

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدى الله لنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

روش های شبه طیفی برای حل معادلات انتگرال

نگارنده: فاطمه محمودی

استادان راهنما

دکتر مهدی قوتمند جزی
دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر علیرضا ناظمی

دی ۱۳۹۷

تقدیر به دو وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم، موهایشان سپید شد تا ما
روسفید شویم، و عاشقانه سوختند تا اگر ما بخش وجود ما و روشن گر را همان
باشند: پدر بزرگوار و مادر گرانقدرم

تقدیر به

همسر مهربان که در همه حال همراه و پشتیبان من بوده است

و خواهران و برادر عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس مخصوص خداوند مهربان که به انسان توانایی و دانایی بخشید تا به بندگانش شفقت ورزد، مهربانی کند و در حل مشکلاتشان یاری‌شان نماید. از راحت خویش بگذرد و آسایش هم‌نوعان را مقدم دارد، با او معامله کند و در این خلوص انباز نگیرد و خوش باشد که پروردگار سمیع و بصیر است.

« و یزکیهم و یعلمهم الکتاب و الحکمه »

شایسته است از استاد گرامی جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که با راهنمایی‌هایشان مرا در این امر کمک نموده‌اند بسیار تشکر نمایم. همچنین از اساتید محترم آقای دکتر علی مس‌فروش و آقای دکتر علیرضا ناظمی سپاسگزارم.

از پدر گرامی، مادر عزیز و همسر مهربانم که خالصانه مرا یاری نمودند و آرامش را برایم فراهم آوردند تا بتوانم این پایان‌نامه را تدوین نمایم تشکر می‌کنم. امیدوارم که حاصل تلاشم نسیم‌گونه غبار خستگی‌تان را بزدايد. در پایان تشکر خالصانه دارم از همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

فاطمه محمودی

دی ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه محمودی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **روش های شبه طیفی برای حل معادلات انتگرال**، تحت راهنمایی **مهدی قوتمند جزی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه محمودی

دی ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم پرداخته شده است. روش شبه‌طیفی براساس ماتریس انتگرال برای حل معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل ارائه می‌شود. جواب معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل در نقاط هم‌محلی به‌دست می‌آید. سپس یک روش موثر و پایدار برای محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی از طریق رابطه بازگشتی ماتریس‌های انتگرال لژاندر ارائه می‌شود. علاوه‌براین آنالیز همگرایی روش در هر دو فضای L^2 و L^∞ توسط یک معادله انتگرال خطی ارائه می‌گردد و سرعت همگرایی با نتایج عددی نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، چندجمله‌ای لژاندر، چندجمله‌ای چبیشف، روش شبه‌طیفی، نقاط هم‌محلی، ماتریس انتگرال شبه‌طیفی

فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر
س	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم اولیه و مقدمات
۱	۱.۱ تاریخچه
۲	۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۵	۳.۱ چندجمله‌ای چبیشف و خواص آن
۶	۴.۱ چندجمله‌ای لژاندر و خواص آن
۸	۵.۱ معادلات انتگرال
۱۳	۲ مقایسه روش‌های چندجمله‌ای چبیشف و لژاندر
۱۳	۱.۲ مقدمه
۱۳	۲.۲ روش چندجمله‌ای چبیشف
۱۴	۳.۲ روش چندجمله‌ای لژاندر
۱۵	۴.۲ نتایج عددی
۲۳	۳ روش شبه‌طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال
۲۳	۱.۳ مقدمه
۲۶	۲.۳ تقریب شبه‌طیفی لژاندر
۳۰	۳.۳ ماتریس انتگرال شبه‌طیفی لژاندر
۳۴	۴.۳ کران خطا
۴۱	۵.۳ نتایج عددی
	۴ روش شبه‌طیفی و آنالیز همگرایی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه بالا
۴۹	۱.۴ مقدمه

۵۰		تعریف و محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر	۲.۴
۵۲		تعریف و محاسبه ماتریس انتگرال شبه طیفی	۳.۴
۵۵		روش انتگرال شبه طیفی	۴.۴
۶۰		آنالیز همگرایی	۵.۴
۶۴		نتایج عددی	۶.۴
۶۸		نتیجه گیری	۷.۴

۶۹ مراجع

۷۵ آ حل مثال ۱.۴.۲ با Maple

فهرست تصاویر

۱۷	حل تقریبی مثال ۱.۴.۲ به روش چندجمله‌ای لژاندر و چبیشف	۱.۲
۲۰	حل دقیق مثال ۲.۴.۲	۲.۲
۲۰	حل تقریبی مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای چبیشف	۳.۲
۴.۲	خطای مطلق مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای چبیشف، با توجه به نتایج می‌توان دید که روش چندجمله‌ای چبیشف بهتر از روش چندجمله‌ای لژاندر است. در جدول ۱.۲ نقاط $(\frac{0}{2}, \frac{0}{4})$ ، $(\frac{0}{4}, \frac{0}{4})$ و $(\frac{0}{6}, \frac{0}{2})$ کارایی روش را نشان می‌دهد.	۲۱
۲۲	حل تقریبی مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای لژاندر	۵.۲
۲۲	خطای مطلق مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای لژاندر	۶.۲
۱.۳	حل مثال ۲.۵.۳ در نقاط مختلف، مشاهده می‌شود نتیجه برای نقاط (LGL) و جواب دقیق یکسان و نقاط (CGL) کمی مانند جواب دقیق است.	۴۳
۲.۳	حل مثال ۴.۵.۳ در نقطه $N = 16$	۴۵
۱.۴	خطای تقریبی مثال ۱.۶.۴ در نرم L^∞ برای روش مورد بررسی و روش ال-کادی	۶۵
۲.۴	خطای تقریبی مثال ۲.۶.۴ در نرم L^2 برای روش مورد بررسی و روش ال-کادی	۶۶
۳.۴	حداکثر خطای دقیق مثال ۳.۶.۴	۶۷
۴.۴	خطای تقریبی مثال ۴.۶.۴ در هر دو نرم L^∞ و L^2	۶۸

فهرست جداول

۲۱	نتایج عددی مثال ۲.۴.۲ توسط روش چندجمله‌ای چپیشف و لژاندر در $N = 3$	۱.۲
۴۲	حداکثر خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳	۱.۳
۴۲	حداکثر خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳	۲.۳
۴۳	نتایج به‌دست آمده برای مثال ۲.۵.۳ در $N = 4$	۳.۳
۴۳	نتایج به‌دست آمده برای مثال ۲.۵.۳ در $N = 10$	۴.۳
۴۶	نتایج به‌دست آمده برای مثال ۳.۵.۳ در $N = 15$	۵.۳
۴۶	نتایج به‌دست آمده برای مثال ۳.۵.۳ در $N = 20$	۶.۳
۴۶	حداکثر خطای مثال ۳.۵.۳ در مقایسه با روش‌های دیگر	۷.۳
۴۷	حداکثر خطای مثال ۳.۵.۳ در مقایسه با روش‌های دیگر	۸.۳
۶۵	اعداد شرطی مثال ۱.۶.۴ برای روش حاضر و روش ال-کادی	۱.۴
۶۶	تعداد شرایط مثال ۲.۶.۴ برای روش حاضر و روش ال-کادی	۲.۴

فصل ۱

مفاهیم اولیه و مقدمات

۱.۱ تاریخچه

معادلات انتگرال ولترا-فردهلم در بسیاری از شاخه‌های علوم مانند نجوم، مکانیک کوانتومی و غیره استفاده می‌شود. حل تقریبی معادلات انتگرال برای مسائل الکتروستاتیک ارائه می‌شود [۶]. راه حل دقیق بسیاری از معادلات انتگرال دشوار است. بسیاری از کارهای انجام شده با تمرکز بر توسعه روش‌های پیشرفته و کارآمد برای معادلات انتگرال دوبعدی مانند روش هم‌بستگی، چندجمله‌ای چبیشف، تقریب متوالی، گالرکین، تکرار تغییرات، تجزیه آدومیان و انتگرال هموتوپی را در [۷-۱۵] می‌توان دید.

در چند دهه گذشته، چندجمله‌ای‌های لژاندر یک ابزار بسیار مفید از دیدگاه نظری و عملی بوده است و در تجزیه و تحلیل عددی اهمیت زیادی دارد. موضوعات عددی زیادی وجود دارند که از روش‌های لژاندر استفاده می‌کند [۲۱، ۲۹، ۳۱]. در این روش‌ها جای‌گذاری بسط تقریبی تابع جواب در معادله به‌همراه شرایط تکمیلی به‌کار شده است. کیلی^۱ یک تقریب چند مرحله‌ای از قواعد گاوسی مرکب را برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی ارائه کرده‌است [۲۷]. از سوی دیگر ایده اصلی در روش‌های طیفی، شامل روش جایگزینی تابع جواب u با استفاده از یک بسط سری‌های قطع‌شده و همچنین شامل محاسبه مشتقات u توسط مشتق سری است. هدف، یافتن بهترین تقریب برای انتگرال‌ها از نظر تئوری و عملی

^۱Kelly

است. روش‌های طیفی در مقایسه با روش تفاضلات متناهی در بسیاری موارد دارای دقت مناسب‌تر است و به‌طور کلی در دهه‌های ۱۹۵۰ روش تفاضلات متناهی، ۱۹۶۰ روش عناصر متناهی و ۱۹۷۰ روش‌های طیفی اوج موفقیت خود را داشته‌اند. استفاده از ایده روش‌های طیفی دارای قدمتی به اندازه درونیابی و بسط توابع است. ساخت اولین الگوریتم‌های مربوط به روش‌های طیفی به سال‌های ۱۹۳۸ و کارهای لانکز^۲ برمی‌گردد. همچنین می‌توان به کارهای دنشو^۳ و الیوتفوکس^۴ و افراد دیگر در سال‌های ۱۹۶۰ اشاره نمود. تا کنون روش‌های متفاوتی برای حل معادلات انتگرال ارائه شده است. پچیت^۵ معادلات انتگرال ولترا-فردهلم آمیخته را بررسی کرد، کاوتن^۶ روش هم‌محلی را برای حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم و بورنر^۷ روش هم‌محلی را برای معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی به کار برده‌اند.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

این فصل براساس [۵-۱] و [۳۹] نگارش شده است.

توابع اندازه‌پذیر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، J گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد τ را یک توپولوژی در X نامند هرگاه:

$$1. X, \emptyset \in \tau$$

$$2. \text{ اگر } U, V \in J \text{ آن گاه } U \cap V \in \tau$$

$$3. \text{ اگر } \{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ یک گردایه دلخواه از اعضای } \tau \text{ باشد آن گاه } \bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$$

(X, τ) را فضای توپولوژیک می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد به‌طوری که $\mathcal{A} \in 2^X$ ، $\mathcal{A}$ یک جبر روی X نامیده می‌شود اگر

$$\begin{cases} \forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \\ \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \sim A \in \mathcal{A} \end{cases}$$

^۲Lanczos

^۳Denshow

^۴Elliottfox

^۵Pachpatte

^۶Kauthen

^۷Brunner

تعریف ۳.۲.۱. یک جبر روی $\mathcal{A}$ σ - جبر است، هرگاه برای هر دنباله $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ در $\mathcal{A}$ باشد، داریم:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (S, τ) یک فضای توپولوژیک باشد، کوچکترین σ - جبر از S که شامل τ باشد یک مجموعه برل از S نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید B یک σ - جبر روی X باشد، اگر (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد (X, B) را یک فضای اندازه‌پذیر نامند به طوری که B یک مجموعه برل است.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی گسترش یافته روی X باشد و B یک σ - جبر روی X باشد، تابع f را اندازه‌پذیر نامند هرگاه f در یکی از چهار خاصیت زیر صدق کند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \quad \{x : f(x) < \alpha\} \in B \\ \forall \alpha \quad \{x : f(x) \leq \alpha\} \in B \\ \forall \alpha \quad \{x : f(x) > \alpha\} \in B \\ \forall \alpha \quad \{x : f(x) \geq \alpha\} \in B \end{array} \right.$$

در آنالیز عددی، خیلی اوقات نیاز است که نزدیکی یک جواب عددی به یک جواب دقیق را بررسی کنند. برای اینکه به طور کلی به این سوال پاسخ داده شود نیاز است یک مقیاس از قدرمطلق تفاضل، بین جواب عددی و جواب دقیق داشته باشند. یک نرم در یک فضای خطی این مقیاس را فراهم می‌کند.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید E یک فضای برداری باشد، تابع $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ ، یک نرم می‌نامند اگر در خواص زیر صدق کند.

- (i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$
- (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iii) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

اگر در خاصیت اول $\|x\| = 0$ الزاماً $x = 0$ نتیجه ندهد، به آن نیم نرم می‌گویند و خاصیت سوم نامساوی مثلث نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $1 \leq p \leq \infty$ باشد، p - نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف ۹.۲.۱. اگر مقدار $p = ۲$ باشد، نرم اقلیدسی نامیده می‌شود. نرم زیر به همراه p – نرم از نرم‌های معروف در $\mathbb{C}^n$ هستند.

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

تعریف ۱۰.۲.۱. به ازای هر تابع $f \in \mathbb{C}[a, b]$ ، نرم‌های L_p و L_{∞} از تابع f به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b (f(x))^p dx \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} \|f(x)\|$$

فرض کنید $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\}$ و C همواره مثبت و مستقل از N باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. فضای L^{∞} با توجه به نرم زیر:

$$\|\nu(\tau)\|_{\infty} \triangleq \text{ess} \sup_{\tau \in (-1, 1)} |\nu(\tau)| \quad (۱.۱)$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^{\infty}(-1, 1) \triangleq \{\nu(\tau) : (-1, 1) \text{ روی } \nu(\tau) \text{ و } \|\nu(\tau)\|_{\infty} < \infty\} \quad (۲.۱)$$

تعریف ۱۲.۲.۱. فضای L^2 با توجه به نرم زیر:

$$\|\nu(\tau)\| \triangleq \left(\int_{-1}^1 \nu^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \quad (۳.۱)$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^2(-1, 1) \triangleq \{\nu(\tau) : (-1, 1) \text{ روی } \nu(\tau) \text{ و } \|\nu(\tau)\| < \infty\} \quad (۴.۱)$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فضای سوبولوف با توجه به تعریف شبه نرم:

$$\|\nu(\tau)\|_{H^m(-1, 1)} \triangleq \left(\sum_{j=0}^m \|\nu^{(j)}(\tau)\|^2 \right)^{1/2} \quad (۵.۱)$$

$$|\nu(\tau)|_{H^m(-1, 1)} \triangleq \|\nu^{(m)}(\tau)\| \quad (۵.۱ ب)$$

برای $m \in \mathbb{N}_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^m(-1, 1) \triangleq \{\nu(\tau) : \nu^{(j)}(\tau) \in L^2(-1, 1), 0 \leq j \leq m\}, \quad (۶.۱)$$

چندجمله‌ای‌های متعامد

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید توابع f و g بر بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشند و $w(x)$ تابع وزن نامنفی بر (a, b) باشد، در این صورت حاصل ضرب داخلی توابع f و g نسبت به تابع وزن $w(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

تعریف ۱۵.۲.۱. دنباله‌ی توابع $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن w بر بازه (a, b) متعامد گویند هرگاه $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$ و $n \neq m$ باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ روی بازه $[a, b]$ باشد. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \varphi_n(x)$$

۳.۱ چندجمله‌ای چبیشف و خواص آن

چندجمله‌ای‌های چبیشف یک دنباله از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که می‌توان آن‌ها را مانند دنباله فیبوناتچی به صورت بازگشتی نوشت. نام این چندجمله‌ای‌ها از نام روس پافنوتی چبیشف برگرفته شده که آن‌ها را اولین بار در سال ۱۸۵۴ معرفی کرد. این چندجمله‌ای‌ها چهار نوع هستند که در این‌جا نوع اول آن‌ها که با T نشان می‌دهند را بررسی می‌کنیم. چندجمله‌ای‌های چبیشف بیشتر در تقریب تابع کاربرد دارد و با استفاده از آن‌ها خطا را بسیار کاهش می‌دهد.

$T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول یک چندجمله‌ای شامل x از درجه n است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos \theta \quad (7.1)$$

با تعریف (۷.۱) رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

که به صورت بازگشتی برای تولید تمام چندجمله‌ای‌های $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ بسیار موثر است.

چندجمله‌ای چبیشف به عنوان چندجمله‌ای متعامد

ضرب داخلی را به صورت

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

در بازه $[a, b] = [-1, 1]$ و تابع وزن $w = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. به‌طور کلی:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{\mathbb{R}} w(x) T_n(x) T_m(x) dx = \delta_{mn} K_n = \delta_{mn} \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n > 0 \end{cases}$$

۴.۱ چندجمله‌ای لژاندر و خواص آن

چندجمله‌ای‌های لژاندر دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد $P_n(x)$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ است. اگر $N \geq 1$ یک عدد صحیح و $x_0, x_1, \dots, x_N$ مجموعه نقاط بین $[-1, 1]$ باشد، به‌طوری‌که

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N \leq +1$$

باشد. این نقاط به‌عنوان صفرهای $(1 - x^2)P'_N(x)$ یعنی نقاط لژاندر-گاوس-لوباتو شناخته می‌شود. به سری‌های قطع‌شده چندجمله‌ای‌های لژاندر توجه کنید، به‌عنوان مثال اگر $f(x)$ روی بازه‌ی $[-1, 1]$ انتگرال‌پذیر باشد، سپس تقریب تابع $f(x)$ با $(P_N f)(x)$ به‌صورت زیر است:

$$(P_N f)(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x)$$

به‌طوری‌که

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \sum_{j=0}^N f(x_j) P_n(x_j).$$

چندجمله‌ای لژاندر از فرمول رودریگر توسط بل^۸ [۵۹] معرفی شد، که به‌صورت زیر است:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (9.1)$$

$\{P_n(x)\}$ به‌صورت یک بسط

چندجمله‌ای لژاندر را می‌توان براساس توان x به‌صورت زیر بیان کرد:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)} x^{n-2k} \quad (10.1)$$

که در آن

$$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n (n - k)! (n - 2k)! k!}$$

و

$$[n/2] = \begin{cases} n/2, & \text{زوج } n \\ (n-1)/2, & \text{فرد } n \end{cases}$$

^۸Bell

است. از آنجایی که گاهی ناپایداری رخ می‌دهد بهتر است تاثیر خطای گرد کردن هنگام استفاده از رابطه بازگشتی (۱۰.۱) را در نظر بگیریم.

تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر

با توجه به ضرب داخلی L_2 در بازه $-1 \leq x \leq 1$ با تابع وزن $w(x) = 1$ چندجمله‌ای‌های لژاندر متعامد هستند [۵۹].

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \quad (11.1)$$

به‌طوری که در آن δ_{nm} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

فرمول بازگشتی چندجمله‌ای لژاندر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.1)$$

به‌طوری که $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ است. توجه کنید که:

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \quad (13.1)$$

و همچنین داریم:

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.1)$$

قضیه ۱.۴.۱. چندجمله‌ای لژاندر را می‌توان به‌فرم زیر نوشت:

$$P_n(x) = \Psi_n x^n + \text{چندجمله‌ای با درجه پایین} \quad (15.1)$$

به‌طوری که:

$$\Psi_n = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!n!}$$

برهان. فرمول بازگشتی (۱۲.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x) - \frac{(n-1)}{n}P_{n-2}(x) \quad (16.1)$$

و همچنین

$$P_{n-1}(x) = \frac{2n-3}{n-1}xP_{n-2}(x) - \frac{(n-2)}{n-1}P_{n-3}(x) \quad (17.1)$$

با جای گذاری (۱۷.۱) در (۱۶.۱) به دست می آید:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n-1)}{n} x \left\{ \frac{(2n-3)}{(n-1)} x P_{n-2}(x) - \frac{(n-2)}{(n-1)} P_{n-2}(x) \right\} - \frac{(n-1)}{n} P_{n-2}(x) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} x^2 P_{n-2}(x) - \dots \\ &\quad \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \dots (3)(1)}{n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)} x^n P_0(x) + \text{چند جمله ای با درجه پایین} \end{aligned}$$

$$P_n(x) = \Psi_n x^n + \text{چند جمله ای با درجه پایین}$$

بنابراین داریم:

$$\Psi_n = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \dots (3)(1)}{n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)} = \frac{(2n-1)!!}{n!} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!n!}$$

□

که $n!! = n(n-2)(n-4) \dots (3)(1)$ است.

۵.۱ معادلات انتگرال

با پیشرفت و تکامل ریاضیات فوریه در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت، انتگرال فوریه در این سال ها باعث شد که مبدا معادلات انتگرال را تئوری انتگرال فوریه قرار دهند. در سال ۱۸۳۲ لیوویل^۹ رده خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و گامی مهم در توسعه معادلات انتگرال برداشته شد که چگونگی حل معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. بویس-ریموند^{۱۰} در سال ۱۸۸۸ اولین کسی بود معادلاتی که تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می شود را معادلات انتگرال نامید. البته لاپلاس معادله انتگرال $y(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$ را مورد بررسی قرار داد و برای اولین بار نظریه معادلات انتگرال را مطرح نمود. یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد، یک نمونه از یک معادلات انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهول است که باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t) u(t) dt \quad (۱۸.۱)$$

و در حالت کلی تر

$$\phi(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t) u(t) dt.$$

که $f(x)$ تابع معلوم، $K(x, t)$ هسته معادله انتگرال و $u(x)$ تابع مجهول و $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ حدود انتگرال و λ ضریب معلوم است و اگر $\phi(x) \neq 0$ به معادله (۱۸.۱) می رسیم. هدف تعیین تابع مجهول $u(x)$ است به طوری که در رابطه (۱۸.۱) صدق کند. برای رسیدن به

^۹ Liouville

^{۱۰} Bois-Reymond

این هدف روش‌های مختلفی به کار برده شده که در ادامه به بعضی از این روش‌ها اشاره می‌شود. با توجه به توسعه‌ی معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن یک تقسیم بندی جامع بر آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. به خصوص این که از یک طرف در مسائل مختلف فیزیک و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند و از طرفی دیگر راه‌هایی که جهت حل انواع مختلف این نوع معادلات ارائه شده است متفاوتند. معادلات انتگرال به صورت زیر دسته بندی می‌شوند:

۱. معادلات انتگرال ولترا

۲. معادلات انتگرال فردهلم

۳. معادلات انتگرال – دیفرانسیل

۴. معادلات انتگرال منفرد

معادلات انتگرال ولترا

در این نوع معادلات یکی از حدود انتگرال گیری به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود، که به فرم زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

(i). در صورتی که $\phi(x) = 0$ به معادلات انتگرال ولترا نوع اول تبدیل می‌شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0$$

(ii). اگر $\phi(x) \neq 0$ معادلات انتگرال ولترا نوع دوم نامیده می‌شود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

(iii). اگر $f(x) = 0$ معادلات انتگرال ولترا همگن نامیده می‌شود:

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

(iv). در صورتی که مشتقات $u(x)$ در طرف چپ ظاهر شود به یک معادله انتگرال – دیفرانسیل ولترا تبدیل می‌شود.

معادلات انتگرال فردهلم

در این نوع معادلات انتگرال حدود انتگرال گیری مقادیری ثابت هستند. شکل استاندارد این نوع انتگرال به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

حالت‌های خاص:

(i). اگر $\phi(x) = 0$

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0$$

به معادلات انتگرال فردهلم نوع اول تبدیل می‌شود.

(ii). اگر $\phi(x) = 1$ به معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود که به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

(iii). اگر $f(x) = 0$ به معادلات انتگرال فردهلم همگن تبدیل می‌شود

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

معادلات انتگرال چند بعدی

در این نوع معادلات تابع مجهول به چند متغیر وابسته است. فرض کنیم $D = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ یک مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}^d$ است، $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ و $d > 1$ ، نماد $x = (x_1, \dots, x_d)$ ، $\forall x, t \in D$ ، $x = (x_1, \dots, x_d)$ را در نظر بگیرید، برای هر $x, t \in D$ گویند $x < t$ اگر $x_i < t_i$ ، $i = 1, 2, \dots, d$ باشد. معادله فردهلم d -بعدی خطی کلی نوع اول به صورت زیر

$$f(x) = \lambda \int_D k(x, t)u(t)dt, \quad x \in D$$

است که در آن λ یک پارامتر عددی است و توابع $k(x, t)$ و $f(x)$ داده شده و تابع $u(t)$ مجهول است. چنین معادلاتی معمولاً به عنوان معادلات بدووضع طبقه بندی می‌شوند زیرا تابع جواب u نسبت به تغییرات کوچک در تابع داده‌های f حساسیت دارند. معادله فردهلم d -بعدی خطی نوع دوم به فرم زیر است:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_D k(x, t)u(t)dt, \quad x \in D$$

مشابه با حالت یک بعدی، اگر برای $x < t$ داشته باشیم $k(x, t) = 0$ آن گاه معادلات بالا به معادلات ولترای d - بعدی خطی نوع اول و دوم تبدیل می‌شود و می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt, \quad x \in D$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل

به معادلات انتگرالی که تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر مشتقات آن ظاهر شود، معادلات انتگرال-دیفرانسیل می‌گویند. البته باید توجه کرد که در این نوع معادلات تابع مجهول $u(x)$ و حداقل یکی از مشتق‌های آن یعنی $u'(x)$, $u''(x)$ و غیره در خارج انتگرال و همچنین در زیر علامت انتگرال قرار دارند. معادلات انتگرال-دیفرانسیل در تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال با استفاده از قاعده لایب نیتز ظاهر می‌شود. دسته بندی معادلات انتگرال-دیفرانسیل مانند دسته بندی معادلات انتگرال می‌باشد. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از انواع معادلات انتگرال-دیفرانسیل می‌باشد:

$$u'(x) = x - \int_0^1 e^{x-t} u(t) dt \quad u(0) = 0 \quad (19.1)$$

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = -1 \quad (20.1)$$

معادله (۱۹.۱) معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی فردهلم و معادله (۲۰.۱) معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی ولترا است که در این نوع معادلات توابع مشتق و انتگرال با هم در یک معادله حضور دارند.

