

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدى الله لنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی - نظریه تقریب

رساله دکتری

بهترین تقریب و بهترین نقطه تقریبی در فضا های متریک و ۲- متریک

نگارنده: علی گنج بخش صنعتی

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

دی ماه ۱۳۹۷



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای علی گنج بخش صنعتی دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض - آنالیز تابعی به شماره دانشجویی ۹۲۳۳۳۰۵ ورودی بهمن ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ از رساله نظری / عملی خود با عنوان :

بهترین تقریب و بهترین نقطه تقریبی در فضا های متریک و ۲-متریک

دفاع و با اخذ نمره به درجه : نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☐ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ☐

ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ ☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐

ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر	استاد/ اساتید راهنما		
	دکتر	مشاور/ مشاورین		
	دکتر	استاد مدعو داخلی / خارجی		
	دکتر	استاد مدعو داخلی / خارجی		
	دکتر	استاد مدعو داخلی / خارجی		
	دکتر	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده		

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای/خانم بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده :

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به همسر عزیزم که سایه مهربانیش
سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه
صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را
برایم تسهیل نمود. کسی که همواره به
من می گوید تو صبوری ولی من در مدت
تحصیلم شکیبایی را از او آموختم.

سپاس‌گزاری

تشکر و سپاس از استاد دانشمند جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش که از محضر پر فیض تدریس و راهنمایی‌های ایشان، بهره‌ها برده‌ام. با امتنان بیکران از مساعدت‌های بی‌شائبه جناب آقای دکتر هاشمی ریاست محترم دانشکده و نیز جناب آقای دکتر احمد معتمد نژاد. درود به روح پاک پدرم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آن بوده‌ام. با تقدیر و درود فراوان خدمت پدر خانم عزیزم جناب آقای جواد گنج بخش که پیوسته مرا در طول دوران تحصیل پدارنه یاری نمودند. با سپاس بیکران از مادران بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم سرکار خانم راحله خاکپور و سرکار خانم طیبه رضازاده که دعا‌های خیر ایشان پیوسته بدرقه راه زندگی و تحصیلم بوده است. با سپاس بی‌دریغ خدمت دوستان گران‌مایه‌ام که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند

علی گنج بخش صنعتی

دی ماه ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب علی گنج بخش صنعتی دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بهترین تقریب و بهترین نقطه تقریبی در فضا های متریک و ۲- متریک ، تحت راهنمایی مهدی ایرانمنش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علی گنج بخش صنعتی

دی ماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله نظریه بهترین تقریب و بهترین نقطه تقریبی (که تعمیم یافته نظریه نقطه ثابت برای ناخود نگاشت ها می باشند) را روی فضای متریک و متریک گونه (۲-نرم، ۲-متریک و مدولار متریک) بررسی خواهیم کرد. فضاهای ۲-متریک را مرور کرده ایم و برخی از مفاهیم را برای این نوع از فضاها تعریف و گسترش داده ایم. تعامل در فضاهای ۲-نرم بررسی و سپس نظریه بهترین تقریب را در این نوع از فضاها گسترش داده ایم. همچنین در نوشتار پیش رو، به نظریه بهترین نقطه تقریبی در فضاهای متریک کامل پرداخته ایم و با ارائه تعریف نگاشت های ϕ -انقباض و P -خاصیت ضعیف، نتایج جدیدی را در این نظریه ارائه کرده ایم.

کلمات کلیدی:

بهترین تقریب، ۲-بهترین تقریب، ۲-متر، ۲-نرم، بهترین نقطه تقریبی، ϕ -انقباض، P -خاصیت ضعیف، نقطه ثابت، فضای متریک مدولار.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- (1) Lattice g-2-normed spaces and 2-best approximation properties of the their downward sub-sets, General mathematics, 2017.
- (2) A common best proximity point theorem for ϕ -dominated pair, European journal of pure and applied mathematics, 2018.
- (3) A new fixed point theorems in regular modular metric spaces, Communication in mathematics and applications.
- (4) Some common best proximity point theorems for the pair of non-self mappings from the pair (A, B) with weak P -property, The 4th Seminar on Operator Theory and its Applications, University of Bojnord, Iran 7 – 8rd March 2018.
- (5) Common best proximity point theorem for ϕ -dominated pair, The 9th Seminar on Nonlinear analysis and Applications, Feb.28 and Mar.1, 2018.

پیشگفتار

بسیاری از مسائل در ریاضیات مانند، معادلات، نامعادلات، ریاضیات مالی، نظریه بازی و بهینه سازی را می توان به صورت یک معادله به فرم زیر مدل سازی کرد.

$$Tx = x$$

که در آن T یک خود نگاشت روی یک فضای مناسب (متریک، توپولوژیک، ۲-متریک و ...) است. نوع این فضا بسته به نوع مسئله ما است (معادله دیفرانسیل، معادله انتگرال، معادله ماتریسی و ...).

حال اگر $T : A \rightarrow B$ یک ناخود نگاشت باشد. در این صورت معادله $Tx = x$ ممکن است دارای جواب نباشد. در این حالت یافتن نقطه ای مانند x که $d(x, Tx)$ کمترین مقدار را داشته باشد، بسیار مهم به نظر می رسد. نظریه بهترین تقریب و بهترین نقطه تقریبی در این راستا است. به این ترتیب بنیان نظریه تقریب بهینه که نقطه ثابت تعمیم یافته را محاسبه می کند، نهاده می شود. اگر A و B برهم منطبق شوند. در این صورت مساله بهترین نقطه تقریبی، تبدیل به مساله نقطه ثابت خواهد شد. فن^۱ قضیه بهترین تقریب را ثابت کرد:

”اگر A یک زیر مجموعه فشرده محدب ناتهی از فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب هاسدورف X باشد و نیز تابع $T : A \rightarrow X$ نگاشت پیوسته باشد، آنگاه عنصر $x \in A$ چنان موجود است که

$$d(Tx, x) = d(Tx, A) := \inf\{d(Tx, y) | y \in A\}.”$$

ریاضی دان هایی مانند پرولا^۲، ریچ^۳ و سگال^۴ قضیه فن را گسترش دادند. با توجه به اهمیت نظریه نقطه ثابت، نظریه بهترین تقریب و نظریه بهترین نقطه تقریبی، این نظریه ها برای فضاهای متریک گونه (فضای ۲-متریک، فضای G -متریک، فضای S متریک، فضای b -متریک فضای مدولار و ...) نیز بررسی شده است. این نوشتار شامل دو قسمت است در قسمت اول فضاهای ۲-متریک و ۲-نرم را مرور و سپس بهترین تقریب را برای این نوع فضاها بررسی می کنیم. در قسمت دوم پایان نامه، نظریه بهترین نقطه تقریبی و بهترین نقطه تقریبی مشترک را برای

^۱Fan theorem

^۲Prolla

^۳Rich

^۴Segal

نگاشت‌های انقباض گونه در فضای متریک و ۲- متریک مطرح می‌کنیم. در آخرین فصل از این پایان نامه، نظریه نقطه ثابت را در فضاهاى متریک مدولار منظم بررسی و با ارائه دو قضیه نقطه ثابت در این نوع از فضاها، فصل را به پایان می‌رسانیم.

پیشگفتار

بسیاری از مسائل در ریاضیات مانند، معادلات، نامعادلات، ریاضیات مالی، نظریه بازی و بهینه سازی را می توان به صورت یک معادله به فرم زیر مدل سازی کرد.

$$Tx = x$$

که در آن T یک خود نگاشت روی یک فضای مناسب (متریک، توپولوژیک، ۲-متریک و ...) است. نوع این فضا بسته به نوع مسئله ما است (معادله دیفرانسیل، معادله انتگرال، معادله ماتریسی و ...).

حال اگر $T : A \rightarrow B$ یک ناخود نگاشت باشد. در این صورت معادله $Tx = x$ ممکن است دارای جواب نباشد. در این حالت یافتن نقطه ای مانند x که $d(x, Tx)$ کمترین مقدار را داشته باشد، بسیار مهم به نظر می رسد. نظریه بهترین تقریب و بهترین نقطه تقریبی در این راستا است. به این ترتیب بنیان نظریه تقریب بهینه که نقطه ثابت تعمیم یافته را محاسبه می کند، نهاده می شود. اگر A و B برهم منطبق شوند. در این صورت مساله بهترین نقطه تقریبی، تبدیل به مساله نقطه ثابت خواهد شد. فن^۵ قضیه بهترین تقریب را ثابت کرد:

”اگر A یک زیر مجموعه فشرده محدب ناتهی از فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب هاسدورف X باشد و نیز تابع $T : A \rightarrow X$ نگاشت پیوسته باشد، آنگاه عنصر $x \in A$ چنان موجود است که

$$d(Tx, x) = d(Tx, A) := \inf\{d(Tx, y) | y \in A\}.”$$

ریاضی دان هایی مانند پرولا^۶، ریچ^۷ و سگال^۸ قضیه فن را گسترش دادند. با توجه به اهمیت نظریه نقطه ثابت، نظریه بهترین تقریب و نظریه بهترین نقطه تقریبی، این نظریه ها برای فضاهای متریک گونه (فضای ۲-متریک، فضای G -متریک، فضای S متریک، فضای b -متریک فضای مدولار و ...) نیز بررسی شده است. این نوشتار شامل دو قسمت است در قسمت اول فضاهای ۲-متریک و ۲-نرم را مرور و سپس بهترین تقریب را برای این نوع فضاها بررسی می کنیم. در قسمت دوم پایان نامه، نظریه بهترین نقطه تقریبی و بهترین نقطه تقریبی مشترک را برای

Fan theorem^۵

Prolla^۶

Rich^۷

Segal^۸

نگاشت‌های انقباض گونه در فضای متریک و ۲- متریک مطرح می‌کنیم. در آخرین فصل از این پایان نامه، نظریه نقطه ثابت را در فضاهاى متریک مدولار منظم بررسی و با ارائه دو قضیه نقطه ثابت در این نوع از فضاها، فصل را به پایان می‌رسانیم.

فهرست مطالب

ش	فهرست تصاویر	
ث	فهرست جداول	
۱	مقدمات	۱
۱	۱.۱ تئوری تقریب	۱
۳	۲.۱ برخی قضایای مهم	۳
۳	۳.۱ نظریه نقطه ثابت	۳
۴	۴.۱ فضای ۲-متریک	۴
۹	۲ نتایجی در فضای ۲-نرمدارخطی و ۲-ضرب داخلی	۹
۱۰	۱.۲ فضای ۲-نرم	۱۰
۱۲	۲.۲ فضای ۲-ضرب داخلی	۱۲
۱۶	۳.۲ ۲-قاب در فضا های ۲-هیلبرت	۱۶
۲۳	۳ تعامد در فضای ۲-نرم دار	۲۳
۲۴	۱.۳ ارتباط تعامد در نرم و ۲-نرم	۲۴
۲۸	۲.۳ ۲-ایزومتري و BJ -تعامد در فضا های ۲-نرم	۲۸
۳۷	۴ نظریه بهترین تقریب در فضای ۲-نرم دار	۳۷
۳۷	۱.۴ ۲-تابعک خطی کران دار در فضای ۲-نرم	۳۷
۴۲	۲.۴ بهترین تقریب در فضای ۲-نرم	۴۲
۶۳	۵ بهترین نقطه تقریبی مشترک برای زوج های ϕ -کراندار	۶۳
۶۵	۱.۵ قضایا و تعاریف مقدماتی	۶۵
۷۳	۶ بهترین نقطه تقریبی در فضا های متریک کامل با P -خاصیت ضعیف	۷۳
۷۴	۱.۶ تعاریف و نتایج مقدماتی	۷۴

۸۴		۲.۶ حدس
۸۵		۷ بهترین نقطه تقریبی در فضاهاى ۲- متریک
۸۵		۱.۷ مقدمات
۸۶		۲.۷ نتایج اصلی
۹۳		۸ قضیه نقطه ثابت در فضاهاى متریک مدولار منظم
۹۴		۱.۸ مفاهیم مقدماتی
۹۷		۲.۸ نتایج اصلی
۱۰۱		مراجع

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ تئوری تقریب

در این بخش مفاهیم و قضایای مقدماتی بهترین (نزدیکترین) تقریب که برگرفته از مرجع [۸۳] می باشد را معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار، $x \in X$ و A یک زیر مجموعه غیرتهی از X باشد. در این صورت $y \in A$ را عنصر بهترین تقریب ^۱ x در A نامیم، در صورتی که :

$$\|x - y\| = d(x, A).$$

همچنین از $P_A(x)$ برای نمایش مجموعه تمام عناصر بهترین تقریب x در A استفاده می کنیم، به عبارت دیگر:

$$P_A(x) := \{a \in A \mid \|x - a\| = d(x, A)\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. یک زیر مجموعه غیر تهی A از X را پروکسیمینال ^۲ گویند، در صورتی که به ازای $P_A(x) \neq \emptyset, x \in X$.

Best approximation^۱
Proximinal^۲

مجموعه پروکسیمینال A که به ازای هر $x \in X$ ، $P_A(x)$ تک عضوی باشد، مجموعه چبیشف^۳ نامیده می‌شود. هم چنین اگر برای هر $x \in X$ ، $P_A(x)$ یک مجموعه غیرتهی و فشرده باشد، مجموعه A را شبه چبیشف^۴ می‌گویند.

فرض کنید X فضای باناخ، $x \in X$ و A یک زیر مجموعه غیرتهی از X باشد. در این صورت به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ احکام زیر برقرارند:

$$P_{A+y}(x+y) = P_A(x) + y \quad (۱)$$

$$P_{\alpha A}(\alpha x) = \alpha P_A(x) \quad (۲)$$

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید X فضای باناخ و A یک زیرمجموعه‌ی فشرده یا زیر فضای متناهی البعد بسته از X باشد. در این صورت A پروکسیمینال است.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید X فضای باناخ و G یک زیر فضای چبیشف باشد. در این صورت $\hat{G} = \{x \in X : 0 \in P_G(x)\}$ که در آن $X = G \oplus \hat{G}$.

فرض کنید X فضای باناخ و $x, y \in X$. گوییم x متعامد^۵ (بیرخوف^۶) بر عنصر y است و می‌نویسم $x \perp_B y$ در صورتی که:

$$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|, \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

فرض کنید X فضای باناخ، $x \in \overline{X \setminus G}$ و $g_0 \in G$. در این صورت $g_0 \in P_G(x)$ است اگر و فقط اگر $x - g_0 \perp_B G$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار، A مجموعه کراندار از X و $x \in X$. در این صورت انحراف مجموعه A از x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{S}_A(x) = \sup_{g \in A} \|x - g\|.$$

فرض کنید $y \in A$ در این صورت y را دورترین نقطه^۷ x در A می‌نامند، در صورتی که:

$$\|x - y\| = \mathbb{S}_A(x).$$

مجموعه‌ی دورترین نقاط از x در A با $\mathbb{F}_A(x)$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{F}_A(x) = \{a \in A \mid \|x - a\| = \mathbb{S}_A(x)\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. نگاشت $F_A : X \rightarrow 2^A$ با ضابطه $x \rightarrow \mathbb{F}_A(x)$ ، نگاشت دورترین نقطه در فضای نرم‌دار نامیده می‌شود. مجموعه کراندار غیر تهی A را دور پذیر^۸ گویند، در صورتی که به ازای

$$\mathbb{F}_A(x) \neq \emptyset, \quad x \in X$$

Chebyshev^۳

Quasi-Chebyshev^۴

Orthogonal^۵

Birkhoff^۶

Farthest point^۷

Remotal^۸

۲.۱ برخی قضایای مهم

در این بخش به مهم ترین قضایای پر کاربرد آنالیزی در این رساله اشاره می کنیم.

قضیه ۱.۲.۱. قضیه هان-باناخ:^۹ هرگاه M زیر فضایی از فضای نرمدار X ، f یک تابع خطی و کراندار بر M باشد، آنگاه f را می توان به یک تابع خطی و کراندار مانند F بر X توسیع داد به قسمی که $\|F\| = \|f\|$.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X و Y یک فضای نرمدار باشد. نگاشت $T: X \rightarrow Y$ را حافظ تعامد گوئیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ اگر $x_1 \perp x_2$ آنگاه $Tx_1 \perp Tx_2$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T: X \rightarrow X$ را ایزومتري گوئیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x, y) = d(Tx, Ty)$$

قضیه ۲.۲.۱. قضیه کلدابسکی: فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی باشد و $T: X \rightarrow X$ نگاشتی باشد که حافظ تعامد است در اینصورت T مضربی از یک ایزومتري است.

۳.۱ نظریه نقطه ثابت

تعاریف و قضایای این بخش برگرفته از مرجع [۴۱] می باشد.

تعریف ۱.۳.۱. نقطه $x \in X$ را نقطه‌ی ثابت نگاشت $T: X \rightarrow X$ می نامند، در صورتی که $T(x) = x$. مجموعه‌ی تمام نقاط ثابت f را با $F(f)$ نمایش می دهیم، به عبارت دیگر:

$$F(T) = \{x \in X : T(x) = x\}.$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. در این صورت T را انقباضی گوئیم هرگاه عدد $0 < \alpha < 1$ موجود باشد که به ازای هر $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y).$$

قضیه ۱.۳.۱. هر نگاشت انقباضی به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال ۱.۳.۱. $f(x) = x^2$ روی $(0, \frac{1}{4})$ ، در انقباض باناخ صدق می کند. زیرا

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}|x - y|$$

اما این تابع در $(0, \frac{1}{4})$ نقطه ثابت ندارد.

قضیه ۲.۳.۱. (اصل انقباض باناخ) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \rightarrow X$ یک نگاشت انقباضی باشد. در این صورت T دارای نقطه ثابت یکتا مانند a است. علاوه بر این به ازای هر $x \in X$ ، دنباله $\{T^n(x)\}$ به a همگراست.

قضیه ۳.۳.۱. اگر (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \rightarrow X$ نگاشتی باشد که به ازای عدد طبیعی مانند N ، T^N انقباضی است و در این صورت T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک باشد. نگاشت $T : X \rightarrow X$ را به صورت نقطه‌ای انقباضی گوییم هرگاه تابع $\alpha : X \rightarrow [0, 1)$ موجود باشد که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha(x)d(x, y).$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک باشد. زیر مجموعه C از X را پذیرفتنی گوییم اگر و فقط اگر C اشتراک ناتهی از گوی‌های بسته باشد. خانواده همه زیر مجموعه‌های پذیرفتنی X را با $\mathcal{A}(X)$ نمایش می‌دهیم. می‌گوییم $\mathcal{A}$ فشرده است، هرگاه به ازای هر خانواده $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mu}$ از عناصر $\mathcal{A}(X)$ و هر زیر مجموعه متناهی $F \subseteq \mu$ داشته باشیم:

$$\bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \neq \emptyset.$$

اگر $A \subseteq X$ ، $cov(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$cov(A) = \bigcap \{B \mid A \subseteq B \text{ و } B \text{ یک گوی بسته است}\}.$$

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنید X یک فضای متریک کران‌دار، $\mathcal{A}(M)$ فشرده و $T : X \rightarrow X$ به صورت نقطه‌ای انقباضی باشد در این صورت T دارای نقطه ثابت یگانه است. علاوه بر این به ازای هر $x \in X$ دنباله $T^n(x)$ به نقطه ثابت T همگراست.

۴.۱ فضای ۲-متریک

تعریف ۱.۴.۱. [۲۷] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع

$$G : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

را یک ۲-متر روی X گوییم هرگاه

۱- به ازای هر دو عنصر متمایز a و b از X عنصر c در X موجود باشد که

$$G(a, b, c) \neq 0$$

۲- اگر لااقل دو عنصر از سه عنصر $a, b, c \in X$ با هم برابر باشند آنگاه

$$G(a, b, c) = 0$$

۳- به ازای هر a, b, c در X ،

$$G(a, b, c) = G(a, c, b) = G(b, c, a)$$

۴- به ازای هر $a, b, c, d \in X$

$$G(a, b, c) \leq G(a, b, d) + G(a, d, c) + G(d, b, c)$$

مثال ۱.۴.۱. [۲۷] فرض کنید $X = \mathbb{R}^n$ ، $(n \geq 2)$ و نیز $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ و $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ عناصری در $\mathbb{R}^n$ باشند در اینصورت تابع $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(a, b, c) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i \leq j} \left| \begin{pmatrix} a_i & a_j & 1 \\ b_i & b_j & 1 \\ c_i & c_j & 1 \end{pmatrix} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

در این صورت G یک ۲-متر روی $\mathbb{R}^n$ است. این ۲-متر را ۲-متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ گوئیم.

۲-متر G روی X یک توپولوژی القا می‌کند. فرض کنید $a, b \in X$ در این صورت ۲-گوی^{۱۰} از دو عنصر a و b به شعاع ϵ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم ($\epsilon > 0$):

$$B_\epsilon(a, b) = \{c \in X \mid G(a, b, c) < \epsilon\}$$

خانواده $\mathfrak{B}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم؛

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n B_{\epsilon_i}(a_i, b_i) \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}, \epsilon_i > 0, a_i, b_i \in X \right\}$$

در این صورت $\mathfrak{B}$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهند، این توپولوژی را توپولوژی ۲-متری گوئیم (که توسط ۲-متر G القا شده است). بنابراین می‌توان گفت خانواده تمام $B_\epsilon(a, b)$ تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ۲-متری می‌دهد. اعضای توپولوژی ۲-متری مجموعه‌های ۲-باز^{۱۱} و متمم آن‌ها را مجموعه‌های ۲-بسته^{۱۲} می‌گوئیم.

^{۱۰}2-ball

^{۱۱}2-open

^{۱۲}2-closed

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید (X, G) یک فضای ۲-متریک باشد، در این صورت
 ۱- می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ در (X, G) همگرا^{۱۳} به x است هرگاه به ازای هر $x_n \neq a \in X$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, a) = \circ$$

ومی‌نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

۲- دنباله $\{x_n\}$ را در (X, G) کشی^{۱۴} گوئیم هرگاه به ازای هر $a \in X$ و هر $\epsilon > \circ$ ، $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد که به ازای هر $n, m \geq n_0$ داشته باشیم:

$$G(x_n, x_m, a) < \epsilon$$

به عبارت دیگر به ازای هر $a \in X$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, a) = \circ$$

۳- فضای ۲-متریک (x, G) را کامل^{۱۵} گوئیم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

قضیه ۱.۴.۱. [۲۷] اگر در فضای ۲-متریک (X, G) ، $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ، آنگاه به ازای هر $y, z \in X$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, y, z) = G(x, y, z)$$

ملاحظه ۱.۴.۱. در فضای متریک، مجموعه A بسته است اگر و تنها اگر هر دنباله همگرا در A به نقطه ای از A همگرا باشد.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$. در این صورت خانواده B از مجموعه‌های باز شامل x را یک پایه موضعی برای عنصر x می‌گوییم هرگاه هر مجموعه باز در X و شامل x حاوی عضوی از B باشد. فضای توپولوژیک X را صادق در اولین اصل شمارایی، یا شمارای اول می‌گوییم هرگاه هر عضو X دارای پایه‌ای موضعی و شمارا باشد.

اما در حالت کلی این موضوع برای فضاهای ۲-متریک صادق نمی‌باشد زیرا ممکن است در اصل اول شمارایی صادق نباشد. بنابراین می‌توان این گونه مطرح کرد که اگر فضای ۲-متریک X شمارای اول باشد آنگاه این قضیه نیز در فضاهای ۲-متریک نیز برقرار است.

قضیه ۲.۴.۱. [۲۷] فضای ۲-متریک (X, G) ، T_1 است.

ملاحظه ۲.۴.۱. در فضاهای ۲-متریک کامل دنباله‌های همگرا لزوماً کشی نمی‌باشند.

^{۱۳}convergence

^{۱۴}Cauchy

^{۱۵}complete

برهان. فرض کنید $X = \{^\circ, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ ، تابع G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x, y, z \text{ متمایز و } n \text{ ای موجود باشند که } \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\} \subset \{x, y, z\} \\ ^\circ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

در این صورت $G(x, y, z)$ یک ۲- متریک کامل روی X است و نیز دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ همگرا به صفر است ولی کشی نمی‌باشد. $\square$

تعریف ۴.۴.۱. [۲۶] می‌گوییم ۲- متریک G روی X دارای خاصیت S است اگر به ازای هر نقطه a و b در X و هر $\epsilon > ^\circ$ مجموعه‌های باز U_a شامل a و U_b شامل b موجود باشند که اگر $a' \in U_a$ و $b' \in U_b$ آنگاه

$$G(a, a', b') < \epsilon.$$

قضیه ۳.۴.۱. [۲۶] ۲- متریک G روی X دارای خاصیت S است اگر و تنها اگر تابعی پیوسته باشد.

قضیه ۴.۴.۱. [۲۶] در فضای ۲- متریک (X, G) ، اگر G پیوسته باشد، آنگاه هر دنباله همگرا در X ، کشی است.

عکس قضیه فوق درست نیست.

مثال ۲.۴.۱. [۲۶] فرض کنید

$$A_n = \{(1 + \frac{1}{n}, ^\circ) = a_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$B_n = \{(^{\circ}, \frac{1}{n}) = b_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

در این صورت X را به صورت زیر می‌سازیم

$$X = \{a = (1, ^\circ)\} \cup A_n \cup \{b = (^{\circ}, ^\circ)\} \cup B_n$$

حال تابع $G : X \times X \times X \rightarrow [^\circ, +\infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ ای موجود باشد که } \{a_n, b_n, a\} \text{ یا } \{a_n, b_n, b\} \\ & \text{یا } n \text{ و } m \text{ ای موجود باشند که} \\ & \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a_m\} \text{ یا } \{a_n, b_n, b_m\} \\ \Delta xyz & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

که در آن Δxyz مساحت مثلث حاصل از رأس‌های x, y, z است. در این صورت G یک ۲-
متریک روی X است و هر دنباله همگرا در آن کشی است ولی G پیوسته نمی‌باشد. زیرا $\{a_n\}$
همگرا به a و $\{b_n\}$ همگرا به b است ولی $G(a_n, b_n, a) \not\rightarrow 0$.

فصل ۲

نتایجی در فضای ۲-نرمدارخطی و ۲-ضرب داخلی

اولین بار در سال ۱۹۶۳ گهلر مقاله‌ای [۲۷] با عنوان "فضاهای ۲-متریک و خواص توپولوژی آنها" ارائه و در آن مفهوم فضای ۲-متریک^۱ را ارائه کرد. دومین مقاله [۲۸] گهلر با عنوان "فضاهای ۲-نرم خطی" ارائه شد که در آن حالت‌های خاصی از فضاهای ۲-متریک را بررسی کرد. او مطالعه ساختارهای توپولوژیک چنین فضاهایی را ادامه داد و ثابت کرد ساختار ۲-نرم روی فضاهای برداری با بعد بیشتر از ۱ قابل تعریف است. او همچنین ثابت کرد که روی یک فضای نرم‌دار می‌توان ۲-نرم تعریف کرد ولی عکس آن درست نیست. دانشمندان زیادی از جمله آندالافت، چو، دیمینی، سورخی، لین، نیوتن، وایت و ... خواص هندسی چنین فضاهایی را بررسی کردند. در این فصل مفاهیم ۲-نرم و ۲-ضرب داخلی^۳ را ارائه و سپس مروری بر برخی خواص اساسی آن می‌کنیم.

^۱ 2-metric

^۲ 2-norm

^۳ 2-inner product

۱.۲ فضای ۲-نرم

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید X فضایی خطی حقیقی با بعد بیشتر از ۲ باشد. تابع $\|\cdot, \cdot\|$: $X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ را یک ۲-نرم روی X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

$$(۱) \quad \|x, y\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } y, x \text{ وابسته خطی باشند.}$$

$$(۲) \quad \|x, y\| = \|y, x\|$$

$$(۳) \quad \|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$$

$$(۴) \quad \|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$$

که در آن $x, y, z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

در اینصورت زوج $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ را یک فضای ۲-نرم دار^۴ گوییم.

شرط (۴) معادل شرط زیر است:

$$\|x + z, y + z\| \leq \|x, y\| + \|z, y\| + \|x, z\|.$$

اگر $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار باشد در این صورت ۲-نرم $\|\cdot, \cdot\|$ روی X ۲-متریک زیر را القا می کند.

$$\delta(x, y, z) = \|x - z, y - z\|$$

بنابراین هر فضای ۲-نرم را میتوان به عنوان یک فضای ۲-متریک در نظر گرفت .

تعریف ۲.۱.۲. زیر مجموعه M از فضای ۲-نرم دار $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\delta(M) := \sup\{\delta(a, b, c) | a, b, c \in M\} < \infty$$

قضیه ۱.۱.۲. [۲۸] اگر X یک فضای ۲-نرم دار با بعد n باشد و $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ پایه X باشد.

