

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

نتایجی در خصوص رنگ آمیزی ابرگراف های کنسری

نگارنده: رویا ابیضی ثانی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

دی ماه ۱۳۹۷



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم رویا ایبضی ثانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات به شماره دانشجویی ۹۳۰۰۰۲۵ ورودی مهرماه سال ۹۳ در تاریخ ۹۷/۱۰/۲۶ از رساله نظری ☒ / عملی ☐ خود با عنوان: نتایج درخصوص رنگامیزی ابرگرافهای کسری دفاع و با احد نمره ۲۰ به درجه عالی با نلن گردید.

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☐ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
☐ ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	نام و نام خانوادگی هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر میثم علیشاهی	استاد / اساتید راهنما	
۲	دکتر نادر جعفری راد	استاد مدعو داخلی / خارجی	
۳	دکتر سعید شعبانی	استاد مدعو داخلی / خارجی	
۴	دکتر عناله آل حوز	استاد مدعو داخلی / خارجی	
۵	دکتر ابراهیم هاشمی	سرپرست (نایب) تحصیلات تکمیلی دانشکده	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم رویا ایبضی ثانی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم بہ

جلوہی جلال خداوندی، پدر بزرگوارم

و آئینہی جمال و رحمت پروردگار، مادر مہربانم

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان کرد و به هم نشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب ”من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جل“،

از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر جعفری‌راد، جناب آقای دکتر شعبانی و جناب آقای دکتر آل‌هوز که زحمت مطالعه و داوری این رساله را متقبل شدند؛

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوام، که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده‌اند؛

از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند؛

و هم‌چنین از تمام دوستان بزرگوام که در نوشتن این رساله همیشه همراهم بوده و حضور گرمشان را از من دریغ نکردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

رویا ابیضی ثانی

دی‌ماه ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **رویا ابیضی ثانی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **نتایج در خصوص رنگ آمیزی ابرگراف های کنسری**، تحت راهنمایی **میثم علیشاهی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ”دانشگاه صنعتی شاهرود“ یا ”Shahrood University of Technology“ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رویا ابیضی ثانی

دی ماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

لواژ در سال ۱۹۷۸ حدس کنسر را با به کارگیری ابزارهای توپولوژیکی اثبات کرد. این اثبات باعث شد شاخه‌ی جدیدی از ترکیبیات به نام ترکیبیات توپولوژیکی متولد شود. در ترکیبیات توپولوژیکی، با به کارگیری ابزارهای توپولوژی به ویژه قضیه‌ی برسوک اولام و نسخه‌های معادل آن، به صورت عمده ویژگی‌های رنگ آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. ابرگراف کنسر $KG^r(\mathcal{H})$ یک ابرگراف r -یکنواخت است که به نحوی اشتراک یا عدم اشتراک یال‌ها در ابرگراف $\mathcal{H}$ را کدگذاری می‌کند.

ما در این رساله، یک پارامتر ترکیبیاتی جدید به نام عدد رنگ پذیری نقصانی منصفانه برای ابرگراف‌ها تعریف می‌کنیم و بر اساس این پارامتر، کران پایینی برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری معرفی می‌کنیم. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که کران پایین دقیق ما از غالب بهترین کران‌های پایین موجود برای $\chi(KG^r(\mathcal{H}))$ بهتر عمل می‌کند. علاوه بر این، با ارایه مثال نشان می‌دهیم که تفاوت مقدار کران پایین ما با برخی از بهترین کران‌های پایین شناخته شده مانند کران پایین دلنیکوف-کریز (۱۹۹۲)، کران پایین زیگلر (۲۰۰۲) و کران پایین علیشاهی-حاجی ابوالحسن (۲۰۱۵) می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه بزرگ باشد. با استفاده از این کران پایین، عدد رنگی خانواده‌ای از گراف‌ها را نیز تعیین می‌کنیم.

در ادامه، وجود زیرابرگراف رنگارنگ را در هر رنگ آمیزی ابرگراف‌های کنسری اثبات می‌کنیم که نتایج قبلی مانند نتیجه‌ی میونیر (۲۰۱۴) و نتیجه‌ی علیشاهی (۲۰۱۷) را تقویت می‌کند. ما این نتایج را به ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری توسعه می‌دهیم. به عبارت دقیق‌تر، نتایجی در خصوص وجود زیرابرگراف‌های رنگارنگ در ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری ارایه می‌کنیم که در واقع تعمیمی برای نتیجه‌ی حاجی ابوالحسن-میونیر (۲۰۱۶) است. هم‌چنین، یک کران پایین جدید برای عدد رنگی ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسر ارایه می‌دهیم که می‌تواند از کران پایین حاجی ابوالحسن-میونیر بسیار بهتر باشد. با استفاده از این کران پایین، خانواده‌ی ابرگراف‌هایی را که در حدس ژو (تعمیم حدس هدتنیمی به ابرگراف‌ها) صادق هستند، غنی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: ابرگراف‌های کنسری، عدد رنگی، عدد رنگی نقصانی، زیرابرگراف رنگارنگ، ضرب رسته‌ای، حدس هدتنیمی

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. R. Abyazi Sani, M. Alishahi, A new lower bound for the chromatic number of general Kneser hypergraphs, *European Journal of Combinatorics* 71 (2018), 229-245.
2. R. Abyazi Sani, M. Alishahi, A.Taherkhani, Coloring properties of categorical product of general Kneser hypergraphs, *Ars Mathematica Contemporanea* 15 (2018), 113-126.
3. R. Abyazi Sani, M. Alishahi, "An improvement of Dolnikov-Kriz lower bound on the chromatic number of general Kneser hypergraphs", in *Combinatorics and Computing Conference at the Institute for Research in Fundamental Sciences, Tehran, Iran* (2017).
4. R. Abyazi Sani, M. Alishahi, "On chromatic number of some Kneser hypergraphs", in *The 11th Annual Ottawa Mathematics Conference, Ottawa, Canada* (2018).

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	پیش‌گفتار
۱	۱ مقدمات
۱	۱.۱ تعاریف مقدماتی
۲	۱.۱.۱ مفاهیم و نمادگذاری‌های مورد نیاز در نظریه‌ی گراف
۳	۲.۱.۱ مفاهیم و نمادگذاری‌های مورد نیاز در ترکیبیات توپولوژیکی
	۲.۱ تاریخچه رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری با استفاده از توپولوژی
۵	جبری
۱۵	۲ کرانی جدید برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری
۱۶	۱.۲ مقدمه و نتایج اصلی
۲۰	۲.۲ اثبات نتایج اصلی
۲۰	۱.۲.۲ ابزارهای مقدماتی
۲۱	۲.۲.۲ اثبات قضیه‌ی ۲.۱.۲
۲۶	۳.۲.۲ اثبات قضیه‌ی ۳.۱.۲
۲۸	۳.۲ مقایسه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه با عدد رنگی نقصانی و عدد تناوبی
۲۸	۱.۳.۲ مقایسه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه با عدد رنگی نقصانی
۳۲	۲.۳.۲ مقایسه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه با عدد تناوبی
۳۹	۳ برخی ویژگی‌های ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری
۴۰	۱.۳ مقدمه و نتایج اصلی
۴۳	۲.۳ اثبات نتایج
۴۳	۱.۳.۳ تعاریف و ابزارها
۴۵	۲.۳.۳ اثبات قضیه ۲.۱.۳
۵۱	۳.۲.۳ اثبات قضیه ۳.۱.۳

۵۳	مراجع
۵۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱.۱ گراف پترسن یا $KG(5, 2)$ ۷

پیش‌گفتار

با استفاده از کاربردهای شگفت‌انگیز توپولوژی جبری نتایج مهمی در ترکیبیات، هندسه گسسته و علوم کامپیوتر اثبات شده است. لواژ در سال ۱۹۷۸ حدس کنسر (۱۹۵۵) را که مساله‌ای درباره‌ی مجموعه‌های متناهی است و در ظاهر هیچ ارتباطی به توپولوژی ندارد، با به‌کارگیری ابزارهای توپولوژی اثبات کرد. این قضیه یکی از اولین و مهم‌ترین نتایجی است که با استفاده از ابزارهای توپولوژی به‌دست آمده است. حل یک مساله ترکیبیاتی با استفاده از ابزارهای توپولوژی توسط لواژ، پنجره‌ای به سوی حل مسایل ترکیبیاتی باز کرد و باعث متولد شدن شاخه‌ی جدیدی در ترکیبیات به نام ترکیبیات توپولوژیکی^۱ شد.

در طی سه دهه‌ی گذشته، محققین زیادی برای حل مسایل گراف و ترکیبیات به ابزارهای توپولوژی روی آوردند و مسایل بسیاری بدین روش حل شدند. قابل ذکر است اکثر نتایج به‌دست آمده در حیطه‌ی ترکیبیات توپولوژیکی، از جمله نتیجه حاصل توسط لواژ، مسایل رنگ‌آمیزی گراف را با به‌کارگیری نوع خاصی از ابزارهای توپولوژیکی به نام قضیه برسوک-اولام^۲ و یا نسخه‌های معادل آن مورد مطالعه قرار داده‌اند.

با توجه به موفقیت به‌کارگیری ابزارهای توپولوژیکی در حل مسایل گراف و ترکیبیات، برآن شدیم که با به‌کارگیری قضیه برسوک-اولام و نسخه‌های معادل آن، رنگ‌آمیزی ابرگراف‌های کنسری را مورد مطالعه قرار دهیم و نتایجی در این زمینه به‌دست آوریم.

در فصل اول، مفاهیم و نمادگذاری‌های مورد نیاز را ارایه می‌کنیم، گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری را معرفی می‌کنیم و برخی از نتایج به‌دست آمده در زمینه رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری که ابزارهای توپولوژیکی را به‌کار گرفته‌اند، مرور می‌کنیم.

در فصل دوم، یک پارامتر ترکیبیاتی جدید به نام عدد رنگی نقصانی منصفانه را که در واقع بهبودیافته‌ی عدد رنگی نقصانی است، معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با استفاده از عدد رنگی نقصانی منصفانه می‌توان کران پایین‌های ارایه شده توسط دلنیکوف (۱۹۸۸)، کریز (۱۹۹۲)، و زیگلر (۲۰۰۲) را بهبود داد. هم‌چنین، ثابت می‌کنیم که در هر رنگ‌آمیزی مجاز ابرگراف‌های کنسری، یک زیراب‌گراف رنگارنگ بزرگ وجود دارد، یعنی نتیجه‌ی به‌دست آمده توسط میونیر (۲۰۱۴) را نیز بهبود می‌بخشیم.

^۱topological combinatorics

^۲Borsuk-Ulam

در فصل سوم، به مطالعه‌ی ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری می‌پردازیم. نتایجی در مورد وجود زیرابرگراف‌های رنگارنگ بزرگ در رنگ‌آمیزی ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری ارائه می‌کنیم که نتیجه‌ی حاجی‌ابوالحسن-میونیر (۲۰۱۶) را تعمیم می‌دهد. همچنین، یک کران پایین جدید برای عدد رنگی ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسر ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این کران پایین می‌تواند بسیار بهتر از کران پایین حاجی‌ابوالحسن-میونیر (۲۰۱۶) باشد. در نهایت، با به‌کارگیری کران پایین پیشنهادی، خانواده ابرگراف‌هایی را که در حدس ژو (نسخه ابرگرافی حدس هدتیمی) صادق هستند، گسترش می‌دهیم.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل، ابتدا به معرفی مفاهیم، تعاریف و نمادگذاری‌های مورد نیاز در رساله می‌پردازیم. سپس، حدس کنسر را که در نتیجه‌ی آن گراف‌های کنسری معرفی شدند، مرور می‌کنیم. پس از معرفی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری، دو اثبات از قضیه لواژ-کنسر را، که پایه‌ی ترکیبیات توپولوژیکی است، بیان می‌کنیم. در نهایت، سیر تاریخی رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری را که شامل تعمیم‌هایی از قضیه لواژ-کنسر است، بررسی می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این قسمت، خلاصه‌ای از تعاریف و نمادگذاری‌های ریاضی استاندارد در نظریه‌ی گراف و هم‌چنین توپولوژی را که در رساله به آن‌ها نیاز داریم، در دو قسمت جداگانه بیان می‌کنیم. تعاریف و نمادگذاری‌های دیگری را که به‌صورت ویژه در مورد رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری مطرح شده‌اند، نیز به تدریج در طی رساله معرفی خواهیم کرد.

۱.۱.۱ مفاهیم و نمادگذاری‌های مورد نیاز در نظریه‌ی گراف

یک **ابرگراف**^۱ مانند $\mathcal{H}$ ، یک زوج مرتب $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ است که در آن مجموعه‌ی متناهی و ناتهی $V(\mathcal{H})$ مجموعه راس^۲های ابرگراف نامیده می‌شود و مجموعه‌ی $E(\mathcal{H})$ مجموعه ابريال^۳های ابرگراف، یک خانواده از زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه‌ی $V(\mathcal{H})$ است. برای راحتی، از این پس ابريال را همان یال می‌نامیم.

اگر $E(\mathcal{H})$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های r -عضوی از $V(\mathcal{H})$ باشد، ابرگراف $\mathcal{H}$ یک ابرگراف r -**یکنواخت**^۴ است. در حالت خاص، یک ابرگراف 2 -یکنواخت یک **گراف ساده** نامیده می‌شود. از این پس، منظور از گراف، همان گراف ساده است.

زیرابرگراف القایی^۵ $\mathcal{H}$ تولیدشده توسط مجموعه $X \subseteq V(\mathcal{H})$ ، که با $\mathcal{H}[X]$ نمایش داده می‌شود، ابرگرافی با مجموعه رئوس X و مجموعه یال‌های $\{e \in E(\mathcal{H}) : e \subseteq X\}$ است.

اگر مجموعه رئوس یک ابرگراف r -یکنواخت را بتوان به گونه‌ای به مجموعه‌های $V_1, \dots, V_r$ افراز کرد که هر یال دقیقاً یک راس از هر مجموعه‌ی V_i را در بر داشته باشد، ابرگراف مذکور، یک **ابرگراف r -یکنواخت r -بخشی**^۶ است. یک ابرگراف r -یکنواخت r -**بخشی کامل**، ابرگراف r -یکنواخت r -بخشی است که تمام یال‌های ممکن را در بر داشته باشد. هم‌چنین، اگر در یک ابرگراف r -بخشی، به‌ازای هر $i, j \in [r]$ ، رابطه‌ی $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ برقرار باشد، آن ابرگراف **متعادل**^۷ است.

برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}$ و عدد صحیح مثبت t ، یک t -**رنگ‌آمیزی**^۸ از ابرگراف $\mathcal{H}$ ، یک نگاشت از $V(\mathcal{H})$ به مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, t\}$ است. ابرگراف $\mathcal{H}$ در صورتی t -**رنگ‌پذیر**^۹ است یا به عبارت دیگر دارای یک **رنگ‌آمیزی مجاز**^{۱۰} است که بتوان مجموعه رئوس ابرگراف را به گونه‌ای با t رنگ متمایز رنگ‌آمیزی کرد که ابرگراف شامل یال تک‌رنگ نباشد. در حالت خاص در مورد گراف‌ها می‌توان گفت اگر در یک t -رنگ‌آمیزی از گراف G ، هر دو راس مجاور تصویرهای متمایز داشته باشند، رنگ‌آمیزی مذکور مجاز است. **عدد رنگی**^{۱۱} ابرگراف $\mathcal{H}$ ، که با $\chi(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود، برابر کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت مانند t است که ابرگراف مذکور t -رنگ‌پذیر باشد. اگر برای ابرگراف $\mathcal{H}$ چنین t ی وجود نداشته باشد یعنی ابرگراف دارای یال تک‌عضوی باشد، گوییم عدد رنگی ابرگراف $\mathcal{H}$ بی‌نهایت است.

¹hypergraph

²vertex

³hyperedge

⁴ r -uniform

⁵induced subhypergraph

⁶ r -uniform r -partite hypergraph

⁷balanced

⁸ t -coloring

⁹ t -colorable

¹⁰proper coloring

¹¹chromatic number

اگر یک ابرگراف t -رنگ آمیزی مجازی داشته باشد که تفاوت اندازه کلاس‌های رنگی در آن حداکثر یک باشد، گوییم آن ابرگراف یک t -رنگ‌آمیزی منصفانه^{۱۲} دارد ([۳۳، ۳۲] را ببینید). به‌ازای اعداد صحیح $1 \leq d \leq n$ ، یک (n, d) -رنگ‌آمیزی از گراف G ، نگاشتی مانند $d \leq$ رابطه‌ی $xy \in E(G)$ ، $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ است با این شرط که به‌ازای هر یال $xy \in E(G)$ ، رابطه‌ی $|c(x) - c(y)| \leq n - d$ برقرار باشد. عدد رنگی دوری^{۱۳} یک گراف مانند G ، که با نماد $\chi_c(G)$ نشان داده می‌شود، برابر اینفیمم n/d ‌هایی است که G دارای یک (n, d) -رنگ‌آمیزی باشد. نشان داده شده‌است که اینفیمم در این تعریف، در واقع همان مینیمم است. بنابراین عدد رنگی دوری یک گراف، یک عدد گویا است.

برای گراف $G = (V, E)$ ، همسایگی بسته یک راس مانند u ، که با $N[u]$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ی $\{u\} \cup \{v : uv \in E\}$ است. عدد رنگی موضعی^{۱۴} گراف $G = (V, E)$ ، $\chi_l(G)$ ، برابر $\min_c \max_{v \in V} |c(N[v])|$ است. میونیر^{۱۵} [۲۶] تعریف عدد رنگی موضعی گراف‌ها را به ابرگراف‌ها چنین تعمیم داد: اگر برای ابرگراف $\mathcal{H} = (V, E)$ و زیرمجموعه‌ی X از V ،

$$\mathcal{N}(X) = \{v : \exists e \in E; e \setminus X = \{v\}\} \quad \text{و} \quad \mathcal{N}[X] = X \cup \mathcal{N}(X)$$

باشد، در این صورت عدد رنگی موضعی ابرگراف $\mathcal{H}$ برابر با $\min_c \max_{e \in E, v \in e} |c(\mathcal{N}[e \setminus \{v\}])|$ است.

اگر در یک رنگ‌آمیزی از یک گراف، رنگ‌های ظاهر شده در همسایگی بسته‌ی هر راس از رئوس یک زیرگراف متفاوت باشند، آن زیرگراف رنگارنگ^{۱۶} است. اگر در یک زیرگراف رنگارنگ، تمام رئوس دارای رنگ‌های متفاوت باشد، زیرگراف کاملاً رنگارنگ^{۱۷} است.

فرض کنید c یک رنگ‌آمیزی مجاز برای ابرگراف r -بخشی کامل $\mathcal{H}$ با بخش‌های $U_1, \dots, U_r$ باشد و در آن به‌ازای هر $i \in [r]$ ، راس‌های درون U_i رنگ‌های متفاوت بگیرند، یا به عبارت دقیق‌تر به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $|c(U_i)| = |U_i|$ ، در این صورت گوییم ابرگراف $\mathcal{H}$ رنگارنگ است.

۲.۱.۱ مفاهیم و نمادگذاری‌های مورد نیاز در ترکیبیات توپولوژیکی

در این قسمت برخی از تعاریف و نمادگذاری‌ها در ترکیبیات توپولوژیکی که در این رساله به آن‌ها نیاز داریم، گردآوری شده‌اند (برای اطلاعات بیش‌تر می‌توانید [۲۳] را ببینید).

به‌ازای عدد صحیح r ، منظور از Z_r در این رساله یک گروه ضربی^{۱۸} دوری^{۱۹} از مرتبه r با

¹²equitable t -coloring

¹³circular chromatic number

¹⁴local chromatic number

¹⁵Meunier

¹⁶colorful

¹⁷completely colorful

¹⁸multiplicative

¹⁹cyclic

مولد ω است، یعنی $Z_r = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^r\}$. یک **مجتمع سادگی**^{۲۰}، که می‌توان آن را به‌عنوان یک موجود ترکیبیاتی یا یک فضای توپولوژیکی در نظر گرفت، زوج مرتبی مانند (V, K) است که در آن V یک مجموعه‌ی ناتهی و متناهی است و K یک خانواده از زیرمجموعه‌های ناتهی V است به‌طوری‌که به‌ازای هر $A \in K$ ، اگر $\emptyset \neq B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه $B \in K$ است. مجموعه‌ی V و خانواده‌ی K به ترتیب مجموعه رؤس و مجموعه سادک‌های^{۲۱} مجتمع سادگی (V, K) نامیده می‌شوند. برای راحتی در نمادگذاری و با در نظر گرفتن فرض $V = \bigcup_{A \in K} A$ ، بدون به وجود آمدن هیچ ابهامی، می‌توان به‌جای مجتمع سادگی (V, K) ، تنها از مجموعه سادک K نام برد. بعد^{۲۲} مجتمع سادگی K که با $\dim(K)$ نمایش داده می‌شود، برابر $1 - \max_{F \in K} |F|$ است. **زیرتقسیم پایه**^{۲۳} K که با $\text{sd } K$ نمایش داده می‌شود، یک مجتمع سادگی است که راس‌های آن سادک‌های K هستند و سادک‌های آن زنجیره‌هایی از مجتمع سادگی K هستند که ترتیب برحسب شمول است. به عبارت دیگر، $\text{sd } K$ خانواده‌ای شامل تمام زنجیره‌هایی است که از سادک‌های مجتمع سادگی K با ترتیب شمول به‌دست می‌آیند. تلفیق^{۲۴} دو مجتمع سادگی C و K که با $C * K$ نمایش داده می‌شود، یک مجتمع سادگی با مجموعه رؤس $V(C) \uplus V(K)$ و مجموعه سادک‌های زیر است:

$$\left\{ F \subseteq V(C) \uplus V(K) : F \neq \emptyset, F \cap V(C) \in C \cup \{\emptyset\} \text{ و } F \cap V(K) \in K \cup \{\emptyset\} \right\}.$$

به وضوح عمل تلفیق شرکت‌پذیر است، یعنی به‌ازای مجتمع‌های سادگی K ، L و M ، اگر رؤس مجتمع‌های سادگی $K * (L * M)$ و $(K * L) * M$ دوباره برحسب‌گذاری شوند، این دو مجتمع سادگی یکسان خواهند بود. با توجه به این موضوع، اگر نام رؤس مهم نباشد، می‌توان نماد $K * L * M$ را به‌جای هر دو نماد $K * (L * M)$ یا $(K * L) * M$ به‌کار برد. تلفیق n -تایی^{۲۵} K ، که با K^{*n} نمایش داده می‌شود، یک مجتمع سادگی است که از تلفیق n نسخه‌ی مجزا از K به‌دست می‌آید. با برحسب‌گذاری مجدد رؤس K^{*n} ، می‌توان مجموعه رؤس K^{*n} را مجموعه‌ی $V(K) \times [n]$ در نظر گرفت که در آن به‌ازای هر راس $(v, i) \in V(K) \times [n]$ ، اندیس i نشان می‌دهد که راس v به عنوان راسی از i -امین نسخه‌ی K در نظر گرفته شده است.

برای عدد اول p ، می‌توان Z_p را به‌عنوان یک مجتمع سادگی با مجموعه رؤس Z_p و مجموعه سادک‌های $\{\{\omega\}, \{\omega^2\}, \dots, \{\omega^p\}\}$ در نظر گرفت. به وضوح Z_p^{*n} یک مجتمع سادگی با مجموعه رؤس $Z_p \times [n]$ است که مجموعه سادک‌های آن تمام زیرمجموعه‌های ناتهی $A \subseteq Z_p \times [n]$ را شامل می‌شود با این شرط که به‌ازای هر $i \in [n]$ ، حداکثر برای یک ε ، $(\varepsilon, i) \in A$ باشد. بنابر این مشاهدات می‌توان مجتمع سادگی Z_p^{*n} را با مجموعه‌ی $\{0\} \cup (Z_p \cup \{0\})^n$ یکی

²⁰simplicial complex

²¹simplex set

²²dimension

²³barycentric subdivision

²⁴join

²⁵ n -fold join

در نظر گرفت. به عبارت دیگر به ازای هر سادک A در Z_p^{*n} ، می‌توان تناظر $A \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ را این‌گونه در نظر گرفت که اگر $(\varepsilon, i) \in A$ باشد، $x_i = \varepsilon$ و در غیراین صورت $x_i = 0$ است. هم چنین به‌ازای عدد اول p و عدد صحیح s که $1 \leq s < p$ است، σ_{s-1}^{p-1} یک مجتمع سادکی با مجموعه رئوس Z_p است که مجموعه سادک‌های آن شامل تمام زیرمجموعه‌های ناتهی از Z_p با اندازه‌ی حداکثر s است.

برای دو مجتمع سادکی C و K ، منظور از **نگاشت سادکی**^{۲۶} $f: C \rightarrow K$ ، یک نگاشت از $V(C)$ به $V(K)$ است به‌طوری‌که تصویر هر یک از سادک‌های C یک سادک از K باشد. اگر Z_p روی مجتمع سادکی C عمل کند و نگاشت $\varepsilon: C \rightarrow C$ که v را به $\varepsilon \cdot v$ تصویر می‌کند، به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ یک نگاشت سادکی باشد، مجتمع سادکی C یک Z_p -مجتمع سادکی است. اگر Z_p -مجتمع سادکی تحت هیچ‌یک از نگاشت‌های سادکی که به‌وسیله‌ی $\{\varepsilon \in Z_p \setminus \{1\}\}$ ها ساخته می‌شود، سادک ثابتی نداشته باشد، به آن Z_p -**مجتمع سادکی آزاد**^{۲۷} گفته می‌شود. توجه کنید که منظور از ۱ در این‌جا، عضو یکه‌ی گروه Z_p است. به‌ازای دو Z_p -مجتمع سادکی C و K ، اگر در نگاشت سادکی $f: C \rightarrow K$ به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ و $v \in V(C)$ ، $f(\varepsilon \cdot v) = \varepsilon \cdot f(v)$ باشد، به آن نگاشت سادکی Z_p -**متقارن**^{۲۸} گفته می‌شود. برای بیان راحت‌تر، از این پس به نگاشت سادکی Z_p -متقارن، Z_p -نگاشت سادکی^{۲۹} می‌گوییم.

