta_s}_{ij_2\cdots j_s}}\right\} + \right. \\ &\left. + \sum_{r=2}^{s} J^{\delta_r}_{(i)}\left\{B^{\delta_{r-1}}_{j_{r-1}}\cdots B^{\delta_1}_{j_1}(W), (B^{\delta_{r+1}}_{j_{r+1}})^{*}\cdots(B^{\delta_s}_{j_s})^{*}\frac{\partial F}{\partial u^{\delta_1\cdots\delta_{r-1}\delta_r\delta_{r+1}\cdots\delta_s}_{j_1\cdots j_{r-1}ij_{r+1}\cdots j_s}}\right\}\right].\end{aligned} \tag{۶۵.۵}$$

برهان. [۶۶]. □

اگر f هر تابع خطی دیفرانسیل_انتگرال کسری از مرتبه $k = m+1$ باشد، عملگرهای نوتر به چهار حالت زیر خواهند بود:

حالت اول: $F = F(x, u, {}_aD^{\alpha}_{x}u)$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{x}_{[m+1]}F &= \xi^x F + \sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1}{}_aD^{\alpha-r}_{x}(W)\cdot D^{r-1}_{x}\frac{\partial F}{\partial({}_aD^{\alpha}_{x}u)} + \\ &+(-1)^{m-1}{}_aI^{m-\alpha}_{x}(W)\cdot D^{m-1}_{x}\left(\frac{\partial F}{\partial({}_aD^{\alpha}_{x}u)}\right) \\ &+(-1)^{m}J^{+1}_{(x)}\left\{W, D^{m}_{x}\frac{\partial F}{\partial({}_aD^{\alpha}_{x}u)}\right\},\end{aligned} \tag{۶۶.۵}$$

حالت دوم: $F = F(x, u, {}_xD_b^\alpha u)$

$$\mathbf{N}^x_{[m+1]}F = \xi^x F - \sum_{r=1}^{m-1} {}_xD_b^{\alpha-r}(W)\cdot D_x^{r-1}\frac{\partial F}{\partial({}_xD_b^\alpha u)} - {}_xI_b^{m-\alpha}(W)\cdot D_x^{m-1}\left(\frac{\partial F}{\partial({}_xD_b^\alpha u)}\right)$$
$$+J^{-1}_{(x)}\left\{W, D_x^m\frac{\partial F}{\partial({}_xD_b^\alpha u)}\right\}, \tag{۶۷.۵}$$

حالت سوم: $F = F(x, u, {}_a^CD_x^\alpha u)$

$$\mathbf{N}^x_{[m+1]}F = \xi^x F + \sum_{r=1}^{m-1} D_x^{r-1}W\cdot {}_xD_b^{\alpha-r}\frac{\partial F}{\partial({}_a^CD_x^\alpha u)} + D_x^{m-1}(W)\cdot {}_xI_b^{m-\alpha}\frac{\partial F}{\partial({}_a^CD_x^\alpha u)}$$
$$+J^{+1}_{(x)}\left\{D_x^m(W), \frac{\partial F}{\partial({}_a^CD_x^\alpha u)}\right\}, \tag{۶۸.۵}$$

حالت چهارم: $F = F(x, u, {}_x^CD_b^\alpha u)$

$$\mathbf{N}^x_{[m+1]}F = \xi^x F + \sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r-1} D_x^{r-1}W\cdot {}_aD_x^{\alpha-r}\frac{\partial F}{\partial({}_x^CD_b^\alpha u)} +$$
$$+(-1)^{m-1}D_x^{m-1}(W)\cdot {}_aI_x^{m-\alpha}\frac{\partial F}{\partial({}_x^CD_b^\alpha u)}$$
$$+(-1)^m J^{-1}_{(x)}\left\{D_x^m(W), \frac{\partial F}{\partial({}_x^CD_b^\alpha u)}\right\}. \tag{۶۹.۵}$$

به خاطر داشته باشم که مرتبه انتگرال کسری در $J^{\pm1}_{(x)}$ برابر با $m-\alpha$ است.

مثال ۱.۴.۵. معادله نوسانگر کسری را در نظر بگیرید

$${}_xD_1^\alpha({}_0^CD_x^\alpha u) - w^2u = 0, \quad x\in(0,1), \quad \alpha\in(0,1), \tag{۷۰.۵}$$

این معادله دارای تقارن $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$ است [۶۶]. معادله فوق دارای لاگرانژی زیر است

$$L = \frac{1}{2}[({}_0^CD_x^\alpha u)^2 - w^2u^2]. \tag{۷۱.۵}$$

معادله (۷۰.۵) یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری معمولی است و با استفاده از رابطه (۶۳.۵) و لاگرانژی (۷۱.۵) مؤلفه x از بردار پایستگی به صورت

$$C^x = \mathbf{N}^xL = \xi^xL + W\,{}_xI_1^{1-\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial({}_0^CD_x^\alpha u)}\right) + J^{+1}_{(x)}\left\{D_x(W), \frac{\partial L}{\partial({}_0^CD_x^\alpha u)}\right\}.$$

است. در اینجا، مرتبه انتگرال کسری در عملگر $J^{\pm1}_{(x)}$ برابر $1-\alpha$ است. برای مولد گروه انتقال $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$، $\xi^x = 1$ و $W = -u_x$ در نتیجه داریم

$$C^x = \frac{1}{2}[({}_0^CD_x^\alpha u)^2 - w^2u^2] - u_x\,{}_xI_1^{1-\alpha}({}_0^CD_x^\alpha u) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\int_x^1\frac{u_{tt}\,{}_0^CD_s^\alpha u}{(s-t)^\alpha}ds\,dt.$$

که آخرین انتگرال به صورت زیر است:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\int_x^1\frac{u_{tt}\,{}_0^CD_s^\alpha u}{(s-t)^\alpha}ds\,dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x u_{tt}\left[\int_t^1\frac{{}_0^CD_s^\alpha u}{(s-t)^\alpha}ds - \int_t^x\frac{{}_0^CD_s^\alpha u}{(s-t)^\alpha}ds\right]dt$$
$$= u_x\,{}_xI_1^{1-\alpha}({}_0^CD_x^\alpha u) + \int_0^x\left[u_t\,{}_tD_1^\alpha({}_0^CD_t^\alpha u) - {}_0^CD_t^\alpha u\,{}_0D_t^\alpha(u_t)\right]dt.$$

حال به عنوان یک نتیجه می‌بینیم که قانون پایستگی برای معادله (۷۰.۵) عبارت است از:

$$C^x = \frac{1}{2}[({}_0^C D_x^\alpha u)^2 - w^2 u^2] + \int_0^x \left[u_t \, {}_t D_1^\alpha ({}_0^C D_t^\alpha u) - {}_0^C D_t^\alpha u \, {}_0 D_t^\alpha (u_t)\right] dt,$$

با انتگرال گیری جزء به جزء در انتگرال دوم داریم:

$$\begin{aligned} C^x = &-\frac{1}{2}[({}_0^C D_x^\alpha u)^2 + w^2 u^2] + ({}_0^C D_x^\alpha u)^2|_{x=0} + \\ &+ \int_0^x \left[u_t \, {}_t D_1^\alpha ({}_0^C D_t^\alpha u) + D_t({}_0^C D_t^\alpha u) {}_0 D_t^\alpha (u_t)\right] dt. \end{aligned} \qquad (۷۲.۵)$$

در حالت $\alpha = 1$ (حالت معادله کلاسیک نوسانگر) دومین و سومین جمله در سمت راست (۷۲.۵) صفر می‌شوند و C^x تبدیل به مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل از یک نوسانگر خواهد شد: $C^x = (u_x^2 + w^2 u^2)/2$. بنابراین کمیت پایستگی (۷۲.۵) انرژی کامل از یک نواسانگر کسری خواهد بود و قانون پایستگی متناظر قانون پایستگی انرژی است.