فصل ۲

مقایسه روش‌های چندجمله‌ای چبیشف و لژاندر

۱.۲ مقدمه

در این فصل چندجمله‌ای چبیشف و لژاندر را برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم استفاده می‌کنیم. به این ترتیب روش حل عددی معادلات انتگرال را با این دو روش بررسی می‌کنیم. برای نشان دادن کارایی روش‌های مورد نظر، مثال‌های عددی ارائه می‌دهیم. نگارش این فصل براساس مقاله [۵۶] است. معادله انتگرال دوبعدی ولترا-فردهلم زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_{-1}^t \int_{-1}^1 (x - y)^{-\alpha} u(y, z) dy dz, \quad (x, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad (1.2)$$

به‌طوری‌که $\alpha \in [0, 1)$ است. تابع $k(x, y) = (x - y)^{-\alpha}$ ، هسته از نوع مسئله آبل می‌باشد.

۲.۲ روش چندجمله‌ای چبیشف

در این بخش برخی ویژگی‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع اول را که برای محاسبه عددی معادلات انتگرال دو بعدی ولترا-فردهلم استفاده می‌شود معرفی می‌کنیم. این تقریب براساس

تقریب تابع مجهول $u(x, t)$ به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} T_i(x) T_j(t), \quad x, t \in [0, 1] \quad (2.2)$$

به طوری که ضرایبی مجهول هستند که محاسبه می‌شوند. $T_j(t)$ و $T_i(x)$ ها چندجمله‌ای چبیشف نوع اول هستند.

با جای گذاری معادله (۲.۲) در (۱.۲) داریم:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} T_i(x) T_j(t) - \int_{-1}^t \int_{-1}^1 (x-y)^{-\alpha} \times \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} T_i(y) T_j(z) dy dz = f(x, t). \quad (3.2)$$

برای نقاط هم محلی چبیشف-گوس-لوباتو داریم

$$x_r = \cos\left(\frac{r\pi}{N}\right), \quad t_s = \cos\left(\frac{s\pi}{N}\right) \quad r, s = 0, 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

معادله (۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} \left[T_i(x_r) T_j(t_s) - \int_{-1}^{t_s} \int_{-1}^1 (x_r - y)^{-\alpha} T_i(y) T_j(z) dy dz \right] = f(x_r, t_s). \quad (5.2)$$

دستگاه معادلات جبری خطی به دست آمده شامل $(N+1)^2$ معادله با $(N+1)^2$ مجهول است. با حل این دستگاه مقدار مجهول a_{ij} را به دست می‌آوریم و در معادله (۲.۲) جای گذاری می‌کنیم.

۳.۲ روش چندجمله‌ای لژاندر

در این بخش برخی ویژگی‌های چندجمله‌ای لژاندر را که برای محاسبه عددی معادلات انتگرال دو بعدی استفاده می‌کنیم معرفی می‌کنیم. این روش بر اساس تقریب تابع مجهول $u(x, t)$ به صورت زیر است [۱۶-۱۹]:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} P_i(x) P_j(t) \quad (6.2)$$

ضرایبی مجهول هستند که تعیین می‌شوند. به طوری که $P_j(t)$ ، $P_i(x)$ ها چندجمله‌ای لژاندر هستند.

با جای گذاری معادله (۶.۲) در (۱.۲) به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_{ij} P_i(x) P_j(t) - \int_{-1}^t \int_{-1}^1 (x-y)^{-\alpha} \times \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_{ij} P_i(y) P_j(z) dy dz = f(x, t) \quad (7.2)$$

قرار می‌دهیم $x = x_r, t = t_s, r, s = 0, 1, \dots, N$ داریم:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_{ij} \left[P_i(x_r) P_j(t_s) - \int_{-1}^{t_s} \int_{-1}^1 (x_r - y)^{-\alpha} P_i(y) P_j(z) dy dz \right] = f(x_r, t_s). \quad (8.2)$$

ضرایب مجهول c_{ij} توسط چندین نقطه هم‌محلی انتخاب شده $[۲۰]$ در فاصله $[-۱, ۱]$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$x_r = -۱ + \frac{۲r}{N}, \quad t_s = -۱ + \frac{۲s}{N} \quad r, s = ۰, ۱, \dots, N, \quad (۹.۲)$$

دستگاه معادلات جبری خطی به دست آمده شامل $(N+۱)^۲$ معادله با $(N+۱)^۲$ مجهول است. با حل این دستگاه مقدار مجهول c_{ij} را به دست می‌آوریم و در معادله (۶.۲) جای گذاری می‌کنیم.

۴.۲ نتایج عددی

در این بخش برخی از نمونه‌های عددی معادلات انتگرال دوبعدی ولترا-فردهلم ارائه شده است. نتایج را با استفاده از Maple 16 به دست آورده‌ایم.

مثال ۱.۴.۲. معادله انتگرال ولترا-فردهلم زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_{-۱}^t \int_{-۱}^1 (x-y)^{-\frac{1}{2}} u(y, z) dy dz \quad (۱۰.۲)$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} f(x, t) = & x^2 + t^2 - \frac{1}{3} (2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-1}) (t^3 + 1) \\ & + \sqrt{x+1} (t+1) \left(-\frac{16}{15} x^2 + \frac{8}{15} x - \frac{2}{5} \right) \\ & + \sqrt{x-1} (t+1) \left(\frac{16}{15} x^2 + \frac{8}{15} x + \frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$

جواب دقیق معادله $u(x, t) = x^2 + t^2$ است.

۱. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول را برای معادله (۱۰.۲) اعمال می‌کنیم. با استفاده از نقاط هم‌محلی (۴.۲) برای $N = ۲$ بنابراین داریم:

$$x_0 = ۱, \quad x_1 = ۰, \quad x_2 = -۱, \quad t_0 = ۱, \quad t_1 = ۰, \quad t_2 = -۱.$$

برای $N = ۲$ داریم:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} T_i(x) T_j(t) \quad (۱۱.۲)$$

با جای‌گذاری معادله (۱۱.۲) در (۱۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} \left[T_i(x_r) T_j(t_s) - \int_{-1}^{t_s} \int_{-1}^1 (x_r - y)^{-\frac{1}{3}} T_i(y) T_j(z) dy dz \right] \\ &= x_r^2 + t_s^2 - \frac{1}{3} (2\sqrt{x_r+1} - 2\sqrt{x_r-1})(t_s^3 + 1) \\ & - \frac{16}{15} \sqrt{x_r+1} x_r^2 (t_s + 1) + \frac{8}{15} \sqrt{x_r+1} x_r (t_s + 1) \\ & - \frac{2}{5} \sqrt{x_r+1} (t_s + 1) + \frac{16}{15} \sqrt{x_r-1} x_r^2 (t_s + 1) \\ & + \frac{8}{15} \sqrt{x_r-1} x_r (t_s + 1) + \frac{2}{5} \sqrt{x_r-1} (t_s + 1). \end{aligned} \quad (12.2)$$

با اعمال نقاط هم‌محلی در معادله (۱۲.۲) به دستگاه معادلات خطی جبری با ۹ معادله و ۹ مجهول می‌رسیم. با حل این دستگاه ضرایب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{00} = 1, a_{01} = 0, a_{02} = \frac{1}{3}, a_{10} = 0, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{20} = \frac{1}{3}, a_{21} = 0, a_{22} = 0.$$

با جای‌گذاری این ضرایب در معادله (۱۱.۲) جواب تقریبی به‌دست می‌آید.

۲. روش چندجمله‌ای لژاندر را روی معادله (۱۰.۲) اعمال می‌کنیم با استفاده از نقاط هم‌محلی (۹.۲) برای $N = 2$ داریم:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad t_0 = -1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1.$$

همچنین برای $N = 2$ داریم:

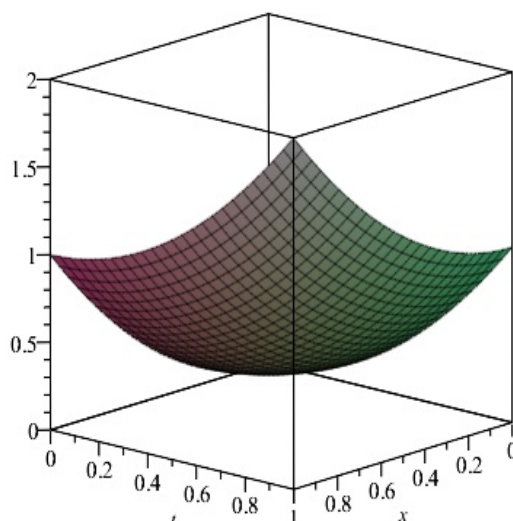
$$u(x, t) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c_{ij} P_i(x) P_j(t). \quad (13.2)$$

با جای‌گذاری معادله (۱۳.۲) در (۱۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c_{ij} \left[P_i(x_r) P_j(t_s) - \int_{-1}^{t_s} \int_{-1}^1 (x_r - y)^{-\frac{1}{3}} P_i(y) P_j(z) dy dz \right] \\ &= x_r^2 + t_s^2 - \frac{1}{3} (2\sqrt{x_r+1} - 2\sqrt{x_r-1})(t_s^3 + 1) \\ & - \frac{16}{15} \sqrt{x_r+1} x_r^2 (t_s + 1) + \frac{8}{15} \sqrt{x_r+1} x_r (t_s + 1) \\ & - \frac{2}{5} \sqrt{x_r+1} (t_s + 1) + \frac{16}{15} \sqrt{x_r-1} x_r^2 (t_s + 1) \\ & + \frac{8}{15} \sqrt{x_r-1} x_r (t_s + 1) + \frac{2}{5} \sqrt{x_r-1} (t_s + 1) \end{aligned} \quad (14.2)$$

با اعمال نقاط هم‌محلی در معادله (۱۴.۲) به دستگاه معادلات خطی جبری با ۹ معادله و ۹ مجهول می‌رسیم. با حل این دستگاه ضرایب را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم:

$$c_{00} = \frac{2}{3}, c_{01} = 0, c_{02} = \frac{2}{3}, c_{10} = 0, c_{11} = 0, c_{12} = 0, c_{20} = \frac{2}{3}, c_{21} = 0, c_{22} = 0.$$



شکل ۱.۲: حل تقریبی مثال ۱.۴.۲ به روش چندجمله‌ای لژاندر و چبیشف

با جای‌گذاری c_{ij} , $i, j = 0, \dots, 2$ در معادله (۱۳.۲) جواب تقریبی به‌دست می‌آید که می‌توان با جواب دقیق مقایسه نمود (شکل ۱.۲).

مثال ۲.۴.۲. معادله انتگرال ولترا-فردهلم زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_{-1}^t \int_{-1}^1 (x-y)^{-\frac{1}{2}} u(y, z) dy dz \quad (15.2)$$

به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} f(x, t) = & x \cos(t) + 1/121961313 \sqrt{x-1}x \\ & - 1/121961313 \sqrt{x+1}x + 0/5669806566 \sqrt{x-1} \\ & + 0/5669806566 \sqrt{x+1} + 0/6666666667 \sqrt{x+1} \sin(t) \\ & - 1/3333333333 \sqrt{x+1} \sin(t)x + 0/6666666667 \sqrt{x-1} \sin(t) \\ & + 1/3333333333 \sqrt{x-1} \sin(t)x \end{aligned}$$

$u(x, t) = x \cos(t)$ جواب دقیق مسئله است.

۱. با اعمال روش چندجمله‌ای چبیشف نوع اول برای $N = 3$ در معادله (۴.۲) نقاط هم‌محلی به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-1}{3}, \quad x_3 = -1 \\ t_0 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{-1}{3}, \quad t_3 = -1 \end{aligned}$$

برای حل تقریبی معادله، داریم:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} T_i(x) T_j(t) \quad (16.2)$$

با جای‌گذاری معادله (۱۶.۲) در معادله (۱۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \left[T_i(x_r) T_j(t_s) - \int_{-1}^{t_s} \int_{-1}^1 (x_r - y)^{-\frac{1}{2}} T_i(y) T_j(z) dy dz \right] \\ &= x_r \cos(t_s) + 1/121961313 \sqrt{x_r - 1} x_r \\ &- 1/121961313 \sqrt{x_r + 1} x_r + 0/5669806566 \sqrt{x_r - 1} \\ &+ 0/5669806566 \sqrt{x_r + 1} + 0/6666666667 \sqrt{x_r + 1} \sin(t_s) \\ &- 1/3222222222 \sqrt{x_r + 1} \sin(t_s) x_r + 0/6666666667 \sqrt{x_r - 1} \sin(t_s) \\ &+ 1/3222222222 \sqrt{x_r - 1} \sin(t_s) x_r \end{aligned} \quad (17.2)$$

با جای‌گذاری نقاط هم‌محلی در معادله (۱۷.۲) یک دستگاه خطی جبری با ۱۶ معادله و ۱۶ مجهول به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه ضرایب به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} a_{00} &= -0/005115186960 - 0/003315087222I, \\ a_{01} &= -0/01014046823 - 0/004913638644I, \\ a_{02} &= -0/007493996125 + 0/001295682688I, \\ a_{03} &= -0/002468714763 + 0/002894234195I, \\ a_{10} &= 0/7674547701 - 0/004239671087I, \\ a_{11} &= 0/003116499048 - 0/007908062023I, \\ a_{12} &= -0/2260895630 - 0/006862161596I, \\ a_{13} &= -0/002053597677 - 0/003193770877I, \\ a_{20} &= 0/001744260914 + 0/00007584447555I, \\ a_{21} &= 0/002826200785 + 0/0007396828277I, \\ a_{22} &= 0/003268052279 - 0/0006362969686I, \\ a_{23} &= 0/002186112580 - 0/0006175348690I, \\ a_{30} &= 0/0002315661958 + 0/0002299389264I, \\ a_{31} &= 0/0002307954973 - 0/00008013820224I, \\ a_{32} &= 0/00006333007471 + 0/0001616749102I, \\ a_{33} &= 0/00006410081618 + 0/0004717519959I, \quad I^2 = -1 \end{aligned}$$

۲. روش چندجمله‌ای لژاندر را برای معادله (۱۵.۲) برای $N = 3$ اعمال می‌کنیم. با استفاده

از نقاط هم‌محلی (۹.۲) داریم:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, & x_1 &= \frac{-1}{3}, & x_2 &= \frac{1}{3}, & x_3 &= 1 \\ t_0 &= -1, & t_1 &= \frac{-1}{3}, & t_2 &= \frac{1}{3}, & t_3 &= 1, \end{aligned}$$

برای $N = 3$ داریم:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} P_i(x) P_j(t). \quad (18.2)$$

با جای‌گذاری معادله (۱۸.۲) در معادله (۱۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} \left[P_i(x_r) P_j(t_s) - \int_{-1}^{t_s} \int_{-1}^1 (x_r - y)^{-\frac{1}{2}} P_i(y) P_j(z) dy dz \right] \\ &= x_r \cos(t_s) + 1/121961313 \sqrt{x_r - 1} x_r \\ &- 1/121961313 \sqrt{x_r + 1} x_r + 0/5669806566 \sqrt{x_r - 1} \\ &+ 0/5669806566 \sqrt{x_r + 1} + 0/6666666667 \sqrt{x_r + 1} \sin(t_s) \\ &- 1/3333333333 \sqrt{x_r + 1} \sin(t_s) x_r + 0/6666666667 \sqrt{x_r - 1} \sin(t_s) \\ &+ 1/3333333333 \sqrt{x_r - 1} \sin(t_s) x_r \end{aligned} \quad (19.2)$$

با جای‌گذاری نقاط هم‌محلی در معادله (۱۹.۲) یک دستگاه جبری خطی با ۱۶ معادله و ۱۶ مجهول به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} c_{00} &= -0/00281313553 - 0/002684092484I, \\ c_{01} &= -0/01058670912 - 0/004782573130I, \\ c_{02} &= -0/01154928836 + 0/004425461190I, \\ c_{03} &= -0/003775712757 + 0/006523941876I, \\ c_{10} &= 0/8458663209 - 0/005229864755I, \\ c_{11} &= 0/002188219050 - 0/01159436111I, \\ c_{12} &= -0/3086873870 - 0/01066453726I, \\ c_{13} &= -0/005311590864 - 0/004300041110I, \\ c_{20} &= 0/005623096597 + 0/001801522285I, \\ c_{21} &= 0/009175015551 + 0/0009310276952I, \\ c_{22} &= 0/007168716114 - 0/003667880490I, \\ c_{23} &= 0/003616797387 - 0/002797385679I, \end{aligned}$$

$$c_{30} = 0.001814340548 + 0.003961144437I,$$

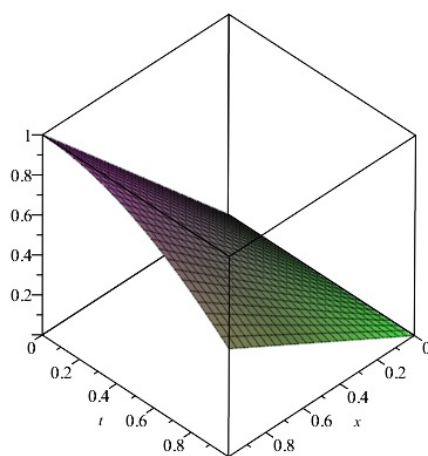
$$c_{31} = 0.003567723190 + 0.005291321020I,$$

$$c_{32} = 0.002980867650 + 0.002155362282I,$$

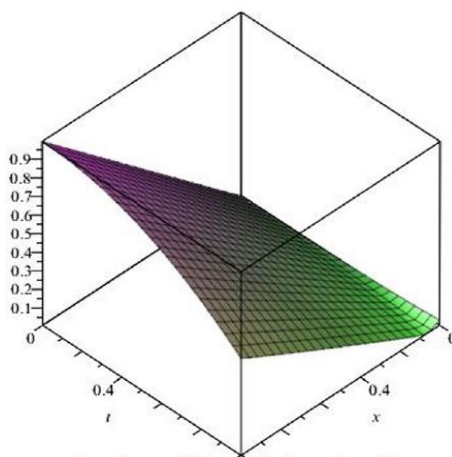
$$c_{33} = 0.001227485055 + 0.0008251856413I.$$

با جای‌گذاری این ثابت‌ها در معادله (۱۸.۲) جواب تقریبی را به‌دست می‌آوریم.

در مثال ۲.۴.۲ خطای مطلق محاسبه شده و در جدول ۱.۲ و شکل ۴.۲ و ۶.۲ نشان داده شده است. در مثال ۲.۴.۲ جواب دقیق در شکل ۲.۲، جواب تقریبی در شکل ۳.۲ و ۵.۲ توسط روش‌های چندجمله‌ای چبیشف و لژاندر و خطای مطلق در شکل ۴.۲ و ۶.۲ نشان داده شده است.



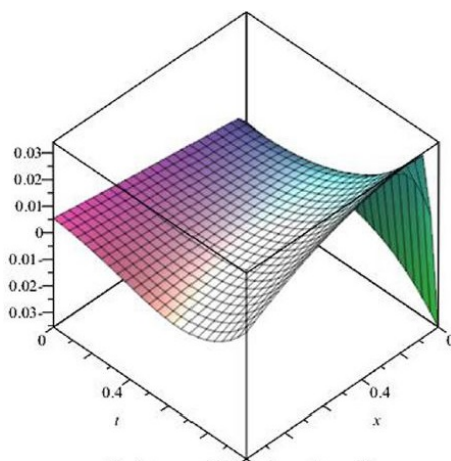
شکل ۲.۲: حل دقیق مثال ۲.۴.۲



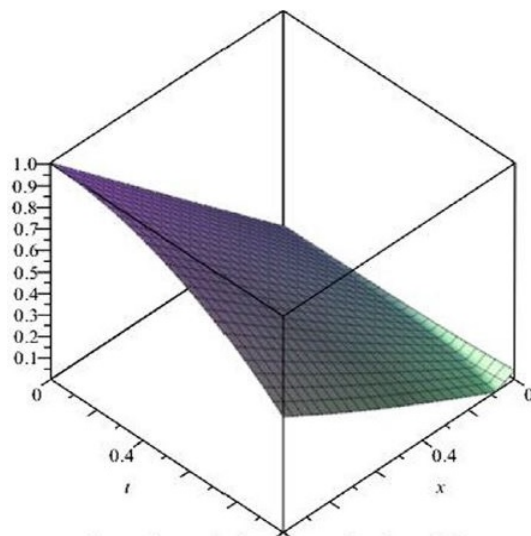
شکل ۳.۲: حل تقریبی مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای چبیشف

(x, t)	خطای مطلق چبیشف	خطای مطلق لژاندر
$(0, 0)$	$7/162154767 \times 10^{-3}$	$6/98978 \times 10^{-3}$
$(0, 0/2)$	$9/493997174 \times 10^{-3}$	$9/6688 \times 10^{-3}$
$(0/2, 0/4)$	$3/932802 \times 10^{-4}$	$3/671422 \times 10^{-3}$
$(0/4, 0/4)$	$4/662206 \times 10^{-4}$	$1/1677455 \times 10^{-3}$
$(0/6, 0/2)$	$1/3244 \times 10^{-4}$	$3/2323171 \times 10^{-3}$
$(0/8, 0/6)$	$7/215766 \times 10^{-4}$	$5/9599 \times 10^{-3}$
$(1/0, 0/4)$	$4/098245 \times 10^{-4}$	$1/3666 \times 10^{-2}$
$(1/0, 0/8)$	$9/921778 \times 10^{-4}$	$1/4414 \times 10^{-2}$

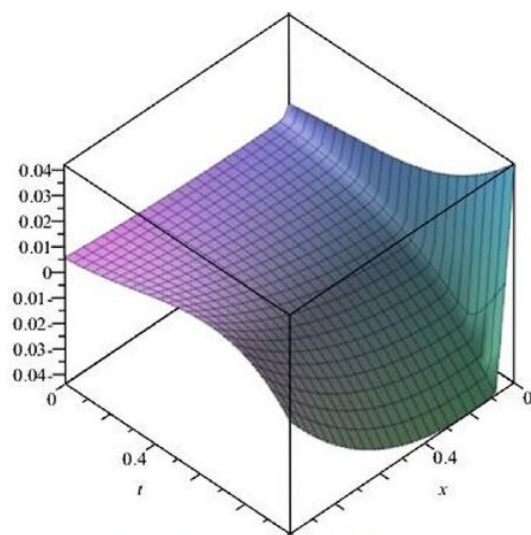
جدول ۱.۲: نتایج عددی مثال ۲.۴.۲ توسط روش چندجمله‌ای چبیشف و لژاندر در $N = 3$



شکل ۴.۲: خطای مطلق مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای چبیشف، با توجه به نتایج می‌توان دید که روش چندجمله‌ای چبیشف بهتر از روش چندجمله‌ای لژاندر است. در جدول ۱.۲ نقاط $(0/2, 0/4)$ ، $(0/4, 0/4)$ و $(0/6, 0/2)$ کارایی روش را نشان می‌دهد.



شکل ۵.۲: حل تقریبی مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای لژاندر



شکل ۶.۲: خطای مطلق مثال ۲.۴.۲ به روش چندجمله‌ای لژاندر

فصل ۳

روش شبه‌طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال

در این فصل هدف، یافتن تقریب مناسب برای جواب معادلات انتگرال از نظر علمی و نظری است. در ادامه، روشی جدید برای به‌دست آوردن ماتریس انتگرال‌گیری با استفاده از بسط توانی چندجمله‌ای لژاندر $P(x)$ معرفی می‌گردد. این روش تقریب‌هایی برای مشتق‌های مراتب بالاتر تابع از طریق انتگرال‌گیری‌های متوالی از چندجمله‌ای‌های لژاندر برای مشتقات بالاتر ایجاد می‌کند. این روش برای حل معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل به‌کار می‌رود. نگارش این فصل براساس مقاله [۳۹] است.

۱.۳ مقدمه

ال جندی^۱ [۲۳] تقریب چبیشف را برای محاسبه انتگرال به‌صورت زیر ارائه کرد:

$$\int_{-1}^x f(t)dt, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۱.۳)$$

عناصر ماتریس مربعی B به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$\left[\int_{-1}^x f(t)dt \right] = B[f] \quad (۲.۳)$$

^۱El-gendi

که در آن $[f]$ ماتریس ستونی از مقادیر $f(x)$ در نقاط چبیشف-گاوس-لوباتو (CGL) به صورت $x_i = -\cos \frac{i\pi}{N}$ است. هاتزیاورمدیس^۲ و کو^۳ [۲۵] یک روش برای تقریب انتگرال (۱.۳) که جبر ماتریسی نام دارد را برای تعریف ماتریس مشابه (۲.۳) که براساس بسط چبیشف است معرفی کرد.