۲.۱ تاریخچه رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری با استفاده از توپولوژی جبری

کنسر^{۳۰} [۱۹] در سال ۱۹۵۵ مساله‌ای را در نظریه مجموعه‌ها بیان کرد که به زبان گراف و ترکیبیات پیدا کردن عدد رنگی گراف کنسر^{۳۱} است. لواژ^{۳۲} [۲۲] حدس کنسر را در سال ۱۹۷۸ با استفاده از ابزارهای توپولوژی اثبات کرد. اثبات حدس کنسر توسط لواژ دریچه‌ای به روی مسایل گراف و ترکیبیات باز کرد و در نتیجه‌ی آن در سه دهه‌ی اخیر به‌کارگیری روش‌های توپولوژی در ترکیبیات مورد توجه محققین قرار گرفت.

در این زمینه، نقش نوع خاصی از ابزارهای توپولوژی به نام قضیه برسوک-اولام و نتایج معادل آن در رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری مورد اهمیت است. قضیه برسوک-اولام یکی از پرکاربردترین ابزارهای توپولوژی است که توپولوژی جبری مقدماتی را به جهان بیرون ارایه می‌دهد. این قضیه در توپولوژی جبری دارای اهمیت خاصی است زیرا دارای چندین

^{۲۶}simplicial map

^{۲۷}free

^{۲۸} Z_p -equivariant

^{۲۹}simplicial Z_p -map

^{۳۰}Kneser

^{۳۱}Kneser graph

^{۳۲}Lovász

نسخه معادل متفاوت، اثبات‌های متفاوت بسیار، تعمیم‌های زیاد و از همه مهم‌تر کاربردهای قابل توجه و جذاب است. یکی از نسخه‌های معروف قضیه‌ی برسوک-اولام، که می‌توان آن را به راحتی به ذهن سپرد، بیان می‌کند که برای هر نگاشت پیوسته $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نقطه $x \in S^n$ با شرط $f(x) = f(-x)$ وجود دارد [۲۳]. توجه کنید که $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ یک کره $(n+1)$ -بعدی است.

در این قسمت، تاریخچه‌ی رنگ‌آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری را که قضیه برسوک-اولام و نسخه‌های معادل آن را به کار گرفته‌اند، مرور می‌کنیم.

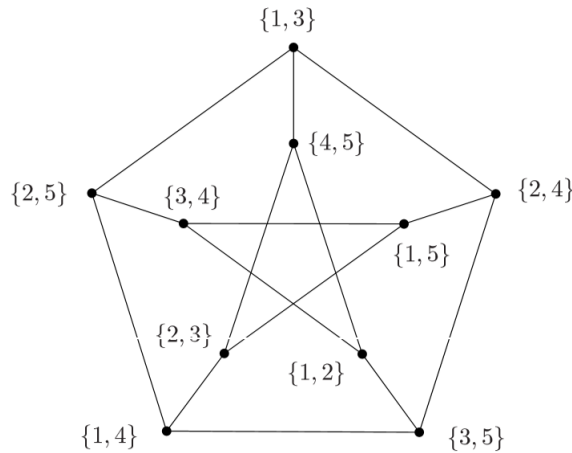
معرفی گراف‌ها و ابرگراف‌های کنسری

کنسر در سال ۱۹۵۵ مساله زیر را در نظریه‌ی مجموعه‌ها مطرح نمود [۱۹]: ”فرض کنید k و n دو عدد طبیعی باشند که $k \leq n$ است؛ N را مجموعه‌ای با n عضو و N_k را تمام زیرمجموعه‌های k -عضوی از N در نظر بگیرید؛ فرض کنید f نگاشتی از N_k به مجموعه‌ای مانند M باشد به طوری که اگر $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ باشد، آن‌گاه $f(K_1) \neq f(K_2)$ است؛ $m(k, n, f)$ را تعداد اعضای M و $m(k, n)$ را برابر $\min_f m(k, n, f)$ قرار دهید. ثابت کنید برای عدد ثابت k اعداد $m_o = m_o(k)$ و $n_o = n_o(k)$ وجود دارند به طوری که برای $n \geq n_o$ ، $m(k, n) = n - m_o$ است؛ در این‌جا $m_o(k) \geq 2k - 2$ و $n_o(k) \geq 2k - 1$ است؛ احتمالا هر دو نامساوی در حالت تساوی نیز برقرار هستند.“

با استفاده از یک نمادگذاری متفاوت، می‌توان مساله را به زبان گراف بیان کرد. $[n]$ را یک نمادگذاری برای مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ در نظر بگیرید؛ منظور از $\binom{[n]}{k}$ ، مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های k -عضوی از مجموعه‌ی $[n]$ است. قرار دهید $N = [n]$ ، در این صورت $N_k = \binom{[n]}{k}$ است. مجموعه $\binom{[n]}{k}$ را به عنوان مجموعه رئوس گراف کنسر $KG(n, k)$ در نظر بگیرید. دو راس از این گراف در صورتی با هم مجاورند که مجموعه‌های k -عضوی متناظر با این دو راس از هم مجزا باشند. در این صورت، نگاشت f یک رنگ‌آمیزی از گراف به دست آمده است که در آن M تعداد رنگ‌هاست و در واقع سوال کنسر محاسبه‌ی عدد رنگی گراف مذکور است. حدس کنسر به‌ازای $n \geq 2k - 1$ عبارت از $\chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2$ است.

از گراف‌های کنسر که عدد رنگی آن‌ها بدیهی است، می‌توان به گراف‌های کنسر $KG(n, 1)$ ، $KG(2k-1, k)$ و $KG(2k, k)$ اشاره کرد. با کمی دقت می‌توان دید که گراف کنسر $KG(n, 1)$ همان گراف کامل K_n با عدد رنگی n است؛ گراف کنسر $KG(2k-1, k)$ گرافی بدون یال است و در نتیجه عدد رنگی آن ۱ است؛ و در نهایت گراف کنسر $KG(2k, k)$ یک تطابق است و در نتیجه عدد رنگی آن برابر ۲ است. از گراف‌های کنسر جالب، می‌توان گراف کنسر $KG(5, 2)$ یا همان گراف معروف پترسن^{۳۳} را نام برد. با بررسی این گراف که در شکل ۱.۱ آمده است، به راحتی می‌توان دید که برای رنگ‌آمیزی این گراف حداقل ۳ رنگ لازم است که این تعداد کافی نیز

³³Peterson graph



شکل ۱.۱: گراف پترسن یا $KG(5, 2)$

ابرگراف‌های کنسری r -یکنواخت در نتیجه‌ی مطالعه‌ی تعمیم حدس کنسر چنین تعریف شدند:

تعریف ۱.۲.۱ (ابرگراف کنسر $KG^r(n, k)$). به‌ازای اعداد صحیح n ، k و r ، به‌شرط این‌که $n \geq rk$ و $r \geq 2$ باشد، گراف کنسر $KG^r(n, k)$ یک ابرگراف r -یکنواخت با مجموعه رئوس $\binom{[n]}{k}$ است که مجموعه یال‌های آن شامل تمام r -تایی‌های دو به دو مجزا از مجموعه‌ی $\binom{[n]}{k}$ است. به‌عبارت دیگر

$$E(KG^r(n, k)) = \{ \{e_1, \dots, e_r\} : e_i \subseteq [n]; |e_i| = k; \forall i \neq j \in [r], e_i \cap e_j = \emptyset \}.$$

تعریف ۲.۲.۱ (ابرگراف کنسر $KG^r(\mathcal{H})$). برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ ، که $\mathcal{H}$ مجموعه‌ای متناهی است، و عدد صحیح $r \geq 2$ ، ابرگراف کنسری $KG^r(\mathcal{H})$ ابرگرافی است که مجموعه رئوس و یال‌های آن به ترتیب برابر است با:

$$V(KG^r(\mathcal{H})) = E(\mathcal{H}),$$

$$E(KG^r(\mathcal{H})) = \{ \{e_1, \dots, e_r\} : e_1, \dots, e_r \in E(\mathcal{H}), e_i \cap e_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \}.$$

برای $r = 2$ ، به جای $KG^r(\mathcal{H})$ ، از نماد $KG(\mathcal{H})$ استفاده می‌کنیم. باید توجه داشت که اگر $\mathcal{H} = ([n], \binom{[n]}{k})$ باشد، گراف $KG^r(\mathcal{H})$ همان گراف کنسر $KG^r(n, k)$ است.

نکته قابل توجه در مورد رنگ‌آمیزی گراف‌های کنسری این است که با بررسی رنگ‌آمیزی گراف‌های کنسری، در واقع عدد رنگی تمام گراف‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم زیرا هر گراف دارای چندین نمایش کنسری^{۳۴} است. یک نمایش کنسری $KG(\mathcal{H})$ از گراف G ، یک تناظر

³⁴Kneser representation

دوسویه بین یال‌های ابرگراف $\mathcal{H}$ و رئوس گراف G است به‌طوری‌که دو راس از گراف G مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر با آن دو راس در ابرگراف $\mathcal{H}$ مجزا باشند. برای آرایه یک نمایش کنسری از گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ قرار دهید $E(\bar{G}) = \{e_1, \dots, e_m\}$. ابرگراف $\mathcal{H}$ با مجموعه رئوس $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{e_1, \dots, e_m\}$ و مجموعه یال‌های

$$E(\mathcal{H}) = \left\{ \{v_i\} \cup \left(\bigcup_{v_i \in e_k} \{e_k\} \right) \mid i = 1, \dots, n \right\}$$

را در نظر می‌گیریم. در ابرگراف $\mathcal{H}$ ، یال متناظر با راس v_i یعنی $\{v_i\} \cup \{e_k \mid v_i \in e_k\}$ و یال متناظر با راس v_j یعنی $\{v_j\} \cup \{e_k \mid v_j \in e_k\}$ در صورتی مجزا هستند که در گراف G به‌ازای یالی مانند e ، $v_i, v_j \in e$ باشند یا به عبارت دیگر این دو راس در گراف G مجاور باشند. از طرفی به‌ازای هر دو راس مجاور در گراف G ، به‌وضوح یال‌های متناظر در ابرگراف $\mathcal{H}$ مجزا هستند. بنابراین $KG(\mathcal{H})$ یک نمایش کنسری برای گراف G است. باید توجه داشت که می‌توان به تعداد دلخواه راس تنها به ابرگراف $\mathcal{H}$ اضافه کرد بدون این‌که تغییری در گراف کنسر $KG(\mathcal{H})$ ایجاد شود و لذا به راحتی می‌توان بیشمار نمایش کنسری از گراف G به‌دست آورد.

قضیه لواژ- کنسر و دو اثبات از آن

همان‌طور که پیش از این ذکر شد، لواژ [۲۲] حدس کنسر را با روشی بسیار جذاب اثبات کرد. او برای حل این مساله، عدد رنگی گراف کنسر $KG(n, k)$ را با استفاده از توپولوژی جبری محاسبه کرد. در نتیجه، حدس کنسر که ۲۳ سال به عنوان یک مساله‌ی باز مطرح بود، اثبات شد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه لواژ- کنسر [۲۲]). به ازای $k > 0$ و $n \geq 2k - 1$ ، داریم:

$$\chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2.$$

به راحتی می‌توان دید که عدد رنگی گراف کنسر حداکثر $n - 2k + 2$ است. برای این کار، برای هر راس $F \in \binom{[n]}{k}$ رنگ‌آمیزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\chi(F) := \min\{\min(F), n - 2k + 2\}.$$

در رنگ‌آمیزی فوق برای هر مجموعه $F \in \binom{[n]}{k}$ ، $\chi(F) \in \{1, 2, \dots, n - 2k + 2\}$ است. فرض کنید دو مجموعه F و F' رنگ یکسان داشته باشند. اگر $\chi(F) = \chi(F') = i < n - 2k + 2$ باشد، در این صورت واضح است که F و F' مجزا نیستند. اگر $\chi(F) = \chi(F') = n - 2k + 2$ باشد، در این صورت F و F' زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $2k - 1$ عضوی $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$ هستند و بنابراین مجزا نیستند. لذا، رنگ‌آمیزی فوق برای $KG(n, k)$ با $n - 2k + 2$ رنگ، یک رنگ‌آمیزی مجاز است و بنابراین $\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2$ است.

اما قسمت سخت در قضیه لواژ-کنسر، اثبات رابطه‌ی $\chi(KG(n, k)) \geq n - 2k + 2$ است. پس از این که لواژ حدس کنسر را اثبات کرد، اثبات‌های متعددی برای محاسبه‌ی کران پایین $\chi(KG(n, k))$ ارائه شد. از بین این اثبات‌ها، دو اثبات کوتاه برای حدس کنسر را بیان می‌کنیم که در اثبات آن‌ها از یکی از نسخه‌های قضیه‌ی برسوک-اولام یعنی قضیه‌ی تعمیم‌یافته لیوسترنیک-اشنایرلمن^{۳۵} استفاده شده است. اثبات اول یکی از ساده‌ترین اثبات‌هاست که توسط گرین^{۳۶} [۱۷] ارائه شده و اثبات دوم توسط بارانی^{۳۷} [۹] و با استفاده از لم گیل^{۳۸} ارائه شده است.

برای بیان اثبات گرین، لازم است که با **خم لحظه‌ای**^{۳۹} آشنا شویم. خم $\{\gamma(t) | t \in \mathcal{R}\}$ با $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ خم لحظه‌ای در $\mathcal{R}^d$ است. در لم زیر ویژگی کلیدی این خم که در اثبات قضیه تعمیم‌یافته لیوسترنیک-اشنایرلمن به آن نیاز است، آورده شده است.

لم ۱.۲.۱. هیچ ابرصفحه‌ای خم لحظه‌ای γ در $\mathcal{R}^d$ را در بیش از d نقطه قطع نمی‌کند.

برهان. یک ابرصفحه در $\mathcal{R}^d$ مانند h در معادله‌ی $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = b$ که در آن $(a_1, \dots, a_d) \neq 0$ است، صدق می‌کند. بنابراین، اگر نقطه‌ای از خم $\gamma(t)$ در ابرصفحه‌ی h قرار بگیرد، آن‌گاه $a_1t + a_2t^2 + \dots + a_dt^d = b$ است. این یعنی مقادیری از t که به‌ازای آن‌ها خم $\gamma(t)$ ابرصفحه‌ی h را قطع می‌کند، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی چندجمله‌ای $p(t) = (\sum_{i=1}^d a_it^i) - b$ از درجه‌ی حداکثر d هستند. چنین چندجمله‌ای حداکثر d ریشه دارد و بنابراین بیش از d تقاطع اتفاق نمی‌افتد.

□

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه تعمیم‌یافته لیوسترنیک-اشنایرلمن [۱۷]). اگر S^n با $n+1$ مجموعه‌ی باز یا بسته $A_1, \dots, A_{n+1}$ پوشانده شده باشد، آن‌گاه i ای وجود دارد که $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ که در آن $-A_i = \{x | -x \in A_i\}$ است.

اثبات اول از قضیه لواژ-کنسر (گرین [۱۷]). برای گراف کنسر دلخواه $KG(n, k)$ ، مقدار d را برابر $n - 2k + 1$ قرار می‌دهیم. مجموعه‌ی n عضوی $X \subseteq S^d$ را که هر ابرصفحه گذرنده از مرکز S^d حداکثر شامل d نقطه از X است، در نظر بگیرید. برای وجود این مجموعه، کافی است n نقطه روی خم لحظه‌ای در $\mathcal{R}^d$ را روی کره S^d تصویر کنیم. رئوس $KG(n, k)$ را همان مجموعه‌ی $\binom{X}{k}$ در نظر بگیرید (به عبارت دیگر اعضای $[n]$ را با نقاط X یکسان در نظر بگیرید). فرض کنیم که یک رنگ‌آمیزی مجاز از $KG(n, k)$ با حداکثر $n - 2k + 1$ رنگ وجود دارد. یکی از این رنگ‌آمیزی‌ها را انتخاب می‌کنیم و مجموعه‌های $A_1, \dots, A_d$ را چنین

^{۳۵}Generalized Lyusternik-Shnirel'man theorem

^{۳۶}Greene

^{۳۷}Bárány

^{۳۸}Gale's lemma

^{۳۹}moment curve

تعریف می‌کنیم: نقطه $x \in S^d$ در A_i قرار دارد اگر حداقل یک k -تایی $F \in \binom{X}{k}$ با رنگ i در نیمکره باز $H(x) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle > 0\}$ به مرکز x قرار داشته باشد. در نهایت قرار می‌دهیم $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$.

واضح است که $A_1, \dots, A_d$ مجموعه‌های باز و A_{d+1} مجموعه‌ای بسته است. با استفاده از قضیه لیوسترنیک-اشنایرلمن، $[d+1]$ و $x \in S^d$ که $x, -x \in A_i$ وجود دارند. اگر $i \leq d$ باشد، دو مجموعه k -تایی مجزا با رنگ i که یکی در نیمکره باز $H(x)$ و دیگری در نیمکره باز $H(-x)$ است، وجود دارند. این بدین معنی است که رنگ‌آمیزی گراف کنسر مجاز نبوده است.

اگر $i = d+1$ باشد، $H(x)$ و $H(-x)$ هرکدام حداکثر $k-1$ نقطه از X را دربردارند. بنابراین $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))$ (اشتراک S^d با ابرصفحه‌ای گذرنده از مبدا) حداقل شامل $n - 2k + 2 = d + 1$ نقطه از X است که با انتخاب X در تناقض است. $\square$

قبل از ارائه‌ی دومین اثبات، نیاز داریم که لم کمکی زیر را بیان کنیم.

لم ۲.۲.۱ (لم گیل [۱۶]). به‌ازای هر $d \geq 0$ و هر $k \geq 1$ ، یک مجموعه $X \subset S^d$ از $2k+d$ نقطه وجود دارد که هر نیمکره باز S^d شامل حداقل k نقطه از X است.

اثبات دوم از قضیه لواژ-کنسر (بارانی [۹]). برای گراف $KG(n, k)$ ، d را برابر $n-2k$ قرار می‌دهیم (بعدی که در این‌جا در نظر گرفته شده از بعدی که در اثبات گرین در نظر گرفته شده، یکی کمتر است). فرض کنیم $X \subset S^d$ مجموعه‌ای باشد که در لم گیل صادق است. اگر مجموعه $[n]$ و X را یکسان در نظر بگیریم، مجموعه رؤوس $KG(n, k)$ زیرمجموعه‌های k -تایی از X هستند. فرض کنیم حکم برقرار نباشد و یک $(d+1)$ -رنگ‌آمیزی مجاز از $KG(n, k)$ انتخاب شده باشد. مجموعه‌های $A_1, \dots, A_{d+1} \subseteq S^d$ را چنین تعیین می‌کنیم: اگر حداقل یک مجموعه k -تایی $F \in \binom{X}{k}$ با رنگ i در نیمکره باز $H(x)$ به مرکز x قرار داشته باشد، $x \in S^d$ را در A_i قرار می‌دهیم. از آن‌جا که بنابر لم گیل، هر $H(x)$ حداقل شامل یک زیرمجموعه‌ی k -تایی است، $A_1, \dots, A_{d+1}$ یک پوشش برای S^d تشکیل می‌دهند. بنابر قضیه لیوسترنیک-اشنایرلمن، $[d+1]$ و $x \in S^d$ وجود دارند که $x, -x \in A_i$ باشند. بنابراین، دو مجموعه‌ی مجزای k -تایی با رنگ i یکی در $H(x)$ و دیگری در $H(-x)$ وجود دارند که با مجاز بودن رنگ‌آمیزی در تناقض است. $\square$

اگر در اثبات فوق از نسخه‌ی تقویت شده‌ی لم گیل استفاده شود، نسخه‌ی قوی‌تری از قضیه‌ی لواژ-کنسر یعنی قضیه اسکرایور^{۴۰}، که در ادامه آمده است، به‌دست می‌آید.

اگر هیچ دو عضو متوالی به پیمانانه^{۴۱} n در مجموعه $S \in \binom{[n]}{k}$ وجود نداشته باشند (یعنی اگر $i \in S$ ، آن‌گاه $i+1 \notin S$ و اگر $n \in S$ ، آن‌گاه $1 \notin S$)، یک مجموعه‌ی پایدار^{۴۲} است. نماد

⁴⁰Schrijver's theorem

⁴¹modulo

⁴²stable

$([n]_k)_{stab}$ را برای خانواده زیرمجموعه‌های k - عضوی پایدار $[n]$ به کار می‌بریم.

تعریف ۳.۲.۱ (گراف اسکرایور). گراف اسکرایور، عبارت است از:

$$SG(n, k) = KG\left(\left([n]_k\right)_{stab}\right).$$

گراف اسکرایور $SG(n, k)$ ، یک زیرگراف القایی از گراف کنسر $KG(n, k)$ است.

لم ۳.۲.۱ (لم گیل تقویت شده). یک زیرمجموعه $(2k + d)$ - عضوی $S \subset S^d$ چنان وجود دارد که با در نظر گرفتن یک یکسان‌سازی مناسب بین X و $[n]$ ، هر نیم‌کره باز شامل یک زیرمجموعه k - تایی پایدار از $[n]$ باشد.

قضیه ۳.۲.۱ (قضیه اسکرایور [۲۷]). برای $n \geq 2k \geq 0$ ، داریم

$$\chi(SG(n, k)) = \chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2.$$

اسکرایور نشان داد که $SG(n, k)$ یک زیرگراف راس-بحرانی^{۴۳} از گراف $KG(n, k)$ است، یعنی با حذف هر راس از $SG(n, k)$ عدد رنگی گراف کاهش می‌یابد.

تعمیم‌هایی از قضیه‌ی لواژ-کنسر

در این قسمت برخی نتایج در خصوص رنگ‌آمیزی ابرگراف‌های کنسری را مرور می‌کنیم. مطالعه‌ی ابرگراف‌های کنسری $KG^r(\mathcal{H})$ برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ و عدد صحیح $r \geq 2$ در سال ۱۹۷۶ توسط اردیش [۱۵] آغاز شد. اردیش [۱۵] یک کران بالا برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری $KG^r(n, k)$ ارائه داد و حدس زد عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری احتمالاً برابر همین کران است. این حدس که در واقع تعمیمی از قضیه لواژ-کنسر است، در سال ۱۹۸۶ توسط آلن^{۴۴}، فرانکل^{۴۵} و لواژ [۷] اثبات شد.

قضیه ۴.۲.۱ (آلن، فرانکل و لواژ [۷]). برای اعداد صحیح n, k, r که $r \geq 2$ و $n \geq rk$ داریم

$$\chi(KG^r(n, k)) = \left\lceil \frac{n - r(k - 1)}{r - 1} \right\rceil.$$

یکی از تعمیم‌های قابل توجه و مهم، کران دلنیکوف-کریز (دلنیکوف برای $r = 2$ [۱۳]، کریز [۲۰]) برحسب عدد r - رنگ‌پذیری نقصانی^{۴۶} است. این عدد به ازای $r = 2$ توسط دلنیکوف^{۴۷} [۱۳] و بازای r دلخواه توسط کریز^{۴۸} [۲۰] معرفی شد.

^{۴۳}vertex-critical

^{۴۴}Alon

^{۴۵}Frankl

^{۴۶} r -colorability defect

^{۴۷}Dol'nikov

^{۴۸}Kříž

تعریف ۴.۲.۱ (عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی). برای عدد صحیح r و ابرگراف $\mathcal{H}$ ، عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی ابرگراف $\mathcal{H}$ که با نماد $cd^r(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود، کم‌ترین تعداد راسی است که با حذف آن‌ها از ابرگراف $\mathcal{H}$ ، ابرگراف القایی روی رئوس باقی‌مانده r -رنگ‌پذیر است. به عبارت دیگر

$$cd^r(\mathcal{H}) = \min\{|Y| : Y \subseteq V(\mathcal{H}), \chi(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus Y]) \leq r\}.$$

قضیه ۵.۲.۱ (قضیه دلنیکوف-کریز). برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}$ و عدد صحیح $r \geq 2$ داریم

$$\chi(KG^r(\mathcal{H})) \geq \left\lceil \frac{cd^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rceil.$$

با توجه به این که $cd^r(KG(n, k)) = n - r(k-1)$ و $\left\lceil \frac{cd^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n - r(k-1)}{r-1} \right\rceil$ ، قضیه دلنیکوف-کریز کران ارایه شده در قضیه‌ی آلن، فرانکل و لواژ را تعمیم می‌دهد. نتیجه‌ی مذکور به روش‌های مختلفی تعمیم یافته است. یکی از این تعمیم‌ها قضیه‌ای است که سیمونی^{۴۹} و تاردوش^{۵۰} [۳۰] با استفاده از قضیه‌ی کی فن^{۵۱} درباره وجود زیرگراف‌های کاملاً رنگارنگ ارایه دادند که در نتیجه‌ی آن کران پایینی برای عدد رنگی موضعی گراف‌ها به دست آمده است.

قضیه ۶.۲.۱ (سیمونی و تاردوش [۳۰]). فرض کنید $\mathcal{H}$ یک ابرگراف باشد و $d = cd^2(\mathcal{H})$. به‌ازای هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG(\mathcal{H})$ با رنگ‌های $\{1, 2, \dots, C\}$ (به‌ازای C دلخواه)، یک زیرگراف دوبخشی کامل کاملاً رنگارنگ $K_{\lfloor d/2 \rfloor, \lfloor d/2 \rfloor}$ از $KG(\mathcal{H})$ با d رنگ مختلف وجود دارد که رنگ‌ها بین دو بخش زیرگراف دوبخشی، متناظر با ترتیب طبیعی آن‌ها در تناوبند.