یادداشت

نتایج بیان شده در این فصل روشی مؤثر برای ساختن قوانین پایستگی برای انواع معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری که لاگرانژی دیفرانسیل_انتگرال کسری دارند، ارائه می‌دهد. برای یافتن مؤلفه‌های پایستگی با استفاده از تقارن‌ها کافیست عملگرهای نوتری که در این فصل فرمول صریح آن محاسبه شد را بر روی لاگرانژی اعمال کنیم. با وجود آنکه تمامی فرمول‌ها برای تک معادله‌ها ارائه شد، همگی آنها به سادگی به هر دستگاهی از معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری قابل تعمیم هستند. در این فصل همچنین مفهوم خود الحاقی غیر خطی به معادلات دیفرانسیل_انتگرال مرتبه کسری تعمیم داده شد که امکان ساختن قوانین پایستگی را برای بسیاری پدیده‌های فیزیکی مدرن و مدل‌های مربوطه می‌دهد.

فصل ۶

استفاده از نرم افزار

در حال حاضر نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی نقش مهمی در پیشرفت کلی ریاضیات بازی می‌کند. معادلات دیفرانسیل به ما در توصیف کامل بسیاری از پدیده‌ها در زمینه‌های مختلف علوم محض و مهندسی کمک می کنند. از ابتدای قرن بیستم، بررسی PDEهای غیر خطی زمینه مستقل تحقیقات بسیاری بوده است. لازم به ذکر است که ایده های اصلی در محاسبات عملی برای حل PDEها ابتدا توسط هنری پوانکاره[1] در سال ۱۸۹۰ ارائه شد. با این وجود تکنیک‌های حل چنین معادلاتی نیازمند به تکنولوژی است که در آن زمان یا در دسترس نبود و یا محدود بود. در ریاضیات مدرن امروز، وجود کامپوترها، ابر کامپیوترها و سیستم‌های جبری کامپیوتری مانند Maple و Mathematica ابزارهایی نیرومند هستند که می‌توانند جهت انجام محاسبات پیچیده و طولانی ریاضی که انسان برای انجام آنها ظرفیت محدودی دارد، به کمک گرفته شوند.

در میان انبوه نرم افزارهای ریاضی و سیستم‌های جبری کامپیوتری موجود که توسط پژوهشگران و ریاضیدانان و مهندسان در سرتاسر دنیا برای محاسبات پیچیده ریاضی استفاده می‌شوند، تاکید بیشتر بر دو سیستم Maple و Mathematica است و دلیل آن راحت بودن روش پیاده سازی الگوریتم‌ها و اجرای دستورات است.

هدف اصلی این فصل بیان چندین نمونه و مثال از روشهای الگوریتمی و نرم‌افزاری برای مسائل بیان شده در فصول قبل است. البته خواننده علاقه مند می‌تواند جهت دیدن بسیاری از نمونه‌های حل PDEهای مختلف با روشهایی چون روش تبدیلات، روش جواب‌های موج

[1] H. Poincarée

سیار، روش جداسازی متغیرها، روش‌های آنالیز گروهی، روش مشخصه، روش تجزیه آدومین، روش متمایز محدود و بسیاری روش‌های دیگر، با کمک Maple و Mathematica به منبع [۱۰۱] رجوع نماید.

۱.۶ معرفی مختصری از Maple

Maple یک سیستم جبری کامپیوتری است که در آن محاسبات نمادین به سادگی می‌تواند با محاسبات عددی، تقریبی و یا دقیق ترکیب شود. این نرم افزار همچنین دارای قابلیت‌های گرافیکی قدرتمندی است.برای دانستن جزئیات بیشتر به [۴]، [۳۴] و [۱۰۰] مراجعه نمایید. نخستین مفهوم و نسخه‌های اولیه از Maple توسط گروه محاسباتی نمادین در دانشگاه واترلو در اوایل دهه ۱۹۸۰ ارائه شد. شرکت Maplesoft در سال ۱۹۸۸ تأسیس شد. توسعه و بروزرسانی Maple عمدتاً در آزمایشگاه‌های تحقیقاتی در دانشگاه واترلو با مشارکت گروه‌های تحقیقاتی از سایر دانشگاه‌ها انجام شد.

Maple از سه بخش رابط، هسته (موتور محاسبات پایه) و کتابخانه تشکیل شده است. رابط و هسته که در زبان برنامه نویسی C نوشته شده اند بخش کوچکی از سیستم را تشکیل می‌دهند و زمانی که یک بخش از Maple آغاز می‌شود، پیاده سازی می‌شوند. بخش رابط، ورودی عبارات ریاضی، نمایش خروجی، ترسیم توابع و سایر ارتباطات کاربر با سیستم را مدیریت می‌کند. محیط کار در رابط Maple worksheet نامیده می‌شود. هسته، ورودی کاربر را تفسیر نموده، عملیات جبری پایه را انجام می‌دهد و سپس به ذخیره سازی می‌پردازد. کتابخانه شامل دو بخش کتابخانه اصلی و مجموعهٔ بسته‌هاست. کتابخانه اصلی که در زبان برنامه نویسی Maple نوشته شده است شامل بسیاری از توابع رایج در ریاضیات است.

۱.۱.۶ برخی نمادهای مهم

نماد (>) برای تایپ کردن تابع و یا دستور در Maple به کار می‌رود. نمادهای نقطه ویرگول (؛) یا دو نقطه (:) با فشار دادن دکمه `Enter` در انتهای تابع یا دستور برای محاسبه تابع Maple، نمایش نتایج و وارد کردن خط جدید به کار می‌رود. Maple همچنین دارای یک سیستم کمک آنلاین است به عنوان مثال با نوشتن نام یک تابع یا استفاده از پنجره راهنما و یا هایلایت کردن یک تابع و سپس فشار دادن `Ctrl – F1` می‌توان به اطلاعات بخش مرجع درباره آن تابع دسترسی پیدا کرد. برای شروع یک فرآیند جدید و پاک نمودن حافظه Maple از مسائل قبلی و در ابتدای صفحه محیط کار کلمه `restart` را می‌نویسیم. نتایج قبلی در طول یک مسئله می‌توانند با نماد (%) بازیابی شوند و با k بار نوشتن %، k_امین نتیجه قبلی بازیابی خواهد شد. توضیحات می‌توانند بعد از علامت (#) در یک خط ذکر شوند. متون همچنین می‌توانند با `Insert → text` در طول یک برنامه وارد شوند. اگر خروجی از برنامه دریافت نشود

و یا خروجی نادرستی دریافت شود ممکن است اشتباهی در نام یک تابع یا ورودی یک عملگر رخ داده باشد. برای انجام برخی عملیات نیازمند به استفاده از بسته‌های ویژه‌ای هستیم که می‌توان آنها را با کمک دستور with(package) فراخوانی کرد. در ادامه با کمک چند مثال با روش استفاده از این نرم افزار آشنا خواهیم شد.