در این صورت

$$\text{اگر } a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \text{ و } b = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \text{ آنگاه}$$

$$(۱) \quad \text{برای } n = 2 \text{ داریم:}$$

$$\|a, b\| = |\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2| \|e_1, e_2\|$$

$$(۲) \quad \text{برای } n > 2 \text{ داریم:}$$

$$\|a, b\| = \frac{1}{|\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2|} \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_1 \beta_i - \beta_1 \alpha_i) e_i \right\| \quad \text{و} \quad \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_2 \beta_i - \beta_2 \alpha_i) e_i}{\text{2-normed space}^{\text{۴}}}$$

مثال ۱.۱.۲. فرض کنید $X = \mathbb{R}^3$ و $x = (a_1, b_1, c_1)$ و $y = (a_2, b_2, c_2)$ باشد، تابع $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x, y\| = |(x, y)|$$

در این صورت $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار است که در آن ضرب داخلی متعارف دو عنصر x و y در $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

مثال ۲.۱.۲. [۲۶] فرض کنید $X = P_n$ مجموعه تمام چند جمله‌ای‌ها با درجه حداکثر n روی $[0, 1]$ باشند. فرض کنید $\{x_i\}_{i=0}^n$ ، $2n+1$ نقطه دلخواه و متمایز در $[0, 1]$ باشند در این صورت تابع $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f, g\| = \begin{cases} \sum_{i=0}^n |f(x_i)g(x_i)| & \text{اگر } f, g \text{ مستقل خطی باشند} \\ 0 & \text{اگر } f, g \text{ وابسته خطی باشند.} \end{cases}$$

اگر f و g وابسته خطی باشند بنا به تعریف $\|f, g\| = 0$. فرض کنید، $\|f, g\| = 0$ در این صورت

$$\sum_{i=0}^n |f(x_i)g(x_i)| = 0$$

چون درجه f و g حداکثر n است و $f(x_i)g(x_i) = 0$ در $2n+1$ نقطه متمایز. بنابراین $f = 0$ یا $g = 0$. لذا اگر $\|f, g\| = 0$ ، f و g وابسته خطی‌اند. پس شرط اول تعریف ۲-نرم را دارا است. شروط (۲)، (۳) و (۴) نیز به وضوح برقراراند لذا $(P_n, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار است.

تعریف ۳.۱.۲. دنباله $\{x_n\}$ را در فضای ۲-نرم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ همگرا گوییم هرگاه عنصر $x \in X$ موجود باشد که به ازای هر $z \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, z\| = 0.$$

دنباله $\{x_n\}$ را کشی گوییم هرگاه به ازای هر $z \in X$

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|x_n - x_m, z\| = 0.$$

قضیه ۲.۱.۲. [۲۸] اگر دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ کشی باشند و $\alpha \in \mathbb{R}$ در این صورت دنباله‌های $\{x_n + y_n\}$ و $\{\alpha x_n\}$ کشی خواهد بود.

قضیه ۳.۱.۲. اگر دنباله $\{x_n\}$ در $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ کشی باشد و x_0 نقطه‌ای ثابت در X ، آنگاه دنباله $\{\|x_n, x_0\|\}$ دنباله‌ای کشی در $\mathbb{R}$ با متریک اقلیدسی است.

برهان. با توجه به خواص ۲-نرم داریم:

$$\|x_n, x_\circ\| = \|(x_n - x_m) + x_m, x_\circ\| \leq \|x_n - x_m, x_\circ\| + \|x_m, x_\circ\|$$

بنابراین داریم

$$\left| \|x_n, x_\circ\| - \|x_m, x_\circ\| \right| \leq \|x_n - x_m, x_\circ\|$$

بنابراین دنباله $\{\|x_n, x_\circ\|\}$ کشی است. $\square$

تعریف ۴.۱.۲. فضای ۲-نرم دار X را ۲-باناخ^۵ گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

مثال ۳.۱.۲. [۲۸] فضای $(P_n, \|\cdot, \cdot\|)$ ۲-باناخ است.

قضیه ۴.۱.۲. [۲۶] فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F و F کامل باشد. اگر $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار باشد و $\dim(X) = 2$ آنگاه X ، ۲-باناخ است.

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار باشد. اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, d\| = 0$$

آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n, d\| = \|x, d\|.$$

برهان. از اثبات قضیه ۳.۱.۲ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \|x_n - d\| - \|x, d\| \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, d\| = 0$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - d\| = \|x, d\|.$$

$\square$

۲.۲ فضای ۲-ضرب داخلی

گهلر و دیمینی و وایت [۲۱] مفهوم ۲-ضرب داخلی^۶ را تعریف و برخی مشخصه‌سازی‌ها را برای ۲-ضرب داخلی ارائه نمودند و سپس این مفهوم را گسترش دادند.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید X یک فضای خطی، با بعد بیشتر از یک باشد. تابع حقیقی مقدار $\mathbb{R} \rightarrow X \times X \times X : (\cdot, \cdot, \cdot)$ را یک ۲-ضرب داخلی گوییم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

^۵2-Banach

^۶2-inner product

$$(a, a|b) \geq 0 \quad (1)$$

(۲) $(a, a|b) = 0$ اگر و فقط اگر a, b وابسته خطی باشند.

$$(a, a|b) = (b, b|a) \quad (3)$$

$$(a, b|c) = (b, a|c) \quad (4)$$

$$(\alpha a, b|c) = \alpha(a, b|c), \alpha \in \mathbb{R} \text{ به ازای هر } (5)$$

$$(a + a', b|c) = (a, b|c) + (a', b|c) \quad (6)$$

زوج $(X, (., .|.))$ را فضای ۲- ضرب داخلی گوییم.

قضیه ۱.۲.۲. [۲۶] اگر $(X, (., .|.))$ یک فضای ۲- ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر $a, b, c \in X$

$$|(a, b|c)| \leq \left(\sqrt{(a, a|c)} \right) \left(\sqrt{(b, b|c)} \right).$$

قضیه ۲.۲.۲. [۲۱] فرض کنید $(X, (., .|.))$ یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت تابع

$$\begin{cases} (., .|.) : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b|c) = \begin{vmatrix} (a, b) & (a, c) \\ (b, c) & (c, c) \end{vmatrix} = \|c\|^2 (a, b) - (a, c)(b, c) \end{cases}$$

یک ۲- ضرب داخلی روی X است. این ۲- ضرب داخلی را ۲- ضرب داخلی استاندارد گوییم.

مثال ۱.۲.۲. [۲۶] فرض کنید X فضای ضرب داخلی دنباله‌ای باشد و $a, b, c \in X$ که در آن $a = (a_i)$ و $b = (b_i)$ و $c = (c_i)$ در این صورت

$$(a, b|c) = \sum_{i < j} (a_i c_j - c_i a_j)(b_i c_j - c_i b_j)$$

یک ۲- ضرب داخلی روی X است.

قضیه ۳.۲.۲. [۲۱] فرض کنید $(X, (., .|.))$ یک فضای ۲- ضرب داخلی باشد در این صورت

$$\|a, b\| = \sqrt{(a, a|b)}$$

یک ۲- نرم روی X است.

قضیه ۴.۲.۲. [۲۶] فرض کنید $(X, (., .|.), ||.)$ یک فضای ضرب داخلی و $||., .|.||$ ۲-نرم القا شده توسط ۲-ضرب داخلی $(., .|.)$ باشند. در این صورت داریم

$$(a, b|c) = \frac{1}{4} (||a+b, c||^2 - ||a-b, c||^2)$$

$$||a+b, c||^2 + ||a-b, c||^2 = 2 (||a, c||^2 + ||b, c||^2)$$

و نیز اگر $(X, ||., .|.||)$ در شرایط زیر صدق کند:

$$||a+b, c||^2 + ||a-b, c||^2 = 2 (||a, c||^2 + ||b, c||^2) \quad (1.2)$$

آنگاه تابع

$$(a, b|c) = \frac{1}{4} (||a+b, c||^2 - ||a-b, c||^2)$$

یک ۲-ضرب داخلی روی X تعریف می‌کند.

معادله ۱.۲ در قضیه ۴.۲.۲ را قانون متوازی الاضلاع^۷ در فضای ۲-نرم دار گوییم. در رسته فضاهای ۲-نرم، فضاهای ۲-ضرب داخلی، توسط قانون متوازی الاضلاع در این فضاها مشخصه سازی می‌شوند.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید $(X, ||., .|.||)$ یک فضای ۲-نرم، $c \in X$ و $c \neq 0$ و $\langle c \rangle$ زیر فضای تولید شده توسط عنصر c باشد. در این صورت فضای خارج قسمت^۸ $\frac{X}{\langle c \rangle}$ را در نظر بگیرید. در این

صورت اگر $[a]$ کلاس هم‌ارزی^۹ عنصر $a \in X$ را نشان دهد، آنگاه تابع $||\cdot||_{\langle c \rangle} : \frac{X}{\langle c \rangle} \rightarrow [0, +\infty)$ با ضابطه $||[a]||_{\langle c \rangle} = ||a, c||$ یک نرم روی $\frac{X}{\langle c \rangle}$ است.

برهان. اولاً $\frac{X}{\langle c \rangle}$ یک فضای برداری است که در آن به ازای $a, b \in X$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha[a] = [\alpha a] \quad \text{و} \quad [a] + [b] = [a + b]$$

(۱) اگر $||[a]||_{\langle c \rangle} = 0$ آنگاه $||a, c|| = 0$ بنابراین a, c وابسته خطی می‌باشند پس $[a] = \langle c \rangle$ بنابراین $[a] = 0_{\frac{X}{\langle c \rangle}}$.

$$||\alpha[a]||_{\langle c \rangle} = ||\alpha a, c|| = |\alpha| ||a, c|| = |\alpha| ||[a]||_{\langle c \rangle} \quad (2)$$

^۷parallelogram law
^۸quotient space
^۹equivalence class

$$\begin{aligned} \|[a] + [b]\|_{\langle c \rangle} &= \|[a + b]\|_{\langle c \rangle} = \|a + b, c\| \leq \|a, c\| + \|b, c\| \\ &= \|[a]\|_{\langle c \rangle} + \|[b]\|_{\langle c \rangle} \end{aligned}$$

□

بنابراین $\|\cdot\|_{\langle c \rangle}$ یک نرم روی $\frac{X}{\langle c \rangle}$ می‌باشد.

قضیه ۶.۲.۲. فضای ۲-نرم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر c مخالف صفر در X ، $(\frac{X}{\langle c \rangle}, \|\cdot\|_{\langle c \rangle})$ فضای ضرب داخلی باشد.

برهان. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-ضرب داخلی باشد و $c \in X$ ، $c \neq 0$. در این صورت به ازای هر $a, b \in X$

$$\begin{aligned} \|[a] + [b]\|_{\langle c \rangle}^2 + \|[a] - [b]\|_{\langle c \rangle}^2 &= \|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 \\ &= 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2) = 2(\|[a]\|_{\langle c \rangle}^2 + \|[b]\|_{\langle c \rangle}^2). \end{aligned}$$

بنابراین $(X, \|\cdot, \cdot\|_{\langle c \rangle})$ فضای ضرب داخلی است.

بالعکس، فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|_{\langle c \rangle})$ فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت به ازای هر $a, b \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} \|a + b, c\|^2 + \|a - b, c\|^2 &= \|[a] + [b]\|_{\langle c \rangle}^2 + \|[a] - [b]\|_{\langle c \rangle}^2 \\ &= 2(\|[a]\|_{\langle c \rangle}^2 + \|[b]\|_{\langle c \rangle}^2) = 2(\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2). \end{aligned}$$

بنابراین $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ در قانون متوازی الاضلاع در فضای ۲-نرم دار صدق می‌کند و لذا $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-ضرب داخلی است. □

قضیه ۷.۲.۲. اگر فضای ۲-نرم $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ، ۲-باناخ باشد، آنگاه به ازای هر $c \in X$ ، $(\frac{X}{\langle c \rangle}, \|\cdot\|_{\langle c \rangle})$ باناخ است.

برهان. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ، ۲-باناخ، $c \in X$ دلخواه و دنباله‌ای کشی در $\frac{X}{\langle c \rangle}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\|[x_n] - [x_m]\|_{\langle c \rangle} \rightarrow 0$$

بنابراین

$$\|x_n - x_m, c\| \rightarrow 0$$

چون c دلخواه است و X ، ۲-باناخ می‌باشد بنابراین $x_0 \in X$ موجود است که

$$\|x_n - x_0, c\| \rightarrow 0$$

واین یعنی

$$\|[x_n] - [x_0]\| \rightarrow 0$$

بنابراین دنباله $\{[x_n]\}$ همگراست. لذا $\frac{X}{\langle c \rangle}$ باناخ می‌باشد.

□

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ فضای ۲-نرم دار و $c \in X$ باشد در این صورت اگر $(\frac{X}{\langle c \rangle}, \|\cdot\|)$ باناخ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در X باشد، آنگاه $x_0 \in X$ موجود است که

$$\|x_n - x_0, c\| \rightarrow 0$$

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در X باشد در این صورت

$$\|x_n - x_m, c\| \rightarrow 0$$

بنابراین

$$\|[x_n] - [x_m]\|_{\langle c \rangle} \rightarrow 0$$

لذا $x_0 \in X$ موجود است که

$$\|[x_n] - [x_0]\|_{\langle c \rangle} \rightarrow 0$$

بنابراین

$$\|x_n - x_0, c\| \rightarrow 0.$$

□

۳.۲ ۲-قاب در فضا های ۲-هیلبرت

تعریف ۱.۳.۲. اگر فضای ۲-ضرب داخلی $(X, (\cdot, \cdot))$ ، ۲-باناخ باشد آن را ۲-هیلبرت^{۱۰} گوئیم.

تعریف ۲.۳.۲. دنباله $\{x_i\}$ از عناصر در فضای هیلبرت X را یک قاب^{۱۱} می گوییم اگر ثابت های $A, B > 0$ موجود باشند که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)|^2 \leq B\|x\|^2.$$

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید $(X, (., .|.))$ یک فضای ۲- هیلبرت و $x_0 \in X$ باشد. دنباله $\{x_i\}$ از عناصر X را یک ۲- قاب متناظر با x_0 گوییم هرگاه $A, B > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$A\|x, x_0\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i|x_0)|^2 \leq B\|x, x_0\|^2.$$

هر دنباله ای که در شرایط فوق صدق کند را یک دنباله ۲- بسل^{۱۲} گوییم.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید $\{x_i\}$ قابی برای فضای هیلبرت $(X, (., .|.))$ باشد. در این صورت این دنباله ۲- قابی برای فضای ۲- هیلبرت با ۲- ضرب داخلی استاندارد روی X می باشد.

برهان. فرض کنید $\{x_i\}$ قابی برای X با کران های A, B باشد. اگر $x_0 \in X$ می توان فرض کرد، $\|x_0\| = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i|x_0)|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)(x_0, x_0) - (x, x_0)(x_0, x_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i) - (x, x_0)(x_0, x_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |(x - (x, x_0)x_0, x_i)|^2 \leq B\|x - (x, x_0)x_0\|^2 \\ &= B(\|x\|^2 - |(x, x_0)|^2) \\ &= B\|x, x_0\|^2. \end{aligned}$$

با روش مشابه می توان ثابت کرد که

$$A\|x, x_0\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i|x_0)|^2.$$

□

بنابراین $\{x_i\}$ یک ۲- قاب برای فضای ۲- هیلبرت است.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید $(X, (., .|.))$ یک فضای ۲- ضرب داخلی و $c \in X$ و $c \neq 0$ باشد. در این صورت $(\frac{X}{\langle c \rangle}, (., .|_{\langle c \rangle}))$ یک فضای ضرب داخلی است که در آن

$$([a], [b])_{\langle c \rangle} := (a, b|c)$$

^{۱۱} frame

^{۱۲} Bessel sequence

برهان. فرض کنید $a', a, b \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه اختیار شده باشند. در این صورت

(۱)

$$([a], [a])_{<c>} = (a, a|c) \geq 0$$

(۲)

$$([a], [a])_{<c>} = 0 \Leftrightarrow (a, a|c) = 0 \Leftrightarrow a, c \Leftrightarrow [a] = [c] \Leftrightarrow [a] = 0 \frac{X}{\langle c \rangle}$$

(۳)

$$(\alpha[a], [b])_{<c>} = (\alpha a, b|c) = \alpha(a, b|c) = \alpha([a], [b])_{<c>}$$

(۴)

$$\begin{aligned} ([a] + [a'], [b])_{<c>} &= (a + a', b|c) = (a, b|c) + (a', b|c) \\ &= ([a], [b])_{<c>} + ([a'], [b])_{<c>}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۳.۲. $\{x_i\}$ ۲-قابلی برای فضای ۲-هیلبرت $(X, (., .|c))$ نسبت به c است اگر و فقط اگر $\{x_i\}$ قابلی برای فضای هیلبرت $(\frac{X}{\langle c \rangle}, ||.||_{<c>})$ می باشد.

برهان. فرض کنید $\{x_i\}$ قابلی برای فضای ۲-هیلبرت $(X, (., .|c))$ نسبت به c با کرانهای A و B باشد. در این صورت به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$A||x, c||^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i|c)|^2 \leq B||x, c||^2$$

بنابراین داریم:

$$A||x||_{<c>}^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)_{<c>}|^2 \leq B||x||_{<c>}^2$$

لذا $\{x_i\}$ قابلی برای فضای هیلبرت $\frac{X}{\langle c \rangle}$ می باشد.

بالعکس، فرض کنید $\{x_i\}$ قابلی برای فضای هیلبرت $\frac{X}{\langle c \rangle}$ با کرانهای A و B باشد. در این

صورت داریم

$$A||x||_{<c>}^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)_{<c>}|^2 \leq B||x||_{<c>}^2$$

پس

$$A||x, c||^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i|c)|^2 \leq B||x, c||^2$$

□

و این یعنی $\{x_i\}$ قابلی برای فضای ۲-هیلبرت X است.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $(X, (.,.))$ یک فضای هیلبرت و $c \in X$ باشد. فضای ۲- هیلبرت $(X, (.,.|.))$ با ۲- ضرب داخلی استاندارد القا شده توسط ضرب داخلی X را در نظر بگیرید. در این صورت هر ۲- قاب نسبت به عنصر c ، یک قاب برای $\langle c \rangle^\perp$ است.

برهان. فرض کنید $\{x_i\}$ ۲- قابی با کران های A و B باشند در این صورت به ازای هر $x \in \langle c \rangle^\perp$ داریم:

$$A(|x|^2 - |(x, c)|^2) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |(x - (x, c)c, x_i)|^2 \leq B(|x|^2 - |(x, c)|^2)$$

بنابراین، $\{x_i\}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\langle c \rangle^\perp$. $\square$

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید $T: H_1 \rightarrow H_2$ عملگر خطی بین دو فضای ضرب داخلی باشد. در اینصورت عملگر خطی $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ را عملگر الحاقی T گوییم هرگاه به ازای هر $h_1 \in H_1$ و $h_2 \in H_2$ داشته باشیم

$$(Th_1, h_2)_{H_2} = (h_1, T^*h_2)_{H_1}$$

که در آن $(.,.)_{H_1}$ و $(.,.)_{H_2}$ به ترتیب ضرب داخلی روی H_1 و H_2 می باشند. حال اگر H یک فضای ضرب داخلی متناهی البعد باشد. در اینصورت عملگر خطی $T: H \rightarrow H$ را خود الحاق گوییم هرگاه $T^* = T$.

تعریف ۵.۳.۲. فرض کنید $\{x_i\}$ یک قاب برای فضای هیلبرت X باشد. در این صورت عملگر قاب^{۱۳} به صورت زیر تعریف می شود:

$$Sx = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i)x_i$$

عملگر S کراندار و خود الحاق^{۱۴} است. ([۱۷])
بنابراین به ازای هر $x \in X$ داریم؛

$$S^{-1}Sx = \sum_{i=1}^{\infty} (x, S^{-1}x_i)x_i.$$

فرض کنید X یک فضای هیلبرت باشد. X را با ۲- ضرب داخلی استاندارد در نظر بگیرید. اگر j موجود باشد که $\|x_j\| = 1$ در این صورت

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i|x_j)|^2 = \sum_{i=1, i \neq j}^{\infty} |(x, x_i|x_j)|^2$$

در این صورت اثبات قضیه ۱.۳.۲ نشان می دهد، که $\{x_i\}_{i \neq j}$ یک ۲- قاب برای X نسبت به x_j است.

^{۱۳}frame operetoe
^{۱۴}self adjoint

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله ۲-بسل در فضای ۲-هیلبرت X باشد. اگر $c \in X$ در این صورت تابع

$$\begin{cases} T_c : \ell^2 \rightarrow \frac{X}{\langle c \rangle} \\ T_c\{\alpha_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \end{cases}$$

خوشتعریف و کراندار است.

برهان. فرض کنید $\{\alpha_i\} \in \ell^2$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\|_c^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, c \right\|_c^2 \\ &= \sup \left\{ \left| \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, y \right) c \right|^2 ; y \in X, \|y, c\| = 1 \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |(x_i, y)c|^2 ; y \in X, \|y, c\| = 1 \right\} \\ &\leq B \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

که در آن B کران بالای ۲-قاب $\{x_i\}$ است. بنابراین سری $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ خوشتعریف است. بنابراین داریم:

$$\|T_c\{\alpha_i\}\|_c \leq \sqrt{B} \|\{\alpha_i\}\|_2$$

لذا

$$\|T_c\| \leq \sqrt{B}.$$

□

ملاحظه ۱.۳.۲. می‌توانیم الحاق T_c را با نماد T_c^* به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} T_c^* : \frac{X}{\langle c \rangle} \rightarrow \ell^2 \\ T_c^* = \{(x, x_i | c)\} \end{cases}$$

$$\|T_c^*\| \leq \sqrt{B}.$$

تعریف ۶.۳.۲. فرض کنید $\{x_i\}$ یک ۲-قاب نسبت به c با کران‌های A و B در فضای ۲-هیلبرت X باشد. در این صورت عملگر

$$\begin{cases} S_c : \frac{X}{\langle c \rangle} \rightarrow \frac{X}{\langle c \rangle} \\ S_c([x]) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i | c) [x_i] \end{cases}$$

را یک عملگر ۲- قاب^{۱۵} برای $\{x_i\}$ گوییم.

واضح است که $S_c = T_c T_c^*$ بنابراین $\|S_c\| \leq B$.

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید $\{x_i\}$ یک ۲- قاب نسبت به c برای فضای ۲- هیلبرت $(X, (., .|_c))$ با عملگر ۲- قاب S_c و کران های قاب A و B باشد. در این صورت S_c یک عملگر معکوس پذیر، خود الحاق و مثبت است.

برهان. خود الحاق بودن S_c واضح است (با توجه به تعریف). با توجه به تعریف ۲- قاب به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$A\|x\|_{<c>}^2 \leq \langle S_c[x], [x] \rangle \|x\|_{<c>}^2$$

بنابراین S_c مثبت است. اگر I عملگر همانی روی $\frac{X}{\langle c \rangle}$ باشد. در این صورت

$$AI \leq S_c \leq BI.$$

علاوه بر این

$$\|I - B^{-1}S_c\| = \sup_{\|x\|_c=1} \left| \left((I - B^{-1}S_c)x, x \right)_{<c>} \right| \leq \frac{B-A}{B} \leq 1$$

□

بنابراین S_c ، معکوس پذیر است.

فصل ۳

تعامد در فضای ۲-نرم دار

در فضاهای نرم دار، چندین تعریف از تعامد^۱ بین بردارها وجود دارد. سه مورد از معروفترین تعامدها تحت عنوان تعامد فیثاغورث، تعامد متساوی الساقین و تعامد بیر خوف-جیمز می باشد. مشابه فضاهای نرم دار، محققین مفهوم تعامد در فضاهای ۲-نرم را نیز تعریف و مطالعه کرده اند. خان و سید یکویی [۳۹] تعامد در فضاهای ۲-نرم دار را به صورت زیر تعریف کرده اند؛

تعریف ۱.۰.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار باشد و $x, y \in X$ در این صورت

$$(\forall z \in X; \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 = \|x + y, z\|^2) \Leftrightarrow x \perp^p y \quad (۱)$$

$$(\forall z \in X; \|x + y, z\| = \|x - y, z\|) \Leftrightarrow x \perp^I y \quad (۲)$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}; \|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\|) \Leftrightarrow x \perp^{BJ} y \quad (۳)$$

گاوان و دیگران [۳۰] ثابت کردند که در فضای ۲-نرم دار استاندارد، نمی توان عناصر غیر صفر x, y چنان پیدا کرد که x به y عمود باشد. بنابراین تعاریف تعامد فوق را به صورت زیر اصلاح کردند.

تعریف ۲.۰.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم باشد و $x, y \in X$ در این صورت

(۱) $x \perp^p y$ اگر و تنها اگر زیر فضای V از X موجود باشد که $\text{codim}(V) = ۱$ و به ازای هر $z \in V$ داشته باشیم

$$\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 = \|x + y, z\|^2$$

orthogonality^۱

(۲) اگر و تنها اگر زیر فضای V از X با $\text{codim}(V) = 1$ موجود باشد که برای هر $z \in V$ داشته باشیم

$$\|x - y, z\| = \|x + y, z\|$$

(۳) اگر و فقط اگر زیر فضای V از X با $\text{codim}(V) = 1$ موجود باشد که برای هر $z \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\|.$$

مظاهری و دیگران [۴۹] با الهام گرفتن از مفهوم BJ -تعامد، b -تعامد را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۳.۰.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-نرم باشد و $x, y \in X$ ، در این صورت $x \perp^b y$ اگر و تنها اگر عنصر b در X موجود باشد که $\|x, b\| \neq 0$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\|.$$

۱.۳ ارتباط تعامد در نرم و ۲-نرم

فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. که در آن $\dim(X) > 1$. اگر $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ باشد در این صورت یکی از مشهورترین تعاریف تعامد به صورت زیر است:

$$x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0$$

تعاریف کلی تری از تعامد که فقط مبتنی بر نرم باشد، موجود است مانند BJ -تعامد و I -تعامد و ... که پیشتر در مورد آن صحبت شد. تمرکز تحقیقات در این زمینه معمولاً روی روابط انواع تعامد با هم و استفاده از این روابط برای یافتن مشخصه‌سازی‌هایی از فضای ضرب داخلی است.

یکی از مهم‌ترین خواصی که دوست داریم برای انواع تعامد روی فضای نرم دار برقرار باشد آن است که در فضای ضرب داخلی داشته باشیم

$$x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0$$

و خواص دیگر که معمولاً مورد مطالعه واقع می‌شوند به صورت زیر است:

(۱) تقارن: ^۲

$$x \perp y \Rightarrow y \perp x$$

(۲) همگنی:

$$x \perp y \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha x \perp \beta y$$

(۳) حافظ جمع بودن:

$$(x \perp y, x \perp z) \Rightarrow x \perp (y + z)$$

(۴) اگر $x, y \in X$ آنگاه عدد حقیقی α موجود باشد که

$$x \perp (\alpha x + y)$$

ملاحظه ۱.۱.۳. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. در این صورت F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F := \{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$$

در این صورت $\|\cdot, \cdot\|$ را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x, y\| = \sup \left\{ \det \begin{bmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{bmatrix} \mid f, g \in F \right\} \quad (۱.۳)$$

در این صورت $\|\cdot, \cdot\|$ یک ۲-نرم روی X تعریف می‌کند. این ۲-نرم توسط سیلورمن [۸۱] ارائه شد.

از تساوی ۱.۳ نتیجه می‌شود که اگر $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه

$$\|x, y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2$$

تعریف ۱.۱.۳. (تعامد دیمینی^۳) فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی نرم دار باشد در این صورت می‌گوییم x بر y عمود دیمینی است و می‌نویسیم $x \perp^D y$ هرگاه

$$\|x, y\| = \|x\| \|y\|$$

ملاحظه ۲.۱.۳. اگر $x \perp^{BJ} (\alpha x + y)$ آنگاه $|\alpha| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}$.

لم زیر توسط جیمز اثبات شد.

لم ۱.۱.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی نرم‌دار باشد، در این صورت $y \perp^{BJ} x$ اگر و فقط اگر تابع $f \in F$ موجود باشد که $f(x) = \|x\|$ و $f(y) = 0$.

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی نرم‌دار باشد، در این صورت اگر $x \perp^{BJ} y$ آنگاه

$$\|x, y\| \geq \|x\| \|y\|$$

برهان. فرض کنید $y \perp^{BJ} x$ در این صورت با توجه به لم قبل تابع $f \in F$ موجود است که $f(x) = \|x\|$ و $f(y) = 0$. از طرفی

$$\|x, y\| = \sup \left\{ \det \begin{bmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{bmatrix} \mid f, g \in F \right\}$$

بنابراین اگر $g \in F$ دلخواه باشد آنگاه

$$\det \begin{bmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \|x\| & 0 \\ g(x) & g(y) \end{bmatrix} = \|x\|g(y)$$

لذا به ازای هر $g \in F$ داریم

$$\|x, y\| \geq \|x\|g(y).$$

با استفاده از قضیه هان-باناخ تابع $g \in F$ موجود است که

$$g(y) = \|y\|$$

بنابراین داریم

$$\|x, y\| \geq \|x\|\|y\|$$

□

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد و به ازای $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\|x, y\| \leq \|x\|\|y\|.$$

در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

$$x \perp^D y \quad (۱)$$

$$x \perp^{BJ} y \quad (۲)$$

برهان. فرض کنید $x, y \neq 0$ و $x \perp^D y$ با توجه به فرض قضیه به ازای هر عدد حقیقی α داریم

$$\|x + \alpha y, y\| \leq \|x + \alpha y\|\|y\|$$

از طرفی

$$\|x + \alpha y, y\| = \|x, y\| = \|x\|\|y\|$$

بنابراین داریم

$$\|x\|\|y\| \leq \|x + \alpha y\|\|y\|$$

پس

$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$$

و این یعنی $x \perp^{BJ} y$.