علیشاهی و حاجی‌ابوالحسن [۴]، مفاهیم جدیدی مانند عدد تناوبی بردار و عدد تناوبی گراف معرفی کردند و با استفاده از این مفاهیم توانستند برخی از قضیه‌ها و کران‌های موجود را بهبود دهند. آن‌ها با به کار بستن لم تاکر، نسخه‌ی ترکیبیاتی قضیه‌ی برسوک اولام، کران دلنیکوف-کریز را برحسب عدد تناوبی بهبود دادند. پس از معرفی عدد تناوبی، قضیه علیشاهی-حاجی‌ابوالحسن را بیان می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که به‌ازای عدد صحیح r ، $Z_r = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^r\}$ یک گروه دوری ضربی از اندازه‌ی r با مولد ω است. به‌ازای دنباله‌ی $X = (x_1, \dots, x_n) \in (Z_r \cup \{0\})^n$ ، زیردنباله‌ی $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ با $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ را در نظر بگیرید. اگر به‌ازای هر $j \in [m]$ ، $x_{i_j} \neq 0$ باشد و به‌ازای هر $j \in [m-1]$ ، $x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}$ باشد، به زیردنباله‌ی مذکور یک **زیردنباله‌ی متناوب**^{۵۲} از X گفته می‌شود.

⁴⁹Simonyi

⁵⁰Tardos

⁵¹Ky Fan's theorem

⁵²alternating

عدد تناوبی بردار X ^{۵۳}، که با نماد $alt(X)$ نمایش داده می شود، اندازه ی بزرگ ترین زیر دنباله ی متناوب از دنباله ی X است. همچنین برای بردار صفر $(\circ, \dots, \circ)$ ، $alt(\circ) = 0$ برابر صفر تعریف شده است. به عنوان مثال اگر $X = (\omega^4, \circ, \omega^2, \omega, \circ, \omega, \omega^3, \omega)$ برداری در $(Z_7 \cup \{\circ\})^n$ باشد، $alt(X)$ برابر ۵ است.

به ازای $X^\varepsilon = \{i : x_i = \varepsilon\}$ ، $\varepsilon \in Z_r$ و $X = (x_1, \dots, x_n) \in (Z_r \cup \{\circ\})^n$ را در نظر بگیرید. با این تعریف، r تایی $(X^\varepsilon)_{\varepsilon \in Z_r}$ ، به طور منحصر به فردی X را مشخص می کند و بالعکس. بنابراین تعریف، می توان نوشت $X = (X^\varepsilon)_{\varepsilon \in Z_r}$. نماد $|X|$ نشان دهنده ی تعداد درایه های ناصفر بردار X است، یعنی $|X| = \sum_{\varepsilon \in Z_r} |X^\varepsilon|$. برای دو بردار $X, Y \in (Z_r \cup \{\circ\})^n$ ، $X \subseteq Y$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon \in Z_r$ ، $X^\varepsilon \subseteq Y^\varepsilon$ باشد.

برای ابرگراف $\mathcal{H}$ و نگاشت دوسویی $\sigma : [n] \rightarrow V(\mathcal{H})$ ، r امین عدد تناوبی ابرگراف $\mathcal{H}$ متناظر با جایگشت σ برابر بیش ترین مقدار ممکن k است که یک بردار $X \in (Z_r \cup \{\circ\})^n$ با $alt(X) = k$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $i \in [r]$ ، $E(\mathcal{H}[\sigma(X^i)]) = \emptyset$ باشد. به عبارت دیگر

$$alt_\sigma^r(\mathcal{H}) = \max \{alt(X) : E(\mathcal{H}[\sigma(X^\varepsilon)]) = \emptyset, \forall \varepsilon \in Z_r\}.$$

r امین عدد تناوبی ابرگراف $\mathcal{H}$ ^{۵۴} که با $alt^r(\mathcal{H})$ نمایش داده می شود، بدین صورت تعریف می شود:

$$alt^r(\mathcal{H}) = \min_\sigma alt_\sigma^r(\mathcal{H}),$$

که مینیمم از بین تمام نگاشت های دوسویی $\sigma : [n] \rightarrow V(\mathcal{H})$ انتخاب می شود (برای جزئیات بیشتر می توانید به [۴] مراجعه کنید). از این پس برای راحتی به جای نماد $alt^r(\mathcal{H})$ از $alt(\mathcal{H})$ استفاده می کنیم.

علیشاهی و حاجی ابوالحسن [۴] با استفاده از لم Z_p - تاکر (نسخه ی ترکیبیاتی قضیه برسوک - اولام)، قضیه ی زیر را اثبات کردند.

قضیه ۷.۲.۱ (علیشاهی و حاجی ابوالحسن [۴]). برای هر ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}$ و عدد صحیح $r \geq 2$ داریم

$$\chi(KG^r(\mathcal{H})) \geq \left\lceil \frac{|V(\mathcal{H})| - alt^r(\mathcal{H})}{r - 1} \right\rceil.$$

به راحتی دیده می شود که $|V(\mathcal{H})| - alt_r(\mathcal{H}) \geq cd_r(\mathcal{H})$ است. همچنین، این نامساوی در بیشتر مواقع اکید است. لذا، کران فوق نسبت به کران دلنیکوف - کریز، کران قوی تری است. علیشاهی و حاجی ابوالحسن عدد رنگی چندین خانواده از گراف ها را با استفاده از کران پایین مذکور به دست آوردند [۳].

⁵³ alternation number of vector X

⁵⁴ r -alternation number of hypergraph $\mathcal{H}$

یک همریختی^{۵۵} از گراف G به گراف H ، یک نگاشت $f: V(G) \rightarrow V(H)$ است که مجاورت رئوس را حفظ می‌کند. برای گراف G ، عدد وابسته به تناوب^{۵۶} در گراف G که با $\zeta(G)$ نمایش داده می‌شود برابر است با

$$\zeta(G) = \max_{\mathcal{H}} \{|V(\mathcal{H})| - alt(\mathcal{H}) : KG(\mathcal{H}) \longleftrightarrow G\}.$$

علیشاهی و حاجی‌ابوالحسن با استفاده از عدد وابسته به تناوب، قضیه‌ی ۶.۲.۱ را نیز بدین صورت تعمیم دادند:

قضیه ۸.۲.۱ (علیشاهی و حاجی‌ابوالحسن [۴]). فرض کنید G یک گراف باشد. برای هر رنگ‌آمیزی دلخواه از G با رنگ‌های $\{1, 2, \dots, C\}$ (به‌ازای C دلخواه)، یک زیرگراف دوبخشی کامل کاملاً رنگارنگ $K_{\lceil \zeta(G)/2 \rceil, \lfloor \zeta(G)/2 \rfloor}$ از G با $\zeta(G)$ رنگ متفاوت وجود دارد که رنگ‌ها بین دو بخش زیرگراف دوبخشی، متناظر با ترتیب طبیعی آن‌ها در تناوبند.

از این قضیه نتیجه می‌شود که به‌ازای گراف دلخواه G ، اگر $\chi(G) = \zeta(G)$ و $\chi(G)$ عددی زوج باشد، $\chi_c(G) = \chi(G)$ است. آن‌ها با استفاده از این کران توانستند عدد رنگی خانواده‌ای از گراف‌ها را تعیین کنند [۳].

میونیر [۲۶]، با اثبات این که به‌ازای عدد اول p در هر رنگ‌آمیزی مجاز از ابرگراف کنسر $KG^p(\mathcal{H})$ یک زیرابرگراف رنگارنگ p -بخشی بزرگ وجود دارد، قضیه‌ی ۸.۲.۱ را بهبود بخشید.

قضیه ۹.۲.۱ (میونیر [۲۶]). فرض کنید p عددی اول و $\mathcal{H}$ یک ابرگراف دلخواه باشد. هر رنگ‌آمیزی مجاز c از $KG^p(\mathcal{H})$ با رنگ‌های $1, \dots, t$ (به‌ازای t دلخواه) شامل یک ابرگراف p -یکنواخت p -بخشی کامل با بخش‌های $U_1, \dots, U_p$ است که در شرایط زیر صادق است.

- این ابرگراف $|V(\mathcal{H})| - alt_p(\mathcal{H})$ راس دارد.
- به‌ازای $j = 1, \dots, p$ ، تفاوت مقادیر $|U_j|$ حداکثر یکی است.
- به‌ازای هر j ، رئوس U_j رنگ‌های متمایز دارند.

در نتیجه‌ی این قضیه، کرانی برای عدد رنگی موضعی ابرگراف کنسر $KG^p(\mathcal{H})$ به‌ازای عدد اول p معرفی شد.

قضیه ۱۰.۲.۱ (میونیر [۲۶]). فرض کنید $\mathcal{H}$ یک ابرگراف باشد، به‌ازای هر عدد اول p داریم

$$\chi_l(KG^p(\mathcal{H})) \geq \min \left(\left\lceil \frac{|V(\mathcal{H})| - alt_p(\mathcal{H})}{p} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{|V(\mathcal{H})| - alt_p(\mathcal{H})}{p-1} \right\rceil \right).$$

⁵⁵graph homomorphism

⁵⁶altermatic number

فصل ۲

کرانی جدید برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری

از مهم‌ترین کران پایین‌ها برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری، می‌توان به کران پایین‌هایی که بر اساس یک پارامتر ترکیبیاتی به نام عدد رنگی نقصانی ارایه شده‌اند، اشاره کرد. در این فصل، برای ابرگراف‌ها یک پارامتر ترکیبیاتی جدید به نام عدد رنگی نقصانی منصفانه^۱ تعریف می‌کنیم. با استفاده از عدد رنگی نقصانی منصفانه که در واقع نسخه‌ی اصلاح‌شده‌ی عدد رنگی نقصانی است، کران پایین‌هایی را که بر اساس عدد رنگی نقصانی توسط دلنیکوف (۱۹۸۸)، کریز (۱۹۹۲)، و زیگلر (۲۰۰۲) ارایه شده‌اند، بهبود می‌دهیم. به عبارت دقیق‌تر، کران پایینی برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری تعمیم‌یافته، که توسط زیگلر معرفی شدند، ارایه می‌کنیم که کران پایین زیگلر و به‌ویژه کران پایین دلنیکوف و کریز را به‌طور اساسی بهبود می‌دهد. علاوه‌بر این که این کران همواره به خوبی کران پایین زیگلر است، خانواده‌هایی از ابرگراف‌ها نیز وجود دارند که در آن‌ها تفاوت مقدار این دو کران پایین می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه بزرگ باشد. هم‌چنین، قابل ذکر است که برای خانواده‌ای از ابرگراف‌ها نشان می‌دهیم عدد رنگی نقصانی منصفانه کران پایین دقیقی برای عدد رنگی این ابرگراف‌ها فراهم می‌کند، درحالی که در این ابرگراف‌ها تفاوت مقدار عدد رنگی با کران پایین دلنیکوف-کریز و حتی کران پایین علیشاهی-حاجی‌ابوالحسن (۲۰۱۵) بی‌کران است. علاوه‌براین، ثابت می‌کنیم که در هر رنگ‌آمیزی مجاز

^۱equitable colorability defect

ابرگراف‌های کنسری یک زیرابرگراف رنگارنگ وجود دارد، یعنی نتیجه‌ی به‌دست آمده توسط میونیر (۲۰۱۴) را نیز تقویت می‌کنیم.

۱.۲ مقدمه و نتایج اصلی

در این بخش ابتدا عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی منصفانه‌ی یک ابرگراف را معرفی می‌کنیم. سپس نتایجی را که با استفاده از این پارامتر ترکیبیاتی جدید به‌دست آمده است، بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه این نتایج، نتایج دلنیکوف - کریز، زیگلر و میونیر را بهبود می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۲. عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی منصفانه‌ی ابرگراف $\mathcal{H}$ که از این پس آن را به‌اختصار با $\text{ecd}^r(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم، برابر کم‌ترین تعداد راس از ابرگراف $\mathcal{H}$ است که با حذف آن‌ها از ابرگراف $\mathcal{H}$ ، زیرابرگراف القایی روی رئوس باقی‌مانده یک r -رنگ‌آمیزی منصفانه دارد.

$$\text{ecd}^r(\mathcal{H}) = n - \max \left\{ \sum_{j=1}^r |N_j| : N_j \subseteq [n]; \forall j \in [r], E(\mathcal{H}[N_j]) = \emptyset; \right. \\ \left. \forall i \neq j, N_i \cap N_j = \emptyset \text{ و مجموعه‌ای منصفانه است} \right\}.$$

در فصل ۱ دیدیم که دلنیکوف برای $r = 2$ [۱۳] و کریز [۲۰] با استفاده از عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی کران پایین آلن -فرانکل - لواژ برای عدد رنگی $\text{KG}^r(n, k)$ ، که خود تعمیم قضیه لواژ - کنسر به حالت ابرگرافی است، را به خوبی به ابرگراف‌های کنسر $\text{KG}^r(\mathcal{H})$ تعمیم دادند. در این تعمیم که یکی از اصلی‌ترین تعمیم‌های قضیه لواژ - کنسر است، اثبات شد که برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}$ و عدد صحیح $r \geq 2$ ، $\left\lfloor \frac{\text{ecd}^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rfloor$ کران پایینی برای عدد رنگی ابرگراف کنسر $\text{KG}^r(\mathcal{H})$ است. در ذیل بهبودی از کران پایین دلنیکوف - کریز بر حسب عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی منصفانه که نتیجه‌ی مستقیم یکی از نتایج اصلی این فصل (قضیه ۳.۱.۲) است، آورده شده است.

قضیه ۱.۱.۲. به ازای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}$ و عدد صحیح $r (r \geq 2)$ ، داریم:

$$\chi(\text{KG}^r(\mathcal{H})) \geq \left\lfloor \frac{\text{ecd}^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rfloor.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که قضیه‌ی بالا کران پایین دلنیکوف - کریز را به درستی بهبود می‌بخشد. علاوه‌براین، در بخش آخر این فصل مثال‌هایی فراهم شده است که در آن‌ها اختلاف کران پایین دلنیکوف - کریز از کران پایین ارایه‌شده در بالا می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه بزرگ باشد.

مثال ۱.۱.۲. به ازای اعداد صحیح n, k و a که $rk - 1 \leq a < n$ است، $\mathcal{H} = \mathcal{H}(n, k, a)$ را ابرگرافی با مجموعه رئوس $[n]$ و مجموعه یال‌هایی که در زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

$$E(\mathcal{H}) = \{e \subseteq [n] : |e| = k \text{ و } e \not\subseteq \{n - a + 1, \dots, n\}\}.$$

در بخش آخر این فصل با استفاده از کران پایین ارایه شده در قضیه ۱.۱.۲ اثبات می‌کنیم که $\chi(KG^r(\mathcal{H})) = \left\lceil \frac{n-a}{r-1} \right\rceil$ است.

نکته‌ی جالب در مورد مثال مذکور این است که با استفاده از عدد رنگی نقصانی (کران پایین دلنیکوف-کریز) یا حتی عدد تناوبی ابرگراف $\mathcal{H}$ (کران پایین علیشاهی-حاجی ابوالحسن) نمی‌توان کران پایین مناسبی برای عدد رنگی ابرگراف کنسر $KG^r(\mathcal{H})$ به دست آورد. قابل ذکر است که به ازای ابرگراف دلخواه $\mathcal{F}$ ، برای عدد رنگی $KG^r(\mathcal{F})$ کران پایین علیشاهی-حاجی ابوالحسن (بر حسب عدد تناوبی $\mathcal{F}$) از کران پایین دلنیکوف-کریز بهتر عمل می‌کند (در بخش ۲.۳.۲ جزئیات بیش‌تری ارایه می‌شود). در بخش ۲.۳.۲ مثال‌های دیگری نیز برای مقایسه‌ی این کران‌های پایین فراهم شده‌اند.

ابرگراف $\mathcal{H} = ([n], E(\mathcal{H}))$ ، عدد صحیح r و بردار صحیح $s = (s_1, \dots, s_n)$ را که در آن $r \geq 2$ و به ازای هر $i \in [n]$ ، $1 \leq s_i < r$ باشد، در نظر بگیرید. اگر در (چند)مجموعه‌ی r -تایی $\{N_1, \dots, N_r\}$ هر $i \in [n]$ حداکثر در s_i تا از مجموعه‌های N_j ظاهر شود (اعضای تکراری را نیز به حساب می‌آوریم)، به آن یک مجموعه‌ی s -مجزا^۲ می‌گوییم. یادآوری می‌کنیم که چندمجموعه تعمیمی از مفهوم مجموعه است که در آن برخلاف مجموعه، چند نمونه‌ی یکسان می‌توانند عضو یک چندمجموعه باشند و تعداد یک عنصر، تعداد آن عضو در چندمجموعه‌ی مورد نظر است. باید توجه داشت که $(1, \dots, 1)$ -مجزا بودن معادل تعریف دو به دو مجزا است.

زیگلر [۳۶] تعریف ابرگراف کنسر را به ابرگراف کنسر s -مجزا $KG_s^r(\mathcal{H})$ و عدد r -رنگ پذیری نقصانی را به عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی s -مجزا بدین‌صورت تعمیم داد. ابرگراف کنسر s -مجزا، که با $KG_s^r(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود، یک ابرگراف (چندگانه) r -یکنواخت با مجموعه رئوس $E(\mathcal{H})$ و مجموعه یال‌های زیر است:

$$E(KG_s^r(\mathcal{H})) = \left\{ \{e_1, \dots, e_r\} : e_i \in E(\mathcal{H}), \text{مجزا است } s\text{-چندمجموعه‌ی } \{e_1, \dots, e_r\} \right\}.$$

به خاطر وجود بردار s ، هر یال $KG_s^r(\mathcal{H})$ لزوماً یک مجموعه نیست و ممکن است برخی از یال‌های $KG_s^r(\mathcal{H})$ یک چندمجموعه از اندازه‌ی r باشند. از این پس منظور از مجموعه می‌تواند چند مجموعه باشد. با تعریف $KG_s^r(\mathcal{H})$ ، ابرگراف کنسر s -مجزای $KG_s^r(n, k)$ همان ابرگراف $KG_s^r([n], \binom{[n]}{k})$ است. هم‌چنین، عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی s -مجزای ابرگراف $\mathcal{H}$ که با

^۲ r -(multi) set

^۳ s -disjoint

$cd_s^r(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$cd_s^r(\mathcal{H}) = \bar{n} - \max \left\{ \sum_{j=1}^r |N_j| : N_j \subseteq [n]; \forall j \in [r], E(\mathcal{H}[N_j]) = \emptyset; \right. \\ \left. \{N_1, \dots, N_r\} \text{ مجموعه‌ای } s\text{-مجزا است} \right\},$$

که در آن $\bar{n} = \bar{n}(s) = \sum_{i=1}^n s_i$.

زیگلر [۳۶، ۳۷] کران پایین دلنیکوف-کریز را به ابرگراف‌های کنسر s -مجزا چنین توسیع داد:

$$\chi(KG_s^r(\mathcal{H})) \geq \left\lceil \frac{cd_s^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rceil, \quad (1.2)$$

به شرطی که $\max_{i \in [n]} s_i < \mu(r)$ باشد، که در آن $\mu(r)$ بزرگ‌ترین عامل اول عدد صحیح r است. توجه کنید که کران پایین زیگلر به وضوح کران پایین دلنیکوف-کریز را نتیجه می‌دهد. کافی است بردار s را برابر مقدار $(1, \dots, 1)$ قرار دهیم، در این صورت $KG_s^r(\mathcal{H})$ همان $KG^r(\mathcal{H})$ و $cd_s^r(\mathcal{H})$ همان $cd^r(\mathcal{H})$ است. زیگلر هم‌چنین با استفاده از این کران پایین، عدد رنگی ابرگراف‌های کنسر s -مجزای $KG_s^r(n, k)$ را برای چند بردار صحیح s تعیین کرد. همان‌طور که در فصل ۱ ذکر شد، از دیگر تعمیم‌های مهم که در مورد قضیه لواژ-کنسر مطرح است، مربوط به وجود زیرگراف‌های دوبخشی کامل رنگارنگ بزرگ در رنگ‌آمیزی مجاز گراف‌ها است با این شرط که عدد رنگی کران پایین توپولوژیکی خاصی داشته باشد ([۴، ۱۰، ۱۱، ۲۸، ۲۹، ۳۰] را ببینید). سیمونی و تاردوش [۳۰] در قضیه ۶.۲.۱ وجود یک زیرگراف رنگارنگ با $cd^2(\mathcal{H})$ راس را در هر رنگ‌آمیزی مجاز $KG(\mathcal{H})$ تضمین کردند. برخی از توسیع‌های این نتیجه را می‌توانید در [۴، ۲۸] ببینید. وجود زیرابرگراف‌های رنگارنگ در رنگ‌آمیزی ابرگراف‌ها اولین بار توسط میونیر [۲۶] مورد مطالعه قرار گرفت. میونیر [۲۶] نتیجه‌ی سیمونی-تاردوش را با شرط این که p عددی اول باشد، به ابرگراف‌های کنسر $KG^p(\mathcal{H})$ تعمیم داد. او در واقع اثبات کرد که برای عدد اول p و ابرگراف $\mathcal{H}$ ، هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG^p(\mathcal{H})$ شامل یک زیرابرگراف p -بخشی-یکنواخت با بخش‌های $V_1, \dots, V_p$ است که در شرایط زیر صادق است:

$$\bullet \sum_{i=1}^p |V_i| = cd^p(\mathcal{H})$$

• به‌ازای هر $i, j \in [p]$ ، $\|V_i\| - \|V_j\| \leq 1$ است.

• به‌ازای هر $j \in [p]$ ، رئوس V_j رنگ‌های متمایز دارند.

قابل ذکر است نتایجی که در بالا در مورد وجود زیرگراف رنگارنگ ذکر شد و هم‌چنین نتیجه‌ی میونیر در مورد ابرگراف‌های یکنواخت در [۲] توسیع داده شده است.

فرض کنید r و n دو مقدار صحیح و $s = (s_1, \dots, s_n)$ یک بردار صحیح با شرط $1 \leq s_i < r$ باشد. به ازای مجموعه‌های $N_1, \dots, N_r \subseteq [n]$ ، اگر تفاوت مقادیر $|N_j|$ حداکثر یک باشد، (چند) مجموعه‌ی $\{N_1, \dots, N_r\}$ یک مجموعه‌ی منصفانه است. هم‌چنین، اگر این مجموعه منصفانه و s مجزا باشد، به مجموعه‌ی مذکور، مجموعه‌ی s -مجزای منصفانه می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۲. برای ابرگراف $\mathcal{H} = ([n], E(\mathcal{H}))$ ، عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی s -مجزای منصفانه^۴ را که با $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم، چنین تعریف می‌کنیم:

$$\text{ecd}_s^r(\mathcal{H}) = \bar{n} - \max \left\{ \sum_{j=1}^r |N_j| : N_j \subseteq [n]; \forall j \in [r], E(\mathcal{H}[N_j]) = \emptyset \right. \\ \left. \{N_1, \dots, N_r\} \text{ } s\text{-مجزای منصفانه است و} \right\},$$

که در آن $\bar{n} = \sum_{i=1}^n s_i$ است.

با توجه به این که برای $s = (1, \dots, 1)$ ، $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H})$ و $\text{ecd}^r(\mathcal{H})$ برابر هستند، از این پس به ازای $s = (1, \dots, 1)$ ، به جای $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H})$ از $\text{ecd}^r(\mathcal{H})$ استفاده می‌کنیم.

این قضیه علاوه بر این که نتیجه‌ی میونیر [۲۶] را به ابرگراف‌های کنسر s -مجزا $\text{KG}_s^p(\mathcal{H})$ توسعه می‌دهد، آن را به عدد r -رنگ‌پذیری نقصانی منصفانه نیز بهبود می‌دهد. هم‌چنین، کران پایینی که این قضیه برای عدد رنگی ابرگراف $\text{KG}_s^r(\mathcal{H})$ بر حسب عدد r -رنگ‌پذیری s -مجزای منصفانه $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H})$ فراهم می‌کند، از کران پایین زیگلر [۳۶، ۳۷] بهتر است.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{H} = ([n], E)$ یک ابرگراف، p یک عدد اول و $s = (s_1, \dots, s_n)$ یک بردار صحیح مثبت باشد که به ازای هر $i \in [n]$ ، $1 \leq s_i < p$ است. هر رنگ‌آمیزی مجاز از ابرگراف کنسر s -مجزای $\text{KG}_s^p(\mathcal{H})$ شامل یک زیرابرگراف p -بخشی p -یکنواخت با بخش‌های $V_1, \dots, V_p$ است که در شرایط زیر صادق است:

- $\sum_{i=1}^p |V_i| = \text{ecd}_s^p(\mathcal{H})$
- به ازای هر $i \in [n]$ ، اگر e_i یال دلخواهی در V_i باشد، $\{e_1, \dots, e_p\}$ یالی از ابرگراف $\text{KG}_s^p(\mathcal{H})$ است.
- اختلاف مقدار $|V_i|$ ‌ها حداکثر یک است، یعنی به ازای هر $i, j \in [p]$ ، $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ است.
- به ازای هر $j \in [p]$ ، رئوس مجموعه V_j رنگ‌های متمایز دارند.

با در نظر گرفتن $s = (1, \dots, 1)$ ، قضیه‌ی بالا قضیه‌ی میونیر را در حالت قوی‌تری نتیجه می‌دهد (استفاده از $\text{ecd}^r(\mathcal{H})$ به جای $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H})$).

^۴equitable s -disjoint r -colorability defect

همچنین از آنجایی که هر رنگ در حداکثر $p-1$ راس از هر یال $KG_s^p(\mathcal{H})$ ظاهر می‌شود، از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که اگر p عددی اول باشد، $\chi(KG_s^p(\mathcal{H})) \geq \left\lceil \frac{\text{ecd}_s^p(\mathcal{H})}{p-1} \right\rceil$ است. با به‌کاربردن این نتیجه، قضیه‌ی زیر که بهبودیافته‌ی قضیه‌ی زیگلر [۳۶، ۳۷] است، حاصل می‌شود.

قضیه ۳.۱.۲. ابرگراف $\mathcal{H} = ([n], E)$ ، عدد صحیح r و بردار صحیح مثبت $s = (s_1, \dots, s_n)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mu(r)$ بزرگ‌ترین عامل اول r باشد. اگر به‌ازای هر $i \in [n]$ ، $1 \leq s_i < \mu(r)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\chi(KG_s^r(\mathcal{H})) \geq \left\lceil \frac{\text{ecd}_s^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rceil.$$

با قرار دادن $s = (1, \dots, 1)$ قضیه‌ی ۱.۱.۲ از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود. با توجه به این که رابطه‌ی $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H}) \geq \text{cd}_s^r(\mathcal{H})$ همواره برقرار است، واضح است که قضیه‌ی ۱.۱.۲ نسبت به قضیه‌ی دلنیکوف-کریز قضیه‌ی قوی‌تری است.

