بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری جبر

مطالعه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها به کمک گراف‌ها

نگارنده:
ابوالفضل علی‌بمانی
استاد راهنما:
دکتر ابراهیم هاشمی
استاد مشاور:
دکتر عبدالله آل‌هوز

دی ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود **آقای ابوالفضل علی بمانی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض ـ جبر ـ نظریه حلقه ها** به شماره دانشجویی **۹۳۰۱۰۱۵** ورودی **مهر ماه** سال **۱۳۹۳** در تاریخ **۱۳۹۷/۱۰/۱۷** از رساله **نظری** ■/ **عملی** ☐ خود با عنوان : **مطالعه ی حلقه ها و مدول ها به کمک گراف ها**
دفاع و با اخذ نمره ......۱۹٫۷...... به درجه : ...عالی... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد راهنما	استاد	
۲	دکتر عبداله آل هوز	استاد مشاور	استادیار	A.A
۳	دکتر سیدحیدر جعفری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۴	دکتر مهدی رضا خورسندی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر یحیی طالبی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۶	دکتر احمد معتمدنژاد	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی **آقای ابوالفضل علی بمانی** بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تقدیم به همه دوستداران علم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنما و مشاور خود، جناب آقای دکتر هاشمی و جناب آقای دکتر آل‌هوز، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، از پدر و مادر عزیزم تشکر و قدردانی می‌کنم، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان.

تعهد نامه

اینجانب **ابوالفضل علی بمانی** دانشجوی دکتری رشته **جبر** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مطالعه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها به کمک گراف‌ها**، تحت راهنمایی **دکتر هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه شرکت پذیر با همانی ناصفر و M یک مدول چپ یکانی ناصفر روی R باشد. در این نوشتار، گراف‌هایی را به این دو ساختار جبری نسبت می‌دهیم و به بررسی برخی ارتباطات بین خواص گرافی و جبری آن‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی شرکت‌پذیر، حلقه‌ی برگشت‌پذیر، حلقه‌ی نیم‌جابجایی، عدد خوشه‌ای، کمر، قطر.

لیست مقالات مستخرج از رساله

(1) A. Alibemani and E. Hashemi, The total graph of non-zero annihilating ideals of a commutative ring, *Commun. Korean Math. Soc.*, **33** (2018), 379–395.

(2) A. Alibemani and E. Hashemi, Study of the annihilator ideal graph of a semicommutative ring, *Commun. Korean Math. Soc.*, to appear.

(3) A. Alibemani and E. Hashemi, The total graph of unfaithful submodules of a module over reversible rings, *Asian-Eur. J. Math.*, **10** (2017), 1750074, 9 pp.

(4) A. Alibemani, E. Hashemi and A. Alhevaz, The cozero-divisor graph of a module, *Asian-Eur. J. Math.*, **11** (2018), 1850092, 13 pp.

(5) A. Alibemani, E. Hashemi and A. Alhevaz, The total graph of annihilating one-sided ideals of a ring, submitted.

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R
$J(R)$	رادیکال ژاکوبسون حلقه R
$\mathrm{Min}(R)$	مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه R
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه R
$\mathrm{Ass}(M)$	مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به R-مدول M
$\mathrm{l.ann}(X)$	پوچساز چپ X
$\mathrm{r.ann}(X)$	پوچساز راست X
$Z(R)$	مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R
$\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$	گراف ایده‌آل پوچساز
$\Gamma(R)$	گراف مقسوم‌علیه صفر
$\Gamma'(R)$	گراف دوگان مقسوم‌علیه صفر
$\Omega(R)$	گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن
$\mathrm{gr}(G)$	کمر گراف G
$\mathrm{diam}(G)$	قطر گراف G
$\alpha(G)$	عدد استقلال گراف G
$\omega(G)$	عدد خوشه‌ای گراف G
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گری گراف G

پیش‌گفتار

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی گراف‌ها، بخش قابل توجهی از تحقیقات در طول سه دهه گذشته می‌باشد. اندرسون[۱] و لوینگستون[۲] در [۶]، گراف مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه جابجایی یکدار R، که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، را معرفی و بررسی کردند. مجموعه راس‌های این گراف، مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. افخمی[۳] و خشیارمنش[۴] در [۲]، گراف دوگان مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه جابجایی یکدار R، که با نماد $\Gamma'(R)$ نشان داده می‌شود، را معرفی و بررسی کردند. مجموعه راس‌های این گراف، عناصر نایکال حلقه R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$. افخمی در [۱]، مفهوم گراف دوگان مقسوم علیه صفر را به حلقه‌های ناجابجایی توسیع داد. بدین صورت که مجموعه راس‌های این گراف، عناصر نایکال حلقه ناجابجایی R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$. مولفین در [۳۲]، گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن یک حلقه جابجایی یکدار R، که با نماد $\Omega(R)$ نشان داده می‌شود، را معرفی کردند. مجموعه راس‌های آن همه ایده‌آل‌های پوچ‌کن ناصفر R می‌باشد و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر $I + J$ ایده‌آل پوچ‌کن باشد. در [۷]، گراف ایده‌آل پوچساز یک حلقه جابجایی یکدار R، که با نماد $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ نشان داده می‌شود، معرفی شد. مجموعه راس‌های آن همه ایده‌آل‌های غیر بدیهی R می‌باشد و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر $I \cap \mathrm{Ann}(J) \neq 0$ یا $J \cap \mathrm{Ann}(I) \neq 0$.

در فصل اول، که برگرفته از منابع [۱۳]، [۱۵]، [۱۸]، [۲۱]، [۲۴]، [۲۸]، [۳۱] و [۳۴] می‌باشد، به بیان برخی مفاهیم و تعاریف ابتدایی جبر و نظریه گراف می‌پردازیم. البته فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم و تعاریف ابتدایی جبر و نظریه گراف آشنا می‌باشد.

در فصل دوم، که برگرفته از منابع [۱]، [۲]، [۷] و [۳۲] است، به یادآوری گراف‌های ایده‌آل پوچساز یک حلقه جابجایی، مجموع ایده‌آل پوچ کن‌های یک حلقه جابجایی و گراف دوگان مقسوم

[۱] Anderson

[۲] Livingston

[۳] Afkhami

[۴] Khashyarmanesh

علیه صفر یک حلقه جابجایی (و ناجابجایی) می‌پردازیم و برخی ویژگی‌های گرافی آنها را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، که برگرفته از منابع [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] است، با درنظر گرفتن گراف‌های یادآوری شده در فصل دوم، گراف‌هایی را به حلقه یکدار R و R-مدول یکانی M وابسته می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های گرافی و جبری آنها می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم ابتدایی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف G، یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ از راس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(G)$ از یال‌ها و یک تابع وقوع Ψ_G که به هر یال G، یک زوج نامرتب از راس‌های G را نسبت می‌دهد.

اگر e یک یال و u و v دو راس باشند به طوریکه $\Psi_G(e) = uv$، در اینصورت گفته می‌شود که e، راس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است و راس‌های u و v، دو سر یال e نامیده می‌شوند. درجه راس v در گراف G، برابر تعداد یال‌های متصل به v می‌باشد که با نماد $\deg(v)$ نشان داده می‌شود. راس v را تنها گوییم، هرگاه $\deg(v) = ۰$.

اگر مجموعه راس‌ها و یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف مزبور را متناهی می‌نامند. گرافی که یک راس داشته باشد، بدیهی و سایر گراف‌ها را غیربدیهی می‌نامیم. یک گراف تهی است هرگاه هیچ راسی نداشته باشد. از نماد $|G|$ برای نشان دادن تعداد راس‌های گراف G استفاده می‌کنیم.

دو راس که بر روی یال مشترکی واقعند، مجاور نامیده می‌شود. به همین ترتیب دو یال که یک راس مشترک دارند، نیز مجاور نامیده می‌شوند. برای دو راس متمایز u و v در G، نماد $u - v$ نشان می‌دهد u و v مجاورند. مجموعه راس‌هایی که با راس v مجاور می‌باشند همسایه‌های راس v نامیده و با نماد $N(v)$ نشان داده می‌شود.

یک یال با دو سر یکسان، طوقه و یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی نامیده می‌شود. یک گراف، ساده است، اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو راس آن، بیش از یک یال نباشد.

ملاحظه ۲.۱.۱. تمام گراف‌های در نظر گرفته شده در این نوشتار ساده هستند.

گراف ساده‌ای که هر دو راس متمایز آن با یکدیگر مجاورند، گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهیم. مکمل گراف ساده G، که با $\overline{G}$ نشان داده می‌شود، گراف ساده‌ای است با مجموعه راس‌های $V(G)$، که در آن دو راس مجاورند، اگر و تنها اگر آن راس‌ها در G مجاور نباشند.

فرض کنید H و G دو گراف باشند به‌طوریکه $V(G) \cap V(H) = \varnothing$، در اینصورت اجتماع دو گراف H و G که با نماد $G \cup H$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G) \cup V(H)$ و یال‌های $E(G) \cup E(H)$.

تعریف ۳.۱.۱. دو گراف H و G یکریخت نامیده می‌شوند و نوشته می‌شود $G \cong H$، اگر توابع دوسویی $\theta : V(G) \to V(H)$ و $\phi : E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشند، به طوریکه $\Psi_G(e) = uv$ اگر و تنها اگر $\Psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. این زوج (θ, ϕ) از توابع، یک یکریختی بین G و H نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. می‌گوییم گراف H، زیرگراف G است و نوشته می‌شود $H \subseteq G$، اگر $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و Ψ_H از تحدید Ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد.

اگر $H \subseteq G$، ولی داشته باشیم $H \neq G$، می‌نویسیم $H \subset G$ و می‌گوییم H یک زیرگراف سره از G است. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر از G می‌نامیم.

فرض کنید V'، یک زیرمجموعه ناتهی از $V(G)$ باشد. زیرگرافی از G، که مجموعه راس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که هر دو راس آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القا شده توسط V' نامیده و با نماد $\langle V' \rangle$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوییم $\langle V' \rangle$ یک زیرگراف القایی G می‌باشد. زیرگراف القایی $\langle V(G) \setminus V' \rangle$ که با نماد $G \setminus V'$ نمایش داده می‌شود، زیرگرافی است که با حذف راس‌های V' و یال‌های واقع بر آن‌ها، از G به دست می‌آید.

زیرمجموعه S از $V(G)$ را که هیچ دو راس آن در G مجاور نیستند، یک مجموعه مستقل از G می‌نامیم. می‌گوییم مجموعه مستقل S ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S| < |S'|$ در G وجود نداشته باشد. تعداد راس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم از G، عدد استقلال G نامیده شده و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود.

یک خوشه از گراف ساده G، زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به‌طوریکه $\langle S \rangle$ کامل باشد. عدد خوشه‌ای G، تعداد راس‌های بزرگترین خوشه G می‌باشد و با نماد $\omega(G)$ نشان داده می‌شود.

زیرمجموعه‌ی S از $V(G)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر گوییم، هرگاه هر راس از $V(G) \setminus S$ یک همسایه در S داشته باشد. می‌گوییم مجموعه‌ی احاطه‌گر S مینیمم است، اگر هیچ مجموعه‌ی احاطه‌گر S' با شرط $|S'| < |S|$ در G وجود نداشته باشد. تعداد راس‌ها در یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم از G، عدد احاطه‌گری G نامیده شده و با نماد $\gamma(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $r \geqslant ۲$ عددی صحیح باشد. گراف r-بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه راس‌های آن را به r زیرمجموعه طوری افراز کرد که در آن، دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد.

گراف r-بخشی کامل، یک گراف ساده r-بخشی است که در آن، هر راس به تمام راس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار دارند، وصل شده است. گراف دوبخشی کامل، با بخش‌هایی به اندازه‌های m و n را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. همچنین گراف یکریخت با $K_{1,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم و راسی که با راس‌های دیگر مجاور است، راس مرکزی نامیده می‌شود. توجه کنید که گراف فاقد راس را نیز گراف ستاره می‌نامیم. اگر G یک گراف ستاره به مرکز x و H نیز گراف ستاره به مرکز y باشد (G یا H می‌توانند فاقد راس باشند)، آنگاه گراف دوستاره به صورت $G \cup H$ می‌باشد که x و y مجاورند.

تعریف ۶.۱.۱. یک گشت در گراف G، دنباله ناتهی و متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_j v_j$ است به طوریکه جملات آن یک در میان از راس‌ها و یال‌ها بوده و برای هر $1 \leqslant i \leqslant j$، v_{i-1} و v_i دو سر یال e_i باشند. در اینصورت می‌گوییم W، یک گشت از v_0 تا v_j است. راس های v_0 و v_j به ترتیب ابتدا و انتهای W و v_1،v_2،...،v_{j-1} راس‌های داخلی آن نامیده می‌شوند. همچنین عدد صحیح j را طول W می‌نامیم. می‌گوییم یک گشت بسته است، اگر طول آن مثبت بوده و به‌علاوه ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.

اگر یال‌های e_1،e_2،...،e_j در گشت W متمایز باشند، W یک گذر نامیده می‌شود. در این حالت، طول W برابر با تعداد یال‌ها می‌باشد. اگر علاوه بر یال‌ها، راس‌های v_0،v_1،...،v_j نیز متمایز باشند، W یک مسیر نامیده می‌شود. در این نوشتار، مسیر $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_j v_j$ را با نماد $v_0 - v_1 - \cdots - v_j$ نشان می‌دهیم. یک زیرتقسیم از یک گراف، برداشتن یال و جایگزین کردن مسیر به جای آن است به طوریکه ابتدا و انتهای این مسیر دو سر یال حذف شده و راس‌های داخلی آن متمایز از راس‌های گراف باشند.

گراف G همبند است، هرگاه بین هر دو راس متمایز آن مسیری موجود باشد. همبندی، یک رابطه هم ارزی به روی مجموعه راس‌های گراف G تشکیل می‌دهد. بنابراین افرازی از $V(G)$ به مجموعه‌های ناتهی $V_1(G)$،$V_2(G)$،...،$V_j(G)$ وجود دارد که در آن بین دو راس u و v مسیر موجود است اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به مجموعه $V_i(G)$ یکسانی باشند.

فاصله میان دو راس متمایز u و v که با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v، اگر چنین مسیری موجود باشد. در غیر اینصورت $d(u,v) := \infty$. قطر گراف G که با نماد $\operatorname{diam}(G)$ نشان داده می‌شود، سوپریمم فاصله بین دو راس از G می‌باشد.

یک گذر بسته که ابتدا و راس‌های داخلی آن دو به دو متمایز باشند، دور نامیده می‌شود. دور به

طول n را با C_n نشان می‌دهیم. کمر گراف G، که با نماد $\mathrm{gr}(G)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از طول کوتاهترین دور در G، اگر دوری در G موجود باشد، در غیر اینصورت $\mathrm{gr}(G) := \infty$.

اکنون با استفاده از مفهوم دور، می‌توانیم به بررسی یک ویژگی اصلی از گراف های دوبخشی بپردازیم.

قضیه ۷.۱.۱. یک گراف متناهی، دوبخشی است اگر و تنها اگر شامل هیچ دوری به طول فرد نباشد.

برهان. [۳۴، قضیه ۱۸.۲.۱]. □

جنگل، گرافی است که شامل هیچ دوری نباشد و جنگل همبند را درخت می‌نامیم. گراف همبندی که فقط شامل یک دور باشد، گراف تک‌دور نامیده می‌شود. همچنین گراف دور، گرافی است که فقط از یک دور تشکیل شده باشد.

تعریف ۸.۱.۱. عدد رنگی گراف G، که با نماد $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، برابر است با کمترین تعداد رنگ‌هایی که می‌توان به راس‌های گراف G نسبت داد به طوریکه هر دو راس مجاور دارای رنگ‌های متفاوتی باشند.

تعریف ۹.۱.۱. گراف G مسطح است هرگاه بتوان آن را در صفحه به گونه‌ای رسم کرد که یال‌ها تنها در راس‌های دوسر خود متقاطع باشند.

گراف‌های متناهی مسطح مشخصه بسیار ساده‌ای دارند که توسط کوراتوفسکی[۱] بیان شده است. این بخش را با قضیه کوراتوفسکی به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید G یک گراف متناهی باشد. در اینصورت، G مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیرتقسیمی از گراف‌های K_5 و $K_{3,3}$ نباشد.

برهان. [۳۴، قضیه ۲.۲.۶]. □

برای جزییات بیشتر در مورد گراف‌ها [۱۵]، [۱۸] و [۳۴] پیشنهاد می‌شوند.

[۱] Kuratowski

۲.۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی جبر

در سراسر این نوشتار، فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر با همانی ناصفر و M یک R مدول چپ یکانی ناصفر باشد. مجموعه ایده‌آل‌های اول، ایده‌آل‌های اول مینیمال، ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال، ایده‌آل‌های راست ماکسیمال و ایده‌آل‌های ماکسیمال R را به ترتیب با نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$، $\mathrm{Min}(R)$، $\mathrm{Max}_l(R)$، $\mathrm{Max}_r(R)$ و $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}_n$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$، به عنوان حلقه، به ترتیب نماد اعداد صحیح، اعداد صحیح به پیمانه n، اعداد گویا، اعداد حقیقی و اعداد مختلط می‌باشند. مجموعه‌ی اعداد طبیعی با نماد $\mathbb{N}$ نشان داده می‌شود.

فرض کنید $a \in R$. در اینصورت ایده‌آل چپ اصلی تولید شده به وسیله a با نماد Ra نشان داده می‌شود. همچنین، ایده‌آل راست اصلی تولید شده به وسیله a با نماد aR نشان داده می‌شود. تعداد عضوهای مجموعه‌ای متناهی چون Ω را با $|\Omega|$ نشان می‌دهیم و در حالت نامتناهی $|\Omega| =: \infty$. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از M باشد. در اینصورت $S^* := S \setminus \{\circ\}$.

تعریف ۱.۲.۱. مقسوم‌علیه صفر چپ R، عضوی چون $x \in R$ است که به‌ازای آن عضوی چون $\circ \neq y \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $xy = \circ$. مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ R با نماد $Z_\ell(R)$ نشان داده می‌شود. مقسوم‌علیه صفر راست R به طور مشابه تعریف می‌شود و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر راست حلقه R با نماد $Z_r(R)$ نشان داده می‌شود. همچنین، تعریف می‌کنیم $Z(R) = Z_\ell(R) \cup Z_r(R)$. به علاوه، $T_R(M)$ مجموعه عناصری مانند $r \in R$ است به طوریکه $m \in M^*$ موجود باشد که $rm = \circ$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $X \subseteq M$. پوچساز X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{ann}(X) = \{y \in R \mid yX = \circ\}.$$

می‌گوییم M وفادار است، هرگاه $\mathrm{ann}(M) = \circ$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $X \subseteq R$. پوچساز راست X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{r.ann}(X) = \{y \in R \mid Xy = \circ\}.$$

همچنین، پوچساز چپ X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{l.ann}(X) = \{y \in R \mid yX = \circ\}.$$

ایده‌آل یک‌طرفه I از R پوچ‌کن نامیده می‌شود، هرگاه $a \in R^*$ موجود باشد به طوریکه $Ia = 0$ یا $aI = 0$.

تعریف ۴.۲.۱. می‌گوییم که P ایده‌آل اول وابسته به R-مدول M است، اگر زیرمدولی مانند N از M وجود داشته باشد که $\operatorname{ann}(N) = P$ و برای هر زیرمدول ناصفر B از N داشته باشیم $\operatorname{ann}(B) = P$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به R-مدول M با نماد $\operatorname{Ass}(M)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. می‌گوییم N زیر مدول اساسی M است و باد نماد $N \leqslant_e M$ نشان داده می‌شود، هرگاه N با هر زیرمدول ناصفر از M اشتراک ناصفر داشته باشد.

تعریف ۶.۲.۱. مدول M ساده است، هرگاه شامل هیچ زیرمدول سره ناصفر نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. ساکل M که با نماد $\operatorname{soc}(M)$ نشان داده می‌شود، مجموع زیرمدول‌های ساده M است.

تعریف ۸.۲.۱. حلقه R موضعی است، هرگاه ایده‌آل چپ (یا راست) ماکسیمال منحصر به فرد داشته باشد. حلقه موضعی R با ایده‌آل چپ ماکسیمال $\mathfrak{m}$ با نماد $(R, \mathfrak{m})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. رادیکال ژاکوبسون R، اشتراک همه ایده‌آل‌های چپ (یا راست) ماکسیمال R است که با نماد $J(R)$ نشان داده می‌شود.

قضیه زیر رادیکال ژاکوبسون حلقه‌های شرکت‌پذیر را مشخص می‌سازد.

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید $y \in R$. در اینصورت $y \in J(R)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in R$، $1 - xy$ وارونپذیر چپ در R باشد.

برهان. [۲۸، لم ۱.۴]. □

تعریف ۱۱.۲.۱. عضو $x \in R$ را پوچ‌توان گوییم، هرگاه عددی چون $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $x^n = 0$. مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان حلقه R با نماد$\operatorname{Nil}(R)$ نشان داده می‌شود. حلقه R را کاهش یافته می‌نامیم هرگاه شامل عضو پوچ‌توان ناصفر نباشد.

در قضیه‌های بعد، به بررسی ویژگی‌های ایده‌آل‌های اول می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۱۲. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $I_1, \dots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. در اینصورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) به‌ازای jای که $1 \leqslant j \leqslant n$، $P \supseteq I_j$.

۲) $P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

۳) $P \supseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$.

برهان. [۳۱، لم ۳.۵۵]. □

قضیه ۱.۲.۱۳. **(قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول)** فرض کنید $P_1, \dots, P_n$ که $n \geqslant 2$ ایده‌آل‌هایی از حلقه جابجایی R باشند و حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند. فرض کنید S زیرحلقه‌ای از R باشد. فرض کنید $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. در اینصورت به‌ازای jای که $1 \leqslant j \leqslant n$، $S \subseteq P_j$.

برهان. [۳۱، قضیه ۳.۶۱]. □

ملاحظه ۱.۲.۱۴. **(صورت دیگر قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول)** فرض کنید S زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی R باشد. اگر به‌ازای $n \geqslant 2$، $P_1, \dots, P_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند و حداکثر دو تا از آن ها اول نباشند و اگر به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، داشته باشیم $S \nsubseteq P_i$، آنگاه عضوی مانند $c \in S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ موجود است.

تعریف ۱.۲.۱۵. R-مدول M را نوتری گوییم هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند:

(۱) هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M سرانجام متوقف شود؛

(۲) هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M نسبت به رابطه مشمولیت دارای عضو ماکسیمال باشد؛

(۳) هر زیرمدول M متناهی مولد باشد.

حلقه‌ی R را نوتری گوییم، هرگاه R هم به عنوان R-مدول چپ و هم R-مدول راست نوتری باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. R-مدول M را آرتینی گوییم هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند:

(۱) هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M سرانجام متوقف شود؛

(۲) هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M نسبت به رابطه مشمولیت دارای عضو مینیمال باشد.

حلقه‌ی R را آرتینی گوییم، هرگاه R هم به عنوان R-مدول چپ و هم R-مدول راست آرتینی باشد. حلقه‌ی R نیم‌ساده است، هرگاه R آرتینی چپ (راست) با $J(R) = \circ$ باشد. در ادامه، برخی ویژگی‌های حلقه‌های آرتینی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۱۷. اگرحلقه‌ی R آرتینی چپ (راست) باشد، آنگاه نوتری چپ (راست) است.

برهان. [۲۱، قضیه ۳.۱۵]. □

قضیه ۱.۲.۱۸. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و آرتینی باشد. در اینصورت $\mathrm{Max}(R)$ متناهی است و حلقه‌های موضعی آرتینی مانند $R_1, \ldots, R_n$ موجودند به طوریکه $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$ (یکریختی حلقه‌ها).

برهان. [۱۳، گزاره ۳.۸ و قضیه ۷.۸]. □

حلقه چندجمله‌ایها از مجهول x با ضرایب در R با نماد $R[x]$ نشان داده می‌شود. همچنین، حلقه سریهای توانی از مجهول x با ضرایب در R با نماد $R[[x]]$ نشان داده می‌شود. در ادامه این بخش، به بیان برخی از ویژگی‌های حلقه چندجمله‌ایها می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۱۹. ([۳۱، تمرین ۱.۳۶]) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و $f(x) = \sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i$ عضو دلخواهی در $R[x]$ باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر را داریم:

۱) $f(x)$ یک عضو یکال $R[x]$ است اگر و تنها اگر $a_\circ$ عضو یکال R باشد و $a_1, \ldots, a_n$ همه پوچ‌توان باشند.

۲) $f(x)$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $a_\circ, a_1, \ldots, a_n$ همه پوچ‌توان باشند.

۳) $J(R[x]) = \mathrm{Nil}(R[x])$.

۴) $R[x]$ حلقه‌ای غیرموضعی است.

۵) $f(x)$ در $R[x]$ مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر عضوی چون $r \in R$ وجود داشته باشد که $r \neq \circ$ و $rf(x) = \circ$.

در ادامه، به یادآوری برخی حلقه‌های ناجابجایی می‌پردازیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) حلقه R را برگشت‌پذیر نامیم هرگاه $ab = ۰$ نتیجه دهد $ba = ۰$، که $a, b \in R$.

(۲) حلقه R را نیم‌جابجایی نامیم هرگاه $ab = ۰$ نتیجه دهد $aRb = ۰$، که $a, b \in R$.

(۳) حلقه R را آبلی نامیم هرگاه تمام عناصر خودتوان R مرکزی باشند.

به آسانی مشاهده می‌شود که حلقه‌های نیم‌جابجایی، آبلی هستند[۲۸، لم ۵.۲۱]. همچنین، حلقه‌های برگشت‌پذیر، نیم‌جابجایی هستند. به‌علاوه، حلقه‌های کاهش یافته، برگشت‌پذیر هستند. توجه کنید که اگر R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد و $X \subseteq R$، آنگاه $\mathrm{l.ann}(X) = \mathrm{r.ann(X)}$ و از نماد $\mathrm{ann(X)}$ برای نشان دادن پوچساز X استفاده می‌کنیم. برای جزییات بیشتر در مورد حلقه‌های نیم‌جابجایی و برگشت‌پذیر به [۲۶] و [۳۰] مراجعه کنید.

قضیه‌های بعد، خانواده‌ای از حلقه‌های برگشت‌پذیر را مشخص می‌کند.

قضیه ۲۱.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای کاهش یافته باشد. در اینصورت $R[x]/(x^n)$ برگشت‌پذیر است، که $n \in \mathbb{N}$ و (x^n) ایده‌آل تولید شده توسط x^n است.

برهان. [۲۶، قضیه ۵.۲] □

قضیه ۲۲.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای کاهش یافته باشد. در اینصورت حلقه تمام ماتریس‌ها به فرم $\begin{pmatrix} R & R \\ ۰ & R \end{pmatrix}$ برگشت‌پذیر است.

برهان. [۲۶، گزاره ۶.۱] □

برای جزییات بیشتر در مورد حلقه‌ها و مدول‌ها، خواننده را به [۱۳]، [۲۱]، [۲۴]، [۲۸] و [۳۱] ارجاع می‌دهیم.

فصل ۲

مرور کارهای گذشته

۱.۲ گراف ایده‌آل پوچساز یک حلقه‌ی جابجایی

در این بخش به یادآوری گراف ایده‌آل پوچساز وابسته به حلقه جابجایی R، که در [۷] معرفی شده است، می‌پردازیم و برخی خواص و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. تمام مطالب این بخش، برگرفته از [۷] است.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. گراف ایده‌آل پوچساز وابسته به R که با نماد $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده، که مجموعه‌ی راس‌های آن همه ایده‌آل‌های غیر بدیهی R (یعنی، متمایز از ۰ و R) می‌باشد و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر $I \cap \mathrm{ann}(J) \neq 0$ یا $J \cap \mathrm{ann}(I) \neq 0$.

توجه داشته باشید که تمام این بخش R یک حلقه جابجایی با همانی ناصفر است. به عنوان اولین قضیه، شرایطی را بررسی می‌کنیم که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ بدون یال باشد.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ بدون یال است اگر و تنها اگر R حوزه صحیح باشد یا $|\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)| = 1$.

برهان. [۷، لم ۱] $\square$

در قضیه بعد، همبندی و قطر گراف ایده‌آل پوچساز را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه با $Z(R) \neq 0$ باشد. در اینصورت $\mathrm{diam}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \in \{0, 1, 2\}$.

برهان. [۷، قضیه ۲] $\square$

اکنون از دو قضیه قبل می‌توان نتیجه گرفت که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R حوزه صحیح باشد. در قضیه بعد، کمر گراف ایده‌آل پوچساز را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که اگر گراف G شامل یک دور باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(G) \leqslant 2\mathrm{diam}(G) + 1$.

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \in \{3, \infty\}$.

برهان. [۷، قضیه ۵] $\square$

در قضیه بعد، شرایطی بررسی می‌شود که گراف ایده‌آل پوچساز کامل باشد.