بالعکس، اگر $x \perp^{BJ} y$ در این صورت بنا به قضیه ۱.۱.۳ داریم

$$||x, y|| \geq ||x|| ||y||$$

از طرفی بنا به فرض

$$||x, y|| \leq ||x|| ||y||$$

بنابراین داریم

$$||x, y|| = ||x|| ||y||$$

□

و این یعنی $x \perp^D y$.

مثال زیر نشان می‌دهد که D -تعامد نیز لزوماً BJ -تعامد را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۱.۱.۳. فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ در این صورت $||\cdot, \cdot||$ را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||(x_1, x_2)|| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

و نیز فرض کنید $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$ در این صورت

$$F = \{f \in X^* \mid |f(e_1)| + |f(e_2)| \leq 1\}$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} ||e_1, e_2|| &= \sup \left\{ \det \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ g(e_1) & g(e_2) \end{bmatrix} \mid f, g \in F \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

از طرفی بنا به قضیه ۲.۲.۲ داریم

$$||(a_1, a_2), (b_1, b_2)|| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

حال اگر قرار دهیم $x = e_1, y = (1, 2)$ آنگاه

$$||x, y|| = 2$$

$$||x|| ||y|| = 2$$

بنابراین $x \perp^D y$ و این یعنی $x \perp^D Y$.

از طرفی دیگر

$$||x - \frac{1}{4}y|| = \frac{3}{4} < ||x||.$$

بنابراین $x \not\perp^{BJ} y$. پس D -تعامد، BJ -تعامد را نتیجه نمی‌دهد.

مثال بعد نشان می‌دهد که BJ -تعامد نیز لزوماً D -تعامد را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۲.۱.۳. فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ و $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ مانند مثال قبل فرض کنید $e_1 = (0, 1)$ و $e_2 = (1, 0)$ در این حالت

$$F = \left\{ f \in X^* \mid \max(|f(e_1)|, |f(e_2)|) \leq 1 \right\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|e_1, e_2\| &= \sup \left\{ \det \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ g(e_1) & g(e_2) \end{bmatrix} \mid f, g \in F \right\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

پس بنا به قضیه ۲.۲.۲ داریم:

$$\|(a_1, a_2), (b_1, b_2)\| = 2|a_1 b_1 - a_2 b_2|.$$

در این صورت $e_1 \not\perp^D e_2$ زیرا

$$\|e_1, e_2\| = 2 \quad \text{و} \quad \|e_1\| \|e_2\| < 2.$$

حال اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد آنگاه داریم

$$\|e_1 + \alpha e_2\| = 1 + |\alpha| \geq \|e_1\|$$

بنابراین $e_1 \perp^{BJ} e_2$. بنابراین BJ -تعامد، لزوماً D -تعامد را نتیجه نمی‌دهد.

۲.۳ ۲-ایزومتري و BJ -تعامد در فضاهای ۲-نرم

کلداپسکی ثابت کرد اگر $T: X \rightarrow Y$ نگاشتی خطی حافظ تعامد بین فضاهاى باناخ باشد، آنگاه T مضربى از يك ايزومتري است (قضيه ۲.۲.۱). در اين بخش مفهوم ۲-ایزومتري^۴ را در فضاهای ۲-نرم تعريف می‌کنيم و سپس نشان می‌دهيم که قضيه کلداپسکی^۵ در فضاهای ۲-نرم نیز صادق است.

تعريف ۱.۲.۳. فرض کنید X, Y دو فضای ۲-نرم باشند. نگاشت $T: X \rightarrow Y$ را ۲-ایزومتري گوييم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم:

$$\|x_1, x_2\| = \|T(x_1), T(x_2)\|$$

^۴2-isometry
^۵Koldobski theorem

در این بخش گزاره زیر را ثابت خواهیم کرد:

گزاره: اگر X یک فضای ۲- باناخ باشد آنگاه هر نگاشت خطی که حافظ BJ - تعامد باشد، مضربى از ۲- ایزومتري است (قضیه کلدابسكى در فضای ۲- نرم).

تعريف ۲.۲.۳. فرض کنید X یک فضای ۲- باناخ باشد. اگر x و y عناصر غير صفرى از X باشند، در این صورت $S^z(x)$ را به صورت زیر تعريف می کنیم:

$$S^z(x) = \left\{ x^* \in X^* \mid \sup_{x \in X, \|x, z\|=1} x^*(x) = 1, x^*(x) = \|x, z\| \right\}.$$

قضیه ۱.۲.۳. [۱۳] فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲- نرم و $z \in X$ باشد. در این صورت به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq 0$ ، داریم

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \lambda y, z\| - \|x, z\|}{\lambda} = \sup_{x^* \in S^z(x)} x^*(x) \quad (۲.۳)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \frac{\|x + \lambda y, z\| - \|x, z\|}{\lambda} = \inf_{x^* \in S^z(x)} x^*(x) \quad (۳.۳)$$

تعريف ۳.۲.۳. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲- نرم دار باشد، در این صورت $D^z(x, y)$ را به صورت زیر تعريف می کنیم؛

$$D^z(x, y) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \varphi^z \text{ پذیر باشد} \right\}$$

که در آن $\varphi^z(\lambda) = \|x + \lambda y, z\|$.

لم ۱.۲.۳. تابع $\varphi^z(\lambda)$ مشتق پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $x_1^*, x_2^* \in S^z(x + \lambda y)$ داشته باشیم

$$x_1^*(y) = x_2^*(y)$$

برهان. φ^z مشتق پذیر است، اگر و فقط اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \lambda y + hy, z\| - \|x + \lambda y, z\|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\|x + \lambda y + hy, z\| - \|x + \lambda y, z\|}{h}$$

اگر و فقط اگر

$$\sup_{x^* \in S^z(x + \lambda y)} x^*(y) = \inf_{x^* \in S^z(x + \lambda y)} x^*(y)$$

اگر و فقط اگر به ازای هر $x_1^*, x_2^* \in S^z(x + \lambda y)$ ؛

$$x_1^*(y) = x_2^*(y).$$

□

لم ۲.۲.۳. [۶۳] هر تابع حقیقی محدب روی $\mathbb{R}$ ، تقریباً همه جا مشتق پذیر است. (نسبت به اندازه لبگ ۶)

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید $\lambda \in D^z(x, y)$ و $a, b \in \mathbb{R}$. آنگاه گزاره‌های زیر صادق‌اند.

- ۱- مقدار $x^*(ax + by)$ به انتخاب $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ وابسته نیست.
- ۲- $x + \lambda y \perp^{BJ} ax + by$ اگر و فقط اگر به ازای هر $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ ، داشته باشیم؛

$$x^*(ax + by) = 0$$

برهان. ۱- با استفاده از لم ۱.۲.۳، $x^*(y)$ به انتخاب $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ وابسته نیست. از طرفی به ازای هر $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ داریم

$$x^*(x) = x^*(x + \lambda y) - \lambda x^*(y) = \|x + \lambda y, z\| - \lambda x^*(y)$$

بنابراین مقدار $x^*(x)$ نیز به انتخاب تابع $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ وابسته نمی‌باشد. بنابراین با توجه به این‌که

$$x^*(ax + by) = ax^*(x) + bx^*(y)$$

مقدار $x^*(ax + by)$ به انتخاب $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ وابسته نمی‌باشد.

۲- اگر $x + \lambda y \perp^{BJ} ax + by$ آنگاه با استفاده از تعریف BJ -تعامد در فضای ۲-نرم، زیر فضای V با $\text{codim}(V) = 1$ موجود است که به ازای هر $z \in V$ و $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|x + \lambda y + t(ax + by), z\| - \|x + \lambda y, z\| \geq 0$$

بنابراین

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \lambda y + t(ax + by), z\| - \|x + \lambda y, z\|}{t} \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + \lambda y + t(ax + by), z\| - \|x + \lambda y, z\|}{t} \leq 0$$

پس

$$\inf_{x^* \in S^z(x + \lambda y)} x^*(ax + by) \leq 0 \leq \sup_{x^* \in S^z(x + \lambda y)} x^*(ax + by) \quad (4.3)$$

با توجه به اینکه مقدار $x^*(ax + by)$ مستقل از انتخاب x^* است، نامساوی فوق به تساوی تبدیل خواهد شد. بنابراین به ازای هر $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ داریم

$$x^*(ax + by) = 0$$

بالعكس، فرض كنيد به ازاي هر $x^* \in S^*(x + \lambda y)$ آنگاه به ازاي هر $\gamma \in \mathbb{R}$

$$x^*(x + \lambda y + \gamma(ax + by)) = x^*(x + \lambda y) = \|x + \lambda y, z\|$$

با توجه به اين كه $\sup_{x \in X, \|x, y\|=1} x^*(x) = 1$ ، داريم

$$1 = \sup x^*\left(\frac{\omega}{\|\omega, z\|}\right) \geq x^*\left(\frac{x + \lambda y + \gamma(ax + by)}{\|x + \lambda y + \gamma(ax + by), z\|}\right) = \frac{\|x + \lambda y, z\|}{\|x + \lambda y + \gamma(ax + by), z\|}$$

بنابراين

$$\|x + \lambda y, z\| \leq \|x + \lambda y + \omega(ax + by), z\|$$

و اين يعنى

$$x + \lambda y \perp^{BJ} ax + by.$$

□

ملاحظه ۱.۲.۳. فرض كنيد V زير فضايى از X با $\text{codim}(V) = 1$ باشد. $z \in V$ را دلخواه و از اين به بعد ثابت در نظر مى گيريم. در اين صورت به ازاي هر $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|(x + ay) + \lambda y, z\| \geq \|x + ay, z\|$$

اگر و فقط اگر $\|x + ay, z\|$ كوچكترين مقدار از مقادير $\|x + \lambda y, z\|$ باشد با توجه به اين كه $\|x + \lambda y, z\|$ در λ پيوسته است بنابراين بيشترين و كمترين خود را در M و m اختيار مى كند. فرض كنيد $x + my \perp^{BJ} y$ و $x + My \perp^{BJ} y$. از آن جايي كه تابع φ^z محدب است، داريم

$$\|x + my, z\| = \|x + My, z\| = \|x + y, z\|$$

كه در آن a بين m و M است. لذا

$$x + ay \perp y.$$

بنابراين مجموعه تمام اعدادى مانند a كه

$$\|(x + ay) + \lambda y, z\| \geq \|x + ay, z\|$$

بازه بسته $[m, M]$ است و نيز به ازاي هر $a \in [m, M]$

$$\|x + ay, z\| = \|x + my, z\| = \|x + My, z\|.$$

لم ۳.۲.۳. فرض كنيد $a \in D^z(x, y)$ در اين صورت يكي از گزاره هاى زير برقرار است:

(۱) به ازاي هر $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|(x + ay) + \lambda y, z\| \geq \|x + ay, z\|.$$

(۲) عدد $K_a \in \mathbb{R}$ موجود است که به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ،

$$\|(x + ay) + \lambda(x - K_a y), z\| \geq \|x + ay, z\|$$

برهان. فرض کنید $a \in D^z(x, y)$ و $x^* \in S^z(x + ay)$. با استفاده از لم ۱.۲.۳ و قضیه ۲.۲.۳ مقدار $x^*(x)$ و $x^*(y)$ مستقل از انتخاب $x^* \in S^z(x + ay)$ است. حال اگر $x^*(y) = 0$ آنگاه با استفاده از قضیه ۲.۲.۳، داریم

$$\|(x + ay) + \lambda y, z\| \geq \|x + ay, z\|.$$

اما اگر $x^*(y) \neq 0$ آنگاه

$$\|(x + ay) + \lambda(x - by), z\| \geq \|x + ay, z\|$$

اگر و فقط اگر

$$x^*(x - by) = 0$$

بنابراین می توان قرار داد

$$K_a = \frac{x^*(x)}{x^*(y)}.$$

□

ملاحظه ۲.۲.۳. لم قبل تابع f روی $\mathbb{R} \setminus [m, M]$ را با ضابطه

$$f(a) = K_a$$

تعریف می کند.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید m و M همان هایی باشند که در ملاحظه ۱.۲.۳ در نظر گرفته شده اند و نیز فرض کنید $\lambda \in D^z(x, y)$ آنگاه

$$\|x + \lambda y, z\| = \|x + My, z\| \exp\left(\int_M^\lambda (t + f(t))^{-1} dt\right) \quad (۵.۳)$$

$$\|x + \lambda y, z\| = \|x + my, z\| \exp\left(\int_\lambda^m (t + f(t))^{-1} dt\right) \quad (۶.۳)$$

برهان. فرض کنید $\lambda \in D^z(x, y)$ و $\lambda > M$. $x^* \in S^z(x + \lambda y)$ دلخواه و از این به بعد ثابت در نظر می گیریم. با استفاده از لم ۳.۲.۳ داریم؛

$$x^*(x) = f(\lambda)x^*(y)$$

با استفاده از تساوی های ۳.۳، ۲.۳ و لم ۳.۲.۳ داریم

$$x^*(x) = \frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda}$$

بنابراین

$$x^*(x) = x^*(x + \lambda y) - \lambda x^*(y) = \|x + \lambda y, z\| - \lambda \frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda}$$

بنابراین

$$f(\lambda)x^*(y) = \|x + \lambda y, z\| - \lambda \frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda}$$

و این نتیجه می‌دهد که

$$f(\lambda) \frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda} = \|x + \lambda y, z\| - \lambda \frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda}$$

پس

$$\frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda} (f(\lambda) + \lambda) = \|x + \lambda y, z\|$$

در نتیجه

$$\frac{\frac{d(\|x + \lambda y, z\|)}{d\lambda}}{\|x + \lambda y, z\|} = \frac{1}{f(\lambda) + \lambda}.$$

با توجه به اینکه $\lambda \in D^z(x, y) \cap [m, \infty)$ و اندازه لبگ مجموعه $\mathbb{R} \setminus D^z(x, y)$ صفر است، داریم:

$$\int_M^\lambda \frac{\frac{d(\|x + \omega y, z\|)}{d\omega}}{\|x + \omega y, z\|} d\omega = \int_M^\lambda \frac{1}{f(\omega) + \omega} d\omega$$

چون تابع $\varphi^z(\lambda) = \|x + \lambda y, z\|$ پیوسته است بنابراین انتگرال سمت چپ تساوی فوق موجود است و برابر با

$$\ln \left(\frac{\|x + \lambda y, z\|}{\|x + My, z\|} \right)$$

و چون

$$\ln \left(\frac{\|x + \lambda y, z\|}{\|x + My, z\|} \right) = \int_M^\lambda \frac{1}{f(\omega) + \omega} d\omega.$$

پس

$$\frac{\|x + \lambda y, z\|}{\|x + My, z\|} = \exp \int_M^\lambda (f(\omega) + \omega)^{-1} d\omega$$

و این یعنی

$$\|x + \lambda y, z\| = \|x + My, z\| \exp \int_M^\lambda (f(\omega) + \omega)^{-1} d\omega$$

پس ۵.۳ ثابت شده است. برای اثبات تساوی ۶.۳ به روش مشابه عمل می‌کنیم. $\square$

لم ۵.۲.۳. فرض کنید X فضایی ۲- نرم دار باشد و $T : X \rightarrow X$ یک ۲- ایزومتري خطی باشد، آنگاه T یک به یک است.

برهان. فرض کنید $a \neq 0$ در اینصورت $b \in X$ موجود است که

$$\|T(a), T(b)\| = \|a, b\| \neq 0$$

بنابراین $T(a) \neq 0$ پس T ، یک به یک است. $\square$

اکنون قضیه اصلی این بخش را بیان می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که نتیجه کلداسکی در فضای ۲-نرم نیز برقرار است.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید X یک فضای ۲-باناخ و عملگر خطی $T : X \rightarrow X$ حافظ BJ -تعامد باشد. در این صورت $k \in \mathbb{R}$ موجود است که $T = kU$ و U یک ۲-ایزومتري است.

برهان. فرض کنید T یک عملگر خطی باشد که حافظ BJ -تعامد است و $T \neq 0$. فرض کنید $x, z \in X$ و $Tx \neq 0$. فرض کنید y عنصری دلخواه از X باشد که به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $x \neq \lambda y$. فرض کنید I_1 و I_2 بازه‌هایی بصورت $[m, M]$ نظیر زوج‌های (x, y) و (Tx, Ty) باشد. با توجه به اینکه T حافظ BJ -تعامد است داریم

$$I_1 \subseteq I_2$$

اکنون نشان می‌دهیم که $I_1 = I_2$. فرض کنید $I = I_2 \setminus I_1$ ، $I \neq \emptyset$ و نیز $\lambda \in I$. از طرفی $\lambda \in D^z(x, y) \cap D^z(Tx, Ty)$ از آنجایی که $\lambda \in I_2$ پس $Tx + \lambda Ty \perp^{BJ} Ty$. با استفاده از لم ۳.۲.۳، عدد $K_\lambda \in \mathbb{R}$ موجود است که

$$x + \lambda y \perp^{BJ} x - K_\lambda y$$

بنابراین

$$Tx + \lambda Ty \perp^{BJ} Tx + K_\lambda Ty.$$

از قضیه ۲.۲.۳ نتیجه می‌شود که به ازای هر $x^* \in S^{\lambda Ty}(Tx + \lambda Ty)$ داریم

$$x^*(Ty) = 0, \quad x^*(Tx - K_\lambda Ty) = 0$$

پس

$$\begin{aligned} \|T(x + \lambda y), T(\lambda y)\| &= x^*(Tx + \lambda Ty) = x^*(Tx - K_\lambda Ty + K_\lambda Ty + \lambda Ty) \\ &= x^*(Tx - K_\lambda Ty) + K_\lambda x^*(Ty) + \lambda x^*(Ty) \\ &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $\alpha \in \mathbb{R}$ موجود است که

$$T(x + \lambda y) = \alpha T(\lambda y)$$

يا به طور معادل

$$T(x + \lambda y - \alpha \lambda y) = 0$$

چون T يك به يك است. بنابرین داریم

$$x = \lambda(1 - \alpha)y$$

و این تناقض با نحوه انتخاب y است. بنابرین $I_1 = I_2$. این یعنی m, M و K_α برای زوجهای (x, y) و (Tx, Ty) یکی است. بنابرین $\|T(x + \lambda y), Tz\|$ و $\|x + \lambda y, z\|$ به ازای هر $\lambda \in [m, M]$ یک مقدار ثابت است. از آنجایی که

$$\|x + \lambda y, z\| = \|x + My, z\| \exp\left(\int_M^\lambda (t + k_t)^{-1} dt\right)$$

و

$$\|Tx + \lambda Ty, Tz\| = \|Tx + MTy, Tz\| \exp\left(\int_M^\lambda (t + k_t)^{-1} dt\right)$$

$K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ موجودند که

$$\|x + \lambda y, z\| = K_1$$

و

$$\|Tx + \lambda Ty, Tz\| = K_2$$

و بنابرین

$$\|x + \lambda y, z\| = \frac{K_1}{K_2} \|Tx + \lambda Ty, Tz\|.$$

□

فصل ۴

نظریه بهترین تقریب در فضای ۲-نرم دار

در این فصل نظریه بهترین تقریب را در فضای ۲-نرم دار بررسی خواهیم کرد. بهترین تقریب در فضای ۲-نرم دار توسط الیومالای، ویجایاراگاوآن، مهمت آکیگز، دومینیک و مارورای مورد مطالعه قرار گرفته است. ([۲۵]، [۶]).

ما در این فصل نیز بهترین تقریب را در فضای ۲-نرم مشخصه سازی خواهیم کرد. در نهایت فضای g -۲-نرم را ارائه می‌کنیم و بهترین تقریب را برای مجموعه‌های روبه پایین فضاهای g -۲-نرم مطالعه می‌کنیم.

۱.۴ ۲-تابع خطی کران دار در فضای ۲-نرم

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|, \cdot)$ فضایی ۲-نرم باشد. تابع $f : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ را یک ۲-تابع^۱ گوییم که در آن V و U زیر فضاهایی در فضای X می‌باشند.

تعریف ۲.۱.۴. ۲-تابع $f : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ را ۲-خطی^۲ گوییم. اگر به ازای هر $a_1, a_2 \in V$ و $b_1, b_2 \in V$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ خواص زیر صادق باشد.

^۱2-functional
^۲linear

$$f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) + f(a_1, b_2) + f(a_2, b_1) \quad (1)$$

$$f(\alpha a_1, \beta b_1) = \alpha \beta f(a_1, b_1) \quad (2)$$

تعریف ۳.۱.۴. ۲-تابع f را با دامنه $D(f)$ در نظر بگیرید.

در این صورت f را کراندار^۳ گوییم هر گاه $k > 0$ موجود باشد که به ازای هر $(a, b) \in D(f)$ داشته باشیم

$$|f(a, b)| \leq k \|a, b\|$$

تعریف ۴.۱.۴. اگر ۲-تابع f کراندار باشد در این صورت نرم f را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup \left\{ \frac{|f(x, y)|}{\|x, y\|} \mid \|x, y\| \neq 0, (x, y) \in D(f) \right\} \\ &= \sup \left\{ |f(x, y)| \mid \|x, y\| = 1, (x, y) \in D(f) \right\} \end{aligned}$$

تعریف ۵.۱.۴. ۲-تابع f را در (a, b) پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $\|a - c, b\| < \delta$ و $\|c, b - d\| < \delta$ یا $\|a - c, d\| < \delta$ و $\|a, b - d\| < \delta$ آنگاه

$$|f(a, b) - f(c, d)| < \epsilon$$

اگر f در هر نقطه $D(f)$ پیوسته باشد آنگاه می گوییم f پیوسته است.

قضیه ۱.۱.۴. ۲-نرم، $\|\cdot, \cdot\|$ یک ۲-تابع پیوسته است.

برهان. با توجه به خواص ۲-نرم داریم

$$\begin{aligned} \|a, b\| &= \|(a - c) + c, b\| \\ &\leq \|a - c, b\| + \|c, b\| \\ &= \|a - c, b\| + \|c, (b - d) + d\| \\ &\leq \|a - c, b\| + \|c, b - d\| + \|c, d\| \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|a, b\| - \|c, d\| \leq \|a - c, b\| + \|c, b - d\|$$

و نیز با روش مشابه داریم؛

$$\|c, d\| - \|a, b\| \leq \|a - c, b\| + \|c, b - d\|.$$

بنابراین داریم؛

$$\left| \|a, b\| - \|c, d\| \right| \leq \|c, b - d\| + \|a - c, b\|.$$

بنابراین با توجه به تعریف، ۲-تابع $\|\cdot, \cdot\|$ پیوسته است.

□

قضیه ۲.۱.۴. [۸۸] گزاره‌های زیر با هم معادل‌اند:

(۱) ۲-تابعک خطی f پیوسته است.

(۲) ۲-تابعک خطی f کراندار است.

(۳) ۲-تابعک خطی f در $(\circ, \circ)$ پیوسته است.

تعریف ۶.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-باناخ باشد و در این صورت $(X \times X)^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(X \times X)^* := \{f : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ تابعک خطی کراندار است}\}$$

قضیه ۳.۱.۴. [۲۶] اگر X فضای ۲-باناخ باشد آنگاه $((X \times X)^*, \|\cdot, \cdot\|)$ باناخ است.

تعریف ۷.۱.۴. فرض کنید V و U زیر فضاهایی از فضای ۲-نرم دار $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ و $f : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ۲-تابعک باشد. در این صورت $(ker f)_U$ و $ker f$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(ker f)_U := \{a \in V \mid f(a, b) = \circ, b \in U \text{ هر ازای هر}\}$$

$$ker f = \{(a, b) \in V \times U \mid f(a, b) = \circ\}$$

قضیه ۴.۱.۴. [۸۸] (قضیه هان باناخ در فضای ۲-نرم دار)^۴ فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ۲-باناخ، $b \in X$ و U زیر فضایی از X باشد. اگر $f : U \times \langle b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ۲-تابعک خطی کراندار دلخواهی باشد. در این صورت ۲-تابعک خطی کراندار $g : X \times \langle b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که؛

(۱) به ازای هر $a \in U$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم

$$g(a, \alpha b) = f(a, \alpha b)$$

$$\|g\| = \|f\| \quad (۲)$$

قضیه ۵.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-نرم دار و U یک زیر فضایی از X باشند و نیز فرض کنید $x_\circ \in X \setminus U$ و $b \in X$ مستقل خطی باشند. قرار می‌دهیم

$$\delta = \inf_{y \in U} \|x_\circ - y, b\| > \circ$$

در این صورت تابعک خطی کراندار f روی $X \times \langle b \rangle$ موجود است که

$$f(x_\circ, b) = \delta \quad (۱)$$

$$f(U \times \langle b \rangle) \subseteq ker f \quad (۲)$$

$$\|f\| = ۱ \quad (۳)$$

برهان. ابتدا فرض کنید $V = \langle U, x_0 \rangle$ به عبارت دیگر

$$V = \{m + \alpha x_0 \mid m \in U, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} f : V \times \langle b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \\ f(m + \alpha x_0, \beta b) = \alpha \beta \delta. \end{cases}$$

(۱) واضح است که با توجه به نحوه‌ی تعریف f ؛

$$f(x_0, b) = \delta.$$

(۲) نشان می‌دهیم f خطی است. فرض کنید $u_1, u_2 \in U$ و $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ دلخواه باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} & f((u_1 + \alpha_1 x_0) + (u_2 + \alpha_2 x_0), \beta_1 b) \\ &= f((u_1 + u_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)x_0, \beta_1 b) = (\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1 \delta \\ &= \alpha_1 \beta_1 \delta + \alpha_2 \beta_1 \delta = f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b) + f(u_2 + \alpha_2 x_0, \beta_1 b) \end{aligned}$$

و نیز داریم

$$f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b + \beta_2 b) = f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b) + f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_2 b)$$

هم چنین داریم

$$\begin{aligned} f(u_1 + \alpha_1 x_0, \lambda(\beta_1 b)) &= \alpha_1 \lambda \beta_1 \delta = \lambda f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b) \\ f(\gamma(u_1 + \alpha_1 x_0), \beta_1 b) &= \gamma f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b) \end{aligned}$$

بنابراین f یک ۲-تابع خطی روی $V \times \langle b \rangle$ است.

حال ثابت می‌کنیم f کراندار است. بدون کاستن از کلیت فرض، فرض کنید $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ مخالف صفر باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \|u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b\| &= |\beta_1| \|u_1 + \alpha_1 x_0, b\| \\ &= |\beta_1| \left\| \alpha_1 \left(x_0 + \frac{u_1}{\alpha_1} \right), b \right\| \\ &= |\alpha_1| |\beta_1| \left\| x_0 + \frac{u_1}{\alpha_1}, b \right\| \\ &= |\alpha_1| |\beta_1| \left\| x_0 - \left(-\frac{u_1}{\alpha_1} \right), b \right\| \\ &\geq |\alpha_1| |\beta_1| \delta. \end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} |f(u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b)| &= |\alpha_1 \beta_1 \delta| \\ &= |\alpha_1| |\beta_1| \delta \\ &\leq \|u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b\| \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\frac{|u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b|}{\|u_1 + \alpha_1 x_0, \beta_1 b\|} \leq 1$$

پس f کراندار است و $\|f\| < 1$.

واضح است که $\delta = f(x_0, b)$ و $0 = f(u_1, y_0)$ که در آن $y_0 \in \langle b \rangle$. حال فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت بنا به خاصیت مشخصه اینفیموم $u \in U$ موجود است که

$$\|x_0 - u, b\| < \delta + \epsilon$$

به وضوح داریم

$$\frac{x_0 - u}{\|x_0 - u, b\|} \in V, \quad \left\| \frac{x_0 - u}{\|x_0 - u, b\|} \right\| = 1$$

بنابراین

$$f\left(\frac{x_0 - u}{\|x_0 - u, b\|}, b\right) = \frac{\delta}{\|x_0 - u, b\|} \geq \frac{\delta}{\delta + \epsilon}.$$

لذا با توجه به اینکه $\epsilon > 0$ دلخواه انتخاب شد، داریم

$$f\left(\frac{x_0 - u}{\|x_0 - u, b\|}, b\right) \geq 1.$$

پس

$$\begin{aligned} 1 \leq f\left(\frac{x_0 - u}{\|x_0 - u, b\|}, b\right) &\leq \|f\| \left\| \frac{x_0 - u}{\|x_0 - u, b\|}, b \right\| \\ &= \|f\| \end{aligned}$$

بنابراین $\|f\| = 1$. اکنون قضیه با استفاده از قضیه هان باناخ در فضای ۲-نرم دار ۲-تابعک خطی کراندار g روی $X \times \langle b \rangle$ موجود است که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $v \in V$

$$g(v, \alpha b) = f(v, \alpha b)$$

□

و نیز $\|f\| = \|g\| = 1$.