۲.۲ اثبات نتایج اصلی

در این بخش به اثبات قضایای ۲.۱.۲ و ۳.۱.۲ می‌پردازیم. برای این کار، ابتدا برخی تعاریف و ابزارهای مقدماتی را مرور می‌کنیم. سپس قضیه ۲.۱.۲ را اثبات می‌کنیم. برای اثبات قضیه‌ی ۳.۱.۲، این قضیه را به حالتی که r عددی اول است، تبدیل می‌کنیم. در این حالت قضیه با توجه به بحثی که پس از قضیه‌ی ۲.۱.۲ آمده‌است، اثبات شده است.

۱.۲.۲ ابزارهای مقدماتی

فرض کنید p یک عدد اول و s یک عدد صحیح باشد که $1 \leq s < p$ است. مجتمع سادگی σ_{s-1}^{p-1} یک مجتمع سادگی است که مجموعه رؤوس آن Z_p است و مجموعه سادک‌های آن از تمام زیرمجموعه‌های ناتهی Z_p از اندازه حداکثر s تشکیل شده است.

به‌ازای بردار صحیح $s = (s_1, \dots, s_n) \in [p-1]^n$ ، تلفیق p -تایی s -مجزای $(\sigma^{n-1})_s^p$ یک مجتمع سادگی با مجموعه رؤوس $Z_p \times [n]$ است که مجموعه سادک‌های آن از تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مانند A از $Z_p \times [n]$ تشکیل شده است با این شرط که به‌ازای هر $i \in [n]$ ، زوج مرتب (ε, i) در حداکثر s_i تا $\varepsilon \in Z_p$ متفاوت ظاهر شده باشد، به عبارت دیگر

$$|\{\varepsilon \in Z_p : (\varepsilon, i) \in A\}| \leq s_i.$$

به راحتی می‌توان دید که $(\sigma^{n-1})_s^p = \sigma_{s_1-1}^{p-1} * \dots * \sigma_{s_n-1}^{p-1}$ است.

قضیه‌ی دلد^۵ [۱۲] که توسیع یافته‌ی قضیه‌ی برسوک اولام به زبان گروه‌هاست، در حالت خاص بیان می‌کند که اگر یک Z_p -نگاشت سادگی از یک فضای Z_p آزاد مانند C به فضای

⁵Dold's theorem

Z_p آزادی مانند K وجود داشته باشد، آن گاه بعد K از همبندی C^6 بزرگتر است. یادآوری می‌کنیم که اگر فضای توپولوژی X به گونه‌ای باشد که به ازای $k, l = -1, 0, 1, \dots$ ، $(k \geq -1)$ ، هر نگاشت پیوسته‌ی $f : S^l \rightarrow X$ قابل توسیع به نگاشت پیوسته‌ی $\bar{f} : B^{l+1} \rightarrow X$ باشد، فضای توپولوژی X ، k -همبند است. در این جا منظور از S^{-1} ، مجموعه‌ی تهی و منظور از B^0 یک نقطه‌ی تنهاست. هم‌چنین -1 -همبندی به معنای ناتهی بودن است. می‌دانیم که σ_{s-1}^{p-1} یک مجتمع سادگی $(s-2)$ -همبند است (با عمل Z_p). با توجه به این موضوع و لم همبندی برای تلفیق که براساس آن همبندی تلفیق دو فضای توپولوژی حداقل برابر جمع همبندی آن‌ها به علاوه ۲ است، نتیجه می‌گیریم که $(\sigma^{n-1})_s^p$ (و زیرتقسیم پایه‌ی آن) همبندی $2 - \sum_{i=1}^n s_i = \bar{n} - 2$ دارد.

۲.۲.۲ اثبات قضیه‌ی ۲.۱.۲

قابل ذکر است که در اثبات این قضیه از تابع $l(-)$ که توسط علیشاهی [۲] معرفی شده و از تابع‌های علامتی که توسط میونیر [۲۶] ارایه شده است، استفاده می‌کنیم. قبل از شروع اثبات، برخی از این توابع و نمادگذاری‌های مورد نیاز را معرفی می‌کنیم. فرض کنید p یک عدد صحیح و q یک عدد اول باشد. برای سادگی $\tau \in (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*q}$ ، با در نظر گرفتن $\tau^\varepsilon = \{(\varepsilon, j) : (\varepsilon, j) \in \tau\}$ ، تابع‌های $h(\cdot)$ و $l(\cdot)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(\tau) = \min_{\varepsilon \in Z_p} |\tau^\varepsilon|,$$

$$l(\tau) = p \cdot h(\tau) + |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| > h(\tau)\}|.$$

توجه کنید که توابع $h(-)$ و $l(-)$ چندین بار در طول اثبات مورد استفاده قرار می‌گیرند.

برهان. ابرگراف $\mathcal{H} = ([n], E(\mathcal{H}))$ ، عدد اول p و بردار صحیح مثبت $s = (s_1, \dots, s_n)$ که در آن به ازای هر $i \in [n]$ ، $1 \leq s_i < p$ است، را در نظر بگیرید. هم‌چنین برای ابرگراف کنسر $\text{KG}_s^p(\mathcal{H})$ ، رنگ‌آمیزی مجاز $c : E(\mathcal{H}) \rightarrow [t]$ را در نظر بگیرید. اگر مقدار $\text{ecd}_s^p(\mathcal{H})$ برابر صفر باشد، قضیه‌ی ۲.۱.۲ به وضوح برقرار است. بنابراین در ادامه‌ی اثبات فرض می‌کنیم که $\text{ecd}_s^p(\mathcal{H}) > 0$.

از این پس، برای راحتی در نمادگذاری، به جای $\sigma_{s_1-1}^{p-1} * \dots * \sigma_{s_n-1}^{p-1}$ از نماد K استفاده می‌کنیم. برای اعداد صحیح مثبت $a \in [n]$ و $b \in [t]$ ، مجتمع‌های سادگی W و U را چنین تعریف می‌کنیم:

$$W_a = \{\tau \in K : |\tau^\varepsilon| \in \{0, a\}, \forall \varepsilon \in Z_p\}, \quad W = \bigcup_{a=1}^n W_a,$$

⁶connectivity

$$U_b = \{\tau \in (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*t} : |\tau^\varepsilon| \in \{\circ, b\}, \forall \varepsilon \in Z_p\}, \quad U = \bigcup_{b=1}^t U_b.$$

سه نگاشت Z_p - متقارن دلخواه $s_0 : \sigma_{p-2}^{p-1} \rightarrow Z_p$ ، $s_1 : W \rightarrow Z_p$ و $s_2 : U \rightarrow Z_p$ را با انتخاب یک نماینده در هر دور در نظر بگیرید. توجه کنید که این سه تابع Z_p - متقارن هستند زیرا Z_p روی σ_{p-2}^{p-1} ، W و U آزادانه عمل می‌کند. به ازای هر سادک $\tau \in K$ و هر $\varepsilon \in Z_p$ ، قرار می‌دهیم:

$$\tau_\varepsilon = \{j \in [n] : (\varepsilon, j) \in \tau\}.$$

توجه کنید که $\tau_\varepsilon \subseteq [n] = V(\mathcal{H})$ است. همچنین، تعریف می‌کنیم:

$$l(\mathcal{H}) = \max \{l(\tau) : \tau \in K : E(\mathcal{H}[\tau_\varepsilon]) = \emptyset \quad \forall \varepsilon \in Z_p\}.$$

اگر $\{\tau \in K : \forall \varepsilon \in Z_p, E(\mathcal{H}[\tau_\varepsilon]) = \emptyset\} = \emptyset$ باشد، یعنی هر زیرمجموعه‌ی تک‌عضوی، یک یال از $\mathcal{H}$ است. در این حالت، $l(\mathcal{H})$ را برابر صفر تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $\bar{n} - l(\mathcal{H})$ همان $\text{ecd}_g^p(\mathcal{H})$ است. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$m = l(\mathcal{H}) + \max \{l(\tau_c) : \tau \in K, l(\tau) > l(\mathcal{H})\},$$

که در آن به‌ازای هر سادک τ در K ،

$$\tau_c = \{(\varepsilon, c(e)) \in Z_p \times [t] : e \in E(\mathcal{H}), e \subseteq \tau_\varepsilon\}.$$

از آن‌جا که $\text{ecd}_g^p(\mathcal{H}) = \bar{n} - l(\mathcal{H}) > 0$ است، مجموعه‌ی $\{l(\tau_c) : \tau \in K, l(\tau) > l(\mathcal{H})\}$ مخالف تهی است و در نتیجه m خوش‌تعریف است. با توجه به تعریف $K = (\sigma_{p-2}^{p-1})_g^p$ ، به‌ازای هر سادک τ از K ، مجموعه‌ی $\{\tau_\varepsilon : \varepsilon \in Z_p\}$ - مجزا است. با توجه به این مشاهدات و مجاز بودن رنگ‌آمیزی c از $\text{KG}_g^p(\mathcal{H})$ ، τ_c یا تهی است یا یک سادک از $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*t}$ است. در واقع، اگر $l(\tau) > l(\mathcal{H})$ باشد، τ_c یک سادک از $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*t}$ است. این مشاهدات در اثبات قضیه نقش مهمی دارند.

در ادامه، ابتدا نگاشت $\gamma : \text{sd } K \rightarrow Z_p^{*m}$ را به‌ازای هر سادک دلخواه τ در K بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

(الف) به‌ازای $l(\tau) \leq l(\mathcal{H})$ ، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $h(\tau) = 0$ باشد، $\gamma(\tau)$ را مساوی $(s_0(\bar{\tau}), l(\tau))$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\bar{\tau} = \{\varepsilon \in Z_p : \tau^\varepsilon = \emptyset\} \in \sigma_{p-2}^{p-1}.$$

۲. اگر $h(\tau) > 0$ باشد، $\gamma(\tau)$ را مساوی $(s_1(\bar{\tau}), l(\tau))$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\bar{\tau} = \bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| = h(\tau)\}} \tau^\varepsilon \in W.$$

(ب) توجه کنید به‌ازای $\tau_c, l(\tau) > l(\mathcal{H})$ تهی نیست و در نتیجه سادگی از $(\sigma_{p-1}^{p-1})^{*t}$ است. حال، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $h(\tau_c) = 0$ باشد، $\gamma(\tau)$ را مساوی $(s_0(\bar{\tau}_c), l(\mathcal{H}) + l(\tau_c))$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\bar{\tau}_c = \{\varepsilon \in Z_p : \tau_c^\varepsilon = \emptyset\} \in \sigma_{p-1}^{p-1}.$$

۲. اگر $h(\tau_c) > 0$ باشد، $\gamma(\tau)$ را مساوی $(s_\gamma(\bar{\tau}_c), l(\mathcal{H}) + l(\tau_c))$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\bar{\tau}_c = \bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| = h(\tau_c)\}} \tau_c^\varepsilon \in U.$$

ادعا ۱.۲.۲. نگاشت γ یک Z_p -نگاشت سادگی از $\text{sd } K$ به Z_p^{*m} است.

برهان. با توجه به این که توابع $s_0(-)$ ، $s_1(-)$ و $s_\gamma(-)$ نگاشت‌های Z_p -مقارن هستند، γ نیز Z_p -مقارن است. کفایت ثابت کنیم γ یک نگاشت سادگی است. فرض کنیم γ یک نگاشت سادگی نباشد. در این صورت، با توجه به سادگی‌های دو مجتمع سادگی $\text{sd } K$ و Z_p^{*m} ، می‌توان گفت دو سادک τ و τ' در K وجود دارند که $\tau \subsetneq \tau'$ ، $\gamma(\tau) = (\varepsilon_1, \beta)$ و $\gamma(\tau') = (\varepsilon_2, \beta)$ که در آن $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ و $\beta \in [m]$ است. با توجه به تعریف γ واضح است که دو نامساوی $l(\tau) \leq l(\mathcal{H})$ و $l(\tau') > l(\mathcal{H})$ هم‌زمان برقرار نیست. بنابراین تنها یکی از دو نامساوی $l(\tau) \leq l(\tau') \leq l(\mathcal{H})$ یا $l(\tau) \geq l(\tau') > l(\mathcal{H})$ امکان‌پذیر است که در ادامه جداگانه به بحث در مورد آن‌ها می‌پردازیم.

الف) فرض کنیم $l(\tau) \leq l(\tau') \leq l(\mathcal{H})$ باشد. در این حالت با توجه به تعریف γ ، $l(\tau) = l(\tau')$ است. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $h(\tau) = h(\tau') = 0$ باشد، با توجه به این که $\tau \subsetneq \tau'$ و

$$\varepsilon_1 = s_0(\{\varepsilon \in Z_p : \tau^\varepsilon = \emptyset\}) \neq s_0(\{\varepsilon \in Z_p : \tau'^\varepsilon = \emptyset\}) = \varepsilon_2,$$

رابطه‌ی $\{\varepsilon \in Z_p : \tau'^\varepsilon = \emptyset\} \subsetneq \{\varepsilon \in Z_p : \tau^\varepsilon = \emptyset\}$ را نتیجه می‌گیریم. بنابراین داریم

$$l(\tau') = p - |\{\varepsilon \in Z_p : \tau'^\varepsilon = \emptyset\}| > p - |\{\varepsilon \in Z_p : \tau^\varepsilon = \emptyset\}| = l(\tau),$$

که تناقض است.

۲. اگر $h(\tau') > 0$ باشد، داریم

$$l(\tau) = p \cdot h(\tau) + |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| > h(\tau)\}| \text{ و } l(\tau') = p \cdot h(\tau') + |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'^\varepsilon| > h(\tau')\}|.$$

با توجه به این که $l(\tau) = l(\tau')$ است و رابطه‌ی

$$\max \{|\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| > h(\tau)\}|, |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'^\varepsilon| > h(\tau')\}|\} \leq p - 1$$

نتیجه می‌گیریم که $h = h(\tau) = h(\tau')$ است و

$$|\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| > h\}| = |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'^\varepsilon| > h\}|.$$

با توجه به رابطه‌ی

$$\varepsilon_1 = s_1\left(\bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| = h\}} \tau^\varepsilon\right) \neq s_1\left(\bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'^\varepsilon| = h\}} \tau'^\varepsilon\right) = \varepsilon_2,$$

نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| = h\}} \tau^\varepsilon \neq \bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'^\varepsilon| = h\}} \tau'^\varepsilon.$$

از نامساوی فوق و روابط $\tau \subsetneq \tau'$ و $h = \min_{\varepsilon \in Z_p} |\tau^\varepsilon| = \min_{\varepsilon \in Z_p} |\tau'^\varepsilon|$ نتیجه می‌گیریم که

$$\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'^\varepsilon| = h\} \subsetneq \{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| = h\},$$

که تناقض است.

ب) فرض کنیم $l(\tau') \geq l(\tau) > l(\mathcal{H})$ باشد. توجه کنید که هر دو سادک τ'_c و τ_c سادک‌هایی در $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*t}$ هستند. با توجه به تعریف γ در این حالت $l(\tau_c) = l(\tau'_c)$ است. هم‌چنین با توجه به این که $\tau_c \subseteq \tau'_c$ ، $\tau \subsetneq \tau'$ است. علاوه‌براین در این رابطه تساوی رخ نمی‌دهد زیرا در غیر این صورت با توجه به تعریف γ ، $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ است که با نحوه‌ی انتخاب τ و τ' در تناقض است. مشابه مورد قبلی، دو حالت $h(\tau_c) = h(\tau'_c) = 0$ و $h(\tau'_c) > 0$ را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $h(\tau_c) = h(\tau'_c) = 0$ باشد، با توجه به $\tau_c \subsetneq \tau'_c$ و

$$\varepsilon_1 = s_0(\{\varepsilon \in Z_p : \tau_c^\varepsilon = \emptyset\}) \neq s_0(\{\varepsilon \in Z_p : \tau'^\varepsilon_c = \emptyset\}) = \varepsilon_2,$$

رابطه‌ی $\{\varepsilon \in Z_p : \tau'^\varepsilon_c = \emptyset\} \subsetneq \{\varepsilon \in Z_p : \tau_c^\varepsilon = \emptyset\}$ را داریم. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$l(\tau'_c) = p - |\{\varepsilon \in Z_p : \tau'^\varepsilon_c = \emptyset\}| > p - |\{\varepsilon \in Z_p : \tau_c^\varepsilon = \emptyset\}| = l(\tau_c),$$

که تناقض است.

۲. اگر $h(\tau'_c) > 0$ باشد، می دانیم که

$$l(\tau_c) = p \cdot h(\tau_c) + |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| > h(\tau_c)\}| \text{ و } l(\tau'_c) = p \cdot h(\tau'_c) + |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'_c{}^\varepsilon| > h(\tau'_c)\}|.$$

با توجه به روابط $l(\tau_c) = l(\tau'_c)$ و

$$\max \{ |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| > h(\tau_c)\}|, |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'_c{}^\varepsilon| > h(\tau'_c)\}| \} \leq p - 1$$

نتیجه می گیریم که $h = h(\tau_c) = h(\tau'_c)$ است و

$$|\{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| > h\}| = |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'_c{}^\varepsilon| > h\}|.$$

با توجه به رابطه‌ی

$$\varepsilon_1 = s_{\Upsilon} \left(\bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| = h\}} \tau_c^\varepsilon \right) \neq s_{\Upsilon} \left(\bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'_c{}^\varepsilon| = h\}} \tau'_c{}^\varepsilon \right) = \varepsilon_{\Upsilon},$$

داریم:

$$\bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| = h\}} \tau_c^\varepsilon \neq \bigcup_{\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'_c{}^\varepsilon| = h\}} \tau'_c{}^\varepsilon.$$

با در نظر گرفتن نامساوی فوق و روابط $\tau_c \subsetneq \tau'_c$ و $h = \min_{\varepsilon \in Z_p} |\tau_c^\varepsilon| = \min_{\varepsilon \in Z_p} |\tau'_c{}^\varepsilon|$ داریم:

$$\{\varepsilon \in Z_p : |\tau'_c{}^\varepsilon| = h\} \subsetneq \{\varepsilon \in Z_p : |\tau_c^\varepsilon| = h\},$$

که امکان پذیر نیست.

□

ادعا ۲.۲.۲. سادگی مانند $\tau \in K$ وجود دارد که $l(\tau_c) \geq \text{ecd}_s^p(\mathcal{H})$ است.

برهان. با توجه به ادعای ۱.۲.۲، می دانیم که γ یک Z_p -نگاشت از $\text{sd } K$ به Z_p^{*m} است که در آن

$$m = l(\mathcal{H}) + \max \{ l(\tau_c) : \tau \in K \text{ و } l(\tau) > l(\mathcal{H}) \}.$$

از طرفی، بنابر قضیه‌ی دلد [۱۲]، بعد Z_p^{*m} باید اکیدا از همبندی $\text{sd } K$ بزرگ‌تر باشد، یعنی $m - 1 > \bar{n} - 2$ ، که $m \geq \bar{n}$ را نتیجه می‌دهد (به انتهای بخش ۱.۲.۲ مراجعه کنید). در نتیجه، باتوجه به تعریف m ، سادگی مانند $\tau \in K$ وجود دارد که $l(\mathcal{H}) + l(\tau_c) \geq \bar{n}$ است. بنابراین داریم:

$$l(\tau_c) \geq \bar{n} - l(\mathcal{H}) = \text{ecd}_s^p(\mathcal{H}).$$

□

فرض کنید τ یک سادک با $l(\tau_c) \geq \text{ecd}_s^p(\mathcal{H})$ باشد. برای راحتی در نمادگذاری به جای $h(\tau_c)$ از نماد h استفاده می‌کنیم. به ازای هر $i \in [p]$ ، اگر $|\tau_c^{\omega^i}| = h$ باشد، C_i را h -مجموعه^۸ی $\{c_{i,1}, \dots, c_{i,h}\} \subseteq [t]$ که $\{\omega^i\} \times C_i = \tau_c^{\omega^i}$ است، در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت، اگر $|\tau_c^{\omega^i}| > h$ باشد، C_i را $(h+1)$ -مجموعه‌ی $\{c_{i,1}, \dots, c_{i,h+1}\} \subseteq [t]$ که $\{\omega^i\} \times C_i \subseteq \tau_c^{\omega^i}$ است، در نظر می‌گیریم. حال به ازای هر $V_i, i \in [p]$ را چنین تعریف می‌کنیم: اگر h برابر $|\tau_c^{\omega^i}|$ باشد، $V_i = \{e_{i,1}, \dots, e_{i,h}\}$ که در آن به ازای هر $j \in [h]$ ، $e_{i,j} \subseteq \tau_{\omega^i}$ و $c(e_{i,j}) = c_{i,j}$ است. در غیر این صورت $V_i = \{e_{i,1}, \dots, e_{i,h+1}\}$ که در آن به ازای هر $j \in [h+1]$ ، $e_{i,j} \subseteq \tau_{\omega^i}$ و $c(e_{i,j}) = c_{i,j}$ است. واضح است که

$$\sum_{i=1}^p |V_i| = \sum_{i=1}^p |C_i| = l(\tau_c) \geq \text{ecd}_s^p(\mathcal{H}).$$

می‌دانیم مجموعه‌ی $\{\tau_\varepsilon : \varepsilon \in Z_p\}$ -مجزا است. بنابراین، به ازای هر $e_i \in V_i$ ، مجموعه‌ی $\{e_1, \dots, e_p\}$ نیز -مجزا است و در نتیجه $\{e_1, \dots, e_p\}$ یالی از $\text{KG}_s^p(\mathcal{H})$ است. بنابراین واضح است که زیرابرگراف $[\bigcup_{i=1}^p V_i]$ ، $\text{KG}_s^p(\mathcal{H})$ ، زیرابرگراف مورد نظر است. $\square$

۳.۲.۲ اثبات قضیه‌ی ۳.۱.۲

در این جا قضیه‌ی ۳.۱.۲ را به حالتی که r عددی اول است، کاهش می‌دهیم. با توجه به قضیه‌ی ۲.۱.۲ می‌دانیم که در حالتی که r عددی اول است، قضیه‌ی ۳.۱.۲ برقرار است (بحثی که بعد از قضیه‌ی ۲.۱.۲ آمده است، را ببینید). ایده‌ی این کاهش توسط کریز [۲۱] مطرح شده است و در مقالاتی مانند [۴، ۱۸، ۳۶، ۳۷] مورد استفاده قرار گرفته است. برای ابرگراف $\mathcal{H} = ([n], E(\mathcal{H}))$ و اعداد صحیح r و C ابرگراف $\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,r}$ را ابرگرافی با مجموعه رئوس $[n]$ و مجموعه یال‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,r}) = \{V \subseteq [n] : \text{ecd}^r(\mathcal{H}[V]) > (r-1)C\}.$$

لم ۱.۲.۲. اعداد صحیح مثبت r' و r'' و بردار صحیح $s = (s_1, \dots, s_n)$ را که $1 \leq s_i < r''$ است، در نظر بگیرید. برای هر ابرگراف دلخواه $\mathcal{H} = ([n], E(\mathcal{H}))$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\text{ecd}_s^{r'r''}(\mathcal{H}) \leq r''(r'-1)C + \text{ecd}_s^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,r'}). \quad (۲.۲)$$

برهان. برای راحتی کار به جای $\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,r'}$ از نماد $\mathcal{T}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به تعریف $\text{ecd}_s^{r''}(\mathcal{T})$ ، خانواده‌ی از زیرمجموعه‌های s -مجزای منصفانه از مجموعه‌ی $[n]$ مانند $\{V_1, \dots, V_{r''}\}$ وجود دارند که به ازای هر $i \in [r'']$ ، $E(\mathcal{T}[V_i]) = \emptyset$ و $\sum_{i=1}^{r''} |V_i| = \sum_{i=1}^n s_i - \text{ecd}_s^{r''}(\mathcal{T})$ است. با توجه به این مساله واضح است که به ازای هر $V_i \notin E(\mathcal{T})$ ، $i \in [r'']$ و در نتیجه به ازای هر $i \in [r'']$ رابطه‌ی $\text{ecd}_s^{r'}(\mathcal{H}[V_i]) \leq (r'-1)C$ برقرار است. بنابراین به ازای هر $i \in [r'']$ ، خانواده‌ی مانند

^۸h-set

$\{V_i, \dots, V_{ir'}\}$ از زیرمجموعه‌های مجزای منصفانه‌ی V_i وجود دارد که به‌ازای هر $j \in [r']$ ، $E(\mathcal{H}[V_{ij}]) = \emptyset$ است و

$$\sum_{j=1}^{r'} |V_{ij}| = |V_i| - \text{ecd}^{r'}(\mathcal{H}[V_i]) \geq |V_i| - (r' - 1)C.$$

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که خانواده‌ی $\{V_{ij} : 1 \leq i \leq r'' \ \& \ 1 \leq j \leq r'\}$ یک خانواده‌ی s -مجزای منصفانه از زیرمجموعه‌های $[n]$ است و علاوه‌براین به‌ازای هر $i \in [r'']$ و $j \in [r']$ ، $E(\mathcal{H}[V_{ij}]) = \emptyset$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{ecd}_s^{r'r''}(\mathcal{H}) &\leq \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^{r''} \sum_{j=1}^{r'} |V_{ij}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^{r''} |V_i| + r''(r' - 1)C \\ &= \text{ecd}_s^{r''}(\mathcal{T}) + r''(r' - 1)C \end{aligned}$$

□ که با توجه به آن اثبات کامل است.

لم ۲.۲.۲. اعداد مثبت r ، r' و r'' که $r' r'' \geq 2$ و $r = r' r''$ است و بردار صحیح مثبت $s = (s_1, \dots, s_n)$ که به‌ازای هر $i \in [r'']$ ، $1 \leq s_i < r''$ است، را در نظر بگیرید. اگر قضیه‌ی ۳.۱.۲ به‌ازای r' و $s' = (1, \dots, 1)$ و همچنین به‌ازای r'' و s برقرار باشد، آن‌گاه قضیه‌ی مذکور به‌ازای r و s نیز برقرار است.

