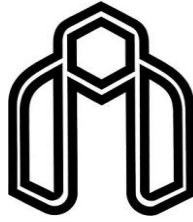


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

## رده‌های ماکسیمال و مینیمال در $p$ -گروه‌ها

راضیه نوذری راد

استاد راهنما :

دکتر سیدحیدر جعفری

استاد مشاور:

دکتر ابراهیم هاشمی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اسفند ۱۳۸۹

## تقدیم به:

و اکنون جایگاهی است (البته هرچند نه بزرگ) که باید به یاد آورم، که بودم و چگونه به اینجا رسیدم. کودکی که به امید دستان **مادر** خود به روی پا ایستاد و با دلگرمی‌های مدام مرا به استواری ایام معرفی کرد. به پاس تشویق‌ها، دلگرمی‌ها و محبت‌های بی‌شائبه‌اش این ناقابل را تقدیم می‌کنم.

**و روح پدرم**، گرچه حضورش اینجا نیست اما یاد همیشه سبزش همیشه برایم روح‌بخش بوده تا در مسیری که گام نهادم توان خود را چنان بیفزایم تا سختی‌ها بر من چیره نشود و او خشنود از من، از آسمان بر من نظر کند تا اشک خشنودیش همچون باران پربرکت بر صورتم جاری شود.

**و خواهرم**، که هرچند دیدارهایمان کوتاه بود اما روحیه‌دهی‌های بی‌نظیرش، خستگی را از وجودم زوده ساخت، به خاطر تمام زحماتش متشکرم.

## تشکر و قدردانی

ستایش بی‌کران مخصوص خداوندی است که عشق به آموختن را در انسانها نهاد و سپاس او را که ساکنان طریقت خود را به یاری می‌گماشت تا توفیقی یابیم خوشه‌چین معرفت و قطره نوش دریای علم باشیم. بالاترین سپاس و تشکر خود را به حضور **خانواده‌ام** عرض می‌دارم که در طول این مدت همراه و پشتیبان من بودند.

و تقدیر ویژه دارم از استاد گرامی **جناب آقای دکتر سیدحیدر جعفری**، جهت روشن نمودن راهی که ابتدای آن بدون وجود ایشان و رهنمودهایشان به کوره راه ختم می‌شد.

و استاد ارجمند **جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی**، جهت تمامی زحماتی که متحمل شدند.

و تمامی **دوستان و عزیزانی** که در به اتمام رساندن این پایان نامه مرا یاری نمودند.

## تعهد نامه

اینجانب راضیه نوذری راد دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه رده های ماکسیمال و مینیمال در  $p$ -گروهها تحت راهنمایی دکتر سیدحیدر جعفری متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

## چکیده

فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد. تعداد رده‌های مزدوجی غیرمرکزی از اندازه داده شده در  $G$  بر  $p - 1$  بخش پذیر است. به طور طبیعی بهتر است گروههایی را بررسی کنیم که این تعداد دقیقاً  $p - 1$  تا باشد. مک دونالد<sup>1</sup> نشان داد اگر  $G$  یک گروه از مرتبه  $p^m$  باشد و  $p - 1$  رده از اندازه  $b = b(G)$  داشته باشد آنگاه  $c(G) \geq 3$ ،  $b \geq 4$  و  $m \leq b^2 + b$ . هدف اصلی این پایان نامه روی رده‌های غیرمرکزی از پهنای مینیمال است. ما گروههایی را بررسی می‌کنیم که تعداد رده‌های از اندازه مینیمال آنها، دقیقاً  $(p - 1)$  تا است. در فصل اول مفاهیم پایه و مقدماتی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم  $p$ -گروهها از رده ماکسیمال را مطالعه می‌کنیم. در فصل سوم گروههای فراآبلی و گروههای از رده ماکسیمال با ویژگی اخیر را بررسی می‌کنیم، و در پایان  $CF$ -گروههای فراآبلی و گروههای فراآبلی از رده ماکسیمال را رده بندی می‌کنیم.

**کلمات کلیدی:** پهنای، رده مزدوجی، رده مینیمال، گروه فراآبلی، درجه جابجایی، گروه استثنایی، رده ماکسیمال، کرانه،  $CF$ -گروه،  $ECF$ -گروه.