نتیجه ۱.۱.۴. اگر در قضیه قبل، قرار دهیم $U = \{0\}$ ، $x_0 \in X \setminus \{0\}$ و $\delta = \|x_0, b\|$ (با توجه به اینکه x_0 و b اند $\epsilon > 0$) آنگاه قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۶.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲-نرم دار و $x_0 \in X$ مخالف صفر باشد. اگر $b \in X$ مستقل خطی^۵ با x_0 انتخاب شود، آنگاه ۲-تابع خطی کراندار f با دامنه $X \times \langle b \rangle$ موجود است که

$$f(x_0, b) = \|x_0, b\| \quad (۱)$$

$$\|f\| = 1 \quad (۲)$$

قضیه ۷.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲-نرم دار، $x_0 \in X$ مخالف صفر و $b \in X$ مستقل خطی از x_0 انتخاب شده باشد. در این صورت اگر عدد ثابت k موجود باشد که به ازای هر ۲-تابع f با دامنه $X \times \langle b \rangle$ و با $\|f\| = 1$ داشته باشیم $|f(x_0, b)| \leq k$ ، آنگاه $\|x_0, b\| \leq k$.

برهان. اگر $|f(x_0, b)| > k$ آنگاه با استفاده از قضیه قبل ۲-تابع خطی کراندار f روی $X \times \langle b \rangle$ موجود است که $\|f\| = 1$ و $f(x_0, b) = \|x_0, b\| > k$ که این تناقض است پس $\square$ $\|x_0, b\| \leq k$

۲.۴ بهترین تقریب در فضای ۲-نرم

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-نرم دار و G زیر مجموعه‌ای ناتهی از X و $x \in X \setminus G$ و $g \in G$ باشند. اگر $\langle \{x\} \cup G \rangle$ را z -۲-بهترین تقریب برای x در G گوییم هرگاه

$$\|x - g_0, z\| = \inf_{g \in G} \|x - g, z\|.$$

مجموعه $P_G^z(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_G^z(x) = \{x \in G \mid \|x - g_0, z\| = \inf_{g \in G} \|x - g, z\|\}$$

تعریف ۲.۲.۴. اگر به ازای هر $x \in X \setminus G$ ، $P_G^z(x)$ ناتهی باشد آنگاه G را z -۲-پروکسمینال و اگر $P_G^z(x)$ تک عضوی باشد آن را z -۲-چبیشف گوییم.

تعریف ۳.۲.۴. اگر به ازای هر $x \in X \setminus G$ ، هر $z \in X \setminus \langle x \cup G \rangle$ ، $P_G^z(x)$ ناتهی باشد G را ۲-پروکسمینال و اگر تک عضوی باشد G را ۲-چبیشف گوییم.

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-نرم باشد در این صورت تابع

$$N_+(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$$

را مشتق راست گاتیوکس ۲-نرم $\|\cdot, \cdot\|$ در (x, z) و در جهت y گوییم و نیز تابع

$$N_-(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$$

را مشتق چپ گاتیوکس ۲-نرم $\|\cdot, \cdot\|$ در (x, z) و در جهت y گوییم. در حالت کلی مشتق گاتیوکس تابع $f(x, y)$ در نقطه (a_0, b_0) و در جهت y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_0 + ty, b_0) - f(a_0, b_0)}{t}$$

تعریف ۵.۲.۴. مشتق گاتیوکس راست تابع $\frac{\|x, z\|^2}{2}$ در نقطه (x, z) و در جهت y را با $\langle x, y|z \rangle$ نمایش می‌دهیم و آن را ۲-ضرب داخلی تعمیم یافته^۶ می‌گوییم و داریم؛

$$\begin{aligned} \langle x, y|z \rangle &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty.z\|^2 - \|x, z\|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\|x + ty, z\| + \|x, z\|}{2} \right) \left(\frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t} \right) \\ &= N_+(x, z)(y) \|x, z\|. \end{aligned}$$

بدیهی است که ۲-ضرب داخلی تعمیم یافته دارای خواص زیر است (به [۸۶] رجوع شود):

$$(1) \quad \langle x, y|z \rangle \text{ به ازای هر } x, y, z \text{ تعریف شده است.}$$

$$(2) \quad \|x, z\|^2 = \langle x, x|z \rangle$$

$$(3) \quad |\langle x, y|z \rangle| \leq \|x, z\| \|y, z\|$$

$$(4) \quad \langle x, y + y'|z \rangle \leq \langle x, y|z \rangle + \langle x, y'|z \rangle$$

$$(5) \quad \text{به ازای اعداد مثبت دلخواه } \alpha \text{ و } \beta \text{ داریم:}$$

$$\langle \alpha x, \beta y|z \rangle = \alpha \beta \langle x, y|z \rangle$$

(۶) اگر X یک فضای ۲-ضرب داخلی با ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ باشد آنگاه داریم

$$\langle x, y|z \rangle = (x, y|z).$$

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-ضرب داخلی، G زیر مجموعه‌ای از X ، $x \in X$ ، $y_0 \in G$ و $z \in X \setminus \langle x \cup G \rangle$ باشند. در این صورت اگر به ازای هر $y \in G$ داشته باشیم

$$(1.4) \quad (y - y_0, x - y_0|z) \leq 0$$

آنگاه $y_0 \in P_G^z(x)$.

برهان. فرض کنید رابطه ۱.۴ برقرار باشد و $y \in G$ دلخواه اختیار شده باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \|x - y_0, z\|^2 &= (x - y_0, x - y_0 | z) \\ &= (x - y_0 - y + y, x - y_0 | z) \\ &= (x - y, x - y_0 | z) + (y - y_0, x - y_0 | z) \\ &\leq (x - y, x - y_0 | z) \leq \|x - y, z\| \|x - y_0, z\| \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|x - y_0, z\| \leq \|x - y, z\|$$

چون $y \in G$ دلخواه است پس $y_0 \in P_G^z(x)$. $\square$

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-ضرب داخلی، K زیر مجموعه‌ای محدب در X ، $x \in X$ ، $y_0 \in K$ و $z \in X \setminus \langle x \cup G \rangle$ باشند. در این صورت اگر $y_0 \in P_k(x)$ ، آنگاه به ازای هر $y \in K$ و $\lambda \in [0, 1]$ داریم

$$(y - y_0, x - y_0 - \lambda(y - y_0) | z) \leq 0. \quad (2.4)$$

برهان. فرض کنید (۲.۴) درست نباشد آنگاه $y \in K$ و $\lambda \in [0, 1]$ موجودند که

$$(y - y_0, x - y_0 - \lambda(y - y_0) | z) > 0$$

(فرض بر این است که $y \neq y_0$). حال عنصر y_λ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$y_\lambda := \lambda y + (1 - \lambda)y_0$$

چون K محدب است پس $y_\lambda \in K$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \|x - y_\lambda, z\| &= \|x - \lambda y - (1 - \lambda)y_0, z\| \\ &= \frac{(x - y_0 - \lambda(y - y_0), x - y_0 - \lambda(y - y_0) | z)}{\|x - y_0 - \lambda(y - y_0), z\|} \\ &= \frac{(x - y_0, x - y_0 - \lambda(y - y_0) | z) - \lambda(y - y_0, x - y_0 - \lambda(y - y_0) | z)}{\|x - y_0 - \lambda(y - y_0), z\|} \\ &< \frac{(x - y_0, x - y_0 - \lambda(y - y_0) | z)}{\|x - y_0 - \lambda(y - y_0), z\|} \\ &< \|x - y_0, z\| \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\|x - y_\lambda, z\| < \|x - y_0, z\|$$

پس $y \notin P_G^z(x)$ که این متناقض با فرض است. پس (۲.۴) برقرار است. $\square$

از ترکیب دو قضیه قبل قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-ضرب داخلی باشد در این صورت اگر $z \in X \setminus \langle \{x\} \cup G \rangle$ آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند

$$y_0 \in P_k(x) \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ به ازای هر } \lambda \in [0, 1] \text{ و } y \in G,$$

$$(y - y_0, x - y_0 - \lambda(y - y_0)|z) \leq 0$$

$$(۳) \text{ به ازای هر } y \in G$$

$$(y - y_0, x - y_0|z) \leq 0$$

برهان. $(۱) \Rightarrow (۲)$ و $(۱) \Rightarrow (۳)$ از قضیه‌های قبل نتیجه می‌شود. حال اگر در (۲) قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه $(۲) \Rightarrow (۳)$ نیز نتیجه می‌شود. $\square$

تعریف ۶.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضا ۲-ضرب داخلی، G زیر مجموعه‌ای ناتهی از X باشد. در این صورت اگر $z \in X \setminus \langle G \rangle$ آنگاه z -مخروط دوگان^۷ بانماد G_Z° به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$G_Z^\circ := \{x \in X | (y, x|z) \leq 0, \quad y \in G \text{ هر ازای هر } y\}$$

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-ضرب داخلی، G زیر مجموعه‌ای محدب از X ، $y_0 \in G$ و $x \in X \setminus \langle x \cup G \rangle$ باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

$$y_0 \in P_G^z(x) \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ به ازای هر } \lambda \in [0, 1] \text{ و } y \in G,$$

$$x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in (k - y_0)_Z^\circ$$

$$(۳) \quad x - y \in (k - y_0)_Z^\circ$$

برهان. با توجه به تعریف z -مخروط دوگان و قضیه قبل بدیهی است. در واقع این قضیه بازنویسی از قضیه قبل است. $\square$

لم ۱.۲.۴ [۸۶] فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲-نرم دار و G زیر فضایی از X ، باشند و نیز فرض کنید $x_0 \in X \setminus G$ و $g_0 \in G$. در این صورت $g_0 \in P_G^z(x_0)$ اگر و تنها اگر

$$x_0 - g_0 \perp^z G.$$

تعریف ۷.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲-نرم دار و G زیر فضایی از X باشد. در این صورت $\|\cdot\|$ یک نرم روی فضایی $(X \times G)^*$ القا می‌کند.

$$\|f\|_G = \sup \left\{ \frac{|f(x, y)|}{\|x, y\|} \mid x \in X, y \in G \right\}$$

قضیه ۵.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای ۲-نرم دار، G زیر فضایی از X ، $g_0 \in (ker f)_G$ و $x_0 \in X \setminus ker f$ آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) به ازای هر $z \in X \setminus \langle x_0, (ker f)_G \rangle$

$$g_0 \in P_{(ker f)_G}^z(x_0)$$

(۲) به ازای هر $x \in X$ و $z \in X \setminus \langle x_0 \cup (ker f)_G \rangle$ و $\lambda_0 = sgn f(x_0, z)$

$$\|f\|_G < x, \frac{\lambda_0(x_0 - g_0)}{\|x_0 - g_0, z\|} >_- \leq f(x, z) \leq \|f\|_G < x, \frac{\lambda_0(x_0 - g_0)}{\|x_0 - g_0, z\|} >_+ \quad (۳.۴)$$

برهان. (۲) $\Rightarrow$ (۱) قرار می‌دهیم $w_0 = x_0 - g_0$. باتوجه به اینکه $g_0 \in P_{(ker f)_G}^z(x_0)$ با استفاده از لم ۱.۲.۴

$$w_0 \perp^z (ker f)_G$$

در این صورت به ازای هر $y \in (ker f)_G$ و $z \in X \setminus \langle x_0 \cup (ker f)_G \rangle$ داریم

$$\langle y, w_0 | z \rangle_- \leq 0 \leq \langle y, w_0 | z \rangle_+. \quad (۴.۴)$$

فرض کنید x عنصری دلخواه از X باشد. در این صورت به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$y = f(x, z)w_0 - f(w_0, z)x \in (ker f)_G$$

بنابراین با استفاده از (۱.۲.۴) نتیجه می‌شود که

$$\langle f(x, z)w_0 - f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_- \leq 0 \leq \langle f(x, z)w_0 - f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_+$$

بنابر خواص $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle_-$ داریم

$$\begin{aligned} & \langle f(x, z)w_0 - f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_+ = \\ & f(x, z)\|w_0, z\|^2 + \langle -f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_+ \leq 0 \leq \langle f(x, z)w_0 - f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_- \\ & = f(x, z)\|w_0, z\|^2 + \langle -f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_- . \end{aligned}$$

از طرفی $w_0 \perp^{BJ} (ker f)_G$ نسبت به عنصر z و باتوجه به اینکه $w_0 \neq 0$ داریم $f(w_0, z) \neq 0$. بنابراین یا $f(w_0, z) > 0$ یا $f(w_0, z) < 0$.

اگر $f(w_0, z) > 0$ ، آنگاه با توجه به قضیه ۳.۲.۴ داریم

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x, z) \|w_0, z\|^2 + \langle -f(w_0, z)x, w_0 | z \rangle_+ \\ &= f(x, z) \|w_0, z\|^2 + f(w_0, z) \langle -x, w_0 | z \rangle_+ \\ &= f(x, z) \|w_0, z\|^2 + \langle -x, f(w_0, z)w_0 | z \rangle_+ \\ &= f(x, z) \|w_0, z\|^2 - \langle x, f(w_0, z)w_0 | z \rangle_- \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $x \in X$ و $z \in X \setminus \langle x_0 \cup (\ker f)_G \rangle$ داریم

$$f(x, z) \geq \langle x, \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2} | z \rangle_- \quad (5.4)$$

به روش مشابه می‌توان نشان داد به ازای هر $x \in X$ و $z \in X \setminus \langle x_0 \cup (\ker f)_G \rangle$ داریم

$$f(x, z) \leq \langle x, \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2} | z \rangle_+ \quad (6.4)$$

اگر $f(x, y) < 0$ در این صورت با توجه به اینکه

$$- \langle x, y | z \rangle_- = \langle x, -y | z \rangle_+$$

و با روش مشابه به حالت قبل می‌توان ثابت کرد که؛

$$f(x, y) \geq \langle x, \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2} | z \rangle_-$$

$$f(x, z) \leq \langle x, \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2} | z \rangle_+.$$

بنابراین در هر حالت به ازای هر $x \in X$ و $z \in X \setminus \langle x_0 \cup (\ker f)_G \rangle$ داریم:

$$\langle x, \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2} | z \rangle_- \leq f(x, z) \leq \langle x, \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2} | z \rangle_+ \quad (7.4)$$

اگر قرار دهیم $u = \frac{f(w_0, z_0)w_0}{\|w_0, z\|^2}$ ، آنگاه با استفاده از نابرابری (۷.۴) به ازای هر $x, z \in X$ داریم؛

$$\begin{aligned} f(x, z) \geq \langle x, u | z \rangle_- &= - \langle x, u | z \rangle_+ \\ &\geq - \|x, z\| \|u, z\| \end{aligned}$$

و نیز داریم؛

$$f(x, z_0) \leq \langle x, u | z \rangle_+ \leq \|x, z\| \|u, z\|$$

بنابراین به ازای هر $x \in X$ و $z \in G$ داریم

$$- \|u, z\| \leq \frac{f(x, z)}{\|x, u\|} \leq \|u, z\|$$

و این یعنی

$$\|f\|_G \leq \|u, z\|$$

از طرف دیگر

$$\|f\|_G \geq \frac{f(u, z)}{\|u, z\|} \geq \frac{\langle u, u|z \rangle_-}{\|u, z\|} = \|u, z\|$$

بنابراین داریم

$$\|f\|_G = \|u, z\| = \frac{|f(w_\circ, z)|}{\|w_\circ, z\|}$$

با توجه به اینکه $f(w_\circ, z) = f(x_\circ, z)$ داریم

$$\|f\|_G = \frac{|f(x_\circ, z)|}{\|x_\circ - g_\circ, z\|} = \frac{f(x_\circ, z)\lambda_\circ}{\|x_\circ - g_\circ, z\|}$$

پس

$$f(x, z) = \lambda \|f\|_G \|x_\circ - g_\circ, z\|$$

حال با توجه به (۷.۴) داریم

$$\|f\|_G < x, \frac{\lambda_\circ(x_\circ - g_\circ)}{\|x_\circ - g_\circ, z\|} |z \rangle_- \leq f(x, z) \leq \|f\|_G < x, \frac{\lambda_\circ(x_\circ - g_\circ)}{\|x_\circ - g_\circ, z\|} |z \rangle_+.$$

(۱) $\Leftarrow$ (۲) : فرض کنیم (۲) برقرار باشد. در این صورت داریم

$$< x, \frac{\lambda_\circ(x_\circ - g_\circ)}{\|x_\circ - g_\circ, z\|} |z \rangle_- \leq \circ \leq < x, \frac{\lambda_\circ(x_\circ - g_\circ)}{\|x_\circ - g_\circ, z\|} |z \rangle_+$$

که در آن $x \in (ker(f))_G$. در این صورت با استفاده از قضیه ۱.۲.۴ داریم

$$\frac{\lambda_\circ(x_\circ - g_\circ)}{\|x_\circ - g_\circ, z\|} \perp_z^{BJ} (ker(f))_G$$

اگر $\lambda_\circ > \circ$ آنگاه

$$x_\circ - g_\circ \perp_z^{BJ} (ker(f))_G$$

بنابراین

$$g_\circ \in P_{(ker f)_G}^z(x_\circ).$$

اگر $\lambda_\circ < \circ$ آنگاه

$$-(x_\circ - g_\circ) \perp_z^{BJ} (ker f)_G$$

یا به طور معادل

$$x_\circ - g_\circ \perp_z^{BJ} -(ker f)_G.$$

با توجه به اینکه $-(ker f)_G = (ker f)_g$ بنابراین داریم

$$g_\circ \in P_{(ker f)_G}^z(x_\circ).$$

□

قضیه ۶.۲.۴. فرض کنید X فضایی ۲-نرم دار، $f \in (X \times X)^*$ ، $z \in X$ و $w \in X \setminus \{0\}$ مستقل خطی از z باشند. در این صورت عبارات زیر معادل اند:

(۱) به ازای هر $x \in X$

$$\langle x, w|z \rangle_- \leq f(x, z) \leq \langle x, w|z \rangle_+.$$

(۲) عنصر w تابع درجه دوم زیر را حداقل می کند.

$$\begin{cases} F_f : X \rightarrow \mathbb{R} \\ F_f(u) = \|u, z\|^2 - 2f(u, u) \end{cases}$$

برهان. (۲) $\leftarrow$ (۱) فرض کنید (۱) برقرار باشد. قرار می دهیم $x = w$ در این صورت از (۱) داریم

$$\langle w, w|z \rangle_- \leq f(w, w) \leq \langle w, w|z \rangle_+$$

بنابراین

$$f(w, w) = \|w, z\|^2.$$

حال $u \in X$ را دلخواه در نظر می گیریم. داریم؛

$$\begin{aligned} F_f(u) - F_f(w) &= \|u, z\|^2 - 2f(u, u) - \|w, z\|^2 - 2f(w, w) \\ &= \|u, z\|^2 - 2f(u, u) + \|w, z\|^2 \\ &\geq \|u, z\|^2 - 2\langle u, w|z \rangle_+ + \|w, z\|^2 \\ &\geq \|u, z\|^2 - 2\|u, z\|\|w, z\| + \|w, z\|^2 \\ &= (\|u, z\| - \|w, z\|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین

$$F_f(u) \geq F_f(w)$$

چون u دلخواه انتخاب شده بود بنابراین w ، F_f را حداقل می کند.

(۱) $\leftarrow$ (۲) فرض کنید w ، F_f را حداقل کند در این صورت به ازای هر $u \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم

$$F_f(w + \lambda u) - F_f(w) \geq 0.$$

از طرفی دیگر

$$F_f(w + \lambda u) - F_f(w) = \|w + \lambda u, z\|^2 - \|w, z\|^2 - 2\lambda f(u, w)$$

بنابراین

$$2\lambda f(u, w) \leq \|w + \lambda u, z\|^2 - \|w, z\|^2. \quad (۸.۴)$$

حال فرض کنید $\lambda > 0$ باشد. آنگاه با استفاده از (۸.۴) داریم

$$f(u, u) \leq \frac{\|w + \lambda u, z\|^2 - \|w, z\|^2}{2\lambda}$$

بنابراین

$$f(u, u) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|w + \lambda u, z\|^2 - \|w, z\|^2}{2\lambda} = \langle u, w|z \rangle_+$$

حال اگر در نامساوی بالا u را به $-u$ تبدیل کنیم در این صورت

$$f(u, u) \geq -\langle -u, w|z \rangle_+ = \langle u, w|z \rangle_-$$

لذا داریم

$$\langle u, w|z \rangle_- \leq f(u, u) \leq \langle u, w|z \rangle_+.$$

□

ملاحظه ۱.۲.۴. اگر $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای ۲-نرم دار و $f \in (X \times X)^*$ و $w \in X \setminus \{0\}$ و $z \in X$ مستقل خطی از w باشند آنگاه $\langle x, w|z \rangle_+ = \langle x, w|z \rangle_-$ و x ، $F_f(w)$ را کمینه^۸ می کند اگر و تنها اگر $f(x, x)$ دارای نمایش زیر باشد

$$f(x, x) = \langle x, w|z \rangle_p$$

که در آن $p \in \{+, -\}$.

قضیه ۷.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضایی ۲-نرم دار، H زیر فضایی بسته از X ، $x_0 \in X \setminus H$ و $h_0 \in H$ باشند. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:

(۱) به ازای هر $z \in X \setminus \langle x_0 \cup H \rangle$

$$h_0 \in P_H^z(x_0)$$

(۲) به ازای هر $f \in ((H \oplus \langle x_0 \rangle) \times \langle b \rangle)^*$ با $\ker f = H$ ، داریم

$$\|f\|_{H \oplus \langle x_0 \rangle} \langle x, \frac{\lambda_0(x_0 - h_0)}{\|x_0 - h_0, z\|} |z \rangle_- \leq f(x, z) \leq \|f\|_{H \oplus \langle x_0 \rangle} \langle x, \frac{\lambda_0(x_0 - h_0)}{\|x_0 - h_0, z\|} |z \rangle_+$$

که در آن $b \in H \oplus \langle x_0 \rangle$.

برهان. اگر قضیه ۵.۲.۴ برای فضای ۲-نرم دار $X := H \oplus \langle x_0 \rangle$ به کار ببریم $(x_0 \notin H)$ آنگاه قضیه ثابت خواهد شد.

□

تعریف ۸.۲.۴. فضای خطی حقیقی X همراه با ترتیب $\leq$ را لاتیسیس دار^۹ گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر دو عنصر $x, y \in X$ ، مجموعه $\{x, y\}$ دارای سوپریم و اینفیمم باشد. $\sup(x, y)$ و $\inf(x, y)$ با نمادهای زیر نمایش داده می شود:

$$x \wedge y := \inf(x, y) \quad , \quad x \vee y := \sup(x, y)$$

خواص زیر برقرار است:

(۱) به ازای هر $x, y, z \in X$ ، اگر $x \leq y$ آنگاه $x + z \leq y + z$.

(۲) به ازای هر $x \in X$ و $t \in \mathbb{R}^+$ ، اگر $x \geq 0$ آنگاه $tx \geq 0$.

قسمت مثبت^{۱۰}، قسمت منفی^{۱۱} و قدرمطلق^{۱۲} x به صورت زیر تعریف می شود؛

$$x^+ := x \vee 0 \quad , \quad x^- := (-x) \vee 0 \quad , \quad |x| := x \vee (-x)$$

تعریف ۹.۲.۴. نرم $\|\cdot\|$ را روی فضای لاتیسیس دار X ، نرم لاتیسی^{۱۳} گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ ، گزاره زیر برقرار باشد.

$$|x| < |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

تعریف ۱۰.۲.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ همراه با ترتیب $\leq$ باشد که در آن $(x, \leq)$ لاتیسیس دار و نرم X لاتیسی است. در این صورت X را فضای باناخ لاتیسی گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۴. عنصر $1 \in X$ را واحد قوی^{۱۴} گوییم اگر به ازای هر $x \in X$ ، $\lambda > 0$ در $\mathbb{R}$ موجود باشد که $x \leq \lambda 1$

با استفاده از واحد قوی می توانیم یک نرم به صورت زیر روی X تعریف کنیم

$$\|x\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid |x| \leq \lambda 1\}$$

در این صورت گویی به مرکز x و شعاع r با نماد $B(x, r)$ به صورت زیر تعریف می شود؛

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\} \\ &= \{y \in X \mid x - r1 \leq y \leq x + r1\} \end{aligned}$$

و نیز داریم

$$|x| \leq \|x\| 1$$

lattice^۹
positive part^{۱۰}
negative part^{۱۱}
absolute value^{۱۲}
lattice norm^{۱۳}
strong unite^{۱۴}

تعریف ۱۲.۲.۴. زیر مجموعه W را از فضای مرتب X رو به پایین^{۱۵} گوییم هرگاه گزاره زیر برقرار باشد

$$(w \in W, x \leq w) \Rightarrow (x \in W)$$

ما در این فصل تعریف جدیدی از ۲-نرم تعمیم یافته ارائه می‌دهیم و آن را g -۲-نرم^{۱۶} می‌نامیم. در مرحله بعدی فضای g -۲-باناخ لاتیتی^{۱۷} را تعریف و نظریه ۲-بهترین تقریب را برای مجموعه‌های رو به پایین در این فضاها بررسی می‌کنیم، که ۲-نرم این فضا توسط ۱ قوی القا شده است. ثابت خواهیم کرد که مجموعه‌های بسته در این فضاها ۲-پروکسیمال هستند. که این بدین معناست که یک ۲-بهترین تقریب برای هر عنصر x از این مجموعه‌ها وجود دارد.

اکنون تعریف جدیدی برای ۲-نرم تعمیم یافته به صورت زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۴. فرض کنید X و Y دو فضای خطی باشند. تابع

$$\|.,.\| : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$$

را g -۲-نرم روی $X \times Y$ گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) به ازای هر عدد $x \neq 0$ در X ، $y \neq 0$ موجود باشد که

$$\|x, y\| \neq 0$$

(۲) به ازای هر عدد حقیقی $\alpha \in \mathbb{R}$ و $(x, y) \in X \times Y$ داشته باشیم

$$\|x + \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\| = \|x, \alpha y\|$$

(۳) به ازای هر $x \in X$ ، $y_1, y_2 \in Y$ داشته باشیم

$$\|x, y_1 + y_2\| \leq \|x, y_1\| + \|x, y_2\|$$

(۴) به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $y \in Y$ داشته باشیم

$$\|x_1 + x_2, y\| = \|x_1, y\| + \|x_2, y\|$$

در این صورت $(X \times Y, \|.,.\|)$ را یک فضای g -۲-نرم دار گوییم. اگر $X = Y$ در این صورت فضای $(X, \|.,.\|)$ را با $(X, \|.,.\|)$ نمایش می‌دهیم.

^{۱۵} downward

^{۱۶} g-2-norm

^{۱۷} Banach lattice

فرض کنید X و Y دو فضای خطی حقیقی باشند و $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ به ترتیب نیم نرم‌هایی^{۱۸} روی X و Y باشند. در این صورت $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای g -۲-نرم دار است. که در آن

$$\|x, y\| = \|x\|_1 \|y\|_2$$

تعریف ۱۴.۲.۴. همگرایی دنباله‌ها و کشی بودن دنباله در فضای g -۲-نرم دار همانند فضاهای g -۲-نرم دار تعریف می‌شوند. فضای g -۲-نرم دار $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ را g -۲-باناخ گوییم هرگاه هر دنباله کشی در این فضا همگرا باشد.

ملاحظه ۲.۲.۴. اگر X و Y دو فضای لاتیس دار باشند که به ترتیب دارای واحدهای قوی 1_X و 1_Y می‌باشند. در این صورت این واحدهای قوی g -۲-نرم روی $\|\cdot, \cdot\|$ را روی $X \times Y$ القا می‌کند که در آن

$$\begin{cases} \|\cdot, \cdot\| : X \times Y \rightarrow [0, +\infty) \\ \|x, y\| = \|x\|_{1_X} \|y\|_{1_Y} \end{cases} \quad (9.4)$$

فرض کنید $x_0 \in X$ ، $b \in Y$ و $\epsilon > 0$ دلخواه باشند. در این صورت $V_\epsilon^b(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_b^\epsilon(x_0) = \{x \in X \mid \|x - x_0, b\| \leq \epsilon\} \quad (10.4)$$

$$= \{x \in X \mid x_0 - \frac{\epsilon 1_X}{\|b\|} \leq x \leq x_0 + \frac{\epsilon 1_X}{\|b\|}\} \quad (11.4)$$

خانواده $\{V_a^\epsilon(y)\}_{\epsilon > 0, y \in Y, x \in X}$ یک زیر پایه برای یک توپولوژی موضعاً محدب^{۱۹} روی X القا می‌کند. به همین ترتیب به ازای هر $a \in X$ و $y_0 \in Y$ و $\epsilon \geq 0$ ، $V_a^\epsilon(y_0)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} V_a^\epsilon(y_0) &= \{y \in Y \mid \|x, y - y_0\| \leq \epsilon\} \\ &= \{y \in Y \mid y_0 - \frac{\epsilon 1_Y}{\|a\|} \leq y \leq x_0 + \frac{\epsilon 1_Y}{\|a\|}\}. \end{aligned}$$

بنابراین $\{V_a^\epsilon(y)\}_{\epsilon > 0, a \in X, y \in Y}$ نیز تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی موضعاً محدب روی Y می‌دهد. بنابراین فضای $X \times Y$ را می‌توانیم با توپولوژی حاصلضرب^{۲۰} در نظر بگیریم. که این توپولوژی نیز موضعاً محدب است.