قضیه زیر محاسبه m -آمین انتگرال چندجمله‌ای لژاندر را ارائه می‌دهد، بنابراین نقش مهمی را در این فصل ایفا می‌کند.

قضیه ۱.۱.۳. m -آمین انتگرال ($m \geq ۲$) از چندجمله‌ای لژاندر (۱۰.۱) به ترتیب از نظر چندجمله‌ای‌های لژاندر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} (I_m P_n)(x) &= \int_{-1}^x \int_{-1}^{t_{m-1}} \cdots \int_{-1}^{t_1} P_n(t_0) dt_0 dt_1 \cdots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)} \left\{ \frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!} [x^{n-2k+m} - (-1)^{n-2k+m}] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{n-2k+m-r} (n-2k)! x^s}{(r-s)! s! (n-2k+m-r)!} \right\}, \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} (I_1 P_n)(x) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^{(n)} [x^{n-2k+1} - (-1)^{n-2k+1}], \\ a_k^{(n)} &= \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n (n-k)! (n-2k+1)! k!} \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

برهان. به روش استقرای ریاضی برای $m=1$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x P_n(t) dt &= \int_{-1}^x \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)} t^{n-2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)} \frac{1}{n-2k+1} (t^{n-2k+1})_{-1}^x \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^{(n)} \frac{1}{n-2k+1} [x^{n-2k+1} - (-1)^{n-2k+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^{(n)} [x^{n-2k+1} - (-1)^{n-2k+1}] \end{aligned}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\int_{-1}^x P_n(t) dt = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^{(n)} [x^{n-2k+1} - (-1)^{n-2k+1}]$$

^۲ Hatzivramidi

^۳ ku

برای $m = ۲$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-۱}^x \int_{-۱}^{t_۱} P_n(t) dt dt_۱ &= \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \int_{-۱}^x \int_{-۱}^{t_۱} t^{n-۲k} dt dt_۱ \\ &= \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \frac{۱}{n-۲k+۱} \int_{-۱}^x (t^{n-۲k+۱} - (-۱)^{n-۲k+۱}) dt_۱ \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-۱}^x [t_۱^{n-۲k+۱} - (-۱)^{n-۲k+۱}] dt_۱ \\ &= \frac{۱}{n-۲k+۲} t_۱^{n-۲k+۲} \Big|_{-۱}^x - t_۱ (-۱)^{n-۲k+۱} \Big|_{-۱}^x \\ &= \frac{۱}{n-۲k+۲} (x^{n-۲k+۲} - (-۱)^{n-۲k+۲}) - x(-۱)^{n-۲k+۱} - (-۱)^{n-۲k+۱} \end{aligned}$$

با جای‌گذاری در معادله انتگرال داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-۱}^x \int_{-۱}^{t_۱} P_n(t) dt dt_۱ &= \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \frac{(n-۲k)!}{(n-۲k+۲)!} [x^{n-۲k+۲} - (-۱)^{n-۲k+۲}] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \frac{(n-۲k)!}{(n-۲k+۱)!} (-۱)^{n-۲k+۱} (x+۱) \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم قضیه برای $m = j$ برقرار است، حال برای $m = j+۱$ داریم:

$$\int_{-۱}^x \int_{-۱}^{t_{m-۱}} \dots \int_{-۱}^{t_۱} P_n(t_0) dt_0 dt_۱ \dots dt_{m-۱} = \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \int_{-۱}^x \int_{-۱}^{t_{m-۱}} \dots \int_{-۱}^{t_۱} t^{n-۲k} dt dt_۱ \dots dt_{m-۱}$$

انتگرال $t_۱$ را می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &= \int_{-۱}^x \left\{ \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \int_{-۱}^x \dots \int_{-۱}^x t^{n-۲k} dt \dots dt \right\} dt \\ &= \int_{-۱}^x \left\{ \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \left\{ \frac{(n-۲k)!}{(n-۲k+j)!} [x^{n-۲k+j} - (-۱)^{n-۲k+j}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{r=۱}^{j-۱} \frac{(n-۲k)!}{(n-۲k+j-r)!} (-۱)^{n-۲k+j-r} \eta_r \right\} \right\} dt \\ &= \sum_{k=0}^{[n/۲]} c_k^{(n)} \left\{ \frac{(n-۲k)!}{(n-۲k+j+۱)!} [x^{n-۲k+j+۱} - (-۱)^{n-۲k+j+۱}] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=۱}^j \frac{(n-۲k)!}{(n-۲k+j-r+۱)!} (-۱)^{n-۲k+j-r+۱} \eta_r \right\}, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که:

$$\eta_r = \int_{-۱}^x \int_{-۱}^{t_{r-۱}} \dots \int_{-۱}^{t_۲} \int_{-۱}^{t_۱} dt_0 dt_۱ \dots dt_{r-۱} = \sum_{s=0}^r \frac{x^s}{(r-s)!s!}$$

□

بنابراین، این قضیه برای هر عدد صحیح مثبت $m \geq ۲$ برقرار است.

۲.۳ تقریب شبه‌طیفی لژاندر

در این بخش تقریب لژاندر را برای هر تابع $f(x) \in C^\infty[-1, 1]$ ارائه می‌کنیم. برای این منظور این سه مجموعه از گره‌ها را در نظر بگیرید:

۱. مجموعه نقاط متساوی الفاصله

$$S_1 = \left\{ x_i = -1 + \frac{2i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N \right\}$$

۲. مجموعه نقاط چبیشف-گوس-لوباتو

$$S_2 = \left\{ x_i = \cos \frac{i\pi}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N \right\}$$

۳. مجموعه نقاط لژاندر-گوس-لوباتو

$$S_3 = \left\{ x_i : (1 - x_i^2)P'_N(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \right\}$$

که N درجه تقریب است.

قضیه ۱.۲.۳. اگر $f_N(x)$ تقریبی توسط بسط قطع شده لژاندر برای تابع $f(x)$ باشد، یعنی:

$$(\mathcal{P}_N f)(x) = f_N(x) = \sum_{j=0}^N a_j P_j(x) \quad (5.3)$$

سپس:

$$a_j \approx \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 P_j(x) f(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (6.3)$$

برهان. اگر $f(x)$ روی بازه $[-1, 1]$ انتگرال پذیر باشد

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x)$$

با ضرب $P_i(x)$ در طرفین داریم:

$$\langle f, P_i \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \langle P_j, P_i \rangle$$

باتوجه به متعامد بودن چندجمله‌ای‌های لژاندر (۱۱.۱) داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_j(x) dx = \frac{2a_j}{2j+1}$$

بنابراین:

$$a_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_j(x) dx$$

□

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید $f_N(x)$ تقریب تابع $f(x)$ توسط چندجمله‌ای لژاندر باشد. در این صورت سه حالت زیر را داریم:

حالت اول. اگر $x \in S_1$ ، سپس

$$a_j \approx \frac{j+1}{N} \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k) \quad (7.3)$$

حالت دوم. اگر $x \in S_2$ ، سپس

آ.

$$(8.3)$$

$$a_j \approx \frac{j+1}{j} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N^2} f(x_0) + \frac{(-1)^j}{N^2} f(x_N) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{NC_k} \\ \times \left\{ 1 - \sum_{l=1}^{[N/2]} \frac{2}{C_{2l}(4l^2-1)} \cos \frac{2lk\pi}{N} \right\} P_j(x_k) f(x_k), \quad N \text{ فرد} \\ \\ \frac{1}{N^2-1} f(x_0) + \frac{(-1)^j}{N^2-1} f(x_N) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{NC_k} \\ \times \left\{ 1 - \sum_{l=1}^{[N/2]} \frac{2}{C_{2l}(4l^2-1)} \cos \frac{2lk\pi}{N} \right\} P_j(x_k) f(x_k), \quad N \text{ زوج} \end{array} \right.$$

ب.

$$a_j \approx -\frac{\pi(j+1)}{2N} \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (9.3)$$

حالت سوم. اگر $x \in S_2$ ، سپس

$$a_j \approx \frac{j+1}{N(N-1)} \sum_{k=0}^N \frac{P_j(x_k) f(x_N)}{[P_{N-1}(x_k)]^2}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (10.3)$$

توجه کنید که علامت $(//)$ روی علامت سری به معنی اولین و آخرین جمله ضریب $\frac{1}{j}$ دارد.

برهان. حالت اول: به کمک قاعده دوزنقه داریم:

$$\int_a^b g(x) dx = h \sum_{k=0}^N g(x_k) - \frac{(b-a)h^2}{12} g''(\xi), \quad h = \frac{b-a}{N}$$

با به کارگیری قاعده دوزنقه در معادله (۶.۳) در بازه $[-1, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{j+1}{j} \left(\frac{2}{N} \right) \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k) - \left(\frac{2}{12} \right) \left(\frac{2^2}{N^2} \right) H_j^{(2)}(\xi) \\ &= \frac{j+1}{N} \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k) - \frac{2}{3N^2} H_j^{(2)}(\xi), \quad j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (11.3)$$

$H_j^{(2)}(\xi)$ ، مشتق دوم تابع $H_j(x) = P_j(x)f(x)$ در بازه $[-1, 1]$ در $x = \xi$ است. پس

$$a_j \approx \frac{2j+1}{N} \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k)$$

حالت دوم:

آ. با اعمال معادله کلنشا-کرتیس^۴ [۲۲] برای ضرایب تعریف شده در معادله (۶.۳) داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^N w_i f(x_i)$$

تقریب‌های انتگرال‌گیری توسط وزن‌ها به صورت زیر هستند:

$$w_0 = w_N = \begin{cases} \frac{1}{N^2}, & N \text{ فرد} \\ \frac{1}{N^2-1}, & N \text{ زوج} \end{cases}$$

و

$$w_i = \frac{2}{NC_i} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{2}{C_{2k}(4k^2-1)} \cos \frac{2ki\pi}{N} \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

به طوری که $C_0 = C_N = 2$ و $C_s = 1$ و $s = 1, \dots, N-1$ سپس داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) = w_0 f(x_0) + w_N f(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} w_i f(x_i)$$

با جای‌گذاری مفروضات داریم:

$$a_j \approx \frac{2j+1}{2} \begin{cases} \frac{1}{N^2} f(x_0) + \frac{(-1)^j}{N^2} f(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2}{NC_i} \\ \times \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{2}{C_{2k}(k^2-1)} \cos \frac{2ik\pi}{N} \right\} P_j(x_i) f(x_i), & N \text{ فرد} \\ \frac{1}{N^2-1} f(x_0) + \frac{(-1)^j}{N^2-1} f(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2}{NC_i} \\ \times \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{2}{C_{2k}(4k^2-1)} \cos \frac{2ik\pi}{N} \right\} P_j(x_i) f(x_i), & N \text{ زوج} \end{cases}$$

ب. برای پیدا کردن ضرایب تعریف شده توسط معادله (۶.۳) از تغییر متغیر $x = \cos \theta$ استفاده می‌کنیم. سپس داریم:

$$a_j = -\frac{2j+1}{2} \int_0^\pi P_j(\theta) f(\theta) d\theta$$

^۴ Clenshaw-Curtis

با کمک قاعده دوزنقه مرکب با نقاط متساوی الفاصله $\theta_i = \frac{i\pi}{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$a_j = -\frac{\pi(2j+1)}{2N} \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k) + \frac{(2j+1)\pi^3}{24N^2} H_j^{(2)}(\xi) \quad (12.3)$$

لذا داریم:

$$a_j \approx -\frac{\pi(2j+1)}{2N} \sum_{k=0}^N P_j(x_k) f(x_k)$$

حالت سوم: قاعده گاوس لژاندر [۳۱، ۳۲] را برای محاسبه ضرایب تعریف شده در معادله (۶.۳) اعمال می‌کنیم. از تقریب انتگرال‌گیری در روش‌های شبه‌طیفی در $N+1$ نقطه لژاندر-گاوس-لوباتو به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) + \int_a^b \frac{f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+2)!} x^{2N+2} dx,$$

لذا داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^N w_k f(x_k) + \frac{f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+3)(2N+2)!},$$

به‌طوری‌که $\xi \in [-1, 1]$, $0 \leq k \leq N$ و وزن‌های انتگرال‌گیری هستند و تقریب انتگرال‌گیری براساس وزن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_k = w(x_k) = \begin{cases} \frac{2}{N(N-1)}, & k = 0, N \\ \frac{2}{N(N-1)[P_{N-1}(x_k)]^2}, & k = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

از آن‌جا که $P_{N-1}(1) = 1$, $P_{N-1}(-1) = (-1)^{N-1}$ داریم:

$$w_k = \frac{2}{N(N-1)[P_{N-1}(x_k)]^2}, \quad k = 0, \dots, N$$

و

$$a_j = \frac{2j+1}{2} \sum_{k=0}^N w_k P_j(x_k) f(x_k) + \frac{2H_j^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+3)(2N+2)!}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (13.3)$$

بنابراین با جای‌گذاری w_k داریم:

$$a_j \approx \frac{2j+1}{N(N-1)} \sum_{k=0}^N \frac{P_j(x_k) f(x_k)}{[P_{N-1}(x_k)]^2}, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

تقریب لژاندر تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{2j+1}{N} P_j(x_k) f(x_k) P_j(x), \quad x_k \in S_1 \quad (14.3)$$

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N -\frac{\pi(2j+1)}{2N} P_j(x_k) f(x_k) P_j(x), \quad x_k \in S_2 \quad (15.3)$$

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{2j+1}{N(N-1)} \frac{P_j(x_k) f(x_k)}{[P_{N-1}(x_k)]^2} P_j(x), \quad x_k \in S_3 \quad (16.3)$$

□

۳.۳ ماتریس انتگرال شبه‌طیفی لژاندر

انتگرال تابع $f(x)$ را توسط درونیابی تابع انتگرال با یک چندجمله‌ای $(\mathcal{P}_N f)(t)$ به ترتیب در سه نقطه S_1, S_2, S_3 تقریب می‌زنیم. در واقع، مقادیر انتگرال $\int_{-1}^x (\mathcal{P}_N f)(t) dt$ در $(N+1)$ نقطه می‌توانند به صورت یک ترکیب خطی از تابع داده شده بیان شود و از این رو می‌تواند به فرم ماتریسی زیر نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{x_0} (\mathcal{P}_N f)(t) dt \\ \vdots \\ \int_{-1}^{x_N} (\mathcal{P}_N f)(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00} & \dots & b_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N0} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \quad (17.3)$$

به طوری که $[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)]^T$ یک بردار متشکل از مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط هم‌محلی و $B = (b_{ij})$ و $i, j = 0, 1, \dots, N$ عناصر ماتریس شبه‌طیفی لژاندر است. معادله (۱۷.۳) را به طور ساده‌تر می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\int_{-1}^x (\mathcal{P}_N f)(t) dt \right] = B[(\mathcal{P}_N f)(t)] \quad (18.3)$$

قضیه ۱.۳.۳. اگر تابع $f(x)$ با چندجمله‌ای لژاندر در نقاط S_1, S_2, S_3 تقریب زده شود، در این صورت ماتریس $B = (b_{ij}^{(m)})$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\int_{-1}^x \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{j=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (19.3)$$

حالت اول: برای $m = 1$ داریم:

$$(i) \quad b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} \frac{\Upsilon j + 1}{N} e_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ x_i^{j-\Upsilon n+1} - (-1)^{j-\Upsilon n+1} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_1 \quad (20.3)$$

$$(ii) \quad b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} -\frac{\pi(\Upsilon j + 1)}{\Upsilon N} e_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ x_i^{j-\Upsilon n+1} - (-1)^{j-\Upsilon n+1} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_\Upsilon \quad (21.3)$$

$$(iii) \quad b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} \frac{\Upsilon j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^\Upsilon} e_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ x_i^{j-\Upsilon n+1} - (-1)^{j-\Upsilon n+1} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_\Upsilon \quad (22.3)$$

حالت دوم: برای $m \geq 2$ داریم:

$$(i) \quad b_{ij}^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} c_n^{(j)} \frac{\Upsilon j + 1}{N} P_j(x_k) \quad (23.3)$$

$$\times \left\{ \frac{(j - \Upsilon n)!}{(j - \Upsilon n + m)!} \left[x_i^{j-\Upsilon n+m} - (-1)^{j-\Upsilon n+m} \right] - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j-\Upsilon n+m-r} (j - \Upsilon n)! x_i^s}{(r-s)! s! (j - \Upsilon n + m - r)!} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_1 \quad 0 \leq i, k \leq N$$

$$(ii) \quad b_{ij}^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} -\frac{\pi(\Upsilon j + 1)}{\Upsilon N} c_n^{(j)} P_j(x_k) \quad (24.3)$$

$$\times \left\{ \frac{(j - \Upsilon n)!}{(j - \Upsilon n + m)!} \left[x_i^{j-\Upsilon n+m} - (-1)^{j-\Upsilon n+m} \right] - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j-\Upsilon n+m-r} (j - \Upsilon n)! x_i^s}{(r-s)! s! (j - \Upsilon n + m - r)!} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_\Upsilon \quad 0 \leq i, k \leq N$$

$$(iii) \quad b_{ij}^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} \frac{\Upsilon j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_k)]^\Upsilon} c_n^{(j)} P_j(x_k) \quad (25.3)$$

$$\times \left\{ \frac{(j - \Upsilon n)!}{(j - \Upsilon n + m)!} \left[x_i^{j-\Upsilon n+m} - (-1)^{j-\Upsilon n+m} \right] - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j-\Upsilon n+m-r} (j - \Upsilon n)! x_i^s}{(r-s)! s! (j - \Upsilon n + m - r)!} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_\Upsilon \quad 0 \leq i, k \leq N$$

برهان. حالت اول: برای $m = 1$:

(i) تقریب چندجمله‌ای لژاندر در نقطه S_1 را در نظر بگیرید سپس با توجه به معادله (۱۴.۳)

داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon_{j+1}}{N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon_{j+1}}{N} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx \right\} f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(1)} f(x_k),\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon_{j+1}}{N} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx, \quad i, k = 0, 1, \dots, N$$

با توجه به معادله (۴.۳) داریم:

$$b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} \frac{\Upsilon_{j+1}}{N} e_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ x_i^{j-\Upsilon n+1} - (-1)^{j-\Upsilon n+1} \right\}, \quad i, k = 0, 1, \dots, N.$$

(ii) تابع $f(x)$ را تقریبی از چندجمله‌ای لژاندر در نقطه S_Υ در نظر بگیریم. داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\Upsilon_{j+1})}{\Upsilon_N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\Upsilon_{j+1})}{\Upsilon_N} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx \right\} f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(1)} f(x_k),\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\Upsilon_{j+1})}{\Upsilon_N} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx, \quad i, k = 0, 1, \dots, N$$

از قضیه ۱.۱.۳ معادله (۴.۳) داریم:

$$b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} -\frac{\pi(\Upsilon_{j+1})}{\Upsilon_N} e_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ x_i^{j-\Upsilon n+1} - (-1)^{j-\Upsilon n+1} \right\}, \quad i, k = 0, 1, \dots, N.$$

(iii) تقریب چندجمله‌ای لژاندر در نقطه S_Υ را در نظر بگیریم. داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon_{j+1}}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^\Upsilon} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon_{j+1}}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^\Upsilon} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx \right\} f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(1)} f(x_k),\end{aligned}$$

به طوری که

$$b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^\Upsilon} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x) dx, \quad i, k = 0, 1, \dots, N.$$

با توجه به قضیه ۱.۱.۳ معادله (۴.۳) داریم:

$$b_{ij}^{(1)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} \frac{\Upsilon j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^\Upsilon} e_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ x_i^{j-\Upsilon n+1} - (-1)^{j-\Upsilon n+1} \right\},$$

$$i, k = 0, 1, \dots, N.$$

حالت دوم: برای $m \geq 2$:

(i) اگر $x \in S_1$ باشد، سپس با m -امین انتگرال از معادله (۱۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon j + 1}{N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{\Upsilon j + 1}{N} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \right\} f(x_k) \end{aligned}$$

سپس

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k),$$

به طوری که

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(m)} &= \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\Upsilon]} c_n^{(j)} \frac{\Upsilon j + 1}{N} P_j(x_k) \left\{ \frac{(j-\Upsilon n)!}{(j-\Upsilon n+m)!} \left[x_i^{j-\Upsilon n+m} - (-1)^{j-\Upsilon n+m} \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j-\Upsilon n+m-r} (j-\Upsilon n)! x_i^s}{(r-s)! s! (j-\Upsilon n+m-r)!} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_1 \quad 0 \leq i, k \leq N. \end{aligned}$$

(ii) اگر $x \in S_2$ باشد، سپس با m -امین انتگرال از معادله (۱۵.۳) فرم زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\Upsilon j + 1)}{\Upsilon N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\Upsilon j + 1)}{\Upsilon N} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \right\} f(x_k) \end{aligned}$$

سپس

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k)$$

به‌طوری‌که

$$b_{ij}^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\gamma]} -\frac{\pi(\gamma j + 1)}{\gamma N} c_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ \frac{(j - \gamma n)!}{(j - \gamma n + m)!} [x_i^{j-\gamma n+m} - (-1)^{j-\gamma n+m}] \right. \\ \left. - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j-\gamma n+m-r} (j - \gamma n)! x_i^s}{(r-s)! s! (j - \gamma n + m - r)!} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_\gamma \quad 0 \leq i, k \leq N.$$

(iii) اگر $x \in S_\gamma$ باشد، سپس با m -امین انتگرال از معادله (۱۶.۳) به فرم زیر می‌رسیم:

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\gamma j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_k)]^\gamma} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ = \sum_{k=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{\gamma j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_k)]^\gamma} P_j(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \right\} f(x_k)$$

سپس

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k),$$

به‌طوری‌که

$$b_{ij}^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\gamma]} \frac{\gamma j + 1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_k)]^\gamma} c_n^{(j)} P_j(x_k) \left\{ \frac{(j - \gamma n)!}{(j - \gamma n + m)!} [x_i^{j-\gamma n+m} - (-1)^{j-\gamma n+m}] \right. \\ \left. - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=0}^r \frac{(-1)^{j-\gamma n+m-r} (j - \gamma n)! x_i^s}{(r-s)! s! (j - \gamma n + m - r)!} \right\}, \quad x_i, x_k \in S_\gamma \quad 0 \leq i, k \leq N.$$

□

۴.۳ کران خطا

در این بخش، خطای کراندار تقریب تابع $f(x)$ محاسبه و همچنین خطای کراندار روش انتگرال لژاندر نیز تخمین زده می‌شود.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنیم $f(x) \in C^\infty[-1, 1]$ را به‌صورت زیر تقریب شود:

$$f(x) \cong (\mathcal{P}_N f)(x) = \sum_{k=0}^N a_k P_k(x), \quad (26.3)$$

دراین صورت $\xi \in [-1, 1]$ وجود دارد به طوری که:

$$R_N(x, \xi) = f(x) - (\mathcal{P}_N f)(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x) \quad (27.3)$$

و

$$\|R_N(x, \xi)\| \leq \max_{-1 \leq \xi \leq 1} \frac{1}{(N+1)!K_{N+1}} \|f^{(N+1)}(\xi)\|$$

که در آن

$$K_{N+1} = \frac{(2N+1)!}{2^N(N+1)!N!}.$$

است.