---

<sup>1</sup> Macdonald

## مقالات مستخرج از پایان نامه

■ نوذری راد. ر، جعفری. س ح، (۱۳۸۹)، "رده های مینیمال در  $p$ -گروهها"، چهل و یکمین

کنفرانس ریاضی ایران، ۲۱-۲۴ شهریور ۱۳۸۹، دانشگاه ارومیه.

## فهرست مطالب

| عنوان          | صفحه                                                    |
|----------------|---------------------------------------------------------|
| <b>فصل اول</b> | <b>مفاهیم اساسی و مقدماتی</b>                           |
| ۱-۱            | تعاریف و نتایج اولیه ..... ۱                            |
| ۲-۱            | عمل گروهها بر مجموعهها ..... ۶                          |
| ۳-۱            | سریها ..... ۱۱                                          |
| ۴-۱            | معرفی گروههای $Q_{4n}$ ، $D_{2n}$ و $SD_{2^n}$ ..... ۱۶ |
| <b>فصل دوم</b> | <b><math>p</math>-گروههای از رده ماکسیمال</b>           |
| ۱-۲            | تعاریف اساسی و نتایج بنیادی ..... ۱۸                    |
| ۲-۲            | $P$ -گروه ها با شرط $k(G) = 0$ ..... ۴۸                 |
| <b>فصل سوم</b> | <b>رده های مینیمال در <math>p</math> - گروه ها</b>      |
| ۱-۳            | رده های مزدوجی ..... ۵۱                                 |
| ۲-۳            | گروه های فراآبلی ..... ۶۵                               |
| ۳-۳            | رده های مینیمال ..... ۶۹                                |
|                | واژه نامه ..... ۷۵                                      |
|                | فهرست منابع ..... ۷۸                                    |

## فصل اول

### مفاهیم اساسی و مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی را ذکر می‌کنیم. هدف از این فصل، یادآوری، فراهم آوردن اصطلاحات، علامات و مقدماتی است که در فصلهای آتی مورد نیاز خواهد بود.

#### ۱-۱ تعاریف و نتایج اولیه

**تعریف ۱-۱-۱.** فرض کنیم  $G$  یک گروه و  $S \subseteq G$  باشد.  $S$  را مجموعه نرمال می‌گوییم اگر به ازای هر

$$x^{-1}Sx = S, x \in G$$

**تعریف ۱-۱-۲.** فرض کنیم  $G$  یک گروه و  $N \triangleleft G$ ،  $Z(G \bmod N)$  را به صورت

$$Z(G \bmod N)/N = Z(G/N)$$
 تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱-۱-۳.** فرض کنیم  $G$  یک گروه و  $N \triangleleft G$ ،  $C_G(H \bmod N)$  را به صورت

$$C_G(H \bmod N)/N = C_{\frac{G}{N}}(H/N)$$

تعریف می‌کنیم.

**قضیه ۱-۱-۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $x, y$  و  $z$  اعضای  $G$  باشند. در این صورت

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \quad (۱)$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z \quad (۲)$$

**برهان.** مقدماتی است. ■

**نتیجه ۱-۱-۵.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $x, y \in G$  در این صورت اگر  $x \in C([x, y])$  آنگاه

$$[x^n, y] = [x, y]^n, \mathbb{N} \text{ از } n \text{ به ازای هر}$$

**برهان.** به آسانی با استقراء روی  $n$  حکم ثابت می‌شود. ■

**تعریف ۱-۱-۶.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد، و  $A, B \leq G$  زیرگروه

$$\langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$$

از  $G$  را زیرگروه تعویضگر  $A$  و  $B$  می‌نامند، و با علامت  $[A, B]$  نشان می‌دهند.

**لم ۱-۱-۷.** فرض کنیم  $A, B \leq G$ ، که در آن  $G$  یک گروه دلخواه است. در این صورت

$$[A, B] = [B, A] \quad (۱)$$

$$[A_1, B_1] \leq [A, B] \text{ آنگاه } B_1 \leq B \text{ و } A_1 \leq A \quad (۲)$$

$$[A, B] \leq A \text{ آنگاه } A \triangleleft G \quad (۳)$$

$$[A, B] \triangleleft G \text{ آنگاه } B \triangleleft G \text{ و } A \triangleleft G \quad (۴)$$

$$[A, B] \leq B \text{ آنگاه } A \leq N(B) \quad (۵)$$

(۶) اگر  $A \leq B$  و  $A \triangleleft G$  آنگاه شرط لازم و کافی برای آن که  $B/A \leq Z(G/A)$  آن است که  $[G, B] \leq A$ .