برهان. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی یک رنگ‌آمیزی مجاز مانند $c : E(\mathcal{H}) \rightarrow [C]$ برای $\text{KG}_s^r(\mathcal{H})$ وجود داشته باشد که $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H}) > (r - 1)C$ است. با به‌کار بردن لم ۱.۲.۲ داریم:

$$(r' r'' - 1)C < \text{ecd}_s^{r'r''}(\mathcal{H}) \leq r''(r' - 1)C + \text{ecd}_s^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'}),$$

و در نتیجه $(r'' - 1)C < \text{ecd}_s^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})$ است. از آنجا که قضیه‌ی ۳.۱.۲ برای r'' و s برقرار است و با توجه به نامساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که

$$\chi(\text{KG}_s^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})) > C.$$

از طرفی با توجه به تعریف $\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'}$ ، به‌ازای هر $e \in E(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})$ ، $\text{ecd}^{r'}(\mathcal{H}[e]) > (r' - 1)C$ است. چون قضیه‌ی ۳.۱.۲ برای r' و $s' = (1, \dots, 1)$ برقرار است، داریم $\chi(\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}[e])) > C$. بنابراین با تخصیص رنگ به رؤس $\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}[e])$ تحت رنگ‌آمیزی c رنگ‌آمیزی مجازی به‌دست نمی‌آید. در نتیجه به‌ازای هر یال $e \in E(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})$ حداقل یک یال تک‌رنگ در $\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}[e])$ وجود دارد. حال به‌ازای هر یال $h(e)$ ، $e \in E(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})$ را بزرگ‌ترین رنگ در بین رنگ یال‌های تک‌رنگ $\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}[e])$ در نظر می‌گیریم. از آنجایی که c یک رنگ‌آمیزی مجاز برای $\text{KG}_s^r(\mathcal{H})$ است، نگاشت $h : E(\mathcal{H}) \rightarrow C$ یک رنگ‌آمیزی مجاز برای $\text{KG}_s^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})$ است. در نتیجه $\chi(\text{KG}_s^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}, C, r'})) \leq C$ ، که تناقض است. برای دیدن این موضوع، فرض کنید برخلاف ادعای

ما $\{f_1, \dots, f_{r''}\}$ یالی از $KG_s^{r''}(T_{\mathcal{H}, C, r'})$ که $h(f_1) = \dots = h(f_{r''}) = a$ باشد. بنابر تعریف $h(-)$ ، به‌ازای هر $j \in [r'']$ یک یال تک‌رنگ مانند $\{e_{1,j}, \dots, e_{r',j}\}$ در $KG^{r'}(\mathcal{H}[f_j])$ وجود دارد که $c(e_{1,j}) = \dots = c(e_{r',j}) = a$ است. به راحتی می‌توان دید که $\{e_{i,j} : i \in [r'] \text{ \& } j \in [r'']\}$ یک یال تک‌رنگ از $KG_s^r(\mathcal{H})$ است که با مجاز بودن رنگ‌آمیزی c در تناقض است. $\square$

در این‌جا برای تکمیل اثبات قضیه‌ی ۳.۱.۲، لم ۴.۲.۳ را به کار می‌بریم. در ابتدا توجه کنید که با توجه به بحثی که پس از قضیه‌ی ۲.۱.۲ آمده‌است، می‌دانیم که قضیه‌ی ۳.۱.۲ به‌ازای $s = (1, \dots, 1)$ و مقادیر اول r برقرار است. بنابراین با به کار بردن لم ۴.۲.۳ به‌ازای $s = (1, \dots, 1)$ ، قضیه‌ی ۳.۱.۲ به‌ازای $s = (1, \dots, 1)$ و هر مقدار مثبت $r \geq 2$ برقرار است. حال، در لم ۴.۲.۳، r'' را بزرگ‌ترین عامل اول r در نظر بگیرید. دوباره، با توجه به بحثی که پس از قضیه‌ی ۲.۱.۲ آمده‌است، می‌دانیم که قضیه‌ی ۳.۱.۲ برای r'' و s برقرار است. در نتیجه با به کار بردن لم ۴.۲.۳ نتیجه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

۳.۲ مقایسه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه با عدد رنگی نقصانی و عدد تناوبی

در این بخش عدد رنگی نقصانی منصفانه‌ی ابرگراف‌ها را با دو پارامتر ترکیبیاتی مهم دیگر یعنی عدد رنگی نقصانی و عدد تناوبی ابرگراف‌ها، که کران پایینی برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری فراهم می‌کنند، مقایسه می‌کنیم.

۱.۳.۲ مقایسه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه با عدد رنگی نقصانی

با توجه به تعریف $cd_s^r(\mathcal{H})$ و $ecd_s^r(\mathcal{H})$ واضح است که $ecd_s^r(\mathcal{H}) \geq cd_s^r(\mathcal{H})$. مثال‌های مختلفی وجود دارند که نشان می‌دهند نه تنها این نامساوی می‌تواند اکید باشد بلکه تفاضل $cd_s^r(\mathcal{H})$ از $ecd_s^r(\mathcal{H})$ می‌تواند عدد بزرگی باشد.

برای ساختن چنین مثالی فرض کنید m و n اعداد صحیحی باشند که $m \geq r(n+1)$ است. ابرگراف $\mathcal{F}$ با n راس و هم‌چنین مجموعه‌ای مجزا از $V(\mathcal{F})$ مانند $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ را در نظر بگیرید. ابرگراف $\mathcal{H}$ را ابرگرافی با مجموعه رئوس $V(\mathcal{F}) \cup U$ و مجموعه یال‌های $E(\mathcal{F}) \cup \{\{u, v\} : u \in U \text{ و } v \in V(\mathcal{F})\}$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این‌که هر مجموعه‌ی مستقل در $\mathcal{H}$ یا یک زیرمجموعه از U است یا یک مجموعه‌ی مستقل در $\mathcal{F}$ است، به راحتی می‌توان دید که $ecd^r(\mathcal{H}) = n$ و $cd^r(\mathcal{H}) = cd^{r-1}(\mathcal{F})$ است و در نتیجه $ecd^r(\mathcal{H}) - cd^r(\mathcal{H}) = n - cd^{r-1}(\mathcal{F})$ است. ابرگراف‌های بسیاری مانند $\mathcal{F}$ وجود دارند که $n - cd^{r-1}(\mathcal{F})$ به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. با این ساختار در حالت خاص می‌توان گراف‌های r -بخشی که در گزاره‌ی زیر با جزئیات درباره‌ی آن بحث شده‌است، نیز ساخت.

گزاره ۱.۳.۲. اگر $\mathcal{H}$ گراف r -بخشی کامل $K_{t,\dots,t,T}$ با شرط $T \geq rt + r - 1$ باشد، آن گاه $\text{cd}^r(\mathcal{H}) = \circ$ درحالی که $\chi(\text{KG}^r(\mathcal{H})) = \frac{\text{ecd}^r(\mathcal{H})}{r-1} = t$ است.

برهان. فرض کنید $V(\mathcal{H}) = V_1 \uplus \dots \uplus V_r$ باشد که در آن هر V_i یک مجموعه‌ی مستقل است، علاوه بر این $|V_1| = \dots = |V_{r-1}| = t$ و $|V_r| = T$ است. با توجه به این که گراف $\mathcal{H}$ ، r -بخشی است، r -رنگ پذیر نیز هست و در نتیجه $\text{cd}^r(\mathcal{H}) = \circ$ است. فرض کنید $(S_1, \dots, S_r)$ یک r -رنگ آمیزی منصفانه برای $\mathcal{H}$ باشد. برای اثبات این که $\text{ecd}^r(\mathcal{H}) = (r-1)t$ است، باید نشان دهیم که $|\bigcup_{i=1}^r S_i| \leq T$ است و تساوی می تواند اتفاق بیفتد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید. اگر به ازای یک $i \in [r]$ ، $j \leq r-1$ وجود داشته باشد که $S_i \subseteq V_j$ ، آن گاه از آن جایی که $(S_1, \dots, S_r)$ یک افراز منصفانه برای $\bigcup_{i=1}^r S_i$ است، رابطه‌ی $|\bigcup_{i=1}^r S_i| \leq t + (r-1)(t+1) \leq T$ را داریم. در غیر این صورت، اگر به ازای هر $i \in [r]$ ، $S_i \subseteq V_r$ باشد، آن گاه $\bigcup_{i=1}^r S_i \subseteq V_r$ است که در نتیجه رابطه‌ی $|\bigcup_{i=1}^r S_i| \leq |V_r| = T$ برقرار است. واضح است که در حالت اخیر به جای نامساوی می توان تساوی را داشت. با توجه به قضیه‌ی ۱.۱.۲، برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم که $\text{KG}^r(\mathcal{H})$ ، t -رنگ پذیر است. برای این منظور قرار دهید $V(\mathcal{H}) \setminus V_r = U_1 \uplus \dots \uplus U_t$ که در آن به ازای هر $j \in [t]$ ، $|U_j| = r-1$ است. حال، به ازای هر یال $e \in E(\mathcal{H})$ ، $c(e)$ را کمترین مقدار j ای تعریف می کنیم که $e \cap U_j \neq \emptyset$ است. به راحتی می توان بررسی کرد که c یک t -رنگ آمیزی مجاز برای $\text{KG}^r(\mathcal{H})$ است. $\square$

زیگلر [۳۶، ۳۷] با تعمیم قضیه‌ی آلن-فرانکل-لواژ [۷] عدد رنگی خانواده‌ای از ابرگراف‌های کنسر s -مجزای $\text{KG}_s^r(n, k)$ را تعیین کرد. وی برای اعداد صحیح n, k, r و s که $k \geq 2$ ، $ns \geq rk$ و $1 \leq s < \mu(r)$ است، اثبات کرد که

$$\chi(\text{KG}_{(s,\dots,s)}^r(n, k)) = \left\lceil \frac{ns - r(k-1)}{r-1} \right\rceil,$$

با این شرط که $s, r-1$ را عاد کند. یادآوری می کنیم که $\mu(r)$ بزرگترین عامل اول عدد صحیح $r \geq 2$ است. توجه کنید که به ازای $s=1$ ، این قضیه همان قضیه‌ی آلن-فرانکل-لواژ است. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبت و $s \in [r-1]^n$ یک بردار صحیح مثبت باشد که $k, r \geq 2$ و $n > a$ است. $\sum_{i=1}^n s_i \geq rk$ است. ابرگراف $\mathcal{H}(n, k, a)$ را ابرگرافی با مجموعه رئوس $[n]$ و مجموعه یال‌های $\{e \in \binom{[n]}{k} : e \not\subseteq \{n-a+1, \dots, n\}\}$ تعریف می کنیم. منظور از $\text{KG}_s^r(n, k, a)$ ، همان $\text{KG}_s^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ است. توجه کنید که به ازای $a \leq k-1$ ، دو ابرگراف کنسر $\text{KG}_s^r(n, k, a)$ و $\text{KG}_s^r(n, k)$ یکی هستند. در ادامه عدد رنگی نقصانی منصفانه و عدد رنگی نقصانی $\mathcal{H}(n, k, a)$ را با یکدیگر مقایسه می کنیم و اثبات می کنیم که تفاضل این دو مقدار می تواند به اندازه‌ی دلخواه بزرگ باشد. علاوه بر این، با تعمیم نتیجه‌ی به دست آمده توسط زیگلر که در بالا ذکر شد، عدد رنگی $\text{KG}_{(s,\dots,s)}^r(n, k, a)$ را در برخی حالات مورد مطالعه قرار می دهیم.

لم ۱.۳.۲. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبت و $s = (s, \dots, s) \in [r-1]^n$ یک بردار صحیح مثبت باشد که $k, r \geq 2$ ، $n > a$ و $ns \geq rk$ است. داریم

$$\chi(KG_s^r(n, k, a)) \leq \left\lceil \frac{\frac{1}{\lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor} \frac{ns - \max\{rk-1, sa+r-1\}}{s}}{s} \right\rceil + 1.$$

برهان. اثبات این لم شبیه اثبات لم ۱.۳ در [۳۶] است. مقادیر $M = \left\lceil \frac{1}{\lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor} \frac{ns - \max\{rk-1, sa+r-1\}}{s} \right\rceil$ و $P = \lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor$ را در نظر بگیرید. رنگ‌آمیزی c از ابرگراف $KG_s^r(n, k, a)$ را به‌ازای هر راس $e \in \binom{[n]}{k}$ ، چنین تعریف می‌کنیم:

$$c(e) = \min \left\{ \left\lceil \frac{\min e}{P} \right\rceil, M+1 \right\}.$$

توجه کنید که c یک رنگ‌آمیزی با مجموعه رنگ $[M+1]$ است. برای اثبات این لم کافیت نشان دهیم که رنگ‌آمیزی مذکور یک رنگ‌آمیزی مجاز است. فرض کنیم چنین نباشد، در این صورت یالی مانند $\{e_1, \dots, e_r\}$ در $KG_s^r(n, k, a)$ وجود دارد که $c(e_1) = \dots = c(e_r) = \ell$ است. توجه کنید که ℓ اکیدا از M بزرگ‌تر است. در واقع از آن جا که $Ps = \lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor s \leq r-1$ است، حداکثر $r-1$ یال از e_i ‌ها می‌توانند یک رنگ مانند $\ell \in [M]$ را داشته باشند. اگر $\ell = M+1$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $\min e_i > MP$ است که نتیجه می‌دهد $\bigcup_{i=1}^r e_i \subseteq \{MP+1, \dots, n\}$ است. بنابراین داریم

$$\frac{rk}{s} \leq \left| \bigcup_{i=1}^r e_i \right| \leq n - MP \leq \frac{\max\{rk-1, sa+r-1\}}{s}.$$

لذا $sa+r-1 \geq rk$ و در نتیجه $MP+1 \geq n-a-\lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor + 1$ است. چون $KG_s^r(n, k, a)$ هیچ راسی در $\{n-a+1, \dots, n\}$ ندارد، هر e_i باید عضوی در $\{n-a-\lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor + 1, \dots, n-a\}$ داشته باشد. از طرفی، چون $\{e_1, \dots, e_r\}$ یک خانواده‌ی $(s, \dots, s)$ -مجزا است، هر $j \in [n]$ در حداکثر s تا از مجموعه e_i ‌ها قرار دارد و در نتیجه رابطه‌ی $s \lfloor \frac{r-1}{s} \rfloor \geq r$ را داریم که تناقض است. $\square$

در ادامه، عدد r -رنگ پذیری نقصانی s -مجزا و عدد r -رنگ پذیری نقصانی منصفانه‌ی s -مجزا برای ابرگراف $\mathcal{H}(n, k, a)$ را در حالتی که $s = (s, \dots, s) \in [r-1]^n$ است، به‌دست می‌آوریم.

مشاهده ۱.۳.۲. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبت و $s = (s, \dots, s) \in [r-1]^n$ یک بردار صحیح مثبت باشد که $k, r \geq 2$ و $ns \geq rk$ است. آن‌گاه

$$cd_s^r(\mathcal{H}(n, k, a)) = \begin{cases} ns - r(k-1) & a \leq k-1 \\ \max\{0, ns - (r-s)(k-1) - as\} & a \geq k \end{cases}$$

$$\text{ecd}_s^r(\mathcal{H}(n, k, a)) = \begin{cases} ns - r(k-1) & a \leq k-1 \\ ns - r(k-1) - \left\lfloor \frac{as}{k} \right\rfloor & sk \leq as \leq rk-2 \\ ns - as & as \geq rk-1. \end{cases}$$

طرح کلی اثبات . اثبات این نتایج ساده اما تکنیکی است. لذا فقط برای نامساوی دوم طرح کلی اثبات را ارایه می‌کنیم. فرض کنید $\{N_1, \dots, N_r\}$ یک خانواده‌ی $(s, \dots, s)$ -مجزای منصفانه از زیرمجموعه‌های $[n]$ باشد به‌طوری‌که $\text{ecd}_s^r(\mathcal{H}(n, k, a)) = ns - \sum_{i=1}^r |N_i|$ و به‌ازای هر $j \in [r]$ $\mathcal{H}(n, k, a)[N_j] = \emptyset$ باشد. ابتدا توجه کنید که $\min_{j \in [r]} |N_j| \geq k-1$ است و همچنین به‌ازای هر N_j که $|N_j| \geq k$ است، باید رابطه‌ی $N_j \subseteq A = \{n-a+1, \dots, n\}$ برقرار باشد. در نتیجه، به‌راحتی می‌توان دید که $\sum_{j=1}^r |N_j|$ هنگامی بیش‌ترین مقدار خود را می‌گیرید که N_j ‌هایی که $N_j \subseteq A$ و $|N_j| \geq k$ هستند، بیشینه باشند. حال تساوی‌های مطلوب را می‌توان به‌راحتی به‌دست آورد. ■

نتیجه‌ی زیر تعمیمی از نتیجه‌ی زیگلر [۳۶، ۳۷] است که در آن عدد رنگی $\text{KG}_s^r(n, k, a)$ در برخی حالات محاسبه شده است.

نتیجه ۱.۳.۲. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبت و $s = (s, \dots, s) \in [\mu(r)-1]^n$ یک بردار صحیح مثبت باشد که $k, r \geq 2$ و $n > a$ و $ns \geq rk$ است. اگر $s, r-1$ را عادی کند، آن‌گاه در حالتی که $a \leq k-1$ یا $as \geq rk-1$ داریم:

$$\chi(\text{KG}_s^r(n, k, a)) = \left\lceil \frac{ns - \max\{r(k-1), as\}}{r-1} \right\rceil.$$

برهان. چون $s, r-1$ را عادی می‌کند، بنابر قضیه‌ی ۳.۱.۲ و لم ۱.۳.۲ داریم

$$\left\lceil \frac{\text{ecd}_s^r(\mathcal{H}(n, k, a))}{r-1} \right\rceil \leq \chi(\text{KG}_s^r(n, k, a)) \leq \left\lceil \frac{ns - \max\{r(k-1), as\}}{r-1} \right\rceil.$$

□

حال بنابر مشاهده ۱.۳.۲ حکم برقرار است.

با در نظر گرفتن فرضیات نتیجه ۱.۳.۲، اگر $s, r-1$ را عادی کند و $ks \leq as < rk-1$ باشد، آن‌گاه بنابر لم ۱.۳.۲، قضیه‌ی ۳.۱.۲ و مشاهده ۱.۳.۲ داریم

$$\left\lceil \frac{ns - r(k-1) - \left\lfloor \frac{as}{k} \right\rfloor}{r-1} \right\rceil \leq \chi(\text{KG}_s^r(n, k, a)) \leq \left\lceil \frac{ns - \max\{r(k-1), as\}}{r-1} \right\rceil.$$

بنابراین، با به‌کار بردن قضیه‌ی ۳.۱.۲، نمی‌توان عدد رنگی $\text{KG}_s^r(n, k, a)$ را در این حالت تعیین کرد.

اما محاسبه‌ی عدد رنگی $KG_s^r(n, k, a)$ در حالتی که $ks \leq as < rk - 1$ است و $s, r - 1$ را عاد می‌کند، مساله‌ی جالبی است. با شواهدی که در بخش ۲.۳.۲ آمده است، این گمان تقویت می‌شود که عدد رنگی $KG_s^r(n, k, a)$ در حالتی که $ks \leq as < rk - 1$ و $s, r - 1$ را عاد می‌کند، برابر همان کران بالای مذکور است.

۲.۳.۲ مقایسه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه با عدد تناوبی

عدد تناوبی ابرگراف‌ها که در بخش ۱.۲.۱ به بررسی آن پرداختیم، در سال ۲۰۱۵ توسط علیشاهی و حاجی ابوالحسن [۴] معرفی شدند. همان‌طور که در فصل ۱ ذکر شد، آن‌ها با استفاده از این متغیر ترکیبیاتی کران پایین مهمی برای عدد رنگی ابرگراف‌های کنسری ارائه دادند. به‌طور دقیق‌تر آن‌ها ثابت کردند که

$$\chi(KG^r(\mathcal{H})) \geq \left\lceil \frac{|V(\mathcal{H})| - \text{alt}^r(\mathcal{H})}{r - 1} \right\rceil.$$

برای عدد رنگی نقصانی در تمام این بخش مقدار بردار s را برابر $(1, \dots, 1)$ در نظر گرفته‌ایم. توجه کنید که به‌ازای $s = (1, \dots, 1)$ ، $\text{cd}^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ و $\text{ecd}^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ بنابر مشاهده ۱.۳.۲ محاسبه شده است. اما محاسبه‌ی $\text{alt}^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ کمی پیچیده‌تر است.

لم ۲.۳.۲. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبت باشند که $n \geq \max\{a + 1, rk\}$ ، $r \geq 2$ ، $k, r \geq 2$ است. آن‌گاه

$$n - \text{alt}^r(\mathcal{H}(n, k, a)) \leq \begin{cases} n - \max\{2(k - 1), a\} & r = 2 \\ n - \max\{3(k - 1), a + 1\} & r = 3 \\ n - \max\{r(k - 1), a + b\} & r \geq 4, \end{cases}$$

که در آن $b = \min\{n - a, (r - 2)(k - 1)\}$ است.

برهان. برای راحتی در نمادگذاری، به‌جای $\mathcal{H}(n, k, a)$ از نماد $\mathcal{H}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H}) \geq r(k - 1)$ است. سپس ثابت می‌کنیم که $\text{alt}_\sigma^2(\mathcal{H}) \geq a + 1$ ، $\text{alt}_\sigma^3(\mathcal{H}) \geq a + 1$ و به‌ازای $r \geq 4$ ، $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H}) \geq a + b$ است که با این کار اثبات لم کامل می‌شود. به‌ازای تناظر دوسویه‌ی دلخواه $\sigma: [n] \rightarrow [n]$ ، با در نظر گرفتن مقدار $X = (x_1, \dots, x_n)$ به‌صورت

$$x_i = \begin{cases} \omega^i & i \in \{1, \dots, r(k - 1)\} \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم که $\text{alt}(X) = r(k - 1)$ و به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $|X^i| = k - 1$ است که در آن منظور از X^i مجموعه‌ی $\{j \in [n]: x_j = \omega^i\}$ است. در نتیجه به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $E(\mathcal{H}[\sigma(X^i)]) = \emptyset$ ،

است. بنابراین با توجه به تعریف $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H})$ ، می‌دانیم $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H}) \geq r(k-1)$ است. چون رابطه‌ی فوق به‌ازای هر σ دلخواه برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت که $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq r(k-1)$ است. باید توجه داشت که اگر $a \leq k-1$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{H}$ همان گراف $([n], \binom{[n]}{k})$ است. اگر به‌ازای تناظر دوسویه‌ی دلخواه $\sigma: [n] \rightarrow [n]$ ، $\text{alt}(X) \geq r(k-1) + 1$ باشد، آن‌گاه حداقل به‌ازای یک j ، باید رابطه‌ی $|X^j| \geq k$ برقرار باشد که در نتیجه $E(\mathcal{H}[\sigma(X^i)]) \neq \emptyset$ است. با توجه به این موضوع $\text{alt}^r(\mathcal{H}) = \text{alt}^r([n], \binom{[n]}{k}) = r(k-1)$ که اثبات لم در این حالت کامل است. بنابراین فرض می‌کنیم که $a \geq k$ باشد. A را برابر مجموعه‌ی $\{n-a+1, \dots, n\}$ قرار داده و تناظر دوسویه‌ی دلخواه $\sigma: [n] \rightarrow [n]$ را در نظر می‌گیریم. $\sigma^{-1}(A)$ مجموعه‌ای مانند $\{j_1, \dots, j_a\}$ که $1 \leq j_1 < \dots < j_a \leq n$ است. برای مقدار r سه حالت زیر امکان پذیر است.

• **حالت ۲: $r = 2$** $X = (x_1, \dots, x_n)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم که

$$x_i = \begin{cases} \omega & i = j_q \in \sigma^{-1}(A) \text{ و } q \text{ زوج است} \\ \omega^2 & i = j_q \in \sigma^{-1}(A) \text{ و } q \text{ فرد است} \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نتیجه $\text{alt}(X) = |A| = a$ است و به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $\sigma(X^i) \subseteq A$ است. پس به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $E(\mathcal{H}[\sigma(X^i)]) = \emptyset$ و در نتیجه $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H}) \geq a$ است. بنابراین با توجه به دلخواه بودن σ ، $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq a$ است. با توجه به این که قبلاً $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq r(k-1)$ را ثابت کرده‌ایم، اثبات برای حالت $r = 2$ کامل است.

• **حالت ۳: $r = 3$** مقدار ثابت $i_0 \in [n] \setminus A$ را در نظر بگیرید. $X = (x_1, \dots, x_n)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم که

$$x_i = \begin{cases} \omega & i = j_q \in \sigma^{-1}(A) \text{ و } q \text{ زوج است} \\ \omega^2 & i = j_q \in \sigma^{-1}(A) \text{ و } q \text{ فرد است} \\ \omega^3 & i = \sigma^{-1}(i_0) \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توجه کنید $\text{alt}(X) = a + 1$ و علاوه بر این $\sigma(X^1), \sigma(X^2) \subseteq A$ و $|\sigma(X^3)| = 1$ است. به وضوح می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $E(\mathcal{H}[\sigma(X^i)]) = \emptyset$ است. بنابراین با توجه به تعریف $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H})$ ، رابطه‌ی $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H}) \geq \text{alt}(X) = a + 1$ را داریم. با توجه به دلخواه بودن نگاشت σ ، $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq a + 1$ است. چون قبلاً رابطه‌ی $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq r(k-1)$ را ثابت کرده‌ایم، اثبات برای حالت $r = 3$ کامل است.