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت

(۱) اگر R آرتینی باشد، آنگاه $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ کامل است.

(۲) اگر R غیر کاهش یافته، نوتری، $\text{soc}(\text{Nil}(R)) \leqslant_e \text{Nil}(R)$ و $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ کامل باشد، آنگاه R آرتینی است.

برهان. [۷، قضیه ۱۰] □

در قضیه بعد، حلقه‌هایی بررسی می‌شود که گراف وابسته به آن‌ها کامل باشد.

قضیه ۶.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه کاهش یافته باشد. در اینصورت $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ کامل است اگر و تنها اگر برای هر دو راس متمایز I و J داشته باشیم $\text{ann}(I) \neq \text{ann}(J)$.

برهان. [۷، قضیه ۱۱] □

در قضیه بعد، حلقه‌های کاهش یافته‌ای مشخص می‌شود که گراف وابسته به آن کامل باشد.

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری کاهش یافته باشد. در اینصورت $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ کامل است اگر و تنها اگر R ضرب مستقیم متناهی از میدان‌ها باشد.

برهان. [۷، قضیه ۱۲] □

در قضیه بعد، حالتی بررسی می‌شود که عدد رنگی و خوشه‌ای گراف ایده‌آل پوچساز برابر باشند.

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی غیر آرتینی باشد. اگر $R \cong D_۱ \oplus \cdots \oplus D_n$، که D_iها حوزه‌های صحیح هستند، آنگاه $\chi(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) = \omega(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) = ۲^n - ۱$.

برهان. [۷، قضیه ۱۴] □

در قضیه بعد، حالتی بررسی می‌شود که گراف ایده‌آل پوچساز بدون دور باشد.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. اگر $\omega(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) = ۲$، آنگاه R یک حلقه‌ی گرنشتاین است.

برهان. [۷، قضیه ۱۷] □

۲.۲ گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن یک حلقه‌ی جابجایی

در این بخش به یادآوری گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن حلقه‌ی جابجایی R، که در [۳۲] معرفی شده است، می‌پردازیم و برخی خواص و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. تمام مطالب این بخش برگرفته از [۳۲] است.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن وابسته به R، که با نماد $\Omega(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده، که مجموعه راس‌های آن همه ایده‌آل‌های پوچ‌کن ناصفر R می‌باشد و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر $I+J$ ایده‌آل پوچ‌کن باشد.

توجه داشته باشید که در تمام این بخش R یک حلقه جابه‌جایی با همانی ناصفر است. به عنوان اولین نتیجه قطر این گراف تعیین می‌شود.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{۰, ۱, ۲, \infty\}$.

برهان. [۳۲، لم‌های ۲.۳، ۱.۳، ۳.۳، ۴.۳ و ۱.۴] $\square$

در قضیه بعد، شرایطی برای R تعیین می‌شود که گراف وابسته به آن ناهمبند باشد.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\Omega(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد.

برهان. [۳۲، لم‌های ۲.۳، ۱.۳، ۳.۳، ۴.۳ و ۱.۴] $\square$

در قضیه بعد، کمر $\Omega(R)$ بررسی می‌شود.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\operatorname{gr}(\Omega(R)) \in \{۳, \infty\}$.

برهان. [۳۲، گزاره ۱۸.۲، قضیه ۷.۳ و نتیجه ۳.۴] $\square$

در قضیه‌های بعد، حالتی درنظر گرفته می‌شود که عدد خوشه‌ای این گراف متناهی باشد.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد که حوزه صحیح نیست. اگر $\omega(\Omega(R)) < \infty$، آنگاه $Z(R)$ اجتماع تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اول است.

برهان. [۳۲، نتیجه ۴.۴] □

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد به طوریکه $Z(R)$ ایده‌آل نباشد. اگر $\omega(\Omega(R)) < \infty$، آنگاه R حاصل ضرب تعداد متناهی میدان است.

برهان. [۳۲، گزاره ۵.۴] □

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید $R \cong K_۱ \times \cdots \times K_n$ یک حلقه باشد به طوریکه $n > ۱$ و K_iها میدان باشند. در اینصورت $\omega(\Omega(R)) = \chi(\Omega(R)) = ۲^{n-۱} - ۱$.

برهان. [۳۲، گزاره ۶.۴] □

۳.۲ گراف دوگان مقسوم علیه صفر یک حلقه

اندرسون[۱] و لوینگستون[۲] در [۶]، گراف مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه‌ی جابجایی R، که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، را معرفی و بررسی کردند. مجموعه‌ی راس‌های این گراف، مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. افخمی[۳] و خشیارمنش[۴] در [۲]، گراف دوگان مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه‌ی جابه‌جایی R، که با نماد $\Gamma'(R)$ نشان داده می‌شود، را به شرح زیر معرفی کردند:

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. برای هر عضو a در R، فرض کنید $f_a : R \longrightarrow R$ درونریختی R-مدولی با ضرب در a باشد. بنابراین، می‌توان مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R را به صورت زیر معرفی کرد:

$$Z(R) = \{x \in R \mid \text{درونریختی } f_x \text{ یک‌به‌یک نباشد}\}.$$

در حالت دوگان، مجموعه‌ی زیر را درنظر گرفتند:

$$W(R) := \{x \in R \mid \text{درونریختی } f_x \text{ پوشا نباشد}\} = \{x \in R \mid Rx \neq R\}.$$

[۱] Anderson

[۲] Livingston

[۳] Afkhami

[۴] Khashyarmanesh

به وضوح، برای هر دو راس متمایز x و y در $Z(R)^*$، x و y در $\Gamma(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر x عضوی ناصفر در $Ker(f_y)$ باشد یا y عضوی ناصفر در $Ker(f_x)$ باشد. بر این اساس، گراف دوگان مقسوم علیه صفر که با نماد $\Gamma'(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده، که مجموعه راس‌های آن $W(R)^* = W(R) \setminus \{0\}$ می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x + Ry$ عضوی ناصفر در $Coker(f_y)$ باشد و $y + Rx$ عضوی ناصفر در $Coker(f_x)$ باشد. به عبارت دیگر، دو راس متمایز x و y در $\Gamma'(R)$ مجاورند، اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$.

افخمی در [۱]، مفهوم گراف دوگان مقسوم علیه صفر را به حلقه‌های ناجابجایی به شرح زیر توسیع داد:

فرض کنید R یک حلقه‌ی ناجابجایی باشد. گراف دوگان مقسوم علیه صفر وابسته به R، که با نماد $\Gamma'(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده که راس‌های آن عناصر نایکال حلقه R می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$.

برای جزییات بیشتر درمورد گراف دوگان مقسوم علیه صفر، خواننده را به [۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۵] ارجاع می‌دهیم.

فصل ۳

مطالعه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها به کمک گراف‌ها

۱.۳ توسیع تعریف گراف دوگان مقسوم علیه صفر به مدول‌ها

در بخش ۳.۲، گراف دوگان مقسوم علیه صفر را یادآوری کردیم. در این بخش، تعریف گراف دوگان مقسوم علیه صفر را به مدول‌ها توسیع می‌دهیم. تمام مطالب این بخش، برگرفته از [۱۱] است.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر با همانی ناصفر و M یک R-مدول چپ یکانی ناصفر باشد. همچنین، فرض کنید $W_R(M) = \{x \in M \mid Rx \neq M\}$ و قرار می‌دهیم $W_R(M)^* = W_R(M) \setminus \{\circ\}$. گراف دوگان مقسوم علیه صفر وابسته به M، که با نماد $\Gamma'_R(M)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده که راس‌های آن تمام عناصر مجموعه‌ی $W_R(M)^*$ است و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$.

بدیهی است که اگر S یک حلقه‌ی جابجایی یکدار باشد، آنگاه $\Gamma'_S(S)$ همان گراف دوگان مقسوم علیه صفر تعریف شده در [۲] می‌باشد. در این بخش، برخی ارتباطات بین خواص گرافی $\Gamma'_R(M)$ با خواص جبری مدول M و حلقه R بررسی می‌شود. به‌علاوه، برخی از ویژگی‌های گرافی $\Gamma'_R(M)$، مانند کمر، عدد خوشه‌ای، عدد استقلال و مسطح بودن را بررسی می‌کنیم. در سراسر این بخش، فرض می‌کنیم R یک حلقه شرکت‌پذیر با همانی ناصفر و M یک R-مدول چپ یکانی ناصفر است. به علاوه، تمام ساختارهای مدولی از چپ درنظر گرفته می‌شوند. به عنوان اولین نتیجه، شرایطی را بررسی می‌کنیم که گراف $\Gamma'_R(M)$ تهی باشد.

گزاره ۲.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد.

(۱) $\Gamma'_R(M)$ تهی است اگر و تنها اگر M یک R-مدول ساده باشد.

(۲) $\Gamma'_R(R)$ تهی است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی بخشی باشد.

برهان. (۱) فرض کنید $\Gamma'_R(M)$ تهی باشد. در اینصورت به‌ازای هر $x \in M^*$ داریم $Rx = M$. بنابراین، M یک R-مدول ساده است. برعکس، فرض کنید M یک R-مدول ساده باشد. در اینصورت، $W_R(M)^* = \emptyset$ و درنتیجه $\Gamma'_R(M)$ تهی است.
(۲) فرض کنید $\Gamma'_R(R)$ تهی باشد. در اینصورت به‌ازای هر $x \in R^*$ داریم $Rx = R$. اکنون، با توجه به [۲۸، تمرین ۲.۱]، نتیجه می‌گیریم که R یک حلقه‌ی بخشی است. برعکس، فرض کنید R یک حلقه‌ی بخشی باشد. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $\Gamma'_R(R)$ تهی است. □

در ادامه، برای اجتناب از بدیهیات هنگامی که گراف $\Gamma'_R(M)$ تهی است، فرض خواهیم کرد که R یک حلقه و M یک R-مدول است به طوریکه $\Gamma'_R(M)$ شامل راس باشد. در قضیه بعد، کمر این گراف را تعیین می‌کنیم. قبل از آن، لم زیر را نیاز داریم.

لم ۳.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. فرض کنید $n \geqslant 4$ یک عدد صحیح باشد و $x_1 - x_2 - \cdots - x_n$ یک مسیر در $\Gamma'_R(M)$ باشد به طوریکه زیرگراف القایی به وسیله راس‌های x_1، x_2، …، x_n شامل دور نباشد. اگر $Rx_1 \subseteq Rx_n$، آنگاه به‌ازای هر دو اندیس i و j با شرط $i < j - 1$ داریم $Rx_i \subseteq Rx_j$.

برهان. با توجه به فرضیات، x_2 با x_n مجاور نیست. بنابراین، $Rx_2 \subseteq Rx_n$ یا $Rx_n \subseteq Rx_2$. اگر $Rx_n \subseteq Rx_2$، در اینصورت $Rx_1 \subseteq Rx_n \subseteq Rx_2$ که غیر ممکن است، زیرا x_1 با x_2 مجاور است. از این رو، می‌توانیم فرض کنیم $Rx_2 \subseteq Rx_n$. اکنون، اگر $n = 4$، در اینصورت، به روشی مشابه، خواننده به آسانی می‌تواند بررسی کند که به‌ازای هر $i < j - 1$ داریم $Rx_i \subseteq Rx_j$. بنابراین، فرض می‌کنیم $n \geqslant 5$. در اینصورت $x_2 - x_3 - \cdots - x_n$ یک مسیر در $\Gamma'_R(M)$ است به طوریکه زیرگراف القایی به وسیله راس‌های x_2، x_3، …، x_n شامل دور نیست. چون n متناهی است، به روشی مشابه، خواننده به آسانی می‌تواند بررسی کند که به‌ازای هر $i < n - 1$، $Rx_i \subseteq Rx_n$. اکنون، داریم $n - 1 \geqslant 4$ و $x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$ یک مسیر در $\Gamma'_R(M)$ است به طوریکه زیرگراف القایی به وسیله راس‌های x_1، x_2، …، x_{n-1} شامل دور نیست. چون x_1 با x_{n-1} مجاور نیست، داریم $Rx_1 \subseteq Rx_{n-1}$ یا $Rx_{n-1} \subseteq Rx_1$. اگر $Rx_{n-1} \subseteq Rx_1$، در اینصورت $Rx_{n-1} \subseteq Rx_1 \subseteq Rx_n$ که غیر ممکن است، زیرا x_{n-1} با x_n مجاور است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $Rx_1 \subseteq Rx_{n-1}$. اکنون، چون x_2 با x_{n-1} مجاور نیست، داریم $Rx_2 \subseteq Rx_{n-1}$ یا $Rx_{n-1} \subseteq Rx_2$. اگر $Rx_{n-1} \subseteq Rx_2$، در اینصورت $Rx_1 \subseteq Rx_{n-1} \subseteq Rx_2$ که غیر ممکن است، زیرا x_1 با x_2 مجاور است. بنابراین $Rx_2 \subseteq Rx_{n-1}$. به طور مشابه، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $i < n - 2$، $Rx_i \subseteq Rx_{n-1}$. اکنون، چون n متناهی است، با روش بازگشتی، مشاهده می‌شود که به‌ازای هر $i < j - 1$ داریم $Rx_i \subseteq Rx_j$. □

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد به طوریکه $\Gamma'_R(M)$ شامل دور باشد. در اینصورت $\mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) \in \{3, 4\}$.

برهان. فرض کنید $n = \mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) \geqslant 5$ و $x_1 - x_2 - \cdots - x_n - x_1$ یک دور در $\Gamma'_R(M)$ باشد. چون x_1 با x_{n-1} مجاور نیست، داریم $Rx_1 \subseteq Rx_{n-1}$ یا $Rx_{n-1} \subseteq Rx_1$. بدون کاسته شدن از

کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم که $Rx_۱ \subseteq Rx_{n-۱}$. اکنون، چون $x_۲$ با x_n مجاور نیست، داریم $Rx_۲ \subseteq Rx_n$ یا $Rx_n \subseteq Rx_۲$. نشان می‌دهیم $Rx_۲ \subseteq Rx_n$. بدین منظور، فرض کنید $Rx_n \subseteq Rx_۲$. در اینصورت، چون $x_۲$ با $x_{n-۱}$ مجاور نیست و $x_۱ - x_۲ - \cdots - x_{n-۱}$ یک مسیر در $\Gamma'_R(M)$ است به طوریکه زیرگراف القایی به وسیله راس‌های $x_۱$، $x_۲$، …، $x_{n-۱}$ شامل دور نیست، با توجه به لم ۳.۱.۳ داریم $Rx_۲ \subseteq Rx_{n-۱}$. بنابراین، $Rx_n \subseteq Rx_۲ \subseteq Rx_{n-۱}$ که غیر ممکن است، زیرا x_n با $x_{n-۱}$ مجاور است. از این رو، می‌توانیم فرض کنیم که $Rx_۲ \subseteq Rx_n$. اکنون، دو مسیر $L_۱ := x_۱ - x_۲ - \cdots - x_{n-۱}$ و $L_۲ := x_۲ - x_۳ - \cdots - x_n$ را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که زیرگراف القایی به وسیله راس‌های L_i، که $i = ۱, ۲$، شامل دور نیست. بنابراین، با توجه به لم ۳.۱.۳ داریم $Rx_۱ \subseteq Rx_۳$ و $Rx_۳ \subseteq Rx_n$. اکنون، نتیجه می‌گیریم $Rx_۱ \subseteq Rx_n$ که یک تناقض است، زیرا $x_۱$ با x_n مجاور است. درنتیجه $\mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) \in \{۳, ۴\}$. $\square$

نتیجه زیر به طور مستقیم از قضیه ۴.۱.۳ بدست می‌آید.

نتیجه ۵.۱.۳. اگر R یک حلقه و M یک R-مدول باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) \in \{۳, ۴, \infty\}$.

مثال ۶.۱.۳. در نتیجه قبل نشان دادیم که $\mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) \in \{۳, ۴, \infty\}$. اکنون، نشان می‌دهیم که همه‌ی این سه حالت روی می‌دهند.

(۱) $\mathrm{gr}(\Gamma'_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲)) = ۳$.

(۲) $\mathrm{gr}(\Gamma'_{\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳}(\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳)) = ۴$.

(۳) $\mathrm{gr}(\Gamma'_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_۴)) = \infty$.

به یاد بیاورید که یک زیرمدول ناصفر N از M اساسی نامیده می‌شود، هرگاه N اشتراک ناصفر با هر زیرمدول ناصفر M داشته باشد. در گزاره بعد، قطر گراف $\Gamma'_R(M)$ را تحت شرایطی بررسی می‌کنیم.

گزاره ۷.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد به طوریکه به‌ازای هر $x \in W_R(M)^*$، Rx زیرمدول اساسی M نباشد. در اینصورت، $\mathrm{diam}(\Gamma'_R(M)) \in \{۱, ۲\}$.

برهان. چون به‌ازای هر $x \in W_R(M)^*$، Rx زیرمدول اساسی M نیست، $|\Gamma'_R(M)| \geqslant ۲$. اکنون، فرض کنید x و y دو راس متمایز از $\Gamma'_R(M)$ باشند و x با y مجاور نباشد. در اینصورت، $Rx \subseteq Ry$ یا

$Ry \subseteq Rx$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم $Rx \subseteq Ry$. اکنون، با توجه به مفروضات، یک زیرمدول ناصفر N از M موجود است به طوریکه $Ry \cap N = ۰$. فرض کنید $a \in N^*$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $a \notin Ry$ و $y \notin Ra$. همچنین، $a \notin Rx$ و $x \notin Ra$. بنابراین، $x - a - y$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma'_R(M)$ است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\operatorname{diam}(\Gamma'_R(M)) \in \{۱, ۲\}$. □

به یاد بیاورید که یک R-مدول M نیم‌ساده نامیده می‌شود، هرگاه هر R-زیرمدول از M یک جمعوند مستقیم M باشد. از گزاره ۷.۱.۳، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۸.۱.۳. اگر R یک حلقه و M یک R-مدول نیم‌ساده باشد، آنگاه $\operatorname{diam}(\Gamma'_R(M)) \in \{۱, ۲\}$.

برهان. فرض کنید x یک راس از $\Gamma'_R(M)$ باشد. چون M نیم‌ساده است و $Rx \neq M$، یک زیرمدول ناصفر N از M موجود است به طوریکه $M = N \oplus Rx$. اکنون با توجه به گزاره ۷.۱.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma'_R(M) \in \{۱, ۲\}$. □

در گزاره بعد، حالتی را مطالعه می‌کنیم که $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی کامل باشد. قبل از آن، لم زیر ضروری است.

لم ۹.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. اگر $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی باشد، آنگاه تعداد زیرمدول‌های ماکسیمال M حداکثر دو است.

برهان. فرض کنید $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ سه زیرمدول ماکسیمال متمایز M باشند. نشان می‌دهیم که می‌توانیم $n_i \in N_i \setminus \bigcup_{j=۱, j\neq i}^{۳} N_j$ را انتخاب کنیم. بدین منظور، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید $N_۱ \subseteq N_۲ \cup N_۳$. در اینصورت، $a \in N_۱ \setminus N_۲$ و $b \in N_۱ \setminus N_۳$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین، $a \in N_۳$ و $b \in N_۲$. چون $a + b \in N_۱$، داریم $a + b \in N_۲$ یا $a + b \in N_۳$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توان فرض کرد $a + b \in N_۲$. در اینصورت، $(a + b) - b = a \in N_۲$ که یک تناقض است. بنابراین، می‌توانیم $n_i \in N_i \setminus \bigcup_{j=۱, j\neq i}^{۳} N_j$ را انتخاب کنیم. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $n_۱ - n_۲ - n_۳ - n_۱$ یک دور به طول سه در $\Gamma'_R(M)$ است که یک تناقض است، زیرا یک گراف، دوبخشی است اگر و تنها اگر شامل هیچ دوری به طول فرد نباشد ([۳۴، قضیه ۱۸.۲.۱] را ببینید). از این رو، تعداد زیرمدول‌های ماکسیمال M حداکثر دو است. □

گزاره ۱۰.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول نوتری باشد. در اینصورت $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی کامل با مجموعه‌ی یالی ناتهی است اگر و تنها اگر $M = N_۱ \oplus N_۲$، که $N_۱$ و $N_۲$ تمام زیرمدول‌های ساده M هستند.

برهان. فرض کنید $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی کامل با مجموعه‌ی یالی ناتهی باشد. فرض کنید X_i، که $i = ۱, ۲$، مجموعه‌ی تمام راس‌های بخش i باشد. چون $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی یالدار است، به‌ازای $i = ۱, ۲$ داریم $X_i \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم $\Lambda_i = \{Ra \mid a \in X_i\}$، که $i = ۱, ۲$. چون M یک R-مدول نوتری است، به‌ازای $i = ۱, ۲$، Λ_i شامل یک عضو ماکسیمال است. نشان می‌دهیم به‌ازای $i = ۱, ۲$ عضو ماکسیمال Λ_i منحصر به فرد است. بدین منظور، فرض کنید Rm و Rn دو عضو ماکسیمال متمایز $\Lambda_۱$ باشند. در اینصورت، چون $n \notin Rm$ و $m \notin Rn$، m و n مجاورند که غیر ممکن است، زیرا $m, n \in X_۱$. به طور مشابه، $\Lambda_۲$ عضو ماکسیمال منحصر به فرد دارد. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم Rx_i عضو ماکسیمال منحصر به فرد Λ_i است، که $i = ۱, ۲$. در اینصورت، $W_R(M) = Rx_۱ \cup Rx_۲$. نشان می‌دهیم به‌ازای $a \in X_۱$ و $b \in X_۲$ داریم $Ra \cap Rb = ۰$. برای مشاهده، فرض کنید $۰ \neq c \in Ra \cap Rb$. در اینصورت، $c \in Ra$ و لذا $c \in X_۱$. اکنون، چون $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی کامل است، c با b مجاور است که یک تناقض است. بنابراین داریم $Ra \cap Rb = ۰$. چون $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی است، با توجه به لم ۹.۱.۳، تعداد زیرمدول‌های ماکسیمال M حداکثر دو است. اکنون، فرض کنید N زیرمدول ماکسیمال منحصر به فرد M باشد. در اینصورت، $W_R(M) = N = Rx_۱ \cup Rx_۲$. چون $x_۱ + x_۲ \in W_R(M)$، می‌توانیم فرض کنیم $x_۱ + x_۲ \in Rx_۱$. بنابراین، $x_۲ \in Rx_۱$ که غیر ممکن است. بنابراین، می‌توان فرض کرد $N_۱$ و $N_۲$ دو زیرمدول ماکسیمال متمایز از M باشند. چون $W_R(M) = Rx_۱ \cup Rx_۲$، به کمک روشی که در برهان لم ۹.۱.۳ به کاربردیم، می‌توانیم فرض کنیم $N_۱ = Rx_۱$ و $N_۲ = Rx_۲$. اکنون، نشان می‌دهیم به‌ازای $i = ۱, ۲$، N_i یک زیرمدول ساده M است. بدین منظور، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید A یک زیرمدول غیر بدیهی $N_۲$ باشد. در اینصورت، $N_۱ \subsetneqq N_۱ + A \subsetneqq M$ که یک تناقض است، زیرا $N_۱$ زیرمدول ماکسیمال M است. اکنون چون $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی است، تعداد زیرمدول‌های ساده M دقیقاً دو است. درنتیجه، $M = N_۱ \oplus N_۲$، که $N_۱$ و $N_۲$ تمام زیرمدول‌های ساده M هستند.

برعکس، فرض کنید $M = N_۱ \oplus N_۲$، که $N_۱$ و $N_۲$ تمام زیرمدول‌های ساده M هستند. به‌ازای $i = ۱, ۲$، قرار می‌دهیم $X_i = \{a \mid a \in N_i^*\}$. در اینصورت، آسان مشاهده می‌شود که به‌ازای

$i = ۱, ۲$، $X_i \neq \emptyset$. بعلاوه، $\Gamma'_R(M)$ شامل یال است. نشان می‌دهیم که زیرگراف القایی به وسیله راس‌های مجموعه X_i، که $i = ۱, ۲$، شامل یال نیست. بدین منظور، فرض کنید x و y دو راس متمایز از $X_۱$ باشند. در اینصورت، $Rx = Ry$ و لذا x و y مجاور نیستند. بنابراین، $X_۱$ یک مجموعه‌ی مستقل است. به طور مشابه، $X_۲$ یک مجموعه‌ی مستقل است. اکنون، فرض کنید به‌ازای $i = ۱, ۲$، $x_i \in X_i$. ادعا می‌کنیم که $x_۱$ و $x_۲$ مجاورند. برای مشاهده، فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ نامجاورند. در اینصورت، $Rx_۱ \subseteq Rx_۲$ یا $Rx_۲ \subseteq Rx_۱$ که یک تناقض است. بنابراین، $\Gamma'_R(M)$ یک گراف دوبخشی کامل است. □

به یاد بیاورید که حلقه‌ی R آبلی نامیده می‌شود هرگاه هر عضو خودتوان آن مرکزی باشد. به عبارت دیگر، به‌ازای هر $x \in R$ و $e^۲ = e$ داشته باشیم $ex = xe$.

نتیجه ۱۱.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی آبلی نوتری چپ باشد. در اینصورت $\Gamma'_R(R)$ یک گراف دوبخشی کامل با مجموعه‌ی یالی ناتهی است اگر و تنها اگر به عنوان حلقه‌ها $R \cong K_۱ \times K_۲$، که $K_۱$ و $K_۲$ حلقه‌های بخشی هستند.

برهان. فرض کنید $\Gamma'_R(R)$ یک گراف دوبخشی کامل با مجموعه‌ی یالی ناتهی باشد. در اینصورت $R = I_۱ \oplus I_۲$، که $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های چپ مینیمال R هستند. بنابراین، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱] داریم $R = Re \oplus R(۱-e)$ که e یک عضو خودتوان غیر بدیهی R است. اکنون، چون R یک حلقه‌ی آبلی است، Re و $R(۱-e)$ ایده‌آل هستند. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود به عنوان حلقه‌ها $R \cong K_۱ \times K_۲$، که $K_۱$ و $K_۲$ حلقه‌های بخشی هستند.

قسمت برعکس بدیهی است. □

بیاد بیاورید که ایده‌آل P از R کاملاً اول نامیده می‌شود هرگاه R/P یک حوزه باشد. در ادامه، از گزاره زیر، که توسیعی از قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول است [۳۱، قضیه ۶۱.۳]، مکرراً استفاده می‌کنیم.

گزاره ۱۲.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n تعداد متناهی از ایده‌آل‌های R باشند. فرض کنید S زیرحلقه‌ای از R باشد به طوریکه S مشمول در اجتماع $P_۱ \cup \ldots \cup P_n$ باشد و حداقل $n-۲$تا از Pها کاملاً اول باشند. در اینصورت S مشمول در یک P_j است.

برهان. به روشی مشابه برهان [۳۱، قضیه ۶۱.۳] استفاده می‌کنیم. بدین منظور، از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $n=۲$. بنابراین $S \subseteq P_۱ \cup P_۲$. اگر $S \nsubseteq P_۱$ و $S \nsubseteq P_۲$، آنگاه می‌توانیم $a \in S \setminus P_۱$ و $b \in S \setminus P_۲$ را انتخاب کنیم. در اینصورت، $a \in P_۲$ و $b \in P_۱$. اکنون چون $a+b \in S$، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم که $a+b \in P_۱$. بنابراین $a \in P_۱$ که یک تناقض است. لذا به‌ازای برخی $i=۱,۲$ داریم $S \subseteq P_i$. اکنون فرض کنید $n=k+۱$، که $n \geqslant ۳$، و نتیجه به‌ازای $n=k$ برقرار باشد. بنابراین داریم $S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{k+۱} P_i$. با توجه به مفروضات، می‌توانیم فرض کنیم $P_{k+۱}$ کاملاً اول است. فرض کنید به‌ازای هر $j=۱,۲,\ldots,k+۱$ داریم $S \nsubseteq \bigcup_{i=۱, i\neq j}^{k+۱} P_i$. در اینصورت، می‌توانیم به‌ازای $j=۱,۲,\ldots,k+۱$، $a_j \in S \setminus \bigcup_{i=۱, i\neq j}^{k+۱} P_i$ را انتخاب کنیم. درنتیجه، به آسانی مشاهده می‌شود که به‌ازای $j=۱,۲,\ldots,k+۱$ داریم $a_j \in P_j$. چون $P_{k+۱}$ کاملاً اول است، داریم $a_۱a_۲\cdots a_k \notin P_{k+۱}$. بنابراین، داریم $a_۱a_۲\cdots a_k \in \bigcap_{i=۱}^{k} P_i \setminus P_{k+۱}$ و $a_{k+۱} \in P_{k+۱} \setminus \bigcup_{i=۱}^{k} P_i$. فرض کنید $x = a_۱a_۲\cdots a_k + a_{k+۱}$. در اینصورت، به‌ازای $j=۱,۲,\ldots,k+۱$ داریم $x \notin P_j$. اکنون چون $x \in S$، یک تناقض با این فرض که $S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{k+۱} P_i$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که S مشمول در یک P_j است. $\square$

فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی یک‌طرفه از R باشد. می‌گوییم I پوچساز است، هرگاه $I = \mathrm{l.ann}(X)$ یا $I = \mathrm{r.ann}(X)$، که $X \subseteq R$. در گزاره بعد، ارتباط بین حلقه کاهش یافته R و $\omega(\Gamma'_R(R))$ را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که اگر R یک حلقه کاهش یافته باشد، در اینصورت، با توجه به [۲۸، گزاره ۱۶.۱۰]، داریم $\bigcap_{P\in \mathrm{Min}(R)} P = ۰$. به‌علاوه، حلقه‌های کاهش یافته، برگشت‌پذیر هستند.