برهان. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(x) = f(x) - (\mathcal{P}_N f)(x) - \rho P_{N+1}(x).$$

ρ طوری انتخاب می‌کنیم که $g(x)$ یک ریشه در $\bar{x}$ دارد و $P_{N+1}(\bar{x}) \neq 0$ باشد. سپس داریم:

$$f(\bar{x}) - (\mathcal{P}_N f)(\bar{x}) - \rho P_{N+1}(\bar{x}) = 0,$$

بنابراین

$$\rho = \frac{f(\bar{x}) - (\mathcal{P}_N f)(\bar{x})}{P_{N+1}(\bar{x})}.$$

باتوجه به $f(x) \in C^\infty[-1, 1]$ ، $(\mathcal{P}_N f)(x) \in C^N[-1, 1]$ و $P_{N+1}(x) \in C^{N+1}[-1, 1]$ نتیجه می‌شود $g(x)$ بیش از $N+1$ ریشه دارد. بنابراین $g^{(N+1)}(x)$ حداقل یک ریشه دارد و همچنین در بازه $[-1, 1]$ وجود دارد $\xi = \xi(x)$ به طوری که

$$g^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - (\mathcal{P}_N f)^{(N+1)}(\xi) - \rho P_{N+1}^{(N+1)}(\xi) = 0$$

با کمک قضیه ۱.۴.۱ و $(\mathcal{P}_N f)^{(N+1)}(\xi) = 0$ ، داریم:

$$P_{N+1}^{(N+1)}(\xi) = (N+1)!K_{N+1},$$

سپس

$$\rho = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \quad (28.3)$$

با توجه به معادلات (۲۷.۳) و (۲۸.۳) داریم:

$$\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} = \frac{f(\bar{x}) - (\mathcal{P}_N f)(\bar{x})}{P_{N+1}(\bar{x})}$$

حال با ساده کردن رابطه بالا به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f(\bar{x}) - (\mathcal{P}_N f)(\bar{x}) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(\bar{x})$$

کران خطا به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\|R_N(x, \xi)\| &= \|f(\bar{x}) - (\mathcal{P}_N f)(\bar{x})\| \\ &= \frac{1}{(N+1)!K_{N+1}} \|f^{(N+1)}(\xi)\| \|P_{N+1}(\bar{x})\| \\ &\leq \max_{-1 \leq \xi \leq 1} \frac{1}{(N+1)!K_{N+1}} \|f^{(N+1)}(\xi)\|.\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۴.۳. تابع $f(x)$ را توسط معادله (۲۶.۳) تقریب می‌زنیم. بنابراین عددی مانند $\xi = \xi(x) \in [-1, 1]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{j=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_j) + \Delta_N(\ell, x_i, \xi), \quad (29.3)$$

برای $i = 0, 1, \dots, N$ و $\ell = 1, 2, 3$ ، $x_i \in S_\ell$ برقرار است.
حالت اول: برای $m = 1$ داریم:

$$(i) \quad \Delta_N(1, x_i, \xi) = -\frac{2}{3N^2} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/2]} e_n^{(j)} H_j^{(2)}(\xi) \left[x_i^{j-2n+1} - (-1)^{j-2n+1} \right] \quad (30.3)$$

$$+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \sum_{n=0}^{[(N+1)/2]} e_n^{(N+1)} \left[x_i^{N-2n+2} - (-1)^{N-2n+2} \right]$$

$$(ii) \quad \Delta_N(2, x_i, \xi) = \frac{(2j+1)\pi^2}{24N^2} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/2]} e_n^{(j)} H_j^{(2)}(\xi) \left[x_i^{j-2n+1} - (-1)^{j-2n+1} \right] \quad (31.3)$$

$$+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \sum_{n=0}^{[(N+1)/2]} e_n^{(N+1)} \left[x_i^{N-2n+2} - (-1)^{N-2n+2} \right]$$

$$(iii) \quad \Delta_N(3, x_i, \xi) = \frac{2}{(2N+3)(2N+2)!} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/2]} e_n^{(j)} H_j^{(2N+2)}(\xi) \quad (32.3)$$

$$\times \left[x_i^{j-2n+1} - (-1)^{j-2n+1} \right] + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}}$$

$$\times \sum_{n=0}^{[(N+1)/2]} e_n^{(N+1)} \left[x_i^{N-2n+2} - (-1)^{N-2n+2} \right]$$

حالت دوم: برای $m \geq 2$ داریم:

$$(i) \quad \Delta_N(1, x_i, \xi) = -\frac{2}{3N^2} \sum_{j=0}^N H_j^{(2)}(\xi) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ (33.3)$$

$$+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ (ii) \quad \Delta_N(2, x_i, \xi) = \frac{(2j+1)\pi^2}{24N^2} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/2]} H_j^{(2)}(\xi) \\ \times \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ (34.3)$$

$$(iii) \quad \Delta_N(3, x_i, \xi) = \frac{2}{(2N+3)(2N+2)!} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/2]} H_j^{(2N+2)}(\xi) \\ \times \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ (35.3)$$

به طوری که $\Delta_N(\ell, x_i, \xi)$ برآورد خطای روش انتگرال لژاندر است.

برهان. حالت اول: برای $m = 1$ داریم:

(i) اگر تابع $f(x)$ توسط معادله (۲۶.۳) تقریب شود، سپس از معادلات (۱۱.۳) و (۲۷.۳) داریم:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{2j+1}{N} P_j(x_k) P_j(x) f(x_k) - \frac{2}{3N^2} \sum_{j=0}^N H_j^{(2)}(\xi) P_j(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x).$$

با انتگرال گیری از $f(x)$ داریم:

$$\int_{-1}^{x_i} f(x) dx = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{2j+1}{N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x) dx - \frac{2}{3N^2} \sum_{j=0}^N H_j^{(2)}(\xi) \int_{-1}^{x_i} P_j(x) dx \\ + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} P_{N+1}(x) dx.$$

با جای گذاری معادلات (۴.۳) و (۲۰.۳) داریم:

$$\int_{-1}^{x_i} f(x) dx = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N b_{ij} f(x_k) - \frac{2}{3N^2} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/2]} e_n^{(j)} H_j^{(2)}(\xi) [x_i^{j-2n+1} - (-1)^{j-2n+1}] \\ + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \sum_{n=0}^{[(N+1)/2]} e_n^{(N+1)} [x_i^{N-2n+2} - (-1)^{N-2n+2}]$$

بنابراین داریم:

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^N b_{ij} f(x_k) + \Delta_N(1, x_i, \xi)$$

(ii) اگر تابع $f(x)$ توسط معادله (۲۶.۳) تقریب شود، سپس از معادلات (۱۲.۳) و (۲۷.۳) داریم:

$$f(x) = -\frac{\pi(\gamma_j + 1)}{\gamma_N} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N P_j(x_k) P_j(x) f(x_k) + \frac{(\gamma_j + 1)\pi^3}{24N^2} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma)}(\xi) P_j(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x).$$

سپس با انتگرال‌گیری از $f(x)$ داریم :

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = -\frac{\pi(\gamma_j + 1)}{\gamma_N} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx + \frac{(\gamma_j + 1)\pi^3}{24N^2} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma)}(\xi) \times \int_{-1}^{x_i} P_j(x)dx + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} P_{N+1}(x)dx.$$

با جای‌گذاری معادلات (۴.۳) و (۲۱.۳) داریم:

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^N b_{ij} f(x_k) + \frac{(\gamma_j + 1)\pi^3}{24N^2} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\gamma]} e_n^{(j)} H_j^{(\gamma)}(\xi) [x_i^{j-\gamma n+1} - (-1)^{j-\gamma n+1}] + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \sum_{n=0}^{[(N+1)/\gamma]} e_n^{(N+1)} [x_i^{N-\gamma n+2} - (-1)^{N-\gamma n+2}]$$

سپس

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^N b_{ij} f(x_k) + \Delta_N(\gamma, x_i, \xi).$$

(iii) با تقریب $f(x)$ توسط معادله (۲۶.۳) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$f(x) = \frac{\gamma_j + 1}{N(N-1)} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{P_j(x_k) P_j(x)}{[P_{N-1}(x_i)]^\gamma} f(x_k) + \frac{2}{(\gamma N + 3)(\gamma N + 2)!} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma N + 2)}(\xi) P_j(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x).$$

اکنون همانند قبل با انتگرال‌گیری از معادله $f(x)$ و جای‌گذاری معادلات (۴.۳) و (۲۲.۳) داریم :

$$\int_{-1}^{x_i} f(x)dx = \sum_{k=0}^N b_{ij} f(x_k) + \frac{2}{(\gamma N + 3)(\gamma N + 2)!} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{[j/\gamma]} e_n^{(j)} H_j^{(\gamma N + 2)}(\xi) \times [x_i^{j-\gamma n+1} - (-1)^{j-\gamma n+1}] + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \sum_{n=0}^{[(N+1)/\gamma]} e_n^{(N+1)} \times [x_i^{N-\gamma n+2} - (-1)^{N-\gamma n+2}].$$

سپس

$$\int_{-\lambda}^{x_i} f(x) dx = \sum_{k=0}^N b_{ij} f(x_k) + \Delta_N(\mathfrak{N}, x_i, \xi).$$

حالت دوم: برای $m \geq 2$ داریم :

(i) با تقریب $f(x)$ توسط معادله (۲۶.۳) و با استفاده از معادلات (۱۱.۳) و (۲۷.۳) داریم :

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\mathfrak{Y}j+1}{N} P_j(x_k) P_j(x) f(x_k) \\ & - \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{N}N^{\mathfrak{Y}}} \sum_{j=0}^N H_j^{(\mathfrak{Y})}(\xi) P_j(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x). \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از $f(x)$ در این بازه داریم :

$$\begin{aligned} & \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ & = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\mathfrak{Y}j+1}{N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ & - \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{N}N^{\mathfrak{Y}}} \sum_{j=0}^N H_j^{(\mathfrak{Y})}(\xi) \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ & + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \end{aligned}$$

با جای گذاری معادلات (۳.۳) و (۲۳.۳) داریم :

$$\begin{aligned} & \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ & = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k) - \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{N}N^{\mathfrak{Y}}} \sum_{j=0}^N H_j^{(\mathfrak{Y})}(\xi) \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ & + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم :

$$\int_{-\lambda}^{x_i} \int_{-\lambda}^{t_{m-1}} \dots \int_{-\lambda}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k) + \Delta_N(1, x_i, \xi),$$

(ii) با تقریب $f(x)$ به کمک معادله (۲۶.۳) و معادلات (۱۲.۳) و (۲۷.۳) داریم :

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\mathfrak{Y}j+1)}{\mathfrak{Y}N} P_j(x_k) P_j(x) f(x_k) + \frac{(\mathfrak{Y}j+1)\pi^{\mathfrak{Y}}}{\mathfrak{Y}^{\mathfrak{Y}}N^{\mathfrak{Y}}} \sum_{j=0}^N H_j^{(\mathfrak{Y})}(\xi) P_j(x) \\ & + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x). \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از $f(x)$ در این بازه داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N -\frac{\pi(\gamma_j + 1)}{\gamma_N} P_j(x_k) f(x_k) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &+ \frac{(\gamma_j + 1)\pi^\gamma}{\gamma_N^\gamma} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma)}(\xi) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1}. \end{aligned}$$

با جای‌گذاری معادلات (۳.۳) و (۲۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k) \\ &+ \frac{(\gamma_j + 1)\pi^\gamma}{\gamma_N^\gamma} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma)}(\xi) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1}. \end{aligned}$$

سپس داریم:

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k) + \Delta_N(\gamma, x_i, \xi),$$

(iii) با تقریب $f(x)$ به کمک معادله (۲۶.۳) و معادلات (۱۳.۳) و (۲۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\gamma_j + 1}{N(N-1)} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{P_j(x_k) P_j(x)}{[P_{N-1}(x_k)]^\gamma} f(x_k) \\ &+ \frac{\gamma}{(\gamma N + \gamma)(\gamma N + \gamma)!} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma N + \gamma)}(\xi) P_j(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} P_{N+1}(x). \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از $f(x)$ در این بازه داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \\ & \frac{\gamma_j + 1}{N(N-1)} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{P_j(x_k) f(x_k)}{[P_{N-1}(x_k)]^\gamma} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &+ \frac{\gamma}{(\gamma N + \gamma)(\gamma N + \gamma)!} \sum_{j=0}^N H_j^{(\gamma N + \gamma)}(\xi) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1}. \end{aligned}$$

با جای گذاری معادلات (۳.۳) و (۲۵.۳) داریم :

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k) + \frac{2}{(2N+3)!(2N+2)!} \sum_{j=0}^N H_j^{(2N+2)}(\xi) \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_j(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} \\ &+ \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!K_{N+1}} \int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} P_{N+1}(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1}. \end{aligned}$$

حال می‌رسیم به:

$$\int_{-1}^{x_i} \int_{-1}^{t_{m-1}} \dots \int_{-1}^{t_1} f(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{m-1} = \sum_{k=0}^N b_{ij}^{(m)} f(x_k) + \Delta_N(2, x_i, \xi)$$

□

۵.۳ نتایج عددی

در این بخش برخی از نمونه‌های عددی با استفاده از روش انتگرال گیری لژاندر ارائه شده است.

مثال ۱.۵.۳. توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f_1(x) = \int_{-1}^1 \cos x dx, \quad f_2(x) = \int_{-1}^1 e^x dx.$$

روش لژاندر را برای حل تقریبی انتگرال‌ها و مقایسه با راه حل دقیق به کار برده ایم. مقایسه بین حداکثر خطای مطلق برای اولین انتگرال توسط نقاط S_1, S_2, S_3 در جدول ۱.۳ و ۲.۳ دیده می‌شود. نتایج حاصل کارایی و دقت روش انتگرال گیری لژاندر را نشان می‌دهد.

معادلات انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I(y(x)) = h(x) - \int_{\Omega} k(x, t, y(x)) y(t) dt = 0, \quad (36.3)$$

به طوری که $\Omega = [a, b]$ است. این مسئله توسط کلی [۲۷] و کلی و نرتروپ^۵ [۲۸] بررسی شده است که در آن $k(x, t, y(x))$ هسته و $h(x)$ یک تابع پیوسته است. برای حل این مسئله به کمک روش طیفی لژاندر، داریم:

$$I(y_0, y_1, \dots, y_N) = h(x_i) - \sum_{j=0}^N b_{ij} k(x_i, t_j, y(x_i)) y(t_j) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (37.3)$$

فرض کنیم

$$y_i = y(x_i) = \sum_{j=0}^N a_j P_j(x_i)$$

^۵Northrup

$f_1(x)$			N
$x \in S_3$	$x \in S_2$	$x \in S_1$	
$4/94D - 05$	$3/79D - 05$	$3/79D - 05$	۴
$2/86D - 10$	$1/11D - 10$	$1/11D - 10$	۸
$7/77D - 16$	$9/99D - 16$	$9/99D - 16$	۱۶

جدول ۱.۳: حداکثر خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳

$f_2(x)$			N
$x \in S_3$	$x \in S_2$	$x \in S_1$	
$2/41D - 04$	$3/46D - 04$	$2/77D - 04$	۴
$2/27D - 09$	$2/92D - 09$	$7/17D - 09$	۸
$1/22D - 15$	$1/55D - 15$	$1/83D - 15$	۱۶

جدول ۲.۳: حداکثر خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳

و $i, j = 0, 1, \dots, N$ ، عناصر ماتریس B باشند. مسئله اصلی مینی‌م کردن

$$J = \sum_{m=0}^N I_m^*(y) \quad (38.3)$$

است. برای محاسبه‌ی بردار مجهول $y_0, y_1, \dots, y_N$ به‌طوری‌که J مینی‌م شود. از روش درونیابی دو بعدی کمک می‌گیریم [۲۴].

مثال ۲.۵.۳. معادله انتگرال ولترا زیر را در نظر بگیرید:

$$y(x) = x + \int_0^1 (t-x)y(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$y(x) = \sin(x)$ جواب دقیق معادله است. نتایج به‌دست آمده از روش مورد بررسی به کمک نقاط چبیشف-گائوس-لوباتو برای $N=4$ در جدول ۳.۳ مشاهده می‌شود. شکل ۱.۳ نمودار مقایسه مقادیر عددی برای نقاط مختلف را در بازه‌ی $[0, 1]$ نشان می‌دهد.

معادلات انتگرال-دیفرانسیل

معادله انتگرال-دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

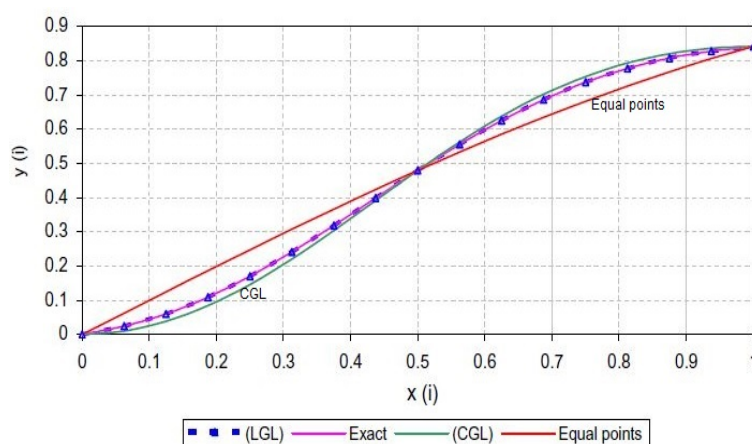
$$\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) + \int_0^x k(x, t, y(x))y(t)dt = g(x) \quad (39.3)$$

خطا	روش حاضر	ال-جیندی	جواب اصلی	نقاط (CGL)
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۳۰D - ۰۶	۰/۱۴۵۹۲۴۰۱	۰/۱۴۵۹۲۱	۰/۱۴۵۹۲۳۷۱	۰/۱۴۶۴۴۶۶۱
۰/۴۹D - ۰۶	۰/۴۷۹۴۲۵۰۵	۰/۴۷۹۴۳۸	۰/۴۷۹۴۲۵۵۴	۰/۵۰۰۰۰۰۰۰
۰/۶۷D - ۰۷	۰/۷۵۳۶۲۰۹۰	۰/۷۵۳۶۱۵	۰/۷۵۳۶۲۰۸۴	۰/۸۵۳۵۵۳۳۹
۰/۷۹D - ۰۹	۰/۸۴۱۴۷۰۹۹	۰/۸۴۱۴۶۸	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۳.۳: نتایج به دست آمده برای مثال ۲.۵.۳ در $N = 4$

S_1	جواب اصلی	روش حاضر	حداکثر خطا	روش تاو [۲۶]	حداکثر خطا [۲۶]
۰/۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۰/۲۰	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۰/۸۷D - ۰۸	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۰/۵۷D - ۱۱
۰/۴۰	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۰/۱۳D - ۰۷	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۰/۲۳D - ۰۷
۰/۶۰	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۱/۴۳۳۳۲۹۴۲	۰/۱۴D - ۰۷	۱/۴۳۳۳۲۹۴۲	۰/۳۱D - ۰۵
۰/۸۰	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۰/۸۱D - ۰۸	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۰/۱۱D - ۰۴
۱/۰۰	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۰/۲۶D - ۱۴	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۰/۱۶D - ۰۳

جدول ۴.۳: نتایج به دست آمده برای مثال ۲.۵.۳ در $N = 10$



شکل ۱.۳: حل مثال ۲.۵.۳ در نقاط مختلف، مشاهده می شود نتیجه برای نقاط (LGL) و جواب دقیق یکسان و نقاط (CGL) کمی مانند جواب دقیق است.

با شرایط اولیه زیر

$$a_m = 1, \quad y^{(r)}(\circ) = A_r, \quad r = \circ, 1, \dots, m, \quad (40.3)$$

به‌طوری‌که $y^{(m)}(x)$ ، m -امین مشتق ساده $y(x)$ است و ضرایب a_k می‌تواند تابعی از x باشد. روش شبه‌طیفی لژاندر را برای حل مسئله به کار می‌بریم. داریم:

$$y^{(m+1)}(x) = u(x)$$

با توجه به پیوسته انتگرال پذیر بودن و اعمال شرایط (40.3) از طرفین معادله انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} y^{(m)}(x) &= \int_{\circ}^x u(t) dt + C_m \\ y^{(m-1)}(x) &= \int_{\circ}^x \int_{\circ}^{t_1} u(t_{\circ}) dt_{\circ} dt_1 + x C_m + C_{m-1} \\ &\vdots \\ y^{(1)}(x) &= \int_{\circ}^x \int_{\circ}^{t_{m-1}} \dots \int_{\circ}^{t_1} u(t_{\circ}) dt_{\circ} dt_1 \dots dt_{m-1} + \sum_{r=1}^m C_r x^{r-1} \\ y(x) &= \int_{\circ}^x \int_{\circ}^{t_m} \dots \int_{\circ}^{t_1} u(t_{\circ}) dt_{\circ} dt_1 \dots dt_m + \sum_{r=1}^m C_r x^r \end{aligned}$$

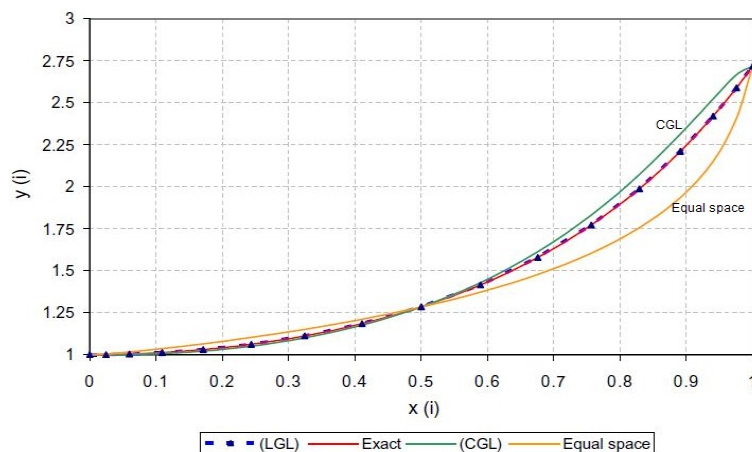
تقریب شبه‌طیفی لژاندر را برای حل مسئله بالا به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} y^{(m)}(x) &= \sum_{j=\circ}^N b_{ij} u_j + C_m \\ y^{(m-1)}(x) &= \sum_{j=\circ}^N b_{ij}^{(1)} u_j + C_m x + C_{m-1} \\ &\vdots \\ y^{(1)}(x) &= \sum_{j=\circ}^N b_{ij}^{(m)} u_j + \sum_{r=1}^m C_r x^{r-1} \\ y(x) &= \sum_{j=\circ}^N b_{ij}^{(m+1)} u_j + \sum_{r=1}^m C_r x^r \end{aligned}$$

باجای‌گذاری در معادله (39.3) به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} I_i(u) &= \sum_{k=\circ}^{m-1} \left[a_k \sum_{j=\circ}^n b_{ij}^{(m-k+1)} u_j + \sum_{r=k}^{m-1} C_r x_i^{r-k} \right] \\ &+ \sum_{k=\circ}^n b_{ik} k \left[x_i, x_j, \left(\sum_{s=\circ}^n b_{js}^{(m+1)} u_j + \sum_{r=\circ}^m C_r x_j^r \right) \right], \quad (41.3) \\ &\left(\sum_{j=\circ}^n b_{ij}^{(m)} u_j + \sum_{r=\circ}^m C_r x_i^r \right) - g(x_i) = \circ, \quad i = \circ, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

بنابراین مسئله اصلی مینی‌مم کردن $J = \sum_{k=1}^n I_k^2$ است.



شکل ۲.۳: حل مثال ۴.۵.۳ در نقطه $N = ۱۶$

مثال ۳.۵.۳. معادله

$$y'(x) = 1 + 2x - y(x) + \int_0^x x(1 + 2x)e^{t(x-t)}y(t)dt$$

با مقدار اولیه $y(0) = 1$ و $0 \leq x \leq 1$ در نظر بگیرید. جواب دقیق معادله $y(x) = e^{x^2}$ است. با توجه به روش مورد نظر ابتدا قرار می‌دهیم $y'(x) = u(x)$ با شرط $I_{n+1} = y(0) - 1$ به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$I_i(u) = \sum_{j=0}^N b_{ij}^{(1)} u_j + C_0 - \left\{ 1 + 2x_i - \left(\sum_{s=0}^N b_{js}^{(2)} u_j + \sum_{r=0}^1 C_r x_j^r \right) \right\} - \sum_{k=0}^N b_{ik} \left[x_i(1 + 2x_i)e^{x_k(x_k-x_i)} \left(\sum_{s=0}^N b_{js}^{(2)} u_j + \sum_{r=0}^1 C_r x_j^r \right) \right] = 0$$

نتایج عددی در جدول‌های ۴.۳ تا ۷.۳ نشان داده شده است.

مثال ۴.۵.۳. معادله

$$y''(x) - (4x^2 + 2)y(x) + \int_0^x xt(y'(t) + y(t)(1 - 2t))^{1/2} dt = x(e^{x^2/2} - 1),$$

با شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leq x, t \leq 1$$

را در نظر بگیرید. جواب دقیق معادله $y(x) = e^{x^2}$ است. در نظر می‌گیریم $y''(x) = u(x)$ مانند مثال قبل مسئله را حل می‌کنیم. نتایج به‌دست آمده از روش مورد نظر را در جدول ۸.۳ می‌توان دید. نتایج با استفاده از نقاط مختلف در نمودار شکل ۲.۳ دیده می‌شود.