• **حالت ۴: $r \geq 4$** مجموعه‌ی $B = \{1, \dots, b\} \subseteq [n] \setminus A$ را در نظر بگیرید که در آن مقدار $b = \min\{n-a, (r-2)(k-1)\}$ است. هم چنین فرض کنید $\sigma^{-1}(B) = \{l_1, \dots, l_b\}$ که در آن $1 \leq l_1 < \dots < l_b \leq n$ است. $X = (x_1, \dots, x_n)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم

که

$$x_i = \begin{cases} \omega & i = j_q \in \sigma^{-1}(A) \text{ و } q \text{ زوج است} \\ \omega^2 & i = j_q \in \sigma^{-1}(A) \text{ و } q \text{ فرد است} \\ \omega^{3+t} & i = l_q \in \sigma^{-1}(B) \text{ و } q \equiv t \in \{0, \dots, r-3\} \pmod{r-2} \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به‌وضوح $\text{alt}(X) = |A| + b$ ، $\sigma(X^1), \sigma(X^2) \subseteq A$ و به‌ازای هر $i \geq 3$ ، $|\sigma(X^i)| \leq k-1$ است. در نتیجه به‌ازای هر $i \in [r]$ ، $E(\mathcal{H}[\sigma(X^i)]) = \emptyset$ است. لذا با توجه به تعریف $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H})$ ، رابطه‌ی $\text{alt}_\sigma^r(\mathcal{H}) \geq a + b$ برقرار است. چون σ نگاشت دلخواهی است، $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq \text{alt}(X) = a + b$ است. با توجه به این نتیجه و رابطه‌ی $\text{alt}^r(\mathcal{H}) \geq r(k-1)$ ، اثبات در حالت $r \geq 4$ برقرار است.

□

فرض کنید $r \geq 4$ ، $a \geq rk-1$ و $n \geq (r-1)(k-1) + a$ باشد. برای راحتی در نمادگذاری $\mathcal{H} = \mathcal{H}(n, k, a)$ را در نظر بگیرید. بنابر مشاهده ۱.۳.۲، به‌ازای $s = (1, \dots, 1)$ ، $\text{ecd}^r(\mathcal{H}) = n - a$ و $n - \text{alt}^r(\mathcal{H}) \leq n - a - (r-2)(k-1)$ ، اما بنابر لم ۲.۳.۲، $\text{cd}^r(\mathcal{H}) = n - (r-1)(k-1) - a$ است. بنابراین $\text{ecd}^r(\mathcal{H}) - \text{cd}^r(\mathcal{H}) = (r-1)(k-1)$ و $\text{ecd}^r(\mathcal{H}) - (n - \text{alt}^r(\mathcal{H})) \geq (r-2)(k-1)$ است که به‌وضوح مشاهده‌ی زیر را نتیجه می‌دهد.

مشاهده ۲.۳.۲. به‌ازای $r \geq 4$ ، $a \geq rk-1$ و $n \geq (r-1)(k-1) + a$ مقادیر $\frac{1}{r-1}(\text{ecd}^r(\mathcal{H}) - \text{cd}^r(\mathcal{H}))$ و $\frac{1}{r-1}(\text{ecd}^r(\mathcal{H}) - (n - \text{alt}^r(\mathcal{H})))$ را می‌توان با انتخاب k به اندازه‌ی کافی بزرگ، به اندازه‌ی دلخواه بزرگ اختیار کرد.

گزاره‌ی زیر نشان می‌دهد که برای ابرگراف $\mathcal{H} = \mathcal{H}(n, k, a)$ ، می‌تواند کران پایین دقیقی برای عدد رنگی $\text{KG}^r(n, k, a)$ باشد در حالی که بنابر مشاهده اخیر هیچ کدام از دو مقدار $\left\lceil \frac{\text{cd}^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rceil$ و $\left\lceil \frac{n - \text{alt}^r(\mathcal{H})}{r-1} \right\rceil$ کران پایین دقیقی برای $\text{KG}^r(n, k, a)$ فراهم نمی‌کنند. توجه کنید که گزاره‌ی زیر را می‌توان به عنوان تعمیمی از قضیه‌ی آلن-فرانکل-لواژ نیز در نظر گرفت.

گزاره ۲.۳.۲. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبتی باشند که $k, r \geq 2$ و $n > a$ و $n \geq rk$ است. به‌ازای $a \leq 2(k-1)$ یا $a \geq rk-1$ داریم

$$\chi(\text{KG}^r(n, k, a)) = \left\lceil \frac{n - \max\{r(k-1), a\}}{r-1} \right\rceil,$$

همچنین به‌ازای $2k-1 \leq a \leq rk-2$ داریم

$$\left\lceil \frac{n - r(k-1) - \lfloor \frac{a}{k} \rfloor}{r-1} \right\rceil \leq \chi(\text{KG}^r(n, k, a)) \leq \left\lceil \frac{n - \max\{r(k-1), a\}}{r-1} \right\rceil.$$

برهان. با قرار دادن $s = (1, \dots, 1)$ در نتیجه ۱.۳.۲، می‌بینیم که گزاره در حالت‌های $a < k$ و $a \geq rk - 1$ قبلاً اثبات شده است. همچنین بنابر لم ۱.۳.۲ و مشاهده ۱.۳.۲، در حالتی که $k \leq a \leq rk - 2$ است، داریم

$$\left\lceil \frac{n - r(k-1) - \lfloor \frac{a}{k} \rfloor}{r-1} \right\rceil \leq \chi(KG^r(n, k, a)) \leq \left\lceil \frac{n - \max\{r(k-1), a\}}{r-1} \right\rceil.$$

بنابراین برای کامل کردن اثبات کافی است نشان دهیم که اگر $k \leq a \leq 2(k-1)$ باشد،

$$\chi(KG^r(n, k, a)) \geq \left\lceil \frac{n - r(k-1)}{r-1} \right\rceil.$$

چون $KG^r(n, k, a) = KG^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ ، با توجه به کران پایین علیشاهی-حاجی‌ابوالحسن یعنی نامساوی ۲.۳.۲، داریم

$$\chi(KG^r(n, k, a)) \geq \left\lceil \frac{|V(\mathcal{H}(n, k, a))| - \text{alt}_I^r(\mathcal{H}(n, k, a))}{r-1} \right\rceil,$$

که در آن $I: [n] \rightarrow [n]$ ، نگاشت همانی است. بنابراین برای اثبات گزاره کافی است ثابت کنیم $\text{alt}_I^r(\mathcal{H}(n, k, a)) \leq r(k-1)$ است. برای محاسبه‌ی $\text{alt}_I^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ ، باید بیش‌ترین مقدار ممکن برای $\text{alt}(X)$ که $X \in (Z_r \cup \{\circ\})^n$ است و هیچ کدام از X^i ها یالی از $\mathcal{H}(n, k, a)$ ندارند را بیابیم. واضح است که این ماکسیمم مقدار برای یک X با شرط $\text{alt}(X) = |X|$ اتفاق می‌افتد، یعنی

$$\text{alt}_I^r(\mathcal{H}) = \max \{ \text{alt}(X) : X \in (Z_r \cup \{\circ\})^n, |X| = \text{alt}(X) \text{ و } \forall i \in [r], E(\mathcal{H}[X^i]) = \emptyset \}.$$

باید توجه داشت که اگر $\text{alt}(X) = |X|$ باشد، هیچ کدام از X^i ها دو عضو متوالی از $[n]$ را ندارند و در نتیجه به‌ازای هر i ، رابطه‌ی $|X^i \cap \{n-a+1, \dots, n\}| \leq \lceil \frac{a}{r} \rceil \leq k-1$ را داریم. بنابر مشاهده‌ی فوق و این‌که اگر $\text{alt}(X) = |X| \geq r(k-1) + 1$ باشد، حداقل به‌ازای یک $i \in [r]$ ، $|X^i| \geq k$ است، رابطه‌ی $\text{alt}_I^r(\mathcal{H}(n, k, a)) \leq r(k-1)$ را که مطلوب ماست، داریم. $\square$

اگرچه برای ابرگراف $\mathcal{H}$ ، کران پایین $\chi(KG^r(\mathcal{H}))$ که بر مبنای $\text{ecd}^r(\mathcal{H})$ است، می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای از کران پایینی که بر مبنای $\text{alt}^r(\mathcal{H})$ است، بهتر باشد، اما نمی‌توان گفت کدام یک کران پایین بهتری فراهم می‌کند زیرا مثال‌های متعددی نیز وجود دارند که در آن‌ها $\text{alt}^r(\mathcal{H})$ نسبت به $\text{ecd}^r(\mathcal{H})$ کران پایین بسیار بهتری برای $\chi(KG^r(\mathcal{H}))$ فراهم می‌کند.

مثال ۱.۳.۲. برای اعداد صحیح n, r و k و $K = K_{n, \dots, n}$ را گرافی با مجموعه رؤس $[rn]$ و مجموعه یال‌های $E(K) = \{e \in \binom{[rn]}{r} : e \not\subseteq \{1 + (t-1)n, \dots, tn\} \quad \forall t \in [r]\}$ در نظر بگیرید. بنابر تعریف K ، $V(K)$ را می‌توان به r مجموعه‌ی دو به دو مجزا از اندازه‌ی n افزاز کرد که هیچ کدام از آن‌ها یالی از K را در بر ندارند. بنابراین $\text{ecd}^r(K) = \circ$ ، در حالی که می‌توان نشان داد که

$$rn - \text{alt}^r(K) \geq rn - \text{alt}_I^r(K) = \begin{cases} \frac{r}{2}n & r \text{ زوج است} \\ \lceil \frac{r}{2} \rceil n - 1 & r \text{ فرد است} \end{cases}$$

که در آن $I : [rn] \rightarrow [rn]$ نگاشت دوسویه‌ی همانی است.

نتایجی در ارتباط با عدد رنگی نقصانی منصفانه

با توجه به بحث اخیر در مورد عدد رنگی $KG^r(n, k, a)$ ، در ادامه حدس زیر را ارائه می‌کنیم که در آن ادعا کرده‌ایم فرض $a \leq 2(k-1)$ یا $a \geq rk-1$ در گزاره ۲.۳.۲ فرضیات غیر ضروری هستند.

حدس ۱.۳.۲. فرض کنید n, k, r و a اعداد صحیح مثبتی باشند که $k, r \geq 2$ و $n > a$ و $n \geq rk$ است. داریم

$$\chi(KG^r(n, k, a)) = \left\lceil \frac{n - \max\{r(k-1), a\}}{r-1} \right\rceil.$$

گزاره‌ی ۲.۳.۲، این حدس را قویا تقویت می‌کند. به عبارت دقیق‌تر، این حدس برای $a \geq rk-1$ ، $a \leq 2(k-1)$ و به‌ویژه برای $r=2$ توسط گزاره‌ی ۲.۳.۲ اثبات شده است. بنابراین تنها حالت $2k-1 \leq a \leq rk-2$ که $r \geq 3$ است، باقی می‌ماند. علاوه‌براین، برای حالتی که $a \leq r(k-1)$ و r توانی از ۲ است، حدس ۱.۳.۲ را می‌توان از نتیجه‌ای که توسط آلن، درونوسکی^۹ و لوکزاک^{۱۰} [۶] به دست آمده است، نتیجه گرفت.

به‌ازای $t \geq 2$ ، زیرمجموعه‌ی A از $[n]$ را در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که اگر به‌ازای هر $x \neq y \in A$ ، $t \leq |x-y| \leq n-t$ باشد، مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی t -پایدار است. زیراب‌گراف القایی از $KG^r(n, k)$ با مجموعه رؤس t -پایدار این ابرگراف، ابرگراف کنسر t -پایدار $KG^r(n, k)_{t-stab}$ نامیده می‌شود. آلن، درونوسکی و لوکزاک [۶] ثابت کردند که با شرط این که r توانی از ۲ باشد، $\chi(KG^r(n, k)_{r-stab})$ برابر $\chi(KG^r(n, k))$ است. آن‌ها حدس زدند که این نتیجه باید برای r در حالت کلی نیز برقرار باشد. به راحتی می‌توان دید که اگر $a \leq r(k-1)$ باشد، ابرگراف $KG^r(n, k)_{r-stab}$ یک زیراب‌گراف از ابرگراف $KG^r(n, k, a)$ در حدس ۱.۳.۲ است. بنابراین، حدس ۱.۳.۲ در حالتی که $a \leq r(k-1)$ و r توانی از ۲ است، درست است. در این حالت، این حدس را می‌توان به عنوان نسخه‌ی ضعیفی از حدس آلن-درونوسکی-لوکزاک در نظر گرفت.

پس از این که این حدس را ارائه کردیم، اصلا^{۱۱} و همکارانش [۸] حدس ۱.۳.۲ را در برخی حالات اثبات کردند. فرض کنید تجزیه‌ی عدد صحیح $r \geq 1$ به عامل‌های اول به‌صورت $r = 2^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ باشد. $b(r) = 2^{\alpha_0} \cdot (p_1 - 1)^{\alpha_1} \dots (p_t - 1)^{\alpha_t}$ را در نظر بگیرید. اصلا^{۱۰} و همکارانش ثابت کردند که حدس مذکور در حالتی که $|A| \leq b(r) \cdot (k-1)$ باشد، برقرار است. اما این حدس هنوز در حالت کلی به عنوان یک مساله باز مطرح است.

^۹Drewnowski

^{۱۰}Łuczak

^{۱۱}Aslam

گزاره ۳.۳.۲. فرض کنید r مقدار صحیح ثابتی باشد که $r \geq 2$ است. توجه کنید که برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{F}$ ، اگرچه $\left\lceil \frac{\text{ecd}^r(\mathcal{F})}{r-1} \right\rceil$ یک کران پایین برای عدد رنگی $\text{KG}^r(\mathcal{F})$ فراهم می‌کند، اما محاسبه‌ی $\text{ecd}^r(\mathcal{F})$ خود یک مساله‌ی NP -سخت^{۱۲} است.

اثبات این گزاره مشابه اثبات گزاره‌ی ۶ در [۲۶] است. مقدار صحیح ثابت r که $r \geq 2$ است، را در نظر بگیرید. فرض کنید برای گراف دلخواه G می‌خواهیم عدد استقلال^{۱۳} G یعنی $\alpha(G)$ را محاسبه کنیم. $\bar{G}$ را گرافی در نظر بگیرید که از اجتماع r نسخه راس-مجزا از گراف G بدین‌صورت ساخته شده‌است که هر دو راس از دو نسخه‌ی متمایز مجاورند. می‌توان دید که

$$\text{ecd}^r(\bar{G}) = r(|V(G)| - \alpha(G)).$$

بنابراین، محاسبه‌ی عدد رنگی نقصانی منصفانه یک گراف حداقل به سختی محاسبه‌ی عدد استقلال آن گراف است. چون محاسبه‌ی عدد استقلال گراف‌ها به‌عنوان یک مساله‌ی NP -سخت شناخته شده‌است، اثبات کامل است.

^{۱۲} NP -hard

^{۱۳}independence number

فصل ۳

برخی ویژگی‌های ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری

بیش از ۵۰ سال پیش هدتنیمی حدس زد که عدد رنگی ضرب رسته‌ای دو گراف برابر مینیمم عدد رنگی آن‌هاست. این حدس که در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است، در سال ۱۹۹۲ توسط ژو^۱ به ابرگراف‌ها تعمیم داده شد. حاجی‌ابوالحسن و میونیر در سال ۲۰۱۶ اولین کران پایین غیربدیهی را برای عدد رنگی ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری ارائه دادند. آن‌ها توانستند با استفاده از این کران پایین، حدس ژو را برای خانواده‌هایی از ابرگراف‌ها تایید کنند. ما در این‌جا نتایجی در مورد رنگ‌آمیزی رنگارنگ ابرگراف‌های کنسری ارائه می‌کنیم که نتیجه‌ی حاجی‌ابوالحسن-میونیر را تعمیم می‌دهد. هم‌چنین، یک کران پایین جدید برای عدد رنگی ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری ارائه می‌دهیم که می‌تواند از کران پایین حاجی‌ابوالحسن-میونیر بسیار بهتر باشد و با استفاده از این کران پایین، خانواده‌ی ابرگراف‌هایی که در حدس ژو صادق هستند، را گسترش می‌دهیم.

¹Zhu

۱.۳ مقدمه و نتایج اصلی

ضرب رسته‌ای دو گراف G و H ، که با $G \times H$ نشان داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $V(G) \times V(H)$ است که در آن دو راس (g, h) و (g', h') در صورتی که $gg' \in E(G)$ و $hh' \in E(H)$ باشد، مجاورند. حدس دیرین و مشهور هدتنیمی درباره‌ی ضرب رسته‌ای دو گراف G و H بیان می‌کند که عدد رنگی $G \times H$ برابر مینیمم مقدار $\chi(G)$ و $\chi(H)$ است. می‌دانیم که این حدس در مورد خانواده‌هایی از گراف‌ها برقرار است، اما در حالت کلی این حدس همچنان به صورت یک مساله باز مطرح است. (برای اطلاعات بیش‌تر به [۳۱] و [۳۵] مراجعه کنید). اگرچه این حدس در مقالات بسیاری مورد بحث و بررسی قرار گرفته است، اما پیشرفت چشمگیری در حل مساله رخ نداده است.

تعریف ضرب رسته‌ای گراف‌ها در سال ۱۹۸۰ توسط دولفر^۲ و والر^۳ [۱۴] به ابرگراف‌ها تعمیم داده شد. دو ابرگراف $\mathcal{H}_1 = (V_1, E_1)$ و $\mathcal{H}_2 = (V_2, E_2)$ را در نظر بگیرید. اگر به ازای $i = 1, 2$ ، تبدیل π_i را با نگاشت $\pi_i: (v_1, v_2) \mapsto v_i$ تعریف کنیم، ضرب رسته‌ای دو ابرگراف $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ ، ابرگرافی مانند $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ با مجموعه رئوس $V_1 \times V_2$ و مجموعه یال‌های زیر است:

$$\{e \subseteq V_1 \times V_2 : \pi_1(e) \in E_1, \pi_2(e) \in E_2\}.$$

ژو در سال ۱۹۹۲ [۳۴] حدس زیر را به عنوان تعمیمی از حدس هدتنیمی مطرح کرد.

حدس ۱.۱.۳ [۳۴] برای دو ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}_1 = (V_1, E_1)$ و $\mathcal{H}_2 = (V_2, E_2)$ داریم:

$$\chi(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) = \min\{\chi(\mathcal{H}_1), \chi(\mathcal{H}_2)\}.$$

ساختن یک رنگ‌آمیزی مجاز برای ابرگراف $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ از رنگ‌آمیزی مجاز ابرگراف $\mathcal{H}_1$ یا $\mathcal{H}_2$ کار ساده‌ای است. اما اثبات برقراری رابطه‌ی $\chi(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \geq \min\{\chi(\mathcal{H}_1), \chi(\mathcal{H}_2)\}$ قسمت سخت این مساله است.

فرض کنید $\mathcal{F}$ یک زیرابگراف از $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ باشد که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ و مجموعه یال‌های آن شامل یال‌های مینیمال $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ است. واضح است که هر رنگ‌آمیزی مجاز از $\mathcal{F}$ یک رنگ‌آمیزی مجاز از $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ نیز هست. این مشاهدات نشان می‌دهد که حدس ۱.۱.۳ تعمیمی از حدس هدتنیمی است.

ابرگراف $\mathcal{H}$ ، عدد صحیح $r \geq 2$ و زیرمجموعه‌های دو به دو مجزای $U_1, \dots, U_r \subseteq V(\mathcal{H})$ را در نظر بگیرید. ابرگراف $\mathcal{H}[U_1, \dots, U_r]$ را زیرابگرایی از $\mathcal{H}$ تعریف می‌کنیم که مجموعه رئوس آن برابر $\bigcup_{i=1}^r U_i$ باشد و یال‌هایی از $\mathcal{H}$ که در $\bigcup_{i=1}^r U_i$ قرار دارند و از هر U_i دقیقاً یک عضو دارند، را در بر داشته باشد. توجه کنید که $\mathcal{H}[U_1, \dots, U_r]$ یک ابرگراف r -یکنواخت r -بخشی است.

²Dörfler

³Waller

اخیرا، حاجی ابوالحسن و میونیر [۱۸] با استفاده‌ی هوشمندانه‌ی لم Z_p - تاکر^۴ نتیجه‌ی علیشاهی - حاجی ابوالحسن (قضیه ۷.۲.۱) و هم‌چنین نتیجه‌ی دلنیکوف - کریز (قضیه ۵.۲.۱) را به ضرب رسته‌ای ابرگراف‌های کنسری این‌چنین توسیع دادند.

قضیه آ. [۱۸] ابرگراف‌های $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_t$ و عدد صحیح $r \geq 2$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\chi(KG^r(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^r(\mathcal{H}_t)) \geq \left\lceil \frac{1}{r-1} \min_{i \in [t]} (|V(\mathcal{H}_i)| - \text{alt}^r(\mathcal{H}_i)) \right\rceil.$$

با استفاده از قضیه‌ی آ، حاجی ابوالحسن و میونیر خانواده‌ی جدیدی از ابرگراف‌هایی را که در حدس ژو صادق هستند، معرفی کردند.

سیمونی و تاردوش [۳۰] تعمیم متفاوتی برای نتیجه‌ی دلنیکوف - کریز ارائه دادند. در واقع آن‌ها ثابت کردند که اگر برای ابرگراف دلخواه $\mathcal{H}$ ، $t = \text{cd}^2(\mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه هر رنگ‌آمیزی مجاز $KG(\mathcal{H})$ شامل یک زیرگراف دوبخشی کامل $K_{\lfloor t/2 \rfloor, \lfloor t/2 \rfloor}$ است به طوری که تمام رئوس این زیرگراف رنگ‌های متمایز می‌گیرند و این رنگ‌ها در ترتیب طبیعی خود به‌طور تناوبی در دو بخش این گراف دوبخشی ظاهر می‌شوند. میونیر [۲۶]، این نتیجه و هم‌چنین نتیجه‌ی دلنیکوف - کریز را این‌چنین به ابرگراف‌های کنسری توسیع داد.

قضیه ب. [۲۶] فرض کنید $\mathcal{H}$ ابرگرافی دلخواه و p عددی اول باشد. هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG^p(\mathcal{H})$ شامل زیرابگراف p - بخشی کامل، متعادل و رنگارنگی مانند $\mathcal{F}$ با $\text{cd}^p(\mathcal{H})$ راس است.

قابل ذکر است که میونیر [۲۶]، قضیه‌ی ب را نیز تعمیم داد و ثابت کرد که با جایگزینی $\text{cd}^p(\mathcal{H})$ با $|V(\mathcal{H})| - \text{alt}^p(\mathcal{H})$ ، قضیه هم‌چنان برقرار است. وی در اثباتش Z_q - تعمیمی از قضیه‌ای از کی‌فن^۵ که برحسب نگاشت‌های زنجیر بیان شده است، را به کار برد.

پس از آن، علیشاهی [۲] با معرفی تعمیم مناسبی از لم Z_p - تاکر اثبات ساده‌ای برای نتیجه‌ی میونیر ارائه کرد. توسیع‌های دیگری از نتیجه‌ی میونیر را می‌توانید در [۲] ببینید.

هم‌چنین چن^۶ ثابت کرد که در هر رنگ‌آمیزی مجاز گراف کنسر $KG(n, k)$ ($2 \leq 2k \leq n$) مانند c با $n - 2k + 2$ رنگ، دو زیرمجموعه‌ی $k - 1$ عضوی از $[n]$ مانند T و S و هم‌چنین $n - 2k + 2$ عدد صحیح متمایز $i_1, \dots, i_{n-2k+2} \in [n] \setminus (S \cup T)$ وجود دارند به طوری که به‌ازای $c(S \cup \{i_j\}) = c(T \cup \{i_j\}) = j$ ، $j = 1, \dots, n - 2k + 2$ است.

بحث در مورد وجود چنین زیرگراف‌های دوبخشی به‌منزله‌ی بحث در مورد عدد رنگی دوری در گراف‌ها است. علیشاهی و همکارانش [۵] قضیه‌ی دیگری ارائه کردند که هم زمان نتیجه‌ی سیمونی - تاردوش و نتیجه‌ی به‌دست آمده توسط چن [۱۱] را تعمیم می‌دهد. آن‌ها ثابت کردند که به‌ازای ابرگراف ناتهی $\mathcal{H}$ که $\chi(KG(\mathcal{H})) = \text{cd}^2(\mathcal{H}) = t$ است و $KG(\mathcal{H})$ راس تنها

^۴ Z_p -Tucker lemma

^۵ Ky Fan

^۶ Chen

ندارد، هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG(\mathcal{H})$ با t رنگ شامل یک نسخه‌ی رنگارنگ از $K_{t,t}^*$ است که تمام رنگ‌ها در هر بخش ظاهر می‌شوند.

همان‌طور که در فصل قبل آمده است، با کمک عدد رنگی نقصانی منصفانه ثابت کرده‌ایم که به‌ازای عدد اول p هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG^p(\mathcal{H})$ شامل یک زیرابرگراف رنگارنگ، متعادل و p -بخشی کامل با $\text{ecd}^p(\mathcal{H})$ راس است [۱].

در این فصل نتایج به‌دست آمده در فصل قبل و همچنین نتیجه‌ی حاجی‌ابوالحسن-میونیر [۱۸] را به قضایای زیر توسیع می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۳. ابرگراف‌های $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_t$ را در نظر بگیرید. به‌ازای عدد اول p ، η را چنین تعریف می‌کنیم

$$\eta = \max \left\{ \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i), \min_{i \in [t]} (|V(\mathcal{H}_i)| - \text{alt}^p(\mathcal{H}_i)) \right\}.$$

هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^p(\mathcal{H}_t)$ شامل زیرابرگراف p -بخشی کامل، متعادل و رنگارنگی مانند $\mathcal{F}$ با η راس است.

ملاحظه. این مساله که آیا قضیه ۲.۱.۳ به جای عدد اول p برای هر عدد دلخواه r برقرار است، همچنان به عنوان یک مساله باز و جالب مطرح است.

فرض کنید c یک رنگ‌آمیزی مجاز با مجموعه رنگ $[C]$ باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ زیرابرگراف p -بخشی کامل، متعادل و رنگارنگی باشد که وجود آن با توجه به قضیه ۲.۱.۳ تضمین شده است. واضح است که هر رنگ در حداکثر $p-1$ راس از $\mathcal{F}$ ظاهر می‌شود. در نتیجه، با توجه به قضیه‌ی قبل داریم:

$$\chi(KG^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^p(\mathcal{H}_t)) \geq \left\lceil \frac{\eta}{p-1} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1}{p-1} \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i) \right\rceil,$$

که می‌توان آن را برای $r \geq 2$ به‌صورت زیر توسیع داد:

قضیه ۳.۱.۳. ابرگراف‌های $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_t$ را در نظر بگیرید. فرض کنید r عدد صحیح مثبتی باشد که $r \geq 2$ داریم

$$\chi(KG^r(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^r(\mathcal{H}_t)) \geq \left\lceil \frac{1}{r-1} \min_{i \in [t]} \text{ecd}^r(\mathcal{H}_i) \right\rceil.$$

در ادامه، با معرفی چند ابرگراف کران پایین ارایه شده در قضیه ۳.۱.۳ را با کران پایینی که قضیه آ فراهم کرده است، مقایسه می‌کنیم.