گزاره ۱۳.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد و $\omega(\Gamma'_R(R)) < \infty$. در اینصورت

(۱) تعداد ایده‌آل‌های مینیمال R حداکثر $\omega(\Gamma'_R(R))$ است.

(۲) تعداد ایده‌آل‌های پوچساز R حداکثر $۲^{\omega(\Gamma'_R(R))}$ است.

برهان. (۱) فرض کنید $\omega(\Gamma'_R(R)) = n$ و $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_{n+۱}$ ایده‌آل‌های اول مینیمال متمایز R باشند. اکنون، چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، با توجه به [۲۸، لم ۶.۱۲]، $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_{n+۱}$ کاملاً اول هستند. در اینصورت، با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، می‌توانیم $x_i \in P_i \setminus \bigcup_{j=۱, j\neq i}^{n+۱} P_j$ را انتخاب

کنیم. بنابراین مجموعه $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ یک خوشه از $\Gamma'_R(R)$ است که یک تناقض است. بنابراین تعداد ایده‌آل‌های مینیمال R حداکثر $\omega(\Gamma'_R(R))$ است.

(۲) با توجه به آیتم (۱)، می‌توانیم فرض کنیم $|\mathrm{Min}(R)| = n$ و P_1، P_2، …، P_n ایده‌آل‌های اول مینیمال متمایز R باشند. فرض کنید $X \subseteq R$ ناتهی باشد. در اینصورت، آسان مشاهده می‌شود که $X\mathrm{ann}(X) = 0$ و درنتیجه $X \subseteq \mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X))$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X))) \subseteq \mathrm{ann}(X)$. از طرفی، $\mathrm{ann}(X)\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X)) = 0$ و لذا $\mathrm{ann}(X) \subseteq \mathrm{ann}(\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X)))$. بنابراین، $\mathrm{ann}(X) = \mathrm{ann}(\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X)))$. اکنون با توجه به مفروضات، داریم $\mathrm{ann}(X) \subseteq \bigcap_{i\in I} P_i$ و $\mathrm{ann}(\bigcap_{j\in J} P_j) \subseteq \mathrm{ann}(X)$، که تعریف می‌کنیم $I := \{i \mid \mathrm{ann}(X) \subseteq P_i\}$ و $J := \{i \mid \mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X)) \subseteq P_i\}$. چون $\mathrm{ann}(X)\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(X)) = 0$، داریم $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$. از طرف دیگر، چون R یک حلقه کاهش یافته است، $(\bigcap_{i\in I} P_i) \cap (\bigcap_{j\in J} P_j) = 0$. اکنون، مشاهده می‌شود که $\bigcap_{i\in I} P_i \subseteq \mathrm{ann}(\bigcap_{j\in J} P_j)$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{ann}(X) = \bigcap_{i\in I} P_i$. درنتیجه تعداد ایده‌آل‌های پوچساز R حداکثر $2^{\omega(\Gamma'_R(R))}$ است. □

در گزاره بعد، حالتی را مطالعه می‌کنیم که $\omega(\Gamma'_R(M))$ و $\alpha(\Gamma'_R(M))$ متناهی باشند.

گزاره ۳.۱.۱۴. فرض کنید R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی باشد به طوریکه به‌ازای هر $x \in R \setminus Z(R)$، x یکال باشد و به‌ازای هر $y \in Z(R)$، $\mathrm{r.ann}(y) \neq 0$. فرض کنید M یک R-مدول وفادار باشد به طوریکه به‌ازای هر $m \in M$، $\mathrm{ann}(Rm) = \mathrm{ann}(m)$. در اینصورت، اگر $\alpha(\Gamma'_R(M)) + \omega(\Gamma'_R(M)) < \infty$، آنگاه $R/J(R)$ یک حلقه‌ی نیم‌ساده است.

برهان. فرض کنید m یک راس $\Gamma'_R(M)$ باشد. چون $\alpha(\Gamma'_R(M)) < \infty$، Rm (و به‌ویژه M) شامل یک زیرمدول ساده است. نشان می‌دهیم که تعداد زیرمدول‌های ساده M متناهی است. بدین منظور، فرض کنید که تعداد زیرمدول‌های ساده M نامتناهی باشد. فرض کنید $\{Rx_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ مجموعه‌ی زیرمدول‌های ساده M باشد. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله‌ی راس‌های مجموعه‌ی $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ کامل است و درنتیجه $\omega(\Gamma'_R(M)) = \infty$ که یک تناقض است. بنابراین، تعداد زیرمدول‌های ساده M متناهی است. فرض کنید $\{Rx_1, Rx_2, \dots, Rx_n\}$ مجموعه همه‌ی زیرمدول‌های ساده M باشد و به‌ازای هر i، $I_i = \mathrm{ann}(Rx_i)$. نشان می‌دهیم $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. بدین منظور، فرض کنید $a \in Z(R)^*$. در اینصورت، چون $\mathrm{r.ann}(a) \neq 0$، $b \in Z(R)^*$ موجود است به طوریکه $ab = 0$. چون

M یک R-مدول وفادار است، $y \in M$ موجود است به طوریکه $by \neq 0$. بنابراین، به‌ازای حداقل یک اندیس $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $a \in I_i$. درنتیجه $Z(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. اکنون چون به‌ازای هر $x \in R \setminus Z(R)$، x یکال است، نتیجه می‌گیریم که $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. نشان می‌دهیم به‌ازای هر i، I_i کاملاً اول است. برای مشاهده، فرض کنید $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ و $rs \in I_i$. در اینصورت $rsRx_i = 0$. اگر $sRx_i = 0$، آنگاه $s \in I_i$ و درنتیجه I_i کاملاً اول است. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم $sRx_i \neq 0$. چون $\mathrm{ann}(Rx_i) = \mathrm{ann}(x_i)$، داریم $sx_i \neq 0$. اکنون، چون Rx_i یک زیرمدول ساده M است، داریم $Rsx_i = Rx_i$. از این رو، $\mathrm{ann}(Rx_i) = \mathrm{ann}(x_i) = \mathrm{ann}(Rsx_i) = \mathrm{ann}(sx_i)$. در اینصورت، $r \in I_i$ و درنتیجه I_i کاملاً اول است. اکنون، با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، نتیجه می‌گیریم که I_1، I_2، …، I_n تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R هستند (شاید به ازای برخی اندیس‌های متمایز i و j داشته باشیم $I_i = I_j$). بعلاوه، $J(R) = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. بنابراین ،با توجه به [۲۴، نتیجه ۲۷.۲ از فصل ۳]، به عنوان حلقه‌ها داریم $R/J(R) \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_t$ ($t \leqslant n$) و درنتیجه $R/J(R)$ یک حلقه‌ی نیم‌ساده است. □

با توجه به گزاره ۱۴.۱.۳، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۵.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی باشد به طوریکه به‌ازای هر $x \in R \setminus Z(R)$، x یکال باشد و به‌ازای هر $y \in Z(R)$، $\mathrm{r.ann}(y) \neq 0$. فرض کنید M یک R-مدول وفادار متناهی مولد باشد به طوریکه $J(R)M$ یک R-مدول آرتینی باشد و به‌ازای هر $m \in M$، $\mathrm{ann}(Rm) = \mathrm{ann}(m)$. اگر $\alpha(\Gamma'_R(M)) + \omega(\Gamma'_R(M)) < \infty$، آنگاه M یک R-مدول آرتینی است.

برهان. اگر $J(R) = 0$ در اینصورت با توجه به ۱۴.۱.۳، R یک حلقه‌ی نیم‌ساده است. بنابراین، با توجه به [۲۸، گزاره ۲۱.۱]، M یک R-مدول آرتینی است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که $J(R) \neq 0$. اکنون، دنباله دقیق زیر از مدول‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$0 \longrightarrow J(R)M \longrightarrow M \longrightarrow M/J(R)M \longrightarrow 0.$$

چون $R/J(R)$ یک حلقه‌ی نیم‌ساده است، $M/J(R)M$ به عنوان $R/J(R)$-مدول آرتینی است. بنابراین، $M/J(R)M$ یک R-مدول آرتینی است. از طرف دیگر، $J(R)M$ یک R-مدول آرتینی است. درنتیجه M یک R-مدول آرتینی است.

□

در گزاره بعد، ارتباط بین تعداد اعضای حلقه R و تعداد راس‌های $\Gamma'_R(M)$ را بررسی می‌کنیم. توجه داشته باشید که $T_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0$ موجود باشد که $m \in M^*\}$.

گزاره ۱۶.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد . اگر $|\Gamma'_R(M)| + |T_R(M)| < \infty$، آنگاه $|R| \leqslant |W_R(M)||T_R(M)|$.

برهان. فرض کنید x یک راس $\Gamma'_R(M)$ باشد. در اینصورت به عنوان مدول‌ها $Rx \cong R/\mathrm{ann}(x)$. چون $|\Gamma'_R(M)| < \infty$، $R/\mathrm{ann}(x)$ یک مجموعه‌ی متناهی است. از طرف دیگر، $\mathrm{ann}(x) \subseteq T_R(M)$ و درنتیجه $\mathrm{ann}(x)$ یک مجموعه‌ی متناهی است. بنابراین، با توجه به [۲۴، نتیجه ۶.۴ از فصل ۱]، به آسانی نتیجه می‌شود که $|R| \leqslant |W_R(M)||T_R(M)|$. □

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که عدد استقلال $\Gamma'_R(M)$ متناهی باشد.

گزاره ۱۷.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول نوتری (یا آرتینی) باشد به طوریکه $\alpha(\Gamma'_R(M)) < \infty$. در اینصورت $\mathrm{soc}_R(M)$ متناهی است.

برهان. فرض کنید x یک راس $\Gamma'_R(M)$ باشد. چون $\alpha(\Gamma'_R(M)) < \infty$، Rx شامل یک زیرمدول ساده مانند Ry ($y \in Rx$) است. قرار می‌دهیم $\Lambda := \{n \mid n \in Ry \setminus \{0\}\}$. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله راس‌های Λ شامل یال نیست. بنابراین Ry یک مجموعه متناهی است، زیرا $\alpha(\Gamma'_R(M)) < \infty$. با توجه به [۲۸، قضیه ۴.۲]، $\mathrm{soc}_R(M)$ یک R-مدول نیم‌ساده است. اکنون، چون M یک R-مدول نوتری (یا آرتینی) است، نتیجه می‌شود که $\mathrm{soc}_R(M) = Rm_1 \oplus Rm_2 \oplus \cdots \oplus Rm_t$ که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, t$، Rm_i یک زیرمدول ساده M است. اکنون چون، به‌ازای هر i، Rm_i یک مجموعه‌ی متناهی است، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{soc}_R(M)$ متناهی است. □

نتیجه ۱۸.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول نیم‌ساده‌ی نوتری (یا آرتینی) باشد به طوریکه $\alpha(\Gamma'_R(M)) < \infty$. در اینصورت M متناهی است.

برهان. چون M یک R-مدول نیم‌ساده است، با توجه به [۲۸، قضیه ۴.۲]، $\mathrm{soc}_R(M) = M$. اکنون، با توجه به گزاره ۱۷.۱.۳، M متناهی است. □

در گزاره بعد، مسطح بودن گراف $\Gamma'_R(R)$، هنگامی که R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، را بررسی می‌کنیم. قبل از آن، دو لم زیر ضروری هستند. به‌علاوه، از قضیه ۱۰.۱.۱ مکرراً استفاده می‌کنیم.

لم ۱۹.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. اگر $\Gamma'_R(R)$ یک گراف مسطح باشد، آنگاه $|\mathrm{Min}(R)| \leqslant ۴$.

برهان. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد و $|\mathrm{Min}(R)| \geqslant ۵$. همچنین، فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، …، $P_۵$ ایده‌آل‌های اول مینیمال متمایز R باشند. در اینصورت، با توجه به [۲۸، لم. ۶.۱۲]، $P_۱$، $P_۲$، …، $P_۵$ کاملاً اول هستند. اکنون، با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، می‌توانیم $x_i \in P_i \setminus \bigcup_{j=۱, j\neq i}^{۵} P_j$ را انتخاب کنیم. بنابراین، زیرگراف القاشده به وسیله‌ی راس‌های مجموعه‌ی $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_۵\}$ گراف $K_۵$ را تشکیل می‌دهد و لذا $\Gamma'_R(R)$ مسطح نمی‌باشد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $|\mathrm{Min}(R)| \leqslant ۴$. $\square$

لم ۲۰.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته با $۳ \leqslant |\mathrm{Min}(R)| < \infty$ باشد. در اینصورت به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$ داریم $|P| \geqslant |\mathrm{Min}(R)| + ۱$.

برهان. فرض کنید $\mathrm{Min}(R) = \{P_۱, P_۲, \ldots, P_n\}$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، کافیست نشان دهیم $|P_۱| \geqslant |\mathrm{Min}(R)| + ۱$. چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است و $n \geqslant ۳$، به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ به آسانی مشاهده می‌شود که $\bigcap_{j=۱, j\neq i}^{n} P_j \neq ۰$. بنابراین، می‌توانیم به‌ازای $i = ۲, ۳, \ldots, n$ یک عضو ناصفر x_i از $\bigcap_{j=۱, j\neq i}^{n} P_j$ را انتخاب کنیم. واضح است که به‌ازای $i = ۲, ۳, \ldots, n$ داریم $x_i \in P_۱$. اکنون، چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است xها دو به دو متمایز هستند. از طرف دیگر، با توجه به [۲۸، لم ۶.۱۲] و گزاره ۱۲.۱.۳، می‌توانیم $x_۱ \in P_۱ \setminus \bigcup_{j=۲}^{n} P_j$ را انتخاب کنیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $|P_۱| \geqslant |\mathrm{Min}(R)| + ۱$. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$ داریم $|P| \geqslant |\mathrm{Min}(R)| + ۱$. $\square$

گزاره ۲۱.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته با $Z(R) \neq ۰$ باشد. اگر $\Gamma'_R(R)$ مسطح باشد، آنگاه یک یکریختی حلقه‌ای بین R و یکی از حلقه‌های زیر موجود است:

$$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۲ \times S, \quad \mathbb{Z}_۳ \times S,$$

که S یک حلقه‌ی بخشی است.

برهان. فرض کنید $\Gamma'_R(R)$ مسطح باشد. در اینصورت با توجه به لم ۱۹.۱.۳، $|\mathrm{Min}(R)| \leqslant ۴$. بنابراین به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$، داریم $\mathrm{ann}(P) \neq ۰$. فرض کنید $|\mathrm{Min}(R)| \in \{۳, ۴\}$ و $P_۱ \in \mathrm{Min}(R)$ موجود باشد به طوریکه $|\mathrm{ann}(P_۱)| \geqslant ۴$. در اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم که $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ عناصر متمایز $\mathrm{ann}(P_۱)^*$ هستند. همچنین، با توجه به لم ۲۰.۱.۳، می‌توانیم فرض کنیم که $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ عناصر متمایز $P_۱^*$ هستند. در اینصورت، راس‌های مجموعه‌ی $\{x_۱, x_۲, x_۳\}$ با راس‌های مجموعه‌ی $\{y_۱, y_۲, y_۳\}$ مجاورند. بنابراین $\Gamma'_R(R)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است و درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است. بنابراین، اگر داشته باشیم $|\mathrm{Min}(R)| \in \{۳, ۴\}$، آنگاه می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$، داریم $|\mathrm{ann}(P)| \leqslant ۳$. درنتیجه، اگر $|\mathrm{Min}(R)| \in \{۳, ۴\}$، آنگاه به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$، $\mathrm{ann}(P)$ یک ایده‌آل چپ مینیمال R است. اکنون، دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱: فرض کنید $|\mathrm{Min}(R)| \in \{۳, ۴\}$. فرض کنید $P_۱ \in \mathrm{Min}(R)$. چون $\mathrm{ann}(P_۱)$ یک ایده‌آل چپ مینیمال R است، با توجه به [۲۸، لم ۲۲.۱۰]، داریم $\mathrm{ann}(P_۱) = Re$ که e یک عضو خودتوان غیر بدیهی R است. در اینصورت، مشاهده می‌شود $R = Re \oplus R(۱ - e)$. چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، با توجه به [۲۸، لم ۶.۱۲]، داریم $R(۱ - e) \subseteq P_۱$. در اینصورت با توجه به قانون مدولی، داریم $R(۱ - e) = P_۱$. اکنون، فرض کنید $P_۲ \in \mathrm{Min}(R) \setminus \{P_۱\}$. در اینصورت $\mathrm{ann}(P_۲) \subseteq P_۱$. بنابراین، مشاهده می‌شود $R = Re \oplus Re_۱ \oplus R(۱ - e - e_۱)$ که $e_۱$ یک عضو خودتوان غیر بدیهی $R(۱ - e)$ است. اکنون، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، یک یکریختی حلقه‌ای بین R و $R_۱ \times R_۲ \times R_۳$ موجود است که به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$، R_i یک حلقه‌ی کاهش یافته است. نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳$، یک یکریختی حلقه‌ای بین R_i و $\mathbb{Z}_۲$ موجود است. بدین منظور، فرض کنید $a \in R_۱ \setminus \{۱_{R_۱}, ۰_{R_۱}\}$. اکنون، با توجه به [۳، شکل ۱]، $\Gamma'_R(R)$ شامل زیرتقسیمی از گراف $K_{۳,۳}$ است و درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که به عنوان حلقه‌ها $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$.

حالت ۲: فرض کنید $\mathrm{Min}(R) = \{P_۱, P_۲\}$. اگر به‌ازای $i = ۱, ۲$، داشته باشیم $|P_i| \geqslant ۴$ آنگاه به کمک روشی که قبل از حالت (۱) استفاده کردیم، مشاهده می‌شود که $\Gamma'_R(R)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است و درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است. بنابراین، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم که $|P_۱| \leqslant ۳$. در اینصورت $P_۱$ یک ایده‌آل چپ مینیمال R است. بنابراین با

توجه به [۲۸، لم ۲۲.۱۰ و تمرین ۷.۱]، یک یکریختی حلقه‌ای بین R و $K \times S$ موجود است که K یک حلقه‌ی بخشی و S یک حوزه است. چون $|K| \leqslant ۳$، به عنوان حلقه‌ها داریم $K \cong \mathbb{Z}_۲$ یا $K \cong \mathbb{Z}_۳$. اکنون، سه زیرحالت زیر را درنظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱: فرض کنید تعداد ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال S حداقل سه باشد. فرض کنید $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال متمایز S باشند. اکنون، می‌توانیم $x_i \in M_i \setminus \bigcup_{j=۱, j\neq i}^{۳} M_j$ را انتخاب کنیم. در اینصورت، مشاهده می‌شود که راس‌های مجموعه‌ی $\{(۱, x_۱), (۱, x_۱^۲), (۱, x_۱^۳)\}$ با راس‌های مجموعه‌ی $\{(\circ, x_۲), (\circ, x_۳), (\circ, ۱)\}$ مجاورند. بنابراین $\Gamma'_R(R)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است و درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است.

زیرحالت ۲: فرض کنید تعداد ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال S دقیقاً دو باشد. فرض کنید $M_۱$ و $M_۲$ ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال متمایز S باشند. اگر $|M_۱ \setminus M_۲| \geqslant ۳$ و $|M_۲ \setminus M_۱| \geqslant ۳$، آنگاه به آسانی مشاهده می‌شود که $\Gamma'_R(R)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است. درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است. اکنون، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم که $|M_۱ \setminus M_۲| \leqslant ۲$. فرض کنید $x \in M_۱ \setminus M_۲$. چون به‌ازای یک عدد صحیح مثبت n داریم $x^n \in J(S)$، $J(S) \neq \circ$. به‌ازای دو عضو متمایز $a, b \in J(S)^*$، فرض کنید $a_۱ := ۱ + a$ و $b_۱ := ۱ + b$. در اینصورت، با توجه به [۲۸، لم ۳.۴]، داریم $Sa_۱ = Sb_۱ = S$. بنابراین، به آسانی مشاهده می‌شود که راس‌های مجموعه‌ی $\{(۱, x), (۱, x^۲), (۱, x^۳)\}$ با راس‌های مجموعه‌ی $\{(\circ, a_۱), (\circ, b_۱), (\circ, ۱)\}$ مجاورند. درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است و لذا $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است.

زیرحالت ۳: فرض کنید S یک حلقه‌ی موضعی باشد. اگر $J(S) \neq \circ$، آنگاه می‌توانیم سه عضو متمایز $x, y, z \in J(S)^*$ را انتخاب کنیم. فرض کنید $y_۱ := ۱ + y$ و $z_۱ := ۱ + z$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که راس‌های مجموعه‌ی $\{(۱, x), (۱, x^۲), (۱, x^۳)\}$ با راس‌های مجموعه‌ی $\{(\circ, y_۱), (\circ, z_۱), (\circ, ۱)\}$ مجاورند. بنابراین $\Gamma'_R(R)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است و درنتیجه $\Gamma'_R(R)$ مسطح نیست که یک تناقض است. اکنون، می‌توانیم فرض کنیم که $J(S) = \circ$. در اینصورت، به‌ازای هر $a \in S^*$ داریم $Sa = a$. بنابراین، با توجه به [۲۸، تمرین ۲.۱]، نتیجه می‌گیریم که S یک حلقه‌ی بخشی است. $\square$

مثال ۲۲.۱.۳. (۱) فرض کنید $R_۱ = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $\Gamma'_{R_۱}(R_۱)$ مسطح است.

(۲) فرض کنید $R_۲ = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. در اینصورت، راس‌های مجموعه‌ی $\{(۱, ۰), (۲, ۰), (۳, ۰)\}$ با راس‌های مجموعه‌ی $\{(۰, ۱), (۰, ۲), (۰, ۳)\}$ در $\Gamma'_{R_۲}(R_۲)$ مجاورند. درنتیجه $\Gamma'_{R_۲}(R_۲)$ شامل گراف $K_{۳,۳}$ است و لذا $\Gamma'_{R_۲}(R_۲)$ مسطح نیست.

(۳) فرض کنید $R_۳ = \mathbb{Z}$. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله راس‌های $\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱\}$، گراف $K_۵$ را در $\Gamma'_{R_۳}(R_۳)$ تشکیل می‌دهد و درنتیجه $\Gamma'_{R_۳}(R_۳)$ مسطح نیست.

(۴) فرض کنید $R_۴ = \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{C}$. در اینصورت، راس‌های $\Gamma'_{R_۴}(R_۴)$ قابل نشاندن در صفحه هستند و درنتیجه $\Gamma'_{R_۴}(R_۴)$ مسطح است.

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که R یک حلقه‌ی بخشی باشد.

گزاره ۲۳.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی بخشی و M یک R-مدول باشد.

(۱) اگر x با y در $\Gamma'_R(M)$ مجاور نباشد، آنگاه $N(x) = N(y)$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma'_R(M)) \in \{۱, ۲\}$.

(۳) اگر $S_۱$ و $S_۲$ دو مجموعه‌ی مستقل ماکیسمال متمایز در $\Gamma'_R(M)$ باشند، در اینصورت داریم $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$.

(۴) فرض کنید $S_۱$ و $S_۲$ دو مجموعه‌ی مستقل ماکیسمال متمایز در $\Gamma'_R(M)$ باشند. در اینصورت، راس‌های مجموعه‌ی $S_۱$ با راس‌های مجموعه‌ی $S_۲$ مجاورند.

(۵) اگر $\Gamma'_R(M)$ شامل یک مسیر به طول سه باشد، آنگاه $\operatorname{gr}(\Gamma'_R(M)) \in \{۳, ۴\}$.

برهان. (۱) فرض کنید x و y دو راس نامجاور در $\Gamma'_R(M)$ باشند. در اینصورت، $x \in Ry$ یا $y \in Rx$. چون R یک حلقه‌ی بخشی است، $Ry = Rx$. اکنون، فرض کنید $z \in N(x)$. در اینصورت $z \notin Rx$. اگر $z \notin N(y)$، آنگاه $Rz = Ry = Rx$ که یک تناقض است. بنابراین $N(x) \subseteq N(y)$. به طور مشابه داریم $N(y) \subseteq N(x)$. اکنون، نتیجه می‌گیریم که $N(x) = N(y)$.

(۲) چون R یک حلقه‌ی نیم‌ساده است، با توجه به [۲۸، قضیه ۵.۲]، M یک R-مدول نیم‌ساده است. بنابراین، با توجه به نتیجه ۸.۱.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma'_R(M)) \in \{۱, ۲\}$.

(۳) فرض کنید S_1 و S_2 دو مجموعه‌ی مستقل ماکیسمال متمایز در $\Gamma'_R(M)$ باشند. به خلف فرض کنید $x \in S_1 \cap S_2$. در اینصورت، با توجه به قسمت (۱)، به‌ازای هر $a \in S_1 \cup S_2$ داریم $N(x) = N(a)$. بنابراین $S_1 \cup S_2$ یک مجموعه‌ی مستقل در $\Gamma'_R(M)$ است که یک تناقض است. اکنون، نتیجه می‌گیریم که $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

(۴) فرض کنید S_1 و S_2 دو مجموعه‌ی مستقل ماکیسمال متمایز در $\Gamma'_R(M)$ باشند. به خلف فرض کنید $x \in S_1$ و $y \in S_2$ موجود باشند به طوریکه x با y مجاور نباشد. در اینصورت، با توجه به قسمت (۱)، داریم $N(x) = N(y)$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $S_1 \cup \{y\}$ یک مجموعه‌ی مستقل در $\Gamma'_R(M)$ که یک تناقض است. اکنون، نتیجه می‌گیریم که راس‌های مجموعه‌ی S_1 با راس‌های مجموعه‌ی S_2 مجاورند.

(۵) فرض کنید $x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ یک مسیر به طول سه در $\Gamma'_R(M)$ باشد. اگر x_1 با x_3 مجاور باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) = 3$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که x_1 با x_3 مجاور نیست. در اینصورت، با توجه به قسمت (۱)، داریم $N(x_1) = N(x_3)$. درنتیجه $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_1$ یک دور به طول چهار در $\Gamma'_R(M)$ است. بنابراین $\mathrm{gr}(\Gamma'_R(M)) \in \{3, 4\}$. □

۲.۳ گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن یک حلقه‌ی جابجایی

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی با همانی ناصفر باشد به طوریکه $Z(R) \neq ۰$. در بخش ۲.۲، گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ کن حلقه R، که در [۳۲] معرفی و بررسی شده است، یادآوری شد. در این بخش، به بیان نتایج دیگری از این گراف می‌پردازیم [۸]. در ابتدا ارتباط بین همبندی و قطر گراف‌های $\Omega(R)$، $\Omega(R[x])$ و $\Omega(R[[x]])$ را بررسی می‌کنیم. سپس، برخی ویژگی‌های ترکیبیاتی $\Omega(R)$ مانند عدد استقلال، عدد احاطه‌گری، تک دور بودن و مسطح بودن را مطالعه می‌کنیم. در انتهای این بخش، مکمل $\Omega(R)$ بررسی شده است. در تمام این بخش، R یک حلقه‌ی جابجایی با همانی ناصفر است به طوریکه $Z(R) \neq ۰$ (یعنی، حوزه‌ی صحیح نیست). این بخش را با لم زیر آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{۰, ۱, ۲, \infty\}$.

(۲) $\Omega(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد.

برهان. رجوع کنید به [۳۲، لم‌های ۲.۳، ۱.۳، ۳.۳، ۴.۳ و ۱.۴]. □

در گزاره بعد، قطر و کمر گراف‌های $\Omega(R[x])$ و $\Omega(R[[x]])$ را تعیین می‌کنیم.

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Omega(R[x])) \in \{۱, ۲, \infty\}$.

(۲) $\operatorname{gr}(\Omega(R[x])) = ۳$.

(۳) $\operatorname{diam}(\Omega(R[[x]])) \in \{۱, ۲, \infty\}$.

(۴) $\operatorname{gr}(\Omega(R[[x]])) = ۳$.

برهان. (۱) فرض کنید $a \in Z(R)^*$. در اینصورت $aR[x]$ و $axR[x]$ دو راس متمایز $\Omega(R[x])$ هستند. بنابراین، با توجه به لم ۱.۲.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Omega(R[x])) \in \{۱, ۲, \infty\}$.

(۲) فرض کنید $a \in Z(R)^*$. در اینصورت $aR[x] - axR[x] - ax^2R[x] - aR[x]$ یک دور به طول سه در $\Omega(R[x])$ است. بنابراین $\mathrm{gr}(\Omega(R[x])) = 3$.