S_1	جواب اصلی	روش حاضر	حداکثر خطا	روش تاو [۲۶]	حداکثر خطا [۲۶]
۰/۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۲۰	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۰/۶۴D - ۱۴	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۰/۱۶D - ۱۵
۰/۴۰	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۰/۴۴D - ۱۴	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۰/۱۱D - ۱۰
۰/۶۰	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۰/۱۱D - ۱۳	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۰/۷۲D - ۰۸
۰/۸۰	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۰/۱۷D - ۱۳	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۰/۷۵D - ۰۶
۱/۰۰	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۰/۹۴D - ۱۳	۲/۷۱۸۲۵۳۹۷	۰/۲۷D - ۰۴

جدول ۵.۳: نتایج به‌دست آمده برای مثال ۳.۵.۳ در $N = ۱۵$

S_1	جواب اصلی	روش حاضر	حداکثر خطا	روش تاو [۲۶]	حداکثر خطا [۲۶]
۰/۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۲۰	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۰/۲۲D - ۱۵	۱/۰۴۰۸۱۰۷۷	۰/۱۰D - ۱۸
۰/۴۰	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۰/۴۴D - ۱۵	۱/۱۷۳۵۱۰۸۷	۰/۴۴D - ۱۶
۰/۶۰	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۰/۶۶D - ۱۵	۱/۴۳۳۳۲۹۴۱	۰/۳۳D - ۱۲
۰/۸۰	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۰/۲۲D - ۱۵	۱/۸۹۶۴۸۰۸۸	۰/۱۹D - ۰۹
۱/۰۰	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۲/۷۱۸۲۸۱۸۳	۰/۸۸D - ۱۵	۲/۷۱۸۲۸۱۸۰	۰/۲۷D - ۰۷

جدول ۶.۳: نتایج به‌دست آمده برای مثال ۳.۵.۳ در $N = ۲۰$

S_1	لژاندر	لژاندر [۳۰]	چبیشف [۳۰]	مکروگلو [۳۰]	استاندارد [۳۰]
۰/۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۱۳D - ۱۱	۰/۶۲D - ۱۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۲۰	۰/۸۷D - ۰۸	۰/۲۸D - ۰۷	۰/۵۰D - ۰۸	۰/۳۶D - ۰۷	۰/۵۶D - ۱۱
۰/۴۰	۰/۱۳D - ۰۷	۰/۵۷D - ۰۷	۰/۳۲D - ۰۷	۰/۱۶D - ۰۶	۰/۲۳D - ۰۷
۰/۶۰	۰/۱۴D - ۰۷	۰/۴۲D - ۰۶	۰/۱۵D - ۰۵	۰/۴۴D - ۰۶	۰/۳۰D - ۰۵
۰/۸۰	۰/۸۱D - ۰۸	۰/۲۵D - ۰۴	۰/۹۳D - ۰۴	۰/۱۱D - ۰۵	۰/۹۵D - ۰۴
۱/۰۰	۰/۲۶D - ۱۴	۰/۵۶D - ۰۳	۰/۲۳D - ۰۲	۰/۲۷D - ۰۵	۰/۱۳D - ۰۲

جدول ۷.۳: حداکثر خطای مثال ۳.۵.۳ در مقایسه با روش‌های دیگر

$x \in S_3$	$x \in S_2$	$x \in S_1$	N
$\circ/17D - \circ 2$	$\circ/97D - \circ 3$	$\circ/16D - \circ 2$	۴
$\circ/10D - \circ 5$	$\circ/62D - \circ 6$	$\circ/56D - \circ 6$	۸
$\circ/21D - \circ 9$	$\circ/12D - \circ 9$	$\circ/15D - \circ 9$	۱۲
$\circ/20D - 13$	$\circ/11D - 13$	$\circ/15D - 13$	۱۶
$\circ/43D - 15$	$\circ/38D - 15$	$\circ/27D - 15$	۲۰
$\circ/21D - 14$	$\circ/21D - 14$	$\circ/17D - 14$	۲۴
$\circ/63D - 14$	$\circ/66D - 14$	$\circ/59D - 14$	۲۸
$\circ/59D - 14$	$\circ/74D - 14$	$\circ/59D - 14$	۳۲
$\circ/14D - 14$	$\circ/14D - 14$	$\circ/13D - 14$	۳۶

جدول ۸.۳: حداکثر خطای مثال ۳.۵.۳ در مقایسه با روش‌های دیگر

فصل ۴

روش شبه‌طیفی و آنالیز همگرایی برای حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل مرتبه بالا

در این فصل یک روش شبه‌طیفی براساس محاسبه ماتریس انتگرال برای حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نگارش این فصل براساس مقاله [۵۷] است.

۱.۴ مقدمه

بسیاری از پدیده‌ها در طبیعت را می‌توان به‌صورت معادلات انتگرال – دیفرانسیل مدل‌سازی کرد. تاکنون دسته وسیعی از روش‌های عددی برای حل این معادلات توسعه یافته است. [۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۲، ۴۵، ۴۶، ۵۱، ۵۲]. از بین آن‌ها، روش‌های شبه‌طیفی یکی از روش‌های مطمئن بوده است. مزیت اصلی روش‌های شبه‌طیفی نسبت به روش‌های دیگر، توانایی آن‌ها برای به‌دست آوردن تقریب‌هایی با دقت بالا است، در حالی که همگرایی به‌طور طیفی (یعنی با نرخ همگرایی بالا) برای مسائل هموار می‌باشد، که به ”دقت طیفی“ معروف است [۴۸]. به‌طور کلی روش شبه‌طیفی می‌تواند در دو دسته اصلی تقسیم‌بندی شوند: روش دیفرانسیل و انتگرال، که روش انتگرال شبه‌طیفی نسبت به روش دیفرانسیل زمانی که تعداد نقاط هم‌محل

زیاد باشد بهتر است [۴۰، ۴۲]. در این فصل روش انتگرال شبه‌طیفی را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

روش انتگرال‌گیری شبه‌طیفی براساس ماتریس انتگرال است، به‌این‌صورت که در ابتدا با تبدیل کردن معادلات انتگرال-دیفرانسیل به معادلات انتگرال توسط ماتریس انتگرال شبه‌طیفی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. ال-باربری^۱ روشی جدید برای محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی بر اساس رابطه دقیق بین چندجمله‌ای چبیشف و مشتقات آن ارائه کرده و به‌تازگی ال‌جیندی^۲ [۴۱] ماتریس انتگرال را با استفاده از فرمول صریح برای انتگرال متوالی چندجمله‌ای‌های چبیشف بررسی کرده است.

در این پایان‌نامه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی را برای نقاط هم‌محلی لژاندر-گاوس و لژاندر-گاوس-رادو بررسی کرده و با محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر روشی پایدار برای محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی ارائه می‌دهیم. همچنین، آنالیز همگرایی را در هر دو فضای L^2 و L^∞ از طریق یک معادله انتگرال خطی ارائه می‌دهیم که سرعت همگرایی را به صورت تئوری توجیه می‌کند.

۲.۴ تعریف و محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر

در این بخش تعریف و محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر با نقاط هم‌محلی لژاندر-گاوس (LG) و لژاندر-گاوس-رادو (LGR) نشان داده شده است.

تعریف ماتریس انتگرال لژاندر

تعریف ۱.۲.۴. ماتریس انتگرال لژاندر از مرتبه $\ell \geq 1$ برای نقاط LG یعنی $-1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N+1} = 1$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{kj}^\ell \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \int_{-1}^{\sigma_\ell} \dots \int_{-1}^{\sigma_3} \int_{-1}^{\sigma_2}}_{\ell} L_j(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_{\ell-1} d\sigma_\ell, \quad (1.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N+1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1).$$

تعریف ۲.۲.۴. ماتریس انتگرال لژاندر از مرتبه $\ell \geq 1$ برای نقاط LGR در بازه $\{\hat{\tau}_i \in (-1, 1)\}_{i=1}^N$ یعنی $-1 = \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \dots < \hat{\tau}_N = 1$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{L}_{kj}^\ell \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_k} \int_{-1}^{\sigma_\ell} \dots \int_{-1}^{\sigma_3} \int_{-1}^{\sigma_2}}_{\ell} L_j(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_{\ell-1} d\sigma_\ell, \quad (2.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N-1).$$

^۱Elbarbary

^۲Elgindy

محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر

حال روش محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. ماتریس انتگرال لژاندر از مرتبه $\ell \geq ۲$ برای نقاط LG $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ به صورت زیر است:

$$L_{kj}^{\ell} = \begin{cases} L_k^{\ell-1} + L_{k^{\circ}}^{\ell-1}, & j = \circ \\ \frac{1}{\ell_j + 1} \left(L_{k,j+1}^{\ell-1} - L_{k,j-1}^{\ell-1} \right), & j \geq 1 \end{cases} \quad (۳.۴)$$

به طوری که

$$L_{kj}^1 = \begin{cases} L_1(\tau_k) + L_{\circ}(\tau_k), & j = \circ \\ \frac{1}{\ell_j + 1} \left(L_{j+1}(\tau_k) - L_{j-1}(\tau_k) \right), & j \geq 1 \end{cases} \quad (۴.۴)$$

برای نقاط LGR در $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ نیز نتایج مشابهی وجود دارد.

برهان. طبق فرمول انتگرال گگن بائور^۲ [۵۴] برای $j = \circ$ داریم:

$$\int_{-1}^x C_{\circ}^{(\alpha)}(x) dx = C_{\circ}^{(\alpha)}(x) + C_1^{(\alpha)}(x),$$

$$\int_{-1}^x C_1^{(\alpha)}(x) dx = a_1(C_2^{(\alpha)}(x) - C_{\circ}^{(\alpha)}(x)).$$

همچنین برای $j \geq 1$ داریم

$$\int_{-1}^x C_j^{\alpha}(x) dx = \frac{1}{\ell_j + \alpha} \left(a_2 C_{j+1}^{\alpha}(x) + a_3 C_{j-1}^{\alpha}(x) + (-1)^j (a_2 + a_3) \right),$$

به طوری که در آن

$$a_1 = \frac{1 + 2\alpha}{4(1 + \alpha)}, \quad a_2 = \frac{j + 2\alpha}{(j + 1)}, \quad a_3 = -\frac{j}{(j + 2\alpha - 1)}.$$

حال با توجه به چند جمله ای های گگن بائور برای $\alpha = \frac{1}{\ell}$ داریم:

$$\int_{-1}^{\sigma_2} L_j(\sigma_1) d\sigma_1 = \begin{cases} L_1(\sigma_2) + L_{\circ}(\sigma_2), & j = \circ \\ \frac{1}{\ell_j + 1} \left(L_{j+1}(\sigma_2) - L_{j-1}(\sigma_2) \right), & j \geq 1 \end{cases} \quad (۵.۴)$$

با جای‌گذاری معادله (۵.۴) در معادله (۱.۴) داریم:

$$L_{kj}^\ell = \underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \int_{-1}^{\sigma_\ell} \cdots \int_{-1}^{\sigma_2} \int_{-1}^{\sigma_1} L_j(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \cdots d\sigma_{\ell-1} d\sigma_\ell}_{(\Delta.4)} \quad (6.4)$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \cdots \int_{-1}^{\sigma_2} L_1(\sigma_2) d\sigma_2 \cdots d\sigma_\ell}_{\ell-1} + \underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \cdots \int_{-1}^{\sigma_2} L_0(\sigma_2) d\sigma_2 \cdots d\sigma_\ell}_{\ell-1}, & j = 0 \\ \frac{1}{j+1} \left(\underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \cdots \int_{-1}^{\sigma_2} L_{j+1}(\sigma_2) d\sigma_2 \cdots d\sigma_\ell}_{\ell-1} - \underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \cdots \int_{-1}^{\sigma_2} L_{j-1}(\sigma_2) d\sigma_2 \cdots d\sigma_\ell}_{\ell-1} \right), & j \geq 1 \end{cases}$$

با توجه به تعریف $L_{kj}^{\ell-1}$ به معادله (۳.۴) می‌رسیم، همچنین اگر در معادله (۱.۴) قرار دهیم $\ell = 1$ داریم:

$$L_{kj}^1 = \int_{-1}^{\tau_k} L_j(\sigma_1) d\sigma_1$$

□

با توجه به معادله (۵.۴) می‌توان دید که معادله (۴.۴) برقرار است.

نکته ۱.۲.۴. قضیه ۱.۲.۴ راه حلی ساده و پایدار (به علت تعامد چندجمله‌ای لژاندر) با محاسبه چندجمله‌ای‌های لژاندر منجر به یک روش کارآمد و پایدار برای محاسبه ماتریس انتگرال لژاندر مرتبه بالا برای هر تعداد از نقاط لژاندر با دقت بسیار می‌شود.

۳.۴ تعریف و محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی

در این بخش، تعریف و محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی برای نقاط LG و LGR به ترتیب بیان شده است.

تعریف ماتریس انتگرال شبه‌طیفی

تعریف ۱.۳.۴. ماتریس انتگرال شبه‌طیفی از درجه $\ell \geq 1$ برای نقاط LG در بازه $\{\tau_i \in (-1, 1)\}_{i=1}^N$ یعنی $-1 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{N+1} = 1$ به صورت زیر برقرار است:

$$I_{ki}^\ell \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\tau_k} \int_{-1}^{\sigma_\ell} \cdots \int_{-1}^{\sigma_2} \int_{-1}^{\sigma_1} \mathcal{L}_i(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \cdots d\sigma_{\ell-1} d\sigma_\ell}_{\ell} \quad (7.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N+1, \quad i = 0, 1, \dots, N).$$

به‌طوری که $\{\mathcal{L}_i(\tau)\}_{i=1}^N$ چندجمله‌ای درونیابی لاگرانژ از مرتبه $(N-1)$ وابسته به نقاط درونیابی $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}_i(\tau) \triangleq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (۸.۴)$$

تعریف ۲.۳.۴. ماتریس انتگرال شبه‌طیفی از مرتبه $\ell \geq 1$ برای نقاط LGR در بازه $\{\hat{\tau}_i \in (-1, 1)\}_{i=1}^N$ یعنی $-1 = \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \dots < \hat{\tau}_N = 1$ به‌صورت زیر برقرار است:

$$\hat{I}_{ki}^{\ell} \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_k} \int_{-1}^{\sigma_{\ell}} \dots \int_{-1}^{\sigma_3} \int_{-1}^{\sigma_2}}_{\ell} \hat{\mathcal{L}}_i(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_{\ell-1} d\sigma_{\ell}, \quad (۹.۴)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 0, 1, \dots, N)$$

که $\{\hat{\mathcal{L}}_i(\tau)\}_{i=1}^N$ در معادله (۸.۴) تعریف شده است که با نقاط $\{\hat{\tau}_i\}_{i=1}^N$ درونیابی می‌شود.

محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی

هدف اصلی به‌دست آوردن ماتریس انتگرال شبه‌طیفی بالا در چگونگی محاسبه انتگرال‌های متوالی از چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ است. در این کار، ابتدا چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ را به‌صورت مجموع چندجمله‌ای‌های لژاندر در نظر گرفته و سپس با انتگرال‌گیری متوالی، به انتگرال متوالی چندجمله‌ای لژاندر انتقال می‌دهیم. نتایج اصلی در بخش بعدی آمده است.

لم ۱.۳.۴. فرض کنید $\{P_j^{\pi}(\tau)\}_{j=0}^{N-1}$ چندجمله‌ای متعامد روی بازه $[-1, 1]$ و $\pi(\tau)$ تابع وزن و $\{\lambda_j^{\pi}\}_{j=0}^{N-1}$ عامل نرمال‌ساز باشد. همچنین فرض کنید با توجه به این که $\pi(\tau)$ تابع وزن است، مجموعه‌ای از نقاط گاوسی باشد. در این‌صورت چندجمله‌ای درونیابی لاگرانژ مربوط به نقاط $\{\tau_i^{\pi}\}_{i=1}^N$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L}_i^{\pi}(\tau) = \omega_i^{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{P_j^{\pi}(\tau_i^{\pi})}{\lambda_j^{\pi}} P_j^{\pi}(\tau), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (۱۰.۴)$$

نتیجه‌ی مشابهی برای انواع نقاط رادو و وزن‌های انتگرال‌گیری وجود دارد.

برهان. با توجه به [۴۴] با استفاده از انتگرال‌گیری گاوس-لوباتو داریم:

$$I_N u(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n P_n^{(a)}(x), \quad \tilde{u}_n = \frac{1}{\tilde{\gamma}_n} \sum_{j=0}^N u(x_j) P_n^{(a)}(x_j) w_j$$

که در آن w_j وزن انتگرال‌گیری و $\tilde{\gamma}_n$ عامل نرمال‌ساز باشد، با تقریب گسسته‌سازی توسط انتگرال‌گیری گاوسی به‌صورت زیر:

$$I_N u(z) = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n P_n^{(a)}(z), \quad \tilde{u}_n = \frac{1}{\tilde{\gamma}_n} \sum_{j=0}^N u(z_j) P_n^{(a)}(z_j) w_j$$

فرض کنید $u(x)$ تابع تعریف شده در تمام بازه $[-1, 1]$ و $\tilde{u}_n$ ضریب بسط گسسته و $I_N u$ درون‌یاب u در نقاط کوادرتور^۴ گاوسی z_j باشد به صورت:

$$I_N u(z_j) = u(z_j)$$

اگر ضرایب بسط گسسته را در تقریب چندجمله‌ای قرار دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} I_N u(z) &= \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n P_n^{(a)}(z) \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_n} \sum_{j=0}^N u(z_j) P_n^{(a)}(z_j) u_j \right) P_n^{(a)}(z) \\ &= \sum_{j=0}^N u(z_j) \left(u_j \sum_{n=0}^N \frac{1}{\tilde{\gamma}_n} P_n^{(a)}(z) P_n^{(a)}(z_j) u_j \right) \\ &= \sum_{j=0}^N u(z_j) l_j(z) \end{aligned}$$

به طوری که

$$l_j(z) = u_j \sum_{n=0}^N \frac{1}{\tilde{\gamma}_n} P_n^{(a)}(z) P_n^{(a)}(z_j)$$

که در آن $l_j(z)$ چندجمله‌ای لاگرانژ و u_j وزن انتگرال‌گیری گاوسی و $P_n^{(a)}$ چندجمله‌ای متعامد می‌باشد، بنابراین اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۱.۳.۴. ماتریس انتگرال شبه‌طیفی از مرتبه $\ell \geq 1$ برای نقاط LG در بازه $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ دقیقاً به صورت:

$$\mathbf{I}_{ki}^\ell = \omega_i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_j(\tau_i)}{\lambda_j} \mathbf{L}_{kj}^\ell \quad (11.4)$$

است که $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ وزن انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس می‌باشد. همین نتیجه را برای نقاط LGR در $\{\hat{\tau}_i\}_{i=1}^N$ داریم.

برهان. با توجه به لم ۱.۳.۴ برای مجموعه $\{\tau_i, \omega_i\}_{i=0}^N$ داریم:

$$\mathcal{L}_i(\tau) = \omega_i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_j(\tau_i)}{\lambda_j} L_j(\tau), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.4)$$

با جای‌گذاری معادله (۱۲.۴) در معادله (۷.۴) داریم:

$$\mathbf{I}_{ki}^\ell = \omega_i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_j(\tau_i)}{\lambda_j} \underbrace{\left(\int_{-1}^{\tau_k} \int_{-1}^{\sigma_\ell} \dots \int_{-1}^{\sigma_2} \int_{-1}^{\sigma_1} L_j(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_{\ell-1} d\sigma_\ell \right)}_\ell \quad (13.4)$$

با توجه به تعریف $\mathbf{L}_{kj}^\ell$ در معادله (۱.۴) به معادله (۱۱.۴) می‌رسیم. $\square$

^۴ quadrature

نکته ۱.۳.۴. قضیه ۱.۳.۴ نشان می‌دهد که ماتریس‌های انتگرال شبه‌طیفی مانند ماتریس‌های انتگرال لژاندر خوش‌وضع محاسبه می‌شوند زیرا همه محاسبات انتگرال شبه‌طیفی برای محاسبه $L_j, L_j(\tau)$ و L^ℓ به کار برده شده است.

۴.۴ روش انتگرال شبه‌طیفی

در این بخش جزئیات روش انتگرال شبه‌طیفی را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل شرح می‌دهیم. ابتدا معادلات انتگرال-دیفرانسیل را به معادلات انتگرال تبدیل و سپس معادلات انتگرال را با استفاده از نقاط هم‌محلی محاسبه می‌کنیم.

معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

مسئله مقدار اولیه

فرض کنیم معادلات انتگرال-دیفرانسیل با ضرایب ثابت $\{\phi_p\}_{p=\circ}^\nu$ و $\{\bar{\phi}_q\}_{q=1}^\eta$ به‌طوری که $\vartheta \geq 1$ ، $\eta \geq 1$ و $\nu \leq \vartheta - 1$ باشد را در نظر بگیرید:

$$g^{(\vartheta)}(t) + \sum_{p=\circ}^\nu \phi_p \cdot g^{(p)}(t) + \sum_{q=1}^\eta \bar{\phi}_q \cdot \underbrace{\int_{t_\circ}^t \dots \int_{t_\circ}^{s_q}}_q (r^q(t, s_1) g(s_1)) ds_1 \dots ds_q \quad (14.4)$$

$$= f(t), \quad t \in [t_\circ, t_f]$$

با توجه به مقدار اولیه

$$g^{(j)}(t_\circ) = \chi_j, \quad j = \circ, 1, \dots, \vartheta - 1. \quad (15.4)$$

با تغییر متغیر:

$$t = \frac{t_f - t_\circ}{\vartheta} \tau + \frac{t_f + t_\circ}{\vartheta}, \quad \tau \in [-1, 1], \quad (16.4)$$

برای تبدیل معادله (۱۴.۴) به معادله انتگرال-دیفرانسیل در $[-1, 1]$ داریم:

$$g^{(\vartheta)}(\tau) + \sum_{p=\circ}^\nu \left(\frac{t_f - t_\circ}{\vartheta}\right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot g^{(p)}(\tau) + \sum_{q=1}^\eta \left(\frac{t_f - t_\circ}{\vartheta}\right)^{\vartheta+q} \bar{\phi}_q$$

$$\times \underbrace{\int_{-1}^\tau \dots \int_{-1}^{\sigma_q}}_q (r^q(\tau, \sigma_1; t_\circ, t_f) g(\sigma_1)) d\sigma_1 \dots d\sigma_q = \left(\frac{t_f - t_\circ}{\vartheta}\right)^\vartheta f(\tau; t_\circ, t_f), \quad (17.4)$$

با مقدار اولیه

$$g^{(j)}(-1) = \left(\frac{t_f - t_\circ}{\vartheta}\right)^j \chi_j, \quad j = \circ, 1, \dots, \vartheta - 1 \quad (18.4)$$

با تغییر جزئی در نمادها، همان نمادها را برای توابع تبدیل یافته $g(t)$ و مشتقات آن استفاده می‌کنیم. در ادامه انتگرال مرتبه ϑ به‌طور مستقیم روی هر دو حالت معادله (۱۷.۴) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} g(\tau) + \sum_{p=0}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta-p} g(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-p} + \sum_{q=1}^{\eta} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta+q} \bar{\phi}_q \quad (19.4) \\ \times \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\tau_{\vartheta}}}_{\vartheta} \rho^q(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{\vartheta} = \sum_{j=0}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} (\tau+1)^j + \sum_{p=0}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta-p} \phi_p \\ \times \sum_{j=0}^{p-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j+\vartheta-p)!} (\tau+1)^{j+\vartheta-p} + \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} f(\sigma_1; t_o, t_f) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta}, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$\rho^q(\tau) \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_q (r^q(\tau, \sigma_1; t_o, t_f) g(\sigma_1)) d\sigma_1 \dots d\sigma_q \quad (20.4)$$

بنابراین معادلات (۱۸.۴) و (۱۹.۴) معادله انتگرال مطابق با معادله انتگرال-دیفرانسیل معادلات (۱۴.۴) و (۱۵.۴) است. حال، معادله انتگرال (۱۹.۴) با استفاده از جای‌گذاری نقاط LGR در $\{\hat{\tau}_k \in (-1, 1]\}_{k=1}^N$ توسط ماتریس انتگرال شبه‌طیفی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{g}_k + \sum_{p=0}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \left(\sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{I}}_{ki}^{\vartheta-p} \hat{g}_i \right) \quad (21.4) \\ + \sum_{q=1}^{\eta} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta+p} \bar{\phi}_q \cdot \left(\sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{I}}_{ki}^{\vartheta} \hat{\rho}_i^q \right) = \sum_{j=0}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} (\hat{\tau}_k + 1)^j \\ + \sum_{p=0}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \sum_{j=0}^{p-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j+\vartheta-p)!} (\hat{\tau}_k + 1)^{j+\vartheta-p} \\ + \left(\frac{t_f - t_o}{\tau} \right)^{\vartheta} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{I}}_{ki}^{\vartheta} f(\hat{\tau}_i; t_o, t_f) \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $\{\hat{g}_k \approx g(\hat{\tau}_k)\}_{k=1}^N$ و $\hat{\mathbf{I}}_{ki}^{\vartheta}$ و $\{\hat{\mathbf{I}}_{ki}^{\vartheta-p}\}_{p=0}^{\nu}$ ماتریس انتگرال شبه‌طیفی برای نقاط LGR است. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i^q \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_q (r^q(\hat{\tau}_i, \sigma_1; t_o, t_f) g(\sigma_1)) d\sigma_1 \dots d\sigma_q \quad (22.4) \\ = \left(\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{I}}_{ij}^q \cdot (r^q(\hat{\tau}_i, \hat{\tau}_j; t_o, t_f) \hat{g}_j) \right), \end{aligned}$$

که در آن $\{\hat{v}_j\}_{j=1}^N$ نقاط LGR همانند $\{\hat{\tau}\}_{k=1}^N$ هستند. معادلات (۱۸.۴) و (۲۱.۴) یک دستگاه معادلات خطی جبری با متغیرهای $\{\hat{g}_k\}_{k=1}^N$ تشکیل می‌دهد که برای به‌دست آوردن حل تقریبی معادله انتگرال-دیفرانسیل اصلی باید حل شود.