(۷) اگر  $\theta$  یک همریختی گروه  $G$  باشد آنگاه  $[\theta(A), \theta(B)] = \theta([A, B])$ .

**تعریف ۱-۱-۸.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد، و  $x_1, \dots, x_n$  اعضای  $G$  باشند. تعویضگر با وزن  $n$   $[x_1, \dots, x_n]$  با استقراء به صورت زیر تعریف می شود

$$[x_1] = x_1, \quad [x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n] \quad (n \geq 2).$$

**تعریف ۱-۱-۹.** فرض کنیم  $G_1, \dots, G_t$  زیرگروههایی از گروه  $G$  باشند. زیرگروه تعویضگر تعمیم یافته  $[G_1, \dots, G_t]$  با استقراء به صورت زیر تعریف می شود

$$[G_1] = G_1, \quad [G_1, \dots, G_t] = [[G_1, \dots, G_{t-1}], G_t] \quad (t > 1).$$

**لم ۱-۱-۱۰** (اتحاد هال-ویت<sup>۱</sup>). فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $x, y, z \in G$  در این صورت،

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1.$$

**برهان.** با استفاده از تعریف تعویضگر مرتبه سوم به آسانی ثابت می شود. ■

**لم ۱-۱-۱۱** (لم سه زیرگروه). فرض کنیم  $H, K$  و  $L$  سه زیرگروه  $G$  باشند و  $N \triangleleft G$  در این صورت اگر دو زیرگروه از سه زیرگروه  $[H, K, L]$ ،  $[K, L, H]$  و  $[L, H, K]$  زیرگروه  $N$  باشند آنگاه سومی نیز چنین است.

**برهان.** قرار می دهیم:  $A = [H, K, L]$ ،  $B = [K, L, H]$ ،  $C = [L, H, K]$  و فرض می کنیم

$B \leq N$  و  $C \leq N$ . فرض کنیم  $h \in H$ ،  $k \in K$  و  $l \in L$ . بنابر اتحاد هال-ویت داریم

$$[h, k, l]^{k^{-1}} = ([l, h^{-1}, k^{-1}]^h)^{-1} ([k^{-1}, l^{-1}, h]^l)^{-1}.$$

از آنجا با توجه به اینکه  $N$  در  $G$  نرمال است و  $B \leq N$  و  $C \leq N$ ، خواهیم داشت  $[h, k, l] \in N$ . حال

فرض می کنیم  $[g, l]$  مولد دلخواهی از  $A$  باشد، که در آن  $g \in [H, K]$  و  $l \in L$ . چون  $g$  حاصلضرب

---

<sup>1</sup> Hall-Witt

تعداد متناهی از تعویضگرهائی به صورت  $[h, k]$  است که در آن  $h \in H$  و  $k \in K$ ، پس  $[g, l]$  به صورت حاصلضرب تعدادی متناهی از مزدوج تعویضگرهائی به صورت  $[h, k, l]$  است که در آن  $h \in H$ ،  $k \in K$  و  $l \in L$ . بنابراین از نرمال بودن  $N$  نتیجه می‌شود که  $[g, l] \in N$ . پس  $A \leq N$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**تعریف ۱-۱-۱۲.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $x \in G$ . مجموعه  $[x, G]$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[x, G] = \{[x, g] | g \in G\}.$$

**لم ۱-۱-۱۳.** اگر  $H$  زیرگروه مشخصه‌ای از  $G$  باشد، آنگاه به ازای تمام خودریختیهایی  $\varphi$  از  $G$ ،  $\varphi(H) = H$ .

**برهان.** فرض می‌کنیم  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  و  $\psi$  وارون  $\varphi$  باشد. لذا  $\psi(H) \leq H$ . بنابراین باید داشته باشیم  $\psi\varphi(H) \leq \varphi(H)$  و در نتیجه  $H \leq \varphi(H)$ . از طرف دیگر طبق فرض داریم  $\varphi(H) \leq H$ . بنابراین  $\varphi(H) = H$ . ■

**نتیجه ۱-۱-۱۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $C \leq G$ . در این صورت اگر  $x \in Z(C)$  و  $y \in N(C)$  آنگاه  $[x, y] \in Z(C)$ .