به روشی مشابه آنچه در قسمت‌های (۱) و (۲) استفاده شده است، می‌توان قسمت‌های (۳) و (۴) را نتیجه گرفت. □

در قضیه زیر، همبندی گراف‌های $\Omega(R)$، $\Omega(R[x])$ و $\Omega(R[[x]])$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $\Omega(R)$ همبند است.

(۲) $\Omega(R[x])$ همبند است.

(۳) $\Omega(R[[x]])$ همبند است.

برهان. (۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید $\Omega(R)$ ناهمبند باشد. در اینصورت، با توجه به لم ۱.۲.۳، R یک حلقه‌ی کاهش یافته است و $\mathrm{Min}(R) = \{P_1, P_2\}$. نشان می‌دهیم $R[x]$ یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. بدین منظور، واضح است که $P_1[x]$ و $P_1[x]$ ایده‌آل‌های اول حلقه R هستند. چون $P_1 \cap P_2 = 0$، داریم $(P_1 \cap P_2)[x] = P_1[x] \cap P_2[x] = 0$. بنابراین $R[x]$ یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. درنتیجه $\Omega(R[x])$ ناهمبند است.

برعکس، فرض کنید $\Omega(R[x])$ ناهمبند باشد. در اینصورت، $R[x]$ یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. اکنون، با توجه به [۳۱، ملاحظه ۲۷.۳(۲) و تمرین ۴۳.۲(۳)]، به آسانی مشاهده می‌شود که R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. بنابراین $\Omega(R)$ ناهمبند است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) به روشی مشابه نتیجه می‌شود. □

مثال ۴.۲.۳. فرض کنید $R = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)[x]$. در اینصورت، چون $\Omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ ناهمبند است، $\Omega((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)[x])$ نیز ناهمبند است. اکنون، فرض کنید $R_1 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)[x, y]$. در اینصورت، چون $R_1 \cong R[y]$، نتیجه می‌گیریم که $\Omega((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)[x, y])$ ناهمبند است.

در ادامه، ارتباط بین قطرهای $\Omega(R)$ و $\Omega(R[x])$ را بررسی می‌کنیم. قبل از آن، لم زیر ضروری است.

لم ۵.۲.۳. فرض کنید I یک ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌ی $R[x]$ باشد. در اینصورت $c \in R^*$ موجود است به طوریکه $cI = 0$.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌ی $R[x]$ باشد. اگر $I = 0$، آنگاه حکم بدیهی است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $I \neq 0$. در اینصورت $g \in R[x]^*$ موجود است به طوریکه $gI = 0$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم $g = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چند جمله‌ای از حداقل درجه‌ی n است به طوریکه $gI = 0$. فرض کنید $f = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in I^*$ که $b_m \neq 0$. چون $gf = 0$، داریم $a_nb_m = 0$. بنابراین $b_mgI = 0$. اکنون، چون g یک چند جمله‌ای از حداقل درجه‌ی n است به طوریکه $gI = 0$، به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $b_ma_i = 0$. به طور مشابه، اگر به‌ازای حداقل یک $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ داشته باشیم $a_nb_k = 0$، آنگاه به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $a_ib_k = 0$. اکنون، فرض کنید $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ بیشینه باشد با این ویژگی که $a_nb_j \neq 0$. در اینصورت، چون $gf = 0$، داریم $(a_nb_j + a_{n-1}b_{j+1} + \cdots)x^{n+j} = 0$ که یک تناقض است. بنابراین به‌ازای هر $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ داریم $a_nb_j = 0$. درنتیجه به ازای هر $f \in I$ داریم $a_nf = 0$ که نشان می‌دهد $a_nI = 0$. $\square$

گزاره ۶.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Omega(R[x])) = 1$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 2$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Omega(R[x])) = 2$.

برهان. (۱) فرض کنید $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$. فرض کنید I و J دو راس متمایز $\Omega(R[x])$ باشند. قرار می‌دهیم

$$\Delta := I \text{ مجموعه‌ی همه‌ی ضرایب عناصر}$$

و

$$\Lambda := J \text{ مجموعه‌ی همه‌ی ضرایب عناصر} .$$

با توجه به لم ۵.۲.۳، به آسانی مشاهده می‌شود که Δ و Λ ایده‌آل پوچ‌کن‌های حلقه‌ی R هستند. چون $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$، $\Delta + \Lambda$ نیز یک ایده‌آل پوچ‌کن حلقه‌ی R است. بنابراین $c \in R^*$ موجود است به طوریکه $c(I + J) = 0$. در اینصورت I با J در $\Omega(R[x])$ مجاور است. درنتیجه $\operatorname{diam}(\Omega(R[x])) = 1$.

برعکس، فرض کنید $\operatorname{diam}(\Omega(R[x])) = 1$. اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل مینیمال R باشد، آنگاه $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 0$. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم که I و J دو راس متمایز $\Omega(R)$ باشند. در اینصورت، $I[x]$ و $J[x]$ دو راس متمایز $\Omega(R[x])$ هستند. چون $I[x]$ با $J[x]$ در $\Omega(R[x])$ مجاور است، با توجه به لم ۵.۲.۳، $c \in R^*$ موجود است که $c(I[x] + J[x]) = 0$. بنابراین $c(I + J) = 0$ و لذا I با J در $\Omega(R)$ مجاور است. درنتیجه $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 1$.

(۲) با توجه به قضیه ۳.۲.۳ و قسمت (۱) بدیهی است. $\square$

اکنون ارتباط بین قطرهای $\Omega(R)$ و $\Omega(R[[x]])$، هنگامی‌که R یک حلقه‌ی نوتری است، را بررسی می‌کنیم. قبل از آن، دو لم زیر ضروری است.

لم ۷.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در اینصورت $Z(R[[x]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[x]]$ که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $P_i = \operatorname{ann}_R(r_i) \in \operatorname{Spec}(R)$ و $r_i \in R^*$. به‌ویژه، اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد، آنگاه $Z(R[[x]]) = \operatorname{ann}_R(r)[[x]]$ که $r \in R^*$.

برهان. چون R یک حلقه‌ی نوتری است، با توجه به [۳۱، نتیجه ۳۵.۴]، ایده‌آل صفر یک تجزیه‌ی اولیه مینیمال دارد. در اینصورت، با توجه به [۱۹، قضیه ۴] و [۳۱، گزاره‌های ۱۹.۸ و ۲۲.۸] به آسانی مشاهده می‌شود $Z(R[[x]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[x]]$ که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $P_i = \operatorname{ann}_R(r_i) \in \operatorname{Spec}(R)$ و $r_i \in R^*$. حالت "به‌ویژه" به روشی مشابه و استفاده از [۲۵، قضیه ۸۱] نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۸.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در اینصورت $Z(R) = \operatorname{ann}(r)$، که $r \in Z(R)^*$، اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$.

برهان. فرض کنید $Z(R) = \operatorname{ann}(r)$ که $r \in Z(R)^*$. اگر $|A(R)^*| = 1$، در اینصورت $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 0$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم I و J دو راس متمایز $\Omega(R)$ باشند. در اینصورت $r(I + J) = 0$ و درنتیجه I با J در $\Omega(R)$ مجاور است. بنابراین، نتیجه می‌شود $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 1$.

برعکس، فرض کنید $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$. اگر $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 0$، آنگاه $Z(R)$ یک ایده‌آل مینیمال است. درنتیجه $Z(R) = \operatorname{ann}(r)$ که $r \in Z(R)^*$. اکنون، می‌توانیم فرض کنیم $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 1$. فرض کنید $x, y \in Z(R)$. در اینصورت، به‌ازای یک $a \in Z(R)^*$ داریم $a(Rx + Ry) = 0$. بنابراین $Z(R)$ یک ایده‌آل است. اکنون چون R یک حلقه‌ی نوتری است، با

توجه به [۳۱، گزاره‌های ۱۹.۸ و ۲۲.۸] و [۲۵، قضیه ۸۱] به آسانی مشاهده می‌شود که به‌ازای یک $r \in Z(R)^*$ داریم $Z(R) = \mathrm{ann}(r)$. □

گزاره ۹.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در اینصورت:

(۱) $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{۰, ۱\}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R[[x]])) = ۱$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R[[x]])) = ۲$.

برهان. (۱) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{۰, ۱\}$. چون R یک حلقه‌ی نوتری است، با توجه به دو لم قبل، داریم $Z(R[[x]]) = \mathrm{ann}_R(r)[[x]]$ که $r \in Z(R)^*$. فرض کنید I و J دو راس متمایز $\Omega(R[[x]])$ باشند. در اینصورت $I + J \subseteq Z(R[[x]])$. بنابراین $r(I + J) = ۰$ و درنتیجه I با J در $\Omega(R[[x]])$ مجاور است. در اینصورت، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{diam}(\Omega(R[[x]])) = ۱$.

برعکس، فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R[[x]])) = ۱$. اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل مینیمال R باشد، آنگاه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = ۰$. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم که I و J دو راس متمایز $\Omega(R)$ باشند. در اینصورت، $I[[x]]$ و $J[[x]]$ دو راس متمایز $\Omega(R[[x]])$ هستند. چون $I[[x]]$ با $J[[x]]$ در $\Omega(R[[x]])$ مجاور است و $Z(R[[x]]) = \bigcup_{i=۱}^{n} P_i[[x]]$، که به‌ازای هر i داریم $P_i = \mathrm{ann}_R(r_i) \in \mathrm{Spec}(R)$ و $r_i \in R^*$، داریم $I[[x]] + J[[x]] \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} P_i[[x]]$. بنابراین، با توجه به [۲۵، قضیه ۸۱]، به‌ازای یک $j \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ نتیجه می‌گیریم که $I[[x]] + J[[x]] \subseteq P_j[[x]]$. درنتیجه $d \in Z(R)^*$ هست که $d(I[[x]] + J[[x]]) = ۰$. بنابراین $d(I + J) = ۰$ و درنتیجه I با J در $\Omega(R)$ مجاور است. در اینصورت $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = ۱$.

(۲) با توجه به قضیه ۳.۲.۳ و قسمت (۱) بدیهی است. □

در ادامه، عدد احاطه‌گری گراف $\Omega(R)$ را مشخص می‌کنیم. قبل از آن، دو لم زیر ضروری هستند.

لم ۱۰.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در اینصورت $I + \mathrm{ann}(I)$ یک ایده‌آل اساسی R است.

برهان. به خلف فرض کنید $I + \mathrm{ann}(I)$ ایده‌آل اساسی R نباشد. در اینصورت، ایده‌آل ناصفر J از R موجود است به طوریکه $J \cap (I + \mathrm{ann}(I)) = ۰$. بنابراین $J \cap I = ۰$ و لذا $J \subseteq \mathrm{ann}(I)$ که یک تناقض است. درنتیجه $I + \mathrm{ann}(I)$ یک ایده‌آل اساسی R است. □

لم ۱۱.۲.۳. فرض کنید I و J دو راس متمایز $\Omega(R)$ باشند. در اینصورت I با J مجاور است اگر و تنها اگر $\operatorname{ann}(I) \cap \operatorname{ann}(J) \neq 0$.

برهان. فرض کنید I با J مجاور باشد. بنابراین، به‌ازای یک $x \in R^*$ داریم $x(I+J) = 0$. درنتیجه $\operatorname{ann}(I) \cap \operatorname{ann}(J) \neq 0$. برعکس، فرض کنید $\operatorname{ann}(I) \cap \operatorname{ann}(J) \neq 0$. فرض کنید $y \in \operatorname{ann}(I) \cap \operatorname{ann}(J)$ ناصفر باشد. بنابراین $y(I+J) = 0$ و درنتیجه I با J مجاور است. □

گزاره ۱۲.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه و I یک راس از $\Omega(R)$ باشد. در اینصورت، مجموعه‌ی $\{I, \operatorname{ann}(I)\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. به‌ویژه، $\gamma(\Omega(R)) \leqslant 2$.

برهان. فرض کنید $J \in A(R)^* \setminus \{I, \operatorname{ann}(I)\}$. اگر $I = \operatorname{ann}(I)$، در اینصورت با توجه به لم ۲.۳. ۱۰، داریم $\operatorname{ann}(I) \cap \operatorname{ann}(J) \neq 0$. درنتیجه با توجه به لم ۱۰.۲.۳، I با J مجاور است. اکنون فرض کنید $I \neq \operatorname{ann}(I)$. فرض کنید I با J مجاور نباشد. در اینصورت، $\operatorname{ann}(I) \cap \operatorname{ann}(J) = 0$. بنابراین $\operatorname{ann}(J) \subseteq \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(I))$. درنتیجه $\operatorname{ann}(I)$ با J مجاور است. □

مثال ۱۳.۲.۳. (۱) فرض کنید $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. در اینصورت $\{\mathbb{Z} \times 0, 0 \times \mathbb{Z}\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\Omega(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ است.

(۲) فرض کنید $R = \mathbb{Z}_4$. در اینصورت $\{2\mathbb{Z}_4\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\Omega(\mathbb{Z}_4)$ است.

نتیجه ۱۴.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت:

(۱) $\gamma(\Omega(R)) = 1$ اگر و تنها اگر R کاهش یافته نباشد.

(۲) $\gamma(\Omega(R)) = 2$ اگر و تنها اگر R کاهش یافته باشد.

برهان. (۱) فرض کنید R کاهش یافته نباشد. در اینصورت $I \in A(R)^*$ موجود است به طوریکه $I^2 = 0$. اکنون، با توجه به لم‌های ۱۰.۲.۳ و ۱۱.۲.۳، نتیجه می‌گیریم I با هر راس دیگر مجاور است و لذا $\gamma(\Omega(R)) = 1$.

برعکس، فرض کنید $\gamma(\Omega(R)) = 1$. در اینصورت، یک راس I از $\Omega(R)$ موجود است به طوریکه I با هر راس دیگر مجاور است. اگر $I = \operatorname{ann}(I)$، آنگاه R کاهش یافته نیست. در غیر اینصورت،

می‌توانیم فرض کنیم $I \neq \mathrm{ann}(I)$. اکنون چون I با $\mathrm{ann}(I)$ مجاور است، $x \in R^*$ موجود است به طوریکه $x(I + \mathrm{ann}(I)) = 0$. بنابراین، $x^2 = 0$ و درنتیجه R کاهش یافته نیست.

(۲) از گزاره ۱۲.۲.۳ و قسمت (۱) نتیجه می‌شود. □

گزاره ۱۵.۲.۳. فرض R_1 و R_2 حلقه باشند و $R = R_1 \times R_2$. در اینصورت $\gamma(\Omega(R)) = 1$ اگر و تنها اگر $\gamma(\Omega(R_1)) = 1$ یا $\gamma(\Omega(R_2)) = 1$.

برهان. با توجه به نتیجه ۱۴.۲.۳، $\gamma(\Omega(R)) = 1$ اگر و تنها اگر R کاهش یافته نباشد. از طرف دیگر، R کاهش یافته نیست اگر و تنها اگر R_1 یا R_2 کاهش یافته نباشد. اکنون نتیجه می‌گیریم که $\gamma(\Omega(R)) = 1$ اگر و تنها اگر $\gamma(\Omega(R_1)) = 1$ یا $\gamma(\Omega(R_2)) = 1$. □

یک اول پوچساز برای حلقه‌ی R، یک ایده‌آل اول P است به طوریکه با پوچساز ایده‌آل ناصفری از R برابر باشد. به آسانی مشاهده می‌شود که هر ایده‌آل با ویژگی ماکسیمال بودن در میان پوچسازهای حلقه‌ی R، اول است. از نماد $\mathcal{A}(R)$ برای نشان دادن پوچسازهای ماکسیمال حلقه‌ی R استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر R یک حلقه‌ی نوتری باشد، آنگاه $\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$. در گزاره بعد، عدد استقلال $\Omega(R)$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱۶.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر داشته باشیم $1 \leqslant |\mathcal{A}(R)| < \infty$ و $Z(R) = \bigcup_{P \in \mathcal{A}(R)} P$، آنگاه $\alpha(\Omega(R)) = |\mathcal{A}(R)|$.

برهان. اگر $|\mathcal{A}(R)| = 1$، آنگاه $Z(R)$ یک ایده‌آل پوچساز است. بنابراین $\Omega(R)$ یک گراف کامل است و درنتیجه $\alpha(\Omega(R)) = 1$. اکنون، فرض کنید $n = |\mathcal{A}(R)| \geqslant 2$ و داشته باشیم $\mathcal{A}(R) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{A}(R)$ یک مجموعه‌ی مستقل است. بدین منظور، فرض کنید P_1 با P_2 مجاور باشد. در اینصورت $x \in R^*$ موجود است به طوریکه $x(P_1 + P_2) = 0$. چون $Z(R) = \bigcup_{P \in \mathcal{A}(R)} P$، با توجه به [۲۵، قضیه ۸۱]، $P_i \in \mathcal{A}(R)$ موجود است به طوریکه $P_1 + P_2 \subseteq P_i$ که یک تناقض است. بنابراین $\alpha(\Omega(R)) \geqslant |\mathcal{A}(R)|$. اکنون فرض کنید $S = \{I_1, I_2, \ldots, I_{n+1}\}$ یک مجموعه‌ی مستقل با $n + 1$ راس باشد. در اینصورت، اندیس‌های متمایز i, j و $P \in \mathcal{A}(R)$ موجود هستند به طوریکه $I_i + I_j \subseteq P$. بنابراین I_i با I_j مجاور است که یک تناقض است. اکنون، نتیجه می‌گیریم $\alpha(\Omega(R)) = |\mathcal{A}(R)|$ □

نتیجه ۱۷.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت

(۱) اگر R نوتری باشد، آنگاه $\alpha(\Omega(R)) < \infty$.

(۲) اگر R کاهش یافته با $|\mathrm{Min}(R)| < \infty$ باشد، آنگاه $\alpha(\Omega(R)) = |\mathrm{Min}(R)|$.

برهان. (۱) فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در اینصورت، با توجه به [۲۵، قضیه ۸۰]، $Z(R) = \bigcup_{P\in\mathcal{A}(R)} P$ و $1 \leqslant |\mathcal{A}(R)| < \infty$. بنابراین $\alpha(\Omega(R)) < \infty$.

(۲) فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته با تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال باشد. در اینصورت، به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$، $\mathrm{ann}(P) \neq 0$. نشان می‌دهیم $\mathrm{Min}(R) = \mathcal{A}(R)$. بدین منظور، فرض کنید $P \in \mathrm{Min}(R)$. اگر $P \notin \mathcal{A}(R)$، آنگاه $x \in R^*$ موجود است به طوریکه $P \subsetneqq \mathrm{ann}(x)$. اکنون، چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، $Q \in \mathrm{Min}(R)$ موجود است به طوریکه $\mathrm{ann}(x) \subseteq Q$ که یک تناقض است. بنابراین $\mathrm{Min}(R) \subseteq \mathcal{A}(R)$. اکنون، فرض کنید $P \in \mathcal{A}(R)$. در اینصورت، با توجه به [۲۵، قضیه ۸۰] و [۲۳، نتیجه ۴.۲]، $P \in \mathrm{Min}(R)$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{Min}(R) = \mathcal{A}(R)$ و لذا $\alpha(\Omega(R)) = |\mathrm{Min}(R)|$. □

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که عدد استقلال $\Omega(R)$ متناهی باشد.

گزاره ۱۸.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد به طوریکه هر ایده‌آل اول مشمول در$Z(R)$ زیرمجموعه‌ی اجتماع تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اول پوچساز باشد. اگر داشته باشیم $\alpha(\Omega(R)) < \infty$، آنگاه تعداد ایده‌آل‌های پوچساز R حداکثر $2^{\alpha(\Omega(R))}$ است.

برهان. فرض کنید P یک ایده‌آل اول مشمول در$Z(R)$ باشد. در اینصورت $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{ann}(X_i)$ که به‌ازای هر i، $X_i \subseteq R$ و $\mathrm{ann}(X_i)$ یک ایده‌آل اول پوچساز R است. بنابراین، با توجه به [۲۵، قضیه ۸۱]، به‌ازای یک $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ داریم $P \subseteq \mathrm{ann}(X_i)$. چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، با توجه به [۲۳، نتیجه ۴.۲] نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$، $\mathrm{ann}(P) \neq 0$. اکنون، فرض کنید $\alpha(\Omega(R)) = n$. نشان می‌دهیم $|\mathrm{Min}(R)| = n$. بدین منظور، فرض کنید P_1، P_2،...، P_{n+1} ایده‌آل‌های اول مینیمال متمایز R باشند. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که P_1، P_2،...، P_{n+1} یک مجموعه‌ی مستقل در $\Omega(R)$ است که یک تناقض است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{Min}(R) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. اکنون، به روشی مشابه آنچه در گزاره ۱۳.۱.۳ استفاده شد، نتیجه می‌گیریم که تعداد ایده‌آل‌های پوچساز R حداکثر $2^{\alpha(\Omega(R))}$ است. □

در ادامه، از ملاحظه‌ی زیر مکرراً استفاده می‌کنیم.

ملاحظه ۱۹.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در اینصورت، با توجه به [۲۸، قضیه ۱۲.۴]، $J(R)$ پوچ‌توان است. همچنین، با توجه به [۳۱، تمرین ۵۰.۸]، به عنوان حلقه‌ها داریم $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که به‌ازای هر i، R_i یک حلقه‌ی آرتینی موضعی است. به‌علاوه، $|\mathrm{Max}(R)| = n$ و $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ که به‌ازای هر i، $M_i \in \mathrm{Max}(R)$ و M_i یک ایده‌آل پوچساز است.

در گزاره زیر، حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که $\Omega(R)$ تک‌دور باشد.

گزاره ۲۰.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\Omega(R)$ تک‌دور است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی موضعی با دقیقاً سه ایده‌آل غیر بدیهی باشد، یا به عنوان حلقه‌ها $R \cong F \times S$ که F یک میدان و S یک حلقه با دقیقاً یک ایده‌آل غیر بدیهی است.

برهان. فرض کنید $\Omega(R)$ تک‌دور باشد. در اینصورت، هر راس $\Omega(R)$ شامل حداکثر سه ایده‌آل ناصفر R است. بنابراین، R شامل یک ایده‌آل مینیمال مثل Rx است که $x \in R^*$. درنتیجه، به عنوان مدول‌ها $Rx \cong R/\mathrm{ann}(x)$. بنابراین، $R/\mathrm{ann}(x)$ یک R-مدول آرتینی است. همچنین، $\mathrm{ann}(x)$ یک R-مدول آرتینی است. در اینصورت، چون

$$0 \longrightarrow \mathrm{ann}(x) \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathrm{ann}(x) \longrightarrow 0$$

یک دنباله‌ی دقیق از R-مدول‌ها است، با توجه به [۳۱، نتیجه ۱۹.۷] نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی آرتینی است. بنابراین، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که به‌ازای هر i، R_i یک حلقه‌ی آرتینی موضعی است. ابتدا، فرض کنید R تجزیه پذیر نباشد. در اینصورت، چون $J(R)$ پوچ‌توان است، نتیجه می‌گیریم که R یک حلقه‌ی موضعی با دقیقاً سه ایده‌آل غیر بدیهی است. اکنون، فرض کنید R تجزیه پذیر باشد. نشان می‌دهیم $n = 2$. بدین منظور، فرض کنید $n \geqslant 3$. در اینصورت،

$$R_1 \times R_2 \times 0 \times \cdots \times 0 - R_1 \times 0 \times 0 \times \cdots \times 0 - 0 \times R_2 \times 0 \times \cdots \times 0 - R_1 \times R_2 \times 0 \times \cdots \times 0$$

و

$$0 \times R_2 \times R_3 \times \cdots \times R_n - 0 \times 0 \times R_3 \times \cdots \times R_n - 0 \times R_2 \times 0 \times \cdots \times R_n - 0 \times R_2 \times R_3 \times \cdots \times R_n$$

دورهایی در $\Omega(R)$ هستند که یک تناقض است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $n = ۲$. اکنون، اگر $R_۱$ و $R_۲$ میدان نباشند، آنگاه $R_۱ \times ۰ - R_۱ \times I_۲ - ۰ \times I_۲ - R_۱ \times ۰ - R_۱ \times I_۲ - ۰ \times I_۲ - R_۱ \times ۰$ و $۰ \times R_۲ - I_۱ \times I_۲ - ۰ \times I_۲ - ۰ \times R_۲$، که به ازای $i = ۱, ۲$ فرض می‌کنیم I_i ایده‌آل غیر بدیهی R_i است، دورهایی در $\Omega(R)$ هستند که یک تناقض است. اکنون، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم $R_۱$ میدان است. اگر $R_۲$ یک حلقه با دو ایده‌آل غیر بدیهی مانند I و J باشد، آنگاه $R_۱ \times ۰ - R_۱ \times I - ۰ \times I - R_۱ \times ۰$ و $R_۱ \times ۰ - R_۱ \times J - ۰ \times J - R_۱ \times ۰$ دورهایی در $\Omega(R)$ هستند که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم به عنوان حلقه‌ها $R \cong F \times S$ که F یک میدان و S یک حلقه با دقیقاً یک ایده‌آل غیر بدیهی است.

قسمت برعکس بدیهی است. □

در ادامه، شرایطی بررسی می‌شود که حلقه‌ی R آرتینی باشد.

گزاره ۲۱.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر در $\Omega(R)$ به‌ازای تمام راس‌ها به فرم $I = \mathrm{Ann}(X)$، که $X \subseteq R$، داشته باشیم $\deg(I) < \infty$، در اینصورت

(۱) $\Omega(R)$ یک گراف متناهی است.

(۲) $J(R)^{\omega(\Omega(R))+۱} = ۰$.

برهان. (۱) فرض کنید $I = \mathrm{Ann}(X)$، که $X \subseteq R$، راسی از $\Omega(R)$ باشد. چون $\deg(I) < \infty$، I در شرط زنجیر نزولی بر زیرمدول‌هایش صدق می‌کند (R به عنوان یک مدول روی خودش دیده می‌شود). بنابراین، به روشی مشابه آنچه در گزاره ۲۰.۲.۳ به کاربردیم، نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی آرتینی است. در اینصورت، $|\mathrm{Max}(R)| = n$ و $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} M_i$ که به‌ازای هر i، $M_i \in \mathrm{Max}(R)$ و M_i یک ایده‌آل پوچساز است. اکنون، چون به‌ازای هر i $\deg(M_i) < \infty$، تعداد ایده‌آل‌های مشمول در M_iها متناهی است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $\Omega(R)$ یک گراف متناهی است.

(۲) با توجه به قسمت (۱) داریم $\omega(\Omega(R)) < \infty$. اکنون، به روشی مشابه آنچه در گزاره ۲.۳.۲۰ به کاربردیم، نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی آرتینی است. بنابراین، $J(R)$ پوچ‌توان است. اگر داشته باشیم $J(R)^{\omega(\Omega(R))+۱} \neq ۰$، آنگاه زیرگراف القایی به وسیله‌ی راس‌های مجموعه‌ی $\{J(R), J(R)^۲, \ldots, J(R)^{\omega(\Omega(R))+۱}\}$ یک خوشه از $\Omega(R)$ با $\omega(\Omega(R)) + ۱$ راس است که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌شود $J(R)^{\omega(\Omega(R))+۱} = ۰$. □

مثال ۲۲.۲.۳. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}$. در اینصورت، $\deg(\mathbb{Z}_۲ \times ۰) = ۰$. به علاوه، $\Omega(R)$ یک گراف متناهی نیست.

گزاره ۲۳.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. اگر $\Omega(R)$ شامل یک راس از درجه‌ی متناهی باشد، آنگاه به عنوان حلقه‌ها $R \cong F \times S$ که F یک میدان و S یک حلقه‌ی کاهش یافته است.

برهان. فرض کنید I یک راس از $\Omega(R)$ باشد به طوریکه $\deg(I) < \infty$. در اینصورت، R شامل یک ایده‌آل مینیمال مانند J است. اکنون، با توجه به [۲۸، لم ۲۲.۱۰]، داریم $J = Rx$ که x عضو خودتوان غیر بدیهی R است. بنابراین، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، به آسانی مشاهده می‌شود که به عنوان حلقه‌ها $R \cong F \times S$ که F یک میدان و S یک حلقه‌ی کاهش یافته است. $\square$

اکنون، شرایطی بررسی می‌شود که $\Omega(R)$ مسطح باشد. توجه کنید که اگر یک گراف شامل مشتقی از $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ باشد، آنگاه آن گراف نامسطح است (رجوع کنید به [۳۴، قضیه ۲.۲.۶]).

گزاره ۲۴.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد به طوریکه $\Omega(R)$ مسطح باشد. در اینصورت:

(۱) اگر R تجزیه پذیر نباشد، آنگاه R یک حلقه‌ی موضعی با حداکثر چهار ایده‌آل غیر بدیهی است.

(۲) اگر R تجزیه پذیر باشد، آنگاه R با یکی از حلقه‌های زیر یکریخت است:

$$F_۱ \times F_۲ \times F_۳, \qquad F \times S$$

که F و F_iها میدان هستند و S یک حلقه با حداکثر یک ایده‌آل غیر بدیهی است.