۲.۱.۶ محاسبه تقارن‌های نقطه‌ای معادله دیفرانسیل با کمک Maple

در اینجا برای نمونه معادله باک‌ـ مستر را در نظر بگیرید:

$$u_t = (u^4)_{xx} + (u^3)_{xx}.$$

قصد داریم تقارن‌های این معادله را با کمک Maple به دست آوریم:

```
restart :
with(PDEtools);        declare((u)(x,t),(xi,eta)(x,t,u));
DepVars := [u](x,t);        U := diff_table(u(x,t));
pde[1] := U[t] - 12 * U[ ]^2 * U[x]^2 - 4 * U[ ]^3 * U[x,x] - 3 * U[ ]^2 * U[x] = 0;
DetSys := DeterminingPDE(pde[1]);        pdsolve(%);
G := Infinitesimals(pde[1], DepVars);
```

آخرین دستور خروجی زیر را نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned} G := [&\xi[x](x,t,u) = 0, \xi[t](x,t,u) = 1, \eta[u](x,t,u) = 0],\\ &[\xi[x](x,t,u) = 1, \xi[t](x,t,u) = 0, \eta[u](x,t,u) = 0],\\ &[\xi[x](x,t,u) = -x, \xi[t](x,t,u) = t, \eta[u](x,t,u) = -u]. \end{aligned}$$

که نتیجه آن سه تقارن

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}.$$

خواهد بود. با کمک دستور فوق و جایگزینی هر معادله به جای آن می‌توان تقارن‌های هر معادله مفروض را محاسبه کرد.

۳.۱.۶ محاسبه تقارن‌های تقریبی معادله دیفرانسیل با کمک Maple

معادله تقریبی ریلی‌ـ موج را درنظر بگیرید:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \epsilon(u_t - u_t^3).$$

با کمک Maple تقارن‌های تقریبی این معادله را به دست می‌آوریم:

```
restart :
with(DifferentialGeometry) :   with(Tools) :   with(PDEtools) :
with(JetCalculus) :   with(LieAlgebras) :   DGsetup([t, x, y], [u], M, 4);
eq := u[1, 1] − u[2, 2] − u[3, 3];   alias(tau[0] = tau[0](t, x, y, u[])) :
alias(xi[0] = xi[0](t, x, y, u[])) :   alias(zeta[0] = zeta[0](t, x, y, u[])) :
alias(eta[0] = eta[0](t, x, y, u[])) :
Z[1] := evalDG(tau[0] * D_t + xi[0] * D_x + zeta[0] * D_y + eta[0] * D_u[]);
alias(tau[1] = tau[1](t, x, y, u[])) :   alias(xi[1] = xi[1](t, x, y, u[])) :
alias(zeta[1] = zeta[1](t, x, y, u[])) :   alias(eta[1] = eta[1](t, x, y, u[])) :
Z[2] := evalDG(tau[1] * D_t + xi[1] * D_x + zeta[1] * D_y + eta[1] * D_u[]);
X := evalDG(Z[1] + epsilon * Z[2]);   Z3 := Prolong(Z[1], 2) :
EQ := LieDerivative(Z3, eq) :   subs(u[1, 1] = u[2, 2] − u[3, 3], EQ) :
EQ1 := expand(%);
sys :={coeffs(EQ1, [u[2], u[1], u[3], u[1, 2], u[2, 2], u[3, 3], u[2, 3], u[1, 3],
u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2], u[1, 1, 1, 1], u[1, 1, 1, 2], u[1, 1, 2, 2], u[1, 2, 2, 2],
u[2, 2, 2, 2], u[1, 1, 1, 1, 1], u[1, 1, 1, 1, 2], u[1, 1, 1, 2, 2], u[1, 1, 2, 2, 2], u[1, 2, 2, 2, 2],
u[2, 2, 2, 2, 2], u[1, 1, 1, 1, 1, 1], u[1, 1, 1, 1, 1, 2], u[1, 1, 1, 1, 2, 2], u[1, 1, 1, 2, 2, 2],
u[1, 1, 2, 2, 2, 2], u[1, 2, 2, 2, 2, 2], u[2, 2, 2, 2, 2, 2]]); }sol := pdsolve(sys);
Z[1] := ((−3/4 * _B2 * t^2 + 1/4 * (− _B1 * y − 6 * _B3 * x + 4 * _B8) * t
+1/4 * (−3 * x^2 + 2 * y^2) * _B2 + _B9 * x + y * _B5 + _B10) * D_t
+(−3/4 * _B3 * x^2 + 1/4 * (− _B1 * y − 6 * _B2 * t + 4 * _B8) * x
+1/4 * (−3 * t^2 − 2 * y^2) * _B3 + t * _B9 − y * _B6 + _B11) * D_x
+((1/2) * _B1 * y^2 + (1/8 * (8 * _B2 * t + 8 * _B3 * x + 8 * _B4)) * y
+(1/8 * (−t^2 + x^2)) * _B1 + _B5 * t + _B6 * x + _B7) * D_y
+(−1/2 * u[ ] * _B2 * t − 1/2 * u[ ] * _B3 * x + 1/2 * u[ ] * (3/2) * _B1 * y
+1/2 * u[ ] * 2 * _B4 + 1/2 * u[ ] * 2 * _B8) * D_u[ ]);
Z4 := Prolong(Z[1], 4) :
eq1 := u[1, 1] − u[2, 2] − u[3, 3] − epsilon * u[1] + epsilon * u[1]^3;
EQ1 := LieDerivative(Z4, eq1) :
subs(u[1, 1] = u[2, 2] − u[3, 3] − epsilon * u[1] + epsilon * u[1]^3, EQ1) :
```

```
EQ2 := expand(%);   H := (1/epsilon) * EQ2 :   H := simplify(%);

B1 := Prolong(Z[2], 2) :   E := LieDerivative(B1, eq) :

subs(u[1, 1] = u[2, 2] - u[3, 3], E) :   E1 := expand(% + H);

sys1 :={coeffs(E1, [u[2], u[1], u[3], u[1, 2], u[2, 2], u[2, 3], u[3, 3], u[1, 3],

u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2], u[1, 1, 1, 1], u[1, 1, 1, 2], u[1, 1, 2, 2], u[1, 2, 2, 2],

u[2, 2, 2, 2], u[1, 1, 1, 1, 1], u[1, 1, 1, 1, 2], u[1, 1, 1, 2, 2], u[1, 1, 2, 2, 2], u[1, 2, 2, 2, 2],

u[2, 2, 2, 2, 2], u[1, 1, 1, 1, 1, 1], u[1, 1, 1, 1, 1, 2], u[1, 1, 1, 1, 2, 2], u[1, 1, 1, 2, 2, 2],

u[1, 1, 2, 2, 2, 2], u[1, 2, 2, 2, 2, 2], u[2, 2, 2, 2, 2, 2]])}

n := nops(sys1);   sys4 := [seq(sys1[i] = 0, i = 1..n)] :

pdsolve(sys4, parameters = _B2, _B1, _B5, _B9, _B3, _B4, _B8);
```

که با مقدار دادن به ثوابت دلخواه $\_B_i$ ها و $\_C_i$ ها تقارن‌های تقریبی (۱۴۲.۳) که در فصل سوم محاسبه شد، به دست می‌آیند.