تعریف ۱۵.۲.۴. فرض کنید X و Y دو فضای لاتیس دار و $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای g -۲-نرم دار باشند. در این صورت $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ را g -۲-نرم دار لاتیزی گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $y_1, y_2 \in Y$ گزاره زیر برقرار باشد.

$$(|x_1| \leq |x_2| \quad , \quad |y_1| \leq |y_2|) \Rightarrow (\|x_1, y_1\| \leq \|x_2, y_2\|)$$

^{۱۸}semi norm
^{۱۹}locally convex
^{۲۰}product topology

فضای g -۲-باناخ لاتیزی یک فضای g -۲-باناخ حقیقی مانند X همراه با ترتیب $\leq$ است. که در آن $(X, \leq)$ فضای لاتیس دار و X فضای g -۲-نرم لاتیس دار است.

ما در این فصل ۲-بهترین تقریب را برای فضای g -۲-نرم دار $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ بررسی می‌کنیم که $\|\cdot, \cdot\|$ توسط واحد قوی $\mathbf{1}_X$ القا می‌شود.

قضیه ۸.۲.۴. فرض کنید w یک زیر مجموعه رو به پایین از فضای g -۲-نرم دار X ، W° درون W ^{۲۱} و $x \in W$ باشند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر $x \in X$ آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $x - \epsilon \mathbf{1} \in W^\circ$.

(۲) $W^\circ = \{x \in X \mid \exists \epsilon > 0; x + \epsilon \mathbf{1} \in W\}$

برهان. فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه و $x \in W$. در این صورت به ازای $a \in X$

$$\begin{aligned} V_{\epsilon\|a\|}^a(x - \epsilon \mathbf{1}) &= \{y \in X \mid \|y - (x - \epsilon \mathbf{1}), a\| < \|a\|\epsilon\} \\ &= \{y \in X \mid x - \epsilon \mathbf{1} < y < x\} \end{aligned}$$

بنابراین چون W روبه پایین است و $x \in W$ لذا

$$V_{\epsilon\|a\|}^a(x - \epsilon \mathbf{1}) \subseteq W$$

لذا

$$x - \epsilon \mathbf{1} \in W^\circ.$$

حال فرض کنید $x \in W^\circ$ در این صورت $a \in X$ و $\epsilon > 0$ موجود است که

$$V_{\epsilon\|a\|}^a(x) \subseteq W$$

بنابراین

$$\{y \in X \mid x - \epsilon \mathbf{1} < y < x + \epsilon \mathbf{1}\} \subseteq W$$

بنابراین $x + \epsilon \mathbf{1} \in W$.

بالعکس، فرض کنید $\epsilon > 0$ موجود باشد که $x + \epsilon \mathbf{1} \in W$ بنابراین بنا به قسمت قبل

$$x = (x + \epsilon \mathbf{1}) - \epsilon \mathbf{1} \in W^\circ.$$

□

ملاحظه ۳.۲.۴. فرض کنید W یک زیر مجموعه روبه پایین بسته از فضای g -۲-نرم دار X ، $bd(w)$ مرز^{۲۲} W و $w \in W$ باشند. آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند.

$$(۱) \quad w \in bd(W)$$

$$(۲) \quad \text{به ازای هر } \epsilon > 0, w + \epsilon 1 \notin W.$$

برهان. فرض کنید (۱) برقرار باشد ولی (۲) درست نباشد. در این صورت $\epsilon > 0$ موجود است که $x + \epsilon 1 \in W$ پس بنا به قضیه قبل $x \in W^\circ$ و این متناقض با (۱) است. بنابراین (۲) صادق است.

بالعکس، فرض کنید $w \in W$ و (۲) برقرار باشد. بنابراین با استفاده از قضیه قبل $w \notin W^\circ$. با توجه به اینکه W بسته است داریم

$$\bar{W} = W$$

□

$$\text{پس } w \in bd(W)$$

تعریف ۱۶.۲.۴. فرض کنید $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای g -۲-نرم دار، $W_1 \subset X$ و $W_2 \subset Y$ باشند. در این صورت $W_1 \times W_2$ را g -۲-پروکسیمال گوییم هرگاه به ازای هر عنصر $(x, y) \in X \times Y$ عنصر $(w_\circ, g_\circ)$ در $W_1 \times W_2$ یافت شود که:

$$\|x - w_\circ, y - g_\circ\| = \inf_{(w, g) \in W_1 \times W_2} \|x - w, y - g\|.$$

در این حالت $(w_\circ, g_\circ)$ را g -۲-بهترین تقریب از (x, y) در $W_1 \times W_2$ گوییم. مجموعه $P_{w_1 \times w_2}^{(2)}(x, y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_{W_1 \times W_2}^{(2)}(x, y) = \{(w_\circ, g_\circ) \in W_1 \times W_2 \mid \|x - w_\circ, y - g_\circ\| = \inf_{(w, g) \in W_1 \times W_2} \|x - w, y - g\|\}.$$

تعریف ۱۷.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای g -۲-نرم دار و $G \subseteq X$ و $x \in X \setminus \bar{G}$ و $a \in X$. در این صورت $g_\circ \in G$ را g -۲- a بهترین تقریب x در G گوییم هرگاه

$$\|x - g_\circ, a\| = \inf_{g \in G} \|x - g, a\|$$

به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_G^a(x) = \{g_\circ \in G \mid \|x - g_\circ, a\| = \inf_{g \in G} \|x - g, a\|\}$$

اگر $P_G^a(x) \neq \emptyset$ در این صورت G را g -۲- a پروکسیمال گوییم.

لم ۲۰.۲.۴. فرض کنید W یک زیر مجموعه رو به پایین از فضای ۲-باناخ لاتیتیسی X باشد. آنگاه به ازای هر $a \in X$ ، W ، g -۲- a پروکسیمال است.

برهان. فرض کنید $x \in X \setminus \bar{W}$ و

$$\epsilon_a = \inf\left\{\frac{\|x_\circ - w, a\|}{\|a\|}; w \in W\right\} = \inf\{\|x_\circ, w\| \mid w \in W\}$$

در این صورت به ازای هر $\delta > 0$ ، $w_\delta \in W$ موجود است که

$$\frac{\|x_0 - w_\delta, a\|}{\|a\|} \leq \epsilon_a + \delta.$$

بنابراین

$$-(\epsilon_a + \delta)\|a\| \leq w_\delta - x_0 \leq (\epsilon_a + \delta)\|a\|$$

فرض کنید $w_0 = x_0 - \epsilon_a\|a\|$ آنگاه

$$\|x_0 - w_0\| = \|\epsilon_a\| = \epsilon_a = \inf_{w \in W} \|w - x_0\|$$

و بنابراین

$$w_0 - \delta\|a\| = x_0 - (\epsilon_a\|a\| + \delta\|a\|) \leq w_\delta.$$

چون $w_\delta \in W$ و به پایین و $w_\delta \in W$ است، بنابراین $w_0 - \delta\|a\| \in W$. چون δ دلخواه انتخاب شده است پس

$$w_0 \in bd(W).$$

با توجه به اینکه W بسته است پس

$$w_0 \in W$$

داریم

$$\|x_0 - w_0\| \|a\| = \inf_{w \in W} \|w - x_0, a\|$$

پس

$$\|x_0 - w_0, a\| = \inf_{w \in W} \|w - x_0, a\|$$

بنابراین

$$w_0 \in P_w^a(x_0).$$

□

قضیه ۹.۲.۴. فرض کنید W زیر مجموعه رو به پایین بسته از X و $x_0 \in X$ باشد. در این صورت عنصر $w_0 := \min P_W^a(x_0)$ موجود است و برابر است با

$$w_0 = x_0 - \frac{\epsilon_a}{\|a\|}\|a\| \in W$$

که در آن

$$\epsilon_a = \inf_{w \in W} \|w - x_0, a\|.$$

برهان. فرض کنید $x_0 \in W$ در این صورت نتیجه واضح است. حال فرض کنید $x_0 \notin W$ و آنگاه $\epsilon_a = \inf_{w \in W} \|w - x_0, a\|$

$$w_0 = x_0 - \frac{\epsilon_a}{\|a\|}\|a\| \in W.$$

از طرفی دیگر اگر $x \in V_{\epsilon_a}^a(x_0)$ آنگاه

$$x \geq x_0 - \frac{\epsilon}{\|a\|} \mathbf{1} = w_0$$

بنابراین

$$w_0 = \min V_{\epsilon_a}^a(x_0).$$

حال فرض کنید $w \in P_W^a(x_0)$ دلخواه باشد. آنگاه

$$\|x_0 - w, a\| = \epsilon_a$$

و بنابراین

$$w \in V_{\epsilon_a}^a(x_0).$$

با توجه به اینکه $w_0 = x_0 - \frac{\epsilon_a}{\|a\|} \mathbf{1}$ بنابراین

$$w_0 = \min P_W^a(x_0).$$

□

ملاحظه ۴.۲.۴. فرض کنید W زیر مجموعه رو به پایین بسته از X و $x_0 \in X$ باشد. آنگاه

$$w_0 := \min P_W^a(x_0) \leq x_0.$$

برهان. فرض کنید $x_0 < w_0$ ، با توجه به اینکه W رو به پایین است پس $x_0 \in W$ بنابراین

$$x_0 \in P_W^a(x_0)$$

لذا

$$w_0 \leq x_0.$$

□

قضیه ۱۰.۲.۴. [۵۰] فرض کنید W یک زیر مجموعه رو به پایین بسته از فضای نرم‌دار لاتیزی X باشد و $x \in X$ در این صورت

$$\inf_{w \in W} \|x - w\| = \min\{\lambda \geq 0 \mid x - \lambda \mathbf{1} \in W\} \quad (12.4)$$

ملاحظه ۵.۲.۴. فرض کنید W زیر مجموعه رو به پایین بسته از فضای g -۲-نرم‌دار لاتیزی X باشد. آنگاه

$$\inf_{w \in W} \|x - w, a\| = \min\{\lambda > 0 \mid x - \frac{\lambda}{\|a\|} \mathbf{1} \in W\}$$

قضیه ۱۱.۲.۴. فرض کنید X و Y فضاهای لاتیس دار و $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای g -۲-نرم دار لاتیزی باشد که نرم آن توسط 1_X و 1_Y القا شده باشد. فرض کنید W_1 و W_2 به ترتیب دو زیر مجموعه روبه پایین بسته از X و Y باشد. آنگاه به ازای هر $(x, y) \in X \times Y \setminus W_1 \times W_2$ ، $(a, b) \in X \times Y \setminus W_1 \times W_2$ ، عناصر $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$ موجودند که

$$\|x - w_1, b\| = \inf_{\alpha \in W_1} \|x - \alpha, b\|$$

$$\|a, y - w_2\| = \inf_{\alpha \in W_2} \|x, y - \alpha\|.$$

برهان. اثبات این قضیه، مانند اثبات لم ۲.۲.۴ است. $\square$

قضیه ۱۲.۲.۴. فرض کنید $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای g -۲-نرم دار لاتیزی و W_1 و W_2 به ترتیب زیر مجموعه‌ای رو به پایین X و Y باشد. آنگاه $W = W_1 \times W_2$ -۲-پروکسیمال است.

برهان. فرض کنید $(x, y) \in X \times Y \setminus W$. آنگاه

$$\inf_{(\alpha, \beta) \in W} \|x - \alpha, y - \beta\| = \inf_{\beta \in W_2} \left(\inf_{\alpha \in W_1} \|x - \alpha, y - \beta\| \right)$$

با استفاده از قضیه قبل $w_1 \in W_1$ موجود است که

$$\inf_{\beta \in W_2} \left(\inf_{\alpha \in W_1} \|x - \alpha, y - \beta\| \right) = \inf_{\beta \in W_2} \|x - w_1, y - \beta\|$$

مجدداً با استفاده از قضیه قبل $w_2 \in W_2$ موجود است که

$$\inf_{\beta \in W_2} \|x - w_1, y - \beta\| = \|x - w_1, y - w_2\|$$

بنابراین

$$\inf_{(\alpha, \beta) \in W_1 \times W_2} \|x - \alpha, y - \beta\| = \|x - w_1, y - w_2\|$$

بنابراین $P_{W_1 \times W_2}^2(x, y) \neq \emptyset$. $\square$

ملاحظه ۶.۲.۴. فرض کنید $(x, y) \in X \times Y$ ، $w_0 = P_W^b(x_0)$ ، $v_0 = a_V^b(y_0)$ و $W \times V \subseteq X \times Y$. اگر V و W زیر مجموعه‌های بسته و روبه پایین باشند در این صورت به ازای هر $a \neq 0$ و هر $b \neq 0$ داریم

$$(x_0, y_0) \geq \left(\frac{w}{b}, \frac{w}{a} \right)$$

برهان. با توجه به ملاحظه ۵.۲.۴ واضح است. $\square$

تعریف ۱۸.۲.۴. زیر مجموعه رو به پایین W از X را اکیداً رو به پایین^{۲۳} گوئیم اگر به ازای هر نقطه مرزی w_0 از W ، نامساوی $w > w_0$ را نتیجه دهد.

^{۲۳}strictly downward

مثال ۱.۲.۴. [۵۰] فرض کنید f تابعی پیوسته و اکیداً صعودی و $c \in \mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$S_c(f) = \{x \in X | f(x) \leq c\}$$

اکیداً رو به پایین است.

تعریف ۱۹.۲.۴. فرض کنید W یک زیر مجموعه رو به پایین باشد. W را اکیداً رو به پایین در نقطه $w' \in bdW$ گوئیم. اگر به ازای هر $w_0 \in bd(W)$ که $w_0 \leq w'$ ، گزاره زیر درست باشد.

$$w > w_0 \Rightarrow w \notin W$$

قضیه ۱۳.۲.۴. [۵۰] اگر W یک مجموعه رو به پایین بسته باشد. در این صورت W در bdW اکیداً رو به پایین است اگر و فقط اگر

$$(۱) \text{ اگر } w > w' \text{ آنگاه } w \in W.$$

$$(۲) \text{ اگر } w_0 \leq w' \text{ و } w_0 \in bdW \text{ آنگاه } w_0 = w'.$$

تعریف ۲۰.۲.۴. فرض کنید $(X_1 \times X_2, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای g -۲-نرم دار، W زیر مجموعه‌ای رو به پایین از X_1 و $b \in X_2$. $w' \in bd(W)$ را نقطه g -۲- b -چبیشف گوئیم هرگاه به ازای هر $w_0 \in bdW$ که $w_0 \leq w'$ و به ازای هر $x_0 \notin W$ که $w_0 \in P_W^b(x_0)$ داشته باشیم، $P_W^b(x_0) = w_0$. فرض کنید $(X_1, \leq_1)$ و $(X_2, \leq_2)$ دو مجموعه‌ی مرتب باشند. می‌توانیم ترتیب $\leq$ را روی $X_1 \times X_2$ به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(x_1, x_2) \leq (x'_1, x'_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq x'_1, x_2 \leq x'_2)$$

این ترتیب را ترتیب حاصل ضربی^{۲۴} می‌گوئیم.

تعریف ۲۱.۲.۴. فرض کنید $(X_1 \times X_2, \|\cdot, \cdot\|)$ یک فضای g -۲-نرم دار باشد، که در آن $(X_1, \leq_1)$ و $(X_2, \leq_2)$ مرتب می‌باشند. $X_1 \times X_2$ را با ترتیب حاصلضربی $\leq$ در نظر بگیرید. فرض کنید W زیر مجموعه رو به پایین از $X_1 \times X_2$ باشند. نقطه $(w'_1, w'_2) \in bdW$ را نقطه g -۲-چبیشف گوئیم هرگاه به ازای هر $(w_1, w_2) \in bdW$ که $(w_1, w_2) \leq (w'_1, w'_2)$ و هر $(x_1, x_2) \notin W$ که $(w_1, w_2) \in P_W^2(x_1, x_2)$ داشته باشیم

$$P_W^2(x_1, x_2) = (w_1, w_2).$$

قضیه ۱۴.۲.۴. فرض کنید $(X_1 \times X_2, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای g -۲-نرم دار، $b \in X_2$ ، W زیر مجموعه رو به پایین از X_1 و $\leq$ ترتیبی روی X_1 باشند. آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:

$$(۱) \text{ نقطه } w' \text{ نقطه } g-b-۲\text{-چبیشف از } W \text{ است.}$$

(۲) W در نقطه w' ، اکیداً روبه پایین است.

برهان. فرض کنید (۱) برقرار باشد و w' اکیداً روبه پایین نباشد. در این صورت $w \in bdW$ موجود است که $w < w'$ و $a \in w$ موجود است که $a > w$. فرض کنید

$$r \geq \|a - w, b\| > 0$$

بنابراین

$$a - w \leq \|a - w\| \leq \|a - w\| \leq \frac{r}{\|b\|}, \quad (13.4)$$

لذا

$$a \leq \frac{r}{\|b\|} + w \quad (14.4)$$

قرار می‌دهیم

$$x_0 = \frac{r}{\|b\|} + w. \quad (15.4)$$

ادعا می‌کنیم

$$d(x_0, W) = \frac{r}{\|b\|} \quad (16.4)$$

فرض کنید چنین نباشد. در این صورت عنصر $y \in W$ موجود است که

$$\|x_0 - y\| \leq \frac{r}{\|b\|}$$

در این صورت $r_0 \in (0, \frac{r}{\|b\|})$ موجود است که

$$\|x_0 - y\| < r_0$$

بنابراین

$$x_0 \leq y + r_0$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی (۱۵.۴) داریم

$$x_0 = \frac{r}{\|b\|} + w \leq y + r_0.$$

پس

$$w + \lambda_0 \leq y \quad (\lambda_0 = \frac{r}{\|b\|} - r_0)$$

و بنابراین با استفاده از قضیه ۸.۲.۴ قسمت ۲ داریم $w_0 \in W^\circ$. که متناقض با $w \in bd(W)$ است. بنابراین

$$d(x_0, W) = \frac{r}{\|b\|} = \|x_0 - w\|$$

لذا

$$d(x_0, W) \|b\| = \|x_0 - w\| \|b\|$$

پس

$$\inf_{\alpha \in W} \|x_0 - \alpha, b\| = \|x_0 - w, b\|.$$

در نتیجه $w \in P_W^b(x_0)$.

از طرف دیگر بنا به نامساوی (۱۴.۴) داریم

$$a \leq \frac{r}{\|b\|} + w = x_0 \quad a > w$$

بنابراین

$$0 \leq x_0 - a \leq \frac{r}{\|b\|}$$

و این یعنی

$$\|x_0 - a\| \leq \|x_0 - w\| = \frac{r}{\|b\|} = d(x_0, W) \leq \|x_0 - \alpha\|$$

پس

$$\|x_0 - a\| = d(x_0, W)$$

در نتیجه

$$\inf_{\alpha \in W} \|x_0 - \alpha, b\| = \|x_0 - a, b\|$$

بنابراین

$$a \in P_W^B(x_0) \quad (a \neq w_0).$$

که این امکان پذیر نمی باشد. زیرا w' نقطه $g - b - 2$ چبیشف است. بالعکس، فرض کنید W در $bd(W)$ $w' \in bd(W)$ اکیداً رو به پایین باشد. در این صورت به ازای هر نقطه $w_0 \leq w'$ که $w_0 \in bd(W)$ داریم $w_0 = w'$. بنابراین کافی است ثابت کنیم که به ازای هر $x_0 \notin W$ که $P_W^b(x_0) = w'$ ، $w' \in P_W^b(x_0)$ فرض کنید x_0 چبیشف عنصری باشد. با استفاده از قضیه ۹.۲.۴، کوچکترین عنصر $P_W^b(x_0)$ موجود است فرض کنید، w_0 این عنصر کمینه باشد. داریم

$$w_0 \in bd(W) \quad , \quad w_0 \leq w'$$

بنابراین $w_0 = w'$. با توجه به اینکه W در W اکیداً رو به پایین است بنابراین به ازای هر $w \in P_W^b(x_0) \subseteq W$ داریم $w \geq w'$. با توجه به قضیه ۱۳.۲.۴ به ازای هر $w \in P_W^b(x_0)$ ، $w = w'$. بنابراین

$$P_W^b(x_0) = w'$$

□

چون x_0 دلخواه بود پس w' نقطه $g - b - 2$ چبیشف است.

قضیه ۱۵.۲.۴. فرض کنید $(X_1 \times X_2, \|\cdot, \cdot\|)$ فضای g -۲نرم دار، X_1 و X_2 مجموعه‌های مرتب و $\leq$ ترتیب حاصل ضربی روی $X_1 \times X_2$ باشد. در این صورت اگر $W_1 \times W_2$ زیر مجموعه ای رو به پایین از $X_1 \times X_2$ و اکیداً رو به پایین در (w'_1, w'_2) باشد. آنگاه (w'_1, w'_2) نقطه g -۲-چبیشف از $W_1 \times W_2$ است.

برهان. فرض کنید $W_1 \times W_2$ در (w'_1, w'_2) اکیداً رو به پایین باشد و نیز $(w'_1, w'_2) \in bd(W_1 \times W_2)$. آنگاه اگر $(w_1, w_2) \leq (w'_1, w'_2)$ داریم $(w_1, w_2) = (w'_1, w'_2)$. کافی است ثابت کنیم به ازای هر $(x_o, y_o) \notin W_1 \times W_2$

$$P_{W_1 \times W_2}^2(x_o, y_o) = (w'_1, w'_2).$$

با استفاده از قضیه ۹.۲.۴ کوچکترین عنصر $P_{W_1 \times W_2}^2(x_o, y_o)$ موجود است. فرض کنید

$$(\gamma_o, \lambda_o) = \min P_{W_1 \times W_2}^2(x_o, y_o).$$

در این صورت $(\gamma_o, \lambda_o) \in bd(W_1 \times W_2)$ و $(\gamma_o, \lambda_o) \leq (w'_1, w'_2)$. پس

$$(\gamma_o, \lambda_o) = (w'_1, w'_2).$$

حال چون $W_1 \times W_2$ در $(\gamma_o, \lambda_o) = (w'_1, w'_2)$ اکیداً رو به پایین است لذا به ازای هر $(w_1, w_2) \in P_{W_1 \times W_2}^2(x_o, y)$ داریم $(w_1, w_2) \geq (w'_1, w'_2)$. با استفاده از قضیه ۱۴.۲.۴ داریم

$$\forall (w_1, w_2) \in P_{W_1 \times W_2}^2(x_o, y_o) \quad , \quad (w_1, w_2) = (w'_1, w'_2).$$

بنابراین

$$P_{W_1 \times W_2}^2(x_o, y_o) = (w'_1, w'_2).$$

□

فصل ۵

بهترین نقطه تقریبی مشترک برای زوج های ϕ - کراندار

فرض کنید X یک فضای متریک (نرم‌دار)، T خود نگاشتی روی X باشد. در این صورت جواب‌های معادله زیر را نقاط ثابت تابع T گوییم.

$$Tx = x.$$

مجموعه نقاط ثابت تابع T را با $Fix(T)$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر

$$Fix(T) = \{x \in X \mid Tx = x\}.$$

حال فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های غیر تهی از فضای متریک X و $T : A \rightarrow B$ یک غیر خود نگاشت^۱ باشد. در این صورت ممکن است معادله $Tx = x$ دارای جواب نباشد. به عبارت دیگر داشته باشیم

$$\forall x \in A; \quad d(x, Tx) > \circ.$$

در چنین حالتی، یافتن نقطه ای مانند $x \in A$ که $d(x, Tx)$ کمینه شود بسیار مهم به نظر می‌رسد. نظریه بهترین نقطه تقریبی و بهترین تقریب در این راستا است. (به مراجع [۴] و [۶۷] رجوع شود).

^۱non-self mapping

تعریف ۱.۰.۵. فرض کنید X فضایی متریک، A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی از X و $T : A \rightarrow B$ یک غیر خود نگاشت باشد. در این صورت نقطه $x \in A$ را بهترین نقطه تقریبی^۲ نگاشت T گوییم هرگاه

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

که در آن

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

واضح است که اگر T یک خود نگاشت^۳ باشد. در این صورت مسأله بهترین نقطه تقریبی همان مسأله نقطه ثابت است.

شرایط انقباضی بسیاری برای T موجود است که در آن وجود بهترین نقطه تقریبی برای T را تضمین می‌کند. قضایا و تعاریف زیر برگرفته از مراجع [۳] و [۷۷] می‌باشند که به عنوان مثال ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۰.۵. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک X باشند. نگاشت $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ را نگاشت انقباضی^۴ دوره‌ای گوییم هرگاه ثابت $k \in (0, 1)$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$(1) \quad T(A) \subseteq B \text{ و } T(B) \subseteq A$$

$$(2) \quad \text{به ازای هر } x \in A \text{ و هر } y \in B \text{ داشته باشیم } d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + (1 - k)d(A, B)$$

قضیه ۱.۰.۵. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های محدب و بسته از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب^۵ X باشند. همچنین فرض کنید $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ نگاشت انقباضی دوره‌ای باشد. در این صورت نقطه $x_0 \in A$ موجود است که

$$d(x_0, Tx_0) = d(A, B).$$

قضیه ۲.۰.۵. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های محدب و فشرده^۶ از فضای باناخ X و $T : A \rightarrow B$ تابع پیوسته باشد و نیز داشته باشیم $T(A_0) \subseteq B_0$. در این صورت T دارای بهترین نقطه تقریبی است که در آن A_0 و B_0 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_0 := \{x \in A \mid d(x, y) = d(A, B) \text{ که } y \in B \text{ موجودند}\}$$

$$B_0 := \{y \in B \mid d(x, y) = d(A, B) \text{ که } x \in A \text{ موجودند}\}$$

^۲ best proximity point

^۳ self mapping

^۴ cyclic contraction

^۵ uniformly convex

^۶ compact

قضیه ۳.۰.۵. (اصل انقباض باناخ از نوع انقباض دوره‌ای) فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های بسته و فشرده از فضای متریک کامل (X, d) باشد و نیز $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ در خواص زیر صادق باشد:

$$(1) \quad T(A) \subseteq B \text{ و } T(B) \subseteq A$$

$$(2) \quad \text{برای } k \in (0, 1) \text{ موجود باشد که به ازای هر } x \in A \text{ و } y \in B \text{ داشته باشیم}$$

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

در این صورت $x \in A \cap B$ موجود است که $Tx = x$.

ما در این فصل به ارائه قضیه‌ای در خصوص وجود بهترین نقطه تقریبی مشترک^۷ خواهیم پرداخت. مفهوم بهترین نقطه تقریبی مشترک مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان می‌باشد. (مراجع [۶۹]، [۷۰] و [۸۰] را ببینید). فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X, d) باشند. غیر خود نگاشت‌های $T : A \rightarrow B$ و $S : A \rightarrow B$ را در نظر بگیرید. اگر $A \cap B \neq \emptyset$ در این صورت دستگاه معادلات

$$\begin{cases} Tx = x \\ Sx = x \end{cases}$$

ممکن است دارای جواب باشد در این صورت این جواب را نقطه ثابت مشترک^۸ T و S گوئیم. حال اگر معادلات $Tx = x$ و $Sx = x$ به طور هم‌زمان دارای جوابی مشترک نباشند در این صورت دنبال نقطه‌ای مانند x می‌گردیم که $d(x, Tx)$ و $d(x, Sx)$ به طور هم‌زمان کمینه گردد در واقع وجود جواب‌های تقریبی بهینه را برای دستگاه معادلات

$$\begin{cases} Tx = x \\ Sx = x \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم. این جواب تقریبی بهینه را بهترین نقطه تقریبی مشترک می‌گوئیم.

۱.۵ قضایا و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و A و B زیر مجموعه‌های ناتهی از X باشند. عنصر $x \in A$ را بهترین نقطه تقریبی مشترک غیر خود نگاشت‌های $T : A \rightarrow B$ و

^۷ best proximity point
^۸ common fixed point

$T : A \rightarrow B$ گوییم هرگاه

$$\begin{cases} d(x, Sx) = d(A, B) \\ d(x, Tx) = d(A, B). \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۵. تابع $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ را قیاسی^۹ گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) ϕ صعودی باشد.

(۲) به ازای هر $t \in [0, +\infty)$ دنباله $(\phi^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ همگرا به ۰ باشد.