برهان. (۱) فرض کنید R تجزیه ناپذیر باشد و I یک راس از $\Omega(R)$ باشد. چون $\Omega(R)$ مسطح است، تعداد ایده‌آل‌های ناصفر R مشمول در I حداکثر چهار است. به روشی مشابه آنچه در گزاره ۲.۳. ۲۰ به کاربردیم، نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی آرتینی است. در اینصورت، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ که به‌ازای هر i، R_i یک حلقه‌ی آرتینی موضعی است. چون R تجزیه ناپذیر است، R یک حلقه‌ی آرتینی موضعی است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی موضعی با حداکثر چهار ایده‌آل غیر بدیهی است.

(۲) فرض کنید R تجزیه پذیر باشد. در اینصورت، چون $\Omega(R)$ مسطح است، مشابه قسمت (۱)، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ که به‌ازای هر i، R_i یک حلقه‌ی آرتینی موضعی است و

$n \neq 1$. نشان می‌دهیم $n \leqslant 3$. بدین منظور، فرض کنید $n \geqslant 4$. در اینصورت، مجموعه‌ی

$$\{R_1 \times R_2 \times 0 \times \cdots \times 0, R_1 \times 0 \times 0 \times \cdots \times 0, 0 \times R_2 \times 0 \times \cdots \times 0,$$
$$R_1 \times R_2 \times R_3 \times 0 \times \cdots \times 0, 0 \times 0 \times R_3 \times 0 \times \cdots \times 0\}$$

گراف K_5 را تشکیل می‌دهد که یک تناقض است. اکنون، فرض کنید $n = 3$. اگر به عنوان حلقه‌ها $R \cong F_1 \times F_2 \times F_3$ که F_iها میدان هستند، آنگاه به آسانی مشاهده می‌شود که $\Omega(R)$ مسطح است. در غیر اینصورت، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم R_1 شامل یک ایده‌آل غیر بدیهی مانند I_1 باشد. در اینصورت، مجموعه‌ی

$$\{R_1 \times R_2 \times 0, I_1 \times R_2 \times R_3, I_1 \times 0 \times R_3, I_1 \times 0 \times 0, I_1 \times R_2 \times 0\}$$

گراف K_5 را تشکیل می‌دهد که یک تناقض است. اکنون، فرض کنید $n = 2$. اگر R_1 و R_2 میدان نباشند، آنگاه مجموعه‌ی

$$\{R_1 \times I_2, I_1 \times I_2, I_1 \times 0, 0 \times I_2, R_1 \times 0\}$$

که به‌ازای $i = 1, 2$ فرض می‌کنیم I_i ایده‌آل غیر بدیهی R_i است، گراف K_5 را تشکیل می‌دهد که یک تناقض است. بنابراین، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم R_1 میدان است. اکنون، اگر R_2 یک حلقه با دو ایده‌آل غیر بدیهی مانند I و J باشد، آنگاه مجموعه‌ی

$$\{R_1 \times I, R_1 \times J, 0 \times I, 0 \times J, R_1 \times 0\}$$

گراف K_5 را تشکیل می‌دهد که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که R_2 یک حلقه با حداکثر یک ایده‌آل غیر بدیهی است. $\square$

نتیجه ۲۵.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد به طوریکه $\Omega(R)$ مسطح باشد. در اینصورت R یک حلقه‌ی آرتینی است.

در ادامه، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\Omega(R)$ یک گراف دوبخشی همبند باشد.

گزاره ۲۶.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد به طوریکه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \neq 0$. در اینصورت $\Omega(R)$ یک گراف دوبخشی همبند است اگر و تنها اگر $\Omega(R) = K_2$.

برهان. فرض کنید $\Omega(R)$ یک گراف دوبخشی همبند باشد. در اینصورت، با توجه به [۳۴، قضیه ۱۸.۲.۱]، $\Omega(R)$ شامل هیچ دوری به طول فرد نیست. بنابراین، هر راس $\Omega(R)$ شامل حداکثر دو

ایده‌آل ناصفر است. بنابراین، مشابه برهان گزاره ۲۰.۲.۳، نتیجه می‌شود که R یک حلقه‌ی آرتینی است. نشان می‌دهیم R یک حلقه‌ی موضعی است. بدین منظور، فرض کنید به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_۱ \times R_۲$ که $R_۱$ و $R_۲$ حلقه هستند. اگر $R_۱$ و $R_۲$ میدان باشند، آنگاه $\Omega(R)$ ناهمبند است که یک تناقض است. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم $I_۱$ یک ایده‌آل غیر بدیهی $R_۱$ باشد. اکنون، $I_۱ \times R_۲$ شامل سه ایده‌آل ناصفر است که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که R یک حلقه‌ی موضعی است. در اینصورت، R یک حلقه با دقیقاً دو ایده‌آل غیر بدیهی است و درنتیجه $\Omega(R) = K_۲$.

قسمت برعکس بدیهی است. □

در دو گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که $J(R)$ یک راس $\Omega(R)$ باشد.

گزاره ۲۷.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه با تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال باشد. در اینصورت، $J(R)$ یک راس $\Omega(R)$ است اگر و تنها اگر R شامل یک ایده‌آل مینیمال باشد و $J(R) \neq ۰$.

برهان. نشان می‌دهیم $\mathrm{soc}(R) = \mathrm{ann}(J(R))$. چون $|\mathrm{Max}(R)| < \infty$، با توجه به [۳۱، تمرین ۶۰.۳]، به عنوان حلقه‌ها داریم $R/J(R) \cong F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n$ که F_iها میدان هستند. بنابراین، $R/J(R)$ یک حلقه‌ی آرتینی است. درنتیجه با توجه به [۲۸، تمرین ۱۸.۴]، داریم $\mathrm{soc}(R) = \mathrm{ann}(J(R))$. در اینصورت، $J(R)$ یک راس $\Omega(R)$ است اگر و تنها اگر R شامل یک ایده‌آل مینیمال باشد و $J(R) \neq ۰$. □

گزاره ۲۸.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی باشد به طوریکه $J(R) \neq ۰$. در اینصورت، $J(R)$ با هر راس دیگر $\Omega(R)$ مجاور است.

برهان. چون R یک حلقه‌ی آرتینی است، $J(R)$ پوچ‌توان است. درنتیجه $J(R)$ یک راس $\Omega(R)$ است. اکنون، با توجه به [۲۸، تمرین ۱۸.۴]، داریم $\mathrm{soc}(R) = \mathrm{ann}(J(R))$. چون هر ایده‌آل ناصفر R شامل یک ایده‌آل مینیمال است، $\mathrm{ann}(J(R))$ یک ایده‌آل اساسی R است. بنابراین، با توجه به لم ۲.۳.۱۱، $J(R)$ با هر راس دیگر $\Omega(R)$ مجاور است. □

اندرسون و لوینگستون، در [۶]، گراف مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه‌ی جابه‌جایی R، که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، را معرفی و بررسی کردند. مجموعه‌ی راس‌های این گراف، مقسوم‌علیه‌های

صفر حلقه R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = \circ$. با توجه به [۶، قضیه ۳.۲]، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \in \{\circ, ۱, ۲, ۳\}$. در گزاره بعد، ارتباط بین قطرهای $\Omega(R)$ و $\Gamma(R)$ را بررسی می‌کنیم. قبل از آن، قضیه زیر ضروری است.

قضیه ۲۹.۲.۳. ([۲۹، قضیه ۶.۲]). فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \circ$ اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_۴$ یا $R \cong \mathbb{Z}_۲[x]/(x^۲)$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $|Z(R)| \geqslant ۳$ و به‌ازای تمامی عناصر متمایز $x, y \in Z(R)$ داشته باشیم $xy = \circ$.

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال و حداقل سه مقسوم‌علیه ناصفر باشد، یا $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد که $Z(R)^۲ \neq \circ$ و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های متمایز، پوچساز ناصفر داشته باشند.

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$ اگر و تنها اگر دو عضو متمایز $x, y \in Z(R)^*$ موجود باشند به طوریکه $\mathrm{ann}(x) \cap \mathrm{ann}(y) = \circ$، و R یک حلقه‌ی کاهش یافته با بیشتر از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد یا R غیر کاهش یافته باشد.

گزاره ۳۰.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \circ$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = \circ$.

(۲) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ و به عنوان حلقه‌ها داشته باشیم $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{\circ, ۱\}$.

(۳) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{۱, ۲, \infty\}$.

(۴) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = ۲$.

(۵) اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = \circ$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \in \{\circ, ۱\}$.

(۶) اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = ۱$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \in \{۱, ۲\}$.

(۷) اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = ۲$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \in \{۲, ۳\}$.

(۸) اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R))=\infty$ و به عنوان حلقه‌ها داشته باشیم $R\ncong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=2$.

برهان. (۱) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=0$. در اینصورت، $R\cong\mathbb{Z}_4$ یا $R\cong\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$. بنابراین، $\mathrm{diam}(\Omega(R))=0$.

(۲) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=1$. در اینصورت، چون $R\ncong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$، با توجه به [۶، قضیه ۸.۲]، به‌ازای هر $x,y\in Z(R)$ داریم $xy=0$. بنابراین، $\mathrm{diam}(\Omega(R))\in\{0,1\}$.

(۳) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=2$. در اینصورت، R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال و حداقل سه مقسوم‌علیه ناصفر است، یا $Z(R)$ یک ایده‌آل است با این شرط که $Z(R)^2\neq 0$ و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های متمایز، پوچساز ناصفر دارند. اکنون، اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، آنگاه با توجه به لم ۱.۲.۳، داریم $\mathrm{diam}(\Omega(R))=\infty$. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم که $Z(R)$ یک ایده‌آل است که $Z(R)^2\neq 0$ و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های متمایز، پوچساز ناصفر دارند. بنابراین، داریم $\mathrm{diam}(\Omega(R))\in\{1,2,\infty\}$.

(۴) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=3$. در اینصورت، دو عضو متمایز $x,y\in Z(R)^*$ موجودند به طوریکه $\mathrm{ann}(x)\cap\mathrm{ann}(y)=0$، و R یک حلقه‌ی کاهش یافته با بیشتر از دو ایده‌آل اول مینیمال است یا R غیر کاهش یافته است. اکنون، با توجه به لم ۱.۲.۳، داریم $\mathrm{diam}(\Omega(R))=2$.

(۵) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R))=0$. در اینصورت، $Z(R)$ یک ایده‌آل است با این شرط که $Z(R)^2=0$. بنابراین، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R))\in\{0,1\}$.

(۶) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R))=1$. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله ایده‌آل‌های اصلی کامل است. بنابراین، به آسانی مشاهده می‌شود که $Z(R)$ یک ایده‌آل است. اکنون، اگر به‌ازای یک $x\in Z(R)^*$ داشته باشیم $Z(R)=\mathrm{ann}(x)$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R))\in\{1,2\}$. در غیر اینصورت، اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل پوچساز نباشد، آنگاه $Z(R)^2\neq 0$. چون $\mathrm{diam}(\Omega(R))=1$، هر جفت از مقسوم‌علیه‌های متمایز، پوچساز ناصفر دارند. بنابراین، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=2$.

(۷) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R))=2$. در اینصورت، با توجه به [۶، قضیه ۸.۲]، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R))\in\{2,3\}$.

(۸) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R))=\infty$. در اینصورت، با توجه به لم ۱.۲.۳، R یک حلقه‌ی

کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. اکنون چون $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$، نتیجه می‌شود $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 2$. $\square$

نتیجه ۳.۲.۳۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 0$، در اینصورت داریم $\operatorname{diam}(\Omega(R[[x]])) = 1$.

برهان. فرض کنید $\operatorname{diam}(\Omega(R)) = 0$. در اینصورت، با توجه به گزاره قبل، نتیجه می‌شود $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \in \{0, 1\}$. اکنون، با توجه به [۱۴، قضیه ۳]، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = 1$. بنابراین، با توجه به گزاره قبل و گزاره ۳.۲.۲، داریم $\operatorname{diam}(\Omega(R[[x]])) = 1$. $\square$

در گزاره بعد، ارتباط بین عدد خوشه‌ای $\Gamma(R)$ و عدد استقلال $\Omega(R)$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳.۲.۳۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. اگر $\omega(\Gamma(R)) < \infty$ آنگاه داریم $\alpha(\Omega(R)) < \infty$.

برهان. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد و $\omega(\Gamma(R)) < \infty$. در اینصورت، با توجه به [۱۶، قضیه ۳.۷]، داریم $|\operatorname{Min}(R)| < \infty$. بنابراین، با توجه به نتیجه ۳.۲.۱۷، داریم $\alpha(\Omega(R)) < \infty$. $\square$

در ادامه، مکمل گراف $\Omega(R)$، که در [۳۳] معرفی و بررسی شده است، را مطالعه می‌کنیم. از نماد $\overline{\Omega(R)}$ برای نشان دادن مکمل گراف $\Omega(R)$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که با توجه به [۳۳، لم ۲.۱]، اگر R یک حلقه‌ی غیر کاهش یافته باشد و $|A(R)^*| \geqslant 2$، آنگاه $\overline{\Omega(R)}$ ناهمبند است. به‌علاوه، با توجه به [۳۳، گزاره ۲.۴]، اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد، آنگاه $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) \leqslant 3$. بنابراین، لم زیر را داریم.

لم ۳.۲.۳۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\overline{\Omega(R)}$ همبند است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد یا $|A(R)^*| = 1$.

در قضیه بعد، ارتباط بین همبندی گراف‌های $\overline{\Omega(R)}$، $\overline{\Omega(R[x])}$ و $\overline{\Omega(R[[x]])}$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۳۴. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $\overline{\Omega(R)}$ ناهمبند است یا $|A(R)^*| = 1$.

(۲) $\overline{\Omega(R[x])}$ ناهمبند است.

(۳) $\overline{\Omega(R[[x]])}$ ناهمبند است.

برهان. (۱) $\Longleftrightarrow$ (۲). فرض کنید $\overline{\Omega(R)}$ همبند باشد یا $|A(R)^*| = ۱$. در اینصورت، با توجه به لم ۳۳.۲.۳، R غیر کاهش یافته است. بنابراین، $R[x]$ غیر کاهش یافته است و درنتیجه $\overline{\Omega(R[x])}$ ناهمبند است.

برعکس، فرض کنید $\overline{\Omega(R[x])}$ ناهمبند باشد. در اینصورت، $R[x]$ غیر کاهش یافته است. درنتیجه با توجه به [۳۱، تمرین ۳۶.۱]، نتیجه می‌گیریم که R یک حلقه‌ی غیر کاهش یافته است. بنابراین، $\overline{\Omega(R)}$ ناهمبند است یا $|A(R)^*| = ۱$.

(۱) $\Longleftrightarrow$ (۳) به طور مشابه نتیجه می‌شود. $\square$

در ادامه، لم زیر ضروری است. توجه کنید که در لم زیر برهان کوتاهتری برای [۳۳، گزاره ۱۱.۲] ارائه می‌کنیم.

لم ۳۵.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، $\overline{\Omega(R)}$ کامل است اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل مینیمال R باشد یا $R \cong F_۱ \times F_۲$ که $F_۱$ و $F_۲$ میدان هستند.

برهان. فرض کنید $\overline{\Omega(R)}$ کامل باشد. اگر R غیر کاهش یافته باشد، آنگاه با توجه به نتیجه ۱۴.۲.۳، $Z(R)$ یک ایده‌آل مینیمال R است. بنابراین، فرض می‌کنیم R کاهش یافته باشد. فرض کنید I یک راس $\overline{\Omega(R)}$ باشد. چون $\overline{\Omega(R)}$ کامل است، I یک ایده‌آل مینیمال R است. بنابراین، با توجه به [۲۸، لم ۲۲.۱۰]، داریم $I = Re$ که $e^۲ = e \in R$. در اینصورت، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، $R \cong F_۱ \times F_۲$ که $F_۱$ و $F_۲$ میدان هستند.

قسمت برعکس بدیهی است. $\square$

با توجه به لم قبل، اگر $\mathrm{diam}(\overline{\Omega(R)}) = ۱$، آنگاه $R \cong F_۱ \times F_۲$ که $F_۱$ و $F_۲$ میدان هستند. به‌علاوه، آسان مشاهده می‌شود $\mathrm{diam}(\overline{\Omega(R[x])}) \neq ۰$ و $\mathrm{diam}(\overline{\Omega(R[[x]])}) \neq ۰$. اکنون، با توجه به [۳۳، گزاره ۴.۲] و قضیه ۳۴.۲.۳، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۳۶.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. در اینصورت

(۱) $\mathrm{diam}(\overline{\Omega(R[x])}) \in \{۲, ۳\}$.

(۲) $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[[x]])}) \in \{۲, ۳\}$.

در دو گزاره بعد، ارتباط بین قطرهای گراف‌های $\overline{\Omega(R)}$، $\overline{\Omega(R[x])}$ و $\overline{\Omega(R[[x]])}$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳۷.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. در اینصورت

(۱) $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) \in \{۱, ۲\}$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[x])}) = ۲$.

(۲) $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) = ۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[x])}) = ۳$.

برهان. (۱) فرض کنید $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) \in \{۱, ۲\}$. در اینصورت، با توجه به [۳۳، ملاحظه ۱۹.۲]، R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال دارد. فرض کنید $\operatorname{Min}(R) = \{P_۱, P_۲\}$. بنابراین، چون $(P_۱ \cap P_۲)[x] = P_۱[x] \cap P_۲[x] = ۰$، $P_۱[x]$ و $P_۲[x]$ ایده‌آل‌های اول مینیمال R هستند. بنابراین، با توجه به [۳۳، ملاحظه ۱۹.۲]، داریم $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[x])}) = ۲$.

برعکس، فرض کنید $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[x])}) = ۲$. در اینصورت، با توجه به [۳۳، ملاحظه ۱۹.۲]، $R[x]$ یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. اکنون، با توجه به [۳۱، تمرین ۴۳.۲]، R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است.بنابراین، با توجه به [۳۳، ملاحظه ۱۹.۲]، داریم $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) \in \{۱, ۲\}$.

(۲) از [۳۳، گزاره ۱۱.۲]، نتیجه ۳۶.۲.۳ و قسمت (۱) نتیجه می‌شود. □

به روشی مشابه آنچه در گزاره قبل بکار بردیم، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۳۸.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. در اینصورت

(۱) $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) \in \{۱, ۲\}$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[[x]])}) = ۲$.

(۲) $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R)}) = ۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\overline{\Omega(R[[x]])}) = ۳$.

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\overline{\Omega(R)}$ تک‌دور باشد.

گزاره ۳۹.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه با $|\operatorname{Min}(R)| < \infty$ باشد به طوریکه هر عضو از $R \setminus Z(R)$ یکال باشد. در اینصورت، $\overline{\Omega(R)}$ تک‌دور است اگر و تنها اگر $R \cong F_۱ \times F_۲ \times F_۳$ که F_iها میدان هستند.

برهان. فرض کنید $\overline{\Omega(R)}$ تک‌دور باشد. در اینصورت، چون $\overline{\Omega(R)}$ همبند است، R یک حلقه‌ی کاهش یافته است. اکنون، با توجه به [۲۳، نتیجه ۴.۲]، داریم $Z(R) = \bigcup_{P\in \mathrm{Min}(R)} P$. به‌علاوه، با توجه به [۲۵، قضیه ۸۱]، داریم $\mathrm{Min}(R) = \mathrm{Max}(R)$. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله‌ی راس‌ها از $\mathrm{Min}(R)$ کامل است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $|\mathrm{Min}(R)| \leqslant ۳$. اکنون، فرض کنید $|\mathrm{Min}(R)| = ۳$. در اینصورت، با توجه به [۳۱، تمرین ۶۰.۳]، داریم $R \cong F_۱ \times F_۲ \times F_۳$ که F_iها میدان هستند. بنابراین، به آسانی مشاهده می‌شود که $\overline{\Omega(R)}$ تک‌دور است. اکنون، فرض کنید $|\mathrm{Min}(R)| = ۲$. در اینصورت، با توجه به [۳۱، تمرین ۶۰.۳]، داریم $R \cong F_۱ \times F_۲$ که F_iها میدان هستند. بنابراین، $\overline{\Omega(R)}$ تک‌دور نیست که یک تناقض است.

قسمت برعکس بدیهی است. □

در گزاره بعد، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\overline{\Omega(R)}$ پیدا می‌کنیم.

گزاره ۴۰.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد به طوریکه $|\mathrm{Min}(R)| < \infty$. در اینصورت، $\mathrm{Min}(R)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\overline{\Omega(R)}$ است.

برهان. چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته با $|\mathrm{Min}(R)| < \infty$ است، به‌ازای هر $P \in \mathrm{Min}(R)$ داریم $\mathrm{ann}(P) \neq ۰$. فرض کنید $\mathrm{Min}(R) = \{P_۱, P_۲, \dots, P_n\}$. اکنون، فرض کنید I راسی از $\overline{\Omega(R)} \setminus \mathrm{Min}(R)$ باشد. چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، $P_i \in \mathrm{Min}(R)$ موجود است به طوریکه $I \nsubseteq P_i$. نشان می‌دهیم I با P_i در $\overline{\Omega(R)}$ مجاور است. بدین‌منظور، فرض کنید $y \in R^*$ به طوریکه $y(I + P_i) = ۰$. در اینصورت، چون R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، $y \in \bigcap_{j=۱, j\neq i}^{n} P_j$. بنابراین، $I \subseteq P_i$ که یک تناقض است. درنتیجه $\mathrm{ann}(I + P_i) = ۰$ و لذا I با P_i در $\overline{\Omega(R)}$ مجاور است. بنابراین، $\mathrm{Min}(R)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\overline{\Omega(R)}$ است. □

مثال ۴۱.۲.۳. فرض کنید $R = \mathbb{Q}[x, y]/(x^۲, y^۲)$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که R یک حلقه‌ی موضعی است و $J(R)$ پوچ‌توان است. بنابراین، به‌ازای هر راس $I \in \overline{\Omega(R)}$ داریم $\deg(I) = ۰$. در اینصورت، $A(R)^*$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\overline{\Omega(R)}$ است.

۳.۳ گراف مجموع زیرمدول‌های غیر وفادار یک مدول روی حلقه‌های برگشت‌پذیر

فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر با همانی ناصفر و M یک R-مدول چپ یکانی ناصفر باشد. گراف مجموع زیرمدول‌های غیر وفادار M، که با نماد $\Gamma_R(M)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده که مجموعه‌ی راس‌های آن تمام زیرمدول‌های ناصفر و غیر وفادار M است و دو راس متمایز A و B مجاورند اگر و تنها اگر $A+B$ غیر وفادار باشد [۱۰]. واضح است که اگر R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $M=R$، آنگاه $\Gamma_R(R)=\Omega(R)$. بنابراین، این گراف توسیعی از گراف معرفی شده در [۳۲] است. تمام مطالب این بخش برگرفته از [۱۰] است. توجه کنید که در تمام این بخش R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر است و M یک R-مدول چپ یکانی ناصفر است به طوریکه $\Gamma_R(M)$ شامل حداقل یک راس باشد. به عنوان اولین نتیجه، قطر این گراف را بررسی می‌کنیم. قبل از آن، لم زیر ضروری است.

لم ۱.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت $\mathrm{diam}(\Gamma_R(R))\in\{۰,۱,۲,\infty\}$.

برهان. اگر $|\Gamma_R(R)|=۱$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma_R(R))=۰$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که I و J دو راس نامجاور $\Gamma_R(R)$ باشند. چون به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $X\subseteq R$ داریم $\mathrm{ann}(X)=\mathrm{ann}(RXR)$، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم I و J ایده‌آل باشند. اگر $I\cap J\neq ۰$، آنگاه $I-I\cap J-J$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(R)$ است. بنابراین، فرض می‌کنیم $I\cap J=۰$. اکنون، دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید R کاهش یافته نباشد. در اینصورت، یک راس K از $\Gamma_R(R)$ موجود است به طوریکه $K^۲=۰$. نشان می‌دهیم K با I و J مجاور است. بدین‌منظور، فرض کنید K با J مجاور نباشد. در اینصورت، $\mathrm{ann}(K)\cap\mathrm{ann}(J)=۰$. درنتیجه $\mathrm{ann}(J)\cap K=۰$. بنابراین، $\mathrm{ann}(J)\subseteq\mathrm{ann}(K)$ که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $I-K-J$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(R)$ است.

حالت ۲) فرض کنید R کاهش یافته باشد. فرض کنید $x\in Z(R)\setminus(\mathrm{ann}(I)\cup\mathrm{ann}(J))$. در اینصورت، $y\in Z(R)^*$ موجود است به طوریکه $xy=۰$. نشان می‌دهیم $Rx\cap I\neq ۰$. بدین‌منظور، فرض کنید $Rx\cap I=۰$. بنابراین، $Rx\subseteq\mathrm{ann}(I)$ که یک تناقض است. بنابراین، $Rx\cap I\neq ۰$ و به طور مشابه $Rx\cap J\neq ۰$. اگر $y\in\mathrm{ann}(I)\cup\mathrm{ann}(J)$، آنگاه

$J - Rx \cap I - I$ یا $I - Rx \cap J - J$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(R)$ است. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم $y \in Z(R) \setminus (\mathrm{ann}(I) \cup \mathrm{ann}(J))$. چون $Ry \cap I \neq 0$ و $Ry \cap J \neq 0$، آنگاه $J - Rx \cap J - I$ یا $I - Rx \cap I - J$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(R)$ است. اکنون، فرض کنید $Z(R) = \mathrm{ann}(I) \cup \mathrm{ann}(J)$. چون R کاهش یافته است و $\mathrm{ann}(I) \cap \mathrm{ann}(J) = 0$، با توجه به [۲۷، لم ۵.۱] و گزاره ۱۲.۱.۳، دو ایده‌آل اول مینیمال P_1 و P_2 موجودند به طوریکه $\mathrm{ann}(I) = P_1$ و $\mathrm{ann}(J) = P_2$. این یعنی R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. بنابراین، هیچ مسیری بین I و J موجود نیست. درنتیجه $\Gamma_R(R)$ ناهمبند است. □

با توجه به برهان لم ۱.۳.۳، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۲.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، $\Gamma_R(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد.

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در اینصورت $\mathrm{diam}(\Gamma_R(M)) \in \{0, 1, 2, \infty\}$.

برهان. اگر $|\Gamma_R(M)| = 1$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma_R(M)) = 0$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم A و B دو راس نامجاور $\Gamma_R(M)$ باشند. چون A با B نامجاور است، $\mathrm{ann}(A) \cap \mathrm{ann}(B) = 0$. قرار می‌دهیم $I := \mathrm{ann}(A)$ و $J := \mathrm{ann}(B)$. اگر راس C از $\Gamma_R(M)$ موجود باشد با این شرط که $\mathrm{ann}(C) \nsubseteq Z(R)$، آنگاه $A - C - B$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(M)$ است. بنابراین، به‌ازای هر راس C از $\Gamma_R(M)$ فرض می‌کنیم $\mathrm{ann}(C) \subseteq Z(R)$. اگر $I \cap \mathrm{ann}(I) \neq 0$ یا $J \cap \mathrm{ann}(J) \neq 0$، آنگاه $A - IB - B$ یا $A - JA - B$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(M)$ است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $I \cap \mathrm{ann}(I) = 0$ و $J \cap \mathrm{ann}(J) = 0$. اکنون، اگر I با J در $\Gamma_R(R)$ مجاور باشد، آنگاه ایده‌آل ناصفر K از R موجود است به طوریکه $K(I + J) = 0$. در اینصورت، $A - KA - B$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(M)$ است. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم I و J در $\Gamma_R(R)$ مجاور نیستند. اکنون، دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید $\Gamma_R(R)$ همبند باشد. چون $\mathrm{diam}(\Gamma_R(R)) \leqslant 2$، یک راس S از $\Gamma_R(R)$ موجود است به طوریکه $I - S - J$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(R)$ است. بنابراین، داریم $U(I + S) = 0$ و $T(J + S) = 0$ که U و T دو ایده‌آل ناصفر R هستند. اکنون، اگر $TA \neq 0$ یا $UB \neq 0$، آنگاه

$A-TA-B$ یا $A-UB-B$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(M)$ است. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم $TA=0$ و $UB=0$. بنابراین، $A-SA-B$ یا $A-SB-B$ یک مسیر به طول دو در $\Gamma_R(M)$ است.

حالت ۲) فرض کنید $\Gamma_R(R)$ ناهمبند باشد. بنابراین، با توجه به نتیجه ۲.۳.۳، R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است. اکنون، چون به‌ازای هر راس C از $\Gamma_R(M)$ داریم $\mathrm{ann}(C) \subseteq Z(R)$، با توجه به [۲۷، لم ۵.۱] و گزاره ۱۲.۱.۳، نتیجه می‌گیریم که هیچ مسیری بین A و B در $\Gamma_R(M)$ موجود نیست. بنابراین، $\Gamma_R(M)$ ناهمبند است. $\square$

با توجه به برهان قضیه ۳.۳.۳، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۴.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در اینصورت:

(۱) اگر $\Gamma_R(M)$ ناهمبند باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است.