۴.۱.۶ محاسبه تقارن‌های معادلات دیفرانسیل کسری با کمک Maple

برای محاسبه تقارن‌های یک معادله دیفرانسیل کسری نیازمند استفاده از بسته جدیدی هستیم که در سال ۲۰۰۶ توسط الکسی چویاکوف[۲] به Maple افزوده شده است. این بسته که FracSym نام دارد باید به طور جداگانه روی سیستم کامپیوتر نصب شده و با دستور `read` به آدرس آن بر روی سیستم اشاره کرد و سپس با دستور `with(FracSym)` آن را فراخوانی کرد. به عنوان مثال معادله توزیع کننده که در فصل سوم معرفی شد را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\alpha \rho}{\partial t^\alpha} = \eta \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r},$$

در این معادله $0 < \alpha < 1$ و $t \in (0, T], (T \leq \infty)$ است. تقارن‌های این معادله با کمک دستورات در Maple به روش زیر به دست می‌آیند:

```
restart :   read("address/fracsym/ASPv4.6.3.mpl") :

with(ASP) :   with(desolv) :

read("address/fracsym/FracSym.v1.16.txt") :   with(FracSym) :

Rfracdiff(u(x, t), t, alpha);   Rfracdiff(u(x, t)& * v(x, t), t, alpha);

Rfracdiff(v(x, t)& * u(x, t), t, alpha);   Rfracdiff(u(x, t)& * v(x, t), t, 2);

TotalD(xi[x](x, t), x, 2);   evalTotalD([%], [T], [x]);
```

[۲] Alexei F. Cheviakov

```
fde1 := Rfracdiff(u(x,t),t,alpha) = (k)*diff(u(x,t),x,x)
+(k/x)*diff(u(x,t),x);
deteqs := fracDet([fde1],[u],[x,t],2,alpha = 0.1..1);
sol1 := pdesolv(expand(deteqs[1]),deteqs[3],deteqs[4]);
subs(sol1[3],deteqs[2]);
```

آخرین دستور خروجی زیر را نشان خواهد داد:

$$\mathtt{sol1} := [\xi[\mathrm{x}](\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u}) = \mathrm{C}_2\alpha\mathrm{x} + 2\mathrm{C}_4, \xi[\mathrm{t}](\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u}) = 2\mathrm{C}_2\mathrm{t} + \mathrm{C}_1,$$
$$\eta[\mathrm{u}](\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u}) = \mathrm{F}_5(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \mathrm{u}\alpha\mathrm{C}_2 - \mathrm{u}\mathrm{C}_4/\mathrm{x} + \mathrm{u}\mathrm{C}_5 - \mathrm{u}\mathrm{C}_2], [\mathrm{F}_5(\mathrm{x},\mathrm{t}), \mathrm{C}_5, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_1]$$

که با مقداردادن به ثوابت دلخواه تقارن‌های زیر برای معادله توزیع کننده حاصل خواهد شد:

$$\mathbf{v}_1 = \alpha r\frac{\partial}{\partial r} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\rho\alpha - \rho)\frac{\partial}{\partial \rho},$$
$$\mathbf{v}_2 = 2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad \mathbf{v}_3 = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad \mathbf{v}_\infty = h(r,t)\frac{\partial}{\partial \rho}.$$

۵.۱.۶ محاسبه ضرایب نامعین تابعی قوانین پایستگی با کمک Maple

دستگاه معادلات غیر خطی تلگراف ($u^1 = u$ ،$u^2 = v$) را در نظر بگیرید:

$$R^1[u,v] = v_t - (u^2+1)u_x - u = 0,$$
$$R^2[u,v] = u_t - v_x = 0.$$

ضرایب نامعین تابعی را برای این معادله به صورت زیر تعیین می‌شود:

```
restart :  with(DifferentialGeometry) :  with(JetCalculus) :
with(Tools) :  DGsetup([x,t],[u,U,v,V],J,1);
EQ1 := v[2] - (u[]^2 + 1) * u[1] - u[];   R1 := V[2] - (U[]^2 + 1) * U[1] - U[];
EQ2 := u[2] - v[1];   R2 := U[2] - V[1];
D1 := S-> TotalDiff(S,x);   D2 := S-> TotalDiff(S,t);
EULER1 := S-> diff(S,U[]) - D1(diff(S,U[1])) - D2(diff(S,U[2]));
EULER2 := S-> diff(S,V[]) - D1(diff(S,V[1])) - D2(diff(S,V[2]));
alias(Lambda1 = Lambda1(x,t,U[],V[]));   alias(Lambda2 = Lambda2(x,t,U[],V[]));
eq1 := EULER1(Lambda1 * R1 + Lambda2 * R2);
eq2 := EULER2(Lambda1 * R1 + Lambda2 * R2);
simplify(eq1);   simplify(eq2);
```

```
with(PDEtools) :   PDEtools[declare]((lambda1, lambda2)(x, t, u[ ], v[ ]));
with(PDEtools) :   PDEtools[declare]((lambda1, lambda2)(x, t, u[ ], v[ ]));
with(DEtools, diff_table);
Lambda1 := diff_table(lambda1(x, t, u[ ], v[ ]));
Lambda2 := diff_table(lambda2(x, t, u[ ], v[ ]));
eq1 := Lambda1[u[ ]] − Lambda2[v[ ]];
eq2 := Lambda2[u[ ]] − Lambda1[v[ ]] ∗ (u[ ]^2 + 1) = 0;
eq3 := Lambda1[x] ∗ (u[ ]^2 + 1) − Lambda2[t] − Lambda1[u[ ]] − Lambda1[ ] = 0;
sys := [eq1, eq2, eq3];   pdsolve(sys);
```

۶.۱.۶ محاسبه قوانین پایستگی با کمک Maple

معادله KdV را در نظر بگیرید:

$$u_{xxx} + uu_x + u_t = 0,$$

برای به دست آوردن قوانین پایستگی این معادله با کمک Maple به روش زیر عمل می‌کنیم:

```
restart :   with(DifferentialGeometry) :   with(Tools) :   with(JetCalculus) :
DGsetup([x, t], [u], M, 3) :   PDE := u[2] + u[ ] ∗ u[1] + u[1, 1, 1];
DE := DifferentialEquationData([PDE], [u[2]]) :   DE1 := Prolong(DE, 4) :
iota := Transformation(DE1) :   alias(Q = Q(x, t, u[])) :   EulerLagrange(Q ∗ PDE) :
op(%) :   Pullback(iota, %) :   expand(%) :
sys :={coeffs(%, [u[1], u[1, 1], u[1, 1, 1]])};   pdsolve(sys);
alias(P1 = P1(x, u[], u[1], u[1, 1])) : alias(P2 = P2(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
TotalDiff(P1, x) + TotalDiff(P2, t) − 1 ∗ PDE :
{coeffs(%, [u[1, 2], u[2, 2], u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2]])};   pdsolve(%);
alias(P1 = P1(x, u[], u[1], u[1, 1])) :   alias(P2 = P2(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
TotalDiff(P1, x) + TotalDiff(P2, t) − u[] ∗ PDE : expand(%) :
{coeffs(%, [u[1, 2], u[2, 2], u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2]])};   pdsolve(%);
alias(P1 = P1(x, u[], u[1], u[1, 1])) :   alias(P2 = P2(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
TotalDiff(P1, x) + TotalDiff(P2, t) − (t ∗ u[] − x) ∗ PDE :   expand(%) :
{coeffs(%, [u[1, 2], u[2, 2], u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2]])};   pdsolve(%);
```

۷.۱.۶ کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل جزئی با کمک Maple

با کمک Maple می‌توان هر معادله دیفرانسیل جزئی را با استفاده از تقارن‌های آن کاهش مرتبه داد و به یک معادله دیفرانسیل جزئی با مرتبه کمتر و یا یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. به عنوان مثال معادله انتقال حرارات دو بعدی را در نظر بگیرید:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy},$$