تعریف ۳.۱.۵. خود نگاشت $T : X \rightarrow X$ را یک ϕ – انقباض^{۱۰} گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y))$$

که در آن ϕ یک تابع قیاسی است.

ملاحظه ۱.۱.۵. [۵۹] اگر ϕ تابع قیاسی باشد آنگاه

(۱) به ازای هر $t \in (0, +\infty)$ داریم

$$\phi(t) < t$$

(۲) $\phi(t) = 0$ اگر و تنها اگر $t = 0$.

قضیه ۱.۱.۵. [۵۹] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد که $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$. در این صورت اگر $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ کشی نباشد آنگاه $\epsilon > 0$ و دنباله‌های $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ و $(m(k))_{k \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی موجود اند که اگر $k \rightarrow \infty$ آنگاه دنباله‌های زیر به ϵ همگرا باشد.

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}),$$

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}), \dots$$

تعریف ۴.۱.۵. فرض کنید $S : A \rightarrow B$ و $T : A \rightarrow B$ و $F : B \rightarrow A$ داده شده باشند. می گوییم F با زوج (S, T) جا به جا می شود هرگاه

$$SFT = TFS.$$

تعریف ۵.۱.۵. نگاشت های $G : B \rightarrow A$ و $F : B \rightarrow A, T : A \rightarrow B, S : A \rightarrow B$ می گوییم زوج (F, S) توسط زوج (G, T) ، ϕ – کران دار^{۱۱} شده است هرگاه به ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$d(FSx, FSy) \leq \phi(d(GTx, GTy))$$

که در آن ϕ یک تابع قیاسی است.

comparson^۹

ϕ –contraction^{۱۰}

ϕ –dominated^{۱۱}

نتایج اصلی

در سرتا سر این بخش X یک فضای متریک کامل و A و B زیر مجموعه‌های ناتهی از X می‌باشند.

قضیه ۲.۱.۵. فرض کنید A و B مجموعه‌های بسته X و علاوه بر آن $T : A \rightarrow B$ ، $S : A \rightarrow B$ و $F : B \rightarrow A$ و $G : B \rightarrow A$ غیر خود نگاشت‌های پیوسته‌ای باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) FS با GT و SF با TG جابه‌جا می‌شوند.

(۲) (F, S) توسط (G, T) ، ϕ - کراندار و (S, F) توسط (T, G) ، ψ کراندار باشند که در آن ϕ و ψ توابع قیاسی می‌باشند.

(۳) $SF(B) \subseteq TG(B)$ و $FS(A) \subseteq GT(A)$.

(۴) T ، S با زوج (F, G) و G و F با زوج (S, T) جابه‌جا می‌شوند.

(۵) $\alpha \in (0, 1)$ موجود می‌باشند که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$d(Sx, FSx) \leq \alpha d(Tx, GTx) + (1 - \alpha)d(A, B).$$

آنگاه عناصر $u \in A$ و $v \in B$ موجودند که

$$d(u, Su) = d(u, Tu) = d(A, B)$$

$$d(v, Fv) = d(v, Gv) = d(A, B)$$

$$d(u, v) = d(A, B).$$

اگر (I, S) توسط (I, T) ، ϕ - کراندار شده باشد و a و a' بهترین نقطه تقریبی مشترک S و T باشند. آنگاه

$$2d(A, B) + \phi(2d(A, B) + d(a', a)) - d(a', a) \geq 0.$$

که در آن I نگاشت همانی روی B است.

برهان. فرض کنید $x_0 \in A$ ، با توجه به اینکه $FS(A) \subseteq GT(A)$ ، عنصر x_1 موجود است که

$$FSx_0 = GTx_1$$

با استدلال مشابه $x_2 \in A$ یافت می‌شود که

$$FSx_1 = GTx_2$$

با ادامه این روند می توانیم دنباله ای مانند $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بسازیم که در آن

$$FSx_n = GTx_{n+1}.$$

با استفاده از شرط (۲) تابع قیاسی ϕ موجود است که

$$d(FSx_n, FSx_{n+1}) \leq \phi(d(GTx_n, GTx_{n+1})).$$

با توجه به اینکه $FSx_n = GTx_{n+1}$ داریم

$$\begin{aligned} d(FSx_n, FSx_{n+1}) &\leq \phi(d(GTx_n, GTx_{n+1})) \\ &= \phi(d(FSx_{n-1}, FSx_n)) \\ &\leq \phi^2(d(GTx_{n-1}, GTx_n)) \\ &= \phi^2(d(FSx_{n-2}, FSx_{n-1})) \\ &\leq \phi^3(d(FSx_{n-3}, FSx_{n-2})) \\ &\leq \dots \leq \phi^n(d(FSx_0, FSx_1)). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(FSx_n, FSx_{n+1}) \leq \phi^n(d(FSx_0, FSx_1))$$

اگر $n \rightarrow +\infty$ آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(FSx_n, FSx_{n+1}) = 0.$$

ادعا: $(FSx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله کشی است.

فرض کنید (FSx_n) کشی نباشد. آنگاه $\epsilon > 0$ و دنباله های $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ و $(m(k))_{k \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی موجود است که $n(k) > m(k) > k$ و نیز داریم

$$d(FSx_{m(k)}, FSx_{n(k)-1}) < \epsilon, \quad d(FSx_{m(k)}, FSx_{n(k)}) \geq \epsilon. \quad (1.5)$$

با استفاده از شرط (۲) و این که ϕ یک تابع قیاسی است داریم

$$d(FSx_{m(k)+1}, FSx_{n(k)}) \leq \phi(d(GTx_{m(k)+1}, GTx_{n(k)})) \quad (2.5)$$

$$= \phi(d(FSx_{m(k)}, FSx_{n(k)-1})) \quad (3.5)$$

$$\leq \phi(\epsilon) < \epsilon. \quad (4.5)$$

در ۲.۵، k را به $+\infty$ میل می دهیم، داریم؛

$$\epsilon \leq \phi(\epsilon) < \epsilon$$

که این تناقض است. بنابراین $(FSx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ کشی است. به وضوح $(GTx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نیز کشی است. حال چون فضای X کامل است بنابراین $x \in A$ موجود است.

$$FSx_n \rightarrow x$$

با استفاده از پیوستگی FS و GT داریم

$$(GT)(FS)x_n \rightarrow GTx$$

$$(FS)(GT)x_n \rightarrow FSx.$$

با استفاده از شرط (۱) داریم $GTx = FSx$. قرار می‌دهیم

$$a = GTx = FSx.$$

انگاه بنا به شرایط (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned} d(FSa, a) &= d(FSa, FSx) \\ &\leq \phi(d(GTa, GTx)) \\ &= \phi(d(GT(FSx), a)) \\ &= \phi(d((FS)(GTx), a)) \\ &= \phi(d(FSa, a)). \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$d(FSa, a) \leq \phi(d(FSa, a))$$

حال چون ϕ یک تابع قیاسی است پس

$$d(FSa, a) = 0$$

بنابراین

$$FSa = a.$$

علاوه بر این

$$GTa = (GT)(FSx) = (FS)(GTx) = FSa = a.$$

با استدلالی مشابه $b \in B$ یافت می‌شود که

$$SFb = TGb = b.$$

با توجه به این که T با زوج (F, G) جابه‌جا می‌شود داریم

$$(GTF)b = (FTG)b = Fb.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(a, Fb) &= d(FSa, FS(Fb)) \\ &\leq \phi(d(GTa, GT(Fb))) \\ &= \phi(d(a, Fb)). \end{aligned}$$

از طرفی ϕ تابعی قیاسی است بنابراین

$$d(a, Fb) = 0$$

و این یعنی $Fb = a$.

با استدلال هایی مشابه می توانیم نشان دهیم $Gb = a$ ، $Sa = b$ و $Ta = b$. بنابراین با توجه به شرط (۵)، $\alpha \in [0, 1)$ موجود است که

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(Sa, FSa) \leq \alpha d(Ta, GTa) + (1 - \alpha) d(A, B) \\ &= \alpha d(a, b) + (1 - \alpha) d(A, B) \end{aligned}$$

پس

$$d(a, b) \leq d(A, B)$$

در نتیجه

$$d(a, b) = d(A, B).$$

لذا داریم

$$d(a, Sa) = d(a, Ta) = d(a, b) = d(A, B)$$

$$d(b, Fb) = d(b, Gb) = d(a, b) = d(A, B).$$

اگر (I, S) توسط ϕ - کران دار شده باشد بهترین نقطه تقریبی مشترک دیگری برای S و T باشد آنگاه

$$\begin{aligned} d(a, a') &\leq d(a, Sa) + d(Sa, Sa') + d(a', Sa') \\ &\leq 2d(A, B) + \phi(2d(A, B) + d(a, a')) \end{aligned}$$

پس

$$2d(A, B) + \phi(2d(A, B) + d(a, a')) - d(a, a') \geq 0.$$

□

مثال ۱.۱.۵. فضای $X = \mathbb{R}$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید. فرض کنید $A = [3, +\infty)$ و $B = (-\infty, -3]$. نگاشت های $S, T : A \rightarrow B$ و $F, G : B \rightarrow A$ و $\phi, \psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi(x) = \psi(x) = \frac{x}{1+x} \text{ و } G(y) = -y ; S(x) = -3 ; T(x) = -x ; F(y) = \begin{cases} 3 & y \in \mathbb{Z} \\ 4 & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

به راحتی می توان بررسی کرد که $d(A, B) = 6$ و نیز توابع S, T, F, G در شرایط قضیه قبل

صدق می کند و نیز داریم

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{A}, S(\mathfrak{A})) &= d(\mathfrak{A}, T(\mathfrak{A})) = d(A, B) \\d(-\mathfrak{A}, F(-\mathfrak{A})) &= d(-\mathfrak{A}, G(-\mathfrak{A})) = d(A, B). \\d(\mathfrak{A}, -\mathfrak{A}) &= d(A, B)\end{aligned}$$

در قضیه قبل اگر S و T خود نگاشت روی X و F و G تابع همانی روی X باشد آنگاه قضیه قبل به یک قضیه نقطه ثابت مشترک برای خود نگاشت های S و T تبدیل می شود که آن را به صورت زیر مطرح می کنیم.

قضیه ۳.۱.۵. فرض کنید X یک فضای متریک کامل باشد. علاوه بر این فرض کنید $S, T: X \rightarrow X$ خود نگاشت هایی پیوسته روی X باشند که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) S با T جابه جا می شود.

(۲) تابع قیاسی ϕ موجود باشد که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Sx, Sy) < \phi(d(Tx, Ty)).$$

(۳) $S(x) \subseteq T(x)$.

آنگاه خود نگاشت های S و T دارا یک نقطه ثابت مشترک یکتا می باشند.

فصل ۶

بهترین نقطه تقریبی در فضاها متریک کامل با P - خاصیت ضعیف

در سال ۱۹۹۸ کنان قضیه نقطه ثابت زیر را ارائه کرد.

قضیه ۱.۰.۶. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل باشد و $T : X \rightarrow X$ یک خود نگاشت باشد. فرض کنید $\frac{1}{4} < k < 1$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(x, Tx) + d(y, Ty)).$$

در این صورت خود نگاشت T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است.

قضیه نقطه ثابت کنان و برخی نتایج آن در [۳۷] مطالعه شده است.

قضیه ۲.۰.۶. [۳۷] فرض کنید (X, d) یک فضای کامل متریک باشد. همچنین فرض کنید $T : X \rightarrow X$ خود نگاشتی پیوسته باشد که به ازای هر $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \beta d(y, Ty) + \gamma d(x, y)$$

که در آن α, β و γ اعداد حقیقی نامنفی اند که $\alpha + \beta + \gamma < 1$. در این صورت خود نگاشت T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

نتیجه ۱.۰.۶. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \rightarrow X$ خود نگاشتی پیوسته باشد. در این صورت اگر اعداد حقیقی نامنفی α و β چنان موجود باشند که $\alpha + \beta < 1$ و به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \beta d(y, Ty).$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است.

۱.۶ تعاریف و نتایج مقدماتی

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک، A و B زیر مجموعه ناتهی از X و $T : A \rightarrow B$ یک ناخود نگاشت باشد. در این صورت همان گونه که در فصل قبل اشاره شد، T ممکن است دارای نقطه ثابت نباشد. در این حالت به ازای هر $x \in A$ داریم $d(x, Tx) > 0$. در چنین شرایطی یافتن نقطه‌ای مانند $x \in A$ که $d(x, Tx)$ کمترین مقدار باشد، بسیار مهم است.

تعریف ۱.۱.۶. [۳] مجموعه‌های A_0 و B_0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$A_0 = \{x \in A \mid d(x, y) = d(A, B) \text{ که } y \in B\}$$

$$B_0 = \{y \in B \mid d(x, y) = d(A, B) \text{ که } x \in A\}$$

تعریف ۲.۱.۶. [۳] فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های فضای متریک (X, d) باشد که $A_0 \neq \emptyset$. می‌گوییم زوج (A, B) دارای P - خاصیت^۱ است هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in A_0$ و $y_1, y_2 \in B_0$ عبارت زیر درست باشد؛

$$(d(x_1, y_1) = d(A, B) \text{ و } d(x_2, y_2) = d(A, B)) \Rightarrow d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$$

تعریف ۳.۱.۶. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های فضای متریک (X, d) باشد که $A_0 \neq \emptyset$. می‌گوییم زوج (A, B) دارای P - خاصیت^۲ ضعیف است هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in A_0$ و $y_1, y_2 \in B_0$ عبارت زیر درست باشد؛

$$(d(x_1, y_1) = d(A, B) \text{ و } d(x_2, y_2) = d(A, B)) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq d(y_1, y_2).$$

یاد آوری می‌کنیم که خود نگاشت T روی فضای متریک (X, d) را ϕ - انقباض گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$D(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y))$$

^۱ P-property
^۲ weak P-property

که در آن ϕ یک تابع قیاسی است. لازم به یادآوری است که اگر ϕ یک تابع قیاسی باشد آنگاه به ازای هر $t \in (0, +\infty)$ داریم

$$\phi(t) < t$$

و نیز

$$\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

لم ۱.۱.۶. [۵۲] فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های بسته فضای متریک کامل (X, d) باشد و نیز فرض کنید $T : A \rightarrow B$ ناخود نگاشتی باشد که $A_0 \neq \emptyset$. آنگاه $T(A_0) \subset B_0$.

لم ۲.۱.۶. [۵۲] فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های بسته فضای متریک کامل (X, d) و شرایط زیر صادق باشند:

$$(۱) \quad A_0 \neq \emptyset$$

(۲) زوج (A, B) دارای P -خاصیت باشد،

آنگاه B_0 بسته است.

نتایج اصلی

در این بخش بهترین نقطه تقریبی مشترک را برای ناخود نگاشت‌هایی مانند $T : A \rightarrow B$ و $S : A \rightarrow B$ که در آن (A, B) زوجی ناتهی از زیر مجموعه‌های بسته فضای متریک (X, d) است و (A, B) دارای P -خاصیت ضعیف می‌باشد، ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۱.۱.۶. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های بسته فضای متریک کامل (X, d) باشد برای ناخود نگاشت‌های $T : A \rightarrow B$ و $S : A \rightarrow B$ اگر شرایط زیر برقرار باشند،

$$(۱) \quad A_0 \neq \emptyset$$

(۲) زوج (A, B) دارای P -خاصیت ضعیف باشد.

$$(۳) \quad d(Sx, Ty) \leq \phi(d(x, y)) \quad \text{که در آن } \phi \text{ یک تابع قیاسی است.}$$

آنگاه زوج (S, T) دارای بهترین نقطه تقریبی مشترک یکتا است.

برهان. فرض کنید $A_0 \neq \emptyset$. $x_0 \in A_0$ را دلخواه و از این به بعد ثابت انتخاب می‌کنیم. با استفاده از لم ۱.۱.۶، $Sx_0 \in S(A_0) \subseteq B_0$ ، و آنگاه با استفاده از تعریف A_0 ، $x_1 \in A_0$ چنان موجود است که

$$d(x, Sx_0) = d(A, B).$$

چون $x_2 \in A_0, Tx_1 \in T(A_0) \subseteq B_0$ چنان موجود است که

$$d(x_2, Tx_1) = d(A, B).$$

با در نظر گرفتن این که $x_2 \in A_0$ و $S(A_0) \subseteq B_0$ می‌توانیم $x_3 \in A_0$ یافت کنیم که

$$d(x_3, Sx_2) = d(A, B).$$

با همین روش $x_4 \in A_0$ چنان یافت می‌شود که

$$d(x_4, Tx_3) = d(A, B).$$

با ادامه این فرآیند دنباله $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ در A_0 به گونه‌ای ساخته می‌شود که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{2n}, Tx_{2n-1}) = d(A, B) \quad (۱.۶)$$

$$d(x_{2n-1}, Sx_{2n}) = d(A, B) \quad (۲.۶)$$

با توجه به اینکه (A, B) دارای P - خاصیت ضعیف است و با توجه به شرط (۳) نشان داد که

$$d(x_{2n}, x_{2n-1}) \leq d(Tx_{2n-1}, Sx_{2n-2}) = d(Sx_{2n-2}, Tx_{2n-1})$$

و

$$d(x_{2n+1}, x_{2n}) \leq d(Sx_{2n}, Tx_{2n-1}) = d(Tx_{2n-1}, Sx_{2n}).$$

با استفاده از شرط (۳) داریم

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \leq d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq \phi(d(x_{2n}, x_{2n+1})),$$

$$d(x_{2n+1}, x_{2n}) \leq d(Sx_{2n}, Tx_{2n-1}) \leq \phi(d(x_{2n}, x_{2n-1})).$$

بنابراین داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \phi(d(x_n, x_{n-1})), \quad (۳.۶)$$

در نتیجه

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \phi(d(x_{n-1}, x_{n-2})),$$

لذا

$$\phi(d(x_n, x_{n-1})) \leq \phi^2(d(x_{n-1}, x_{n-2})),$$

پس

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \phi^2(d(x_{n-1}, x_{n-2})). \quad (۴.۶)$$

حال با استفاده از نامساوی ۳.۶ داریم

$$d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \phi(d(x_{n-2}, x_{n-3})),$$

در نتیجه

$$\phi(d(x_{n-1}, x_{n-2})) \leq \phi^2(d(x_{n-2}, x_{n-3})),$$

پس

$$\phi^2(d(x_{n-1}, x_{n-2})) \leq \phi^3(d(x_{n-2}, x_{n-3})),$$

حال با استفاده از نامساوی ۴.۶ داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \phi^3(d(x_{n-2}, x_{n-3})).$$

با ادامه این روند به صورت استقرایی می توان نشان داد که

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \phi^n(d(x_1, x_0)).$$

بنابراین

$$d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0.$$

حال با استفاده از لم ۱.۱.۵ می توانیم نشان دهیم $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ کشی است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت $\epsilon > 0$ و دنباله های $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ و $(m(k))_{k \in \mathbb{N}}$ اعداد طبیعی موجودند که

$$n(k) > m(k) \quad , \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \epsilon \quad , \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \epsilon \quad (5.6)$$

ادعا:

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \phi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})). \quad (6.6)$$

برای اثبات این ادعا چهار حالت ممکن برای $m(k)$ و $n(k)$ را بررسی می کنیم.

حالت اول) فرض کنید $m(k)$ و $n(k)$ هر دو فرد باشند. در این صورت با استفاده از نامساوی های ۱.۶ و ۲.۶ داریم

$$d(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}) = d(A, B),$$

$$d(x_{n(k)}, Sx_{n(k)-1}) = d(A, B)$$

حال با استفاده از P -خاصیت ضعیف (A, B) ، داریم

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq d(Tx_{m(k)}, Sx_{n(k)-1}).$$

با توجه به شرط (۳) داریم

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \phi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})).$$

حالت دوم) اگر $m(k)$ و $n(k)$ هر دو زوج باشند. با اثبات مشابه حالت اول می‌توان نشان داد که

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \phi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})).$$

حالت سوم) فرض کنید $m(k)$ زوج و $n(k)$ فرد باشد. در این صورت با استفاده از ۱.۶ و ۲.۶ داریم

$$d(x_{n(k)+1}, Sx_{m(k)}) = d(A, B)$$

$$d(x_{n(k)}, Sx_{n(k)-1}) = d(A, B)$$

با استفاده از P - خاصیت ضعیف (A, B) ، داریم

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq d(Sx_{m(k)}, Sx_{n(k)-1}).$$

با توجه به شرط (۳) به راحتی ثابت می‌شود که

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \phi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})).$$

حالت چهارم) فرض کنید $m(k)$ فرد و $n(k)$ زوج باشد. در این حالت نیز با اثباتی مشابه حالت سوم، می‌توانیم نشان دهیم که

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \phi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})).$$

بنابراین ادعا درست است.

حال با استفاده از ۵.۶ و ۶.۶ داریم

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \phi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})) \leq \phi(\epsilon) < \epsilon. \quad (7.6)$$

اگر در ۷.۶، $k \rightarrow +\infty$ داریم $\epsilon \leq \phi(\epsilon) < \epsilon$. که این تناقض است.

بنابراین $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ در A کشی است. چون A بسته است و X کامل است بنابراین $x \in A$ موجود است که $x_n \rightarrow x$. اکنون نشان می‌دهیم که

$$d(Sx_n, x) \rightarrow 0, \quad d(Tx_n, Tx) \rightarrow 0$$

داریم

$$\begin{aligned} d(Sx_n, Sx) &\leq d(Sx_n, Tx_m) + d(Tx_m, Sx) \\ &\leq \phi(d(x_n, x_m)) + \phi(d(x_m, x)). \end{aligned}$$

در نامساوی بالا، $n, m \rightarrow +\infty$. در این صورت

$$d(Sx_n, Sx) \rightarrow 0.$$

با روش مشابه می توان نشان داد که

$$d(Tx_n, Tx) \rightarrow 0.$$

در ۵.۶ و ۶.۶، n را به $+\infty$ میل می دهیم. در این صورت

$$d(x, Sx) = d(x, Tx) = d(A, B).$$

به عبارت دیگر x بهترین نقطه تقریبی مشترک زوج (S, T) است. فرض کنید y نقطه دیگری در A باشد که

$$d(y, Sy) = d(y, Ty) = d(A, B).$$

با توجه به اینکه

$$d(x, Sx) = d(x, Tx) = d(A, B),$$

$$d(y, Sy) = d(y, Ty) = d(A, B)$$

و با توجه به P - خاصیت ضعیف زوج (A, B) ، ۳ نابرابری زیر درست است.

$$d(x, y) \leq d(Sx, Ty) \leq \phi(d(x, y)) \quad (۱)$$

(۲)

$$d(x, y) \leq d(Sx, Sy) \leq d(Sx, Ty) + d(Ty, Sy)$$

$$\leq \phi(d(x, y)) + \phi(d(y, y))$$

$$= \phi(d(x, y)),$$

(۳)

$$d(x, y) \leq d(Tx, Ty) \leq d(Tx, Sy) + d(Sy, Ty)$$

$$\leq \phi(d(x, y)) + \phi(d(y, y))$$

$$= \phi(d(x, y)).$$

با توجه به اینکه ϕ یک تابع قیاسی است، داریم $\phi(t) \leq t$. بنابراین در هر کدام از سه نابرابری فوق داریم

$$d(x, y) = 0$$

پس

$$x = y.$$

لذا x ، یکتاست.

□

اکنون با ارائه یک مثال درستی قضیه قبل را بررسی می کنیم.

مثال ۱.۱.۶. فرض کنید

$$X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}, B = \{0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\}.$$

مقدار d را بر روی X به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

. واضح است که $d(A, B) = 0$ ، $A_0 = \{0\}$ و $B_0 = \{0\}$. زوج (A, B) دارای P - خاصیت ضعیف می باشد. فرض کنید نگاشت های $S, T : A \rightarrow B$ و $\phi : [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ به صورت زیر تعریف تعریف شده باشند؛

$$S(x) = \frac{x}{1-x} \quad ; \quad T(x) = \frac{x}{1+x} \quad ; \quad \phi(x) = \frac{x}{1-x}$$

بررسی قیاسی بودن ϕ بسیار آسان است. نشان می دهیم که زوج (S, T) در شرط (۲) قضیه ۱.۱.۶ صدق می کند. فرض کنید $x, y \in A$. شرط (۳) برای زوج (S, T) را در ۵ حالت ممکن بررسی می کنیم.

حالت اول) اگر $x = \frac{1}{n}$ و $y = \frac{1}{m}$ (و m زوج اند) و $n < m$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} d(S(\frac{1}{n}), T(\frac{1}{m})) &= d(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{m+1}) = \frac{1}{n-1} \\ \phi(d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})) &= \phi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(S(\frac{1}{n}), T(\frac{1}{m})) = \phi(d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})).$$

حالت دوم) اگر $x = \frac{1}{n}$ و $y = \frac{1}{m}$ (و m هر دو زوج باشند) و $n > m$. در این حالت $n - m \geq 2$. اگر $n - m = 2$ آنگاه

$$\begin{aligned} d(S(\frac{1}{n}), T(\frac{1}{m})) &= d(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{m+1}) = 0 \\ \phi(d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})) &= \phi(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m-1}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(S(\frac{1}{n}), T(\frac{1}{m})) \leq \phi(d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})).$$

اگر $n - m > 2$ آنگاه

$$d(S(\frac{1}{n}), T(\frac{1}{m})) = d(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{m+1}) = \frac{1}{m+1}$$

$$\phi(d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})) = \phi(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m-1}$$

بنابراین

$$d(S(\frac{1}{n}), T(\frac{1}{m})) \leq \phi(d(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})).$$

حالت سوم) اگر $x = y = \circ$ در این صورت

$$d(S(\circ), T(\circ)) = d(\circ, \circ) = \circ$$

$$\phi(d(\circ, \circ)) = \phi(\circ) = \circ$$

بنابراین

$$d(S(\circ), T(\circ)) = \phi(d(\circ, \circ)).$$

حالت چهارم) اگر $x = \circ$ و $y = \frac{1}{m}$ آنگاه

$$d(S(\circ), T(\frac{1}{m})) = d(\circ, \frac{1}{m+1}) = \frac{1}{m+1}$$

$$\phi(d(\circ, \frac{1}{m})) = \phi(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m-1}$$

بنابراین

$$d(S(\circ), T(\frac{1}{m})) \leq \phi(d(\circ, \frac{1}{m})).$$

حالت پنجم) اگر $x = \frac{1}{n}$ و $y = \circ$ آنگاه؛

$$d(S(\frac{1}{n}), T(\circ)) = d(\frac{1}{n-1}, \circ) = \frac{1}{n-1}$$

$$\phi(d(\frac{1}{n}, \circ)) = \phi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1}$$

بنابراین

$$d(S(\frac{1}{n}), T(\circ)) = \phi(d(\frac{1}{n}, \circ)).$$

بنابراین زوج (S, T) در شرط (۳) قضیه ۱.۱.۶ صدق می‌کند. به وضوح توابع S و T پیوسته‌اند. بنابراین بنا به قضیه ۱.۱.۶ زوج (S, T) دارای بهترین نقطه تقریبی مشترک یکتاست.

در این مثال $x^* = \circ$ بهترین نقطه تقریبی مشترک است.

تعریف ۴.۱.۶. فرض کنید (A, B) یک زوج از زیر مجموعه‌های ناتهی فضای متریک (X, d) و $T : A \rightarrow B$ یک ناخود نگاشت باشد. تابع مجموعه مقدار $\rho_{A_0}^T : T(\bar{A}_0) \rightarrow \rho(A)$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\rho_{A_0}^T(y) = \{x \in A_0 \mid d(x, y) = d(A, B)\}.$$

اگر به ازای هر $y \in T(\bar{A}_0)$ ، $\rho_A^T(y)$ غیر تهی باشد آنگاه می‌گوییم T پروکسیمال است. اگر به ازای هر $y \in T(\bar{A}_0)$ ، $\rho_A^T(y)$ تک عضوی باشد آنگاه می‌گوییم T چبیشف است.

قضیه ۲.۱.۶. فرض کنید (A, B) یک زوج از زیر مجموعه‌های بسته ناتهی فضای متریک کامل (X, d) و $S, T : A \rightarrow B$ ناخود نگاشت‌های پیوسته باشند. فرض کنید گزاره‌های زیر صادق باشند؛

(۱) زوج (A, B) دارای P - خاصیت ضعیف باشد.

(۲) $A_0 \neq \emptyset$.

(۳) نابرابری‌های زیر درست باشد

$$d(Sx, Tx) \leq \alpha d(x, Sx) + \beta(y, Ty) - d(A, B) \quad \bullet$$

$$d(Sx, Sy) \leq \alpha d(x, Sx) + \beta(y, Ty) - d(A, B) \quad \bullet$$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \beta(y, Ty) - d(A, B) \quad \bullet$$

که در آن α و β اعداد حقیقی نامنفی‌اند و $\alpha + \beta < 1$. در این صورت زوج (S, T) دارای بهترین نقطه تقریبی یکتا است.