(۲) فرض کنید $\mathrm{ann}(M)=0$. اگر $T_R(M) \subseteq Z(R)$ و R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، آنگاه $\Gamma_R(M)$ ناهمبند است.

در ادامه، کمر این گراف مشخص می‌شود.

قضیه ۵.۳.۳. اگر R یک حلقه و M یک R-مدول باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma_R(M)) \in \{3, \infty\}$.

برهان. فرض کنید N یک راس از $\Gamma_R(M)$ باشد. اگر N شامل دو زیرمدول غیر بدیهی (یعنی، متمایز از N و 0) باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma_R(M))=3$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که هر راس از $\Gamma_R(M)$ شامل حداکثر یک زیرمدول غیر بدیهی (یعنی، متمایز از خود راس و 0) است. ادعا می‌کنیم در این حالت $\Gamma_R(M)$ شامل دور نیست. بدین‌منظور، فرض کنید $A_1-A_2-\cdots-A_n-A_1$ یک دور در $\Gamma_R(M)$ باشد. اکنون، چون A_1 با A_2 مجاور است، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم $A_1 \subseteq A_2$. در اینصورت، چون A_2 با A_3 مجاور است، داریم $A_3 \subseteq A_2$ یا $A_2 \subseteq A_3$ که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{gr}(\Gamma_R(M)) \in \{3, \infty\}$. $\square$

اکنون، حالتی بررسی می‌شود که عدد خوشه‌ای این گراف متناهی باشد.

گزاره ۶.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد به طوریکه همه‌ی ایده‌آل‌های چپ سره آن مشمول در $Z(R)$ باشند. فرض کنید M یک R-مدول وفادار باشد به طوریکه به‌ازای هر $x \in M$ داشته باشیم $\mathrm{ann}(Rx) = \mathrm{ann}(x)$. اگر $\omega(\Gamma_R(M)) < \infty$، آنگاه $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است.

برهان. فرض کنید A یک راس از $\Gamma_R(M)$ باشد. چون $\omega(\Gamma_R(M)) < \infty$، A یک R-مدول آرتینی است. بنابراین، $x \in M^*$ موجود است به طوریکه Rx یک زیرمدول ساده‌ی M باشد. اکنون، با توجه به یکریختی مدولی $R/\mathrm{ann}(x) \cong Rx$ نتیجه می‌شود که هر زیرمدول ساده‌ی M یک راس از $\Gamma_R(M)$ است. نشان می‌دهیم که تعداد زیرمدول‌های ساده‌ی M متناهی است. بدین‌منظور، فرض کنید $\{Rx_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی از زیرمدول‌های ساده‌ی M باشد. در اینصورت، به‌ازای هر i قرار می‌دهیم $N_i = \mathrm{ann}(x_i)$. واضح است که N_iها ایده‌آل‌های دوطرفه هستند و به عنوان ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال هستند. اکنون، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید Rx_1 با Rx_2 مجاور نباشد. در اینصورت، $N_1 \cap N_2 = 0$. بنابراین، R یک حلقه کاهش یافته با دو ایده‌آل اول است. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $\Gamma_R(M)$ شامل یک خوشه نامتناهی است که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که تعداد زیرمدول‌های ساده‌ی M متناهی است. فرض کنید $\{Rx_1, Rx_2, \ldots, Rx_n\}$ مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های ساده‌ی M باشند و به ازای هر i داشته باشم $N_i = \mathrm{ann}(x_i)$. نشان می‌دهیم $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$. برای مشاهده، فرض کنید $r \in Z(R)$. در اینصورت، $s \in Z(R)^*$ موجود است به طوریکه $rs = 0$. چون M وفادار است، $y \in M^*$ موجود است به طوریکه $sy \neq 0$. بنابراین، $r \in \mathrm{ann}(Rsy)$. اکنون، با توجه به مفروضات به‌ازای حداقل یک i داریم $r \in N_i$. درنتیجه $Z(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_i$. درنتیجه، با توجه به ویژگی حلقه R داریم $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$. اکنون، نشان می‌دهیم N_iها کاملاً اول هستند. بدین‌منظور، فرض کنید $ab \in N_i$. در اینصورت، $abRx_i = 0$. اگر $bRx_i \neq 0$، آنگاه با توجه به مفروضات داریم $Rbx_i = Rx_i$. بنابراین، $a \in N_i$ و درنتیجه N_i کاملاً اول است. اکنون، با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، N_iها تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R هستند (شاید با تکرار). در اینصورت با توجه به [۲۴، نتیجه ۲۷.۲ از فصل ۳]، به عنوان حلقه‌ها داریم $R/J(R) \cong R/N_1 \times R/N_2 \times \cdots \times R/N_t$، که $t \leqslant n$. بنابراین، $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است. $\square$

نتیجه ۷.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه با $\mathrm{soc}({}_RR) \neq 0$ باشد و همه‌ی ایده‌آل‌های چپ سره R مشمول در $Z(R)$ باشند. فرض کنید M یک R-مدول متناهی مولد باشد به طوریکه به‌ازای هر

$x \in M$ داشته باشیم $\mathrm{ann}(Rx) = \mathrm{ann}(x)$. اگر $\omega(\Gamma_R(M)) < \infty$، آنگاه M آرتینی است.

برهان. اگر M یک R-مدول وفادار نباشد، آنگاه $\Gamma_R(M)$ متناهی است و درنتیجه M آرتینی است. بنابراین، فرض می‌کنیم که M وفادار باشد. چون $\mathrm{soc}(R) \neq \circ$ و $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است، با توجه به [۲۱، گزاره ۱۴.۳]، داریم $\mathrm{ann}(J(R)) \neq \circ$. اکنون، دنباله دقیق زیر از R-مدول‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$\circ \longrightarrow J(R)M \longrightarrow M \longrightarrow M/J(R)M \longrightarrow \circ.$$

چون $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است، با توجه به [۲۸، گزاره ۲۱.۱]، $M/J(R)M$ به عنوان $R/J(R)$-مدول آرتینی است. بنابراین، $M/J(R)M$ به عنوان R-مدول آرتینی است. از طرف دیگر، چون $\omega(\Gamma_R(M)) < \infty$، $J(R)M$ به عنوان R-مدول آرتینی است. بنابراین، M یک R-مدول آرتینی است. $\square$

در گزاره بعد، حالتی را مطالعه می‌کنیم که $\omega(\Gamma_R(R)) < \infty$. قبل از آن، لم زیر ضروری است. توجه داشته باشید در لم زیر R الزاماً حلقه‌ی برگشت‌پذیر نیست.

لم ۸.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی آبلی و آرتینی چپ باشد. در اینصورت، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه‌های موضعی و آرتینی چپ هستند.

برهان. فرض کنید R یک حلقه‌ی آبلی و آرتینی چپ باشد. دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:
حالت ۱) فرض کنید R هیچ عضو خودتوان غیر بدیهی نداشته باشد. در اینصورت، با توجه به [۲۸، نتیجه ۱۹.۱۹]، R یک حلقه‌ی موضعی و آرتینی چپ است.
حالت ۲) فرض کنید R حداقل یک عضو خودتوان غیر بدیهی مثل e داشته باشد. چون e یک عضو مرکزی است، Re ایده‌آلی از R است. بنابراین، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، به عنوان حلقه‌ها نتیجه می‌شود $R \cong R_1 \times R_2$ که R_1 و R_2 حلقه‌های آرتینی چپ هستند. اکنون، به روشی مشابه (در تعداد متناهی مرحله) نتیجه می‌گیریم که به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه‌های موضعی و آرتینی چپ هستند. $\square$

گزاره ۹.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه با $Z(R) \neq \circ$ باشد. در اینصورت، $\omega(\Gamma_R(R)) < \infty$ اگر و تنها اگر تعداد ایده‌آل‌های چپ R متناهی باشد.

برهان. فرض کنید $\omega(\Gamma_R(R)) < \infty$ فرض کنید I یک راس از $\Gamma_R(R)$ باشد. در اینصورت، I شامل تعداد متناهی از ایده‌آل‌های چپ R است. بنابراین، I به عنوان R-مدول چپ آرتینی است. بنابراین، می‌توان فرض کرد Rx، که $x \in I$، ایده‌آل چپ مینیمال R باشد. در اینصورت، $\mathrm{ann}(x)$ ایده‌آل چپ ماکسیمال R است. درنتیجه $\mathrm{ann}(x)$ به عنوان R-مدول چپ آرتینی است. از طرفی، به عنوان مدول‌ها $R/\mathrm{ann}(x) \cong Rx$ و لذا $R/\mathrm{ann}(x)$ به عنوان R-مدول چپ آرتینی است. بنابراین، R یک حلقه‌ی آرتینی چپ است. اکنون، با توجه به لم ۸.۳.۳، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه‌های موضعی و آرتینی چپ هستند. با توجه به [۲۸، قضیه ۱۲.۴]، نتیجه می‌شود که به ازای هر i تعداد ایده‌آل‌های چپ R_i متناهی است. بنابراین، تعداد ایده‌آل‌های چپ R متناهی است.

قسمت برعکس بدیهی است. □

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که درجه‌ی یک راس از $\Gamma_R(M)$ متناهی باشد.

گزاره ۱۰.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد به طوریکه هر زیرمدول ساده جمعوند مستقیم زیرمدول‌های اساسی سره نباشد. اگر $\Gamma_R(M)$ شامل یک راس از درجه‌ی متناهی مثل A باشد، آنگاه A جمع مستقیم تعداد متناهی R-مدول ساده است. به‌ویژه، اگر $A \subsetneq M$، آنگاه A یک جمعوند مستقیم سره M است.

برهان. فرض کنید A یک راس از $\Gamma_R(M)$ باشد به طوریکه $\deg(A) < \infty$. بنابراین، A شامل تعداد متناهی زیرمدول است. فرض کنید $\{Rx_i\}_{i=1}^{n}$ مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های ساده A باشد. نشان می‌دهیم $A = \mathrm{soc}(A)$. بدین منظور، فرض کنید Λ مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های M باشد به طوریکه آن زیرمدول‌ها شامل x_1 نباشند. در اینصورت، با توجه به لم زورن، Λ شامل یک عضو ماکسیمال مثل B است. بنابراین، $M = Rx_1 \oplus B$. به روشی مشابه، نتیجه می‌شود $M = \mathrm{soc}(A) \oplus C$، که C زیرمدول M است. اکنون، فرض کنید $A \cap C \neq 0$. در اینصورت، چون $\deg(A) < \infty$، $A \cap C$ شامل یک زیرمدول ساده است که یک تناقض است. بنابراین، با توجه به قانون مدولی داریم $A = \mathrm{soc}(A)$. □

گزاره ۱۱.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد به طوریکه $R/J(R)$ یک حلقه‌ی نیم‌ساده باشد. فرض کنید M یک R-مدول باشد به طوریکه هر زیرمدول ساده جمعوند مستقیم زیرمدول‌های اساسی سره نباشد. اگر $\Gamma_R(M)$ شامل یک راس از درجه‌ی متناهی باشد به طوریکه آن راس با برخی راس‌ها

مجاور نباشد، آنگاه به عنوان حلقه‌ها $R \cong K \times S$ که K یک حلقه‌ی بخشی و S یک حلقه‌ی کاهش یافته است.

برهان. فرض کنید $J(R) = 0$. در اینصورت، R یک حلقه‌ی نیم‌ساده است. درنتیجه با توجه به لم ۳.۸.۳، حکم بدیهی است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $J(R) \neq 0$. چون $\Gamma_R(M)$ شامل دو راس نامجاور است، M وفادار است. فرض کنید A یک راس از $\Gamma_R(M)$ باشد به طوریکه $\deg(A) < \infty$ و A با یک راس مجاور نباشد. در اینصورت، M شامل یک زیرمدول غیر وفادار مثل $A \subseteq B$ است که B به عنوان یک زیرمدول غیر وفادار ماکسیمال است. بنابراین، $\deg(B) < \infty$ و B با یک راس از $\Gamma_R(M)$ مجاور نیست. اکنون، با توجه به گزاره قبل، B جمع مستقیم تعداد متناهی R-مدول ساده است. درنتیجه، با توجه به [۲۱، قضیه ۱۷.۲]، داریم $J(R) \subseteq \operatorname{ann}(B)$. چون $M \neq B$، با توجه به گزاره قبل، B یک جمعوند مستقیم سره M است. فرض کنید $M = B \oplus C$ که C زیرمدول M است. چون B با یک راس مجاور نیست، $\operatorname{ann}(J(R)) \neq 0$. اگر R شامل ایده‌آلی ناصفر مثل I باشد به طوریکه $I^2 = 0$، آنگاه یا $IC = 0$ یا B با IC مجاور است که یک تناقض است، زیرا $B \cap C = 0$ و B به عنوان یک زیرمدول غیر وفادار ماکسیمال است. در نتیجه R باید کاهش یافته باشد. چون $R/J(R)$ یک حلقه‌ی نیم‌ساده است، با توجه به [۲۱، گزاره ۱۴.۳]، $\operatorname{soc}(R) \neq 0$. بنابراین، با توجه به [۲۸، لم ۲۲.۱۰]، می‌توانیم فرض کنیم $J = Re$، که $e^2 = e \in R$، ایده‌آل چپ مینیمال R باشد. در اینصورت، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، به عنوان حلقه‌ها $R \cong K \times S$ که K یک حلقه‌ی بخشی و S یک حلقه‌ی کاهش یافته است. $\square$

مثال ۱۲.۳.۳. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که R یک حلقه‌ی نیم‌ساده است. به علاوه، هر زیرمدول ساده‌ی R جمعوند مستقیم زیرمدول‌های اساسی سره نیست. از طرفی، $\Gamma_R(R)$ شامل یک راس از درجه‌ی متناهی است به طوریکه با یک راس مجاور نیست.

در گزاره بعد، عدد استقلال $\Gamma_R(M)$ را مطالعه می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد به طوریکه $|\operatorname{Min}(R)| < \infty$، و M یک R-مدول وفادار باشد. در اینصورت، داریم $\alpha(\Gamma_R(M)) = |\operatorname{Min}(R)|$.

برهان. فرض کنید $|\operatorname{Min}(R)| = 1$. در اینصورت، R یک حوزه است و مشاهده می‌شود که $\alpha(\Gamma_R(M)) = |\operatorname{Min}(R)| = 1$. بنابراین، فرض کنید $\operatorname{Min}(R) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ که

$n \geqslant ۲$. نشان می‌دهیم $\operatorname{ann}(P_i) = \operatorname{ann}(P_iM)$ که $i = ۱, ۲, \ldots, n$. بدین‌منظور، فرض کنید $x \in \operatorname{ann}(P_iM) \setminus \operatorname{ann}(P_i)$. اکنون، چون $xP_i \neq ۰$ و M یک R-مدول وفادار است، $xP_iM = ۰$ که یک تناقض است. ادعا می‌کنیم $\Lambda = \{P_۱M, P_۲M, \ldots, P_nM\}$ یک مجموعه‌ی مستقل در $\Gamma_R(M)$ است. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید $P_۱M$ با $P_۲M$ مجاور باشد. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $\operatorname{ann}(P_۱) \cap \operatorname{ann}(P_۲) \neq ۰$. بنابراین، $\bigcap_{i=۱}^{n} P_i \neq ۰$ که یک تناقض است. درنتیجه $\alpha(\Gamma_R(M)) \geqslant |\operatorname{Min}(R)|$. اکنون، فرض کنید $\Lambda_۱ = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_{n+۱}\}$ یک مجموعه‌ی مستقل با $n + ۱$ راس در $\Gamma_R(M)$ باشد. در اینصورت، به‌ازای هر دو اندیس متمایز i و j داریم $\operatorname{ann}(A_i) \cap \operatorname{ann}(A_j) = ۰$. بنابراین، آسان مشاهده می‌شود که $P \in \operatorname{Min}(R)$ و دو اندیس متمایز i و j داریم به طوریکه $\operatorname{ann}(A_i) \nsubseteq P$ و $\operatorname{ann}(A_j) \nsubseteq P$ که یک تناقض است. درنتیجه $\alpha(\Gamma_R(M)) = |\operatorname{Min}(R)|$. $\square$

۴.۳ گراف ایده‌آل پوچساز یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی با همانی ناصفر باشد. گراف ایده‌آل پوچساز وابسته به R که با نماد $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده، که مجموعه راس‌های آن تمام ایده‌آل‌های غیر بدیهی R (متمایز از ۰ و R) می‌باشد و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر $I \cap \operatorname{ann}(J) \neq ۰$ یا $J \cap \operatorname{ann}(I) \neq ۰$. این گراف، در [۷] معرفی و بررسی شده است. در ضمن، این گراف در فصل قبل یادآوری شد. اکنون، مفهوم گراف ایده‌آل پوچساز را به یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر توسیع می‌دهیم. تمام مطالب این بخش برگرفته از [۹] است.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر با همانی ناصفر باشد. گراف ایده‌آل پوچساز وابسته به R که با نماد $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده، که مجموعه‌ی راس‌های آن تمام ایده‌آل‌های چپ سره‌ی ناصفر و تمام ایده‌آل‌های راست سره‌ی ناصفر R می‌باشد و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر داشته باشیم $I \cap (\operatorname{l.ann}(J) \cup \operatorname{r.ann}(J)) \neq ۰$ یا $J \cap (\operatorname{l.ann}(I) \cup \operatorname{r.ann}(I)) \neq ۰$.

ملاحظه ۲.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر با همانی ناصفر باشد. مطابق با حالت جابجایی، فرض می‌کنیم R حلقه‌ای است به طوریکه هر پوچساز راست (یا چپ) روی R یک ایده‌آل R

باشد. در اینصورت، با توجه به [۲۶، لم ۱.۱]، R باید یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی باشد. بنابراین، در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی است.

تعریف یال‌های گراف $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ در حالت ناجابجایی به گونه‌ای درنظر گرفته شده است که بیشترین ارتباط را با حالت جابجایی داشته باشد. به عنوان نمونه، فرض کنید دو راس متمایز I و J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر داشته باشیم $I \cap (\mathrm{l.ann}(J) \cap \mathrm{r.ann}(J)) \neq 0$ یا $J \cap (\mathrm{l.ann}(I) \cap \mathrm{r.ann}(I)) \neq 0$، و مثال زیر، گزاره ۱۰.۱.۱ و [۷، قضیه ۱۰] را ببینید.

مثال ۳.۴.۳. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_2\langle a, b\rangle/\langle a^2, ab, b^2\rangle$ که $\mathbb{Z}_2\langle a, b\rangle$ جبر شرکت‌پذیر آزاد، با یک، روی $\mathbb{Z}_2$ با دو مجهول است و $\langle a^2, ab, b^2\rangle$ ایده‌آل تولید شده به وسیله‌ی a^2، ab و b^2 است. در اینصورت، با توجه به [۳۰، صفحه ۳]، R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی است، اما R برگشت‌پذیر نیست. مشاهده می‌شود که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است. همچنین، $I = \overline{a}R$ و $J = R\overline{b}$ دو راس متمایز هستند به طوریکه $I \cap (\mathrm{l.ann}(J) \cap \mathrm{r.ann}(J)) = \overline{0}$ و $J \cap (\mathrm{l.ann}(I) \cap \mathrm{r.ann}(I)) = \overline{0}$.

در این بخش، ارتباط بین خواص جبری R و خواص گرافی $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ را بررسی می‌کنیم. به‌علاوه، برخی خواص ترکیبیاتی $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مانند عدد احاطه‌گری و عدد خوشه‌ای مطالعه می‌شود. به عنوان اولین نتیجه، گزاره زیر را داریم که در ادامه مفید خواهد بود.

گزاره ۴.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر I و J دو راس نامجاور $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند، آنگاه $N(I) = N(J)$.

برهان. فرض کنید I و J دو راس نامجاور $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند. همچنین، به خلف فرض کنید $K \in N(I) \setminus N(J)$. حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید I و J ایده‌آل‌های چپ باشند. چون I با J مجاور نیست، داریم $I \cap \mathrm{l.ann}(J) = 0$، $I \cap \mathrm{r.ann}(J) = 0$، $J \cap \mathrm{l.ann}(I) = 0$ و $J \cap \mathrm{r.ann}(I) = 0$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $\mathrm{l.ann}(I) = \mathrm{l.ann}(J)$، $\mathrm{r.ann}(J) \subseteq \mathrm{l.ann}(I)$ و $\mathrm{r.ann}(I) \subseteq \mathrm{l.ann}(J)$. به‌علاوه، چون I با K مجاور است، مشاهده می‌شود $I \cap (\mathrm{l.ann}(K) \cup \mathrm{r.ann}(K)) \neq 0$ یا $K \cap (\mathrm{l.ann}(I) \cup \mathrm{r.ann}(I)) \neq 0$. اکنون، دو زیرحالت زیر را درنظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱) فرض کنید K یک ایده‌آل چپ باشد. چون K با J مجاور نیست، داریم $\mathrm{l.ann}(K) = \mathrm{l.ann}(J)$، $\mathrm{r.ann}(J) \subseteq \mathrm{l.ann}(K)$ و $\mathrm{r.ann}(K) \subseteq \mathrm{l.ann}(J)$. اکنون، مشاهده

می‌شود $K\cap(\mathrm{l.ann}(I)\cup\mathrm{r.ann}(I))=0$ و $I\cap(\mathrm{l.ann}(K)\cup\mathrm{r.ann}(K))=0$ که یک تناقض است.

زیرحالت ۲) فرض کنید K یک ایده‌آل راست باشد. چون K با J مجاور نیست، داریم $\mathrm{l.ann}(J)=\mathrm{r.ann}(K)$، $\mathrm{r.ann}(J)\subseteq\mathrm{r.ann}(K)$ و $\mathrm{l.ann}(K)\subseteq\mathrm{l.ann}(J)$. اکنون، داریم $K\cap(\mathrm{l.ann}(I)\cup\mathrm{r.ann}(I))=0$ و $I\cap(\mathrm{l.ann}(K)\cup\mathrm{r.ann}(K))=0$ که یک تناقض است.

حالت‌های دیگر به طور مشابه نتیجه می‌شوند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $N(I)=N(J)$. $\square$

نتیجه ۵.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد.

(۱) اگر S یک زیرگراف القایی از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد، آنگاه $\mathrm{diam}(S)\in\{0,1,2,\infty\}$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R))\in\{0,1,2,\infty\}$.

(۳) $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ ناهمبند یا تهی است اگر و تنها اگر R یک حوزه باشد.

برهان. (۱) اگر $|S|\in\{0,1\}$، آنگاه $\mathrm{diam}(S)=0$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم I و J دو راس نامجاور در S باشند. در اینصورت، $N_S(I)=N_S(J)$. اگر $N_S(I)=\emptyset$، آنگاه S ناهمبند است و لذا $\mathrm{diam}(S)=\infty$. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم $Z\in N_S(I)$. بنابراین، $I-Z-J$ یک مسیر به طول دو در S است. اکنون، با توجه به آنچه بیان شد، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{diam}(S)\in\{0,1,2,\infty\}$.

(۲) از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

(۳) فرض کنید $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ تهی باشد. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که R یک حلقه‌ی بخشی است. بنابراین، فرض می‌کنیم I و J دو راس متمایز و نامجاور در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند. درنتیجه، با توجه به گزاره ۴.۴.۳، $N(I)=N(J)=\emptyset$. نشان می‌دهیم $\mathrm{l.ann}(I)\cup\mathrm{r.ann}(I)=\mathrm{l.ann}(J)\cup\mathrm{r.ann}(J)=0$. بدین‌منظور، فرض کنید $\mathrm{l.ann}(I)\cup\mathrm{r.ann}(I)\neq 0$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم که $\mathrm{l.ann}(I)\neq 0$. چون I هیچ همسایه‌ای در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ ندارد، $\mathrm{l.ann}(I)=I$. همچنین، $J\cap I=0$. بنابراین، $JI=0$ یا $IJ=0$. در اینصورت، I و J مجاورند که یک تناقض است. بنابراین، $\mathrm{l.ann}(I)\cup\mathrm{r.ann}(I)=0$. به طور مشابه، نتیجه می‌شود که $\mathrm{l.ann}(J)\cup\mathrm{r.ann}(J)=0$. اکنون، اگر K یک راس از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد به طوریکه $\mathrm{l.ann}(K)\cup\mathrm{r.ann}(K)\neq 0$، آنگاه به آسانی مشاهده

می‌شود که $I-K-J$ یک مسیر به طول دو بین I و J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که R یک حوزه است. □

در ادامه، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف r-بخشی کامل باشد. قبل از آن، دو لم زیر ضروری هستند.

لم ۶.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $S_۱$ و $S_۲$ دو مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال متمایز در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند، آنگاه $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$.

برهان. به خلف فرض کنید $I \in S_۱ \cap S_۲$. در اینصورت، با توجه به گزاره **۴.۴.۳**، به‌ازای هر راس $J \in S_۱ \cup S_۲$ داریم $N(I) = N(J)$. چون $S_۱$ و $S_۲$ دو مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال متمایز در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ هستند، دو راس مجاور A و B در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ موجودند به طوریکه $A \in S_۱$ و $B \in S_۲$. در اینصورت، I با A یا B مجاور است که غیرممکن است. بنابراین، $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$. □

لم ۷.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. فرض کنید $S_۱$ و $S_۲$ دو مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال متمایز در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند. اگر $I \in S_۱$ و $J \in S_۲$، آنگاه I با J مجاور است.

برهان. فرض کنید $I \in S_۱$ و $J \in S_۲$ که $S_۱$ و $S_۲$ دو مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال متمایز در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ هستند. همچنین، به خلف فرض کنید I با J مجاور نباشد. در اینصورت، با توجه به گزاره ۳.۴.۴، داریم $N(I) = N(J)$. بنابراین، $S_۱ \cup \{J\}$ یک مجموعه‌ی مستقل در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است که یک تناقض است. درنتیجه I با J مجاور است. □

نتیجه ۸.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد و $r \geqslant ۲$ یک عدد صحیح باشد. اگر مجموعه‌ی راسی $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ برابر اجتماع r مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال باشد، آنگاه $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف r-بخشی کامل است.

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل باشد.

گزاره ۹.۴.۳. فرض کنید $R = R_۱ \times R_۲$ که R_iها حلقه هستند. اگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل باشد، آنگاه به‌ازای $i = ۱, ۲$، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_i)$ کامل است.

برهان. فرض کنید $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل باشد. اگر به‌ازای $i = ۱, ۲$ داشته باشیم $|\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_i)| \in \{۰, ۱\}$، آنگاه به‌ازای $i = ۱, ۲$، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_i)$ کامل است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم I و J دو راس متمایز $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ باشند. در اینصورت، $I \times ۰$ و $J \times ۰$ دو راس متمایز $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ هستند. اکنون، چون $I \times ۰$ و $J \times ۰$ در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاورند، نتیجه می‌گیریم که I و J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ مجاورند. بنابراین، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ کامل است. به طور مشابه، مشاهده می‌شود که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۲)$ کامل است. $\square$

به یاد آورید که یک اول پوچساز برای یک R-مدول چپ (راست) M یک ایده‌آل اول P از R است به طوریکه با پوچساز یک زیرمدول ناصفر از M برابر باشد. یک اول وابسته از M یک اول پوچساز P است که با پوچساز یک زیرمدول ناصفر N از M برابر باشد با این شرط که P با پوچساز هر زیرمدول ناصفر از N برابر باشد. مجموعه‌ی تمام اول‌های پوچساز از M با نماد $\mathrm{Ass}(M)$ نشان داده می‌شود.

لم ۱۰.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد که یک حوزه نیست.

(۱) اگر R نوتری چپ باشد، آنگاه $Z_\ell(R) = \bigcup_{i\in\Theta} P_i$ که Θ یک مجموعه‌ی متناهی است و هر P_i یک ایده‌آل کاملاً اول و پوچساز چپ یک عضو ناصفر از $Z_r(R)$ است.

(۲) اگر R نوتری راست باشد، آنگاه $Z_r(R) = \bigcup_{i\in\Theta} P_i$ که Θ یک مجموعه‌ی متناهی است و هر P_i یک ایده‌آل کاملاً اول و پوچساز راست یک عضو ناصفر از $Z_\ell(R)$ است.

(۳) اگر R نوتری باشد، آنگاه $Z(R) = \bigcup_{i\in\Theta} P_i$ که Θ یک مجموعه‌ی متناهی است و هر P_i یک ایده‌آل کاملاً اول و پوچساز چپ یا راست یک عضو ناصفر از $Z(R)$ است.

