**دانشگاه صنعتی شاهرود**
**دانشکده علوم ریاضی**
**گروه  ریاضی محض**

# پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

**عنوان**

# زیر رده ای از توابع ستاره گون با ضرایب منفی

نگارش

**ثمینه ذاکری**

استاد راهنما

**دکتر احمد زیره**

استاد مشاور

**دکتر ابراهیم هاشمی**

خرداد ۱۳۹۰

صفحة تصويب نامه توسط هيأت داوران (فرم پيوست ۳ يا ۴ با امضاي اصل هيأت داوران مورد قبول است)

# قدردانی

## چکیده

در این پایان‌نامه به بیان تعاریف و قضایای مربوط به رده هایی از توابع ستاره گون $k$-تایی و توابع محدب -$k$تایی می پردازیم، همچنین با معرفی چند عملگر انتگرال برخی از خواص آنها را روی رده های مذبور مورد مطالعه قرار می دهیم و معیارهایی برای تک ارزی عملگرهای انتگرال روی توابع تحلیلی در دیسک یکه ی باز را بررسی می کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستار گون، توابع محدب، عملگر انتگرال

# پیشگفتار

تابع تحلیلی که یک به یک می باشد را تک ارز می نامیم. بنابراین اگر $f$ تابع تک ارز باشد $f(z_1) = f(z_2)$ نتیجه می دهد $z_1 = z_2$ . از نظر تحلیلی تابع تک ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی تابع تک ارز خم های ساده را بر خم های ساده می نگارد.مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی داشته باشند انجام گرفت.

در ابتدا سیلورمن [۱۹۷۵] [۱] رده ی توابعی که در دیسک یکه ی باز تحلیلی و تک ارز می باشند را $S$ نامید و با شرح کاملی از زیر رده های این رده به بررسی قضایای پوششی و توابع اکسترمال آنها پرداخت.

کاناس [۲۰۰۰] [۲] خواص زیر رده ای از توابع با ضرایب منفی را مورد مطالعه قرار داد و همچنین گونی و اکر [۲۰۰۵] [۳] با معرفی رده ی $(k,n,\alpha) - ST$ نتایج بدست آمده توسط سیلور من بر روی رده ی $S$ را بر روی رده ی مذبور بررسی کردند و بهترین نتایج را گرفتند.ما نیز با ارائه ی این پایان نامه گامی در جهت تعمیم آنها بر میداریم.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند، در فصل دوم، به تعریف رده هایی از توابع ستاره گون $k$-تایی و توابع محدب $k$-تایی با ضرایب منفی و قضایای مربوطه می پردازیم. در فصل سوم، با معرفی دو عملگر انتگرال برخی از خواص آنها را روی رده های مذبور شرح می دهیم و در نهایت، معیارهایی برای تک ارزی چند عملگر انتگرال روی توابع تحلیلی در دیسک یکه ی باز را مورد مطالعه قرار می دهیم.

[۱] H. Silverman
[۲] S. Kanas
[۳] Ozlem Guney, Sumer Eker

# فهرست مطالب

ر

# فصل ۱

# پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

## ۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود.

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

$U(\zeta, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - \zeta| < r\}$ دیسک باز به مرکز $\zeta$ و شعاع $r$

$U = U(۰, ۱)$ دیسک یکه ی باز

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می باشد.

**تعریف ۱.۱.۱.** یک چند جمله ای مجموعی از جملات است که هر جمله به صورت $ax^n$ می باشند. بطوریکه $a$ ضریب، $n$ توان و $x$ یک متغیر است و همچنین یک چند جمله ای با ضرایب مختلط، چند جمله ای مختلط نام دارد. بیشترین توان یک چند جمله ای مرتبه ی آن نام دارد.

**تعریف ۲.۱.۱.** هرگاه $X$ و $Y$ دو مجموعه باشند یک تابع از مجموعه $X$ به مجموعه $Y$ را می توان قاعده ای تعریف کرد که به هر عضو مجموعه ی $X$ چون $x$ یک و فقط یک عضو از مجموعه ی $Y$ چون $f(x)$ را نسبت می دهد، تابع $f$ از $X$ به $Y$ را با $f : X \to Y$ نشان می دهیم.

دامنه تابع $f$ که با $domf$ نمایش داده می شود همان مجموعه $X$ است. برد تابع $f$ نیز مجموعه همه عناصری

از $y$ است که تصویر عضوی از $X$ تحت $f$ باشند برد تابع $f$ را با $ranf$ یا $Imf$ نشان می دهیم:

$$ranf = \{y \in Y : \exists x(x \in X \wedge y = f(x)\}$$

**تعریف ۳.۱.۱.** تابع $f$ را در $z_\circ$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.

**تعریف ۴.۱.۱.** **(قرارداد)** فرض کنیم $\mathcal{H}$ رده ای از توابع به شکل $f(z) = z + a_۲z^۲ + ...$ باشد که در دیسک یکه ی باز $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < ۱\}$ تحلیلی می باشند.

**تعریف ۵.۱.۱.** هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می شود. میدان را معمولا با $D$ نشان می دهند.

**تعریف ۶.۱.۱.** **(لم شوارتز)** [۱] فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} :| z |< R\}$ باشد و برای ثابت $M$، $| f(z) |< M$. ۱اگر $f(z)$ در $z = ۰$ با تعداد دفعات $m$، صفر شود. در اینصورت:

$$| f(z) |\leq \frac{M}{R^m} | z |^m \qquad (z \in \mathcal{U}_R)$$

در رابطه ی فوق، تساوی زمانی برقرار می شود که

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

بطوریکه $\theta$ ثابت است.

## ۲.۱ رده ی $S$

**تعریف ۱.۲.۱.** رده ای از همه ی توابع $f(z) = z + a_۲z^۲ + ...$ که در $U$ تحلیلی و تک ارز می باشند و با شرایط $f(۰) = ۰$ ، $f'(۰) = ۱$ نرمالیزه می گردند را با $S$ نشان می دهیم.

**لم ۲.۲.۱.** ۱اگر $f(z) \in S$ آنگاه $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \in S$.

[۱] Schwarz

**تذکر**: به جای $\sqrt{f(z^2)}$، می نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{(\frac{1}{2})\log f(z^2)}$ را بی معنی می کند.

**اثبات.** اگر $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ . قرار می دهیم $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ لذا داریم:

$$g(z) = z\sqrt{1 + a_2z^2 + a_3z^4} + ... \tag{1.1}$$

(شاخه ی اصلی $\sqrt{}$ را در نظر گر فتیم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$.

اثبات تک ارزی: اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در اینصورت $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون $f$ یک به یک می باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$ یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. و از (۱.۱) ملاحظه می شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می دهد که با فرض در تناقض است پس $z_1 = z_2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می شود. ■

**قضیه ۱.۲.۳.** اگر $S \ni \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$، $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$ باشد آنگاه $|a_2| \leq 2$. [16]

**مثال. (تابع کوئب)** در قضیه ی ۱.۲.۳، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و $\alpha$ حقیقی باشد آنگاه $g(z) = \frac{z}{1-e^{i\alpha}z^2} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ لذا

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + ...$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1 + z}{1 - z})^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا $\infty$ بریده شده است می نگارد.

**قضیه ۱.۲.۴. (پوشش)** اگر $f(z) \in S$ و برای $|z| < 1$، $f(z) \neq c$ که $c \in \mathbb{C}$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

**اثبات.** می دانیم ... $f(z) = z + a_۲z^۲ +$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به $S$ می باشد

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + ...$$

بنا به قضیه ی ۳.۲.۱ داریم $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$ از طرفی:

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲ \Longrightarrow |\frac{۱}{c}| \leq ۲ + |a_۲|$$

و چون $f(z) \in S$ پس $| a_۲ | \leq ۲$ لذا داریم:

$$|\frac{۱}{c}| \leq ۴ \Longrightarrow |c| \geq \frac{۱}{۴}.$$

■

**لم ۵.۲.۱.** اگر $f(z) \in S$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه:

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

**اثبات.** چون برای $|z| < ۱$، $f'(z) \neq ۰$ پس می توان شاخه ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < ۱$ در نظر گرفت.

حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در $r$ داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه ی قسمت های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}.$$

■

**قضیه ۶.۲.۱.** اگر $f(z) \in S$ آنگاه:

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

**اثبات.** می دانیم تابع $w = \frac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z} (|z_۰| < ۱)$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z}) = b_۰ + b_۱ z + b_۲ z^۲$ نیز به ازای $(|z| < ۱)$ تحلیلی و تک ارز است، داریم:

$$g(۰) = b_۰ = f(z_۰) \qquad b_۱ = g'(۰) = f'(z_۰)(۱ - |z_۰|^۲)$$

$$b_۲ = \frac{g''(۰)}{۲} = \frac{۱}{۲}(f''(z_۰)(۱-|z_۰|^۲)^۲ - ۲f'(z_۰)\overline{z_۰}(۱-|z_۰|^۲))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی باشد پس متعلق به $S$ نمی باشد، با توجه به اینکه تابع $\frac{g(z)-g(۰)}{g'(۰)} = z + \frac{b_۲}{b_۱}z^۲ + ...$ در $S$ قرار می گیرد لذا بنابر قضیه ۳.۲.۱، $|\frac{b_۲}{b_۱}| \leq ۲$ یعنی:

$$\frac{۱}{۲}|\frac{f''(z_۰)}{f'(z_۰)}(۱-|z_۰|^۲) - ۲\overline{z_۰}| \leq ۲$$

با قرار دادن $z_۰ = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{۲|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$ داریم:

$$|\frac{z_۰ f''(z_۰)}{f'(z_۰)} - \frac{۲|z_۰|^۲}{۱-|z_۰|^۲}| \leq \frac{۴|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$$

حال چون $z_۰$ دلخواه است قرار می دهیم:

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{۲r^۲}{۱-r^۲}| \leq \frac{۴r}{۱-r^۲}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره ای به شعاع $\frac{۴r}{۱-r^۲}$ و به مرکز $\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}$ واقع است لذا:

$$\frac{۲r^۲ - ۴r}{۱-r^۲} \leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^۲ + ۴r}{۱-r^۲}$$

بنا به لم ۵.۲.۱ می دانیم $Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی:

$$\frac{۲r^۲ - ۴r}{۱-r^۲} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r^۲ + ۴r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا $r$ انتگرال می گیریم:

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و

$$\log\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتیجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad (|z| = r < 1).$$

■

**مثال.** مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ برابر است با $k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$ ، لذا کران بالای قضیه ی ۶.۲.۱ در مورد این تابع در $z = r$ وکران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**قضیه ۷.۲.۱.** اگر $f(z) \in S$ آنگاه:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad (|z| = r < 1).$$

**اثبات.** بنا به قضیه ی ۶.۲.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$ ، نقطه ی ۰ را به $z$ با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)|dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{1}{4} \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ آنگاه $|f(z)| \geq \frac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ بنا به قضیه ی ۴.۲.۱ مسیر $c$ داخل دایره ی یکه از ۰ تا $z$ موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_0$ از ۰ تا

$f(z)$ را می پوشاند در اینصورت:

$$|f(z)| = \int_{c_\circ} |dw| = \int_c |f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا به قضیه ی ۶.۲.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||ds| \geq \int_c |f'(s)|d|s| \geq \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

■

**مثال.** برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + ...$ کران بالای قضیه ی ۷.۲.۱ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**قضیه ۸.۲.۱.** $(Littlewood's)$ اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $S$ باشد آنگاه برای هر $n$، $|a_n| \leq en$.

[۱۶]

**قضیه ۹.۲.۱.** اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده ی $S$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد آنگاه برای هر $n$ داریم $|a_n| \leq n$.

**اثبات.** برای $r < 1$، $z = re^{i\theta}$ قرار می دهیم:

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال یابی از ۰ تا $\pi$ داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_\circ^\pi v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_\circ^\pi a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \qquad (2.1)$$

با توجه به رابطه ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta| \le |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می توان نشان داد که $|\sin n\theta| \le n|\sin\theta|$ لذا از رابطه ی (۲.۱) نتیجه می شود که:

$$|a_n r^n| \le \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi |v(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \qquad (۳.۱)$$

سپس نشان می دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$، $(0 < r < 1, 0 < \theta < \pi)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به $\theta$ تابعی پیوسته است می بایست در فاصله ی $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد لذا:

$$r = |a_1 r| = |\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(re^{i\theta})\sin\theta d\theta| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |v(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta. \qquad (۴.۱)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱) رابطه ی $|a_n r^n| \le nr$ بدست می آید و با $r \to 1$ قضیه ثابت می گردد. ■

## ۳.۱ رده ی $S^*$

**تعریف ۱.۳.۱.** میدان $D$ را نسبت به $z_0$ ستاره گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از $D$ را به $z_0$ وصل می کند در $D$ قرار بگیرد. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدا ستاره گون گوییم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره گون است، این زیر رده ی $S$ را با $S^*$ نشان می دهند.