**برهان.** داریم  $N(C) < Z(C)$  از طرفی  $y \in N(C)$  پس  $Z(C)^y \subseteq Z(C)$ . لذا برای هر  $x \in Z(C)$ ،  $y^{-1}xy \in Z(C)$  از طرفی  $x^{-1} \in Z(C)$  پس  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \in Z(C)$ . ■

**تعریف ۱-۱-۱۵.** فرض کنیم  $G$  یک گروه نابديهی باشد و  $M < G$ .  $M$  را یک زیرگروه ماکسیمال  $G$  می‌نامیم در صورتی که از  $M \leq H \leq G$  نتیجه شود که  $H = M$  یا  $H = G$ .

**توجه.** اگر  $G < M$  و  $|G:M| = p$  که در آن  $p$  یک عدد اول است، آنگاه  $M$  یک زیرگروه ماکسیمال  $G$  است.

**تعریف ۱-۱-۱۶.** فرض کنیم  $G$  یک گروه و  $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$  خانواده‌ای متناهی از زیرگروههای  $G$  باشد.

حاصلضرب مستقیم داخلی خانواده فوق، یا حاصلضرب مستقیم داخلی  $G_i$  ها نامیده می‌شود هرگاه

$$(۱) \quad \text{به ازای هر } i, 1 \leq i \leq n, G_i \leq G.$$

(۲) هر عضو  $g \in G$  به طور منحصر به فردی به شکل  $g = g_1 g_2 \dots g_n$  نوشته شود که  $g_i \in G_i$

$$1 \leq i \leq n.$$

**قضیه ۱-۱-۱۷.** فرض کنیم  $G$  یک گروه آبلی متناهی نابدیهی باشد و  $a \in G$  در این صورت اگر

مرتبه  $a$  از مرتبه هر عضو  $G$  ناکمتر باشد آنگاه  $G$  زیرگروهی مانند  $H$  دارد به طوری که  $G = \langle a \rangle \times H$ .

**برهان.** فرض کنیم  $|G| = p^n$ . با استقراء روی  $n$  حکم را ثابت می‌کنیم. اگر  $n = 1$ ، حکم به

وضوح برقرار است. فرض کنیم  $n > 1$  و  $A = \langle a \rangle$ . گوییم هرگاه  $G = A$  آنگاه حکم بدیهی است. در

این صورت قرار می‌دهیم:  $H = 1$  پس فرض می‌کنیم  $A \neq G$  و  $x$  را از  $G - A$  چنان انتخاب می-

کنیم که کوچکترین مرتبه ممکن را داشته باشد. واضح است که  $x \neq 1$  ثابت می‌کنیم  $|x| = p$ . ادعا

می‌کنیم  $x^p \in A$ ، زیرا در غیر این صورت  $x^p \in G - A$  و داریم  $|x^p| < |x|$  که متناقض با انتخاب  $x$

است. بنابراین،  $\langle x^p \rangle \leq A$  اینک گوییم اگر  $\langle x^p \rangle = A$  آنگاه  $|x| = p|A| = p|a|$  که ممکن نیست،

زیرا بنابر فرض مرتبه  $a$  از مرتبه هر عضو  $G$  ناکمتر است. پس  $\langle x^p \rangle < A$ ، و در نتیجه،  $x^p = a^t$  که

در آن  $|a| > t \geq 0$ ، و  $p|t|$  حال با فرض  $y = a^{-t/p}$  خواهیم داشت،  $(xy)^p = 1$  گوییم چون

$$A \ni y \text{ و } x \notin A \text{ پس } xy \notin A \text{ در نتیجه } |xy| = p \leq |x|. \text{ بنابراین } |x| = p.$$

اینک قرار می‌دهیم  $N = \langle x \rangle$ ، و ملاحظه می‌کنیم که مرتبه  $Na$  در گروه  $G/N$  برابر با مرتبه  $a$

است. زیرا اگر فرض کنیم مرتبه  $a$  برابر  $p^\alpha$  و مرتبه  $Na$  برابر  $p^{\alpha'}$  باشد آنگاه واضح است که  $\alpha' \leq \alpha$ .