این معادله دارای تقارن‌های زیر است:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_y, \quad \mathbf{v}_3 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_4 = u\partial_u, \quad \mathbf{v}_5 = y\partial_x - x\partial_y,\\
&\mathbf{v}_6 = \frac{x}{2}\partial_x + \frac{y}{2}\partial_y + t\partial_t, \quad \mathbf{v}_7 = t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u,\\
&\mathbf{v}_8 = t\partial_y + \frac{1}{2}yu\partial_u, \quad \mathbf{v}_9 = \frac{1}{2}xt\partial_x + \frac{1}{2}yt\partial_y + \frac{1}{2}t^2\partial_t - \frac{1}{8}(x^2+y^2+4t)u\partial_u.
\end{aligned}$$

برای نمونه با کمک دستور زیر با استفاده از دو تقارن $\mathbf{v}_3$ و $\mathbf{v}_5$ معادله را کاهش مرتبه خواهیم داد:

```
restart;   with(PDEtools);   with(DifferentialGeometry) :

DGsetup([t, x, y, u], M);

PDE := diff(u(t, x, y), t) − diff(u(t, x, y), x, x) − diff(u(t, x, y), y, y) = 0;

v[3] := evalDG(D_t);

with(PDEtools, InvariantTransformation,

ChangeSymmetry, InfinitesimalGenerator);

with(PDEtools, SimilarityTransformation,

ChangeSymmetry, InfinitesimalGenerator);

S1 := [xi[1] = 0, xi[2] = 1, xi[3] = 0, eta[1] = 0];

InvariantTransformation(S1, u(t, x, y), v(r, q, z));

ITR, TR := SimilarityTransformation(S1, u(t, x, y), v(r, q, z));

tr := t = q, x = z, y = r, u(t, x, y) = v(r, q);   dchange(tr, PDE) :   simplify(%);

v[5] := evalDG(y ∗ D_x − x ∗ D_y);

S5 := [xi[1] = 0, xi[2] = y, xi[3] = −x, eta[1] = 0];

InvariantTransformation(S5, u(t, x, y), v(r, q, z));

ITR, TR := SimilarityTransformation(S5, u(t, x, y), v(r, q, z));

tr := {t = q, x = tan(z) ∗ RootOf((tan(z)^2 + 1) ∗ Z^2 − r),
```

$$\mathtt{y = RootOf((tan(Z)^2 + 1) * Z^2 - r), u(t, x, y) = v(r, q)\};}$$

$$\mathtt{dchange(tr, PDE):} \quad \mathtt{simplify(\%);}$$

که با استفاده از تقارن $\mathbf{v}_3 = \partial_t$ معادله انتقال حرارت دو بعدی به معادله دیفرانسیل جزئی :

$$\frac{\partial^2 v(r,q)}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 v(r,q)}{\partial r^2} = 0,$$

و با کمک تقارن $\mathbf{v}_5 = y\partial_x - x\partial_y$ معادله انتقال حرارت به معادله دیفرانسیل جزئی:

$$4\frac{\partial^2 v(r,q)}{\partial r^2} r + 4\frac{\partial v(r,q)}{\partial r} - \frac{\partial v(r,q)}{\partial q} = 0,$$

کاهش می‌یابد.

یادداشت

در این فصل به اختصار بیان شد که با کمک سیستم جبری کامپیوتری Maple می‌توان بسیاری از محاسبات در زمینه گروه‌های لی را با صرفه جویی در زمان و بادقت بالا و بدون خطای انسانی انجام داد. در انواع بسته‌هایی که برای Maple نوشته شده است، دستورات مفیدی برای یافتن تقارن‌های برخوردی و مرتبه بالاتر و تقریبی و نیز طبقه بندی گروهی و قوانین پایستگی یافت می‌شود. Maple همچنین دارای دستوراتی ساده برای ترسیم انواع اشکال هندسی و رسم نمودار و شکل برای معادلات گوناگون است. این برنامه و بسته‌های ضمیمه آن به طور پیوسته مورد استفاده نویسندگان و محققین بوده و به سرعت در حال به روز رسانی و توسعه و کاربردی‌تر شدن به منظور استفاده سهل و آسان برای تمامی کاربران است. تا زمان نگارش این پایان نامه ۱۸ نسخه از Maple ارائه شده و آخرین به روزرسانی آن در مارس ۲۰۱۸ انجام شده است.

مراجع

[۱] سید رضا حجازی، (۱۳۹۰)، پایان‌نامه دکتری ”هندسهٔ برخوردی و تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل“، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

[۲] سعیده رشیدی، (۱۳۹۰)، پایان‌نامه ارشد: ”تقارن‌های تقریبی“، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

[۳] سعیده رشيدي، سيدرضا حجازی(۱۳۹۶)، ”تقارن هاي معادله انتقال حرارت دو بعدي، کاهش مرتبه و جواب هاي دقیق“، **سيستم‌هاي مختلط و غيرخطي** ، سال ۱، دوره ۱، شماره ۲، صص ۹ تا ۱۵.

[4] Abel M.L. and Braselton J.P. (2005), ”**Maple by Example**”, 3rd edition. AP Professional, Boston, MA.

[5] Agrawal, O.P. (2002), ”Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems”. **J. Math. Anal. Appl.** 272(1), 368–379.

[6] Agrawal, O.P. (2010), ”Generalized Variational Problems and Euler-Lagrange equations”. **Comput. Math. Appl**. 59(5), 1852–1864.

[7] Agrawal, O.P., Muslih, S.I., Baleanu, D.(2011), ”Generalized variational calculus in terms of multiparameters fractional derivatives”, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat**. 16(12) 4756–4767.

[8] Ahmad B, Ntouyas SK, Alsaedi A. (2016), ”On a coupled system of fractional differential equations with coupled nonlocal and integral boundary conditions”. **Chaos Solitons Fract**, 83:234–41.

[9] Alexandrova, A.A., Ibragimov, N.H., Lukashchuk, V.O. (2014), ”Group classification and conservation laws of nonlinear filtration equation with a small parameter” **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.** 19(2), 364–370.

[10] Anco S.C. and Bluman, G.W. (2002), "Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications", **Eur. J. Appl. Math.** 13, 545-566.

[11] Araslanov, A.M., Galiakberova, L.R., Ibragimov, N.H., Ibragimov, R.N.(2013), "Conserved vectors for a model of nonlinear atmospheric flows around the rotating spherical surface"**Math. Model. Nat. Phenom.** 8(1), 1-17.

[12] Atanackovic T.M., Konjik S., Pilipovic S., Simic S.(2009), "Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and N¨others theorem". **Nonlinear Anal.** 71(5-6), 1504-1517.

[13] Baikov, V.A., Ibragimov, N.H., Zheltova, I.S., Yakovlev, A.A.(2014), "Conservation laws for two-phase filtration models"' **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.** 19(2), 383–389.

[14] Bakkyaraj T., Sahadevan R.(2015), "Group formalism of Lie transformations to time fractional partial differential equations" **Pramana** , 85, 849–860.

[15] Bakkyaraj T., Sahadevan R.(2015), "Invariant analysis of nonlinear fractional ordinary differential equations with Riemann-Liouville derivative". **Nonlinear Dyn.** 80, 447–455.

[16] Biala TA, Jator SN. (2015) "Block implicit Adams methods for fractional differential equations". **Chaos Solitons Fract**, 81:365–77.

[17] Bourdin, L., Cresson, J., Greff, I.(2013), "A continuous/ discrete fractional Noethers theorem"**Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.** 18(4) 878-887.

[18] Boyer T.H.(1967), "Continuous symmetries and conserved currents". **Ann. Phys**, vol. 42, PP. 445-466.