برهان. (۱) فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری چپ باشد و $x \in Z_\ell(R)$. در اینصورت، $y \in Z_r(R)^*$ موجود است به طوریکه $xy = ۰$. قرار می‌دهیم

$$\Sigma := \{\mathrm{l.ann}(a) \mid a \in R^* \text{ و } x \in \mathrm{l.ann}(a)\}.$$

اکنون، چون R یک حلقه‌ی نوتری چپ است، Σ شامل یک عضو ماکسیمال مانند $P = \mathrm{l.ann}(b)$، که $b \in R^*$، است. بنابراین، داریم $x \in P$. نشان می‌دهیم P کاملاً اول است. بدین‌منظور، فرض کنید $rs \in P$. در اینصورت، اگر $sb \neq ۰$، آنگاه چون R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی است، آسان مشاهده می‌شود که $r \in P = \mathrm{l.ann}(sb) = \mathrm{l.ann}(b)$. بنابراین، P کاملاً اول است. همچنین، با توجه به [۲۱، گزاره ۱۲.۲]، داریم $P \in \mathrm{Ass}(R)$ (R به عنوان یک مدول چپ روی خودش درنظر می‌گیریم). اکنون،

با توجه به [۲۱، تمرین ۲J]، داریم $|\mathrm{Ass}(R)| < \infty$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم $Z_\ell(R) = \bigcup_{i\in\Theta} P_i$ که Θ یک مجموعه‌ی متناهی است و هر P_i یک ایده‌آل کاملاً اول و پوچساز چپ یک عضو ناصفر از $Z_r(R)$ است.

(۲) با بکاربردن روشی مشابه قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

(۳) چون $Z(R) = Z_\ell(R) \cup Z_r(R)$ از قسمت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. □

گزاره ۱۱.۴.۳. فرض کنید $R = R_۱ \times R_۲$ که R_iها حلقه‌های نوتری هستند. اگر به‌ازای $i = ۱, ۲$، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_i)$ کامل باشد، آنگاه $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است.

برهان. فرض کنید به‌ازای $i = ۱, ۲$، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_i)$ کامل باشد. فرض کنید I و J دو راس متمایز از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند. بنابراین، $I = I_۱ \times I_۲$ و $J = J_۱ \times J_۲$ که به‌ازای $i = ۱, ۲$، I_i و J_i ایده‌آل‌های یک‌طرفه در R_i هستند. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید $I_۱$ و $J_۱$ متمایز باشند. اکنون، سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید $I_۱ = ۰$ یا $J_۱ = ۰$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که I با J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاور است.

حالت ۲) فرض کنید $I_۱ = R_۱$ یا $J_۱ = R_۱$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید $I_۱ = R_۱$. نشان می‌دهیم به‌ازای تمام راس‌های $K_۱$ از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ داریم $K_۱ \subseteq Z(R_۱)$. بدین‌منظور، فرض کنید $L_۱$ راسی از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ باشد به طوریکه $L_۱ \nsubseteq Z(R_۱)$. فرض کنید $b \in L_۱ \setminus Z(R_۱)$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم $R_۱ b \neq R_۱$. در اینصورت، $R_۱ b$ با $R_۱ b^۲$ در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ مجاور نیست، که یک تناقض است. بنابراین، به‌ازای تمام راس‌های $K_۱$ از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ داریم $K_۱ \subseteq Z(R_۱)$. اکنون با توجه به لم قبل و گزاره ۱۲.۱.۳، داریم $\mathrm{l.ann}(J_۱) \cup \mathrm{r.ann}(J_۱) \neq ۰$. در اینصورت، I با J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاورند.

حالت ۳) فرض کنید $I_۱$ و $J_۱$ ایده‌آل‌های یک‌طرفه غیر بدیهی در $R_۱$ باشند. در اینصورت، چون $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_۱)$ کامل است، I با J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاورند. □

با توجه به دو گزاره قبل، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۲.۴.۳. فرض کنید $R = R_۱ \times R_۲$ که R_iها حلقه‌های نوتری هستند. در اینصورت، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است اگر و تنها اگر به‌ازای $i = ۱, ۲$، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R_i)$ کامل باشد.

در گزاره بعد، ارتباط بین گراف‌های $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ و $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R/J(R))$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. اگر $\alpha(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) < \infty$، در اینصورت $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R/J(R))$ یک گراف کامل است.

برهان. فرض کنید $x \in R \setminus Z(R)$. نشان می‌دهیم x یکال است. بدین‌منظور، فرض کنید $Rx \neq R$. در اینصورت، راس‌های مجموعه‌ی $\{Rx^i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی مستقل در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ تشکیل می‌دهند که یک تناقض است با فرض $\alpha(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) < \infty$. بنابراین، به‌ازای هر $x \in R \setminus Z(R)$، x یکال است. اکنون، اگر $Z(R) = 0$ به وضوح $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R/J(R))$ کامل است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $Z(R) \neq 0$. اکنون، با توجه به لم ۱۰.۴.۳، $Z(R) = \bigcup_{i\in\Theta} P_i$ که Θ یک مجموعه‌ی متناهی است و هر P_i یک ایده‌آل کاملاً اول و پوچساز چپ یا راست یک عضو ناصفر از $Z(R)$ است. بنابراین، با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، نتیجه می‌گیریم $J(R) = \bigcap_{i\in\Theta} P_i$. اکنون، با توجه به [۲۴، نتیجه ۲۷.۲ از فصل ۳]، به آسانی مشاهده می‌شود که به عنوان حلقه‌ها $R/J(R) \cong K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ که $n = |\Theta|$ و K_iها حلقه‌های بخشی هستند. در اینصورت، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R/J(R))$ یک گراف کامل است. $\square$

نتیجه ۱۴.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. اگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف کامل باشد، آنگاه $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R/J(R))$ یک گراف کامل است.

برهان. فرض کنید $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف کامل باشد. در اینصورت، $\alpha(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 0$ (هرگاه R یک حلقه‌ی بخشی باشد) یا $\alpha(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 1$. بنابراین، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R/J(R))$ یک گراف کامل است. $\square$

مثال ۱۵.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه‌ی صحیح با تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال باشد و فرض کنید D میدان نباشد. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $\alpha(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(D)) = \infty$. همچنین، چون با توجه به [۲۴، نتیجه ۲۷.۲ از فصل ۳]، داریم $D/J(D) \cong F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ که $n = |\mathrm{Max}(D)|$ و F_iها میدان هستند، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(D/J(D))$ یک گراف کامل است.

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف کامل باشد. قبل از آن، دو لم زیر ضروری هستند.

لم ۱۶.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله‌ی ایده‌آل‌های یک‌طرفه‌ی پوچ‌توان R کامل است.

برهان. فرض کنید I و J دو راس متمایز $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند به طوریکه $I^n = J^m = 0$، که $n, m \in \mathbb{N}$. همچنین، فرض کنید I با J مجاور نباشد. حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید I و J ایده‌آل‌های چپ باشند. در اینصورت، $\mathrm{l.ann}(I) = \mathrm{l.ann}(J)$. اکنون، چون I پوچ‌توان است، $I \cap \mathrm{l.ann}(I) \neq 0$ که یک تناقض است.

حالت ۲) فرض کنید I یک ایده‌آل چپ و J ایده‌آل راست باشد. در اینصورت، $\mathrm{l.ann}(I) = \mathrm{r.ann}(J)$. اکنون، چون I پوچ‌توان است، $I \cap \mathrm{l.ann}(I) \neq 0$ که یک تناقض است.

حالت‌های دیگر به طور مشابه نتیجه می‌شوند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که زیرگراف القایی به وسیله‌ی ایده‌آل‌های یک‌طرفه‌ی پوچ‌توان R کامل است. □

لم ۱۷.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ (یا راست) موضعی باشد. در اینصورت، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است.

برهان. از لم ۱۶.۴.۳ و [۲۸، قضیه ۱۲.۴] نتیجه می‌شود. □

گزاره ۱۸.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ (یا راست) باشد. در اینصورت، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است.

برهان. چون R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی است، با توجه به [۲۸، لم ۵.۲۱]، نتیجه می‌شود که R یک حلقه‌ی آبلی است. اکنون، چون R آرتینی چپ است، با توجه به لم ۸.۳.۳، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه‌های موضعی و آرتینی چپ هستند. بنابراین، با توجه به لم ۱۷.۴.۳ و روشی که در برهان گزاره ۱۱.۴.۳ به کاربردیم، نتیجه می‌شود که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است. □

در ادامه، از لم زیر که از تعریف گراف $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ بدست می‌آید مکرراً استفاده می‌کنیم.

لم ۱۹.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد. اگر I و J دو راس نامجاور در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشند، آنگاه $\mathrm{ann}(I) = \mathrm{ann}(J)$.

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که درجه‌ی یک راس از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ متناهی باشد.

گزاره ۲۰.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر با $Z(R) \neq 0$ باشد. اگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ شامل یک راس از درجه‌ی متناهی باشد، آنگاه $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف متناهی است.

برهان. فرض کنید I یک راس از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد به طوریکه $\deg(I) < \infty$. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم I یک ایده‌آل چپ در R است. نشان می‌دهیم $\mathrm{ann}(I) \neq 0$. بدین‌منظور، فرض کنید $\mathrm{ann}(I) = 0$. چون $\deg(I) < \infty$، تعداد راس‌های J از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ با شرط $\mathrm{ann}(J) \neq 0$ متناهی است. بنابراین، R شامل یک ایده‌آل چپ مینیمال مانند Rx، که $x \in R$، است. در اینصورت، چون $\mathrm{ann}(x)$ و $R/\mathrm{ann}(x)$ به عنوان R-مدول چپ آرتینی هستند، R یک حلقه‌ی آرتینی چپ است. اکنون، چون حلقه‌های برگشت‌پذیر، آبلی هستند [۲۸، لم ۵.۲۱]، با توجه به لم ۸.۳.۳، به عنوان حلقه‌ها $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه‌های موضعی و آرتینی چپ هستند. در اینصورت، به‌ازای هر راس J در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ داریم $\mathrm{ann}(J) \neq 0$ که یک تناقض است. بنابراین، داریم $\mathrm{ann}(I) \neq 0$. اکنون، فرض کنید $I = \mathrm{ann}(I)$. نشان می‌دهیم I با هر راس دیگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاور است. برای مشاهده، فرض کنید J راسی از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد که با I مجاور نیست. در اینصورت، $I = \mathrm{ann}(I) = \mathrm{ann}(J)$ که یک تناقض است. بنابراین، I با هر راس دیگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاور است. در اینصورت، چون $\deg(I) < \infty$، نتیجه می‌گیریم که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف متناهی است. اکنون، فرض کنید $I \neq \mathrm{ann}(I)$. در اینصورت، چون $\deg(I) < \infty$ و $I \cap \mathrm{ann}(\mathrm{ann}(I)) \neq 0$، $\mathrm{ann}(I)$ به عنوان R-مدول چپ آرتینی است. به‌علاوه، $R/\mathrm{ann}(I)$ به عنوان R-مدول چپ آرتینی است. بنابراین، R یک حلقه‌ی آرتینی چپ است. اکنون، با توجه به گزاره ۱۷.۴.۳، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف متناهی است. □

به یاد آورید که یک حلقه‌ی R کاهش یافته است هرگاه شامل هیچ عضو پوچ‌توان ناصفری نباشد. به وضوح یک حلقه‌ی R کاهش یافته است اگر و تنها اگر R نیم‌اول و برگشت‌پذیر باشد. در گزاره بعد، حالتی را مطالعه می‌کنیم که $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 1$.

گزاره ۲۱.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر R کاهش یافته نباشد، آنگاه $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 1$.

برهان. چون R کاهش یافته نیست، یک راس I از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ موجود است به طوریکه $I^2 = 0$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که I با هر راس دیگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاور است. بنابراین، $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 1$. □

مثال ۲۲.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. در اینصورت، نمی‌توان نتیجه گرفت که $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \geqslant 2$. بدین‌منظور، فرض کنید R ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های بخشی باشد. در

اینصورت، با توجه به گزاره ۱۷.۴.۳، $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۱$.

در گزاره بعد، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ پیدا می‌کنیم.

گزاره ۲۳.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد و فرض کنید I یک راسی از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد به طوریکه $\mathrm{l.ann}(I) \cup \mathrm{r.ann}(I) \neq ۰$. دراینصورت، مجموعه‌ی $\{I\}$، $\{I, \mathrm{l.ann}(I)\}$ یا $\{I, \mathrm{r.ann}(I)\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. به‌ویژه، $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \leqslant ۲$.

برهان. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، فرض کنید $\mathrm{l.ann}(I) \neq ۰$. اگر $I = \mathrm{l.ann}(I)$، آنگاه به آسانی مشاهده می‌شود که I با هر راس دیگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ مجاور است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $I \neq \mathrm{l.ann}(I)$. نشان می‌دهیم $\{I, \mathrm{l.ann}(I)\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است. بدین‌منظور، فرض کنید $J \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \setminus \{I, \mathrm{l.ann}(I)\}$ و J با I مجاور نباشد. در اینصورت، با توجه به گزاره ۴.۴.۳، داریم $N(I) = N(J)$. چون $I \neq \mathrm{l.ann}(I)$، نتیجه می‌شود I با $\mathrm{l.ann}(I)$ مجاور است. بنابراین، J با $\mathrm{l.ann}(I)$ مجاور است. درنتیجه $\{I, \mathrm{l.ann}(I)\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. □

در گزاره بعد، حالتی را مطالعه می‌کنیم که $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲$. توجه کنید که اگر حلقه‌ی R حوزه نباشد، آنگاه $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \leqslant ۲$.

گزاره ۲۴.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد که حوزه نیست. در اینصورت، به‌ازای هر راس $I \in \Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ راس $J \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \setminus \{I\}$ موجود است به طوریکه $\mathrm{ann}(I) = \mathrm{ann}(J)$ اگر و تنها اگر $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲$.

برهان. فرض کنید به‌ازای هر راس $I \in \Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ راس $J \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \setminus \{I\}$ موجود است به طوریکه $\mathrm{ann}(I) = \mathrm{ann}(J)$. به خلف، فرض کنید $I_۱$ راسی از $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد به طوریکه با هر راس دیگر مجاور باشد. اکنون، با توجه به مفروضات، $J_۱ \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \setminus \{I_۱\}$ موجود است به طوریکه $\mathrm{ann}(I_۱) = \mathrm{ann}(J_۱)$. دراینصورت، $I_۱$ و $J_۱$ نامجاورند که یک تناقض است. بنابراین، $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲$.

برعکس، فرض کنید $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲$. در اینصورت، به‌ازای هر راس $I \in \Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ راس $J \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \setminus \{I\}$ موجود است به طوریکه I و J نامجاورند. بنابراین، نتیجه می‌شود که $\mathrm{ann}(I) = \mathrm{ann}(J)$. □

نتیجه زیر، به طور مستقیم از دو گزاره قبل بدست می‌آید.

نتیجه ۲۵.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. در اینصورت، راس $I \in \Gamma_{\text{Ann}}(R)$ موجود است به طوریکه به‌ازای هر $J \in V(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) \setminus \{I\}$ داریم $\text{ann}(I) \neq \text{ann}(J)$ اگر و تنها اگر $\gamma(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) = ۱$.

مثال ۲۶.۴.۳. (۱) فرض کنید $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. در اینصورت، به‌ازای هر راس $I \in \Gamma_{\text{Ann}}(R)$ راس $J \in V(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) \setminus \{I\}$ موجود است به طوریکه $\text{ann}(I) = \text{ann}(J)$. به‌علاوه، $\gamma(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) = ۲$.

(۲) فرض کنید $R = F \times \mathbb{Z}$، که F یک میدان است. فرض کنید $I = F \times ۰$. در اینصورت، به‌ازای هر $J \in V(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) \setminus \{I\}$ داریم $\text{ann}(I) \neq \text{ann}(J)$. به‌علاوه، $\gamma(\Gamma_{\text{Ann}}(R)) = ۱$.

فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته با تعداد متناهی اول مینیمال باشد. در اینصورت، $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} P_i$ که P_iها ایده‌آل‌های پوچساز کاملاً اول هستند. در گزاره بعد، حلقه‌های کاهش یافته‌ای را مطالعه می‌کنیم که گراف وابسته به آنها کامل باشد.

گزاره ۲۷.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته با تعداد متناهی اول مینیمال باشد. در اینصورت، $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ کامل است اگر و تنها اگر به عنوان حلقه‌ها $R \cong K_۱ \times K_۲ \times \cdots \times K_n$ که K_iها حلقه‌های بخشی هستند.

برهان. فرض کنید $\text{Min}(R) = \{P_۱, P_۲, \ldots, P_n\}$ و $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ کامل باشد. نشان می‌دهیم که اگر I راسی از $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ باشد، آنگاه برای یک i داریم $I \subseteq P_i$. بدین‌منظور، فرض کنید $I \nsubseteq Z(R)$. در اینصورت، $x \in R \setminus Z(R)$ موجود است به طوریکه Rx راسی از $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ باشد. درنتیجه Rx با $Rx^۲$ مجاور نیست که یک تناقض است. بنابراین، $I \subseteq Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} P_i$ که P_iها ایده‌آل‌های پوچساز کاملاً اول هستند. اکنون، با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، برای یک i داریم $I \subseteq P_i$. درنتیجه P_iها ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال در R هستند. بنابراین، با توجه به [۲۴، نتیجه ۲۷.۲ از فصل ۳]، به عنوان حلقه‌ها $R \cong K_۱ \times K_۲ \times \cdots \times K_n$ که K_iها حلقه‌های بخشی هستند.

قسمت برعکس بدیهی است. □

در گزاره بعد، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\Gamma_{\text{Ann}}(R)$ یک گراف دوبخشی باشد. قبل از آن، لم زیر ضروری است.

لم ۲۸.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد. اگر $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ شامل یک مسیر به طول سه باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۳$.

برهان. فرض کنید $I_۱ - I_۲ - I_۳ - I_۴$ یک مسیر به طول سه در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ باشد. اگر $I_۱$ با $I_۳$ مجاور باشد، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۳$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $I_۱$ با $I_۳$ مجاور نیست. در اینصورت، با توجه به گزاره ۴.۴.۳، $I_۱ - I_۲ - I_۳ - I_۴ - I_۱$ یک دور به طول چهار در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است. در اینصورت، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{ann}(I_۲) \neq ۰$. اگر R کاهش یافته نباشد، آنگاه با توجه به گزاره ۲۱.۴.۳ داریم $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۳$. بنابراین، فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. اکنون، اگر $\mathrm{ann}(I_۱) = ۰$، آنگاه $I_۱ - I_۲ - \mathrm{ann}(I_۲) - I_۱$ یک دور به طول سه در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است و درنتیجه $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۳$. در غیر اینصورت، فرض می‌کنیم $\mathrm{ann}(I_۱) \neq ۰$. اکنون دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید $I_۱ + \mathrm{ann}(I_۱) = R$. در اینصورت، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، R تجزیه‌پذیر است. بنابراین، $R \cong R_۱ \times R_۲$ که R_iها حلقه هستند. چون $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ شامل یک مسیر به طول سه است، می‌توان فرض کرد $R_۱$ یک حلقه‌ی بخشی نیست. در اینصورت، آسان مشاهده می‌شود $R_۱ \times ۰ - ۰ \times R_۲ - I \times R_۲ - R_۱ \times ۰$، که I یک ایده‌آل یک طرفه‌ی غیر بدیهی R است، یک دور به طول سه در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است و درنتیجه $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۳$.

حالت ۲) فرض کنید $I_۱ + \mathrm{ann}(I_۱) \neq R$. در اینصورت، $I_۱ - \mathrm{ann}(I_۱) - I_۱ + \mathrm{ann}(I_۱) - I_۱$ یک دور به طول سه در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ است و درنتیجه $\mathrm{gr}(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۳$. $\square$

به یاد آورید که اگر یک گراف شامل یک دور به طول فرد باشد، آنگاه آن گراف دوبخشی نیست [۳۴، قضیه ۱۸.۲.۱].

گزاره ۲۹.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد. در اینصورت، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف دوبخشی با مجموعه‌ی یالی ناتهی است اگر و تنها اگر تعداد راس‌های $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ دقیقاً دو باشد.

برهان. فرض کنید $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف دوبخشی با مجموعه‌ی یالی ناتهی باشد. در اینصورت، R حوزه نیست. بنابراین، با توجه به گزاره ۴.۴.۳، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف دوبخشی کامل است. از طرفی با توجه به لم قبل، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ شامل هیچ مسیری به طول سه نیست. بنابراین، $\gamma(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۱$. اکنون، با توجه به گزاره ۲۱.۴.۳، $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ یک گراف متناهی است. بنابراین، با توجه به گزاره ۱۸.۴.۳، تعداد راس‌های $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ دقیقاً دو است.

قسمت برعکس از گزاره ۱۸.۴.۳ نتیجه می‌شود. $\square$

در ادامه، عدد خوشه‌ای $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$، هنگامی که R یک حلقه‌ی تجزیه‌پذیر است، را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳۰.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد و $R = R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه هستند و $n \neq ۱$. در اینصورت، $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \geqslant ۲^n - ۲$. به‌ویژه، اگر R شامل یک ایده‌آل یک‌طرفه‌ی غیر بدیهی مانند I با $\mathrm{ann}(I) = ۰$ باشد، آنگاه $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \geqslant ۲^n - ۱$.

برهان. کافیست ایده‌آل صفر را در R_iها انتخاب کنیم. در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله‌ی راس‌های مجموعه‌ی

$$\Lambda := \{I_۱ \times I_۲ \times \cdots \times I_n \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \mid I_i = ۰_{R_i} \text{ یا } R_i\}$$

کامل است. بنابراین، $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \geqslant \sum_{i=۱}^{n} \binom{n}{i} = ۲^n - ۲$. قسمت "به‌ویژه" بدیهی است. $\square$

نتیجه ۳۱.۴.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد و $R = R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ که R_iها حلقه هستند و $n \neq ۱$. در اینصورت،

(۱) $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲^n - ۱$ اگر و تنها اگر R_iها حوزه باشند و حداقل یکی از R_iها حلقه‌ی بخشی نباشد.

(۲) $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲^n - ۲$ اگر و تنها اگر R_iها حلقه‌های بخشی باشند.

برهان. (۱) فرض کنید R_iها حوزه باشند و یکی از R_iها حلقه‌ی بخشی نباشد. با توجه به گزاره قبل، داریم $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \geqslant ۲^n - ۱$. اکنون، فرض کنید Δ یک خوشه در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ با ۲^n راس باشد. در اینصورت، دو راس متمایز I و J در Δ موجودند که $I = I_۱ \times I_۲ \times \cdots \times I_n$، $J = J_۱ \times J_۲ \times \cdots \times J_n$، $I_i, J_i \subseteq R_i$، برای برخی اندیس‌ها $I_i = J_i = ۰$ و به‌ازای سایر اندیس‌ها I_i و J_i ناصفر هستند. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود I با J مجاور نیست که یک تناقض است. بنابراین، $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲^n - ۱$.

برعکس، فرض کنید $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = ۲^n - ۱$. اگر R آرتینی چپ (راست) باشد، آنگاه با توجه به گزاره ۱۸.۴.۳، نتیجه می‌شود که $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ کامل است. بنابراین، تعداد راس‌های $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ برابر $۲^n - ۱$ است که یک تناقض است. درنتیجه R آرتینی چپ (راست) نیست. نشان می‌دهیم R_iها حوزه

هستند. بدین‌منظور، بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم R_1 شامل یک ایده‌آل یک‌طرفه‌ی غیر بدیهی مانند I باشد به طوریکه $\mathrm{ann}(I) \neq 0$. قرار می‌دهیم

$$\Lambda := \{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \mid I_i = 0_{R_i} \text{ یا } R_i\}$$

و

$$\Delta := \{I \times I_2 \times \cdots \times I_n \in V(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) \mid I_i = 0_{R_i} \text{ یا } R_i\}.$$

در اینصورت، زیرگراف القایی به وسیله‌ی راس‌ها از $\Lambda \cup \Delta$ یک خوشه در $\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)$ با بیشتر از $2^n - 1$ راس است که یک تناقض است. درنتیجه R_iها حوزه هستند و یکی از R_iها حلقه‌ی بخشی نیست.

(۲) فرض کنید R_iها حلقه‌های بخشی باشند. در اینصورت، $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 2^n - 2$.

برعکس، فرض کنید $\omega(\Gamma_{\mathrm{Ann}}(R)) = 2^n - 2$. در اینصورت، به روشی مشابه آنچه در قسمت قبل به کار بردیم، مشاهده می‌شود R_iها حلقه‌های بخشی هستند. $\square$

۵.۳ گراف مجموع ایده‌آل‌های یک‌طرفه‌ی پوچ‌کن یک حلقه

در فصل قبل، گراف مجموع ایده‌آل‌های پوچ‌کن یک حلقه‌ی جابجایی یادآوری شد [۳۲]. در این بخش، مفهوم این گراف به حلقه‌های شرکت‌پذیر توسیع می‌دهیم [۱۲] و برخی از ویژگی‌های آن مانند همبندی، قطر و کمر آن را بررسی می‌کنیم. تمام مطالب این بخش برگرفته از [۱۲] است. این بخش را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر با همانی ناصفر باشد که یک حوزه نیست و فرض کنید $\mathbb{I}(R)^*$ مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های یک‌طرفه‌ی غیر بدیهی R (یعنی، متمایز از R و $\circ$) باشد. همچنین، فرض کنید $A(R)^* = \{I \in \mathbb{I}(R)^* \mid \mathrm{l.ann}(I) \cup \mathrm{r.ann}(I) \neq \circ\}$. گراف مجموع ایده‌آل‌های یک‌طرفه‌ی پوچ‌کن R، که با نماد $\Omega(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است ساده با مجموعه‌ی راسی $A(R)^*$ و دو راس متمایز I و J مجاورند اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathrm{l.ann}(I+J) \cup \mathrm{r.ann}(I+J) \neq \circ$.

در سراسر این بخش، R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر با همانی ناصفر است که یک حوزه نیست. برای تعیین قطر گراف $\Omega(R)$، گزاره‌های زیر ضروری هستند.

گزاره ۲.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی اول باشد. در اینصورت، $\Omega(R)$ ناهمبند است.

برهان. چون $Z(R) \neq \circ$، $a, b \in Z(R)^*$ موجودند به طوریکه $ab = \circ$. نشان می‌دهیم $Ra \neq bR$. بدین منظور، فرض کنید $Ra = bR$. در اینصورت، $RaRa = \circ$ و درنتیجه $Ra = \circ$ که یک تناقض است. بنابراین، $Ra \neq bR$. اکنون، به خلف فرض کنید $\Omega(R)$ همبند باشد. در اینصورت، $Ra - I_1 - \cdots - I_n - bR$ یک مسیر بین Ra و bR است. چون R یک حلقه‌ی اول و Ra یک ایده‌آل چپ است، I_1 باید یک ایده‌آل راست نباشد. اکنون، به روشی مشابه بعد از تعداد متناهی مرتبه، نتیجه می‌شود که I_n ایده‌آل راست نیست. چون (ایده‌آل راست) bR با I_n مجاور است، داریم $I_n = \circ$ یا $bR = \circ$ که یک تناقض است. بنابراین، $\Omega(R)$ ناهمبند است. □

به یاد بیاورید که یک حلقه‌ی R ساده نامیده می‌شود، هرگاه ایده‌آل‌هایش فقط $\circ$ و R باشند. به وضوح، حلقه‌های ساده، اول هستند. بنابراین، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۳.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی ساده باشد. در اینصورت، $\Omega(R)$ ناهمبند است.

توجه کنید که حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی R با نماد $\mathbb{M}_n(R)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۴.۵.۳. فرض کنید $R = \mathbb{M}_۲(\mathbb{Z}_۲)$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که R حلقه‌ی ساده است. به‌علاوه، $\Omega(R)$ ناهمبند است.

گزاره ۵.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی غیر اول و غیر کاهش یافته باشد. فرض کنید I و J دو راس متمایز در $\Omega(R)$ باشند. اگر I و J ایده‌آل‌های راست باشند، آنگاه $d(I, J) \in \{۱, ۲, ۳\}$.

برهان. فرض کنید I و J دو راس متمایز در $\Omega(R)$ باشند و فرض کنید I و J ایده‌آل‌های راست باشند. اگر I و J مجاور باشند، آنگاه $d(I, J) = ۱$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم I و J نامجاورند. چون R غیر کاهش یافته است، $x \in R^*$ موجود است به طوریکه $x^۲ = ۰$. اکنون، سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید $I \cap Rx = ۰$ و $J \cap Rx = ۰$. در اینصورت، $Rx \subseteq \mathrm{r.ann}(I)$ و $Rx \subseteq \mathrm{r.ann}(J)$. بنابراین، $I - Rx - J$ یک مسیر به طول دو در $\Omega(R)$ است و درنتیجه $d(I, J) = ۲$.

حالت ۲) فرض کنید $I \cap Rx = ۰$ و $J \cap Rx \neq ۰$. در اینصورت، $Rx \subseteq \mathrm{r.ann}(I)$ و $I \subseteq \mathrm{l.ann}(Rx)$. بنابراین، I و Rx مجاورند. اکنون، فرض کنید $ax \in J \cap Rx$، که $a \in R$، ناصفر باشد. در اینصورت، یا $J = axR$ یا J با axR مجاور است. اکنون، چون $I \subseteq \mathrm{l.ann}(Rx)$، یا $Rx = axR$ یا Rx با axR مجاور است. بنابراین، مجموعه‌ی $\{I, Rx, axR, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد و درنتیجه $d(I, J) \leqslant ۳$.