مثال. اعداد صحیح مثبت n, k, r و a را که $a \geq rk$ ، $n > a$ و $r \geq 2$ است، در نظر بگیرید. $\mathcal{H}(n, k, a)$ را مشابه آن‌چه در فصل قبل تعریف شده است، ابرگرافی با مجموعه رؤوس $[n]$ و مجموعه یال‌های زیر در نظر بگیرید.

$$\{B \subseteq [n] : |B| = k \text{ و } B \not\subseteq [a]\}.$$

برای راحتی، ابرگراف $KG^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ را با $KG^r(n, k, a)$ نمایش می‌دهیم. بنابر آنچه در فصل قبل در گزاره ۱.۳.۲ آمده است، می‌دانیم که اگر $a \leq 2k - 2$ یا $a \geq rk - 1$ باشد، آن‌گاه $\chi(KG^r(n, k, a)) = \left\lceil \frac{n - \max\{a, r(k-1)\}}{r-1} \right\rceil$ است. بنابراین در حالتی که $a \geq rk - 1$ باشد، ثابت کرده‌ایم که

$$\chi(KG^r(\mathcal{H}(n, k, a))) = \left\lceil \frac{\text{ecd}^r(\mathcal{H}(n, k, a))}{r-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-a}{r-1} \right\rceil.$$

توجه کنید که بنابر قضیه ۳.۱.۳ حدس ژو برای خانواده‌ی ابرگراف‌های $KG^r(n, k, a)$ با شرط $a \geq rk - 1$ معتبر است. در مورد ابرگراف $KG^r(\mathcal{H}(n, k, a))$ می‌دانیم که برای مقادیر $r \geq 4$ و $a \geq rk - 1$ ، مقدار $\text{ecd}^r(\mathcal{H}(n, k, a)) - (n - \text{alt}^r(\mathcal{H}(n, k, a)))$ کران‌دار نیست. بنابراین، با کران پایین ارایه شده در قضیه آ، نمی‌توان خانواده ابرگراف‌های $KG^r(n, k, a)$ را که در حدس ژو صادق هستند، به‌دست آورد. از طرف دیگر، خانواده‌ای مانند $\mathcal{H}$ از ابرگراف‌ها وجود دارد که برای $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$ ، مقدار $\text{ecd}^r(\mathcal{H}(n, k, a)) - (n - \text{alt}^r(\mathcal{H}(n, k, a)))$ بی‌کران است (به فصل ۲ مراجعه کنید). بنابراین، قضیه آ و قضیه ۳.۱.۳ دو کران پایین مکمل فراهم می‌کنند.

۲.۳ اثبات نتایج

این بخش را به اثبات قضایای ۲.۱.۳ و ۳.۱.۳ اختصاص داده‌ایم. ابتدا مفاهیم و ابزارهایی را که در ادامه‌ی این فصل به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، معرفی می‌کنیم. سپس به اثبات نتایج می‌پردازیم. در صورت نیاز به جزئیات بیشتر در مورد ترکیبیات توپولوژیکی می‌توانید به [۲۳] مراجعه کنید.

۱.۲.۳ تعاریف و ابزارها

همان‌طور که در فصل ۱ آمده است، مجتمع سادگی σ_{p-2}^{p-1} ، یک مجتمع سادگی با مجموعه رئوس Z_p است و مجموعه سادک‌های آن شامل تمام زیرمجموعه‌های محض Z_p است. بنابراین، مجموعه رئوس مجتمع سادگی $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*n}$ را می‌توان با مجموعه $Z_p \times [n]$ یکسان در نظر گرفت. در این صورت، $\emptyset \neq \tau \subseteq Z_p \times [n]$ یک سادک از $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*n}$ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in [n]$ ، نامساوی $|\tau \cap (Z_p \times \{i\})| \leq p-1$ برقرار باشد. واضح است که $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*n}$ که در آن به‌ازای هر $(\varepsilon', i) \in Z_p \times [n]$ و $\varepsilon \in Z_p$ عمل به‌صورت $\varepsilon \cdot (\varepsilon', i) = (\varepsilon \cdot \varepsilon', i)$ تعریف می‌شود، یک مجتمع سادگی آزاد است.

سادک $\tau \in (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*n}$ را در نظر بگیرید. ابتدا مفاهیم τ^ε ، $h(\cdot)$ و $l(\cdot)$ که در فصل قبل تعریف شده است، را یادآوری می‌کنیم. به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ ، $\tau^\varepsilon = \{(\varepsilon, j) : (\varepsilon, j) \in \tau\}$ است. هم‌چنین

$$\ell(\tau) = p \cdot h(\tau) + |\{\varepsilon \in Z_p : |\tau^\varepsilon| > h(\tau)\}|,$$

که در آن $h(\tau) = \min_{\varepsilon \in Z_p} |\tau^\varepsilon|$ است. همان‌طور که در فصل ۱ بحث کردیم، برای عدد اول

p ، می‌توان Z_p را به‌عنوان یک مجتمع سادگی با مجموعه رئوس Z_p و مجموعه سادک‌های $\{\{\omega\}, \{\omega^2\}, \dots, \{\omega^p\}\}$ در نظر گرفت. با این دیدگاه، هر $X \in (Z_p \cup \{\circ\})^n \setminus \{\circ\}$ معادل با یک سادک در $Z_p^{*n} \subseteq (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*n}$ است. بنابراین صحبت درباره‌ی $h(X)$ و $\ell(X)$ معنی‌دار است. در واقع می‌توان گفت

$$h(X) = \min_{\varepsilon \in Z_p} |X^\varepsilon| \quad \text{و} \quad \ell(X) = p \cdot h(X) + |\{\varepsilon \in Z_p : |X^\varepsilon| > h(X)\}|.$$

باید توجه داشت که Z_p روی $(Z_p \cup \{\circ\})^n \setminus \{\circ\}$ با عمل $(\varepsilon \cdot x_1, \dots, \varepsilon \cdot x_n) = \varepsilon \cdot X$ ، که در آن $\varepsilon \cdot \circ$ به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ برابر $\circ$ تعریف شده است، آزادانه عمل می‌کند.

حال می‌توانیم به اثبات قضیه ۲.۱.۳ بپردازیم. برای راحتی کار ابتدا قضیه را در حالتی که $\eta = \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i)$ است، ثابت می‌کنیم. پس از آن، به دلیل تشابه زیاد، طرح کلی اثبات قضیه را برای حالتی که $\eta = \min_{i \in [t]} (|V(\mathcal{H}_i)| - \text{alt}^p(\mathcal{H}_i))$ است، ارایه می‌کنیم. برای اثبات این قضیه، قضیه‌ی دلد را روی نگاشت سادگی Z_p – متقارن

$$\begin{aligned} \lambda : \text{sd}(Z_p^{*n}) &\longrightarrow Z_p^{*m} \\ X &\longmapsto (s(X), \nu(X)) \end{aligned}$$

با $n = \sum_{i=1}^t |V(\mathcal{H}_i)|$ و m به اندازه‌ی کافی کوچک به‌کار می‌بریم. بنابر قضیه‌ی دلد، اگر بتوانیم وجود چنین نگاشت λ را ثابت کنیم، آن‌گاه $m \geq n$ است. لازم به ذکر است ایده‌ی استفاده از قضیه‌ی دلد یا حالت‌های خاص آن مانند Z_p – تاکر که اولین بار در مقاله‌ی جذابی [۲۴] از ماتوسک^۷ به‌کار رفته است، در مقاله‌های بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال [۱، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۸، ۲۵، ۲۶، ۳۶] را ببینید. معمولاً قسمت سخت و چالش‌برانگیز مساله این است که چگونه نگاشت λ ، به‌ویژه قسمت $s(X)$ آن، را تعریف کنیم. در ادامه خواهیم دید که چگونه ترکیب و توسیع روش‌هایی که قبلاً در این کارها مورد استفاده قرار گرفته است، برای به‌دست آوردن یک تعمیم مشترک نتیجه‌بخش است. در هر صورت برای این‌که این روش‌ها کنار هم کار کنند، لازم است ترفندهای جدیدی را نیز به‌کار گیریم. در این‌جا تابع $s(X)$ را به روش متفاوتی تعریف می‌کنیم و هم‌چنین تعریف تابع $\nu(X)$ را تغییر می‌دهیم تا بتوانیم به درستی از آن استفاده کنیم. به عبارت دقیق‌تر، برای تعریف تابع λ ، $\text{sd}(Z_p^{*n}) = (Z_p \cup \{\circ\})^n \setminus \{\circ\}$ ، را به دو زیرمجموعه‌ی Σ_1 و Σ_2 افراز می‌کنیم. Σ_2 را مجموعه بردارهای $X \in \text{sd}(Z_p^{*n})$ در نظر می‌گیریم که به‌ازای هر $j \in [t]$ و $\varepsilon \in Z_p$ ، مجموعه‌ی $\{i \in [n_j] : x_{i+\sum_{j'=1}^{j-1} n_{j'}} = \varepsilon\}$ شامل یالی از $\mathcal{H}_j = ([n_j], E_j)$ و در نتیجه X^ε شامل راسی از ابرگراف $\text{KG}^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^p(\mathcal{H}_t)$ باشد. به‌ازای هر $X \in \Sigma_2$ ، $\nu(X) \in \{\alpha + 1, \dots, m\}$ را، که در آن $\alpha = n - \eta + p - 1$ است، بر طبق یک رنگ‌آمیزی مجاز از $\text{KG}^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^p(\mathcal{H}_t)$ تعریف می‌کنیم و $s(X) \in Z_p$ را با استفاده از تابع کمکی $s_p(-)$ تعریف می‌کنیم. تعریف $\lambda(X)$ برای بقیه‌ی X ‌ها، یعنی $X \in \Sigma_1$ ، از حالت

⁷Matoušek

قبل نیز پیچیده‌تر است. در این حالت، از دو تابع کمکی $s_1(-)$ و $s_p(-)$ کمک می‌گیریم. مقدار بزرگ η ما را قادر می‌سازد که مقدار α و در نتیجه مقدار m را کوچک‌تر در نظر بگیریم و در نهایت کران بهتری به‌دست آوریم.

۲.۲.۳ اثبات قضیه ۲.۱.۳

اگر $\eta = 0$ باشد، چیزی برای اثبات نداریم. اگر $1 \leq \eta \leq p-1$ باشد، مجموعه‌های دو به دو مجزای $U_1, \dots, U_p \subseteq V(KG^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^p(\mathcal{H}_t))$ را که به‌ازای $i \leq \eta$ ، $|U_i| = 1$ و در غیر این صورت $|U_i| = 0$ است، در نظر بگیرید. توجه کنید که حداقل به ازای یک i ، $U_i = \emptyset$ است. واضح است که زیرابگراف $[U_1, \dots, U_p]$ از $KG^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^p(\mathcal{H}_t)$ یالی ندارد، p -بخشی و متعادل است و همچنین متناظر با هر رنگ‌آمیزی مجاز از $KG^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times KG^p(\mathcal{H}_t)$ ، زیرابگراف مذکور رنگارنگ است که مطلوب ماست. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $\eta \geq p$ است.

برای راحتی در نمادگذاری، فرض کنیم $\mathcal{H}_1 = ([n_1], E_1), \dots, \mathcal{H}_t = ([n_t], E_t)$ باشد. همچنین $n = \sum_{i=1}^t n_i$ را در نظر بگیرید. برای هر $X = (x_1, \dots, x_n) \in (Z_p \cup \{0\})^n \setminus \{0\}$ ، فرض می‌کنیم که $X(1) \in (Z_p \cup \{0\})^{n_1}$ ، $X(2) \in (Z_p \cup \{0\})^{n_2}$ ، $\dots$ ، $X(t) \in (Z_p \cup \{0\})^{n_t}$ درایه‌ی اول X است؛ n_p درایه‌ی بعدی X است؛ و الی آخر، تا جایی که $X(t) \in (Z_p \cup \{0\})^{n_t}$ درایه‌ی آخر X است. همچنین، به‌ازای هر $j \in [t]$ ، $A_j(X)$ را مجموعه‌ی علامت‌های $\varepsilon \in Z_p$ ای در نظر بگیرید که $X(j)^\varepsilon$ حداقل یک یال از $\mathcal{H}_j$ را در بر داشته باشد. توجه کنید $X(j)^\varepsilon$ مجموعه‌ی تمام $i \in [n_j]$ هایی که $x_{i+\sum_{j'=1}^{j-1} n_{j'}} = \varepsilon$ است. Σ_1 و Σ_p را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Sigma_1 = \{X \in (Z_p \cup \{0\})^n \setminus \{0\} : \exists j \in [t], A_j(X) \neq Z_p\}$$

و

$$\Sigma_p = \{X \in (Z_p \cup \{0\})^n \setminus \{0\} : \forall j \in [t], A_j(X) = Z_p\}.$$

توجه کنید که اگر به‌ازای هر $X \in (Z_p \cup \{0\})^n \setminus \{0\}$ و هر $j \in [t]$ ، قرار دهیم $S = \bigcup_{\varepsilon \in Z_p} X(j)^\varepsilon$ ، آن‌گاه $X(j) = (X(j)^\varepsilon)_{\varepsilon \in Z_p}$ را می‌توان افزایش از مجموعه رؤوس $\mathcal{H}_j[S]$ به p کلاس رنگی در نظر گرفت، یعنی رؤوس $X(j)^\varepsilon$ رنگ ε را می‌گیرند. مشهود است که در این صورت، مقدار $h(X(j))$ برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین کلاس رنگی است؛ $\ell(X(j))$ برابر بیش‌ترین تعداد رؤوسی است که می‌توان آن‌ها را با یک رنگ‌آمیزی منصفانه (نه لزوماً مجاز) رنگ کرد؛ و $A_j(X)$ مجموعه رنگ‌های $\varepsilon \in Z_p$ است که یک یال با رنگ ε در $\mathcal{H}_j[S]$ وجود دارد.

اثبات قضیه ۲.۱.۳ در حالتی که $\eta = \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i)$ است

در ادامه، ابتدا دو تابع علامت s_1 و s_p را که نقش اساسی در اثبات دارند، معرفی می‌کنیم. با کمک این دو تابع، تابع $s(X)$ را می‌توانیم به‌ازای هر $X \in \Sigma_1$ تعریف کنیم.

تعریف تابع علامت $s_1(\cdot)$. اگر $X \in \Sigma_1$ برداری باشد که به‌ازای هر $j \in [t]$ ، $A_j(X) \in \{\emptyset, Z_p\}$ است، برای آن از تابع علامت $s_1(\cdot)$ استفاده می‌کنیم. ابتدا $B_j(X)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B_j(X) = \begin{cases} X(j) & A_j(X) = Z_p, \\ \{\varepsilon : X(j)^\varepsilon \neq \emptyset\} & A_j(X) = \emptyset \text{ و } h(X(j)) = \circ, \\ \widetilde{X(j)} & A_j(X) = \emptyset \text{ و } h(X(j)) > \circ, \end{cases}$$

که $\widetilde{X(j)} \in (Z_p \cup \{\circ\})^{n_j} \setminus \{\circ\}$ است و به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ داریم:

$$\widetilde{X(j)}^\varepsilon = \begin{cases} X(j)^\varepsilon & |X(j)^\varepsilon| = h(X(j)), \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

توجه کنید که $B_j(X)$ می‌تواند یکی از این دو نوع ماهیت متفاوت را داشته باشد: یک بردار در $(Z_p \cup \{\circ\})^{n_j} \setminus \{\circ\}$ یا یک زیرمجموعه‌ی محض از Z_p . حال، بردار $B(X) = (B_1(X), \dots, B_t(X))$ را در نظر گرفته و با توجه به تعریف $B(X)$ مجموعه‌ی L_1 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_1 = \{B(X) : X \in \Sigma_1 \text{ و } \forall j \in [t], A_j(X) \in \{\emptyset, Z_p\}\}.$$

توجه کنید L_1 یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی زیر است:

$$\left((Z_p \cup \{\circ\})^{n_1} \cup (\mathfrak{Z}^{Z_p} \setminus \{Z_p\}) \right) \times \dots \times \left((Z_p \cup \{\circ\})^{n_t} \cup (\mathfrak{Z}^{Z_p} \setminus \{Z_p\}) \right) \setminus (\{\circ, \emptyset\} \times \dots \times \{\circ, \emptyset\}).$$

به‌ازای $\varepsilon \in Z_p$ و بردار $B = (B_1, \dots, B_t) \in L_1$ ، تعریف می‌کنیم

$$\varepsilon \cdot B = (\varepsilon \cdot B_1, \dots, \varepsilon \cdot B_t),$$

که

$$\varepsilon \cdot B_i = \begin{cases} (\varepsilon \cdot x_1, \dots, \varepsilon \cdot x_{n_i}) & B_i = (x_1, \dots, x_{n_i}) \in (Z_p \cup \{\circ\})^{n_i} \setminus \{\circ\} \\ \{\varepsilon \cdot z : z \in B_i\} & B_i \subsetneq Z_p. \end{cases}$$

به‌راحتی می‌توان دید که با در نظر گرفتن عمل فوق، L_1 بسته و آزاد است و علاوه بر این $B(\cdot)$ یک نگاشت Z_p -متقارن است، یعنی به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ و هر $X \in \Sigma_1$ که برای هر $j \in [t]$ ، $A_j(X) \in \{\emptyset, Z_p\}$ باشد، $B(\varepsilon \cdot X) = \varepsilon \cdot B(X)$ است. حال نگاشت Z_p -متقارن دلخواه $s_1 : L_1 \rightarrow Z_p$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که چنین نگاشتی را می‌توان با انتخاب یک نماینده در هر دور و تعریف دلخواه مقدار نگاشت برای آن نماینده، تعریف کرد.

تعریف تابع علامت $s_1(-)$. واضح است که Z_p روی

$$L_1 = \mathfrak{Z}^{Z_p} \times \dots \times \mathfrak{Z}^{Z_p} \setminus (\{\emptyset, Z_p\} \times \dots \times \{\emptyset, Z_p\})$$

با عمل $\varepsilon \cdot (C_1, \dots, C_t) = (\varepsilon \cdot C_1, \dots, \varepsilon \cdot C_t)$ که $\varepsilon \cdot C_i = \{\varepsilon \cdot z : z \in C_i\}$ است، آزادانه عمل می‌کند. مشابه با تعریف $s_p(-)$ ، $s_p : L_p \rightarrow Z_p$ را یک نگاشت Z_p -متقارن دلخواه در نظر می‌گیریم.

مقدار $\alpha = n - \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i) + p - 1$ را در نظر می‌گیریم. چون $\min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i) \geq p$ است، بنابراین $\alpha < n$ است. برای هر $j \in [t]$ ، تابع $\nu_j : (Z_p \cup \{o\})^n \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{N}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\nu_j(X) = \begin{cases} |X(j)| & A_j(X) = Z_p \\ |A_j(X)| + \max \left\{ \ell(Z) : Z \subseteq X(j) \text{ و } \forall \varepsilon \in Z_p, E(\mathcal{H}_j[Z^\varepsilon]) = \emptyset \right\} & A_j(X) \neq Z_p. \end{cases}$$

توجه کنید که $|X(j)|$ نشان‌دهنده‌ی تعداد درایه‌های غیرصفر $X(j)$ است. حال، بنابر تعریف $\nu_j(\cdot)$ ، تابع مقدار را به صورت $\nu(X) = \sum_{j=1}^t \nu_j(X)$ تعریف می‌کنیم. **تعریف نگاشت λ_1 .** نگاشت λ_1 را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \Sigma_1 &\rightarrow Z_p \times \{1, \dots, \alpha\} \\ X &\mapsto (s(X), \nu(X)). \end{aligned}$$

برای تعریف $s(X)$ ، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- اگر به‌ازای هر $j \in [t]$ ، $A_j(X) \in \{\emptyset, Z_p\}$ باشد، قرار می‌دهیم $s(X) = s_1(B(X))$.
 - اگر به‌ازای یک $j \in [t]$ ، $A_j(X) \notin \{\emptyset, Z_p\}$ ، قرار می‌دهیم $s(X) = s_p(A_1(X), \dots, A_t(X))$.
- لم ۱.۲.۳.** نگاشت λ_1 یک نگاشت Z_p -متقارن است و هیچ دو بردار $X, Y \in \Sigma_1$ وجود ندارند که $\nu(X) = \nu(Y)$ و $s(X) \neq s(Y)$ باشد.

برهان. از آنجایی که $s_1(-)$ و $s_p(-)$ دو نگاشت Z_p -متقارن هستند و به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ ، $\nu(\varepsilon \cdot X) = \nu(X)$ است، نگاشت λ_1 یک نگاشت Z_p -متقارن است. فرض کنیم حکم برقرار نباشد، یعنی دو بردار X و Y در Σ_1 وجود داشته باشند که $\nu(X) = \nu(Y)$ و همچنین $s(X) \neq s(Y)$ باشد. چون $X \subseteq Y$ است، می‌دانیم $X(j) \subseteq Y(j)$ و در نتیجه به‌ازای هر $j \in [t]$ ، $A_j(X) \subseteq A_j(Y)$ است. علاوه بر این، $X(j) \subseteq Y(j)$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \{ \ell(Z) : Z \subseteq X(j) \text{ و } \forall \varepsilon \in Z_p, E(\mathcal{H}_j[Z^\varepsilon]) = \emptyset \} &\subseteq \\ \{ \ell(Z) : Z \subseteq Y(j) \text{ و } \forall \varepsilon \in Z_p, E(\mathcal{H}_j[Z^\varepsilon]) = \emptyset \}. & \end{aligned}$$

لذا، به‌ازای هر $j \in [t]$ ، $\nu_j(X) \leq \nu_j(Y)$ است. بنابراین تساوی $\nu(X) = \nu(Y)$ نتیجه می‌دهد که $\nu_j(X) = \nu_j(Y)$. بنابر این تساوی و بحث فوق، برای هر $j \in [t]$ ، داریم $A_j(X) = A_j(Y)$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(I) به‌ازای هر j ، $A_j(X) \in \{\emptyset, Z_p\}$ باشد. در این صورت، $s(X) = s_1(B(X))$ است. چون برای تمام j ها، $A_j(X) = A_j(Y)$ است، داریم $s(Y) = s_1(B(Y))$. در نتیجه، با توجه به این که $s(X) \neq s(Y)$ ، داریم $B(X) \neq B(Y)$. حال، j را برابر کوچک‌ترین عدد صحیح قرار می‌دهیم که $B_{j_0}(X) \neq B_{j_0}(Y)$ است. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(۱) $A_{j_0}(X) = A_{j_0}(Y) = Z_p$ باشد. بنابر تعریف $B_{j_0}(\cdot)$ ، داریم $X(j_0) \subsetneq Y(j_0)$. لذا، بنابر تعریف ν_{j_0} ، نامساوی $\nu_{j_0}(X) < \nu_{j_0}(Y)$ برقرار است، در صورتی که امکان‌پذیر نیست.

(۲) $A_{j_0}(X) = A_{j_0}(Y) = \emptyset$ باشد. با استفاده از تساوی $\nu_{j_0}(X) = \nu_{j_0}(Y)$ ، داریم $\ell(X(j_0)) = \ell(Y(j_0))$. بنابراین،

$$p \cdot h(X(j_0)) + |\{\varepsilon : |X(j_0)^\varepsilon| > h(X(j_0))\}| = p \cdot h(Y(j_0)) + |\{\varepsilon : |Y(j_0)^\varepsilon| > h(Y(j_0))\}|$$

که به وضوح نتیجه می‌دهد $h(X(j_0)) = h(Y(j_0))$ و

$$|\{\varepsilon : |X(j_0)^\varepsilon| > h(X(j_0))\}| = |\{\varepsilon : |Y(j_0)^\varepsilon| > h(Y(j_0))\}|.$$

بنابر رابطه‌ی $X(j_0) \subseteq Y(j_0)$ داریم

$$\{\varepsilon : |X(j_0)^\varepsilon| > h(X(j_0))\} = \{\varepsilon : |Y(j_0)^\varepsilon| > h(Y(j_0))\}.$$

بنابراین، با توجه به تعریف $B(\cdot)$ ، داریم $B_{j_0}(X) = B_{j_0}(Y)$ ، که تناقض است.

(II) $j \in [t]$ وجود داشته باشد که $A_j(X) \notin \{\emptyset, Z_p\}$. چون $s(X) \neq s(Y)$ است، داریم

$$s_\vee(A_1(X), \dots, A_t(X)) \neq s_\vee(A_1(Y), \dots, A_t(Y)).$$

در نتیجه باید نامساوی $(A_1(X), \dots, A_t(X)) \neq (A_1(Y), \dots, A_t(Y))$ برقرار باشد. بنابراین، حداقل به ازای یک j ، $A_j(X) \neq A_j(Y)$ که امکان‌پذیر نیست.