[19] Bluman G.W. and Kumei S. (1989), "**Symmetry and Differential Equations**", Applied Mathematical Sciences, No. 81, Spriger-Verlag, New York.

[20] Bluman G.W., Cheviakov A.F. and Anko S.C. (2010), "**Application of symmetry methods to partial differential equations**", Springer, New York, Dordrecht Heudelberg London.

[21] Bluman G.W. and Temuerchaolu, "Conservation laws for nonlinear tele-graph equations", **J. Math. Anal. Appl.** 310, 2005, 459-476.

[22] Bluman, G.W. and Temuerchaolu(2005), "Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations", **J. Math. Phys.** 073513.

[23] Bozhkov, Y., Dimas, S., Ibragimov, N.H. (2013), "Conservation laws for a coupled variable-coefficient modified Korteweg-de Vries system in a two-layer fluid model". **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.** 18(5), 1127–1135.

[24] Buckwar E., Luchko Y. (1998), "Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations". **J. Math. Anal. Appl.** 227, 81–97.

[25] Cheviakov A.F.(2010), "Computation of fluxes of conservation laws", **Engineering Mathematics**, 66, PP. 153-173.

[26] Djordjevic V.D., Atanackovic T.M.(2008)," Similarity solutions to nonlinear heat conduction and Burgers/Korteweg–deVries fractional equations". **Comput Appl Math**, 212:701-14.

[27] Frederico, G.S.F., Torres, D.F.M.(2007), "A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations". **J. Math. Anal. Appl.** 334(2), 834-846.

[28] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk SYu. (2007), "Continuous transformation groups of fractional differential equations"**VestnikUSATU9**, 3(21), 125–135. (in Russian).

[29] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk SYu. (2009)," Symmetry properties of fractional diffusion equations". **Phys. Scr.** T136, 014016.

[30] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk SYu. (2011), "Group invariant solutions of fractional differential equations". In: Machado, J.A.T., Luo, A.C.J., Barbosa, R.S., Silva, M.F.,Figueiredo, L.B. (eds.) **Nonlinear Science and Complexity**, pp. 51–58. Springer, Heidelberg.

[31] Gaur M., Singh K. (2017), "Symmetry analysis of time-fractional potential Burgers' equation". **Math. Commun**. 22, 1–11.

[32] Gaur M., Singh K. (2016), "Symmetry classification and exact solutions of a variable coefficient space-time fractional potential Burgers' equation". **Int. J. Diff. Equ.**

[33] Griffiths David F. , Dold John W. , Silvester David J. (2015), "**Essential Partial Differential Equations Analytical and Computational Aspects**", Springer.

[34] Heck, A. (2003), "**Introduction to Maple**", 3rd edition. Springer, New York.

[35] S.Reza Hejazi, A.Naderifard, S.Rashidi (2016), "Conservation Laws and Similarity Reduction of the Zoomeron Equation", **Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. Nauki**, 14(3), 7-13.

[36] S.Reza Hejazi, Saeede Rashidi (2016), "Approximate Symmetries and Conservation Laws of The Van der Pol Equation", Iranian Conference on Mathematical Physics,Qom University of Technology, p90, 3 November.

[37] Hereman W., Bernard Deconinck and Poole L. D. (2007), "Continuous and discrete homotopy operators: A theoretical approach made concrete", **Mathematics and Computers in Simulation**, 74, 352-360.

[38] Herman W. (2008), "Symbolic computation of conservation laws of non-linear partial differential equations in multi- dimensional", **Int. J. Qoant. Chem.** vol. 58-62.

[39] Herzallah, M.A.E., Baleanu, D. (2012), "Fractional Euler- Lagrange equations revisited". **Nonlinear Dyn.** 69(3), 977–982.

[40] Juan Hu, Yujian Ye, Shoufeng Shen, Jun Zhang, (2014), "Lie symmetry analysis of the time fractional KdV-type equation", **Applied Mathematics and Computation**, 233, 439-444.

[41] Hydon P.E. (2000), "**Symmetry Method for Differential Equations**", Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[42] Ibragimov Nail H., Kovalev Vladimir F. (2009), "**Approximate and Renormgroup Symmetries**", Springer.

[43] Ibragimov Nail H. (2010-2011) "**Archives of ALGA Volume 7/8**, ALGA Publications Karlskrona, Sweden.

[44] Ibragimov Nail H. (1996), editor. "**CRC Handbook of Lie group analysis ofdifferential equations**, Vol. 3: New trends in theoretical developments and computational methods. CRC Press Inc., Boca Raton.

[45] Ibragimov Nail H. , Torrisi M. and Valenti A.(1991), "Perliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$", **J. Math. Phys.** 32, 2988-2995.

[46] Ibragimov Nail H. (2007), "A new conservation theorem." **J. Math. Anal. Appl.** 333, 311-328.

[47] Ibragimov Nail H.(2011), "Nonlinear self-adjointness and conservation laws". **J. Phys. A: Math.** Theor. 44, 432002.

[48] Ibragimov Nail H. (2011), ”Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws”, **Archives of ALGA, 7/8**, 1-99.

[49] Ibragimov Nail .kh, Avdonina, E.D. (2013), ”Nonlinear self-adjointness, conservation laws, and the construction of solutions of partial differential equations using conservation laws”. **Russ.Math. Surv.** 68(5), 889-921.

[50] Ibragimov N.H. (1983), ”**Transformation groups in mathematical physics**”. Moscow, Nauka. English transl. (1985), ”**Transformation groups applied to mathematical physics**, Reidel, Dordrecht.

[51] Ibragimov, N.H. (1999), ”**Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations.**” John Wiley & Sons, Chichester.

[52] Ibragimov, N.H. (2006), ”Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians”, **J. Math. Anal. Appl.** no. 2, vol. 318 , PP. 742-757.

[53] Ibragimov, N.H. (1969), ”Invariant variational problems and conservation laws (remarks on Noether’s theorem)”,**Theoret. and Math. Phys.** 1:3 (1969), 267–274.

[54] Gandarias M.L., Bruzon M.S., Rosa M. (2013), ”Nonlinear self-adjointness and conservation laws for a generalized Fisher equation”**Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.** 18(7), 1600–1606.

[55] Gandarias, M.L. (2014), ”Conservation laws for a porous medium equation through non-classical generators”. **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.** 19(2), 371–376.

[56] Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F., Meleshko S.V (2010), ”**Symmetries of Integro-Differential Equations With Applications in Mechanics and Plasma Physics**”, Springer.

[57] Jefferson G. F., Carminati J. (2014), ”FracSym: automated symbolic computation of Lie symmetries of fractional differential equations” **Comput. Phys. Commun**, 185, 430–441.

[58] Khorshidi M., Nadjafikhah M. and Jafari H. (2015), ”Fractional derivative generalization of Noether’s theorem”, **Open Mathematics**, 13, 940-947.

[59] Kiryakova V. (1994)”**Generalised fractional calculus and applications**”, Pitman research notes in mathematics, vol. 301. London: Longman.

[60] Kinani E. H, Ouhadan A. (2015), ”Lie symmetry analysis of some time fractional partial differential equations”. **Int. J. Mod. Phys.** Conf. Ser. 38, 1560075(8p).

[61] Lazo M.J., Torres D.F.M. (2013), ”The DuBois-Reymond Fundamental Lemma of the Fractional Calculus of Variations and an Euler-Lagrange Equation Involving Only Derivatives of Caputo”,**J. Optimiz. Theory and Appl.** 156(1), 56–67.