**لم ۲.۳.۱.** فرض کنیم $f(z) \in S$، در اینصورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره گون بنگارد.

**اثبات.** ابتدا فرض کنیم $f(z) \in S^*$ و $D$ تصویر $|z| < ۱$ و $D_r$ تصویر $|z| < r < ۱$ در تابع $f(z)$ باشد اگر $w \in D$، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $tw \in D$ (چون $D$ ستاره گون می باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و در آنجا در نامساوی $|g(z)| < ۱$ صدق می کند چون $g(۰) = f^{-۱}(tf(۰)) = ۰$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$، اکنون نقطه ی $w_۱ \in D_r$ را انتخاب می کنیم در اینصورت برای نقطه ی $z_۱$ای با $|z_۱| < ۱$، برای $t$ دلخواه، $۰ < t < ۱$ داریم:

$$|f^{-۱}(tw_۱)| = |f^{-۱}(tf(z_۱))| = |g(z_۱)| \leq |z_۱| < r$$

ولی این بدان معنی است که $tw_۱$ در $D_r$ قرار دارد چون این مطلب برای همه ی $w_۱$ ها در $D_r$ و همه ی $t$ ها، $۰ < t < ۱$ درست است میدان $D_r$ نسبت به $w = ۰$ ستاره گون است.

به عکس، اگر $f(z)$ در رده ی $S^*$ قرار نداشته باشد آنگاه نقطه $w_۰ \in D$ موجود است بطوریکه برای $t_۰$ ای، $(۰ < t_۰ < ۱)$ ، $t_۰w_۰$ متعلق به $D$ نمی باشد اینک قرص $|z| < r < ۱$ را انتخاب می کنیم بطوریکه تصویرش $D_r$ شامل نقطه ی $w_۰$ باشد چون $D_r \subset D$ نقطه ی $t_۰w_۰$ متعلق به $D_r$ نیست پس $f(z)$ ، $|z| < ۱$ را بر میدان ستاره گون نمی نگارد. ■

**قضیه ۳.۳.۱.** فرض کنیم $f(z) \in S$ در اینصورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر:

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰.$$

**اثبات.** با توجه به لم ۲.۳.۱. $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر تصویر $D_r$ از $|z| < r < ۱$ یک میدان ستاره گون باشد به بیان معادل برای هر $\theta(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ بردار شعاعی از $w = ۰$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در $D_r$ باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به $\theta$ صعودی اکید است زیرا در غیر اینصورت بردار شعاعی می بایست مرز $D_r$ را حداقل در دو نقطه قطع کند پس یک تابع در $S^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > ۰$ مشخص گردد.

ولی $\arg f(re^{i\theta}) = Im\log f(re^{i\theta})$ بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{Im\log f(re^{i\theta})\} = Im\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\} = Im\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\} = Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰$$

■

**مثال.** تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ در رده ی $S^*$ قرار دارد زیرا تصویر $|z|<1$ صفحه ی $w$ می باشد که در امتداد پرتو $\frac{-1}{4}$ تا $\infty$ بریده شده است و همچنین:

$$Re\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\}=Re\{\frac{1+z}{1-z}\}>0.$$

**قضیه ۴.۳.۱.** فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در $S^*$ باشد آنگاه برای هر $n$، $|a_n|\leq n$.

**اثبات.** چون برای $0<|z|<1$ ، $f(z)\neq 0$ تابع

$$P(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{n-1}} \quad (5.1)$$

در $|z|<1$ تحلیلی است می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_nz^n \quad (6.1)$$

از طرفی برای $|z|<1$ ، $f(z)\in S^*$ داریم $Re\{P(z)\}>0$ بنا به قضیه ی ۳.۲.۱ می دانیم:

$$|\alpha_n|\leq 2 \qquad n=1,2,3,... \quad (7.1)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}=(1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{n-1})(1+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_nz^n)$$

با تساوی قرار دادن ضرایب به رابطه ی زیر می رسیم:

$$ka_k=a_k+a_{k-1}\alpha_1+a_{k-2}\alpha_2+...+a_2\alpha_{k-2}+\alpha_{k-1}$$

و یا به صورت معادل:

$$(k-1)a_k=a_{k-1}\alpha_1+a_{k-2}\alpha_2+...+a_2\alpha_{k-2}+\alpha_{k-1} \qquad (k=2,3,...) \quad (8.1)$$

با استفاده از کران (۱.۷) می توان نامساوی مثلث را در (۱.۸) بکار برد لذا:

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + ... + |a_2| + 1)$$

از رابطه ی فوق در می یابیم $|a_2| \leq 2$ ، سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, ..., n-1$ ، $|a_k| \leq k$ در اینصورت:

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}$$

و این به $|a_n| \leq n$ برمی گردد لذا به استقرا قضیه برای هر $n$ درست است. ■

**تعریف ۱.۳.۵.** تابع $f(z) \in S$ ستاره گون از مرتبه $\alpha$ $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می شود هرگاه:

$$Re\{\frac{zf'}{f}\} > \alpha \qquad (|z| < 1).$$

این زیر رده ی $S$ را به $S^*(\alpha)$ نشان می دهیم.

**قضیه ۱.۳.۶.** فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ، $(0 \leq \alpha < 1)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

**اثبات.** بنا به تعریف ۱.۳.۵ کافیست نشان دهیم $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد داریم:

$$|z\frac{f'}{f} - 1| = |\frac{zf'-f}{f}| = |\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}$$

بیان قبلی دارای کران بالای $1-\alpha$ می باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ بنا به فرض این رابطه برقرار است بنابراین $|\frac{zf'}{f} - 1| \leq 1-\alpha$.

■

## ۴.۱ رده ی $K$

**تعریف ۱.۴.۱.** میدان $D$ را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از $D$ را بهم وصل می کند در $D$ قرار بگیرد.

**تعریف ۲.۴.۱.** تابع $f(z) \in S$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده ی $S$ را با $K$ نشان می دهیم.

**قضیه ۳.۴.۱.** فرض کنیم $f(z) \in S$، در اینصورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.

**اثبات.** ابتدا فرض کنیم $f(z) \in K$ و $D$ تصویر $|z| < ۱$ و $D_r$ تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط $w_۱$ ، $w_۲$ را در $D_r$ انتخاب می کنیم، باید نشان دهیم که پاره خط $tw_۱ + (۱ - t)w_۲, (۰ < t < ۱)$ هم در $D_r$ قرار دارد، می بایست نقاط $z_۱$ ، $z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود باشند که $w_۱ = f(z_۱)$ و $w_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_۲| \leq |z_۱|$ آنگاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf((\frac{z_۱}{z_۲})z) + (۱ - t)f(z)$ در $D$ واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و چون $f(z) \in S$ لذا در شرایط $|h(z)| < ۱$ و $h(۰) = ۰$ صدق می کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. بویژه:

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(tw_۱ + (۱ - t)w_۲)| \leq |z_۲| < r \qquad (۹.۱)$$

چون $D_r \subset D$، نقطه ی $z_۰$ ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $tw_۱ + (۱ - t)w_۲ = f(z_۰)$ ولی بنابر (۹.۱) نقطه ی $z_۰ = f^{-۱}(f(z_۰))$ نیز می بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد پس هر نقطه بر پاره خط $tw_۱ + (۱ - t)w_۲$ در $D_r$ قرار دارد.

بالعکس، اگر $f(z)$ در رده ی $K$ نباشد آنگاه دو نقطه در $D$ وجود دارد که پاره خط ماربر این دو نقطه در $D$ قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می کنیم که تصویرش $D_r$ شامل این دو نقطه باشد.

چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را بهم وصل می کند نمی تواند در $D_r$ قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی کند. ■

**قضیه ۱.۴.۴.** فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در اینصورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر:

$$Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰ \qquad (|z| < ۱)$$

**اثبات.** بنا به لم ۱.۴.۳، $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر تصویر $D_r$ از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده بسته می نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش $\theta$ در جهت خلاف عقربه های ساعت حرکت می گردد. می دانیم زاویه ای که خط مماس در صفحه ی $w$ با محور حقیقی می سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می گردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(re^{i\theta})) > ۰$$

داریم:

$$۱ + \frac{\partial}{\partial\theta}(Im \log f'(re^{i\theta})) = ۱ + Im\{ire^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\} = Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰$$

■

**قضیه ۱.۴.۵. ( [۲] الکساندر)** فرض کنیم $f$ یک تابع تحلیلی در $D$ باشد با $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در اینصورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $zf' \in S^*$.

[۲] Alexander

**اثبات.** اگر $g(z)=zf'(z)$ در اینصورت:

$$\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\}=\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0$$

لذا تابع سمت چپ در $D$ تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. ■

**قضیه ۶.۴.۱.** فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در $K$ باشد در اینصورت برای هر $n$ ، $|a_n|\leq 1$.

**اثبات.** با توجه به قضیه ۵.۴.۱ تابع $zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n$ در $S^*$ قرار دارد، لذا بنا به قضیه ی ۴.۳.۱ برای هر $n$ ، $n|a_n|\leq n$ و $|a_n|\leq 1$. ■

**قضیه ۷.۴.۱.** اگر $f(z)\in K$ و $f(z)\neq c$ برای $|z|<1$ در اینصورت $|c|\geq\frac{1}{2}$.

**اثبات.** ابتدا نشان می دهیم تابع کمکی $g(z)=(c-f(z))^2$ در $|z|<1$ تک ارز است، دو نقطه ی متمایز $z_0$ و $z_1$ در قرص واحد انتخاب می کنیم در اینصورت:

$$g(z_0)-g(z_1)=(c-f(z_0))^2-(c-f(z_1))^2=(f(z_0)-f(z_1))(f(z_0)+f(z_1)-2c)$$

اکنون $f(z_0)\neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می باشد همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه ی $\frac{1}{2}[f(z_0)+f(z_1)]$ به تصویر $|z|<1$ متعلق است لذا نمی تواند مساوی $c$ باشد پس $f(z_0)+f(z_1)-2c\neq 0$ و تک ارزی $g(z)$ ثابت می شود. چون $g(z)=c^2-2cz+z^2+\dots$ تابع نرمال زیر در $S$ است.

$$h(z)=\frac{g(z)-c^2}{-2c}=z+(\frac{-z^2}{2c})+\dots$$

بعلاوه در $|z|<1$ ، $h(z)\neq\frac{c}{2}$ زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست با بکار بردن قضیه ی پوششی درمی یابیم $|\frac{c}{2}|\geq\frac{1}{4}$ و یا $|c|\geq\frac{1}{2}$ ■

**قضیه ۸.۴.۱.** اگر $f(z)\in K$ آنگاه برای $|z|=r<1$ :

$$\frac{1}{(1+r)^2}\leq|f'(z)|\leq\frac{1}{(1-r)^2}.$$

**اثبات.** می دانیم تابع $w=\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}, (|z_0|<1)$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می نگارد پس تابع

$$g(z)=f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z})=b_0+b_1z+b_2z^2$$

نیز به ازاء $|z|<1$ تحلیلی و تک ارز است داریم:

$$g(0)=b_0=f(z_0) \qquad b_1=g'(0)=f'(z_0)(1-|z_0|^2)$$

$$b_2=\frac{g''(0)}{2}=\frac{1}{2}(f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2-2f'(z_0)\overline{z_0}(1-|z_0|^2))$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی باشد لذا $g(z)$ در رده ی $S$ قرار ندارد. با توجه به اینکه تابع

$$\frac{g(z)-g(0)}{g'(0)}=z+\frac{b_2}{b_1}z^2+...$$

در $S$ قرار می گیرد لذا در $K$ نیز وجود دارد پس بنا به قضیه ی ۶.۴.۱ :

$$\frac{1}{2}|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2)-2\overline{z_0}|\leq 1$$

با قرار دادن $z_0=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$|\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}|\leq\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون $z_0$ دلخواه است داریم:

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}|\leq\frac{2r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow\frac{2r^2-2r}{1-r^2}\leq\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{2r^2+2r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow\frac{2r-2}{1-r^2}\leq\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|\leq\frac{2r+2}{1-r^2}$$

حال از ۰ تا $r$ انتگرال می گیریم:

$$-۲\log(۱+r) \leq \log|f'(z)| \leq -۲\log(۱-r)$$

لذا:

$$\frac{۱}{(۱+r)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}.$$

■

**قضیه ۹.۴.۱.** اگر $f(z) \in K$ آنگاه برای $|z|=r<۱$ :

$$\frac{r}{۱+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r}.$$

**اثبات.** بنا به قضیه ۸.۴.۱ برای $|z|=r<۱$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}$ نقطه ی ۰ را به $z$ با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می گیریم:

$$|f(z)| = \int_۰^r |f'(t)|dt \leq \int_۰^r \frac{۱}{(۱-t)^۲}dt = \frac{r}{۱-r}$$

نامساوی $\frac{۱}{۴} \leq \frac{r}{(۱+r)}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{۱}{۴}$ لذا $|f(z)| \geq \frac{r}{(۱+r)}$ و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۴}$ طبق قضیه ی پوششی مسیر $c$ داخل دایره ی یکه از ۰ تا $z$ موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را می پوشاند در اینصورت:

$$|f(z)| = \int_{c_۰} |dw| = \int_c |f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا به قضیه ی قبل:

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||ds| \geq \int_c |f'(s)|d|s| \geq \frac{۱}{(۱+t)^۲}dt = \frac{r}{(۱+r)}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(۱+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)}$$

■

## ۵.۱ رده ی $T$

**تعریف ۱.۵.۱.** فرض کنیم $T$ زیر رده ای از $S$ شامل توابعی با ضرایب منفی باشد گوییم یک تابع تک ارز و تحلیلی $f$ در $T$ قرار دارد هرگاه بتوانیم آن را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم. [۱۵، ۵]

**قضیه ۲.۵.۱.** تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در $T$ قرار دارد اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ .

**اثبات.** ابتدا نشان می دهیم اگر $f(z) \in T$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. چون $f(z) \in T$، $f(z)$ در دیسک واحد $U$ تک ارز است در اینصورت $f'(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1} \neq 0$ بنابراین:

$$.f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \neq 0 \qquad (z = r)$$

فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| > 1$ . در اینصورت اندیس مثبت $N$ وجود دارد بطوریکه $\sum_{n=2}^{N} n|a_n| > 1$ , بنابراین وجود دارد $0 < r_0 < 1$ که $\sum_{n=2}^{N} n|a_n| r_0^{n-1} > 1$ لذا:

$$f'(r_0) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r_0^{n-1} \leq 1 - \sum_{n=2}^{N} n|a_n| r_0^{n-1} < 0$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(0) = 1$ پس وجود دارد $0 < r_1 < r_0$ بطوریکه $f'(r_1) = 0$ و این با فرض $f'(z) \neq 0$ در تناقض می باشد لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$.

به عکس، فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ . در اینصورت:

$$Re(f'(z)) = Re(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}) > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 0$$

پس برای $z_1, z_2 \in U$ و $z_1 \neq z_2$،

$$Re\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_0^1 Re f'[z_1 + t(z_2 - z_1)]dt$$

لذا $f(z)$ در $U$ تک ارز است و $f(z) \in T$ . ■

**قضیه ۳.۵.۱.** اگر $f(z)\in T$ در اینصورت :

$$r-\frac{1}{2}r^2 \le |f(z)| \le r+\frac{1}{2}r^2 \qquad (|z|=r)$$

**اثبات.** بنا به قضیه ی ۲.۵.۱ داریم $2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ بنابراین:

$$|f(z)| \le r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \le r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le r+\frac{1}{2}r^2$$

و

$$|f(z)| \ge r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \ge r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \ge r-\frac{1}{2}r^2$$

لذا داریم:

$$r-\frac{1}{2}r^2 \le |f(z)| \le r+\frac{1}{2}r^2 \qquad (|z|=r).$$

■

**مثال.** بنا به قضیه ۲.۵.۱ تابع $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ متعلق به رده ی $T$ می باشد هرگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$، حال با جایگزینی $n=2$ و $a_2=\frac{1}{2}$ بوضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می کند لذا کران بالا ی قضیه ی ۳.۵.۱ در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می شود.

**قضیه ۴.۵.۱.** اگر $f(z)\in T$ آنگاه:

$$1-r \le |f'(z)| \le 1+r \qquad (|z|=r).$$

**اثبات.** می دانیم:

$$|f'(z)| \le 1+\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \le 1+r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1+r$$

و

$$|f'(z)| \ge 1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \ge 1-r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \ge 1-r$$

لذا داریم:

$$۱ - r \leq |f'(z)| \leq ۱ + r \qquad (|z| = r).$$

■

**مثال.** برای تابع $f(z) = z - \frac{۱}{۲}z^۲$ کران بالای قضیه ی ۴.۵.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**قضیه ۵.۵.۱.** فرض کنیم توابع $f_m(z) = z - \sum_{j=۲}^{\infty} |a_{j,m}|z^j, (m = ۱, ۲, ..., n)$ متعلق به رده ی $T$ باشند. در اینصورت تابع $h(z)$ تعریف شده به صورت $h(z) = \sum_{m=۱}^{n} c_m f_m(z), (c_m \geq ۰)$ نیز در رده ی $T$ قرار دارد بطوریکه $\sum_{m=۱}^{n} c_m = ۱$.

**اثبات.** طبق تعریفی از $h(z)$ میتوانیم بنویسیم:

$$h(z) = z - \sum_{j=۲}^{\infty}(\sum_{m=۱}^{n} c_m|a_{j,m}|)z^j$$

چون برای هر $m = ۱, ۲, ..., n$ ، $f_m(z)$ در $T$ قرار دارد، لذا داریم $\sum_{j=۲}^{\infty} j|a_{j,m}| \leq ۱$ که $m = ۱, ۲, ..., n$ ،بنابراین میتوانیم ببینیم:

$$\sum_{j=۲}^{\infty} j(\sum_{m=۱}^{n} c_m|a_{j,m}|) = \sum_{m=۱}^{n} c_m(\sum_{j=۲}^{\infty} j|a_{j,m}|) \leq \sum_{m=۱}^{n} c_m = ۱$$

که نتیجه می دهد $h(z)$ در $T$ قرار دارد. ■

**قضیه ۶.۵.۱. (توابع اکسترمال)** فرض کنیم

$$f_n(z) = z - \frac{۱}{n}z^n, f_۱(z) = z \qquad (n = ۲, ۳, ...).$$

در اینصورت $f(z) \in T$ اگر و تنها اگر بتوانیم آنرا به شکل $f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم بطوریکه $\lambda_n \geq ۰$ ، $\sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n = ۱$

**اثبات.** فرض کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)=\lambda_1 f_1(z)+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n f_n(z)=\lambda_1 z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n(z-\frac{1}{n}z^n)$$

$$=\lambda_1 z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n z-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\frac{1}{n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n z-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\frac{1}{n}z^n$$

در اینصورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\frac{1}{n}n=\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n=1-\lambda_1\leq 1$$

لذا بنا بر قضیه ی ۲.۵.۱ ، $f(z)\in T$.

به عکس، فرض کنیم $f(z)\in T$، چون $|a_n|\leq\frac{1}{n}, (n=2,3,...)$ قرار می دهیم $\lambda_n$ و $\lambda_1=1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n$ و

$\lambda_n=n|a_n|$ لذا:

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\lambda_n z^n=z-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n[z-f_n(z)]$$

$$=z-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n f_n(z)=(1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n)z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$$

$$=\lambda_1 f_1(z)+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n f_n(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z).$$

■

## ۶.۱ رده ی $T^*$ ، $C(\alpha)$

**تعریف ۱.۶.۱.** تابع $f(z)\in T$ ستاره گون از مرتبه ی $\alpha$ $(0\leq\alpha<1)$ نامیده می شود هرگاه:

$$Re\{\frac{zf'}{f}\}>\alpha \qquad (|z|<1).$$

این زیر رده ی $T$ را با $T^*(\alpha)$ نشان می دهیم.

**تعریف ۲.۶.۱.** تابع $f(z) \in T$ محدب از مرتبه ی $\alpha$ $(\circ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می شود هرگاه

$$Re\{۱ + \frac{zf''}{f'}\} > \alpha \qquad (|z| < ۱).$$

این زیر رده ی $T$ را با $C(\alpha)$ نشان می دهیم.

**قضیه ۳.۶.۱.** یک تابع $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ در $T^*(\alpha)$ قرار دارد اگر و تنها اگر:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

**اثبات.** فرض کنیم $f(z) \in T^*(\alpha)$ لذا:

$$Re\{\frac{zf'}{f}\} = Re\{\frac{z - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|z^n}{z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|z^n}\} > \alpha \qquad (|z| < ۱) \qquad (۱\circ.۱)$$

در رابطه ی (۱۰.۱) هرگاه $z \to ۱$ (که $z$ یک مقدار حقیقی) داریم:

$$۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq \alpha(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

حال اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

کافیست نشان دهیم $\frac{zf'}{f}$ در یک دایره به شعاع $۱ - \alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. داریم:

$$|\frac{zf'}{f} - ۱| = |\frac{zf' - f}{f}| = |\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)a_n z^n}{z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n}| \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $۱ - \alpha$ می باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n-۱)|a_n| \leq (۱-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|).$$

که رابطه ی فوق معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. ■

**نتیجه ۴.۶.۱.** تابع $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ در $C(\alpha)$ قرار دارد اگر و تنها اگر:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha$$

**اثبات.** فرض کنیم $f(z)\in C(\alpha)$ . برای $(|z|<1)$ می دانیم:

$$Re\{1+\frac{zf''}{f'}\}=Re\{1-\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n|z^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|z^{n-1}}\}=Re\{\frac{1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|z^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|z^{n-1}}\}>\alpha \tag{11.1}$$

در رابطه (۱۱.۱) هرگاه $z\to 1$ (که $z$ یک مقدار حقیقی) داریم:

$$1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\geq\alpha(1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha.$$

حال اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha$$

کافیست نشان می دهیم $1+\frac{zf''}{f'}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. لذا:

$$|1+\frac{zf''}{f'}-1|=|\frac{zf''}{f'}|=|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}|$$

$$\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}}\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1-\alpha$ می باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n|\leq(1-\alpha)(1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|).$$

که رابطه ی فوق معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. ■

**قضیه ۱.۶.۵.** اگر $f(z) \in T^*(\alpha)$ در اینصورت:

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \qquad (|z| = r)$$

**اثبات.** بنا به قضیه ۱.۶.۳ می دانیم :

$$(2-\alpha) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

بنابراین:

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2$$

و بطور مشابه:

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2$$

لذا نتیجه می شود:

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \qquad (|z| = r).$$

■

**مثال.** بنا به قضیه ی ۱.۶.۳ تابع $f(z) = z - \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} z^2$ متعلق به رده ی $T^*$ است هرگاه

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

حال با جایگزینی $n = 2$ و $a_2 = \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)}$ بوضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می کند، لذا کران بالای قضیه ی ۱.۶.۵ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**قضیه ۱.۶.۶.** اگر $f(z) \in T^*(\alpha)$ در اینصورت:

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \qquad (|z| = r)$$

**اثبات.** داریم:

$$|f'| \leq ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱} \leq ۱ + r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \qquad (۱۲.۱)$$

و همچنین بنابر قضیه ی ۳.۶.۱ می دانیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱ - \alpha + \alpha\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq ۱ - \alpha + \frac{\alpha(۱-\alpha)}{۲-\alpha} = \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha} \qquad (۱۳.۱)$$

با جایگزینی عبارت (۱۳.۱ )در (۱۲.۱ ) طرف راست حکم نتیجه می شود، از طرف دیگر:

$$|f'| \geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱} \geq ۱ - r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq ۱ - \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha}r.$$

■

**مثال.** برای تابع $f(z) = z - \frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)}z^۲$ کران بالای قضیه ی ۶.۶.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**نتیجه ۷.۶.۱.** اگر $f(z) \in C(\alpha)$ در اینصورت:

$$r - \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)}r^۲ \leq |f(z)| \leq r + \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)}r^۲ \qquad (|z| = r)$$

**اثبات.** بنا به نتیجه ۴.۶.۱ داریم :

$$۲(۲-\alpha)\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

بنابراین:

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|r^n \leq r + r^۲\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)}r^۲$$

و بطور مشابه:

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|r^n \geq r - r^۲\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)}r^۲$$

لذا نتیجه می شود:

$$r - \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)}r^۲ \leq |f(z)| \leq r + \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)}r^۲ \qquad (|z| = r).$$

■

**نتیجه ۸.۶.۱.** اگر $f(z) \in C(\alpha)$ در اینصورت:

$$۱ - \frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r \leq |f'(z)| \leq ۱ + \frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r \qquad (|z| = r)$$

**اثبات.** داریم:

$$|f'| \leq ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱} \leq ۱ + r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \tag{۱۴.۱}$$

و همچنین بنابر نتیجه ۴.۶.۱ می دانیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n^۲|a_n| \leq ۱ - \alpha + ۲\alpha\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n| \leq ۱ - \alpha + \frac{\alpha(۱-\alpha)}{۲-\alpha} = \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha} \tag{۱۵.۱}$$

یا

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{۱-\alpha}{۲-\alpha} \tag{۱۶.۱}$$

با جایگزینی عبارت (۱۶.۱ )در (۱۴.۱ ) طرف راست حکم نتیجه می شود، از طرف دیگر:

$$|f'| \geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱} \geq ۱ - r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq ۱ - \frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r.$$

■

**قضیه ۹.۶.۱.** **(توابع اکسترمال)** فرض کنیم

$$f_n(z) = z - \frac{(۱-\alpha)}{(n-\alpha)}z^n, f_۱(z) = z \qquad (n = ۲, ۳, ...).$$

در اینصورت $f(z) \in T^*(\alpha)$ اگر و تنها اگر بتوانیم آنرا به شکل $f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم بطوریکه

$\sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n = ۱$ ، $\lambda_n \geq ۰$

**اثبات.** فرض کنیم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{(1-\alpha)}{(n-\alpha)} z^n$$

در اینصورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1-\alpha}{n-\alpha}\left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا $f(z) \in T^*(\alpha)$.