حالت ۳) فرض کنید $I \cap Rx \neq ۰$ و $J \cap Rx \neq ۰$. در اینصورت، $a, b \in R$ موجودند به طوریکه $۰ \neq ax \in I \cap Rx$ و $۰ \neq bx \in J \cap Rx$. بنابراین، یا $I = axR$ یا I با axR مجاور است. همچنین، یا $J = bxR$ یا J با bxR مجاور است. اکنون، سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱) فرض کنید $\mathrm{r.ann}(I) \neq ۰$ و $\mathrm{r.ann}(J) \neq ۰$. اگر $\mathrm{r.ann}(axR) \cap xR = ۰$، آنگاه $\mathrm{r.ann}(axR) \subseteq \mathrm{r.ann}(xR)$ و درنتیجه مجموعه‌ی $\{I, axR, bxR, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد. بنابراین، $d(I, J) \leqslant ۳$. در غیر اینصورت، می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{r.ann}(axR) \cap xR \neq ۰$. در اینصورت، $y \in R$ موجود است به طوریکه $۰ \neq xy \in \mathrm{r.ann}(axR) \cap xR$. بنابراین، یا $Rbx = axR$ یا Rbx با axR مجاور است. درنتیجه مجموعه‌ی $\{I, axR, Rbx, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد. بنابراین،

$d(I,J) \leqslant ۳$.

زیرحالت ۲) فرض کنید $\mathrm{r.ann}(I) \neq ۰$ و $\mathrm{r.ann}(J) = ۰$. در اینصورت، $I - JI - J$ یک مسیر به طول دو در $\Omega(R)$ است و درنتیجه $d(I,J) = ۲$.

زیرحالت ۳) فرض کنید $\mathrm{r.ann}(I) = \mathrm{r.ann}(J) = ۰$. چون R یک حلقه‌ی غیر اول است، یک ایده‌آل ناصفر K موجود است به طوریکه $\mathrm{l.ann}(K) \neq ۰$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $I \cap K \neq ۰$ و $J \cap K \neq ۰$. بنابراین، مجموعه‌ی $\{I, I\cap K, J\cap K, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد و درنتیجه $d(I,J) \leqslant ۳$. □

اکنون، به روشی مشابه آنچه در گزاره ۵.۵.۳ استفاده کردیم، گزاره‌ی زیر را داریم.

گزاره ۶.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی غیر اول و غیر کاهش یافته باشد. فرض کنید I و J دو راس متمایز در $\Omega(R)$ باشند. اگر I و J ایده‌آل‌های چپ باشند، آنگاه $d(I,J) \in \{۱,۲,۳\}$.

گزاره ۷.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی غیر کاهش یافته باشد. در اینصورت، $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{۰,۱,۲,۳,\infty\}$.

برهان. اگر R یک حلقه‌ی اول باشد، آنگاه با توجه به گزاره ۲.۵.۳، $\Omega(R)$ ناهمبند است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم R یک حلقه‌ی اول نیست. همچنین فرض کنید I و J دو راس متمایز و نامجاور در $\Omega(R)$ باشند. اگر I و J ایده‌آل‌های راست (چپ) باشند، در اینصورت با توجه به گزاره ۵.۵.۳ (۵.۳.۶)، داریم $d(I,J) \in \{۲,۳\}$ ($d(I,J) \in \{۲,۳\}$). درنتیجه، فرض می‌کنیم I یک ایده‌آل راست و J یک ایده‌آل چپ باشد. چون R غیر کاهش یافته است، $x \in R^*$ موجود است به طوریکه $x^۲ = ۰$. اکنون، چهار حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید $I \cap Rx = ۰$ و $J \cap xR = ۰$. در اینصورت، $Rx \subseteq \mathrm{r.ann}(I)$، $I \subseteq \mathrm{l.ann}(Rx)$، $xR \subseteq \mathrm{l.ann}(J)$ و $J \subseteq \mathrm{r.ann}(xR)$. بنابراین، مجموعه $\{I, Rx, xR, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد و درنتیجه $d(I,J) \leqslant ۳$.

حالت ۲) فرض کنید $I \cap Rx \neq ۰$ و $J \cap xR = ۰$. در اینصورت، $xR \subseteq \mathrm{l.ann}(J)$ و $J \subseteq \mathrm{r.ann}(xR)$. فرض کنید $۰ \neq ax \in I \cap Rx$، که $a \in R$. بنابراین، مجموعه‌ی $\{I, axR, xR, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد و درنتیجه $d(I,J) \leqslant ۳$.

حالت ۳) فرض کنید $I \cap Rx = ۰$ و $J \cap xR \neq ۰$. در اینصورت، $Rx \subseteq \mathrm{r.ann}(I)$ و

$I \subseteq \mathrm{l.ann}(Rx)$. فرض کنید $\circ \neq xb \in J \cap Rx$، که $a \in R$. در اینصورت، مجموعه‌ی $\{I, Rx, Rxb, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد و درنتیجه $d(I, J) \leqslant ۳$.

حالت ۴) فرض کنید $I \cap Rx \neq \circ$ و $J \cap xR \neq \circ$. اکنون، دو زیرحالت زیر را درنظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱) فرض کنید $\mathrm{r.ann}(I) \neq \circ$ یا $\mathrm{l.ann}(J) \neq \circ$. اگر $I \cap J \neq \circ$، آنگاه می‌توانیم عضو ناصفر $t \in I \cap J$ را انتخاب کنیم. بنابراین، $I - Rt - J$ یا $I - tR - J$ یک مسیر به طول دو در $\Omega(R)$ است و درنتیجه $d(I, J) = ۲$. اکنون، می‌توانیم فرض کنیم $I \cap J = \circ$ و لذا $IJ = \circ$. چون RI یک ایده‌آل است، با توجه به گزاره ۳.۵.۶، $d(RI, J) \leqslant ۳$. اکنون، چون $N(RI) \subseteq N(I) \cup \{I\}$، داریم $d(I, J) \leqslant ۳$.

زیرحالت ۲) فرض کنید $\mathrm{l.ann}(J) = \mathrm{r.ann}(I) = \circ$. در اینصورت، چون I و J دو راس از $\Omega(R)$ هستند، $\mathrm{l.ann}(I) \neq \circ$ و $\mathrm{r.ann}(J) \neq \circ$. چون R یک حلقه‌ی غیر اول است، یک ایده‌آل ناصفر K موجود است به طوریکه $\mathrm{l.ann}(K) \neq \circ$. در اینصورت، به آسانی مشاهده می‌شود که $I \cap K \neq \circ$ و $J \cap K \neq \circ$. بنابراین، مجموعه‌ی $\{I, I \cap K, J \cap K, J\}$ تشکیل یک مسیر به طول حداکثر سه بین I و J می‌دهد و درنتیجه $d(I, J) \leqslant ۳$. $\square$

فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد. بنابراین، به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $X \subseteq R$ داریم $\mathrm{ann}(RXR) = \mathrm{ann}(X)$. در اینصورت، لم زیر را داریم.

لم ۳.۵.۸. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد. اگر I یک راس در $\Omega(R)$ باشد، آنگاه $N(RIR) \cup \{RIR\} = N(I) \cup \{I\}$

فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته و I یک راس در $\Omega(R)$ باشد. در اینصورت، $\mathrm{ann}(I)$ یک راس در $\Omega(R)$ است. به علاوه، I با $\mathrm{ann}(I)$ مجاور نیست. اکنون، با توجه به لم‌های ۳.۳.۱ و ۳.۵.۸ و نتیجه ۳.۳.۲، گزاره‌ی زیر را داریم.

گزاره ۳.۵.۹. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. در اینصورت

(۱) $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{۲, \infty\}$.

(۲) $\Omega(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R دقیقاً دارای دو ایده‌آل اول مینیمال باشد.

اکنون، با توجه به گزاره‌های مطرح شده، قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۱۰.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{۰, ۱, ۲, ۳, \infty\}$.

(۲) $\Omega(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی اول باشد یا یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد.

در ادامه، قطر گراف $\Omega(R)$، هنگامی که R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی است، را تعیین می‌کنیم. قبل از آن، لم زیر ضروری است.

لم ۱۱.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی و I یک ایده‌آل ناصفر در R باشدکه $I^۲ = ۰$. در اینصورت، I با هر راس دیگر $\Omega(R)$ مجاور است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل ناصفر در R باشد که $I^۲ = ۰$ و $J \neq I$ راسی در $\Omega(R)$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت برهان، می‌توانیم فرض کنیم $\operatorname{l.ann}(J) \neq ۰$. اکنون، با توجه به [۲۱، تمرین ۳T]، داریم $\operatorname{l.ann}(J) \cap \operatorname{l.ann}(I) \neq ۰$. بنابراین، $x \in R^*$ موجود است به طوریکه $x(I+J) = ۰$. در اینصورت، نتیجه می‌گیریم که I با هر راس دیگر $\Omega(R)$ مجاور است. □

به آسانی مشاهده می‌شود که یک حلقه کاهش یافته است اگر و تنها اگر آن نیم‌اول و برگشت‌پذیر باشد. اکنون، با توجه به لم ۱۱.۵.۳، گزاره ۹.۵.۳ و قضیه ۱۰.۵.۳ گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱۲.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی باشد. در اینصورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Omega(R)) \in \{۰, ۱, ۲, \infty\}$.

(۲) $\Omega(R)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد.

در قضیه بعد، کمر $\Omega(R)$ را تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، $\operatorname{gr}(\Omega(R)) \in \{۳, \infty\}$.

برهان. اگر یک راس از $\Omega(R)$ شامل حداقل سه ایده‌آل یک‌طرفه ناصفر از R باشد، در اینصورت $\operatorname{gr}(\Omega(R)) = ۳$. بنابراین، فرض می‌کنیم هر راس از $\Omega(R)$ شامل حداکثر دو ایده‌آل یک‌طرفه

ناصفر از R باشد. در اینصورت، نشان می‌دهیم $\mathrm{gr}(\Omega(R)) = \infty$. بدین‌منظور، فرض کنید $I_۱ - I_۲ - \cdots - I_n - I_۱$ یک دور به طول n در $\Omega(R)$ باشد. چون $I_۱$ با $I_۲$ مجاور است و هر راس از $\Omega(R)$ شامل حداکثر دو ایده‌آل یک‌طرفه ناصفر از R است، می‌توانیم فرض کنیم $I_۱ \subseteq I_۲$. اکنون، چون $I_۲$ با $I_۳$ مجاور است، داریم $I_۳ \subseteq I_۲$ یا $I_۲ \subseteq I_۳$ که یک تناقض است. □

در گزاره بعد، حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف $\Omega(R)$ فاقد یال باشد.

گزاره ۱۴.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت، مجموعه‌ی یالی $\Omega(R)$ تهی است اگر و تنها اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد:

(۱) $|A(R)^*| = ۱$.

(۲) به عنوان حلقه‌ها $R \cong K_۱ \times K_۲$ که $K_۱$ و $K_۲$ حلقه‌های بخشی هستند.

(۳) به عنوان حلقه‌ها $R \cong \mathbb{M}_۲(K)$ که K یک حلقه‌ی بخشی است.

برهان. فرض کنید مجموعه‌ی یالی $\Omega(R)$ تهی باشد و $|A(R)^*| \neq ۱$. نشان می‌دهیم R یک حلقه‌ی آرتینی است. چون مجموعه‌ی یالی $\Omega(R)$ تهی است، هر راس از $\Omega(R)$ به عنوان یک ایده‌آل چپ یا راست مینیمال است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم Rx که $x \in R^*$، یک ایده‌آل چپ مینیمال در R است. در اینصورت، به عنوان R-مدول‌ها $Rx \cong R/\mathrm{l.ann}(x)$. از طرفی، $\mathrm{l.ann}(x)$ به عنوان R-مدول چپ آرتینی است . بنابراین، با توجه به [۲۱، گزاره ۵.۳]، R یک حلقه‌ی آرتینی چپ است. به طور مشابه، می‌توان نشان داد R یک حلقه‌ی آرتینی راست است. بنابراین، R یک حلقه‌ی آرتینی است. اکنون، چون مجموعه‌ی یالی $\Omega(R)$ تهی است و $|A(R)^*| \neq ۱$، گراف $\Omega(R)$ ناهمبند است. در اینصورت با توجه به قضیه ۱۰.۵.۳، دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهش یافته با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال مانند $P_۱$ و $P_۲$ باشد. چون R آرتینی است، $P_۱$ و $P_۲$ ایده‌آل‌های ماکسیمال هستند. بنابراین، $R = P_۱ + P_۲$. اکنون، با توجه به [۲۸، تمرین ۷.۱]، به عنوان حلقه‌ها $R \cong K_۱ \times K_۲$ که $K_۱$ و $K_۲$ حلقه‌های بخشی هستند.

حالت ۲) فرض کنید R یک حلقه‌ی اول باشد. بنابراین، R تجزیه‌پذیر نیست. چون R آرتینی است، با توجه به [۲۸، قضیه‌های ۲۴.۱۰ و ۵.۳]، به عنوان حلقه‌ها $R \cong \mathbb{M}_۲(K)$ که K یک حلقه‌ی بخشی است.

قسمت برعکس بدیهی است. □

به یاد بیاورید که اگر α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه نگاشت جمعی $\delta : R \longrightarrow R$ یک α-مشتق نامیده می‌شود هرگاه $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$، که $a, b \in R$. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه‌ی R و δ یک α-مشتق از R باشد. در اینصورت، R-مدول $R[x]$ با ضرب شرکت‌پذیر و توزیع‌پذیر القا شده با ضابطه $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ به عنوان حلقه‌ی چند جمله‌ایهای اریب شناخته می‌شود و با نماد $R[x; \alpha, \delta]$ نشان داده می‌شود. اگر $\delta = ۰$، آنگاه حلقه‌ی چند جمله‌ایهای اریب از نوع درونریختی $R[x; \alpha]$ را داریم. اگر α همانی باشد، آنگاه حلقه‌ی چند جمله‌ایهای اریب از نوع مشتق $R[x; \delta]$ را داریم. اگر α همانی باشد و $\delta = ۰$، آنگاه حلقه‌ی چند جمله‌ایهای استاندارد $R[x]$ را داریم. برای جزییات بیشتر خواننده را به [۲۱]، [۲۷] و [۲۸] ارجاع می‌دهیم. یک درونریختی α از حلقه‌ی R صلب نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $a \in R$، $a\alpha(a) = ۰$ نتیجه دهد $a = ۰$. یک حلقه‌ی R، α-صلب نامیده می‌شود هرگاه یک درونریختی صلب α از حلقه‌ی R موجود باشد. یک حلقه‌ی R، α-سازگار نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$، داشته باشیم $ab = ۰ \iff a\alpha(b) = ۰$. در گزاره بعد، ارتباط بین همبندی $\Omega(R)$ و $\Omega(R[x; \alpha, \delta])$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱۵.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی α-صلب باشد و فرض کنید δ یک α-مشتق از R باشد. در اینصورت، $\Omega(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $\Omega(R[x; \alpha, \delta])$ همبند باشد.

برهان. چون R یک حلقه‌ی α-صلب است، با توجه به [۲۲، صفحه ۴]، R یک حلقه‌ی کاهش یافته است. اکنون، با توجه به [۲۷، قضیه ۳.۳]، $R[x; \alpha, \delta]$ یک حلقه‌ی کاهش یافته است و هر ایده‌آل اول مینیمال در $R[x; \alpha, \delta]$ به فرم $P[x; \alpha, \delta]$ است که P یک ایده‌آل اول مینیمال در R است. بنابراین، با توجه به گزاره ۹.۵.۳، $\Omega(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $\Omega(R[x; \alpha, \delta])$ همبند باشد. $\square$

در ادامه، از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱۶.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و α-سازگار باشد. همچنین، فرض کنید $I \in A(R[x; \alpha])^*$. در اینصورت

(۱) اگر $\mathrm{l.ann}(I) \neq ۰$، آنگاه $a \in R^*$ موجود است به طوریکه $aI = Ia = ۰$.

(۲) اگر $\mathrm{r.ann}(I) \neq ۰$، آنگاه $b \in R^*$ موجود است به طوریکه $bI = Ib = ۰$.

برهان. (۱) فرض کنید $I \in A(R[x;\alpha])^*$ و $\mathrm{l.ann}(I) \neq 0$. در اینصورت، می‌توانیم $g = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A(R[x;\alpha])^*$ از حداقل درجه‌ی n انتخاب کنیم به طوریکه $gI = 0$. فرض کنید $f = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in I^*$ که $b_m \neq 0$. چون $gf = 0$، داریم $a_nx^nb_mx^m = 0$ و لذا $a_n\alpha^n(b_m) = 0$. بنابراین $a_nb_m = 0$. درنتیجه $b_mgI = 0$. اکنون، با توجه به ویژگی g، داریم $b_mg = 0$. بنابراین، به‌ازای هر i، $b_ma_i = a_ib_m = 0$. اکنون، فرض کنید اندیس j حداکثر باشد با این شرط که $a_nb_j \neq 0$. در اینصورت، داریم $(a_n\alpha^n(b_j) + a_{n-1}\alpha^{n-1}(b_{j+1}) + \cdots)x^{n+j} \neq 0$ که یک تناقض است با $gf = 0$. بنابراین، $a_nf = 0$ و لذا $a_nI = 0$. به‌علاوه، چون R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و α-سازگار است، $Ia_n = 0$.

(۲) به روشی مشابه قسمت (۱)، نتیجه می‌شود. $\square$

گزاره ۱۷.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و α-سازگار باشد. در اینصورت، داریم $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Omega(R[x;\alpha])) = 1$.

برهان. فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$. آسان مشاهده می‌شود $|A(R[x;\alpha])^*| \geqslant 2$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم I و J دو راس متمایز در $\Omega(R[x;\alpha])$ باشند. فرض کنید Δ مجموعه‌ی تمام ضرایب عناصر I و Λ مجموعه‌ی تمام ضرایب عناصر J باشد. در اینصورت، با توجه به لم قبل، $R\Delta$ و $R\Lambda$ راس‌های $\Omega(R)$ هستند. چون $\mathrm{diam}(\Omega(R)) \in \{0, 1\}$، $c \in R^*$ موجود است به طوریکه $c(R\Delta + R\Lambda) = 0$. بنابراین، I و J در $\Omega(R[x;\alpha])$ مجاورند و لذا $\mathrm{diam}(\Omega(R[x;\alpha])) = 1$.

برعکس، فرض کنید $\mathrm{diam}(\Omega(R[x;\alpha])) = 1$. در اینصورت، اگر $|A(R)^*| = 1$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = 0$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم I و J دو راس متمایز در $\Omega(R)$ باشند. فرض کنید $S = \sum_{i=0}^{\infty} R\alpha^i(I)R$ و $T = \sum_{i=0}^{\infty} R\alpha^i(J)R$. در اینصورت، $S[x;\alpha]$ و $T[x;\alpha]$ راس‌های $R[x;\alpha]$ هستند. چون $\mathrm{diam}(\Omega(R[x;\alpha])) = 1$، $c \in R^*$ موجود است به طوریکه $c(T[x;\alpha] + S[x;\alpha]) = 0$. بنابراین، $c(I + J) = 0$ و لذا $\mathrm{diam}(\Omega(R)) = 1$. $\square$

با توجه به گزاره ۱۲.۱.۳، لم ۱۰.۴.۳ و روشی که در گزاره ۱۶.۲.۳ به کاربردیم، گزاره‌ی زیر را داریم:

گزاره ۱۸.۵.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. در اینصورت:

(۱) اگر R کاهش یافته با تعداد متناهی اول مینیمال باشد، آنگاه $\alpha(\Omega(R)) = |\mathrm{Min}(R)|$.

(۲) اگر R نیم‌جابجایی و نوتری باشد، آنگاه $\alpha(\Omega(R))$ متناهی است.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian	آبلی
Adjacent	مجاور
Algebra	جبر
Annihilating	پوچ‌کن
Annihilator	پوچساز
Artinian	آرتینی
Associative	شرکت‌پذیر
Bipartite	دوبخشی
Choromatic number	عدد رنگی
Clique number	عدد خوشه‌ای
Commutative	جابجایی
Complete	کامل
Complement	مکمل
Connected	همبند
Cycle	دور
Degree	درجه
Diameter	قطر
Direct poroduct	ضرب مستقیم
Direct sum	جمع مستقیم
Division ring	حلقه بخشی

Domain	حوزه
Domination number	عدد احاطه‌گری
Edge	یال
Element	عضو
Empty	تهی
Free	آزاد
Finite	متناهی
Forest	جنگل
Graph	گراف
Girth	کمر
Homomorphism	همریختی
Ideal	ایده‌آل
Idempotent	خودتوان
Identity	همانی
Independence number	عدد استقلال
Induced	القایی – القا شده
Integral domain	حوزه صحیح
Isomorphism	یکریختی
Left	چپ
Local	موضعی
Maximal	بیشینه
Maximum	بیشترین
Minimal	کمینه
Minimum	کمترین
Module	مدول
Nilpotent	پوچ‌توان
Noetherian	نوتری

Nontrivial . . . . غیر بدیهی
One-sided . . . . یک‌طرفه
Path . . . . مسیر
Planar . . . . مسطح
Polynomial . . . . چندجمله‌ای
Power series . . . . سریهای توانی
Prime . . . . اول
Proper . . . . سره
Reduced . . . . کاهش یافته
Right . . . . راست
Reversible . . . . برگشت‌پذیر
Ring . . . . حلقه
Semicommutative . . . . نیم‌جابجایی
Semiprime . . . . نیم‌اول
Semisimple . . . . نیم‌ساده
Set . . . . مجموعه
Simple . . . . ساده
Subgraph . . . . زیرگراف
Subdivision . . . . زیرتقسیم
Submodule . . . . زیرمدول
Two-sided . . . . دوطرفه
Unfaithful . . . . غیر وفادار
Unicyclic . . . . تک‌دور
Unital . . . . یکانی
Vertex . . . . راس
Zero-divisor . . . . مقسوم‌علیه صفر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آبلی	Abelian
آرتینی	Artinian
آزاد	Free
اول	Prime
القایی - القا شده	Induced
ایده‌آل	Ideal
برگشت‌پذیر	Reversible
بیشترین	Maximum
بیشینه	Maximal
پوچ‌توان	Nilpotent
پوچساز	Annihilator
پوچ‌کن	Annihilating
تک‌دور	Unicyclic
تهی	Empty
جابجایی	Commutative
جبر	Algebra
جمع مستقیم	Direct sum
جنگل	Forest
چپ	Left
چندجمله‌ای	Polynomial

حلقه .... Ring
حلقه بخشی .... Division ring
حوزه .... Domain
حوزه صحیح .... Integral domain
خودتوان .... Idempotent
درجه .... Degree
دوبخشی .... Bipartite
دوطرفه .... Two-sided
دور .... Cycle
راس .... Vertex
راست .... Right
زیرتقسیم .... Subdivision
زیرگراف .... Subgraph
زیرمدول .... Submodule
ساده .... Simple
سره .... Proper
سریهای توانی .... Power series
شرکت‌پذیر .... Associative
ضرب مستقیم .... Direct product
عدد استقلال .... Independence number
عدد خوشه‌ای .... Clique number
عدد رنگی .... Choromatic number
عدد احاطه‌گری .... Domination number
عضو .... Element
غیر بدیهی .... Nontrivial
غیر وفادار .... Unfaithful
قطر .... Diameter

کامل	Complete
کاهش یافته	Reduced
کمر	Girth
کمترین	Minimum
کمینه	Minimal
گراف	Graph
متناهی	Finite
مدول	Module
مجاور	Adjacent
مجموعه	Set
مسطح	Planar
مسیر	Path
مقسوم‌علیه صفر	Zero-divisor
مکمل	Complement
نوتری	Noetherian
موضعی	Local
نیم‌اول	Semiprime
نیم‌ساده	Semisimple
نیم‌جابجایی	Semicommutative
همانی	Identity
همبند	Connected
همریختی	Homomorphism
یال	Edge
یکانی	Unital
یک‌طرفه	One-sided
یکریختی	Isomorphism

کتاب‌نامه

[1] M. Afkhami, The cozero-divisor graph of a non-commutative ring, *J. Algebra. Appl.*, **13** (2014), 1450062, 7pp.

[2] M. Afkhami and K. Khashyarmanesh, The cozero-divisor graph of a commutative ring, *Southeast Asian Bull. Math.*, **35** (2011), 753–762.

[3] M. Afkhami and K. Khashyarmanesh, Planar, outerplanar, and ring graph of the cozero-divisor graph of a finite commutative ring, *J. Algebra Appl.*, **11** (2012), 1250103, 8 pp.

[4] S. Akbari and S. Khojasteh, Commutative rings whose cozero-divisor graph are unicyclic or of bounded degree, *Comm. Algebra.*, **42** (2014), 1594–1605.

[5] S. Akbari and S. Khojasteh, Some criteria for the finiteness of cozero-divisor graphs, *J. Algebra Appl.*, **12** (2013), 1350056, 12 pp.

[6] D.F. Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **217** (1999), 434–447.

[7] A. Alibemani, M. Bakhtyiari, R. Nikandish and M.J. Nikmehr, The annihilator ideal graph of a commutative ring, *J. Korean Math. Soc.*, **52** (2015), 417–429.

[8] A. Alibemani and E. Hashemi, The total graph of non-zero annihilating ideals of a commutative ring, *Commun. Korean Math. Soc.*, **33** (2018), 379–395.

[9] A. Alibemani and E. Hashemi, Study of the annihilator ideal graph of a semicommutative ring, *Commun. Korean Math. Soc.*, to appear.

[10] A. Alibemani and E. Hashemi, The total graph of unfaithful submodules of a module over reversible rings, *Asian-Eur. J. Math.*, **10** (2017) , 1750074, 9 pp.

[11] A. Alibemani, E. Hashemi and A. Alhevaz, The cozero-divisor graph of a module, *Asian-Eur. J. Math.*, **11** (2018), 1850092, 13 pp.

[12] A. Alibemani, E. Hashemi and A. Alhevaz, The total graph of annihilating one-sided ideals of a ring, submitted.

[13] M.F. Atyah and I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley Publishing Co. Inc., London, 1969.

[14] M. Axtell, J. Coykendall and J. Stickles, Zero-divisor graphs of polynomials and power series over commutative rings, *Comm. Algebra*, **6** (2005), 2043–2050.

[15] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier Publishing Co. Inc., NewYork, 1976.

[16] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, **116** (1988), 208–226.

[17] P.M. Cohn, Reversible rings, *Bull. London Math. Soc.*, **31** (1999), 641–648.

[18] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **173**, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 2005.

[19] D.E. Fields, Zero-divisors and nilpotent elements in power series rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 427–433.

[20] I. Gitler, E. Reyes and R.H. Villarreal, Ring graphs and complete intersection toric ideals, *Discrete Math.*, **310** (2010), 430–441.

[21] K.R. Goodearl and R.B. Warfield, *An Introduction to Non-Commutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society Student Texts, **61**, Cambridge University press, Cambridge, 1989.

[22] C.Y. Hong, N.K. Kim and T.K. Kwak, Ore extensions of bear and p.p.-rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **151** (2000), 215–226.

[23] J.A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero-Divisors*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[24] T.W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **73**, Springer-Verlag, New York, 1980.

[25] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Revised edition, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[26] N.K. Kim and Y. Lee , Extension of reversible rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **185** (2003), 207–223.

[27] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq.*, **3** (1996), 289–300.

[28] T.Y. Lam, *A First Course in Non-Commutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, **131**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, New York, 1991.

[29] T.G. Lucas, The diameter of a zero-divisor graph, *J. Algebra,* **301** (2006), 174–193.

[30] P.P. Nielsen, Semicommutativity and the McCoy condition, *J. Algebra*, **298** (2006), 134–141.

[31] R.Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, Second edition, London Mathematical Society Student Texts, **51**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[32] S. Visweswaran and H.D. Patel, A graph associated with the set of all non-zero annihilating ideals of a commutative ring, *Discrete Math., Algorithms and Appl.*, **6**, 1450047, 22 pp.

[33] S. Visweswaran and P. Sarman, On the complement of a graph associated with the set of all non-zero annihilating ideals of a commutative ring, *Discrete Math., Algorithms and Appl.*, **8** (2016), 1650043, 22 pp.

[34] D.B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.

Abstract

Let R be an associative ring with non-zero identity and M a non-zero unital left module over R. In this thesis, we associate some graphs with these algebraic structures, and we investigate some connections between the graph theoretic properties and algebraic theoretic properties.

Keywords: Associative ring, Reversible ring, Semicommutative ring, Clique number, Diameter, Girth.

Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematical Sciences

Ph.D. Thesis in Algebra

The Study of Rings and Modules by Graphs

By:
Abolfazl Alibemani
Supervisor:
Dr. Ebrahim Hashemi
Advisor:
Dr. Abdollah Alhevaz

January 2019