[62] Lee J.M. (2002), ”**Introduction to Smooth Manifolds**, GTM, Springer, New York.

[63] Leibniz G.W. (1962), ”**Mathematische Schiften**, Georg Olms Verlagsbnchhaudlung, Hildesheim.

[64] Lie S. (1895), ”**Zur allgemeinen theorie der partillen differentialgleichungen beliebeger ordung**”, Leipz, Berich. 1, 53-128.

[65] Long Z.X., Zhang Y. (2014), ”Fractional Noether Theorem Based on Extended Exponentially Fractional Integral”. **Int. J. Theor. Phys**, 53(3) 841-855.

[66] Lukashchuk S. Yu. (2015), ”Constructing conservaion laws for fractional-order integro-differential equations”, **Theoretical and Mathematical Physics**, 184(2): 1049–1066.

[67] Malinowska A.B. (2012), ”A formulation of the fractional Noether-type theorem for multidimensional Lagrangians”. **Appl. Math. Lett**. 25(11), 1941-1946.

[68] Michal A. D. (1951), ”Differential Invariants and invariant partial differential equations under continuous transformation groups in normed linear spaces”, **Proc. Nat. Acad. Sci.**, 37, 623-637.

[69] Miller KS, Ross B. (1993), ”**An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**”. New York: Wiley.

[70] MorganA. J. A. (1952), ”The reduction by one of the number of indepemdent variables in some systems of partial differential equations”, **Quart, J. Math. Oxsford**, 3, 250-259.

[71] Noether E. (1918), ”Invariante variations probleme”, Nachr. K'Aonig. Gesell. Wis- sen. G'Aottingen, **Math.-Phys. Kl.** 235-257.

[72] Odzijewicz T., Malinowska A.B., Torres D.F.M. (2013), ”Noether’s theorem for fractional variational problems of variable order.” **Cent. Eur. J. Phys.** 11(6), 691-701.

[73] Oldham K.B, F. Spanier F. (1974), ”**The Fractional Calculus**”, Academic Press, New York.

[74] Olver P.J. (1995), "**Equivalence, Invariant and Symmetry**", Cambridge University Press,Cambridge University Press, Cambridge.

[75] Olver P.J. (1993),"**Applications of Lie Groups to Differential equations**", Second Edition, GTM, Vol. 107, Springer Verlage, New York.

[76] Olver P.J. (2014),"**Introduction to Partial Differential Equations**", Springer, New York.

[77] Olver P.J. (1979), "Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations", **J. Diff. Geom.** 14 , 497-542.

[78] Ovsiannikov L. V. (1958), "Groups ang group invariant solutions of differential equations", **Dokl, Akad. Nauk**. USSR, 118, 439-442.

[79] Prakash P., Sahadevan R. (2017), "Lie symmetry analysis and exact solution of certain fractional ordinary differential equations",**Nonlinear Dyn**, 89(1), 305-319.

[80] Pertz G.H. and Gerhardt C.J., editors. Leibnizens gesammelte Werke, Lebinizens "**mathematische Schriften**", Erste Abtheilung, Band II, pages 301-□302. Dritte Folge Mathematik (Erster Band). A. Asher & Comp., 1849. Briefwechsel zwischen Leibniz, Hugens van Zulichem und dem Marquis de l'Hospital.

[81] Podlubny I. (1999)"**Fractional Differential Equations.An Introduction to Fractional Deriva- tives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications**", Academic Press, San Diego, CA.

[82] Poole D. and Hereman W. (2011), "Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations in multi-dimensions", **Journal of Symbolic Computation**, 46, 1355-1377.

[83] Poole D, Hereman W. (2009)," Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations using homotopy operators", Ph.D. dissertation, Colorado School of Mines, Golden, Colorado.

[84] Poole D, Hereman W. (2010), "The homotopy operator method for symbolic integration by parts and inversion of divergences with applications", **Appl. Anal.** 87, PP. 433-455.

[85] Rabotnov Y.N. (1969) "Creep problems in structural members". **North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics**, 7. Originally published in Russian as: Polzuchest Elementov Konstruktsii, Nauka, Moscow, 1966.

[86] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2017), ”Symmetry properties, similarity reduction and exact solutions of fractional Boussinesq equation”, **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, 14(6), 1750083 (15 pages).

[87] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2017), ”Analyzing Lie symmetry and constructing conservation laws for time-fractional Benny-Lin equation”, **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, 14(12), 1750170 (25 pages).

[88] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi and Elham Dastranj (2018), ”Approximate symmetry analysis of nonlinear Rayleigh-wave equation”, **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, 15(4), 1850055 (18 pages).

[89] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2018), ”Lie symmetry approach for The Vlasov–Maxwell system of equations”, **Journal of Geometry and Physics**, 132, 1-12.

[90] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2016), ”Group Analysis and Similarity Solutions of the Buckmaster Equation”, 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran, 15-13 July.

[91] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2017), ”Exact Solutions of Time-Fractional Diffusivity Equation Using Lie Point Symmetry Method”, 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran, 22-25 August.

[92] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2018), ”Lie point symmetries for a class of fractional order integro-differential equations”, 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, The institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran, 17-19 July.

[93] Saeede Rashidi, S.Reza Hejazi (2018), ”Lie symmetry analysis and similarity reduction of the time fractional Regularized Long-Wave equation”, 49th Annual Iranian Mathematics Conference, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, 23-26 August.

[94] Riewe F. (1996), ”Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics”. **Phys. Rev. E.** 53(2), 1890-1899.

[95] Bertram Ross (June 1974, Springer), ”Fractional Calculus and Its Applications”, Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven.

[96] Sahadevan R., Bakkyaraj T. (2012), "Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg–de Vries equations",**J. Math. Anal. Appl.**, 393, 341-347.

[97] Samko S. G., Kilbas A.A., and Marichev O.I (1987) "**Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications**" [in Russian], Nauka i Tekhnika, Minsk; English transl.: Samko S. G., Kilbas A.A., and Marichev O.I (1993) "**Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications**", Gordon and Breach, New York.

[98] Stephani H. (1989), "**Differential Equations, Their Solutions Using Symmetries**", Camridge University Press, Cambridge New York.

[99] Shah K, Khalil H, Khan RA. (2015), "Investigation of positive solution to a coupled system of impulsive boundary value problems for nonlinear fractional order differential equations". **Chaos Solitons Fract**; 77:240–6.

[100] Shingareva I. and Lizárraga-Celaya C. (2009), "**Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics**", 2nd edition. Springer, Wien New York.

[101] Shingareva I. and Lizárraga-Celaya C. (2011), "**Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica**", Springer-Verlag / Wien.

[102] Warner F.W. (1971), "**Foundations of Differentible Manifolds and Lie Groups**", Scott, Foresman and Co., Glenview, III.

[103] Wazwaz Abdul-Majid, (2011), "**Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications**", Springer.

[104] Yasar E., Yildirim Y., Khalique C.M. (2016), "Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventhorder time fractional Sawada–Kotera–Ito equation".**Results Phys.** 6, 322-328.