بالعکس، فرض کنیم $f(z) \in T^*(\alpha)$. چون

$$|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{n-\alpha} \qquad (n = 2, 3, ...)$$

قرار می دهیم:

$$\lambda_n = \frac{(n-\alpha)|a_n|}{1-\alpha}, \lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \qquad (n = 2, 3, ...)$$

در اینصورت $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ و این برهان را کامل می کند. ■

**قضیه ۱۰.۶.۱.** اگر $f(z) \in C(\alpha)$ آنگاه $f(z) \in T^*(\frac{2}{3-\alpha})$.

**اثبات.** بنا به قضیه ی۳.۶.۱ و نتیجه ۴.۶.۱ باید ثابت کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n| \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \frac{2}{3-\alpha}}{1 - \frac{2}{3-\alpha}}|a_n| \leq 1.$$

کافیست نشان دهیم:

$$\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha} \geq \frac{n - \frac{2}{3-\alpha}}{1 - \frac{2}{3-\alpha}} = \frac{n(3-\alpha) - 2}{1-\alpha} \qquad (n = 2, 3, ...)$$

و عبارت فوق معادل با اینست که $(n = 2, 3, ...)$, $n^2 - 3n + 2 \geq 0$. ■

# فصل ۲

# زیر رده ای از توابع ستاره گون $k$- تایی

در این فصل، ابتدا تعریفی از توابع ستاره گون $k$- تایی و محدب $k$- تایی را مطرح می کنیم و سپس نتایج بدست آمده توسط سیلور من بر روی رده های معرفی شده در فصل ۱ را بر روی رده های مذکور بررسی می کنیم.

## ۱.۲ رده های $k-ST$ ، $k-UCV$

**تعریف ۱.۱.۲.** فرض کنیم $0 \leq k < \infty$، تابع $f(z) \in H$ را $k$-محدب یکنواخت گوییم هرگاه تصویر هر کمان مدور $\gamma$ به مرکز $\zeta$ که $|\zeta| \leq k$ محدب باشد. این رده را با $k-UCV$ نشان می دهند. [۹]

**قضیه ۲.۱.۲.** [۹] اگر $f(z) \in k-UCV$ که $0 \leq k < \infty$ آنگاه:

$$Re\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > k|\frac{zf''(z)}{f'(z)}| \qquad (z \in U)$$

یا

$$Re\{1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\} \geq 0 \quad , \quad (z \in U) \quad , \quad |\zeta| \leq k$$

**تعریف ۳.۱.۲.** رده ی $k-ST$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$k-ST := \{f \in S : f(z) = zg'(z), g \in k-UCV\} \quad , \quad 0 \leq k < \infty$$

زمانی که $k = 0$ باشد رده ی $ST$ از توابع ستاره گون به دست می آید. [۷]

**قضیه ۴.۱.۲.** [۷] برای تابع $f(z) \in S$ ،اگر $f(z) \in k-ST$ ، $0 \leq k < \infty$ آنگاه:

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > k|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| \qquad (z \in U)$$

یا

$$Re\{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\} \geq 0 \quad , \quad (z \in U) \quad , \quad |\zeta| \leq k$$

**قضیه ۵.۱.۲.** اگر برای تابع $f(z) \in H$ شرط $\sum_{n=2}^{\infty}[n(k+1)-k]|a_n| \leq 1$ برای $k$، $0 \leq k < \infty$ برقرار باشد در اینصورت $f(z) \in k-ST$.

**اثبات.** کافیست نشان دهیم:

$$k|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| - Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\} < 1$$

داریم:

$$k|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1| - Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\} \leq (k+1)|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1|$$
$$= (k+1)|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^{n-1}}| \leq (k+1)\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}$$

بنابراین $f(z) \in k-ST$ مادامی که

$$(k+1)\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|} \leq 1$$

لذا حکم برقرار است. ■

**مثال.** فرض کنیم $f_e(z) = z - \frac{z^n}{[n(k+1)-k]}$ . با جایگزینی $a_n = \frac{1}{[n(k+1)-k]}$ در $\sum_{n=2}^{\infty}[n(k+1)-k]|a_n| \leq 1$ بوضوح تابع $f_e(z)$ در شرط فوق صدق می کند، لذا کافیست نشان دهیم $f_e(z) \in k-ST$. بدین منظور طرفین نامساوی

$$Re\{\frac{zf_e'(z)}{f_e(z)}\} > k|\frac{zf_e'(z)}{f_e(z)} - 1|$$

را محاسبه می کنیم:

$$k|\frac{zf_e'(z)}{f_e(z)}-1|=k|\frac{(1-n)z^{n-1}}{n(k+1)-k-z^{n-1}}|\leq\frac{k}{k+1}$$

و

$$Re\{\frac{zf_e'(z)}{f_e(z)}\}=Re\{\frac{n(k+1)-k-nz^{n-1}}{n(k+1)-k-z^{n-1}}\}\geq\frac{k}{k+1}$$

لذا بنا به قضیه ۴.۱.۲ حکم برقرار است.

## ۲.۲ رده ی $(k,n,\alpha)-ST$

فرض کنیم $\mathcal{A}(n)$ رده ای از توابع به شکل $f(z)=z-\sum_{m=n+1}^{\infty}a_mz^m, a_m\geq 0, n\in\mathbb{N}$ باشد که در دیسک باز $U$ تحلیلی هستند، زیر رده ی $(k,n,\alpha)-ST$ از توابع ستاره گون و زیر رده ی $(k,n,\alpha)-UCV$ از توابع محدب در دیسک یکه ی باز $U$ به صورت زیر تعریف می شود. [۱۳]

**تعریف ۱.۲.۲.** تابع $f(z)\in\mathcal{A}(n)$ در رده ی $(k,n,\alpha)-UCV$ قرار دارد هرگاه برای مقدار $\alpha(0\leq\alpha<1)$، $z\in U$، $k\geq 0$، $|\zeta|\leq k$. در شرط زیر صدق کند:

$$Re\{1+\frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\}\geq\alpha.$$

**تعریف ۲.۲.۲.** تابع $f(z)\in\mathcal{A}(n)$ در رده ی $(k,n,\alpha)-ST$ قرار دارد هرگاه برای مقدار $\alpha(0\leq\alpha<1)$، $z\in U$، $k\geq 0$، $|\zeta|\leq k$. در شرط زیر صدق کند:

$$Re\{\frac{\zeta}{z}+\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\}\geq\alpha$$

می دانیم $(0,1,\alpha)-ST\equiv T^*(\alpha)$ و $(k,1,0)-ST\equiv k-ST\cap\mathcal{A}(n)$.

**قضیه ۳.۲.۲.** تابع $f(z)\in\mathcal{A}(n)$ در رده ی $(k,n,\alpha)-ST$ قرار دارد اگر و تنها اگر:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}[k(m-1)+m-\alpha]a_m\leq 1-\alpha \qquad (1.2)$$

**اثبات.** فرض کنیم $f(z) \in (k,n,\alpha) - ST$ در اینصورت:

$$\{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\} = \{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)(1-\sum_{m=n+1}^{\infty} ma_m z^{m-1})}{z-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m z^m}\}$$

اگر اعداد حقیقی $z$ و $\zeta$ را انتخاب کنیم که $z \to 1^-$ و $\zeta \to -k^+$ آنگاه:

$$\{\frac{1-\sum_{m=n+1}^{\infty} ma_m + k\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m - k\sum_{m=n+1}^{\infty} ma_m}{1-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m}\} \geq \alpha$$

یا

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} [k(m-1)+m-\alpha]a_m \leq 1-\alpha$$

لذا حکم برقرار است.

بالعکس، فرض کنیم رابطه ی (۱.۲) برقرار باشد در اینصورت برای $|z| < 1$:

$$\{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\} = \{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)(1-\sum_{m=n+1}^{\infty} ma_m z^{m-1})}{z-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m z^m}\}$$
$$\{\frac{1-\sum_{m=n+1}^{\infty} ma_m z^{m-1} + \zeta\sum_{m=n+1}^{\infty}(m-1)a_m z^{m-2}}{1-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m z^{m-1}}\}$$

اگر $z \to 1^-$ و برای مقادیر حقیقی $\zeta$ داشته باشیم $\zeta \to -k^+$ آنگاه :

$$Re\{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\} = \frac{1-\sum_{m=n+1}^{\infty}[k(m-1)+m]a_m}{1-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m} \qquad (۲.۲)$$

با توجه به رابطه ی (۱.۲) داریم:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} [km+m-k]a_m \leq 1-\alpha+\alpha\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m$$

با جایگزینی در رابطه ی (۲.۲) به نامساوی زیر می رسیم:

$$Re\{\frac{\zeta}{z} + \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\} \geq \frac{\alpha(1-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m)}{1-\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m} = \alpha$$

در اینصورت $f(z) \in (k,n,\alpha) - ST$. ■

**قضیه ۴.۲.۲.** اگر $f(z) \in (k,n,\alpha) - ST$ آنگاه برای $|z| = r$:

$$r - \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)} r^{n+1} \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)} r^{n+1}$$

**اثبات.** بنا بر رابطه ی (۱.۲) داریم:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \leq \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)} \tag{۳.۲}$$

در اینصورت:

$$|f(z)| \leq r + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m r^m \leq r + r^{n+1} \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \leq r + \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)} r^{n+1}$$

بطور مشابه:

$$|f(z)| \geq r - \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m r^m \geq r - r^{n+1} \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \geq r - \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)} r^{n+1}.$$

■

**مثال.** فرض کنیم $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)} z^{n+1}$، با جایگزینی $m = n+1$ و $a_{n+1} = \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)}$ در $\sum_{m=n+1}^{\infty} [k(m-1)+m-\alpha] a_m \leq 1-\alpha$ بوضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می کند، لذا کران بالا قضیه ی ۴.۲.۲ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**قضیه ۵.۲.۲.** اگر $f(z) \in (k,n,\alpha) - ST$ آنگاه برای $|z| = r$:

$$1 - \frac{(1-\alpha)(n+1)}{(1+k)n+(1-\alpha)} r^n \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{(1-\alpha)(n+1)}{(1+k)n+(1-\alpha)} r^n.$$

**اثبات.** بنابر رابطه ی (۳.۲) و قضیه ی ۳.۲.۲ خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \leq \frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)}\right)(n+1) \Rightarrow \sum_{m=n+1}^{\infty} m a_m \leq \frac{(1-\alpha)(n+1)}{(1+k)n+(1-\alpha)}$$

در نتیجه، برای $|z| = r < ۱$ داریم:

$$|f'(z)| \leq ۱ + \sum_{m=n+۱}^{\infty} ma_m |z|^{m-۱} \leq ۱ + r^n \sum_{m=n+۱}^{\infty} ma_m \leq ۱ + \frac{(۱-\alpha)(n+۱)}{(۱+k)n + (۱-\alpha)} r^n$$

و

$$|f'(z)| \geq ۱ - \sum_{m=n+۱}^{\infty} ma_m |z|^{m-۱} \geq ۱ - r^n \sum_{m=n+۱}^{\infty} ma_m \geq ۱ - \frac{(۱-\alpha)(n+۱)}{(۱+k)n + (۱-\alpha)} r^n.$$

لذا حکم برقرار می باشد. ■

**مثال.** برای تابع $f(z) = z - \frac{(۱-\alpha)(n+۱)}{(۱+k)n+(۱-\alpha)} z^{n+۱}$ کران بالای قضیه ی ۵.۲.۲ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

**قضیه ۶.۲.۲.** اگر توابع $f(z) = z - \sum_{m=n+۱}^{\infty} a_m z^m, a_m \geq ۰$ و $g(z) = z - \sum_{m=n+۱}^{\infty} b_m z^m, b_m \geq ۰$ در رده ی $(k,n,\alpha) - ST$ داده شده باشند در اینصورت برای $۰ \leq \lambda \leq ۱$،

$$h(z) = (۱-\lambda) f(z) + \lambda g(z) = z - \sum_{m=n+۱}^{\infty} c_m z^m, c_m \geq ۰$$

در رده ی $(k,n,\alpha) - ST$ قرار دارد.