مسئله مقدار مرزی

این مسئله ترکیبی از معادله (۱۴.۴) و مسئله مقدار مرزی است، به‌طوری‌که:

$$g^{(\delta_j)}(t) |_{t=t_{\delta_j}} = \chi_{\delta_j}, \quad j = 0, 1, \dots, \vartheta - 1, \quad (23.4)$$

به‌طوری‌که $t_0 \leq t_{\delta_0}, \dots, t_{\delta_{\vartheta-1}} \leq t_f$ و $0 \leq \delta_0, \dots, \delta_{\vartheta-1} \leq \vartheta - 1$ برقرار است. ابتدا معادله انتگرال-دیفرانسیل را به معادله انتگرال تبدیل می‌کنیم. فرض کنید:

$$h(\tau) \triangleq g^{(\vartheta)}(\tau) \quad (24.4)$$

سپس داریم:

$$g(\tau) = \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta}}_{\vartheta} + \sum_{j=0}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} (\tau + 1)^j \quad (\tilde{A}25.4)$$

$$= \varrho(\tau) + \sum_{j=0}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} (\tau + 1)^j$$

$$g^{(p)}(\tau) = \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-p}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-p}}_{\vartheta-p} + \sum_{j=p}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j-p)!} (\tau + 1)^{j-p} \quad (B25.4)$$

$$g^{(\delta_j)}(\tau) = \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-\delta_j}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-\delta_j}}_{\vartheta-\delta_j} + \sum_{j=\delta_j}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j-\delta_j)!} (\tau + 1)^{j-\delta_j} \quad (J25.4)$$

$$\varrho(\tau) \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta}}_{\vartheta} \quad (26.4)$$

حال با جای‌گذاری معادلات (۲۴.۴) و (A25.4) و (B25.4) در معادله (۱۷.۴) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} h(\tau) + \sum_{p=0}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_0}{\tau} \right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-p}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-p}}_{\vartheta-p} \\ + \sum_{q=1}^{\eta} \left(\frac{t_f - t_0}{\tau} \right)^{\vartheta+q} \phi_q \cdot \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_q} (r^q(\tau, \sigma_1; t_0, t_f) \varrho(\sigma_1)) d\sigma_1 \dots d\sigma_q}_q \end{aligned} \quad (27.4)$$

$$= \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta} f(\tau; t_o, t_f) - \sum_{p=\circ}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \sum_{j=p}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j-p)!} (\tau+1)^{j-p} \\ - \sum_{q=1}^{\eta} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta+q} \bar{\phi}_q \cdot \sum_{j=\circ}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\substack{q \\ \vartheta-\delta_j}} (r^q(\tau, \sigma_1; t_o, t_f) (\sigma_1+1)^j) d\sigma_1 \dots d\sigma_q$$

علاوه‌براین، با شرایط مرزی در معادله (۲۳.۴) و با استفاده از معادله (۱۶.۴) داریم:

$$g^{(\delta_j)}(\tau) |_{\tau=\tau_{\delta_j}} = \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\delta_j} \chi_{\delta_j}, \quad j = \circ, 1, \dots, \vartheta-1. \quad (28.4)$$

از ترکیب معادله (۲۸.۴) با معادله (۲۵.۴) خواهیم داشت:

$$\underbrace{\int_{-1}^{\tau_{\delta_j}} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta-\delta_j} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-\delta_j} + \sum_{j=\delta_j}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j-\delta_j)!} (\tau_{\delta_j}+1)^{j-\delta_j} \quad (29.4) \\ = \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\delta_j} \chi_{\delta_j}, \quad j = \circ, 1, \dots, \vartheta-1$$

بنابراین، معادلات (۲۷.۴) و (۲۹.۴) معادله انتگرال متناظر با معادله انتگرال-دیفرانسیل (۱۴.۴) و (۲۳.۴) است. اکنون معادله انتگرال (۲۷.۴) را توسط نقاط هم‌محلی LGR در بازه $\{\hat{\tau}_k \in (-1, 1]\}_{k=1}^N$ با ماتریس انتگرال شبه‌طیفی تقریب می‌زنیم، به‌طوری‌که:

$$\hat{h}_k + \sum_{p=\circ}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \left(\sum_{i=1}^N \hat{f}_{ki}^{\vartheta-p} \hat{h}_i \right) + \sum_{q=1}^{\eta} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta+q} \bar{\phi}_q \\ \times \left(\sum_{i=1}^N \hat{f}_{ki}^q \cdot (r^q(\hat{\tau}_k, \hat{v}_i; t_o, t_f) \hat{v}_i) \right) = \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta} f(\hat{\tau}_k; t_o, t_f) \\ - \sum_{p=\circ}^{\nu} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta-p} \phi_p \cdot \sum_{j=p}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j-p)!} (\hat{\tau}_k+1)^{j-p} - \sum_{q=1}^{\eta} \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\vartheta+q} \bar{\phi}_q \\ \times \sum_{j=\circ}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \hat{f}_{ki}^q \cdot (r^q(\hat{\tau}_k, \hat{v}_i; t_o, t_f) (\hat{v}_i+1)^j) \right), \quad (30.4)$$

به‌طوری‌که $\{\hat{h}_k \approx h(\hat{\tau}_k)\}_{k=1}^N$ است. تعریف می‌کنیم:

$$\hat{v}_i \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_i} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} = \left(\sum_{i=1}^N \hat{f}_{ij}^{\vartheta} \hat{h}_j \right).$$

علاوه‌براین معادله (۲۹.۴) را به‌صورت زیر می‌توان تقریب زد:

$$\left(\sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i^{\delta_j} \hat{h}_i \right) + \sum_{j=\delta_j}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{(j-\delta_j)!} (\tau_{\delta_j}+1)^{j-\delta_j} = \left(\frac{t_f - t_o}{\tau}\right)^{\delta_j} \chi_{\delta_j}, \quad j = \circ, 1, \dots, \vartheta-1 \quad (31.4)$$

که در آن $\hat{\omega}_i^{\delta_j}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\omega}_i^{\delta_j} \triangleq \underbrace{\int_{-1}^{\tau_{\delta_j}} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta-\delta_j} \hat{\mathcal{L}}_i(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-\delta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = \circ, 1, \dots, \vartheta-1. \quad (32.4)$$

معادلات (۳۰.۴) و (۳۱.۴) یک دستگاه معادلات خطی جبری از با متغیرهای $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^N$ و $\{g^{(j)}(-1)\}_{j=0}^{\vartheta-1}$ تشکیل می‌دهد. بعد از حل دستگاه فوق و به‌دست آوردن متغیرهای مورد نظر از طریق معادله (۲۵.۴) جواب نهایی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{g}_k = \left(\sum_{i=1}^N \hat{I}_{ki}^{\vartheta} \hat{h}_i \right) + \sum_{j=0}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} (\hat{\tau}_k + 1)^j, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (33.4)$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر

معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر $\{\psi_p(t)\}_{p=0}^{\nu}$ و $\{\bar{\psi}_q(t)\}_{q=1}^{\eta}$ به‌طوری که $\vartheta \geq 1$ ، $\eta \geq 1$ و $\nu \leq \vartheta - 1$ باشد را در نظر بگیرید:

$$g^{(\vartheta)}(t) + \sum_{p=0}^{\nu} \psi_p(t) \cdot g^{(p)}(t) + \sum_{q=1}^{\eta} \bar{\psi}_q(t) \cdot \underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_{\vartheta}} (r^q(t, s_1) g(s_1)) ds_1 \dots ds_q}_q = f(t), \quad (34.4)$$

شرایط اولیه در معادله (۱۵.۴) و همچنین شرایط مرزی در معادله (۲۳.۴) را نیز داریم. برای این معادلات انتگرال-دیفرانسیل، دستگاه جبری خطی مربوطه‌ی حاصل از نقاط هم‌محل $\psi_p(\hat{\tau}_k; t_0, t_f)$ با معادلات (۱۸.۴) و (۳۰.۴) (همچنین معادله (۳۱.۴)) به‌ترتیب به شکل $\psi_p(\hat{\tau}_k; t_0, t_f)$ و $\bar{\phi}_q$ جایگزین می‌شود.

معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی

معادله انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی زیر را با توجه به شرایط اولیه از معادله (۱۵.۴) و شرایط مرزی از معادله (۲۳.۴) به‌طوری که $\vartheta \geq 1$ ، $0 \leq p_1 < \dots < p_{\nu} \leq \vartheta - 1$ و $q_1, \dots, q_{\eta} \geq 1$ باشد، در نظر بگیرید.

$$Q\left(t, g^{(\vartheta)}(t), g^{(p_1)}(t), \dots, g^{(p_{\nu})}(t), \underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_{\vartheta}} R^1(t, s_1, g(s_1)) ds_1 \dots ds_{q_1}}_{q_1}, \dots, \right) \quad (35.4)$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_{\vartheta}} R^{\eta}(t, s_1, g(s_1)) ds_1 \dots ds_{q_{\eta}}}_{q_{\eta}} = 0.$$

با استفاده از معادلات (۱۶.۴) و (۳۵.۴) و اعمال تغییر متغیر τ به معادله انتگرال-دیفرانسیل متناظر تبدیل می‌شود، داریم:

$$Q\left(\tau, g^{(\vartheta)}(\tau), g^{(p_1)}(\tau), \dots, g^{(p_{\nu})}(\tau), \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} R^1(\tau, \sigma_1, g(\sigma_1); t_0, t_f) d\sigma_1 \dots d\sigma_{q_1}}_{q_1}, \dots, \right) \quad (36.4)$$

$$\dots, \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} R^{\eta}(\tau, \sigma_1, g(\sigma_1); t_0, t_f) d\sigma_1 \dots d\sigma_{q_{\eta}}}_{q_{\eta}} = 0.$$

با جای‌گذاری معادلات (۲۴.۴) و (۲۵.۴) و (۲۵.۴ب) در معادله (۳۶.۴) داریم:

$$Q\left(\tau, h(\tau), \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-p_1}, \dots}_{\vartheta-p_1}, \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} h(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-p_{\nu}}, \dots}_{\vartheta-p_{\nu}}, \right. \\ \left. \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{q_1}} R^1(\tau, \sigma_1, \varrho(\sigma_1); t_o, t_f) d\sigma_1 \dots d\sigma_{q_1}, \dots}_{q_1}, \right. \\ \left. \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{q_{\eta}}} R^{\eta}(\tau, \sigma_1, \varrho(\sigma_1); t_o, t_f) d\sigma_1 \dots d\sigma_{q_{\eta}}; t_o, t_f}_{q_{\eta}}\right) = 0. \quad (37.4)$$

بنابراین معادلات (۱۸.۴) و (۳۷.۴) و همچنین معادله (۲۹.۴) معادله انتگرال متناظر با معادلات انتگرال-دیفرانسیل (۱۵.۴) و (۲۳.۴) و (۳۵.۴) است.

حال، معادله انتگرال (۳۷.۴) با استفاده از نقاط هم‌محلی LGR با ماتریس انتگرال شبه‌طیفی تقریب زده می‌شود، داریم:

$$Q\left(\hat{\tau}_k, \hat{h}_k, \left(\sum_{i=1}^N \hat{I}_{ki}^{\vartheta-p_1} \hat{h}_i\right), \dots, \left(\sum_{i=1}^N \hat{I}_{ki}^{\vartheta-p_{\nu}} \hat{h}_i\right), \left(\sum_{i=1}^N \hat{I}_{ki}^{q_1} \hat{R}_i^1\right), \dots, \right. \\ \left. \left(\sum_{i=1}^N \hat{I}_{ki}^{q_{\eta}} \hat{R}_i^{\eta}\right); t_o, t_f\right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (38.4)$$

به‌طوری که $\hat{R}_i^j$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{R}_i^j \triangleq R^j(\hat{\tau}_k, \hat{v}_i, \hat{\varrho}_i; t_o, t_f), \quad j = 1, 2, \dots, \eta. \quad (39.4)$$

در مقایسه با معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی، معادلات (۱۸.۴) و (۳۸.۴) (همچنین معادله (۳۱.۴)) با متغیر $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^N$ (همچنین $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^N$ و $\{g^j(-1)\}_{j=0}^{\vartheta-1}$) یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تشکیل می‌دهند. بنابراین برای حل دستگاه غیرخطی روشی مانند روش نیوتن برای به‌دست آوردن $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^N$ (همچنین $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^N$ و $\{g^j(-1)\}_{j=0}^{\vartheta-1}$) باید مناسب باشد، در پایان برای به‌دست آوردن $\{\hat{g}_k\}_{k=1}^N$ از معادله (۳۳.۴) استفاده می‌شود.

۵.۴ آنالیز همگرایی

در این بخش، آنالیز همگرایی روش شبه‌طیفی پیشنهادی را برای نقاط هم‌محلی LGR در هر دو فضای L^{∞} و L^2 بررسی می‌کنیم، البته همین نتایج را می‌توان برای نقاط هم‌محلی LG نیز توسعه داد.

در بعضی از کران خطاهای تقریب چندجمله‌ای لژاندر، فقط برخی از نرم‌های L^2 که در سمت راست معادله (۱۵.۱) ظاهر می‌شود، بررسی می‌شوند. بنابراین شبه‌نرم‌ها مناسب‌ترند

$$|\nu(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)} \triangleq \left(\sum_{j=\min(m,N+1)}^m \|\nu^{(j)}(\tau)\|^2 \right)^{1/2} \quad (40.4)$$

توجه داشته باشید هرگاه $N \geq m - 1$ داریم:

$$|\nu(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)} = |\nu(\tau)|_{H^m(-1,1)} \quad (41.4)$$

لم ۱.۵.۴. فرض کنید $\nu(\tau) \in H^m(-1,1)$ و $m \geq 1$ سپس داریم:

$$\|\nu(\tau) - \hat{T}_N \nu(\tau)\| \leq CN^{-m} |\nu(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)}, \quad (42.4)$$

$$\|\nu(\tau) - \hat{T}_N \nu(\tau)\|_\infty \leq CN^{\frac{1}{2}-m} |\nu(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)}. \quad (42.4 \text{ ب})$$

بهطوری که $\hat{T}_N(\cdot)$ تابع درونیابی لاگرانژ متناظر با نقاط LGR $\{\hat{\tau}_i\}_{i=1}^{N+1}$ است. همین نتایج برای نقاط LG و LGR به دست می آید.

برهان. توسط

$$\|u - I_N u\|_{L^2(-1,1)} \leq CN^{(-m)} |u|_{H^{m;N}(-1,1)}$$

و

$$\|r - I_N^{\alpha,\beta} \nu\|_{L^\infty(I)} \leq CN^{\frac{1}{2}-m} |\nu|_{H^{m;N}(I)}$$

□

از معادله (۵.۴.۳۳) [۳۴] و معادله (۳.۱۰) [۵۰] اثبات می شود.

معادله خطا

بدون از دست دادن کلیت، معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$g(\tau) = f(\tau) + \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} g(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta}, \quad \tau \in [-1, 1] \quad (43.4)$$

با نقاط هم محلی LGR $\{\hat{\tau}_k\}_{k=1}^{N+1}$ پارامترهای مهم معادله انتگرال در بخش (۴.۴) به دست آمده است.

$$g(\hat{\tau}_k) = f(\hat{\tau}_k) + \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_k} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} g(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta}, \quad (44.4)$$

و

$$\hat{g}_k = f(\hat{\tau}_k) + \left(\sum_{i=1}^{N+1} \hat{I}_{ki}^{\vartheta} \hat{g}_i \right), \quad (45.4)$$

است، بهطوری که $\{\hat{g}_k \approx g(\hat{\tau}_k)\}_{k=1}^{N+1}$ برقرار است. با تفریق معادله (۴۵.۴) از (۴۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned} g(\hat{\tau}_k) - \hat{g}_k &= \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_k} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} g(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} - \left(\sum_{i=1}^{N+1} \hat{I}_{ki}^{\vartheta} \hat{g}_i \right) \\ &= \underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_k} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \end{aligned} \quad (46.4)$$

به‌طوری که داریم:

$$e(\tau) \triangleq g(\tau) - \hat{g}^N(\tau) \quad (\text{آ}۴۷.۴)$$

$$\hat{g}^N(\tau) \triangleq \sum_{k=1}^{N+1} \hat{g}_k \hat{\mathcal{L}}_k(\tau) \quad (\text{ب}۴۷.۴)$$

$\hat{\mathcal{L}}_k(\tau)$ را در دو طرف معادله (۴۶.۴) ضرب و از $k = 1$ تا $k = N + 1$ جمع می‌کنیم،

$$\sum_{k=1}^{N+1} \hat{\mathcal{L}}_k(\tau) g(\hat{\tau}_k) - \sum_{k=1}^{N+1} \hat{\mathcal{L}}_k(\tau) \hat{g}_k = \sum_{k=1}^{N+1} \hat{\mathcal{L}}_k(\tau) \left(\underbrace{\int_{-1}^{\hat{\tau}_k} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \right)$$

بنابراین داریم:

$$\hat{T}_N g(\tau) - \hat{g}^N(\tau) = \hat{T}_N \left(\underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \right) \quad (\text{۴۸.۴})$$

حال با جای‌گذاری معادله (آ۴۷.۴) در معادله (۴۸.۴) داریم:

$$e(\tau) = \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} + \varepsilon_1(\tau) + \varepsilon_2(\tau) \quad (\text{۴۹.۴})$$

به‌طوری که:

$$\varepsilon_1(\tau) \triangleq g(\tau) - \hat{T}_N g(\tau) \quad (\text{آ}۵۰.۴)$$

$$\varepsilon_2(\tau) \triangleq \hat{T}_N \left(\underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \right) - \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \quad (\text{ب}۵۰.۴)$$

توسط معادله (۴۹.۴) می‌رسیم به :

$$\begin{aligned} |e(\tau)| &\leq \left| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \right| + |\varepsilon_1(\tau)| + |\varepsilon_2(\tau)| \\ &\leq C \int_{-1}^{\tau} |e(\sigma)| d\sigma + |\varepsilon_1(\tau)| + |\varepsilon_2(\tau)| \end{aligned} \quad (\text{۵۱.۴})$$

نامساوی دوم از فرمول انتگرال کوشی و برخی مشتقات ساده‌ی آن حاصل می‌شود.

تخمین خطا در L^∞

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنید $g(\tau)$ جواب دقیق معادله انتگرال (۴۳.۴) و $\hat{g}^N(\tau)$ جواب تقریبی باشد که از معادله (۴۵.۴) و (ب۴۷.۴) به‌دست می‌آید. اگر $g(\tau) \in H^m(-1, 1)$ و $m \geq 1$ باشد و $e(\tau)$ توسط معادله (آ۴۷.۴) تعریف شود، بنابراین برای N های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\|e(\tau)\|_\infty \leq C N^{\frac{1}{4}-m} |g(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)}, \quad (\text{۵۲.۴})$$

برهان. توسط معادله (۵۱.۴) و نامساوی استاندارد گرونوال ^۵ با توجه به [۴۷، ۴۹] داریم:

$$\|e(\tau)\|_{\infty} \leq C \sum_{j=1}^2 \|\varepsilon_j(\tau)\|_{\infty} \quad (53.4)$$

حال با توجه به معادله (۴۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1(\tau)\|_{\infty} &= \|g(\tau) - \hat{T}_N g(\tau)\|_{\infty} \\ &\leq CN^{\frac{1}{4}-m} |g(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)}, \end{aligned} \quad (54.4)$$

برای $m = 1$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_2(\tau)\|_{\infty} &\leq CN^{-\frac{1}{4}} \left\| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}}}_{\vartheta} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta} \right\|_{H^{1;N}(-1,1)} \\ &= CN^{-\frac{1}{4}} \left\| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-1}}}_{\vartheta-1} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-1} \right\| \\ &\leq CN^{-\frac{1}{4}} \left\| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-1}}}_{\vartheta-1} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-1} \right\|_{\infty} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{4}} \|e(\tau)\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (55.4)$$

حال با ترکیب معادلات (۵۳.۴) تا (۵۵.۴) و به اندازه کافی بزرگ بودن N معادله (۵۲.۴) حاصل می‌شود. $\square$

تخمین خطا در L^2

قضیه ۲.۵.۴. فرض کنید $g(\tau)$ جواب دقیق معادله انتگرال (۴۳.۴) و $\hat{g}^N(\tau)$ جواب تقریبی باشد که از معادله (۴۵.۴) و (۴۷.۴) به دست می‌آید. اگر $g(\tau) \in H^m(-1,1)$ و $m \geq 1$ باشد و $e(\tau)$ توسط معادله (۴۷.۴) تعریف شود، لذا برای N های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\|e(\tau)\| \leq CN^{-m} |g(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)}, \quad (56.4)$$

برهان. توسط معادله (۵۱.۴) و نامساوی استاندارد گرونوال با توجه به [۴۷، ۴۹] داریم:

$$\|e(\tau)\| \leq C \sum_{j=1}^2 \|\varepsilon_j(\tau)\| \quad (57.4)$$

حال با توجه به معادله (۴۲.۴) داریم:

$$\|\varepsilon_1(\tau)\| \leq CN^{-m} |g(\tau)|_{H^{m;N}(-1,1)}, \quad (58.4)$$

^۵ standard Grownwall inequality

برای $m = 1$ و با توجه به اندازه کافی بزرگ بودن N ، داریم:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{\vartheta}(\tau)\| &\leq CN^{-1} \left\| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta}} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta}}_{\vartheta} \right\|_{H^1; N(-1,1)} \quad (59.4) \\ &= CN^{-1} \left\| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-1}} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-1}}_{\vartheta-1} \right\| \\ &\leq CN^{-1} \left\| \underbrace{\int_{-1}^{\tau} \dots \int_{-1}^{\sigma_{\vartheta-1}} e(\sigma_1) d\sigma_1 \dots d\sigma_{\vartheta-1}}_{\vartheta-1} \right\|_{\infty} \\ &\leq CN^{-1} \|e(\tau)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

حال با ترکیب معادله (57.4) تا معادله (59.4) با توجه به نتیجه $\|e(\tau)\|_{\infty}$ در معادله (52.4) معادله (56.4) حاصل می‌شود. $\square$

۶.۴ نتایج عددی

مثال ۱.۶.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل [۴۶] زیر را در نظر بگیرید:

$$g''(t) + g(t) + te^t \cdot g'(t) + e^t \cdot \int_0^t e^s g(s) ds = 2e^{-t} - t + te^t, \quad t \in [0, 1] \quad (60.4)$$

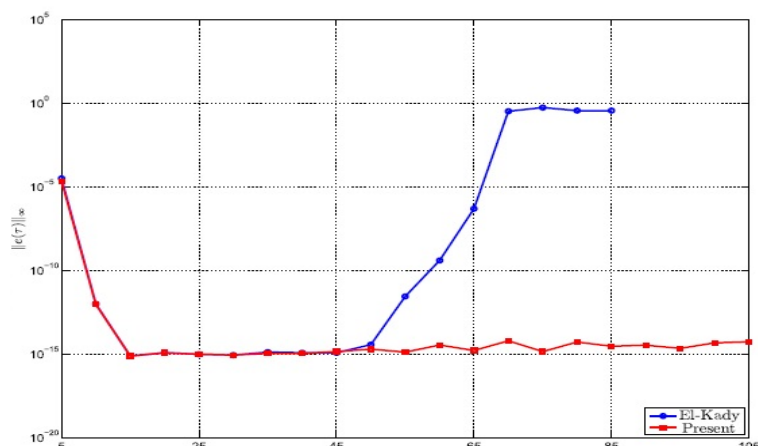
که $g(0) = -g'(0) = 1$ شرایط اولیه و $g(t) = e^{-t}$ جواب دقیق مسئله باشد. به‌وضوح این معادله انتگرال-دیفرانسیل خطی دارای ضرایب متغیر $\psi_0(t) = 1$ و $\psi_1(t) = te^t$ و $\bar{\psi}_1(t) = e^t$ می‌باشد.

این معادله انتگرال-دیفرانسیل را توسط روش شبه‌طیفی در نقاط هم‌محلی LG حل می‌کنیم که در نتیجه به یک دستگاه معادلات جبری خطی مانند معادلات (18.4) و (30.4) با متغیرهای $\{h_k \approx h(\tau_k)\}_{k=1}^N$ تبدیل می‌شود. علاوه‌براین جواب نهایی نظیر معادله (33.4) برای نقاط LG به‌صورت زیر است:

$$g_k = \left(\sum_{i=1}^N I_{ki}^{\vartheta} h_i \right) + \sum_{j=0}^{\vartheta-1} \frac{g^{(j)}(-1)}{j!} (\tau_k + 1)^j, \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (61.4)$$

به‌طوری‌که $\{g_k \approx g(\tau_k)\}_{k=1}^{N+1}$ و $g_{N+1} \approx g(+1)$ است. خطاهای تقریبی در نرم L^{∞} برای روش مورد بررسی و ال-کادی^۶ [۳۹] در شکل ۱.۴ نشان داده شده است. نتیجه می‌شود که روش تقریبی ال‌کادی برای $N > 85$ به‌درستی عمل نمی‌کند اما روش مورد بررسی برای N های بزرگ هم به‌خوبی عمل می‌کند. بنابراین روش مورد بررسی پایداری بهتری نسبت به روش ال-کادی دارد. جدول ۱.۴ لیستی از اعداد شرطی دستگاه‌های خطی حاصل از هر دو روش

^۶ El-Kady



شکل ۱.۴: خطای تقریبی مثال ۱.۶.۴ در نرم L^∞ برای روش مورد بررسی و روش ال-کادی

۱۰۰	۸۰	۶۰	۴۰	۲۰	N
—	$3/6288 \times 10^{18}$	$6/8362 \times 10^8$	$4/0681$	$4/0085$	روش ال-کادی
$4/1041$	$4/0980$	$4/0880$	$4/0681$	$4/0085$	روش حاضر
۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰	۱۰۰۰	۵۰۰	N
—	—	—	—	—	روش ال-کادی
$4/1273$	$4/1269$	$4/1265$	$4/1257$	$4/1233$	روش حاضر

جدول ۱.۴: اعداد شرطی مثال ۱.۶.۴ برای روش حاضر و روش ال-کادی

را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌بینیم عدد شرطی برای روش مورد بررسی مستقل از N تقریبی برابر $4/12$ برای N های بزرگ‌تر است، درحالی‌که با توجه به نتایج حاصل در شکل ۱.۴ دستگاه خطی حاصل از روش ال-کادی دارای شرایط خوبی برای N های بزرگ نیست.