برهان. با استفاده از لم ۲.۱.۶، B_0 بسته است (زیرا $A_0 \neq \emptyset$). با توجه به لم ۱.۱.۶، $S(\bar{A}_0) \subseteq B_0$ و $T(\bar{A}_0) \subseteq B_0$. با توجه به این که زوج (A, B) دارای P - خاصیت ضعیف است، بنابراین ناخود نگاشت S چبیشف است. بنابراین نگاشت $\rho_{A_0}^S : S(\bar{A}_0) \rightarrow \rho(A_0)$ با ضابطه $\rho_{A_0}^S(y) = x$ خوش‌تعریف است. که در آن x عنصری از A_0 و $d(x, y) = d(A, B)$ از آن جایی که (A, B) دارای P - خاصیت ضعیف است و

$$d(\rho_{A_0}^S(S(x)), S(x)) = d(A, B)$$

$$d(\rho_{A_0}^S(S(y)), S(y)) = d(A, B)$$

بنابراین به ازای هر $x, y \in \bar{A}_0$

$$\begin{aligned} d(\rho_{A_0}^S(S(x)), \rho_{A_0}^S(S(y))) &\leq d(S(x), S(y)) \leq \alpha d(x, Sx) + \beta d(y, Ty) - d(A, B) \\ &\leq \alpha d(x, \rho_{A_0}^S(S(x))) + \alpha d(\rho_{A_0}^S(Sx), Sx) + \beta d(y, \rho_{A_0}^S(Sy)) \\ &\quad + \beta d(\rho_{A_0}^S(Sy), Sy) - d(A, B) \\ &\leq \alpha d(x, \rho_{A_0}^S(S(x))) + \beta d(y, \rho_{A_0}^S(Sy)). \end{aligned}$$

پس با استفاده از نتیجه ۱.۰.۶ خود نگاشت $\rho_{A_0}^S \circ S : \bar{A}_0 \rightarrow \bar{A}_0$ نقطه ثابت منحصر به فردی مانند x_1^* دارد. با روشی مشابه می توان نشان داد که خود نگاشت $\rho_{A_0}^T \circ T : \bar{A}_0 \rightarrow \bar{A}_0$ نقطه ثابت یگانه ای مانند x_2^* دارد. بنابراین

$$\begin{aligned} \rho_{A_0}^S \circ S(x_1^*) &= x_1^* \Rightarrow \rho_{A_0}^S(S(x_1^*)) = x_1^* \\ \rho_{A_0}^T \circ T(x_2^*) &= x_2^* \Rightarrow \rho_{A_0}^T(T(x_2^*)) = x_2^* \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} d(x_1^*, S(x_1^*)) &= d(A, B) \\ d(x_2^*, T(x_2^*)) &= d(A, B) \end{aligned}$$

ادعا: $x_1^* = x_2^*$.

فرض کنید $x_1^* \neq x_2^*$. با استفاده از P - خاصیت ضعیف داریم

$$\begin{aligned} d(x_1^*, x_2^*) &\leq d(Sx_1^*, Tx_2^*) \\ &\leq \alpha d(x_1^*, Sx_1^*) + \beta d(x_2^*, Tx_2^*) - d(A, B) \\ &\leq \alpha d(A, B) + \beta d(A, B) - d(A, B) < 0 \end{aligned}$$

که این تناقض است. بنابراین $d(x_1^*, x_2^*) = 0$ پس $x_1^* = x_2^* = x^*$. لذا x^* بهترین نقطه تقریبی مشترک S و T است. حال نشان می دهیم x^* یکتاست. فرض کنید چنین نباشد آنگاه بهترین نقطه تقریبی مشترک دیگری مانند y^* موجود است. لذا

$$\begin{aligned} d(x^*, S(x^*)) &= d(x^*, T(x^*)) = d(A, B) \\ d(y^*, T(y^*)) &= d(y^*, S(y^*)) = d(A, B). \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از P - خاصیت ضعیف ، (A, B) سه نامساوی زیر به دست می آید.

$$d(x^*, y^*) \leq d(Sx^*, Ty^*) \leq \alpha d(x^*, Sx^*) + \beta d(y^*, Ty^*) - d(A, B) < 0 \quad (۱)$$

(۲)

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &\leq d(Sx^*, Sy^*) \leq d(Sx^*, Ty^*) + d(Ty^*, Sy^*) \\ &\leq (\alpha d(x^*, Sx^*) + \beta d(y^*, Ty^*) - d(A, B)) + ((y^*, Ty^*) + \beta d(y^*, Sy^*) - d(A, B)) \\ &< 0. \end{aligned}$$

(۳)

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &\leq d(Tx^*, Ty^*) \leq d(Tx^*, Sy^*) + d(Sy^*, Ty^*) \\ &\leq (\alpha d(x^*, Tx^*) + \beta d(y^*, Sy^*) - d(A, B)) + (\alpha d(y^*, Sy^*) + \beta d(y^*, Ty^*) - d(A, B)) \\ &< 0. \end{aligned}$$

در هر کدام از سه حالت ممکن بالا با تناقض مواجه هستیم. بنابراین فرض خلف باطل است. $\square$ لذا $x^* = y^*$.

۲.۶ حدس

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید $\delta, \tau : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ دو نگاشت نامنفی روی فضای متریک X باشند که $0 \leq \delta + \tau \leq 1$. خود نگاشت $T : X \rightarrow X$ را (δ, τ) - نگاشت با ثابت $k \in [0, 1)$ گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ نامساوی زیر صادق باشد.

$$d(Tx, Ty) \leq k(d(x, Tx)\delta(x, y) + d(y, Ty)\tau(x, y)).$$

حدس فرض کنید (A, B) یک زوج از زیر مجموعه‌های ناتهی بسته از فضای متریک کامل (X, d) باشند. همچنین فرض کنید $\delta, \tau : A \times B \rightarrow [0, \infty)$ دو نگاشت پیوسته باشند که $\delta + \tau = 1$ و $S, T : A \rightarrow B$ ، (δ, τ) - نگاشت پیوسته باشند. اگر

(۱) زوج (A, B) دارای P - خاصیت ضعیف باشد.

(۲) $A_0 \neq \emptyset$

$$d(Sx, Tx) \leq \delta(x, y)d(x, Sx) + \tau(x, y)d(y, Ty) - d(A, B) \quad (۳)$$

آنگاه S و T دارای بهترین نقطه تقریبی یکتاست. این حدس تعمیم قضیه ۲.۱.۶ است.

فصل ۷

بهترین نقطه تقریبی در فضاها ۲- متریک

مقالات زیادی وجود دارد که در آن‌ها مسأله نقطه ثابت در فضاها ۲- متریک را برای نگاشت‌های انقباضی بررسی کرده‌اند (به مراجع [۵۵]، [۳۱]، [۲۳]، [۱۹]، [۱۲]، [۱۰]، [۸] و [۷۴] رجوع شود). در سال ۲۰۱۳ گل‌وین ون دانگ و وولی تی هانگ شرایط کافی برای وجود نقطه ثابت برای خود نگاشت‌های c -انقباضی پروکسیمال را در فضاها ۲- متریک ارائه کرده‌اند. ما در این فصل شرایط c -انقباضی تعمیم یافته‌ای را برای ناخود نگاشت‌ها ارائه می‌دهیم. سپس ۲-بهترین نقطه تقریبی را تعریف می‌کنیم و با ارایه شرایطی انقباضی، وجود ۲-بهترین نقطه تقریبی را برای این نوع نگاشت‌ها در فضاها ۲- متریک اثبات خواهیم کرد.

۱.۷ مقدمات

تعریف ۱.۱.۷. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های ناتهی از فضای متریک (X, G) باشد. برای نقطه $x \in X$ ، (A, B, x) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$G(A, B, x) = \inf\{G(a, b, x) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A_0 = \{a \in A \mid \exists b \in B, \forall x \in X; G(a, b, x) = G(A, B, x)\}$$

$$B_0 = \{b \in B \mid \exists a \in A, \forall x \in X; G(a, b, x) = G(A, B, x)\}$$

اگر $A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه A_0 و B_0 ناتهی اند. فرض کنید $(X, G, \preceq)$ فضای ۲-متریک مرتب باشد. در این صورت نگاشت $T : A \rightarrow B$ را صعودی گوییم هرگاه

$$\forall a_1, a_2 \in A (a_1 \preceq a_2 \Rightarrow T(a_1) \preceq T(a_2)).$$

تعریف ۲.۱.۷. می گوییم $T : A \rightarrow B$ به طور پروکسیمال حافظ ترتیب است. هرگاه گزاره های زیر برقرار باشد.

$$[(a_1 \preceq a_2, G(u, T(a_1), x) = G(A, B, x)) \quad , \quad G(v, T(a_2), x) = G(A, B, x)] \Rightarrow (u \preceq v)$$

که در آن $x \in X$ و $a_1, a_2, u, v \in A$.

تعریف ۳.۱.۷. فرض کنید A و B زیر فضای ناتهی از فضای ۲-متریک (X, G) باشد. نقطه $a \in A$ را ۲-بهترین نقطه تقریبی ناخود نگاشت $T : A \rightarrow B$ گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$,

$$G(a_1, T(a), x) = G(A, B, x).$$

تعریف ۴.۱.۷. فرض کنید A و B زیر مجموعه هایی از فضای ۲-متریک X باشد. همچنین فرض کنید ناخودنگاشت $T : A \rightarrow B$ به گونه ای باشد که

$$\forall a_1, a_2, u, v \in A, [(a_1 \preceq a_2, G(u, T(a_1), x) = G(A, B, x)), G(v, T(a_2), x) = G(A, B, x)]$$

$$\Rightarrow (G(u, v, x) \leq \frac{1}{\varphi} ((G(a_1, v, x) + G(a_2, u, x)) - \eta(G(a_1, v, x), G(a_2, u, x))). \quad (1.7)$$

آنگاه T را نگاشت c -انقباضی ۲-پروکسیمال تعمیم یافته^۱ گوییم. که در آن

$$\eta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

نگاشتی پیوسته و صعودی است که $\eta(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y = 0$.

۲.۷ نتایج اصلی

در سر تا سر این بخش X یک فضای ۲-متریک کامل است که به ترتیب جزئی $\preceq$ مجهز است.

لم ۱.۲.۷. فرض کنید A و B زیر مجموعه های ناتهی بسته از X باشند که $A_0 \neq \emptyset$ و $B_0 \neq \emptyset$ و نیز فرض کنید نگاشت T در شرایط زیر صدق کند.

^۱generalized 2-proximinal c-contraction

(۱) پیوسته، به طور پروکسیمال حافظ ترتیب و c -انقباضی ۲-پروکسیمال تعمیم یافته باشد که $T(A_0) \subseteq B_0$.

(۲) عنصر a_0 و a_1 در A چنان موجود باشد که $a_0 \preceq a_1$ و به ازای هر $x \in X$

$$G(a_1, Ta_0, x) = G(A, B, x)$$

آنگاه دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در A چنان موجود است که

$$G(a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = \circ$$

برهان. بنا به شرط (۲) و $a_0, a_1 \in A$ موجود است که $a_0 \preceq a_1$ و به ازای هر $x \in X$ ، $G(a_1, Ta_0, x) = G(A, B, x)$ چون $T(A_0) \subseteq B_0$ عنصر $a_2 \in A$ موجود است که به ازای هر $x \in X$

$$G(a_2, Ta_1, x) = G(A, B, x) \quad (2.7)$$

با توجه به ۲-پروکسیمال حافظ ترتیب بودن T ، داریم

$$a_1 \preceq a_2$$

با ادامه این روند، می توانیم دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ چنان بیابیم که $a_{n-1} \preceq a_n$ و نیز به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$G(a_n, Ta_{n-1}, x) = G(A, B, x) \quad (3.7)$$

$$G(a_{n+1}, Ta_n, x) = G(A, B, x). \quad (4.7)$$

حال نشان می دهیم که

$$G(a_{n-1}, a_{n+1}, a_n) = \circ$$

واضح است که

$$G(a_{n-1}, a_{n+1}, a_n) = G(a_n, a_{n+1}, a_{n-1}).$$

با استفاده از ۳.۷ و اینکه T داریم؛

$$\begin{aligned} G(a_n, a_{n+1}, a_{n-1}) &\leq \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_{n+1}, a_{n-1}) + G(a_n, a_n, a_{n-1})) \\ &\quad - \eta(G(a_{n-1}, a_{n-1}, a_{n-1}), G(a_n, a_n, a_{n-1})) \end{aligned}$$

بنابراین

$$G(a_n, a_{n+1}, a_{n-1}) \leq \circ$$

پس

$$G(a_n, a_{n+1}, a_{n-1}) = \circ. \quad (5.7)$$

قضیه ۱.۲.۷. فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های بسته ناتهی از X باشند که $A_\circ, B_\circ \neq \emptyset$. فرض کنید $T: A \rightarrow B$ در شرایط لم ۱.۲.۷ صدق کند. آنگاه نقطه $a \in A$ به گونه‌ای یافت می‌شود که به ازای هر $x \in X$ ، $G(a, Ta, x) = G(A, B, x)$ به عبارت دیگر a ۲-بهترین نقطه تقریبی T است.

برهان. فرض کنید $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای باشد که در اثبات لم ۱.۲.۷ ساخته شده است. نقطه $x \in X$ را انتخاب و از این به بعد ثابت در نظر بگیرید. در این صورت

$$G(a_{n+1}, Ta_n, x) = G(A, B, x).$$

چون T, c -انقباض ۲- پروکسیمال تعمیم یافته است، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} G(a_n, a_{n+1}, x) &\leq \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_{n-1}, x) + G(a_n, a_n, x)) - \eta(G(a_{n-1}, a_{n-1}, x), G(a_n, a_n, x)) \\ &= \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_{n+1}, x) - \eta(G(a_{n-1}, a_{n+1}, x), \circ)) \\ &\leq \frac{1}{\varphi} G(a_{n-1}, a_{n+1}, x) \\ &\leq \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_n, x) + G(a_n, a_{n+1}, x) + G(a_{n-1}, a_{n+1}, a_n)) \\ &\quad - \eta(G(a_{n-1}, a_{n+1}, x), \circ). \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} G(a_n, a_{n+1}, x) &\leq \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_{n+1}, x)) \\ &\leq \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_n, x) + G(a_n, a_{n+1}, x) + G(a_{n-1}, a_{n+1}, x)) \\ &\quad - \eta(G(a_{n-1}, a_{n+1}, x), \circ). \end{aligned} \quad (۶.۷)$$

با استفاده از اثبات لم ۱.۲.۷،

$$G(a_{n-1}, a_{n+1}, a_n) = \circ,$$

لذا بنا به ۶.۷ داریم

$$\begin{aligned} G(a_n, a_{n-1}, x) &\leq \frac{1}{\varphi} (G(a_{n-1}, a_n, x) + G(a_n, a_{n+1}, x)) \\ &\quad - \eta(G(a_{n-1}, a_n, x), \circ). \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} G(a_n, a_{n+1}, x) &\leq \frac{1}{\varphi} G(a_{n-1}, a_\circ, x) \\ &\quad - \eta(G(a_{n-1}, a_n, x), \circ) \leq \frac{1}{\varphi} G(a_{n-1}, a_n, x), \end{aligned}$$

در نتیجه

$$G(a_n, a_{n+1}, x) \leq G(a_{n-1}, a_n, x).$$

این یعنی دنباله $G_n = G(a_n, a_{n+1}, x)$ نزولی است چون G_n از پایین کراندار است پس $r_x > 0$ موجود است که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_n, a_{n+1}, x) = r_x \quad (7.7)$$

حال در ۶.۷، $n \rightarrow +\infty$

$$r_x \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi} G(a_n, a_{n+1}, x) \leq \frac{1}{\varphi} (r_x + r_x) = r_x$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_n, a_{n+1}, x) = 2r_x. \quad (8.7)$$

حال در ۶.۷، $n \rightarrow +\infty$ و با استفاده از پیوستگی η و ۷.۷ و ۸.۷ داریم

$$r_x \leq \frac{1}{\varphi} (2r_x) = r_x - \eta(2r_x, 0)r_x \quad (9.7)$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_{n+1}, a_n, x) = 0 \quad (10.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(Ta_n, a_n, x) = 0. \quad (11.7)$$

ادعا: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در فضای ۲-متریک X ، کشی است.

فرض کنید چنین نباشد در این صورت $\epsilon > 0$ موجود است که به ازای هر n_k و m_k ، $k \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$n_k, m_k \geq k, \quad r_k := \delta(a_{m_k}, a_{n_k}, x) \geq \epsilon, \quad G(a_{m_k}, a_{n_{k-1}}, x) < \epsilon.$$

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، قرار می دهیم

$$\alpha_n = G(a_{n+1}, a_n, x)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \epsilon \leq r_k &\leq G(a_{n_{k-1}}, a_{m_k}, x) + G(a_{n_k}, a_{m_{k-1}}, x) \\ &+ G(a_{n_k}, a_{m_k}, a_{n_{k-1}}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\epsilon_k < \epsilon + \alpha_{n_{k-1}} + G(a_{n_k}, a_{n_{k-1}}, a_{m_k}) \quad (12.7)$$

در ۱۲.۷، $k \rightarrow \infty$ داریم؛

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \epsilon. \quad (۱۳.۷)$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} r_k &= G(a_{n_k}, a_{m_k}, x) \leq G(a_{m_{k+1}}, a_{m_k}, x) + G(a_{n_k}, a_{m_{k+1}}, x) \\ &\quad + G(a_{n_k}, a_{m_k}, a_{m_{k+1}}) = \alpha_{m_k} + G(a_{n_k}, a_{m_{k+1}}, x) \\ &\quad + G(a_{n_k}, a_{m_k}, a_{m_{k+1}}) \\ &\leq G(a_{m_k}, a_{m_{k+1}}, x) + G(a_{n_k}, a_{m_k}, x) + G(a_{n_k}, a_{m_{k+1}}, a_{m_k}) \\ &\quad + \alpha_{m_k} + G(a_{m_k}, a_{m_{k+1}}, a_{n_k}) = G(a_{m_k}, a_{m_{k+1}}, x) \\ &\quad + G(a_{n_k}, a_{m_k}, x) + G(a_{n_k}, a_{m_k}, x) + \Upsilon G(a_{m_k}, a_{m_{k+1}}, a_{n_k}) \\ &\quad + \alpha_{m_k} = \Upsilon \alpha_{m_k} + r_k + \Upsilon G(a_{m_k}, a_{m_{k+1}}, a_{n_k}) \end{aligned} \quad (۱۴.۷)$$

در ۱۴.۷، $k \rightarrow +\infty$ داریم

$$\epsilon \leq G(a_{n_k}, a_{m_{k+1}}, x) \leq \epsilon \quad (۱۵.۷)$$

پس

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} G(a_{n_k}, a_{m_{k+1}}, x) = \epsilon \quad (۱۶.۷)$$

با روشی مشابه می توان نشان داد که

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} G(a_{m_k}, a_{n_{k+1}}, x) = \epsilon.$$

از طرف دیگر با توجه به ساختار دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ می توانیم فرض کنیم $a_{m_k} \leq a_{n_k}$ به طوری که

$$G(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}, x) = G(A, B, x) \quad (۱۷.۷)$$

$$G(a_{m_{k+1}}, a_{m_k}, x) = G(A, B, x) \quad (۱۸.۷)$$

بنابراین با توجه به ۱۷.۷ و ۱۸.۷ و این که T, c - انقباض ۲- پروکسیمال تعمیم یافته است

داریم

$$\begin{aligned}
 \epsilon &\leq r_x = G(a_{m_k}, a_{n_k}, x) \leq G(a_{m_{k+1}}, a_{n_k}, x) + G(a_{m_k}, a_{m_{k+1}}, x) \\
 &+ G(a_{m_k}, a_{n_k}, a_{m_{k+1}}) = \alpha_{m_k} + G(a_{m_{k+1}}, a_{n_k}, x) \\
 &+ G(a_{m_k}, a_{n_k}, a_{m_{k+1}}) \leq G(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}, x) \\
 &+ G(a_{m_{k+1}}, a_{n_{k+1}}, x) + G(a_{m_{k-1}}, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) + \alpha_{m_k} \\
 &+ G(a_{m_k}, a_{n_k}, a_{m_{k+1}}) \\
 &\leq \alpha_{n_k} + \alpha_{m_k} + G(a_{m_k}, a_{n_{k+1}}, a_{n_{k+1}}) + G(a_{m_k}, a_{n_{k+1}}, a_{n_{k+1}}) \\
 &+ G(a_{m_k}, a_{n_k}, a_{m_{k+1}}) + \frac{1}{\gamma} [G(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, x) + G(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, x)] \\
 &- \eta(G(a_{n_k}, a_{m_{k+1}}, x), G(a_{m_k}, a_{n_{k+1}}, x))
 \end{aligned}$$

حال در رابطه بالا $k \rightarrow +\infty$ بنابراین بنا به ۱۰.۷، ۱۱.۷، ۱۲.۷، ۱۳.۷ و ۱۴.۷ داریم

$$\epsilon \leq \frac{1}{\gamma}(\epsilon + \epsilon) - \eta(\epsilon, \epsilon) \leq \epsilon$$

داریم

$$\eta(\epsilon, \epsilon) = 0$$

لذا $\epsilon = 0$ که این تناقض است.

پس $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ کشی است.

بنابراین چون X کامل است لذا $a \in X$ موجود است که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(a_n, a, x) = 0$$

در ۳.۷، $n \rightarrow +\infty$. با توجه به اینکه T پیوسته است داریم

$$G(a_n, Ta_n, x) = G(A, B, x).$$

چون x دلخواه بود بنابراین رابطه فوق برای هر x درست است. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

نتیجه ۱.۲.۷. فرض کنید A و B مجموعه‌های ناتهی بسته در X باشند به‌طوری‌که $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$. همچنین فرض کنید $T : A \rightarrow B$ در شرایط زیر صدق کند.

(۱)

$$\forall a_1, a_2, u, v \in A, \forall x \in X$$

$$[(a_1 \preceq a_2, G(u, T(a_1), x) = G(A, B, x), G(v, T(a_2), x) = G(A, B, x)) \quad (۱۹.۷)$$

$$\Rightarrow G(u, v, x) \leq \alpha(G(a_1, v, x) + G(a_2, u, x)).$$

(۲) T پیوسته، صعودی و $T(A_\circ) \subseteq B_\circ$ باشد.

(۳) به ازای هر $a_\circ, a_1 \in A, x \in X$ موجود باشند که $a_\circ \preceq a_1$ و

$$G(a_1, Ta_\circ, x) = G(A, B, x)$$

آنگاه $a \in A$ موجود است که

$$G(a, Ta, x) = G(A, B, x).$$

برهان. η را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\eta(a, b) = \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)(a + b)$$

واضح است که

$$\eta(a, b) = \circ \Leftrightarrow a = b = \circ.$$

داریم

$$\frac{1}{\alpha}(a, b) - \eta(a, b) = \frac{1}{\alpha}(a + b) - \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)(a + b) = \alpha(a + b)$$

بنابراین نامساوی ۱.۷، نامساوی ۱۹.۷ را نتیجه می دهد پس حکم بنا به قضیه قبل ثابت است.

□

مثال ۱.۲.۷. فرض کنید $X = \{\circ, ۲, ۴\}$ و $A = \{\circ, ۲\}$ و $B = \{\circ, ۴\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم و داریم

$$G(x, y, z) = \min\{|x - y|, |x - z|, |y - z|\}.$$

$T : A \rightarrow B$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$T(\circ) = \circ, \quad T(۲) = ۴.$$

واضح است که

$$A_\circ = \{\circ\}, \quad B_\circ = \{\circ\}$$

و T در شرایط نتیجه قبل صدق می کند. به ازای هر $x \in X$ ؛

$$G(\circ, T\circ, x) = G(A, B, x) = \circ.$$

$\circ$ ، ۲- بهترین نقطه تقریبی T است.

فصل ۸

قضیه نقطه ثابت در فضاهاى متریک مدولار منظم

اصل انقباض باناخ یکی از کاربردی‌ترین و مهم‌ترین نتایج در نظریه نقطه ثابت است. بسیاری از ریاضی‌دانان اصل انقباض باناخ را مطالعه و تعمیم داده‌اند. در سال ۲۰۱۲ و رادسکی [۸۷]، با تعریف F -انقباض اصل انقباض باناخ را گسترش داد. اسگروی [۷۹] نتایج وراسکی را برای توابع چند مقداری به‌دست آورد. در این فصل ϕ یک تابع قیاسی است. یادآوری می‌کنیم که اگر ϕ یک تابع قیاسی باشد آنگاه

$$(۱) \quad \text{به ازای هر } t \in (0, +\infty), \phi(t) < t,$$

$$(۲) \quad \phi(t) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } t = 0.$$

قضیه زیر در مقالات و کتاب‌ها به منکوفسکی-راش منتسب است.

قضیه ۱.۰.۸. [۶۵] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $f: X \rightarrow X$ یک ϕ -انقباض باشد. در این صورت f دارای نقطه ثابت منحصر به فرد $x^* \in X$ است.

مفهوم فضای متریک مدولار توسط چیستاکوف [۱۶] در سال ۲۰۱۰ تعریف گردید و نتایج اساسی و بنیادین در این نوع از فضای متریک گونه اثبات کرد. بسیاری از ریاضی‌دانان وجود و یکتایی نقطه ثابت را برای نگاشت‌های انقباض گونه روی این نوع از فضاها بررسی کردند

([۱]، [۲]، [۳۵]، [۵۳] و [۵۴]). چيستاکوف وجود نقطه ثابت را تحت شرایط انقباض برای خود نگاشت‌هایی روی فضاهای متریک مدولار اثبات کرد. ما در این فصل ϕ - انقباض و Φ - انقباض نقطه به نقطه^۱ را برای فضاهای متریک مدولار تعریف می‌کنیم. هدف از این فصل بحث در مورد وجود و یکتایی نقطه ثابت برای چنین نگاشت‌هایی روی این نوع از فضاهای متریک گونه است.

۱.۸ مفاهیم مقدماتی

در سر تا سر این بخش X یک مجموعه ناتهی، $\lambda > 0$ و برای اختصار نویسی، به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda > 0$ و $\omega : (0, +\infty) \times X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ را به صورت $\omega_\lambda(x, y) = \omega(\lambda, x, y)$ می‌نویسیم.

تعریف ۱.۱.۸. فرض کنید تابع $\omega : (0, +\infty) \times X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ در شرایط زیر، به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\mu > 0$ ؛ $\lambda > 0$ ، صدق کند

(M۱) به ازای هر $\lambda > 0$ ، $\omega_\lambda(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(M۲) به ازای $\lambda > 0$ ، $\omega_\lambda(x, y) = \omega_\lambda(y, x)$.

(M۳) $\omega_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \omega_\lambda(x, z) + \omega_\mu(z, y)$ در این صورت (X, ω) را فضای متریک مدولار^۲ گوییم.

اگر شرط (M۱) با شرط زیر جابه‌جا کنیم

$$(M1') \quad \text{به ازای هر } \lambda > 0, \quad \omega_\lambda(x, x) = 0$$

آنگاه می‌گوییم ω یک پیش متریک مدولار^۳ است. (X, ω) را منظم^۴ گوییم هرگاه شرط ضعیف‌تری از (M۱) برقرار باشد:

$$(x = y) \Leftrightarrow (\omega_\lambda(x, y) = 0 \text{ که } \lambda > 0 \text{ موجود باشد})$$

این شرط نقش بسیار مهمی را در وجود نقطه ثابت برای خودنگاشت‌های انقباض گونه ایفا می‌کند.

تعریف ۲.۱.۸. متر مدولار ω روی X را محدب گوییم به ازای هر $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ و $x, y, z \in X$ ، در شرط زیر صدق کند؛

$$\omega_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \omega_\lambda(x, y) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \omega_\mu(x, y).$$

pointwise Φ -contraction^۱
modular metric space^۲
premodular metric space^۳
regular^۴

ملاحظه ۱.۱.۸. اگر $\lambda < \mu < \infty$ ، آنگاه، (M^1) ، (M^2) و (M^3) نابرابری زیر را نتیجه می‌دهند.

$$\omega_\lambda(x, y) \leq \omega_{\lambda+\mu}(x, x) + \omega_\mu(x, y) = \omega_\mu(x, y)$$

بنابراین تابع $\lambda \rightarrow \omega_\lambda(x, y)$ تابعی نزولی^۵ روی $(\infty, 0)$ است.

تعریف ۳.۱.۸. فرض کنید ω یک پیش متریک مدولار روی X و $x_0 \in X$ ثابت باشد. در این صورت مجموعه‌های $X_\omega = X_\omega(x_0)$ و $X_\omega^* = X_\omega^*(x_0)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$X_\omega = X_\omega(x_0) = \{x \in X \mid \omega_\lambda(x, x_0) \rightarrow 0 \text{ آنگاه } \lambda \rightarrow +\infty\}$$

$$X_\omega^* = X_\omega^*(x_0) = \{x \in X \mid \omega_\lambda(x, x_0) < \infty \text{ موجود باشد که } \lambda = \lambda(x) > 0\}$$

در این صورت X_ω و X_ω^* را فضای مدولار حول x_0 گوییم.