**اثبات.** فرض کنیم $f(z), g(z) \in (k,n,\alpha) - ST$ بنابر قضیه ی ۳.۲.۲ داریم:

$$[k(m-۱) + m - \alpha] a_m \leq ۱ - \alpha$$

و

$$[k(m-۱) + m - \alpha] b_m \leq ۱ - \alpha$$

بنابراین می توانیم ببینیم:

$$\sum_{m=n+۱}^{\infty} [k(m-۱) + m - \alpha] c_m = \sum_{m=n+۱}^{\infty} [k(m-۱) + m - \alpha][(۱-\lambda) a_m + \lambda b_m]$$

$$(1-\lambda)\sum_{m=n+1}^{\infty}[k(m-1)+m-\alpha]a_m+\lambda\sum_{m=n+1}^{\infty}[k(m-1)+m-\alpha]b_m$$
$$\leq (1-\lambda)(1-\alpha)+\lambda(1-\alpha)=1-\alpha$$

این برهان قضیه را کامل می کند. ■

**تعریف ۷.۲.۲.** حاصلضرب هادامارد اصلاح شده ی $f*g$ از دو تابع $f(z)=z-\sum_{m=n+1}^{\infty}a_mz^m, a_m\geq 0$ و $g(z)=z-\sum_{m=n+1}^{\infty}b_mz^m, b_m\geq 0$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$(f*g)(z)=z-\sum_{m=n+1}^{\infty}a_mb_mz^m$$

**قضیه ۸.۲.۲.** اگر $f(z),g(z)\in(k,n,\alpha)-ST$ در اینصورت $(f*g)\in(k,n,\beta)-ST$ بطوریکه:

$$\beta=\frac{(1+k)n+2(1-\alpha)-(1-\alpha)^2}{(1+k)n+2(1-\alpha)}$$

**اثبات.** بنابر قضیه ی ۳.۲.۲ داریم:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{[k(m-1)+m-\alpha]}{1-\alpha}b_m\leq 1,\ \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{[k(m-1)+m-\alpha]}{1-\alpha}a_m\leq 1 \tag{۴.۲}$$

بزرگترین $\beta$ ای را انتخاب می کنیم بطوریکه:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{[k(m-1)+m-\beta]}{1-\beta}a_mb_m\leq 1 \tag{۵.۲}$$

از (۴.۲) و نامساوی شوارتز می دانیم:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{[k(m-1)+m-\alpha]}{1-\alpha}\sqrt{a_mb_m}\leq 1 \tag{۶.۲}$$

لذا رابطه ی (۵.۲) برقرار است اگر:

$$\frac{[k(m-1)+m-\beta]}{1-\beta}a_mb_m\leq\frac{[k(m-1)+m-\alpha]}{1-\alpha}\sqrt{a_mb_m}$$

یا

$$\frac{a_m b_m}{\sqrt{a_m b_m}} = \sqrt{a_m b_m} \leq \frac{1-\beta[k(m-1)+m-\alpha]}{1-\alpha[k(m-1)+m-\beta]}$$

از رابطه ی (۶.۲) داریم:

$$\sqrt{a_m b_m} \leq \frac{1-\alpha}{[k(m-1)+m-\alpha]}$$

بنابراین اگر:

$$\frac{1-\alpha}{[k(m-1)+m-\alpha]} \leq \frac{1-\beta[k(m-1)+m-\alpha]}{1-\alpha[k(m-1)+m-\beta]}$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2[k(m-1)+m-\beta] \leq (1-\beta)[k(m-1)+m-\alpha]^2$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2[k(m-1)+m-\beta] \leq [k(m-1)+m-\alpha]^2 - \beta[k(m-1)+m-\alpha]^2$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2[k(m-1)+m] - \beta(1-\alpha)^2 \leq [k(m-1)+m-\alpha]^2 - \beta[k(m-1)+m-\alpha]^2$$

$$\Rightarrow \beta([k(m-1)+m-\alpha]^2 - (1-\alpha)^2) \leq [k(m-1)+m-\alpha]^2 - (1-\alpha)^2[k(m-1)+m]$$

لذا:

$$\beta \leq \frac{[k(m-1)+m-\alpha]^2 - (1-\alpha)^2[k(m-1)+m]}{[k(m-1)+m-\alpha]^2 - (1-\alpha)^2}$$

در اینصورت رابطه ی (۵.۲) برقرار است. تابع $\Theta(m)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Theta(m) = \frac{[k(m-1)+m-\alpha]^2 - (1-\alpha)^2[k(m-1)+m]}{[k(m-1)+m-\alpha]^2 - (1-\alpha)^2}$$

می توان دید:

$$\beta \leq \Theta(n+1) = \frac{(1+k)n + 2(1-\alpha) - (1-\alpha)^2}{(1+k)n + 2(1-\alpha)}$$

لذا حکم اثبات می شود. ■

**مثال.** توابع $f(z)=g(z)=z-\frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)}z^{n+1}$ که $0\leq k<\infty$ و $(0\leq\alpha<1)\alpha$ به طور واضح در شرایط قضیه ی فوق صدق می کنند ثابت می کنیم:

$$f*g=z-c_{n+1}z^{n+1}=z-(\frac{1-\alpha}{(1+k)n+(1-\alpha)})^2z^{n+1}\in(k,n,\beta)-ST$$

بنا به قضیه ی ۳.۲.۲ کافیست نشان دهیم:

$$\frac{(n(k+1)+1)c_{n+1}-1}{c_{n+1}-1}\leq\beta$$

با جایگزینی $c_{n+1}$ در عبارت $\frac{(n(k+1)+1)c_{n+1}-1}{c_{n+1}-1}$ و ساده کردن کسر فوق داریم:

$$\frac{(n(k+1)+1)c_{n+1}-1}{c_{n+1}-1}\leq\frac{(1+k)n+2(1-\alpha)-(1-\alpha)^2}{(1+k)n+2(1-\alpha)}$$

لذا نتیجه ی مطلوب حاصل می شود.

**قضیه ۹.۲.۲.** (توابع اکسترمال) فرض کنیم

$$f_n(z)=z, f_m(z)=z-\frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha}z^m \qquad m=n+1,n+2,...$$

در اینصورت $f(z)\in(k,n,\alpha)-ST$ اگر و تنها اگر بتوانیم آنرا به شکل $f(z)=\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_m f_m(z)$ بیان کنیم بطوریکه $\lambda_m\geq 0$ برای $m\geq n$ و $\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_m=1$.

**اثبات.** فرض کنیم $f(z)=\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_m f_m(z)$ در اینصورت:

$$f(z)=\lambda_n f_n(z)+\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m f_m(z)=\lambda_n z+\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m z-\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m\frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha}z^m$$

$$(\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_m)z-\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m\frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha}z^m=z-\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m\frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha}z^m$$

بنابراین:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m(\frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha})(\frac{k(m-1)+m-\alpha}{1-\alpha})=\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda_m=\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_m-\lambda_n=1-\lambda_n\leq 1$$

لذا $f(z) \in (k,n,\alpha) - ST$.

بالعکس، فرض کنیم $f(z) \in (k,n,\alpha) - ST$ چون:

$$|a_m| \leq \frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha} \qquad m = n+1, n+2, ...$$

قرار می دهیم:

$$\lambda_n = 1 - \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m, \lambda_m = \frac{k(m-1)+m-\alpha}{1-\alpha} \qquad m = n+1, n+2, ...$$

بنابراین:

$$f(z) = z - \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m z^m = z - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{k(m-1)+m-\alpha} \lambda_m z^m$$

$$= z - \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m (z - f_m(z)) = (1 - \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m) z + \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m f_m(z)$$

$$= \lambda_n z + \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m f_m(z) = \lambda_n f_n(z) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m f_m(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m f_m(z)$$

و این برهان قضیه را کامل می کند. ■

# فصل ۳

# بررسی دو عملگر انتگرال روی رده هایی از توابع ستاره گون $k$ - تایی و محدب $k$ - تایی

در این فصل، با معرفی دو عملگر انتگرال به مطالعه ی برخی از خواص آنها بر روی رده های $(k, n, \alpha) - ST$ و $(k, n, \alpha) - UCV$ می پردازیم.

برای این منظور، فرض کنیم $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$ دیسک یکه ی بازی از صفحه ی مختلط باشد. $\mathcal{H}(U)$ و $\mathcal{A}$ به ترتیب رده ای از توابع تحلیلی در $\mathcal{U}$ و رده ای از توابع به شکل $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ که در دیسک یکه ی باز $\mathcal{U}$ تحلیلی هستند تعریف می شوند.

## ۱.۳ تعاریف مقدماتی

فراسین [1] در [۶] به مطالعه ی دو رده ی $\varphi_{\alpha}^{*}(b)$ و $\rho_{\alpha}(b)$ پرداخت.

**تعریف ۱.۱.۳.** تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ ستاره گون از مرتبه ی $b$،$(b \in \mathbb{C} - \{۰\})$ و نوع $\alpha$،$(۰ \leq \alpha < ۱)$ می باشد هرگاه برای همه ی $z \in \mathcal{U}$

$$Re\{۱ + \frac{۱}{b}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱)\} > \alpha.$$

و با نماد $\varphi_{\alpha}^{*}(b)$ نمایش داده می شود.

[1] Frasin

**تعریف ۲.۱.۳.** تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ محدب از مرتبه ی $b$،$(b \in \mathbb{C} - \{۰\})$ و نوع $\alpha$،$(۰ \leq \alpha < ۱)$ می باشد هرگاه برای همه ی $z \in \mathcal{U}$

$$Re\{۱ + \frac{۱}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > \alpha.$$

و با نماد $\rho_\alpha(b)$ نمایش داده می شود.

در سال ۲۰۰۲، بریز [2] در [۲، ۳] به معرفی عملگر انتگرال

$$F_n(z) = \int_۰^z (\frac{f_۱(t)}{t})^{\alpha_۱}.....(\frac{f_n(t)}{t})^{\alpha_n} dt$$

و عملگر انتگرال

$$F_{\alpha_۱,...,\alpha_n}(z) = \int_۰^z (f'_۱(t))^{\alpha_۱}...(f'_n(t))^{\alpha_n} dt$$

برای $\alpha_i > ۰$ پرداخت.

ریاضیدانانی همچون بریز [3] و گونی [4] در [۴] با در نظر گرفتن عملگرها ی انتگرالی که در بالا معرفی شد به مطالعه ی برخی از خواص آنها روی رده های $\varphi^*_\alpha(b)$ و $\rho_\alpha(b)$ پرداختند و به نتایج زیر رسیدند:

**قضیه ۳.۱.۳.** فرض کنیم $\alpha_i$، $i \in \{۱, ..., n\}$ مقادیر حقیقی با خواص $\alpha_i > ۰$ برای $i \in \{۱, ..., n\}$ ، $\alpha$ عددی حقیقی، $(۰ \leq \alpha < ۱)$ و

$$۰ \leq (\alpha - ۱)\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i + ۱ < ۱.$$

۱ اگر $f_i \in \varphi^*_\alpha(b)$ برای $i = \{۱, ..., n\}$ و $b \in \mathbb{C} - \{۰\}$،آنگاه $F_n \in \rho_\gamma(b)$ ، بطوریکه:

$$\gamma = (\alpha - ۱)\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i + ۱.$$

---
[2] N. Breaz
[3] D. Breaz
[4] Guney

**اثبات.** ابتدا مشتقات مرتبه اول و دوم برای $F_n$ را محاسبه می کنیم:

$$F_n(z) = \int_{0}^{z} (\frac{f_1(t)}{t})^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (\frac{f_n(t)}{t})^{\alpha_n} dt$$

داریم:

$$F'_n(z) = (\frac{f_1(z)}{z})^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (\frac{f_n(z)}{z})^{\alpha_n}$$

و

$$F''_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\frac{zf'_i(z) - f_i(z)}{zf_i(z)}) F'_n(z).$$

از تساوی های بالا داریم:

$$\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)} = \alpha_1 (\frac{zf'_1(z) - f_1(z)}{zf_1(z)}) + ... + \alpha_n (\frac{zf'_n(z) - f_n(z)}{zf_n(z)})$$

و

$$\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)} = \alpha_1 (\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} - \frac{1}{z}) + ... + \alpha_n (\frac{f'_n(z)}{f_n(z)} - \frac{1}{z}) \tag{۱.۳}$$