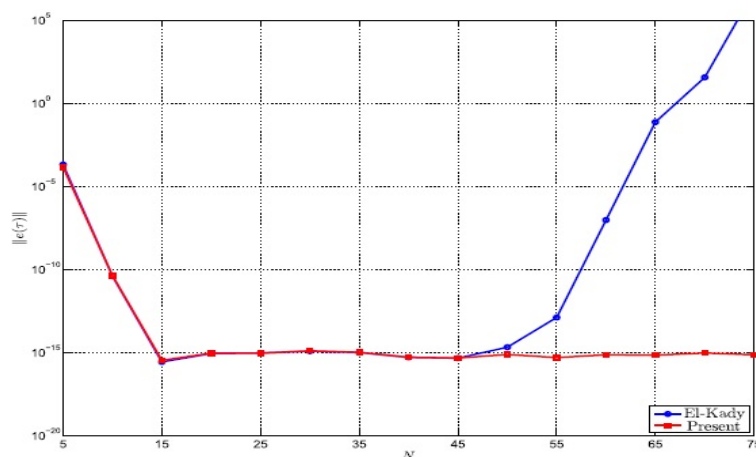
مثال ۲.۶.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل [۴۲] زیر را در نظر بگیرید:

$$g^{(3)}(t) + t \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} s g'(s) ds = \sin(t) - t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}], \quad (62.4)$$

با شرایط اولیه

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = -1, \quad (63.4)$$

به‌طوری‌که $g(t) = \cos(t)$ جواب دقیق می‌باشد. این معادله به‌طور مستقیم جزء انواع معادلات انتگرال-دیفرانسیلی که توصیف کرده‌ایم نیست، اما با تعریف $h(t)$ به‌صورت $h(t) \triangleq g^{(3)}(t)$ می‌توان به معادله انتگرال اصلاح کرد. بنابراین، روش شبه‌طیفی پیشنهادی با نقاط هم‌محلی



شکل ۲.۴: خطای تقریبی مثال ۲.۶.۴ در نرم L^2 برای روش مورد بررسی و روش ال-کادی

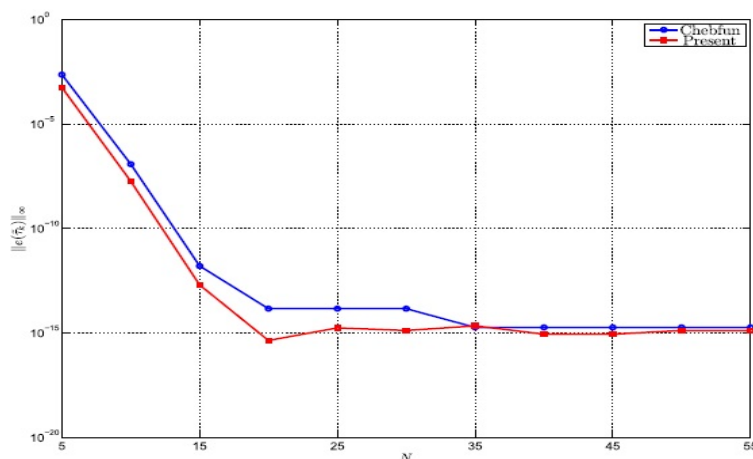
N	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰
روش ال-کادی	۲/۳۱۲۰	۲/۲۹۶۷	$۱/۳۱۹۴ \times ۱۰^{۱۲}$	$۵/۳۷۹۵ \times ۱۰^{۲۱}$	-
روش حاضر	۲/۳۱۲۰	۲/۲۹۶۷	۲/۲۹۱۶	۲/۲۸۹۱	۲/۲۸۷۶
N	۵۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	۲۰۰۰	۳۰۰۰
روش ال-کادی	-	-	-	-	-
روش حاضر	۲/۲۸۲۹	۲/۲۸۲۳	۲/۲۸۲۱	۲/۲۸۲۰	۲/۲۸۱۹

جدول ۲.۴: تعداد شرایط مثال ۲.۶.۴ برای روش حاضر و روش ال-کادی

LGR نیز به معادله انتگرال-دیفرانسیل اعمال می‌شود و دستگاه معادلات جبری خطی حاصل از آن مانند معادلات (۱۸.۴) و (۳۰.۴) با متغیرهای $\{\hat{h}\}_{k=1}^N$ می‌باشد. خطاهای تقریبی در نرم L^2 برای روش مورد بررسی و روش ال-کادی در شکل ۲.۴ نشان داده شده است همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطا برای روش حاضر حدوداً $۱۰^{-۱۵}$ است که برای $N \geq ۱۵$ ثابت مانده است، درحالی‌که خطای روش ال-کادی برای $N \geq ۵۰$ به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد. علاوه‌براین، برای هر دو روش خطا به صورت خطی برای $N \leq ۱۵$ کاهش می‌یابد، و سرعت همگرایی طیفی را می‌توان مشاهده نمود. جدول ۲.۴ لیستی از اعداد شرطی دستگاه‌های خطی حاصل از هر دو روش را نشان می‌دهد. به راحتی نتیجه می‌شود که دستگاه خطی حاصل از روش حاضر شرایط بهتری دارد، درحالی‌که نتایج حاصل از روش ال-کادی برای N های بزرگ دارای شرایط خوبی نیستند.

مثال ۳.۶.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل [۳۶، ۳۳] زیر را در نظر بگیرید:

$$g'(t) + g(t) - t(1 + 2t) \cdot \int_0^t e^{s(t-s)} g(s) ds = 1 + 2t, \quad t \in [0, 1], \quad (۶۴.۴)$$



شکل ۳.۴: حداکثر خطای دقیق مثال ۳.۶.۴

با شرایط اولیه $g(0) = 1$ و با توجه به اینکه $g(t) = e^t$ جواب دقیق می باشد. مانند مثال ۱.۶.۴ این معادله نیز دارای ضرایب متغیر خطی معادله انتگرال-دیفرانسیل به صورت $\psi_1(t) = -t(1 + 2t)$, $\psi_0(t) = 1$ و $r^1(t, s) = e^{s(t-s)}$ است. توسط روش شبه طیفی مورد بررسی در نقاط هم محلی LG و روش طیفی چبیشف [۳۶] این معادله انتگرال-دیفرانسیل را حل می کنیم. خطای تقریبی هر دو روش را در شکل ۳.۴ مشاهده می شود و حداکثر خطای نقطه ای را به صورت زیر تعریف می کنیم:

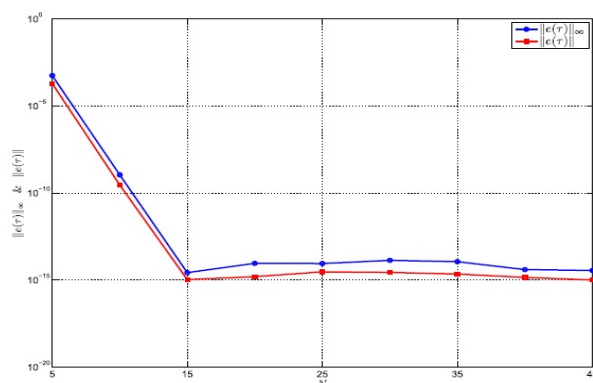
$$\|e(\tilde{\tau}_k)\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq k \leq N} |g(\tilde{\tau}_k) - \tilde{g}_k|, \quad (65.4)$$

به طوری که $\{\tilde{g}_k\}_{k=1}^N$ حل عددی $g(\tau)$ در نقاط هم محلی $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=1}^N$ می باشد. به وضوح سرعت همگرایی برای هر دو روش مشاهده می شود و می بینیم که روش شبه طیفی پیشنهاد شده کمی دشوارتر از روش طیفی چبیشف است [۳۶].

مثال ۴.۶.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل [۵۳] زیر را در نظر بگیرید:

$$g'(t) - \int_0^t g^{(3)}(t) dt = e^t - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}, \quad t \in [0, 1], \quad (66.4)$$

با شرایط اولیه $g(0) = 1$ و توجه کنید که $g(t) = e^t$ جواب دقیق مسئله می باشد. برخلاف معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی فوق این معادله، معادله انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی است. بنابراین، این معادله را توسط روش شبه طیفی پیشنهاد شده در نقاط هم محلی LGR به معادلات انتگرال تبدیل کردیم و دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل با متغیرهای $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^N$ را با روش نیوتن-رافسون حل کردیم. خطاهای تقریبی در هر دو نرم L^2 و L^∞ در شکل ۴.۴ نشان داده شده است و دوباره سرعت همگرایی مانند قبل مشاهده می شود. به این ترتیب، به دست آوردن جواب دقیق عددی در معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی روش شبه طیفی مشکل ساز است.



شکل ۴.۴: خطای تقریبی مثال ۴.۶.۴ در هر دو نرم L^2 و L^∞

۷.۴ نتیجه‌گیری

در روش شبه‌طیفی، توابع براساس چندجمله‌ای درونیابی گسترش می‌یابند به این صورت که نقاط گره‌ای دارای بسط مشترک هستند. از آن‌جا که انتخاب دلخواه نقاط گره‌ای نتایج ضعیفی در درونیابی دارد، نقاط مختلف انتگرال‌گیری گاوسی برای به‌دست آوردن بهترین دقت درونیابی یک تابع انتخاب شده است. مشتقات این چندجمله‌ای‌های درونیابی در نقاط گره‌ای توسط ماتریس مشتق‌گیری تعیین می‌شود. این دو جنبه مهم از روش‌های شبه‌طیفی یعنی انتخاب چندجمله‌ای درونیابی به‌عنوان توابع آزمون و نقاط انتگرال‌گیری گاوسی، آن‌ها را از روش‌های دیگر متمایز می‌کند.

در این پایان‌نامه در فصل سوم تقریبی از یک تابع پیوسته با کمک چندجمله‌ای لژاندر معرفی کردیم. این روش مبتنی بر تقریب لژاندر روی نقاط مختلف S_1, S_2 و S_3 بوده است که یک ماتریس عملی جدید را برای انتگرال تقریب‌های متوالی به‌دست آوردیم. این روش منجر به نتایج بسیار دقیقی شده که می‌تواند برای هر دو معادلات انتگرال خطی و غیرخطی و معادلات انتگرال-دیفرانسیل با موفقیت به کار رود. در فصل چهارم یک روش انتگرال‌گیری شبه‌طیفی را برای محاسبه ماتریس انتگرال شبه‌طیفی برای نقاط هم‌محلی از طریق رابطه بازگشتی ماتریس انتگرال لژاندر ارائه دادیم. آنالیز همگرایی را برای روش پیشنهاد شده شبه‌طیفی در هر دو فضای L^2 و L^∞ از طریق یک معادلات انتگرال خطی ارائه دادیم. جدول‌ها و نمودارهای حداکثر خطای مطلق و تقریبی برای روش مذکور و مقادیری که توسط ال-کادی به‌دست آمده ارائه شد. به این نتیجه رسیدیم که دستگاه خطی حاصل از روش حاضر برای N ‌های بزرگ شرایط بهتری نسبت به روش ال-کادی دارد. سرعت همگرایی را بین روش شبه‌طیفی و روش طیفی چبیشف بررسی کردیم و مشاهده شد که روش شبه‌طیفی تا حدودی بهتر از روش طیفی چبیشف بوده است و همچنین مشاهده شد که این روش برای جواب دقیق عددی در معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی با مشکل مواجه می‌شود.

مراجع

- [۱] دهقان م، (۱۳۹۵)، ” نخستین درس در معادلات انتگرال ” چاپ چهارم، انتشارات گسترش علوم پایه، صفحه ۱۲۰
- [۲] بزم س، (۱۳۸۹)، پایان نامه دکترا: ” حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی ”، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم،
- [۳] تابش ی، صالحی ا، لالی ج، وکیلی ن، (۱۳۸۹)، ” توپولوژی، نخستین درس ” چاپ چهارم، انتشارات نشر دانشگاهی
- [۴] ایزد دوستدار ن، (۱۳۹۴)، ” آنالیز حقیقی رویدن فارسی ” انتشارات دانشگاه تهران
- [5] Mason J.C. and Handscomb D.C. (2003), ”Chebyshev polynomials”, United States of America, pp. 12-35
- [6] Wazwaz A.M. (2002), ” A reliable treatment for mixed Volterra–Fredholm integral equations” **Applied Mathematics and Computation**, 127,2, pp 405-414
- [7] Borzabadi A.H. and Heidari M. (2014), ” A successive iterative approach for two dimensional nonlinear Volterra-Fredholm integral equations” **Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization**, 4,1, pp 95-104
- [8] Fallahzadeh A. (2012), ” Solution of two-dimensional Fredholm integral equation via RBF-triangular method” **Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing**, pp 1-5
- [9] Ziyadee F. and Tari A. (2014), ” Regularization Method for the Two-dimensional Fredholm integral Equations of the First Kind” **International Journal of Nonlinear Science**, 18, pp 189-194
- [10] Afroozi G.A. and Vahidi J. and Saeidy M. (2010), ” Solving a class of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations by means of the homotopy analysis method” **International Journal of Nonlinear Science**, 9,2, pp 213-219

-
- [11] Rahman M. (2007), "Integral Equations and their Applications", Britain Athenaeum Press Ltd
- [12] Behzadi S.S. (2012), "The use of iterative methods to solve two-dimensional nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations" **Communications in Numerical Analysis**, pp 1–20
- [13] Nemati S. and Ordokhani Y. (2012), "Numerical solution of two-dimensional nonlinear Volterra integral equations by the Legendre polynomials" **Journal of Science (Karazni University)**, 11,2, pp 195–210
- [14] Avazzadeh Z. and Heydari M. and Loghmani G.B. (2011), "A comparison between solving two dimensional integral equations by the traditional collocation method and radial basis functions". **Applied Mathematics and Science**, 5, pp 1145-1152
- [15] Nadjafi J.S. and Samadi O.R.N. and Tohidi E. (2011), "Numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations by spectral Galerkin method" **Journal Applied Mathematics**, 1,2, pp 159–174
- [16] Razzagi M. and Yousefi S. (2001), "Legendre wavelets method for the solution of nonlinear problems in the calculus of variations" **Mathematics and Computation Modell**, 34, pp 45–54
- [17] Yousefi S.A. (2006), "Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane-Emden type" **Applied Mathematics and Computation**, 181, pp 1417–1422
- [18] Venkatesh S.G. and Ayyaswamy S.K. and Raja Balachandar S. (2012), "The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu type" **Applied Mathematics and Computation**, 63, pp 1287–1295
- [19] Chokri C. (2013), "On the numerical solution of Volterra - Fredholm integral equations with abel kernel using Legendre polynomials" **International Journal of Advanced Scientific and technical Research**, 1, pp 404–412
- [20] Liu Y. (2013), "Application of Legendre polynomials in solving Volterra integral equations of the second kind" **Applied Mathematics**, 3,5, pp 157–159
- [21] Black K. (1997), "A spectral technique with a local spectral basis" **SIAM Journal on Scientific Computing**, 18,2, pp 70-355

- [22] Clenshaw C.W. and Curtis A.R. (1960), " A method for numerical integration on an automatic computer" **Numerische Mathematik**, 2, pp 197–205
- [23] EL-gendi S.E. (1969), " Chebyshev solutions of differential, integral, and integro-differential equations" **The Computer Journal**, 12, pp 7-282
- [24] E1-Gindy T.M. and Salim M.S. (1990), " Penalty function with partial quadratic interpolation technique in the constrained optimization problems" **Journal of Mathematics and Computer Science**, 3,1, pp 85–90
- [25] Hatzivramidis D. and Ku H.C. (1985), " An integral Chebyshev expansion method for boundary – value problems of ODE type" **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 11, pp 6-581
- [26] Hosseini S.M. and Shahmorad S. (2003), " Numerical solution of a class of integro-differential equations by the Tau method with an error estimation".**Applied Mathematics and Computation**, 136, pp 70-559
- [27] Kelly C.T. (1995), " A fast multilevel algorithm for integral equations". **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 2, pp 13-501
- [28] Kelley C.T. and Northrup J.I. (1988), " A pointwise quasi-Newton method for integral equations". **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 25, pp 55-1138
- [29] Rothman E.G. and Parter S.V. (1995), " Preconditioning Legendre spectral collection approximations to elliptic problems" **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 32, pp 85-333
- [30] Pour-Mahmoud J. and Rahimi-Ardabili M.Y. and Shahmorad S. (2005), " Numerical solution of Volterra integro-differential equations by the Tau method with the Chebyshev and Legendre bases".**Applied Mathematics and Computation**, 170, pp 38-314
- [31] Maday Y. and Kaber S. and Tadmor E. (1993), " Legendre pseudospectral viscosity method for nonlinear conservation laws".**SIAM Journal on Numerical Analysis**, 30, pp 42-321
- [32] Rathod H.T. and Nagaraja K.V. and Venkatesudu B. and Ramesh N.L. (2004), " Gauss–Legendre quadrature over a triangle" **Journal of the Indian Institute of Science**, 84, pp 83–188

-
- [33] Brunner H. (1986), " High-order methods for the numerical solution of Volterra integro-differential equations " **Journal of Computational and Applied Mathematics** 15(3) 301–309.
- [34] Canuto C. and Hussaini M.Y. and Quarteroni A. and Zang T.A. (2006), " **Spectral Methods**" Fundamentals in Single Domains, 1st edition, Springer-Verlag, Berlin, Germany,
- [35] Chen Z. and ChengX. (2014), " An efficient algorithm for solving Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels" **Journal of Computational and Applied Mathematics** , 25, pp 57–64
- [36] Driscoll T.A. (2010), " Automatic spectral collocation for integral, integro-differential and integrally reformulated differential equations" **Journal of Computational Physics**, 229,17, pp 5980–5998.
- [37] El-Gendi S.E. (1969), " Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations" **The Computer Journal**, 12,3, pp 282–287
- [38] El-Gendi S.E. and Nasr H. and El-Hawary H.M. (1992), " Numerical solution of Poisson's equation by expansion in Chebyshev polynomials" **Bulletin of the Calcutta Mathematical Society**, 84,5, pp 443–449
- [39] El-Kady M. and Biomy M.(2010), " Efficient Legendre pseudospectral method for solving integral and integro-differential equations" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 15,5, pp 1724–1739
- [40] Elbarbary E.M.E. (2007), " Pseudospectral integration matrix and boundary value problems" **International Journal of Computer Mathematics**, 84,12, pp 1851–1861
- [41] Elgindy K.T. (2009), " Generation of higher order pseudospectral integration matrices" **Applied Mathematics and Computation**, 209,2, pp 153–161
- [42] Elgindy K.T. and Smith-Miles K.A. (2013), " Solving boundary value problems, integral and integro-differential equations using Gegenbauer integration matrices" **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 237,1, pp 307–325
- [43] Elgindy K.T. and Smith-Miles K.A. (2013), " Optimal Gegenbauer quadrature over arbitrary integration nodes " **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 242, pp 82–106

- [44] Hesthaven J.S. and Gottlieb S. and Gottlieb D. (2007), ” **Spectral Methods for Time-Dependent Problems**” 21. 1st edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK
- [45] Nemati S. (2015), ” Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using Legendre collocation method” **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 278, pp 29–36
- [46] Rashed M.T. (2004), ” Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations” **Applied Mathematics and Computation**, 151,3, pp 869–878
- [47] Tang T. and Xu X. and Cheng J. (2008), ” On spectral methods for Volterra integral equations and the convergence analysis” **Journal of Computational and Mathematics**, 26,6, pp 825–837
- [48] Trefethen L.N. (2000), ” **Spectral Methods in MATLAB**” 10. SIAM Press, Philadelphia
- [49] Wei Y. and Chen Y. (2012), ” Convergence analysis of the spectral methods for weakly singular Volterra integro-differential equations with smooth solutions” **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, 4,1, pp 1–20
- [50] Xie Z. and Li X. and Tang T. (2012), ” Convergence analysis of spectral Galerkin methods for Volterra type integral equations” **Journal of Scientific Computing** , 53,2, pp 414–434
- [51] Yüzbaşı Ş. (2014), ” Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations ” **Applied Mathematics and Computation**, 232, pp 1183–1199
- [52] Yüzbaşı Ş. (2015), ” Numerical solutions of system of linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation” **Applied Mathematics and Computation**, 250, pp 320–338
- [53] Zhu L. and Fan Q. (2013), ” Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW” **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 18,5, pp 1203–1213
- [54] El-Hawary H.M. and Salim M.S. and Hussien H.S. (2000), ” An optimal ultraspherical approximation of integrals” **International Journal of Computer Mathematics**, 76, pp 219–237
- [55] Szegő G. (1975), ” **Orthogonal Polynomials**” 23. in: American Mathematical Society

-
- [56] Doaa Shokry M. and RA T. (2017), " Comparison of Chebyshev and Legendre polynomials methods for solving two dimensional Volterra-Fredholm integral equations" **Journal of the Egyptian Mathematical Society**, 25,3, pp 302-307
- [57] Xiaojun T. and Xu H. (2018), " A pseudospectral scheme and its convergence analysis for high-order integro-differential equations", **Applied Numerical Mathematics**, 125, pp 51-67
- [58] Mason J.C. and Handscomb D.C. (2002), "**Chebyshev polynomials**" Chapman and Hall/CRC
- [59] William Wallace B. (2004), "**Special functions for scientists and engineers**" Courier Corporation
- [60] Abramowitz M. and Stegun I.A. (1965), "Handbook of Mathematical Functions" 55. Courier Corporation
- [61] Claudio C. and Hussaini M.Y. and Alfio Q. and Zang T.A. (2006), " **Spectral methods**", Berlin, Springer

پیوست آ

حل مثال ۱.۴.۲ با Maple

```

> restart :
> with(student) :
> m := 2; T[0] := 1; T[1] := x;
                                m := 2
                                T0 := 1
                                T1 := x

```

(1)

```

> for n from 2 to m do
  T[n] := simplify( 2·x·T[n-1] - T[n-2])
end do
                                T2 := 2x2 - 1

```

(2)

```

> for k from 0 to m do
  T[k] := unapply( T[k], x)
end do
                                T0 := x → 1
                                T1 := x → x
                                T2 := x → 2x2 - 1

```

(3)

```

> for r from 0 to 2 do
  x[r] := cos( (r·Pi) / 2 )
end do
                                x0 := 1
                                x1 := 0
                                x2 := -1

```

(4)

```

> for s from 0 to 2 do
  t[s] := cos( (s·Pi) / 2 )
od;
                                t0 := 1
                                t1 := 0
                                t2 := -1

```

(5)

```

> eql := ∑i=02 ∑j=02 a[i,j]·T[i](1)·T[j](1)
- ∫-11 ∫-11 (1-y)-1/2 · ∑i=02 ∑j=02 a[i,j]T[i](y)T[j](z) dy dz = 1 + 1 - 1/3 (2√(1+1) - 2√(1-1))
· (1+1) + √(1+1) (1+1) · ( -16/15 + 8/15 - 2/5 ) + √(1-1) (1+1) · ( 16/15 + 8/15
+ 2/5 );