□

نمادگذاری‌هایی را که در ادامه‌ی اثبات به آن‌ها نیاز داریم، در زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مجاز از $\text{KG}^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^p(\mathcal{H}_t)$ با مجموعه رنگ $[C]$ باشد. برای هر $X \in \Sigma_\vee$ و هر $\varepsilon \in Z_p$ ، تعریف می‌کنیم:

$$E^\varepsilon(X) = \{(e_1, \dots, e_t) \in E_1 \times \dots \times E_t : \forall j \in [t], e_j \subseteq X(j)^\varepsilon\}.$$

باید توجه داشت که بنابر تعریف $\Sigma_\vee$ ، به‌ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ ، $E^\varepsilon(X) \neq \emptyset$ است. حال τ_X را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tau_X = \{(\varepsilon, c(u)) : \varepsilon \in Z_p \text{ و } u = (e_1, \dots, e_t) \in E^\varepsilon(X)\}.$$

اگر به ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ ، یک $u_\varepsilon \in E^\varepsilon(X)$ انتخاب کنیم، آن گاه $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in Z_p\}$ یالی از $KG^p(\mathcal{H}_1) \times \cdots \times KG^p(\mathcal{H}_t)$ است. در نتیجه، از آن جایی که c یک رنگ آمیزی مجاز از $KG^p(\mathcal{H}_1) \times \cdots \times KG^p(\mathcal{H}_t)$ است، برای هر $i \in [C]$ حداقل یک $\varepsilon \in Z_p$ که $(\varepsilon, i) \notin \tau_X$ وجود دارد. بنابر این مشاهدات، τ_X یک سادک از $(\sigma_{p-2}^{p-1})^{*C}$ است. علاوه بر این، چون به ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ ، $E^\varepsilon(X) \neq \emptyset$ است، داریم $\ell(\tau_X) \geq p$.

تعریف تابع علامت $s_p(-)$. برای عدد صحیح $b \in [C]$ ، U_b را مجموعه‌ی تمام سادک‌های $\tau \in (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*C}$ که به ازای هر $\varepsilon \in Z_p$ ، $|\tau^\varepsilon| \in \{\emptyset, b\}$ است، در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $U = \bigcup_{b=1}^C U_b$. یک نگاشت Z_p -متقارن دلخواه مانند $s_p : U \rightarrow Z_p$ انتخاب می‌کنیم. همچنین به ازای هر $\tau \in (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*C}$ با $h = h(\tau) = \min |\tau^\varepsilon|$ ، قرار می‌دهیم

$$\tilde{\tau} = \bigcup_{\varepsilon : |\tau^\varepsilon| = h} \tau^\varepsilon.$$

توجه کنید $\tilde{\tau}$ یک زیر-سادک از τ است که در U قرار دارد. بنابراین، $s_p(\tilde{\tau})$ تعریف شده است. **تعریف نگاشت λ_p .** نگاشت λ_p را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lambda_p : \Sigma_p &\longrightarrow Z_p \times \left\{ \alpha + 1, \dots, \alpha - p + 1 + \max_{X \in \Sigma_p} \ell(\tau_X) \right\} \\ X &\longmapsto (s(X), \nu(X)), \end{aligned}$$

که $s(X) = s_p(\tilde{\tau}_X)$ و $\nu(X) = \alpha - p + 1 + \ell(\tau_X)$ است.

لم ۲.۲.۳. نگاشت λ_p یک نگاشت Z_p -متقارن است و هیچ دو بردار $X, Y \in \Sigma_1$ وجود ندارند که $\nu(X) = \nu(Y)$ و $s(X) \neq s(Y)$ باشد.

برهان. به وضوح λ_p یک نگاشت Z_p -متقارن است. فرض کنید که حکم برقرار نباشد. بنابراین دو بردار X و Y در Σ_p وجود دارند که $\nu(X) = \nu(Y)$ و $s(X) \neq s(Y)$ است. با توجه به تعریف λ_p ، تساوی $\ell(\tau_X) = \ell(\tau_Y)$ باید برقرار باشد. با استفاده از تعریف $\ell(\cdot)$ ، می‌دانیم $h(\tau_X) = h(\tau_Y)$ است. بنابر تساوی آخر و رابطه‌ی $\tau_X \subseteq \tau_Y$ ، نتیجه می‌گیریم که $\tilde{\tau}_X = \tilde{\tau}_Y$ و در نتیجه، $s(X) = s_p(\tilde{\tau}_X) = s_p(\tilde{\tau}_Y) = s(Y)$ ، که تناقض است. $\square$

در لم زیر نشان می‌دهیم که چگونه وجود یک بردار X با $\ell(X)$ بزرگ، اثبات را کامل می‌کند.

لم ۳.۲.۳. اگر یک $X \in \Sigma_p$ با $\ell(\tau_X) \geq q$ وجود داشته باشد، آن گاه $KG^p(\mathcal{H}_1) \times \cdots \times KG^p(\mathcal{H}_t)$ شامل یک زیربرگراف p -بخشی کامل، متعادل و رنگارنگ با q راس است.

برهان. فرض کنیم $X \in \Sigma_p$ یک بردار باشد که $\ell(\tau_X) \geq q$ است. زیرسادک $\tau \subseteq \tau_X$ را که $\ell(\tau) = |\tau| = q$ است، در نظر می‌گیریم. به ازای هر $i \in [p]$ ، $(\omega^i, j) \in \tau$ ، $j \in [C]$ ، $S_i = \{j \in [C] : (\omega^i, j) \in \tau\}$

تعریف می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که به‌ازای هر $i \in [p]$ ، رابطه‌ی $\lfloor \frac{q}{p} \rfloor \leq |S_i| \leq \lceil \frac{q}{p} \rceil$ برقرار است. همچنین، واضح است که $\sum_{i=1}^p |S_i| = q$ است. برای هر $i \in [p]$ و $s \in S_i$ ، با توجه به تعریف $\tau(X)$ و S_i ، یک راس مانند $u_{i,s} = (e_{i,1}^s, \dots, e_{i,t}^s)$ از $\text{KG}^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^p(\mathcal{H}_t)$ وجود دارد که $c(u_{i,s}) = s$ و به‌ازای هر $j \in [t]$ ، $e_{i,j}^s \subseteq X(j)^{\omega_i}$ است. حال، به‌ازای هر $i \in [p]$ ، $U_i = \{u_{i,s} : s \in S_i\}$ قرار می‌دهیم. واضح است که $\text{KG}^p(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^p(\mathcal{H}_t)[U_1, \dots, U_p]$ زیرابرگراف مطلوب است. $\square$

تکمیل اثبات قضیه ۲.۱.۳ وقتی $\eta = \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i)$ است. برای کامل کردن اثبات قضیه‌ی ۲.۱.۳، همان‌طور که پیش از این ذکر شد از قضیه‌ی دلد [۱۲، ۲۳] که تعمیمی از قضیه‌ی برسوک-اولام است، استفاده می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی دلد می‌دانیم که اگر نگاشت Z_p -مقارنی از Z_p -مجتمع سادگی K_1 به Z_p -مجتمع سادگی آزاد K_p وجود داشته باشد، بعد K_p اکیدا از همبندی K_1 بیش‌تر است. برای راحتی در نمادگذاری قرار می‌دهیم

$$m = \alpha - p + 1 + \max_{X \in \Sigma_p} \ell(\tau(X)).$$

با توجه به لم ۳.۲.۳، کافی است نشان دهیم که

$$\max_{X \in \Sigma_p} \ell(\tau_X) \geq \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i).$$

برای این منظور، $\lambda : (Z_p \cup \{0\})^n \setminus \{0\} \rightarrow Z_p \times [m]$ را طوری تعریف می‌کنیم که برای هر $X \in (Z_p \cup \{0\})^n \setminus \{0\}$ ، اگر $X \in \Sigma_1$ باشد، آن‌گاه $\lambda(X) = \lambda_1(X)$ ، و در غیر این‌صورت $\lambda(X) = \lambda_p(X)$ است. با توجه به لم ۱.۲.۳ و لم ۲.۲.۳، یک نگاشت سادگی Z_p -مقارن از $\text{sd}(Z_p^n)$ به Z_p^{*m} است. در نتیجه، بنابر قضیه‌ی دلد، بعد Z_p^{*m} از همبندی $\text{sd}(Z_p^{*n})$ اکیدا بیش‌تر است، یعنی $n - 2 > m - 1$ ، که مطلوب ماست. $\square$

اثبات قضیه‌ی ۲.۱.۳ درحالتی که $\eta = \min_{i \in [t]} (|V(\mathcal{H}_i)| - \text{alt}^p(\mathcal{H}_i))$ است.

در این قسمت، برای حالت $\eta = \min_{i \in [t]} (|V(\mathcal{H}_i)| - \text{alt}^p(\mathcal{H}_i))$ ، روند کلی اثبات را بیان می‌کنیم. بدین منظور، کافی است در اثبات قضیه ۲.۱.۳ برای حالت $\eta = \min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i)$ تغییرات زیر را ایجاد کنیم.

- در بخش ۲.۲.۳، $\min_{i \in [t]} \text{ecd}^p(\mathcal{H}_i)$ را با $\min_{i \in [t]} (|V(\mathcal{H}_i)| - \text{alt}^p(\mathcal{H}_i))$ جایگزین کنیم.
- برای تعریف هر کدام از تابع‌های $\nu_j(X)$ ، به‌جای استفاده از تابع $\ell(\cdot)$ ، از $\text{alt}(\cdot)$ استفاده کنیم.
- در تعریف $\lambda_1(X)$ ، به‌ازای هر X که برای تمام $j \in [t]$ ها $A_j(X) \in \{\emptyset, Z_p\}$ است، $s(X)$ را اولین درایه‌ی غیر صفر X قرار دهیم.

مشابه روندی که در بخش ۲.۲.۳ داشتیم، به راحتی می‌توان بررسی کرد که لم ۱.۲.۳، لم ۲.۲.۳ و لم ۳.۲.۳ با به کار بردن اصلاحاتی که در بالا بیان کردیم، هم‌چنان معتبرند. بنابراین، با به کار بردن قضیه ی دلد، نتیجه‌ی مطلوب را به دست می‌آوریم.

۳.۲.۳ اثبات قضیه ۳.۱.۳

برای اثبات قضیه ۳.۱.۳، این قضیه را به حالتی که r عدد اول است، کاهش می‌دهیم. بنابر بحثی که دقیقاً بعد از اثبات قضیه ۲.۱.۳ آمده است، از درستی قضیه ۳.۱.۳ در حالتی که r عددی اول است، اطمینان داریم. قابل ذکر است که ایده‌ی این کاهش را مدیون کاهش مشهور کریز در [۲۱] هستیم. این ایده در مقالاتی مانند [۴، ۱۸، ۳۶، ۳۷] نیز مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه از روندی مشابه آن‌چه در [۱۸] آمده است، استفاده می‌کنیم.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید r' و r'' دو عدد صحیح باشند. اگر قضیه ۳.۱.۳ برای هر دو مقدار r' و r'' برقرار باشد، آن‌گاه قضیه‌ی مذکور برای $r = r'r''$ نیز برقرار است.

به‌ازای دو مقدار صحیح s و C و ابرگراف $\mathcal{H}$ ، ابرگراف $\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s}) &= V(\mathcal{H}) \\ E(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s}) &= \left\{ A \subseteq V(\mathcal{H}) : \text{ecd}^s(\mathcal{H}[A]) > (s-1)C \right\}. \end{aligned}$$

برای اثبات لم فوق نیاز داریم که لم کمکی زیر را اثبات کنیم.

لم ۵.۲.۳. به‌ازای دو مقدار صحیح r و s داریم

$$\text{ecd}^{rs}(\mathcal{H}) \leq r(s-1)C + \text{ecd}^r(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s})$$

برهان. مجموعه‌ی $A \subseteq V(\mathcal{H})$ را چنان در نظر بگیرید که $|A| = |V(\mathcal{H})| - \text{ecd}^r(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s})$ باشد و r -رنگ‌آمیزی مجاز منصفانه داشته باشد. وجود چنین مجموعه‌ای با توجه به تعریف $\text{ecd}^r(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s})$ تضمین شده است. یک رنگ‌آمیزی مجاز منصفانه‌ی دلخواه از $\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s}[A]$ با r رنگ را در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که منظور از $X^j \subseteq A$ ، مجموعه رئوسی از A است که با رنگ j رنگ‌آمیزی شده است. از آن‌جایی که رنگ‌آمیزی c یک رنگ‌آمیزی مجاز منصفانه است، به‌ازای هر $i, j \in [r]$ است $|X^i| - |X^j| \leq 1$ و X^j نمی‌تواند یالی از $\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s}$ باشد. بنابراین به‌ازای هر $j \in [r]$ است $\text{ecd}^s(\mathcal{H}[X^j]) \leq (s-1)C$. لذا با حذف حداکثر $(s-1)C$ راس از هر کدام از X^j ها، می‌توان مجموعه‌های $Y^j \subseteq X^j$ که $\chi(\mathcal{H}[Y^j]) \leq s$ و $\{Y^1, \dots, Y^t\}$ مجموعه‌ای منصفانه باشد، را به دست آورد. بنابراین یک رنگ‌آمیزی مجاز منصفانه از $\mathcal{H}[\cup_{j=1}^r Y^j]$ با حداکثر rs رنگ وجود دارد و $\mathcal{H}[\cup_{j=1}^r Y^j]$ با حذف حداکثر $r(s-1)C + \text{ecd}^r(\mathcal{T}_{\mathcal{H},C,s})$ راس از ابرگراف $\mathcal{H}$ حاصل می‌شود. $\square$

اثبات لم ۴.۲.۳. فرض کنیم قضیه ۳.۱.۳ برای هر دو مقدار صحیح r' و r'' برقرار باشد، اما قضیه‌ی مذکور برای $r = r'r''$ برقرار نباشد. بنابراین ابرگراف‌های $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_t$ وجود دارند که

$$\min_{l=1, \dots, t} \text{ecd}^r(\mathcal{H}_l) > (r-1)C$$

که C عدد رنگی ابرگراف $\text{KG}^r(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^r(\mathcal{H}_t)$ است. فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مجاز برای ابرگراف $\text{KG}^r(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^r(\mathcal{H}_t)$ با C رنگ باشد. بنابر لم ۵.۲.۳، داریم:

$$\text{ecd}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_l, C, r'}) \geq \text{ecd}^{r'r''}(\mathcal{H}_l) - r''(r'-1)C > (r'r''-1)C - r''(r'-1)C = (r''-1)C > 0.$$

لذا، هر ابرگراف $\mathcal{T}_{\mathcal{H}_l, C, r'}$ حداقل یک یال دارد. به ازای هر $l \in [t]$ یک یال مانند e_l در $\mathcal{T}_{\mathcal{H}_l, C, r'}$ در نظر بگیرید. چون $\text{ecd}^{r'}(\mathcal{H}_l[e_l]) > (r'-1)C$ و قضیه ۳.۱.۳ برای r' برقرار است، $\chi(\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}_1[e_1]) \times \dots \times \text{KG}^{r'}(\mathcal{H}_t[e_t])) > C$ است. لذا با تخصیص رنگ به رؤس ابرگراف $\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}_1[e_1]) \times \dots \times \text{KG}^{r'}(\mathcal{H}_t[e_t])$ تحت رنگ‌آمیزی c ، ابرگراف مذکور دارای یال تک‌رنگ است. توجه کنید که اگر به‌ازای هر $l \in [t]$ یالی از $\mathcal{T}_{\mathcal{H}_l, C, r'}$ باشد، $(e_1, \dots, e_t)$ راسی از ابرگراف $\text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_1, C, r'}) \times \dots \times \text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_t, C, r'})$ است. به‌ازای هر راس $(e_1, \dots, e_t)$ از ابرگراف مذکور، $h(e_1, \dots, e_t)$ را رنگ یال تک‌رنگ $\text{KG}^{r'}(\mathcal{H}_1[e_1]) \times \dots \times \text{KG}^{r'}(\mathcal{H}_t[e_t])$ در نظر می‌گیریم. از آنجایی که c یک رنگ‌آمیزی مجاز برای ابرگراف $\text{KG}^r(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^r(\mathcal{H}_t)$ است، نگاشت $h : V(\text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_1, C, r'})) \times \dots \times V(\text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_t, C, r'})) \rightarrow C$ یک رنگ‌آمیزی مجاز برای ابرگراف $\text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_1, C, r'}) \times \dots \times \text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_t, C, r'})$ است. زیرا در غیر این صورت اگر h رنگ‌آمیزی مجازی برای ابرگراف $\text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_1, C, r'}) \times \dots \times \text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_t, C, r'})$ نباشد، می‌توان یک یال تک‌رنگ در $\text{KG}^r(\mathcal{H}_1) \times \dots \times \text{KG}^r(\mathcal{H}_t)$ یافت که با مجاز بودن رنگ‌آمیزی c در تناقض است. پس h یک رنگ‌آمیزی مجاز برای $\text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_1, C, r'}) \times \dots \times \text{KG}^{r''}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_t, C, r'})$ با C رنگ است. چون قضیه ۳.۱.۳ برای r'' برقرار است و بنابر لم ۵.۲.۳ داریم:

$$\min_{l \in [t]} \text{ecd}^r(\mathcal{H}_l) \leq \min_{l \in [t]} \text{ecd}^r(\mathcal{T}_{\mathcal{H}_l, C, r'}) + r''(r'-1)C \leq (r-1)C$$

□

بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مراجع

- [1] ABYAZISANI, R., AND ALISHAHI, M. A new lower bound for the chromatic number of general kneser hypergraphs. *European J. Combin* 71 (2018), 229 – 245.
- [2] ALISHAHI, M. Colorful Subhypergraphs in Uniform Hypergraphs. *Electron. J. Combin.* 24, 1 (2017), #P1, 23.
- [3] ALISHAHI, M., AND HAJIABOLHASSAN, H. Hedetniemi’s Conjecture Via Altermatic Number. *ArXiv e-prints arXiv:1403.4404v4* (2014).
- [4] ALISHAHI, M., AND HAJIABOLHASSAN, H. On the chromatic number of general Kneser hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 115 (2015), 186–209.
- [5] ALISHAHI, M., HAJIABOLHASSAN, H., AND MEUNIER, F. Strengthening topological colorful results for graphs. *European J. Combin.* 64 (2017), 27–44.
- [6] ALON, N., DREWNOWSKI, L., AND ŁUCZAK, T. Stable Kneser hypergraphs and ideals in $\mathbb{N}$ with the Nikodým property. *Proc. Amer. Math. Soc.* 137, 2 (2009), 467–471.
- [7] ALON, N., FRANKL, P., AND LOVÁSZ, L. The chromatic number of Kneser hypergraphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* 298, 1 (1986), 359–370.
- [8] ASLAM, J., CHEN, S., COLDREN, E., FRICK, F., AND SETIABRATA, L. On the generalized Erdős–Kneser conjecture: proofs and reductions. *J. Combin. Theory Ser. B* 135 (2019), 227 – 237.
- [9] BÁRÁNY, I. A short proof of Kneser’s conjecture. *J. Combin. Theory Ser. A* 25, 3 (1978), 325–326.
- [10] CHANG, G. J., LIU, D. D.-F., AND ZHU, X. A short proof for Chen’s Alternative Kneser Coloring Lemma. *J. Combin. Theory Ser. A* 120, 1 (2013), 159–163.

- [11] CHEN, P.-A. A new coloring theorem of Kneser graphs. *J. Combin. Theory Ser. A* 118, 3 (2011), 1062–1071.
- [12] DOLD, A. Simple proofs of some Borsuk-Ulam results. in *Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982)* (1983), volume 19 of *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 65–69.
- [13] DOL’NIKOV, V. L. A combinatorial inequality. *Sibirsk. Mat. Zh.* 29, 3 (1988), 53–58, 219.
- [14] DÖRFLER, W., AND WALLER, D. A. A category-theoretical approach to hypergraphs. *Arch. Math. (Basel)* 34, 1 (1980), 185–192.
- [15] ERDŐS, P. Problems and results in combinatorial analysis. in *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Rome, 1973), Tomo II*. Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976, pp. 3–17. Atti dei Convegni Lincei, No. 17.
- [16] GALE, D. Neighboring vertices on a convex polyhedron. in *Linear inequalities and related system*, Annals of Mathematics Studies, no. 38. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956, pp. 255–263.
- [17] GREENE, J. E. A new short proof of Kneser’s conjecture. *Amer. Math. Monthly* 109, 10 (2002), 918–920.
- [18] HAJIABOLHASSAN, H., AND MEUNIER, F. Hedetniemi’s conjecture for Kneser hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. A* 143 (2016), 42–55.
- [19] KNESER, M. Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen. *Math. Z.* 61 (1955), 429–434.
- [20] KŘÍŽ, I. Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.* 333, 2 (1992), 567–577.
- [21] KŘÍŽ, I. A correction to: “Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers” [Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), no. 2, 567–577; MR1081939 (92m:05085)]. *Trans. Amer. Math. Soc.* 352, 4 (2000), 1951–1952.
- [22] LOVÁSZ, L. Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy. *J. Combin. Theory Ser. A* 25, 3 (1978), 319–324.

- [23] MATOUŠEK, J. *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler.
- [24] MATOUŠEK, J. A combinatorial proof of Kneser's conjecture. *Combinatorica* 24, 1 (2004), 163–170.
- [25] MEUNIER, F. The chromatic number of almost stable Kneser hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. A* 118, 6 (2011), 1820–1828.
- [26] MEUNIER, F. Colorful Subhypergraphs in Kneser Hypergraphs. *Electron. J. Combin.* 21, 1 (2014), #P1.8, 13.
- [27] SCHRIJVER, A. Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs. *Nieuw Arch. Wisk. (3)* 26, 3 (1978), 454–461.
- [28] SIMONYI, G., TARDIF, C., AND ZSBÁN, A. Colourful theorems and indices of homomorphism complexes. *Electron. J. Combin.* 20, 1 (2013), P10.
- [29] SIMONYI, G., AND TARDOS, G. Local chromatic number, Ky Fan's theorem and circular colorings. *Combinatorica* 26, 5 (2006), 587–626.
- [30] SIMONYI, G., AND TARDOS, G. Colorful subgraphs in Kneser-like graphs. *European J. Combin.* 28, 8 (2007), 2188–2200.
- [31] TARDIF, C. Hedetniemi's conjecture, 40 years later. *Graph Theory Notes N. Y.* 54 (2008), 46–57.
- [32] WALTER, M. Equitable coloring. *Amer. Math. Monthly* (1973).
- [33] YUSTER, R. Equitable coloring of k -uniform hypergraphs. *SIAM J. Discrete Math.* (2003).
- [34] ZHU, X. On the chromatic number of the products of hypergraphs. *Ars Combin.* 34 (1992), 25–31.
- [35] ZHU, X. A survey on Hedetniemi's conjecture. *Taiwanese J. Math.* 2, 1 (1998), 1–24.
- [36] ZIEGLER, G. M. Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs. *Invent. Math.* 147, 3 (2002), 671–691.
- [37] ZIEGLER, G. M. Erratum: “Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs” [*Invent. Math.* 147 (2002), no. 3, 671–691]. *Invent. Math.* 163, 1 (2006), 227–228.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

dimension	بعد
stable	پایدار
permutation	جایگشت
multi-set	چندمجموعه
alternating sequence	دنباله‌ی متناوب
coloring	رنگ‌آمیزی
colorful	رنگارنگ
colorable	رنگ‌پذیر
colorability defect	رنگ‌پذیری نقصانی
vertex-critical	راس-بحرانی
induced subhypergraph	زیراب‌گراف القایی
barycentric subdivision	زیرتقسیم پایه
simplex	سادک
categorical product	ضرب رسته‌ای
independence number	عدد استقلال
alternatic number	عدد وابسته به تناوب
alternation number	عدد تناوبی
chromatic number	عدد رنگی
circular chromatic number	عدد رنگی دوری
local chromatic number	عدد رنگی موضعی
completely colorful	کاملاً رنگارنگ
balanced	متعادل
proper	مجاز
simplicial complex	مجتمع سادکی
equitable	منصفانه
Z_p -equivariant map	نگاشت Z_p - متقارن

homomorphism	همریختی
connectivity	همبندی
uniform	یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

altermatic number	عدد وابسته به تناوب
alternation number	عدد تناوبی
alternating sequence	دنباله‌ی متناوب
balanced	متعادل
barycentric subdivision	زیرتقسیم پایه
chromatic number	عدد رنگی
circular chromatic number	عدد رنگی دوری
colorable	رنگ‌پذیر
colorability defect	رنگ‌پذیری نقصانی
coloring	رنگ‌آمیزی
colorful	رنگارنگ
completely colorful	کاملاً رنگارنگ
connectivity	همبندی
categorical product	ضرب رسته‌ای
dimension	بعد
equitable	منصفانه
homomorphism	همریختی
independence number	عدد استقلال
induced subhypergraph	زیرابرگراف القایی
local chromatic number	عدد رنگی موضعی
multi-set	چندمجموعه
permutation	جایگشت
proper	مجاز
simplicial complex	مجتمع سادکی
simplex	سادک
stable	پایدار

یکنواخت	uniform
راس- بحرانی	vertex-critical
نگاشت Z_p - متقارن	Z_p -equivariant map

Abstract

Lovász proved the long-standing Kneser conjecture in 1978. This proof gave birth to an area of combinatorics called topological combinatorics which concentrates on coloring properties of Kneser graphs and hypergraphs. The general Kneser hypergraph $KG^r(\mathcal{H})$ is an r -uniform hypergraph that somehow encodes the edge intersections of a ground hypergraph $\mathcal{H}$.

We here define a new combinatorial parameter called equitable colorability defect of hypergraphs, which provides a new lower bound for the chromatic number of general Kneser hypergraphs. We prove that our proposed sharp lower bound outperforms most of the best known existing lower bounds for $\chi(KG^r(\mathcal{H}))$. In addition, we demonstrate that the difference between our proposed lower bound and some of the best known lower bounds such as the Dol'nikov-Kříž lower bound (1992), the Ziegler lower bound (2002), and the Alishahi-Hajiabolhassan lower bound (2015) can be arbitrary large. By use of the aforementioned lower bound, the chromatic number of some family of grahs is determined, as well.

Furthermore, we prove a result ensuring the existence of a colorful subhypergraph in any proper coloring of general Kneser hypergraphs that strengthens prior results in the literature. We extend these results to categorical product of general Kneser hypergraphs. To be more specific, we present some colorful type results for the coloring of categorical product of general Kneser hypergraphs, which generalize the Hajiabolhassan-Meunier result (2016). Also, we present a new lower bound for the chromatic number of categorical product of general Kneser hypergraphs which can be much better than the Hajiabolhassan-Meunier lower bound. Using this lower bound, we enrich the family of hypergraphs satisfying Zhu's conjecture (a generalization of Hedetniemi's conjecture to hypergraphs).

Keywords: Kneser hypergraphs; chromatic number; colorability defect; colorful subhypergraph; categorical product; Hedetniemi's conjecture



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Graph and Combinatorics

Some results in Kneser hypergraphs coloring

By: Roya Abyazisani

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

January 2019