با ضرب طرفین رابطه ی (۱.۳) در $z$ و $\frac{1}{b}$ داریم:

$$\frac{1}{b} \frac{zF''_n(z)}{F'_n(z)} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [1 + \frac{1}{b} (\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1)] - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{۲.۳}$$

رابطه ی (۲.۳) معادل است با:

$$1 + \frac{1}{b} \frac{zF''_n(z)}{F'_n(z)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [1 + \frac{1}{b} (\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1)] - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 \tag{۳.۳}$$

در نهایت، قسمت حقیقی جملات (۳.۳) را محاسبه می کنیم و نتیجه می گیریم که:

$$Re\{1 + \frac{1}{b} \frac{zF''_n(z)}{F'_n(z)}\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Re[1 + \frac{1}{b} (\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1)] - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 \tag{۴.۳}$$

چون $f_i \in \varphi^*_\alpha(b)$ برای $i = \{1, ..., n\}$ ، با بکار بردن رابطه ی (۴.۳) و تعریف ۱.۱.۳، داریم:

$$Re\{1 + \frac{1}{b}\frac{zF''_n(z)}{F'_n(z)}\} \geq (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 \qquad (5.3)$$

چون $1 \leq (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 < 0$ ، لذا $F_n \in \rho_\gamma(b)$ بطوریکه:

$$\gamma = (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1.$$

■

**قضیه ۴.۱.۳.** فرض کنیم $f_i \in \rho_\alpha(b)$، $0 \leq \alpha < 1$، $\alpha_i > 0$، $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ و

$$0 \leq (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 < 1$$

برای $i \in \{1, ..., n\}$. در اینصورت $F_{\alpha_1,...,\alpha_n} \in \rho_\eta(b)$، بطوریکه:

$$\eta = (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1.$$

**اثبات.** ابتدا مشتقات مرتبه اول و دوم برای $F_{\alpha_1,...,\alpha_n}$ را محاسبه می کنیم:

$$F_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z) = \int_0^z (f'_1(t))^{\alpha_1}...(f'_n(t))^{\alpha_n} dt$$

داریم:

$$F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z) = (f'_1(z))^{\alpha_1}...(f'_n(z))^{\alpha_n}$$

و

$$F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(f''_i(z))(f'_i(z))^{\alpha_i}}{(f'_i(z))}$$

از تساوی های بالا داریم:

$$\frac{F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)} = \alpha_1\frac{f''_1(z)}{f'_1(z)} + ... + \alpha_n\frac{f''_n(z)}{f'_n(z)} \qquad (6.3)$$

سپس با ضرب رابطه ی (۶.۳) در $\frac{z}{b}$ داریم:

$$\frac{1}{b}\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}=\alpha_1\frac{1}{b}\frac{zf''_1(z)}{f'_1(z)}+...+\alpha_n\frac{1}{b}\frac{zf''_n(z)}{f'_n(z)}. \qquad (۷.۳)$$

رابطه ی (۷.۳) معادل با است با:

$$1+\frac{1}{b}\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(1+\frac{1}{b}\frac{zf''_i(z)}{f'_i(z)})-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+1. \qquad (۸.۳)$$

در نتیجه، قسمت های حقیقی طرفین تساوی (۸.۳) را محاسبه می کنیم:

$$Re\{1+\frac{1}{b}\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Re(1+\frac{1}{b}\frac{zf''_i(z)}{f'_i(z)})-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+1. \qquad (۹.۳)$$

چون $f_i\in\rho_\alpha(b)$ برای $i=\{1,...,n\}$ ، با بکار بردن رابطه ی (۹.۳) و تعریف ۲.۱.۳، داریم:

$$Re\{1+\frac{1}{b}\frac{zF''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\}>(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+1. \qquad (۱۰.۳)$$

چون $1 > (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+1 \geq 0$ ، لذا $F_{\alpha_1,...,\alpha_n}\in\rho_\eta(b)$ ، بطوریکه:

$$\eta=(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+1.$$

■

**یادآوری** :در فصل ۲ بیان شد، تابع $f(z)\in\mathcal{A}(n)$ در رده ی $(k,n,\alpha)-ST$ قرار دارد هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$Re\{\frac{\zeta}{z}+\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)}\}\geq\alpha \qquad (۱۱.۳)$$

بطوریکه $(0\leq\alpha<1)$ ، $z\in U$ ، $|\zeta|\leq k, k\geq 0$ .

و همچنین تابع $f(z)\in\mathcal{A}(n)$ در رده ی $(k,n,\alpha)-UCV$ قرار دارد هرگاه:

$$Re\{1+\frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\}\geq\alpha \qquad (۱۲.۳)$$

بطوریکه $(0 \leq \alpha < 1)$ ، $z \in U$ ، $k \geq 0$ ، $|\zeta| \leq k, k \geq 0$ .

حال در اینجا، رده هایی از توابع ستاره گون $k$-تایی و توابع محدب $k$-تایی در $\mathcal{U}$ را در نظر می گیریم و به بررسی برخی از خواص عملگر های انتگرال معرفی شده بر روی رده های فوق می پردازیم و به نتایج ذیل می رسیم:

## ۲.۳ بررسی خواص عملگرهای انتگرال

**قضیه ۱.۲.۳.** فرض کنیم $f_i \in (k, n, \gamma_i) - ST$ برای هر $i = \{1, ..., n\}$ اگر $\alpha_i > 0$ و

$$0 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - \gamma_i)\alpha_i < 1$$

و $|\zeta| \leq k$ که $0 \leq k < \infty$ در اینصورت $F_n \in (k, n, \gamma) - UCV$ بطوریکه:

$$\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - \gamma_i)\alpha_i.$$

**اثبات.** ابتدا مشتقات مرتبه اول و دوم برای $F_n$ را محاسبه می کنیم:

$$F_n(z) = \int_0^z (\frac{f_1(t)}{t})^{\alpha_1}.....(\frac{f_n(t)}{t})^{\alpha_n} dt$$

داریم:

$$F'_n(z) = (\frac{f_1(z)}{z})^{\alpha_1}.....(\frac{f_n(z)}{z})^{\alpha_n}$$

و

$$F''_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\frac{z f'_i(z) - f_i(z)}{z f_i(z)}) F'_n(z)$$

از تساوی های بالا داریم:

$$\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)} = \alpha_1(\frac{z f'_1(z) - f_1(z)}{z f_1(z)}) + ... + \alpha_n(\frac{z f'_n(z) - f_n(z)}{z f_n(z)})$$

و

$$\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)} = \alpha_1(\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} - \frac{1}{z}) + ... + \alpha_n(\frac{f'_n(z)}{f_n(z)} - \frac{1}{z}) \qquad (۱۳.۳)$$

با ضرب طرفین رابطه ی (۱۳.۳) در $z-\zeta$ داریم:

$$(z-\zeta)\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i((z-\zeta)\frac{f'_i(z)}{f_i(z)} + \frac{\zeta}{z}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad (۱۴.۳)$$

رابطه ی (۱۴.۳) معادل است با:

$$1+(z-\zeta)\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i((z-\zeta)\frac{f'_i(z)}{f_i(z)} + \frac{\zeta}{z}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 \quad (۱۵.۳)$$

در نهایت، قسمت حقیقی جملات (۱۵.۳) را محاسبه می کنیم و نتیجه می گیریم که:

$$Re\{1+(z-\zeta)\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)}\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Re\{(z-\zeta)\frac{f'_i(z)}{f_i(z)} + \frac{\zeta}{z}\} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 \quad (۱۶.۳)$$

چون $f_i \in (k,n,\gamma_i)-ST$ برای هر $i=\{1,...,n\}$ ، با بکار بردن رابطه ی (۱۶.۳) و نامساوی (۱۱.۳) داریم:

$$Re\{1+(z-\zeta)\frac{F''_n(z)}{F'_n(z)}\} \geq 1-\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\alpha_i \quad (۱۷.۳)$$

چون $1 > \sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\alpha_i - 1 \geq 0$ ، لذا $F_n \in (k,n,\gamma)-UCV$ بطوریکه:

$$\gamma = 1-\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\alpha_i.$$

■

**قضیه ۲.۲.۳.** فرض کنیم $f_i \in (k,n,\gamma_i)-UCV$ برای هر $i=\{1,...,n\}$ ،اگر $\alpha_i > 0$ و

$$0 \leq 1-\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\alpha_i < 1$$

و $|\zeta| \leq k$ که $0 \leq k < \infty$ در اینصورت $F_{\alpha_1,...,\alpha_n} \in (k,n,\gamma)-UCV$ بطوریکه:

$$\gamma = 1-\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\alpha_i$$

**اثبات.** ابتدا مشتقات مرتبه اول و دوم برای $F_{\alpha_1,...,\alpha_n}$ را محاسبه می کنیم:

$$F_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z) = \int_0^z (f_1'(t))^{\alpha_1}...(f_n'(t))^{\alpha_n}dt$$

داریم:

$$F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z) = (f_1'(z))^{\alpha_1}...(f_n'(z))^{\alpha_n}$$

و

$$F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(f_i''(z))(f_i'(z))^{\alpha_i}}{(f_i'(z))}$$

از تساوی های بالا داریم:

$$\frac{F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)} = \alpha_1\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} + ... + \alpha_n\frac{f_n''(z)}{f_n'(z)} \qquad (۱۸.۳)$$

سپس با ضرب رابطه ی (۱۸.۳) در $(z-\zeta)$ داریم:

$$\frac{(z-\zeta)F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)} = \alpha_1\frac{(z-\zeta)f_1''(z)}{f_1'(z)} + ... + \alpha_n\frac{(z-\zeta)f_n''(z)}{f_n'(z)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\frac{(z-\zeta)f_n''(z)}{f_n'(z)}) \qquad (۱۹.۳)$$

رابطه ی (۱۹.۳) معادل با است با:

$$1 + \frac{(z-\zeta)F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)} = 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i((z-\zeta)\frac{f_n''(z)}{f_n'(z)}) \qquad (۲۰.۳)$$

در نتیجه، قسمت های حقیقی طرفین تساوی (۲۰.۳) را محاسبه می کنیم:

$$Re\{1 + \frac{(z-\zeta)F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\} = 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i Re\{(z-\zeta)\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)} + 1\} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \qquad (۲۱.۳)$$

چون $f_i \in (k,n,\gamma_i) - UCV$ برای $i = \{1,...,n\}$ ، با بکار بردن رابطه ی (۲۱.۳) و نامساوی (۱۲.۳) داریم:

$$Re\{1 + \frac{(z-\zeta)F''_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z)}\} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\gamma_i) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \geq 1 - \sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)\alpha_i \qquad (۲۲.۳)$$

چون $۱ < \sum_{i=۱}^{n}(۱-\gamma_i)\alpha_i - ۱ \leq ۰$ ، لذا $F_{\alpha_۱,\dots,\alpha_n} \in (k,n,\gamma)-UCV$ ، بطوریکه:

$$\gamma = ۱ - \sum_{i=۱}^{n}(۱-\gamma_i)\alpha_i.$$

■

# فصل ۴

# تک ارزی عملگر انتگرال

در این فصل معیارهایی برای تک ارزی عملگرهای انتگرال روی توابع تحلیلی در دیسک یکه ی باز را مورد مطالعه قرار می دهیم.

برای این منظور ابتدا به بیان تعریفی از چند عملگر انتگرال می پردازیم.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ رده ای از توابع $f(z)$ که در دیسک یکه ی باز تحلیلی اند و $f(\circ) = f'(\circ) - ۱ = \circ$ باشد. $S$ زیر رده ای از $\mathcal{A}$ شامل توابع $f(z) \in \mathcal{A}$ که در $\mathcal{U}$ تک ارز می باشند.

**الف** ) عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ برای $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$ بدین شکل بیان می شود [۱۷] :

$$J_{\gamma,\beta}(z) = \{\frac{۱}{\gamma}\int_{\circ}^{z} u^{-\beta}(f(u))^{\frac{۱}{\gamma}+\beta-۱}du\}^{\gamma} \qquad (z \in \mathcal{U}). \tag{۱.۴}$$

**ب** ) مایلر و مکانو [۱] عملگر انتگرال $M_{\gamma}$ را برای توابع $f(z)$ متعلق به رده ی $\mathcal{A}$ و مقادیر مختلط$\gamma, (\gamma \neq \circ)$، بصورت زیر تعریف کردند:

$$M_{\gamma}(z) = \{\frac{۱}{\gamma}\int_{\circ}^{z}(f(u))^{\frac{۱}{\gamma}}u^{-۱}du\}^{\gamma} \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{۲.۴}$$

می دانیم برای $f(z) \in S^{*}$ و $\gamma > \circ$ که $S^{*}$ زیر رده ای از $S$ شامل توابع ستاره گون $f(z)$ در $\mathcal{U}$ می باشد، داریم $M_{\gamma} \in S$ [۱۱] . همچنین با جایگزین کردن $\beta = ۱$ در رابطه ی (۱.۴) به عملگر انتگرال $M_{\gamma}(z)$ می رسیم.