```

$$\begin{aligned}
eq1 &:= a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} + a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} \\
&- \frac{4}{45} \sqrt{2} a_{2,2} + \frac{4}{9} \sqrt{2} a_{1,2} + \frac{4}{3} \sqrt{2} a_{0,2} + \frac{4}{15} \sqrt{2} a_{2,0} - \frac{4}{3} \sqrt{2} a_{1,0} - 4 \sqrt{2} a_{0,0} = 2 \\
&- \frac{16}{5} \sqrt{2}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
> eq2 &:= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](1) \cdot T[j](0) \\
&- \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] T[i](y) T[j](z) \, dy \, dz = 1 + 0 - \frac{1}{3} (2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{1-1}) \\
&\cdot (0+1) + \sqrt{1+1} (0+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{1-1} (0+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \right. \\
&\left. + \frac{2}{5} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq2 &:= a_{0,0} - a_{0,2} + a_{1,0} - a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,2} \\
&- \frac{2}{45} \sqrt{2} a_{2,2} + \frac{2}{9} \sqrt{2} a_{1,2} + \frac{2}{3} \sqrt{2} a_{0,2} - \frac{1}{15} \sqrt{2} a_{2,1} + \frac{1}{3} \sqrt{2} a_{1,1} + \sqrt{2} a_{0,1} \\
&+ \frac{2}{15} \sqrt{2} a_{2,0} - \frac{2}{3} \sqrt{2} a_{1,0} - 2 \sqrt{2} a_{0,0} = 1 - \frac{8}{5} \sqrt{2}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
> eq3 &:= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](1) \cdot T[j](-1) \\
&- 0 = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{1-1}) \cdot (-1+1) + \sqrt{1+1} (-1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} \right) \\
&+ \sqrt{1-1} (-1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} + \frac{2}{5} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq3 &:= a_{0,0} - a_{0,1} + a_{0,2} + a_{1,0} - a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,1} + a_{2,2} \\
&0 = 2
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
> eq4 &:= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](0) \cdot T[j](1) \\
&- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] T[i](y) T[j](z) \, dy \, dz = 0 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{0-1}) \\
&\cdot (1+1) + \sqrt{0+1} (1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} \cdot 0 + \frac{8}{15} \cdot 0 - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{0-1} (1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} \cdot 0 + \frac{8}{15} \right. \\
&\left. \cdot 0 + \frac{2}{5} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq4 &:= a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} - a_{2,0} - a_{2,1} - a_{2,2} \\
&- \frac{4}{5} a_{2,2} - \frac{4}{9} a_{1,2} + \frac{4}{3} a_{0,2} - \frac{4}{9} I a_{1,2} + \frac{4}{5} I a_{2,2} + 4 I a_{0,0} + \frac{12}{5} a_{2,0} + \frac{4}{3} a_{1,0} - 4 a_{0,0}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$-\frac{4}{3} \operatorname{I} a_{0,2} + \frac{4}{3} \operatorname{I} a_{1,0} - \frac{12}{5} \operatorname{I} a_{2,0} = -\frac{17}{15} + \frac{32}{15} \operatorname{I}$$

$$\begin{aligned} &> eq5 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](0) \cdot T[j](0) \\ &\quad - \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (0-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] T[i](y) T[j](z) \, dy \, dz = 0 + 0 - \frac{1}{3} (2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{0-1}) \\ &\quad \cdot (0+1) + \sqrt{0+1} (0+1) \cdot \left(0+0-\frac{2}{5}\right) + \sqrt{0-1} (0+1) \cdot \left(0+0+\frac{2}{5}\right); \end{aligned}$$

$$eq5 := a_{0,0} - a_{0,2} - a_{2,0} + a_{2,2}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{5} a_{2,2} - \frac{2}{9} a_{1,2} + \frac{2}{3} a_{0,2} - \frac{2}{9} \operatorname{I} a_{1,2} + \frac{2}{5} \operatorname{I} a_{2,2} + 2 \operatorname{I} a_{0,0} - \frac{3}{5} a_{2,1} - \frac{1}{3} a_{1,1} + a_{0,1} \\ &\quad - \frac{2}{3} \operatorname{I} a_{0,2} - \operatorname{I} a_{0,1} + \frac{2}{3} \operatorname{I} a_{1,0} + \frac{6}{5} a_{2,0} + \frac{2}{3} a_{1,0} - 2 a_{0,0} - \frac{1}{3} \operatorname{I} a_{1,1} - \frac{6}{5} \operatorname{I} a_{2,0} \\ &\quad + \frac{3}{5} \operatorname{I} a_{2,1} = -\frac{16}{15} + \frac{16}{15} \operatorname{I} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &> eq6 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](0) \cdot T[j](-1) \\ &\quad - 0 = 0 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{0-1}) \cdot (-1+1) + \sqrt{0+1} (-1+1) \cdot \left(0+0-\frac{2}{5}\right) \\ &\quad + \sqrt{0-1} (-1+1) \cdot \left(0+0+\frac{2}{5}\right); \end{aligned}$$

$$eq6 := a_{0,0} - a_{0,1} + a_{0,2} - a_{2,0} + a_{2,1} - a_{2,2}$$

$$0 = 1$$

(11)

$$\begin{aligned} &> eq7 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](-1) \cdot T[j](1) \\ &\quad - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] T[i](y) T[j](z) \, dy \, dz = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{-1+1} \\ &\quad - 2\sqrt{-1-1}) \cdot (1+1) + \sqrt{-1+1} (1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) - \frac{2}{5}\right) + \sqrt{-1-1} (1 \\ &\quad + 1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) + \frac{2}{5}\right); \end{aligned}$$

$$eq7 := a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} - a_{1,0} - a_{1,1} - a_{1,2} + a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{4}{45} \operatorname{I} \sqrt{2} a_{2,2} + \frac{4}{9} \operatorname{I} \sqrt{2} a_{1,2} - \frac{4}{3} \operatorname{I} \sqrt{2} a_{0,2} - \frac{4}{15} \operatorname{I} \sqrt{2} a_{2,0} - \frac{4}{3} \operatorname{I} \sqrt{2} a_{1,0} + 4 \operatorname{I} \sqrt{2} a_{0,0} \\ &= 2 + \frac{16}{5} \operatorname{I} \sqrt{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \text{eq8} := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](-1) \cdot T[j](0) \\
& - \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (-1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] T[i](y) T[j](z) \, dy \, dz = 1 + 0 - \frac{1}{3} (2\sqrt{-1+1} \\
& - 2\sqrt{-1-1}) \cdot (0+1) + \sqrt{-1+1} (0+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{-1-1} (0 \\
& + 1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) + \frac{2}{5} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{eq8} := a_{0,0} - a_{0,2} - a_{1,0} + a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,2} \\
& \frac{2}{45} \text{I}\sqrt{2} a_{2,2} + \frac{2}{9} \text{I}\sqrt{2} a_{1,2} - \frac{2}{3} \text{I}\sqrt{2} a_{0,2} + \frac{1}{15} \text{I}\sqrt{2} a_{2,1} + \frac{1}{3} \text{I}\sqrt{2} a_{1,1} - \text{I}\sqrt{2} a_{0,1} \quad (13) \\
& - \frac{2}{15} \text{I}\sqrt{2} a_{2,0} - \frac{2}{3} \text{I}\sqrt{2} a_{1,0} + 2 \text{I}\sqrt{2} a_{0,0} = 1 + \frac{8}{5} \text{I}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{eq9} := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](-1) \cdot T[j](-1) \\
& - 0 = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{-1+1} - 2\sqrt{-1-1}) \cdot (-1+1) + \sqrt{-1+1} (-1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) - \frac{2}{5} \right) \\
& + \sqrt{-1-1} (-1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) + \frac{2}{5} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{eq9} := a_{0,0} - a_{0,1} + a_{0,2} - a_{1,0} + a_{1,1} - a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,1} + a_{2,2} \\
& 0 = 2 \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{solve} \left(\left\{ a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} + a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} - \frac{4}{45} \sqrt{2} a_{2,2} \right. \right. \\
& + \frac{4}{9} \sqrt{2} a_{1,2} + \frac{4}{3} \sqrt{2} a_{0,2} + \frac{4}{15} \sqrt{2} a_{2,0} - \frac{4}{3} \sqrt{2} a_{1,0} - 4 \sqrt{2} a_{0,0} = 2 - \frac{16}{5} \sqrt{2}, \\
& a_{0,0} - a_{0,2} + a_{1,0} - a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,2} - \frac{2}{45} \sqrt{2} a_{2,2} + \frac{2}{9} \sqrt{2} a_{1,2} + \frac{2}{3} \sqrt{2} a_{0,2} \\
& - \frac{1}{15} \sqrt{2} a_{2,1} + \frac{1}{3} \sqrt{2} a_{1,1} + \sqrt{2} a_{0,1} + \frac{2}{15} \sqrt{2} a_{2,0} - \frac{2}{3} \sqrt{2} a_{1,0} - 2 \sqrt{2} a_{0,0} = 1 \\
& - \frac{8}{5} \sqrt{2}, a_{0,0} - a_{0,1} + a_{0,2} + a_{1,0} - a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,1} + a_{2,2} = 2, a_{0,0} + a_{0,1} \\
& + a_{0,2} - a_{2,0} - a_{2,1} - a_{2,2} - \frac{4}{5} a_{2,2} - \frac{4}{9} a_{1,2} + \frac{4}{3} a_{0,2} + \frac{4}{3} \text{I} a_{1,0} - \frac{4}{9} \text{I} a_{1,2} \\
& - \frac{4}{3} \text{I} a_{0,2} + \frac{12}{5} a_{2,0} + \frac{4}{3} a_{1,0} - 4 a_{0,0} + \frac{4}{5} \text{I} a_{2,2} - \frac{12}{5} \text{I} a_{2,0} + 4 \text{I} a_{0,0} = -\frac{17}{15} \\
& + \frac{32}{15} \text{I}, a_{0,0} - a_{0,2} - a_{2,0} + a_{2,2} - \frac{2}{5} a_{2,2} - \frac{2}{9} a_{1,2} + \frac{2}{3} a_{0,2} - \text{I} a_{0,1} + \frac{2}{3} \text{I} a_{1,0} \\
& - \frac{2}{9} \text{I} a_{1,2} - \frac{3}{5} a_{2,1} - \frac{1}{3} a_{1,1} + a_{0,1} - \frac{2}{3} \text{I} a_{0,2} + \frac{3}{5} \text{I} a_{2,1} + \frac{2}{5} \text{I} a_{2,2} + \frac{6}{5} a_{2,0} \\
& + \frac{2}{3} a_{1,0} - 2 a_{0,0} - \frac{1}{3} \text{I} a_{1,1} - \frac{6}{5} \text{I} a_{2,0} + 2 \text{I} a_{0,0} = -\frac{16}{15} + \frac{16}{15} \text{I}, a_{0,0} - a_{0,1} + a_{0,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{2,0} + a_{2,1} - a_{2,2} = 1, a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} - a_{1,0} - a_{1,1} - a_{1,2} + a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} \\
& + \frac{4}{45} I\sqrt{2} a_{2,2} + \frac{4}{9} I\sqrt{2} a_{1,2} - \frac{4}{3} I\sqrt{2} a_{0,2} - \frac{4}{15} I\sqrt{2} a_{2,0} - \frac{4}{3} I\sqrt{2} a_{1,0} \\
& + 4 I\sqrt{2} a_{0,0} = 2 + \frac{16}{5} I\sqrt{2}, a_{0,0} - a_{0,2} - a_{1,0} + a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,2} + \frac{2}{45} I\sqrt{2} a_{2,2} \\
& + \frac{2}{9} I\sqrt{2} a_{1,2} - \frac{2}{3} I\sqrt{2} a_{0,2} + \frac{1}{15} I\sqrt{2} a_{2,1} + \frac{1}{3} I\sqrt{2} a_{1,1} - I\sqrt{2} a_{0,1} \\
& - \frac{2}{15} I\sqrt{2} a_{2,0} - \frac{2}{3} I\sqrt{2} a_{1,0} + 2 I\sqrt{2} a_{0,0} = 1 + \frac{8}{5} I\sqrt{2}, a_{0,0} - a_{0,1} + a_{0,2} - a_{1,0} \\
& + a_{1,1} - a_{1,2} + a_{2,0} - a_{2,1} + a_{2,2} = 2 \Big\}, [a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}] \Big) \\
& \left[\left[a_{0,0} = 1, a_{0,1} = 0, a_{0,2} = \frac{1}{2}, a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 0, a_{1,2} = 0, a_{2,0} = \frac{1}{2}, a_{2,1} = 0, a_{2,2} = 0 \right] \right] \quad (15)
\end{aligned}$$

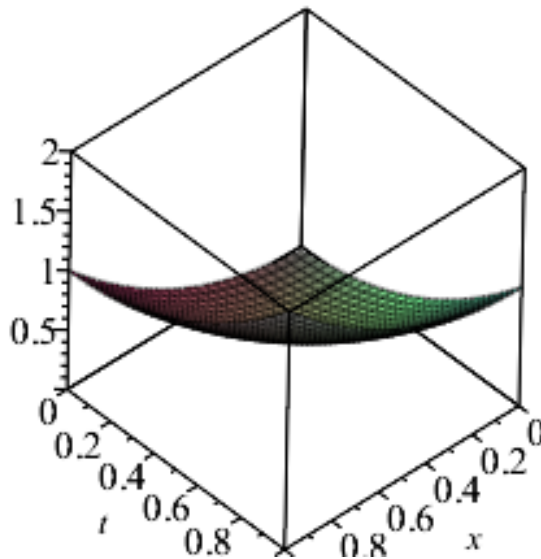
> assign(%)

$$> u := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a[i,j] \cdot T[i](x) \cdot T[j](t)$$

$$u := t^2 + x^2$$

(16)

> plot3d($t^2 + x^2$, $x=0..1$, $t=0..1$)



> restart :

> with(student) :

> m := 2; P[0] := 1; P[1] := x;

$$m := 2$$

$$P_0 := 1$$

$$P_1 := x$$

(17)

> for n from 2 to m do

$$P[n] := \text{simplify} \left(\frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right)$$

end do

$$P_2 := \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \quad (18)$$

> **for** k **from** 0 **to** m **do**
 $P[k] := \text{unapply}(P[k], x)$
end do

$$P_0 := x \rightarrow 1$$

$$P_1 := x \rightarrow x$$

$$P_2 := x \rightarrow \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \quad (19)$$

> **for** r **from** 0 **to** 2 **do**

$$x[r] := -1 + \frac{2r}{2}$$

end do

$$x_0 := -1$$

$$x_1 := 0$$

$$x_2 := 1$$

(20)

> **for** s **from** 0 **to** 2 **do**

$$t[s] := -1 + \frac{2s}{2}$$

od;

$$t_0 := -1$$

$$t_1 := 0$$

$$t_2 := 1$$

(21)

$$> eq1 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i, j] \cdot P[i](-1) \cdot P[j](-1)$$

$$-0 = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{-1+1} - 2\sqrt{-1-1}) \cdot (-1+1) + \sqrt{-1+1} (-1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{-1-1} (-1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) + \frac{2}{5} \right);$$

$$c_{0,0} - c_{0,1} + c_{0,2} - c_{1,0} + c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,0} - c_{2,1} + c_{2,2}$$

$$0 = 2$$

(22)

$$> eq2 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i, j] \cdot P[i](-1) \cdot P[j](0)$$

$$- \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (-1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i, j] \cdot P[i](y) \cdot P[j](z) \, dy \, dz = 1 + 0 - \frac{1}{3} (2\sqrt{-1+1} - 2\sqrt{-1-1}) \cdot (0+1) + \sqrt{-1+1} (0+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{-1-1} (0$$

$$+ 1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) + \frac{2}{5} \right);$$

$$\begin{aligned} & c_{0,0} - \frac{1}{2} c_{0,2} - c_{1,0} + \frac{1}{2} c_{1,2} + c_{2,0} - \frac{1}{2} c_{2,2} \\ & - \frac{1}{5} \text{I}\sqrt{2} c_{2,1} + \frac{1}{3} \text{I}\sqrt{2} c_{1,1} - \text{I}\sqrt{2} c_{0,1} + \frac{2}{5} \text{I}\sqrt{2} c_{2,0} - \frac{2}{3} \text{I}\sqrt{2} c_{1,0} + 2 \text{I}\sqrt{2} c_{0,0} = 1 \\ & + \frac{8}{5} \text{I}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright eq3 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](-1) \cdot P[j](1) \\ & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](y) \cdot P[j](z) \, dy \, dz = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{-1+1} \\ & - 2\sqrt{-1-1}) \cdot (1+1) + \sqrt{-1+1} (1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{-1-1} (1 \\ & + 1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \cdot (-1) + \frac{2}{5} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_{0,0} + c_{0,1} + c_{0,2} - c_{1,0} - c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,0} + c_{2,1} + c_{2,2} \\ & \frac{4}{5} \text{I}\sqrt{2} c_{2,0} - \frac{4}{3} \text{I}\sqrt{2} c_{1,0} + 4 \text{I}\sqrt{2} c_{0,0} = 2 + \frac{16}{5} \text{I}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright eq4 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](0) \cdot P[j](-1) \\ & - 0 = 0 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{0-1}) \cdot (-1+1) + \sqrt{0+1} (-1+1) \cdot \left(0+0 - \frac{2}{5} \right) \\ & + \sqrt{0-1} (-1+1) \cdot \left(0+0 + \frac{2}{5} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_{0,0} - c_{0,1} + c_{0,2} - \frac{1}{2} c_{2,0} + \frac{1}{2} c_{2,1} - \frac{1}{2} c_{2,2} \\ & 0 = 1 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright eq5 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](0) \cdot P[j](0) \\ & - \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (0-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](y) \cdot P[j](z) \, dy \, dz = 0 + 0 - \frac{1}{3} (2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{0-1}) \\ & \cdot (0+1) + \sqrt{0+1} (0+1) \cdot \left(0+0 - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{0-1} (0+1) \cdot \left(0+0 + \frac{2}{5} \right) \\ & ; \end{aligned}$$

$$c_{0,0} - \frac{1}{2} c_{0,2} - \frac{1}{2} c_{2,0} + \frac{1}{4} c_{2,2}$$

$$2I_{c_{0,0}} - I_{c_{0,1}} + \frac{1}{5}I_{c_{2,1}} - \frac{1}{5}c_{2,1} - \frac{1}{3}c_{1,1} + c_{0,1} - \frac{1}{3}I_{c_{1,1}} + \frac{2}{3}I_{c_{1,0}} - \frac{2}{5}I_{c_{2,0}} \\ + \frac{2}{5}c_{2,0} + \frac{2}{3}c_{1,0} - 2c_{0,0} = -\frac{16}{15} + \frac{16}{15}I \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &> eq6 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](0) \cdot P[j](1) \\ &- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](y) \cdot P[j](z) \, dy \, dz = 0 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{0-1}) \\ &\cdot (1+1) + \sqrt{0+1} (1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} \cdot 0 + \frac{8}{15} \cdot 0 - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{0-1} (1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} \cdot 0 + \frac{8}{15} \right. \\ &\left. \cdot 0 + \frac{2}{5} \right); \\ &c_{0,0} + c_{0,1} + c_{0,2} - \frac{1}{2}c_{2,0} - \frac{1}{2}c_{2,1} - \frac{1}{2}c_{2,2} \\ &4I_{c_{0,0}} + \frac{4}{3}I_{c_{1,0}} - \frac{4}{5}I_{c_{2,0}} + \frac{4}{5}c_{2,0} + \frac{4}{3}c_{1,0} - 4c_{0,0} = -\frac{17}{15} + \frac{32}{15}I \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> eq7 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](1) \cdot P[j](-1) \\ &- 0 = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{1-1}) \cdot (-1+1) + \sqrt{1+1} (-1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} \right) \\ &+ \sqrt{1-1} (-1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} + \frac{2}{5} \right); \\ &c_{0,0} - c_{0,1} + c_{0,2} + c_{1,0} - c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,0} - c_{2,1} + c_{2,2} \\ &0 = 2 \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> eq8 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](1) \cdot P[j](0) \\ &- \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](y) \cdot P[j](z) \, dy \, dz = 1 + 0 - \frac{1}{3} (2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{1-1}) \\ &\cdot (0+1) + \sqrt{1+1} (0+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{1-1} (0+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} + \frac{2}{5} \right) \\ &; \\ &c_{0,0} - \frac{1}{2}c_{0,2} + c_{1,0} - \frac{1}{2}c_{1,2} + c_{2,0} - \frac{1}{2}c_{2,2} \\ &\frac{1}{5}\sqrt{2}c_{2,1} + \frac{1}{3}\sqrt{2}c_{1,1} + \sqrt{2}c_{0,1} - \frac{2}{5}\sqrt{2}c_{2,0} - \frac{2}{3}\sqrt{2}c_{1,0} - 2\sqrt{2}c_{0,0} = 1 - \frac{8}{5}\sqrt{2} \quad (29) \end{aligned}$$

$$> eq9 := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](1) \cdot P[j](1)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](y) \cdot P[j](z) \, dy \, dz = 1 + 1 - \frac{1}{3} (2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{1-1}) \\
& \cdot (1+1) + \sqrt{1+1} (1+1) \cdot \left(-\frac{16}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} \right) + \sqrt{1-1} (1+1) \cdot \left(\frac{16}{15} + \frac{8}{15} \right. \\
& \left. + \frac{2}{5} \right); \\
& c_{0,0} + c_{0,1} + c_{0,2} + c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,0} + c_{2,1} + c_{2,2} \\
& - \frac{4}{5} \sqrt{2} c_{2,0} - \frac{4}{3} \sqrt{2} c_{1,0} - 4 \sqrt{2} c_{0,0} = 2 - \frac{16}{5} \sqrt{2} \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{solve} \left(\left\{ c_{0,0} - c_{0,1} + c_{0,2} - c_{1,0} + c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,0} - c_{2,1} + c_{2,2} = 2, c_{0,0} - \frac{1}{2} c_{0,2} - c_{1,0} \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} c_{1,2} + c_{2,0} - \frac{1}{2} c_{2,2} - \frac{1}{5} I\sqrt{2} c_{2,1} + \frac{1}{3} I\sqrt{2} c_{1,1} - I\sqrt{2} c_{0,1} + \frac{2}{5} I\sqrt{2} c_{2,0} \\
& - \frac{2}{3} I\sqrt{2} c_{1,0} + 2 I\sqrt{2} c_{0,0} = 1 + \frac{8}{5} I\sqrt{2}, c_{0,0} + c_{0,1} + c_{0,2} - c_{1,0} - c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,0} \\
& + c_{2,1} + c_{2,2} + \frac{4}{5} I\sqrt{2} c_{2,0} - \frac{4}{3} I\sqrt{2} c_{1,0} + 4 I\sqrt{2} c_{0,0} = 2 + \frac{16}{5} I\sqrt{2}, c_{0,0} - c_{0,1} \\
& + c_{0,2} - \frac{1}{2} c_{2,0} + \frac{1}{2} c_{2,1} - \frac{1}{2} c_{2,2} = 1, c_{0,0} - \frac{1}{2} c_{0,2} - \frac{1}{2} c_{2,0} + \frac{1}{4} c_{2,2} + 2 I c_{0,0} \\
& - \frac{1}{3} I c_{1,1} - I c_{0,1} - \frac{1}{5} c_{2,1} - \frac{1}{3} c_{1,1} + c_{0,1} + \frac{1}{5} I c_{2,1} - \frac{2}{5} I c_{2,0} + \frac{2}{3} I c_{1,0} + \frac{2}{5} c_{2,0} \\
& + \frac{2}{3} c_{1,0} - 2 c_{0,0} = -\frac{16}{15} + \frac{16}{15} I, c_{0,0} + c_{0,1} + c_{0,2} - \frac{1}{2} c_{2,0} - \frac{1}{2} c_{2,1} - \frac{1}{2} c_{2,2} \\
& + 4 I c_{0,0} - \frac{4}{5} I c_{2,0} + \frac{4}{3} I c_{1,0} + \frac{4}{5} c_{2,0} + \frac{4}{3} c_{1,0} - 4 c_{0,0} = -\frac{17}{15} + \frac{32}{15} I, c_{0,0} - c_{0,1} \\
& + c_{0,2} + c_{1,0} - c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,0} - c_{2,1} + c_{2,2} = 2, c_{0,0} - \frac{1}{2} c_{0,2} + c_{1,0} - \frac{1}{2} c_{1,2} + c_{2,0} \\
& - \frac{1}{2} c_{2,2} + \frac{1}{5} \sqrt{2} c_{2,1} + \frac{1}{3} \sqrt{2} c_{1,1} + \sqrt{2} c_{0,1} - \frac{2}{5} \sqrt{2} c_{2,0} - \frac{2}{3} \sqrt{2} c_{1,0} \\
& - 2 \sqrt{2} c_{0,0} = 1 - \frac{8}{5} \sqrt{2}, c_{0,0} + c_{0,1} + c_{0,2} + c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,0} + c_{2,1} + c_{2,2} \\
& \left. - \frac{4}{5} \sqrt{2} c_{2,0} - \frac{4}{3} \sqrt{2} c_{1,0} - 4 \sqrt{2} c_{0,0} = 2 - \frac{16}{5} \sqrt{2} \right\}, [c_{0,0}, c_{0,1}, c_{0,2}, c_{1,0}, c_{1,1}, \\
& c_{1,2}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{2,2}] \Big) \\
& \left[\left[c_{0,0} = \frac{2}{3}, c_{0,1} = 0, c_{0,2} = \frac{2}{3}, c_{1,0} = 0, c_{1,1} = 0, c_{1,2} = 0, c_{2,0} = \frac{2}{3}, c_{2,1} = 0, c_{2,2} = 0 \right] \right] \tag{31}
\end{aligned}$$

> assign(%)

$$> u := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 c[i,j] \cdot P[i](x) \cdot P[j](t)$$

$$u := t^2 + x^2 \tag{32}$$

Abstract

In this thesis, The Chebyshev and Legendre polynomials are used to numerical solution the Volterra-Fredholm integral equations. Then, a pseudospectral method is proposed based on the integral matrix for solving integral equations and integro-differential equations. The solution of the integral equations and the integro-differential equations are obtained at the collocation points. Then, an efficient and stable approach to computing the pseudospectral integration matrix is presented through a recursive relationship of Legendre integration matrices. Furthermore, the convergence analysis of the method is given in both L^∞ and L^2 spaces via a linear integral equations and the convergence rate is shown by numerical results.

Keywords: Integral equations, integro-differential equations, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials, Pseudospectral method, Collocation points, Integral pseudospectral matrices.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Numerical Analysis

Pseudospectral Methods for Solving Integral Equations

By: Fatemeh Mahmoodi

Supervisors

Dr. M. Ghovatmand

Dr. A. Mesforush

Advisor

Dr. A. Nazemi

January 2019