واضح است که $X_\omega \subseteq X_\omega^*$. در حالت کلی این شمول به صورت محض است [۱۶]. در [۱۶] نشان داده شده است که می‌توان X_ω را به متر d_ω که به صورت زیر تعریف شده است مجهز نمود.

$$d_\omega(x, y) = \inf\{\lambda > 0 \mid \omega_\lambda(x, y) \leq \lambda\}$$

که در آن $x, y \in X$.

اگر ω محدب باشد آنگاه $X_\omega = X_\omega^*$ ([۱۶]).

X_ω^* را نیز می‌توان به متر d_ω^* مجهز کرد.

$$d_\omega^*(x, y) = \inf\{\lambda > 0 \mid \omega_\lambda(x, y) \leq 1\}$$

که در آن $x, y \in X^*$ ([۱۶]).

بنابراین اگر ω محدب باشد، آنگاه d_ω و d_ω^* با هم معادل‌اند ([۱۶]).

تعریف ۴.۱.۸. فرض کنید (X, ω) فضای متریک مدولار باشد.

(۱) دنباله $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ را در X ، همگرا به x گوییم هرگاه $\omega_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$.

(۲) دنباله $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ را در X ، ω -کشی گوییم هرگاه

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \omega_\lambda(x_n, x_m) \rightarrow 0$$

(۳) زیر مجموعه D از X_ω -کامل گوییم هرگاه هر دنباله ω -کشی در D ، در D -همگرا باشد.

(۴) زیر مجموعه D از X_ω را ω -بسته گوییم اگر ω -حد، دنباله‌های ω -همگرا در D ، متعلق به D باشند.

(۵) زیر مجموعه D از X_ω را ω - کران دار گوییم هرگاه $\lambda > 0$ موجود باشد که

$$d_\omega(D) = \sup\{\omega_\lambda(x, y) | x, y \in D\} < \infty$$

(۶) زیر مجموعه D از X_ω را ω - فشرده گوییم، هرگاه هر دنباله $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ دارای زیر دنباله‌ای ω - همگرا به نقطه‌ای در D باشد.

(۷) می‌گوییم ω در خاصیت فاتو^۶ صدق می‌کند هرگاه، اگر دنباله‌های $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ به ترتیب ω همگرا به x و y باشند آنگاه

$$\omega_1(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \omega_1(x_n, x).$$

تعریف ۵.۱.۸. فرض کنید ω در خاصیت فاتو صدق کند. به ازای هر $x \in X_\omega$ و $r > 0$ گوی مدولار^۷ به مرکز x و شعاع r به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B_\omega(x, r) = \{y \in X_\omega | \omega_1(x, y) \leq r\}.$$

نکته قابل توجه این که، چون ω در خاصیت فاتو صدق می‌کند، بنابراین گوی‌های مدولار ω - بسته می‌باشند.

تعریف ۶.۱.۸. اگر زیر مجموعه A از X_ω را بتوانیم به صورت اشتراک گوی‌های مدولار بنویسیم آنگاه، A را پذیرفتنی^۸ گوییم. $\mathcal{A}_\omega(X_\omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{A}_\omega(X_\omega) = \{A \subseteq X_\omega | A \text{ است پذیرفتنی}\}$$

واضح است که $\mathcal{A}_\omega(X_\omega)$ نسبت به اشتراک بسته است. $Cov_\omega(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Cov_\omega(A) = \bigcap \{B | A \subset B \text{ و } B \text{ گوی مدولار است}\}$$

اگر A ، ω - کران دار باشد به عبارت دیگر اگر

$$\delta_\omega(A) = \sup\{\omega_1(x, y) | x, y \in A\} < \infty,$$

آنگاه $Cov_\omega(A) \in \mathcal{A}_\omega(X_\omega)$ خوش تعریف است و $Cov_\omega(A) \in \mathcal{A}_\omega(X_\omega)$.

می‌گوییم خانواده $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ در خاصیت اشتراک متناهی صدق می‌کند هرگاه اشتراک هر زیر خانواده متناهی از آن ناتهی باشد.

تعریف ۷.۱.۸. $\mathcal{A}_\omega(X_\omega)$ فشرده گوییم هرگاه هر خانواده $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ از عناصر $\mathcal{A}_\omega(X_\omega)$ ، در خاصیت اشتراک متناهی صدق کند.

لم ۱.۱.۸. فرض کنید (X, ω) یک فضای متریک مدولار باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{A}_\omega(X_\omega)$ فشرده باشد. در این صورت X_ω ، ω فشرده است.

Fato property^۶
modular ball^۷
admissible^۸

۲.۸ نتایج اصلی

در این بخش ابتدا مفهوم ϕ -انقباض را برای خود نگاشت‌ها در فضای متریک مدولار تعریف می‌کنیم که در آن ϕ یک تابع قیاسی است. سپس مفهوم **تولید کننده قیاسی**^۹ را تعریف می‌کنیم و به وسیله آن دسته جدیدی از نگاشت‌های انقباض گونه در فضای متریک مدولار را ارائه می‌دهیم که این نوع انقباض را $\omega - \Phi$ -انقباض نقطه به نقطه گوییم. در این جا Φ یک تولید کننده انقباض است که بعداً تعریف خواهد شد. در نهایت دو قضیه نقطه ثابت جدید برای این رده از نگاشت‌ها در فضای متریک مدولار ارائه خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید (X, ω) فضای متریک مدولار باشد. $T : X \rightarrow X$ را یک $\omega - \phi$ -انقباض گوییم هرگاه $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ یک تابع قیاسی باشد و به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\omega_1(T(x), T(y)) \leq \phi(\omega_1(x, y)).$$

قضیه ۱.۲.۸. فرض کنید (X, ω) فضای متریک مدولار منظم و $D \subseteq X_\omega$ ناتهی، ω -فشرده و ω -کران دار باشد. فرض کنید $T : D \rightarrow D$ یک $\omega - \Phi$ -انقباض باشد. آنگاه T دارای نقطه ثابت منحصربه فرد x_0 است.

برهان. با توجه به فرض به ازای هر $x, y \in D$ داریم

$$\omega_1(T(x), T(y)) \leq \phi(\omega_1(x, y))$$

$x_0 \in D$ را ثابت در نظر بگیرید. آنگاه داریم

$$\omega_1(T^{n+m}(x), T^n(x)) \leq \phi(\omega_1(T^{n+m-1}(x), T^{n-1}(x))).$$

از آن جایی که

$$\omega_1(T^{n+m-1}(x), T^{n-1}(x)) \leq \phi(\omega_1(T^{n+m-2}(x), T^{n-2}(x)))$$

و Φ تابع قیاسی است پس داریم

$$\phi(\omega_1(T^{n+m-1}(x), T^{n-1}(x))) \leq \phi^2(\omega_1(T^{n+m-2}(x), T^{n-2}(x)))$$

و بنابراین

$$\omega_1(T^{n+m}(x), T^n(x)) \leq \phi^n(\omega_1(T^{n+m-2}(x), T^{n-2}(x))).$$

با ادامه این روند داریم

$$\omega_1(T^{n+m}(x), T^n(x)) \leq \phi^n(G_\omega(D)).$$

بنابراین به وضوح نتیجه می‌شود که $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ، ω - کشی است. چون D ، ω - فشرده است بنابراین $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ به نقطه‌ای در D مانند $x_\circ$ ، ω - همگراست. حال نشان می‌دهیم $x_\circ$ نقطه ثابت است.

بدیهی است که

$$\omega_2(x_\circ, T(x_\circ)) \leq \omega_1(x_\circ, T^n(x)) + \omega_1(T(x_\circ), T^n(x_\circ)),$$

در نتیجه به ازای هر $n \geq 1$

$$\omega_2(x_\circ, T(x_\circ)) \leq \omega_1(x_\circ, T^n(x)) + \phi(\omega_1(x_\circ, T^{n-1}(x_\circ)))$$

چون $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ، ω - همگرا به $x_\circ$ است داریم $\omega_2(x_\circ, T(x_\circ)) = \circ$ پس $T(x_\circ) = \circ$ زیرا ω منظم است.

حال نشان می‌دهیم $x_\circ$ ، یگانه است. فرض کنید $x'_\circ$ نقطه ثابت دیگری باشد. در اینصورت

$$\omega_1(x_\circ, x'_\circ) = \omega(Tx_\circ, Tx'_\circ) \leq \phi(\omega_1(x_\circ, x'_\circ)).$$

چون Φ قیاسی است و $\omega_1(a, b) < \infty$ پس $\omega_1(x_\circ, x'_\circ) = \circ$ در نتیجه $x_\circ = x'_\circ$. □

مثال ۱.۲.۸. فرض کنید

$$X = \{(x, \circ) \in \mathbb{R}^2 \mid \circ \leq x \leq 1\} \cup \{(\circ, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \circ \leq y \leq 1\}.$$

نگاشت $\omega_\lambda : (\circ, +\infty) \times X \times X \rightarrow [\circ, +\infty]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\omega_\lambda((x_1, \circ), (x_2, \circ)) &= \frac{4|x_1 - x_2|}{3\lambda} \\ \omega_\lambda((\circ, y_1), (\circ, y_2)) &= \frac{|y_1 - y_2|}{\lambda} \\ \omega_\lambda((x, \circ), (\circ, y)) &= \frac{4x}{3\lambda} + \frac{y}{\lambda}.\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $\lambda \rightarrow +\infty$ آنگاه $X = X_\omega$ و همچنین فضای متریک مدولار کامل است. فرض کنید $T : X_\omega \rightarrow X_\omega$ را به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$T((x, \circ)) = (\circ, x)$$

$$T((\circ, y)) = \left(\frac{y}{4}, \circ\right)$$

با یک محاسبه ساده می‌توانیم نشان دهیم که به ازای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_\omega$ داریم

$$\omega_\lambda(T((x_1, y_1)), T((x_2, y_2))) \leq \phi(\omega_\lambda((x_1, y_1), (x_2, y_2))),$$

که در آن $\Phi(x) = \frac{3}{4}x$. بنابراین T یک $\omega - \phi$ - انقباض است.

بنابراین، T بنا به قضیه ۱.۲.۸ دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است. این نقطه $(\circ, \circ)$ است.

ملاحظه ۱.۲.۸. در قضیه نقطه ثابت برای ϕ - انقباضها در فضاهای متریک کراندار بودن فضاهای متریک لازم نیست. در واقع شرایط انقباض نگاشتها باعث می شود که هر مدار کراندار باشد. اما در فضاهای متریک مدولار، شرایط انقباضی نگاشتها کراندار بودن مدارها را نتیجه نمی دهد. بنابراین کراندار بودن فضای متریک مدولار برای قضیه نقطه ثابت بسیار مهم است.

تعریف ۲.۲.۸. فرض کنید (X, ω) فضای متریک مدولار باشد. نگاشت $\Phi : X \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ را تولید کننده قیاس گوئیم اگر به ازای هر $x \in X$ تابع $\Phi_x : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ضابطه $\Phi_x(t) = \Phi(x, t)$ ، قیاسی باشد.

تعریف ۳.۲.۸. فرض کنید (X, ω) یک فضای متریک مدولار و $D \subseteq X$ ناتهی باشد. نگاشت $T : D \rightarrow D$ را $\Phi - \omega$ - انقباض نقطه ای گوئیم هرگاه تولید کننده قیاس $\Phi : X \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ موجود باشد که به ازای هر $x, y \in D$ و $z \in X$ داشته باشیم

$$\omega_1(f(x), f(y)) \leq \Phi_z(\omega_2(x, y)).$$

قضیه ۲.۲.۸. فرض کنید (X, ω) یک فضای متریک مدولار و $D \subseteq X_\omega$ ، ω - بسته و $\Phi : X \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ تولید کننده قیاس باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{A}_\omega(D)$ فشرده و $T : D \rightarrow D$ یک $\Phi - \omega$ - انقباض نقطه ای باشد. آنگاه T دارای نقطه ثابت یگانه است. علاوه بر آن به ازای هر $x \in D$ مدار $\{T^n(x)\}$ ، ω - همگرا به نقطه ثابت است.

برهان. چون $\mathcal{A}_\omega(D)$ فشرده است بنابراین عضو ناتهی مینیمال $k \in \mathcal{A}_\omega(D)$ موجود است که $T(K) \subseteq K$ واضح است که

$$Cov_\omega(T(K)) = K.$$

ادعا:

$$\delta_\omega(K) = \sup\{\omega(x, y) | x, y \in K\} = \{0\}$$

به عبارت دیگر K تک نقطه ای است.

با توجه به اینکه D ، ω - کراندار است، $\delta_\omega(K) < +\infty$. به عبارت دیگر K نیز ω - کراندار است. چون T ، $\Phi - \omega$ - انقباض نقطه ای است بنابراین به ازای هر $x, y \in D$

$$\omega_1(T(x), T(y)) \leq \Phi_x(\omega_2(x, y))$$

به ازای $x \in K$ ، قرار دهیم

$$r_x(K) = \sup\{\omega_1(x, y) : y \in K\}$$

داریم

$$r_x(k) \leq \delta_\omega(k)$$

. فرض کنید $k \in K$. چون Φ تولید کننده قیاس است پس

$$\omega_1(T(k), T(y)) \leq \Phi_x(\omega_1(k, x)) \leq \Phi_x(r_x(K)).$$

بنابراین به ازای هر $k \in K$,

$$T(K) \subseteq B_\omega(T(x), \Phi_x(r_x(K))).$$

لذا

$$Cov_\omega(T(K)) \subset B_\omega(T(x), \Phi_x(r_x(K))).$$

پس به ازای هر $x \in K$

$$r_{T(x)}(k) \leq \Phi_x(r_x(K)).$$

حال فرض کنید $a \in K$ دلخواه و از این به بعد ثابت باشد، k_a را به صورت زیر تعریف می کنیم؛

$$K_a = \{x \in K | r_x(K) \leq r_a(K)\}$$

چون $a \in K_a$ پس $K_a \neq \emptyset$. علاوه بر آن داریم

$$K_a = \left(\bigcap_{x \in K} B_\omega(x, r_a(K)) \right) \cap K.$$

چون $r_{T(x)}(K) \leq \Phi_x(r_x(K))$ پس

$$T(K_a) \subseteq K_a.$$

بالاخص، به ازای هر $x \in K$ داریم

$$r_x(K) = r_a(K).$$

بنابراین به ازای هر $a \in K$

$$\delta_\omega(K) = \sup_{x \in K} r_x(K) = r_a(K).$$

لذا

$$\delta_\omega(k) \leq \Phi_a(\delta_\omega(k)).$$

از آن جایی که Φ_x قیاسی است پس $\delta_\omega(k) = \circ$ لذا k تک نقطه ای است. پس

$$T(a) = a$$

اگر b نقطه ثابت دیگری برای T باشد در این صورت

$$\omega_1(a, b) \leq \Phi_x(\omega_1(a, b)) \leq \omega_1(a, b)$$

□

چون Φ_x قیاسی است پس $\omega_1(a, b) = \circ$ و چون ω منظم است پس $a = b$.

مراجع

- [1] A.A.N.Abdou and M.A. Khamisi, *Fixed point results of pointwise contractions in modular metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2013).
- [2] A.A.N.Abdou and M.A. Khamisi, *Fixed points of multivalued contraction mappings in modular metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2014).
- [3] T. Abdeljawad ,JO. Alzabut , A. Mukheimerand Y. Zaidan, *Banach contraction principle for cyclical mappings on partial metric spaces*,Fixed Point Theory Appl., (2012).
- [4] A.Abkar ,M. Gabeleh, *Best proximity points for asymptotic cyclic contraction mappings*, NonlinearAnal., (2011), 7261-7268.
- [5] A.Abkar, M. Gabeleh, *Generalized cyclic contractions in partially ordered metric spaces*, Optim. Lett., 6 (2011), 1819– 1830.
- [6] M. Acikgoz, *Some results about best and 2-best approximation on 2-structures*, Mathematica Morica, 13 (2009), 1-11.
- [7] R.F.Agarwal, M.A.EL-Gebeily and D.O'regan, *Generalized contractions in partially ordered metric spaces*, Appl. Anal. (87), (2008) , 109-116.
- [8] A. Aliouche and C. Simpson, *Fixed points and lines in 2-metric spaces*, Adv. Math. 229 (2012), 668 – 690.
- [9] M. A. Al-Thagafi, N. Shahzad, *Convergence and existence results for best proximity points*, Nonlinear Anal, 10 (2009), 3665-3671, .
- [10] T.V.An, N.V.Dung and V.T.L.Hang, *General fixed point theorems on metric and 2–metric space* ,Filomat, 10(2012),2037-2045.
- [11] S.Banach, *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*, Fund. Math, 3 (1922), 133–181.

- [12] M.S. Bakry, *Common Fixed Theorem on Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces*, Gen. Math. Notes. (2015), 69 – 84.
- [13] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Springer, (2012).
- [14] G. J. Birkhoff, *Lattice Theory*, Collquium Publications, American Mathematical Society, Providence, 25 (1967).
- [15] V.V.Chistyakov, *Modular contraction and their application*, Springer Proc. Math. Stat., 32 (2013), 65–92.
- [16] V.V.Chistyakov, *Modular metric spaces I basic concepts*, Nonlinear Anal, 72 (2010), 1-14.
- [17] S.Christensen, *Frames and bases. An introduction course*, Birkhouser Boston, (2008).
- [18] S.Cobzas and C. Mustuta, *Extension of bilinear functionals and best approximation*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math, 43 (1998), 1-13.
- [19] D.Dey and M. Saha, *Some common fixed point theorems in a complete 2-metric space*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. 52 (2013), 79 – 87.
- [20] C.Di Bari, T. Suzuki, C. Vetro, *Best proximity points for cyclic Meir- Keeler contractions*, Nonlinear Anal., 69 (2008), 3790-3794.
- [21] C.R.Diminnie, S. Gahler and A. White, *2-inner product spaces*, Demonstratio Math. 6 (1973), 525-536.
- [22] S.S. Dragomir, *A characterization of best approximants in normed linear spaces*, Acta Mathematica Vietnamica, 25 (2000) 359-366.
- [23] N. V. Dung, N. T. Hieu, N. T. T. Ly, and V. D. Thinh, *Remarks on the fixed point problem of 2-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., 167 (2013), 1-7.
- [24] A.A.Eldred, W.A. Kirk, P. Veeramani, *Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings*, Studia Math., 171 (2005), 283-293.
- [25] S.Elumalai, M.Souraparani, *Best Approximation in linear 2-normed spaces*, General Mathematics, 16 (2008) 73-81.
- [26] R.W.Freese, Y.J.Cho, *Geometry of Linear 2-normed Space*, Nova Science Publishers, Hauppauge, NY, USA. (2001).

- [27] S.Gahler, *2-metrische R aume und ihre topologische struktur*, Math. Nachr. 26 (1963), 115 – 118.
- [28] S.Gahler, *Linear 2-normierte, Raume*.Math.Nachr., 28 (1964),1-43.
- [29] J. G ornicki, *Fixed point theorems for Kannan type mappings*,J. Fixed Point Theory Appl. 19 (2017) 2145-2152.
- [30] H.Gunawan,Mshadi,S.G.Nursuoiamin and I.Sihwaningrum,*orthogonality in 2-normed space revisited*,Univ.Beograd.Publ.Elektrotehn.Fak,Ser.Mat, 17 (2006), 76-83.
- [31] V. Gupta and R. Kaur, *Some common fixed point theorems for a class of A-contractions on 2-metric space*, Int. J. Pure Appl. Math. 78 (2012), 909 - 916.
- [32] J.Harjani, B.López and K.Sadarangan *Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in ordered metric spaces*, Comput. Math. Appl, 61 (2011), 790-796.
- [33] M.Iranmanesh,F.soleimany, *Some results on farthest points in 2-normed space*, Novi Sad J. Math. (2015), 207-215.
- [34] H. Isik, M. S. Sezen, C. Vetro, *φ -best proximity point theorems and applications to variational inequality problems*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19 (2017), 3177-3189.
- [35] D.Jain, A. Padcharoen, P. Kumam and D. Gopal, *A new approach study fixed point of multivalued mapping in modular metric spaces and applications*, Mathematics. 4(2016), 335-344.
- [36] Z.Kadelburg and S. Radenovic, *Remarks on some recent M. Borcut's results in partially ordered metric spaces*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 6(2015), 96-104.
- [37] R.Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc, 60 (1968) 71-76.
- [38] M. A. Khamsi and W. M. Kozłowski, *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces* ,Birkhäuser. (2015).
- [39] A. Khan, A. Siddiqui, *b-orthogonality in 2-normed space*,Bull.Calcutta Math.Soc, 74(1982), 216-222.
- [40] Q.kiran, M.Usman, T.kamran and E.Karapinar, *Existence of best proximity points for controlled proximal contraction*, Fixed point theory App,(2015),207-213.

-
- [41] W. Kirk, N. Shahzadi, *Fixed point Theory in Distance space*, Springer, (2014).
- [42] S.N.Lal, S. Bhattacharya and C. Sreedhar, *Complex 2-normed linear spaces and extension of linear 2-functionals*, Z. Anal. Anwendungen, 20 (2001), 35-53.
- [43] D.Lateef, *Fixed Point Theorems in 2-metric space for Some Contractive Conditions* , International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research, (2018)
- [44] A.Latif, *A fixed point result for multivalued generalized contraction maps* ,Filomat,(2012),929-933.
- [45] Z.Lewandowska, *Linear Operators on Generalized 2-normed Spaces*, Bull.Math.Soc. Sce.Math.Roumanie. 42 (1992) ,353-368.
- [46] Z.Lewandowska, *On 2-normed Sets*, Glasnik Mat, (2003) ,99-110.
- [47] Z.Lewandowska, M.S.Moslehian, A.S.Moghaddam, *Hahn-Banach Theorem in Generalized 2-normed Space*, Communication in Mathematical Analysis, (2006) ,109 -113.
- [48] J.E.Martinez-Legaz, A.M.Rubinov, I.Singer, *Downward sets and thir separation and approximation properties* ,Jornal.Global Optimization,23 (2002),111-137.
- [49] H.Mazaheri, and R. Kazemi, *Some Results on 2-Inner Product Spaces*, Novi Sad J. Math., (2007), 35-40.
- [50] H.Mohebi,A.M.Rubinov, *Best Approximation by Downward Sets with Applications* , Jornal of Approximation Theory, (2006).
- [51] J.M-Moreno, W.Sintunavarat and P.Kumam, *Banach's Contraction Principle for Nonlinear Contraction Mappings in Modular Metric Spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 40(2017), 335-344.
- [52] S. Mondal, L. Kanta Dey, *Some common best proximity point theorems in a complete metric space* , Afr. Mat, 28 (2017) 85-97.
- [53] C.Mongkolkeha, W. Sintunavarat and P. Kumam, *Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2011).
- [54] C.Mongkolkeha, Y.J.Cho and P.Kumam, *Best proximity point for generalized proximal c-contraction mapping in metric space with partial orders*, Jurnal of inequalities and App, (2013),94-105.

- [55] P. R. B. Murthy and M. Rangamma, *Fixed point theorems for convex contractions on cone 2-metric space over Banach algebra*, Advances in Fixed Point Theory. 17 (2018), 83-97.
- [56] A.Ninsri, W. Sintunavarat, *Toward a generalized contractive condition in partial metric spaces with the existence results of fixed points and best proximity points*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20 (2018).
- [57] A.Pariya, P. Pathak, V.H. BadshahV and N.Gupta, *Fixed point theprems for various types of compatible mappings of integral type in modular metric space*, Journal of Mathematics and Informatics. 8 (2017), 7-18.
- [58] S. Radenović, *A note on fixed point theory for cyclic ϕ -contractions*, Fixed Point Theory and Applications, (2015).
- [59] S.Reich, *Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets*, J. Math. Anal. Appl,62 (1978), 104-113.
- [60] Sh. Rezapour, *Proximinal Subspaces of 2-normed Spaces*, Anal. Theory Appl. 22 (2006) , 114-119.
- [61] Sh. Rezapour, *2-proximality in Generalized 2-normed spaces*, Southeast Asian Bull.Math., 33 (2009) , 109-113.
- [62] B. E.Rhoades, *A biased discussion of fixed point theory*, Carpathian J. Math. 23 (2007), 11 – 26.
- [63] F.Riesz and B.SZ-Nagy,*Leconc d;analyse fonctionelle* , Akademiai Kiado, Budapest, (1972).
- [64] A.M.Rubinov, A.J.Zaslavski, *Two porosity results in monotonic analysis*, Numerical Function Analysis and Optimization, 23 (2002) , 651-668.
- [65] I.Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press. (2001).
- [66] S.Sadiq Basha, *Extensions of Banach's contraction principle*, ,Numer.Funct.Anal.Optim.31(2010), 569–576.
- [67] S. Sadiq Basha, *Best proximity point theorems*, Journal of Approximation Theory, 163 (2011), 1772-1781.
- [68] S.Sadiq Basha, *Best proximity point theorems on partially ordered sets*, Optim. Lett. (2012).

- [69] S. Sadiq Basha, N. Shahzad, *Common best proximity point theorems: Global minimization of some real-valued multi-objective functions*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 18 (2016), 587-600.
- [70] S. Sadiq Basha, N. Shazad, R. Jeyaraj, *Common best proximity point: Global optimizations of multi-objective functions*, Applied Mathematics Letters, 24(2011), 883-886.
- [71] S. Sadiq Basha, P. Veeramani, *Best approximations and best proximity pairs*, Acta. Sci. Math. 63 (1997), 289-300, .
- [72] S. Sadiq Basha, P. Veeramani, *Best proximity pair theorems for multi functions with open fibres*, Journal of Approximation Theory, 103 (2000), 119-129.
- [73] S. Sadiq Basha, P. Veeramani, D. V. Pai, *Best proximity pair theorems*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 32 (2001), 1237-1246.
- [74] M. Saha and D. Dey, *Fixed point theorems for a class of A -contractions on a 2-metric space*, Novi Sad J. Math. 40 (2010), 3 - 8.
- [75] B.Samet, C. Vetro, P. Vetro, *Fixed point theorems for α ψ -contractive type mappings*, Non-linear Anal., 75 (2012), 2154-2165.
- [76] V.Sankar Raj, P. Veeramani, *Best proximity pair theorems for relatively nonexpansive mappings*, Applied General Topology, 10 (2009), 21-28.
- [77] V.Sankar Raj, *Best proximity point theorems for non-self mappings*, Fixed Point Theory, 14 (2013), 447-454.
- [78] V.M.Sehgal, S.P.Singh, *A generalization to multi functions of Fan's best approximation theorem*, ,Proc.Amer.Math.Soc, 102 (1988), 534–537.
- [79] M. Sgroi and C. Vetro, *Multi-valued F -contractions and the solution of certain functional and integral equations*, Filomat, 27 (2013), 1259–1268.
- [80] N. Shahzad, S. Sadiq Basha and R. Jeyaraj, *Common best proximity points: Global optimal solutions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 148 (2011), 69-78.
- [81] E. Silverman, *Definitions of area for surfaces in metric spaces*, Rivista Mat.univ, parma, (1951), 47-76.
- [82] I. Singer, *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Ed. Acad. Bucharest (1967).

- [83] I. Singer, *The theory of best approximation and functional analysis*, in "Regional conference series in applied mathematics," SIAM, Philadelphia, (1971).
- [84] S. L. Singh, *Some contractive type principles on 2-metric spaces and applications*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7 (1979), 1-11.
- [85] P. S. Srinivasan, *Best proximity pair theorems*, Acta. Sci. Math, 67 (2001), 421-429.
- [86] S. Thirumangalath and R. Pilakkat, *Best Approximations in Uniformly Convex Linear 2-Normed Spaces*, Ij pam, (2012), 711-719.
- [87] D. Wardowski, *Fixed points of new type of contractive mappings in complete metric space* Fixed Point Theory Appl. 94 (2012).
- [88] A. White, *2-Banach spaces*, Math Nachr, 42 (1969), 43-60.
- [89] K. Włodarczyk, R. Plebaniak, A. Banach, *Best proximity points for cyclic and noncyclic set-valued relatively quasi-asymptotic contractions in uniform spaces*, Nonlinear Anal, 70 (2009), 3332-3341.
- [90] J. Zhang, Y. Su, Q. Cheng, *A note on "A best proximity point theorem for Geraghty-contractions"*, Fixed Point Theory Appl, (2013).

Abstract

In this thesis, the theory of best approximation and the best proximity point which are the generalization of fixed point theory for non-self mapping on metric and metric like spaces (2-norm, 2-metric, and modular Metric, ...) to be studied. we review the 2-metric spaces and define and extend some of the concepts for this type of spaces. We are investigating the 2-normed spaces and then expanding the theory of best approximation in this type of spaces. In the fifth and sixth chapters, we have completed the theory of the best proximity point in complete metric spaces, and by presenting the definition of ϕ -contractions mappings and P -properties, we present new results in this theory.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Functional Analysis

**Best approximation and best proximity point
in metric and 2-metric space**

By: Ali Ganjbakhsh Sanatee

Supervisor

Mahdi Iranmanesh

January 2019