[۱] Miler , Mocanu

**پ** ) در رابطه (۱.۴)، با قرار دادن $\frac{1}{\gamma} = 1$ و $\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ عملگر انتگرال

$$K_\beta(z) = \int_0^z (\frac{f(u)}{u})^\beta du \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{۳.۴}$$

بدست می آید که به عملگر انتگرال مرکس [۲] معروف است .[۸]

**ت** ) با جایگزینی $\frac{1}{\gamma} = 1$ و $\beta = 1$ در رابطه ی (۱.۴) به عملگر انتگرال

$$J_{1,1}(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{u} du \tag{۴.۴}$$

می رسیم که به عملگر انتگرال الکساندر [۳] معروف است.

**ث** ) هرگاه در رابطه ی (۱.۴) ، $\beta = 0$ قرار دهیم، داریم:

$$J_{\gamma,0}(z) = \{\frac{1}{\gamma} \int_0^z (f(u))^{\frac{1}{\gamma}-1} du\}^\gamma \tag{۵.۴}$$

**ج** ) عملگر انتگرال لیبرا [۴]

$$L[f](z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t). \tag{۶.۴}$$

**چ** ) برای $\gamma = 1, 2, \ldots$ عملگر انتگرال برناردی [۵] که تعمیمی از عملگر انتگرال لیبرا می باشد، بدین صورت بیان می شود:

$$L_\gamma[f](z) = \frac{1+\gamma}{z^\gamma} \int_0^z f(t) t^{\gamma-1} dt. \tag{۷.۴}$$

[۲] Kim-Merkes
[۳] Alexander
[۴] Libera
[۵] Bernardi

## ۱.۴ تعیین معیارهایی برای تک ارزی چند عملگر انتگرال

حال در اینجا سعی می کنیم به بررسی تک ارزی عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ بپردازیم.

برای این منظور به لم های زیر احتیاج داریم:

**لم ۱.۱.۴.** ([۱۴]) فرض کنیم $\alpha$ عددی مختلط که $Re(\alpha) > 0$ و $f(z) \in \mathcal{A}$. اگر برای $z \in \mathcal{U}$، $f(z)$ در شرط

$$\frac{1-\mid z\mid^{2Re\alpha}}{Re\alpha}\mid \frac{zf''(z)}{f'(z)}\mid\leq 1$$

صدق کند. در اینصورت تابع

$$F_\alpha(z)=\{\alpha\int_0^z u^{\alpha-1}f'(u)du\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

در رده ی $S$ قرار دارد.

**لم ۲.۱.۴.** ([6] **شوارتز** [۱۰]) فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $U_R=\{z\in\mathbb{C}:\mid z\mid<R\}$ باشد و برای ثابت $M$، $\mid f(z)\mid<M$. اگر $f(z)$ در $z=0$ با تعداد دفعات $m$، صفر شود. در اینصورت:

$$\mid f(z)\mid\leq\frac{M}{R^m}\mid z\mid^m \qquad (z\in\mathcal{U}_R)$$

در رابطه ی فوق، تساوی زمانی برقرار می شود که

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

بطوریکه $\theta$ ثابت است.

**لم ۳.۱.۴.** ([7] **کاراتئودری** [۱۲، ۱]) فرض کنیم $f$ تابعی تحلیلی در $\mathcal{U}$ با $f(0)=0$ باشد. اگر $f$ برای مقادیر $M>0$ در شرط

$$Ref(z)\leq M$$

[6] Schwarz
[7] Caratheodory

صدق کند آنگاه:

$$(1-|z|)|f(z)| \leq 2M|z| \qquad (z \in \mathcal{U}).$$

**قضیه ۴.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $Re\frac{1}{\gamma} > 0$، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$. اگر برای $z \in \mathcal{U}$، $\theta \in [0, 2\pi]$ و $\beta \in \mathbb{C}$،

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma| Re\frac{1}{\gamma}}{4(1+|\gamma||\beta-1|)} \qquad 0 < Re\frac{1}{\gamma} < 1 \tag{8.4}$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma|}{4(1+|\gamma||\beta-1|)} \qquad Re\frac{1}{\gamma} \geq 1 \tag{9.4}$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ متعلق به رده ی $S$ است.

**اثبات.** عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ را بدین شکل در نظر می گیریم:

$$J_{\gamma,\beta}(z) = \{\frac{1}{\gamma}\int_0^z u^{\frac{1}{\gamma}-1}(\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}du\}^{\gamma} \qquad (z \in \mathcal{U}). \tag{10.4}$$

فرض کنیم تابع

$$g(z) = \int_0^z (\frac{f(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}du. \tag{11.4}$$

در $\mathcal{U}$ باشد. داریم:

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = (\frac{1}{\gamma} + \beta - 1)(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1) \tag{12.4}$$

تابع

$$\psi(z) = e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1) \qquad (z \in U), \theta \in [0, 2\pi] \tag{13.4}$$

را در نظر می گیریم و می بینیم که $\psi(0) = 0$ .

برای $Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$ بنابر (۸.۴) و لم ۳.۱.۴ بدست می آوریم:

$$| \psi(z) | \leq \frac{| z || \gamma | Re\frac{1}{\gamma}}{2(1- | z |)(1+ | \gamma || \beta - 1 |)} \qquad (z \in \mathcal{U}, \beta \in \mathbb{C}). \tag{۱۴.۴}$$

برای $Re\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$ از (۹.۴) و لم ۳.۱.۴، داریم:

$$| \psi(z) | \leq \frac{| z || \gamma |}{2(1- | z |)(1+ | \gamma || \beta - 1 |)} \qquad (z \in \mathcal{U}, \beta \in \mathbb{C}). \tag{۱۵.۴}$$

از (۱۲.۴) و (۱۴.۴) نتیجه می گیریم که:

$$\frac{1- | z |^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq \frac{(1- | z |^{2Re\frac{1}{\gamma}}) | z |}{2(1- | z |)} \qquad (z \in \mathcal{U}), Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1). \tag{۱۶.۴}$$

چون برای $z \in \mathcal{U}, Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$ داریم:

$$1- | z |^{2Re\frac{1}{\gamma}} \leq 1- | z |^2 .$$

برای $z \in \mathcal{U}, Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$ از (۱۶.۴) بدست می آوریم:

$$\frac{1- | z |^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1. \tag{۱۷.۴}$$

برای $Re\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$ داریم:

$$\frac{1- | z |^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}} \leq 1- | z |^2 \qquad (z \in \mathcal{U})$$

برای $Re\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$ بنا بر (۱۲.۴) و (۱۵.۴) نتیجه می گیریم که:

$$\frac{1- | z |^{2Re\frac{1}{\gamma}}}{Re\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1. \tag{۱۸.۴}$$

بنا بر (۱۷.۴) و (۱۸.۴) و لم ۱.۱.۴، نتیجه می شود که $J_{\gamma,\beta}$ در رده ی $S$ قرار دارد. ■

**نتیجه ۵.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $Re\frac{1}{\gamma} > 0$، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. اگر برای $z \in \mathcal{U}$، $\theta \in [0, 2\pi]$ و $\beta \in \mathbb{C}$،

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma| Re\frac{1}{\gamma}}{4} \qquad Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1) \tag{19.4}$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma|}{4} \qquad Re\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty) \tag{20.4}$$

آنگاه عملگر انتگرال $M_\gamma$ که در (۲.۴) تعریف کردیم متعلق به رده ی $S$ می باشد.

**اثبات.** با جایگزینی $\beta = 1$ در قضیه ی ۴.۱.۴ نتیجه حاصل می شود. ■

**نتیجه ۶.۱.۴.** فرض کنیم $\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ و $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. اگر برای $z \in \mathcal{U}$ و $\theta \in [0, 2\pi]$

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{1}{4(1 + |\beta - 1|)}$$

آنگاه عملگر انتگرال $K_\beta$ تعریف شده در (۳.۴) در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** با قرار دادن $\gamma = 1$ در قضیه ی ۴.۱.۴ نتیجه حاصل می شود. ■

**نتیجه ۷.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $Re\frac{1}{\gamma} > 0$، $f \in \mathcal{A}$، $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. اگر برای $z \in \mathcal{U}$، $\theta \in [0, 2\pi]$ و $\beta \in \mathbb{C}$،

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma| Re\frac{1}{\gamma}}{4(1 + |\gamma|)} \qquad Re\frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\} \leq \frac{|\gamma|}{4(1 + |\gamma|)} \qquad Re\frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{\gamma,0}$ داده شده در (۵.۴) متعلق به رده ی $S$ است.

**اثبات.** با قرار دادن $\beta = ۰$ در قضیه ی ۴.۱.۴ نتیجه حاصل می شود. ■

**قضیه ۸.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $a = Re\frac{۱}{\gamma} > ۰$ ، $\beta \in \mathbb{C}$ و $f(z) \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_۲ z^۲ + \ldots$ باشد. اگر برای $z \in \mathcal{U}$

$$| \frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱ | \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}} | \gamma |}{۲(۱+ | \gamma || \beta - ۱ |)} \qquad (۲۱.۴)$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ که در (۱.۴) تعریف شد در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ را به فرم (۱۰.۴) و تابع $g(z)$ را به شکل (۱۱.۴) در $\mathcal{U}$ ، در نظر می گیریم. تابع $p(z)$ را چنین تعریف می کنیم: $p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)}, z \in \mathcal{U}$ داریم:

$$p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)} = (\frac{۱}{\gamma} + \beta - ۱)(\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱). \qquad (۲۲.۴)$$

بنا بر (۲۱.۴) و(۲۲.۴) برای $z \in \mathcal{U}$ بدست می آوریم:

$$| p(z) | \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}$$

تابع $p$ در شرط $p(۰) = ۰$ صدق می کند، با بکار بردن لم (۲.۱.۴) داریم:

$$| p(z) | \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲} | z | \qquad (z \in \mathcal{U}). \qquad (۲۳.۴)$$

از (۲۳.۴) برای $z \in \mathcal{U}$ نتیجه می گیریم که:

$$\frac{۱- | z |^{۲a}}{a} | \frac{zg''(z)}{g'(z)} | \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲} \frac{(۱- | z |^{۲a})}{a} | z | \qquad (۲۴.۴)$$

چون برای $| z | \leq ۱$

$$\max\{\frac{۱- | z |^{۲a}}{a} | z |\} = \frac{۲}{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}$$

برای $z\in\mathcal{U}$ بنا بر (۲۴.۴) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right|\leq 1 \tag{۲۵.۴}$$

از (۲۵.۴) و $g'=(\frac{f(z)}{z})^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1}$ و لم ۱.۱.۴، نتیجه می شود که عملگر انتگرال $J_{\gamma,\beta}$ در رده ی $S$ قرار دارد. ■

**نتیجه ۹.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $a=Re\frac{1}{\gamma}>0$ و $f(z)\in\mathcal{A}$ به فرم $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ باشد. اگر برای $z\in\mathcal{U}$

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leq\frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2}|\gamma| \tag{۲۶.۴}$$

آنگاه عملگر انتگرال $M_\gamma$ که در (۲.۴) تعریف شد در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** با قرار دادن $\beta=1$ در قضیه ۸.۱.۴ نتیجه می شود که $M_\gamma$ متعلق به رده ی $S$ می باشد. ■

**نتیجه ۱۰.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $\beta\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ و $f(z)\in\mathcal{A}$ به فرم $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ باشد. اگر برای $z\in\mathcal{U}$

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leq\frac{3\sqrt{3}}{2(1+|\beta-1|)} \tag{۲۷.۴}$$

آنگاه عملگر انتگرال $K_\beta$ که در (۳.۴) تعریف شد در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** با قرار دادن $\frac{1}{\gamma}=1$ در قضیه ی ۸.۱.۴ می توان نتیجه گرفت $K_\beta$ متعلق به رده ی $S$ می باشد. ■

**نتیجه ۱۱.۱.۴.** فرض کنیم $f(z)\in\mathcal{A}$ ، $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ . اگر برای $z\in\mathcal{U}$

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leq\frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{۲۸.۴}$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{1,1}$ که در (۴.۴) تعریف شد در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** با جایگزینی $\frac{1}{\gamma}=1$ و $\beta=1$ در قضیه ی ۸.۱.۴ نتیجه حاصل می شود. ■

**نتیجه ۱۲.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma$ عددی مختلط که $a = Re\frac{1}{\gamma} > 0$ و $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ باشد. اگر برای $z \in \mathcal{U}$

$$| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 | \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2} \frac{| \gamma |}{1 + | \gamma |} \qquad (۲۹.۴)$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{\gamma,0}$ که در (۵.۴) تعریف شد در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** برای $\beta = 0$ در قضیه ی ۸.۱.۴ داریم $J_{\gamma,0} \in S$. ■

حال در این قسمت، ابتدا به بیان تعریفی از عملگر انتگرال $J_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}$ می پردازیم، و سپس تک ارزی آن را بررسی می کنیم.