[105] Zawistowski Z.J., (2001) "Symmetries of integro-differential equations", **Rep. Math. Phys.** 48 (1–2), 269–276.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتحاد	Identify
اساسی	Fundamental
اکیدا خودالحاق	Strictly Self-Adjoint
امتداد دادن	Prolongation
انتشار	Diffusion
انتگرالده	Integrand
انتگرال کسری	Fractional Integral
انتقال	Translation
اویلر_ لاگرانژ	Euler-Lagrange
بدیهی	Trivial
برخوردی	Contact
بعد	Dimension
به‌طور متناوب	Altematively
پایه	Basis
پتانسیل	Potential
پیوسته	Continuos
تابعک	Functional
تبدیل	Transformation
ترکیب خطی	Linear Combination
تقارن لی	Lie Symmetry
تقارن نقطه‌ای	Point Symmetry
توزیع کننده	Diffusivity
جابجاگر	Commutator
جبر لی	Lie Algebra
جداسازی متغیرها	Separation of variables
جنبشی	Kinetic

جواب‌های موج سیار	Traveling wave solutions
جواب‌های متشابه	Similarity solutions
حقیقی مقدار	Real-Valued
خود الحاق غیر خطی	Non-Linear Self-Adjoint
درایه	Entity
دستگاه فرامعین	Overdetermined system
دو خطی	Billinearity
دیفرانسیل کامل	Total Differential
دلخواه	Arbitrary
روش تجزیه آدومین	Adomian’s decomposition method
صدق کردن	Satisfy
ضریب	Multiplier
سری تیلور	Taylor’s series
شبه خود الحاق	Quasi Self-Adjoint
شرایط	Conditions
عامل انتگرال	Integrating Factor
عبارت دیورژانسی	Divergence Expression
عملگر الحاقی	Adjoint Operator
عملگر خطی	linear Operator
فرم	Form
فضای برداری	Vector Space
فضای افشانه	Jet Space
قراردادی	Formal
قضیه نوتر	Noether’s Theorem
قوانین پایستگی	Conservation Laws
شار	Flow
کروشه لی	Lie Bracket
گروه تقارن	Symmetry Group
گروه لی	Lie Group
گروه موضعی	Locall group
لاگرانژی	Lagrangian
لختگی	Coagulation
مسائل تغییراتی	Variational problems
مستقل	Independent

مشتق . . . . Dertivative
مشتقات جزیی . . . . Partial Derivatives
مشتق کامل . . . . Total Dertivative
مشتق لی . . . . Lie Dertivative
مشخصه . . . . Characteristic
مراتب بالاتر . . . . Higer Order
مرتبط . . . . Associated
معادلات مشخصه . . . . Characteristic
معادله دیفرانسیل . . . . Differential Equation
معادله دیفرانسیل کسری . . . . Frctional Differential Equation
معادله دیفرانسیل ـ انتگرال . . . . Integro-Differential Equation
معادله دیفرانسیل ـ انتگرال کسری . . . . Frctional Integro-Differential Equation
معادل . . . . Equivalent
معمولی . . . . Ordinary
مکانیک کلاسیک . . . . Classic Mechanics
منظم . . . . Regular
مولد بی‌نهایت کوچک . . . . Infinitesimal Generator
میدان برداری . . . . Vector Field
ناوردا . . . . Invariavt
نگاشت خطی . . . . Linear Mapping
نوسانگر . . . . Oscillator
وابسته . . . . Dependent
هموار . . . . Smooth

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint Operator .... عملگر الحاقی
Adomian's decomposition method .... روش تجزیه آدومین
Altematively .... به‌طور متناوب
Arbitrary .... دلخواه
Associated .... مرتبط
Basis .... پایه
Billinearity .... دو خطی
Characteristic .... مشخصه
Classic Mechanics .... مکانیک کلاسیک
Coagulation .... لختگی
Commutator .... جابجاگر
Conditions .... شرایط
Connect .... همبند
Contact .... برخوردی
Continuos .... پیوسته
Conservation Laws .... قوانین پایستگی
Dependent .... وابسته
Dertivative .... مشتق
Differential Equation .... معادله دیفرانسیل
Diffusion .... انتشار
Diffusivity .... توزیع کننده
Dimension .... بعد
Direct Method .... روش مستقیم
Divergence Expression .... عبارت دیورژانسی
Entity .... درایه
Equivalent .... معادل

Euler-Lagrange اویلرـلاگرانژ
Flow شار
Form فرم
Formal قراردادی
Functional تابعک
Fundamental اساسی
Frctional Differential Equation معادله دیفرانسیل کسری
Frctional Derivative مشتق کسری
Frctional Integro-Differential Equation معادله دیفرانسیلـانتگرال کسری
Higer Order مراتب بالاتر
Identify اتحاد
Independent مستقل
Infinitesimal Generator مولد بی‌نهایت کوچک
Integrand انتگرالده
Integrating Factor عامل انتگرال
Integro-Differential Equation معادله دیفرانسیلـانتگرال
Invariant ناوردا
Jet Space فضای افشانه
Kinetic جنبشی
Lagrangian لاگرانژی
Lie Algebra جبر لی
Lie Bracket کروشه لی
Lie Dertivative مشتق لی
Lie Group گروه لی
Lie Symmetry تقارن لی
Linear Combination ترکیب خطی
Linear Mapping نگاشت خطی
Linear Operator عملگر خطی
Local Group گروه موضعی
Multiplier ضریب
Noether Theorem قضیه نوتر
Non-Linear Self-Adjoint خود الحاق غیر خطی
Ordinary معمولی
Oscillator نوسانگر

Overdetermined system . . . . دستگاه فرامعین
Partial Derivatives . . . . مشتقات جزیی
Point Symmetry . . . . تقارن نقطه‌ای
Prolongation . . . . امتداد دادن
Quasi Self-Adjoint . . . . شبه خود الحاق
Real-Valued . . . . حقیقی مقدار
Regular . . . . منظم
Satisfy . . . . صدق کردن
Separation of variables . . . . جداسازی متغیرها
Similarity solutions . . . . جواب‌های متشابه
Smooth . . . . هموار
Strictly Self-Adjoint . . . . اکیدا خودالحاق
Symmetry Group . . . . گروه تقارن
Tangent Vector . . . . بردار مماس
Taylor’s series . . . . سری تیلور
Total Dertivative . . . . مشتق کامل
Total Differential . . . . دیفرانسیل کامل
Translation . . . . انتقال
Transformation . . . . تبدیل
Traveling wave solutions . . . . جواب‌های موج سیار
Trivial . . . . بدیهی
variational problems . . . . مسائل تغییراتی
Vector Field . . . . میدان برداری
Vector Space . . . . فضای برداری

نمایه

Abstract

The main topic of the present dissertation is to study the inclusive application of Lie groups and geometry in fractional integro-differential equations. In this thesis, some types of differential equations of integer and fractional order and fractional integro-differential equation are introduced and also, the basic concepts of fractional calculus are stated. Next, group analysis is extended to the differential equations and after finding symmetries, invariant solutions of these equations are founded. It is shown that by using this group analysis Conservation laws of differential equations of integer and fractional order are calculated. These conservation laws lead us to find new solutions based on symmetries. Under some suitable conditions, the infinitesimal criterion of invariance for detecting Lie symmetries of fractional integro-differential equations with fractional derivative in both the Caputo and Riemann–Liouville sense is constructed. Then by using the proved theorem for symmetries, the conservation laws of these equations are abtained. For simplicity in computing, the Maple software and its application in finding symmetry groups and the conservation laws of the differential equations of the integer and the fractional order are introduced.

key words: Fractional differential equations, Fractional integro-differential equations, Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Lie symmetries, Invariant solutions, Noether's theorem, Euler-Lagrange equations, Conservation laws, Maple.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences
Department of Pure Mathematics

PhD Thesis in: Geometry and Topology

Geometric Study of Fractional Order Integro-Differential Equations

By: Saeede Rashidi

Supervisor

Dr. Seyed Reza Hejazi

Feb 2019