**تعریف ۱۳.۱.۴.** پسکار [8] [۱۷] عملگر انتگرال $J_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}$ را برای توابع $f_i \in \mathcal{A}$ ، $i = 1, \dots, n$ و اعداد مختلط $\gamma_i$ که $\gamma_i \neq 0$ ، $i = 1, \dots, n$ و $\beta \neq 0$ بصورت زیر تعریف کرد:

$$J_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}(z) = \{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma_i} \int_0^z u^{-\beta} \prod_{i=1}^{n} (f_i(u))^{\frac{1}{\gamma_i}+\beta-1}\}^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\gamma_i}}} du. \qquad (۳۰.۴)$$

**قضیه ۱۴.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma_i$ ، $\beta$ اعدادی مختلط باشند که $Re\frac{1}{\gamma_i} > 0$، $f_i(z) = z + a_2 z^2 + \dots$، $i = \overline{1,n}$، $f_i \in \mathcal{A}$. اگر برای $z \in \mathcal{U}$ ، $\theta \in [0, 2\pi]$ و $\beta \in \mathbb{C}$،

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1)\} \leq \frac{| \gamma_i | Re\frac{1}{\gamma_i}}{4(1 + | \gamma_i || \beta - 1 |)} \qquad 0 < Re\frac{1}{\gamma_i} < 1 \qquad (۳۱.۴)$$

یا

$$Re\{e^{i\theta}(\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1)\} \leq \frac{| \gamma_i |}{4(1 + | \gamma_i || \beta - 1 |)} \qquad Re\frac{1}{\gamma_i} \geq 1 \qquad (۳۲.۴)$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\beta}$ متعلق به رده ی $S$ می باشد.

[8] V. Pescar

**اثبات.** عملگر انتگرال $J_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\beta}$ را بدین شکل تعریف می کنیم:

$$J_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\beta}(z)=\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\gamma_i}\int_0^z\prod_{i=1}^{n}u^{\frac{1}{\gamma_i}-1}(\frac{f_i(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_i}+\beta-1}\}^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\gamma_i}}}du. \quad (۳۳.۴)$$

تابع

$$h(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}(\frac{f_i(u)}{u})^{\frac{1}{\gamma_i}+\beta-1}du. \quad (۳۴.۴)$$

را در $\mathcal{U}$ در نظر می گیریم. داریم:

$$\frac{zh''(z)}{h'(z)}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\gamma_i}+\beta-1)(\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}-1). \quad (۳۵.۴)$$

تابع

$$\psi(z)=e^{i\theta}(\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}-1) \qquad (z\in U),\theta\in[0,2\pi],i=\overline{1,n} \quad (۳۶.۴)$$

را در نظر می گیریم و می بینیم که $\psi(0)=0$ .

برای $Re\frac{1}{\gamma_i}\in(0,1)$ بنابر (۳۱.۴) و لم ۳.۱.۴، بدست می آوریم:

$$|\psi(z)|\leq\frac{|z||\gamma_i|Re\frac{1}{\gamma_i}}{2(1-|z|)(1+|\gamma_i||\beta-1|)} \qquad (z\in\mathcal{U},\beta\in\mathbb{C},i=\overline{1,n}). \quad (۳۷.۴)$$

برای $Re\frac{1}{\gamma_i}\in[1,\infty)$ از (۳۲.۴) و لم ۳.۱.۴، داریم:

$$|\psi(z)|\leq\frac{|z||\gamma_i|}{2(1-|z|)(1+|\gamma_i||\beta-1|)} \qquad (z\in\mathcal{U},\beta\in\mathbb{C},i=\overline{1,n}). \quad (۳۸.۴)$$

از (۳۵.۴) و (۳۷.۴) نتیجه می شود که:

$$\frac{1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma_i}}}{Re\frac{1}{\gamma_i}}\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right|\leq\frac{(1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma_i}})|z|}{2(1-|z|)} \qquad (z\in\mathcal{U}),Re\frac{1}{\gamma_i}\in(0,1). \quad (۳۹.۴)$$

چون برای $z\in\mathcal{U},i=\overline{1,n},Re\frac{1}{\gamma_i}\in(0,1)$ داریم:

$$1-|z|^{2Re\frac{1}{\gamma_i}}\leq 1-|z|^2 .$$

برای $Re\frac{1}{\gamma_i} \in (0,1)$ $z \in \mathcal{U}, i = \overline{1,n},$ از (۳۹.۴) بدست می آوریم:

$$\frac{1-\mid z\mid^{2Re\frac{1}{\gamma_i}}}{Re\frac{1}{\gamma_i}} \mid \frac{zh''(z)}{h'(z)} \mid\leq 1. \quad (40.4)$$

برای $i = \overline{1,n}, Re\frac{1}{\gamma_i} \in [1,\infty)$ داریم:

$$\frac{1-\mid z\mid^{2Re\frac{1}{\gamma_i}}}{Re\frac{1}{\gamma_i}} \mid\leq 1-\mid z\mid^2 \qquad (z \in \mathcal{U})$$

برای $i = \overline{1,n}, Re\frac{1}{\gamma_i} \in [1,\infty)$ بنا بر (۳۵.۴) و (۳۸.۴) بدست می آوریم:

$$\frac{1-\mid z\mid^{2Re\frac{1}{\gamma_i}}}{Re\frac{1}{\gamma_i}} \mid \frac{zh''(z)}{h'(z)} \mid\leq 1. \quad (41.4)$$

بنا بر (۴۰.۴) و (۴۱.۴) و لم ۱.۱.۴، نتیجه می شود که $J_{\gamma_1,\dots,\gamma_2,\beta}$ در رده ی $S$ قرار دارد. ■

**قضیه ۱۵.۱.۴.** فرض کنیم $\gamma_i$ ها اعدادی مختلط باشند بطوریکه $a = Re\frac{1}{\gamma_i} > 0$ ، $\beta \in \mathbb{C}$ و $f_i(z) \in \mathcal{A}$ به فرم $f_i(z) = z + a_2z^2 + \dots$ ، $i = \overline{1,n}$ باشد. اگر برای $z \in \mathcal{U}$ ،

$$\mid \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \mid\leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}} \mid \gamma_i \mid}{2(1+\mid \gamma_i \mid\mid \beta - 1 \mid)} \quad (42.4)$$

آنگاه عملگر انتگرال $J_{\gamma_1,\dots,\gamma_2,\beta}$ که در (۳۰.۴) تعریف شد، در رده ی $S$ قرار دارد.

**اثبات.** عملگر انتگرال $J_{\gamma_1,\dots,\gamma_2,\beta}$ را به فرم (۳۳.۴) و تابع $h(z)$ را به شکل (۳۴.۴) در $\mathcal{U}$، در نظر می گیریم. تابع $k(z)$ را اینچنین تعریف می کنیم:

$$k(z) = \frac{zh''(z)}{h'(z)} \qquad (z \in \mathcal{U})$$

داریم :

$$k(z) = \frac{zh''(z)}{h'(z)} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\gamma_i} + \beta - 1)(\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1). \quad (43.4)$$

بنا بر (۴۲.۴) و(۴۳.۴) برای $z \in \mathcal{U}$ داریم:

$$|\, k(z)\, | \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}$$

تابع $k$ در شرط $k(۰)=۰$ صدق می کند، با بکار بردن لم ۲.۱.۴ داریم:

$$|\, k(z)\, | \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}\, |\, z\, | \qquad (z \in \mathcal{U}). \tag{۴۴.۴}$$

از (۴۴.۴) برای $z \in \mathcal{U}$ نتیجه می گیریم که:

$$\frac{۱-|\, z\, |^{۲a}}{a}\, \left|\, \frac{zh''(z)}{h'(z)}\, \right| \leq \frac{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}{۲}\, \frac{(۱-|\, z\, |^{۲a})}{a}\, |\, z\, | \tag{۴۵.۴}$$

چون

$$\max_{|z|\leq ۱}\{\frac{۱-|\, z\, |^{۲a}}{a}\, |\, z\, |\} = \frac{۲}{(۲a+۱)^{\frac{۲a+۱}{۲a}}}$$

برای $z \in \mathcal{U}$ بنا بر (۴۵.۴) داریم:

$$\frac{۱-|\, z\, |^{۲a}}{a}\, \left|\, \frac{zh''(z)}{h'(z)}\, \right| \leq ۱ \tag{۴۶.۴}$$

از (۴۶.۴) و $h' = \prod_{i=۱}^{n}(\frac{f_i(z)}{z})^{\frac{۱}{\gamma_i}+\beta-۱}$ و لم ۱.۱.۴ نتیجه می شود که عملگر انتگرال $J_{\gamma_۱,\ldots,\gamma_۲,\beta}$ در رده ی $S$ قرار دارد. ■

# مراجع


[1] D. Blezu. On univalence criteria. *General Mathematics*, 14(1):87–93, 2006. 48

[2] D. Breaz and N. Breaz. Two integral operator. *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, Cluj-Napoca.*, (3):13–21, 2002. 38

[3] D. Breaz, A. Owa, and N. Breaz. *A new integral univalent operator*. to appear. 38

[4] Daniel Breaz and H. Ozlem Guney. The integral operator on the classes $\varphi_\alpha^*(b)$ and $\rho_\alpha(b)$. *Mathematical Inequalities.*, 2(1):97–100, 2008. 38

[5] Qin Deng. On univalent functions with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 189:1675–1682, 2007. 17

[6] A. B. Frasin. Family of analytic functions of complex order. *AMAPN.*, 22:179–191, 2006. 37

[7] S. Kanas and A. Wisniowska. Conic regions and starlike functions. *Rev. Roumaine. Math. Pures Appl.*, 54(4):647–657, 2000. 27, 28

[8] J. Y. Kim and P. E. Merkes. On integral of powers of a spirallike function. *Kyungpook Math. J*, 12:249–253, 1972. 47

[9] A. Lecko and A. Wisniowska. Geometric properties of subclasses of starlike functions. *J. comp. and App. Math.*, 155:383–387, 2003. 27

[10] O. Mayer. *Functions Theory of one Complex Variable*. Bucuresti, 1981. 48

[11] S. S. Miller and P. Mocanu P. Differential subordinations. *Theory and Applications,in: Monographs and Text Books in Pure and Applied Mathematics.*, 255:Marcel Dekker, 2000. 46

[12] S. Moldoveanu, N. N. Pascu, and N. R. Pascu. On the univalence of an integral operator. *Mathematica*, 43:113–116, 2001. 48

[13] H. Ozlem Guney and S. Sumer Eker. On a subclass of certain k-starlike functions with negative coefficients. *Bull Braz Math Soc.*, 37(1):19–28, 2006. 29

[14] N. N. Pascu. On a univalence criterion ii, itinerant seminar functional equations. *Approximation and Convexity, Cluj Napoca*, 85:153–154, 1985. 48

[15] Herb Silverman. Univalent functions with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc*, 51(1):109–116, 1975. 17

[16] H Silverman1. *Complex Variables*. CENGAGE Learning, March 1975. 3, 7

[17] Pescar Virgil and Breaz Daniel. On an integral operator. *Appl. Math. Lett.*, 43:1–5, 2010. 46, 54

# فهرست الفبایی

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| اکسترمال | Extermal |
| تابع تک ارز | Univalent function |
| تابع تحلیلی | Analytic function |
| تابع یک به یک | Injective function |
| تابع ستاره گون | Starlike function |
| تابع محدب | Convex function |
| تابع نرمال | Normal function |
| تابع هلومورفیک | Holomorphic function |
| چندجمله ای | Polynomial |
| حاصل ضرب هادامارد | Hadamard product |
| دامنه | Domain |
| برد | Rank |
| کران | Bound |
| عملگر انتگرال | Integral operator |
| مرتبه مختلط | Complex order |
| میدان | Field |
| مشتق | Derivative |
| نامساوی مثلث | Triangle inequality |

## Abstract

In this thesis, is to show some properties of functions belonging to the class $(k, n, \alpha) - ST$, and we present some properties for two general integral operators on the classes $(k, n, \alpha) - ST$ and $(k, n, \alpha) - UCV$.

**Keywords:** *Analytic function, univalence function, starlike function, convex function, integral operator.*

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics

MS Thesis

# The subclass of starlike functions with negative coefficients

By:
Samineh Zakeri

Supervisor:
Ahmad Zireh

Advisor:
Ebrahim Hashemi

Jun 2011