از طرف دیگر چون  $a^{p^{\alpha'}} \in \langle x \rangle$  پس به ازای یک  $s$  که  $0 \leq s < p$ ،  $a^{p^{\alpha'}} = x^s$  حال اگر  $s \neq 0$

آنگاه  $x \in A$  که یک تناقض است. بنابراین  $s=0$  و در نتیجه  $a^{p^{\alpha'}} = 1$  پس  $\alpha \leq \alpha'$  و لذا  $\alpha = \alpha'$ . بنابراین مرتبه  $Na$  در گروه  $G/N$  از مرتبه هر عضو نا کمتر است. داریم  $1 \neq G/N$  و  $|G/N| < |G|$ . بنابر فرض استقراء خواهیم داشت،  $G/N = \langle Na \rangle \times \frac{H}{N}$  که در آن  $N \leq H \leq G$ . ثابت می‌کنیم  $G = \langle a \rangle \times H$ . فرض می‌کنیم  $Ng$  عضو دلخواهی از  $G/N$  باشد. بنابراین  $Ng = (Na)^l Nh$  که در آن  $l$  عددی صحیح، و  $h$  عضوی از  $H$  است. چون  $g \in \langle a \rangle H$  پس  $G = \langle a \rangle H$ . اینک فرض می‌کنیم  $z \in \langle a \rangle \cap H$  بنابراین  $1 = Nz \in \langle Na \rangle \cap \frac{H}{N}$  و در نتیجه  $z \in N$ . پس  $z \in A \cap N$  در نتیجه  $1 = \langle a \rangle \cap H$ . بنابراین  $G = \langle a \rangle \times H$  و حکم ثابت می‌شود. ■

## ۲-۱ عمل گروهها بر مجموعه‌ها

**تعریف ۱-۲-۱.** فرض کنیم  $G$  یک گروه و  $X$  مجموعه‌ای ناتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر  $g$  از  $G$  و هر  $x$  از  $X$  عضو یکتایی از  $X$ ، که آن را به علامت  $x \cdot g$  نشان می‌دهیم، وجود داشته باشد به طوری که

$$(1) \text{ به ازای هر } x \text{ از } X, x \cdot 1 = x,$$

$$(2) \text{ به ازای هر } g_1 \text{ و } g_2 \text{ از } G \text{ و هر } x \text{ از } X, x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$$

در این صورت گوییم  $G$  بر  $X$  عمل می‌کند و  $\cdot$  را عمل  $G$  بر  $X$  گویند. برای سهولت در نوشتن به جای  $x \cdot g$  از  $xg$  استفاده می‌شود.

فرض کنیم گروه  $G$  بر مجموعه  $X$  عمل کند،  $g \in G$  و  $x \in X$  گوییم  $g$  عضو (یا نقطه)  $x$  را ثابت نگه می‌دارد هرگاه  $xg = x$ . مجموعه اعضایی از  $G$  که هر عضو  $X$  را ثابت نگه می‌دارند را هسته عمل می‌نامند.

**مثال ۱-۲-۲.** به دو طریق مهم یک گروه بر خودش عمل می‌کند (یعنی  $X = G$ ). یکی از این دو، عمل منتظم است که به ازای هر  $g$  و  $x$  از  $G$ ،  $x \cdot g = xg$ ، که در آن  $xg$  به معنی ضرب دو عضو  $G$  است. در اینجا شرط (۲) در تعریف، همان شرکت‌پذیری است. عمل مهم دیگر  $G$  بر خودش عمل تزویج است، که به صورت  $x \cdot g = x^g = g^{-1}xg$  تعریف می‌شود.

**تعریف ۱-۲-۳.** فرض کنیم  $X$  زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه  $G$  باشد. زیرگروه نرمال تولید شده با همه زیرگروه‌های نرمال  $G$  که جزء  $X$  اند را مغز  $X$  می‌نامیم و با  $Core_G(X)$  (یا  $Core(X)$ ) نشان می‌دهیم.

**قضیه ۱-۲-۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $H \leq G$ . بعلاوه فرض کنیم  $X$  مجموعه همه همدسته‌های راست (چپ)  $H$  در  $G$  باشد. در این صورت یک هم‌ریختی مانند  $\varphi: G \rightarrow S_X$  وجود دارد به طوری که  $Ker \varphi = Core_G(H)$ . بنابراین  $G/Core_G(H)$  با زیرگروهی از  $S_X$  یکرخت است.

**برهان.** به [۲۶، قضیه ۲-۱-۴] رجوع شود. ■

**تعریف ۱-۲-۵.** فرض کنیم گروه  $G$  بر مجموعه ناتهی  $X$  عمل کند و  $x \in X$  در این صورت مجموعه

$$\{g \in G \mid xg = x\}$$

را پایدارساز  $x$  در  $G$  می‌نامیم و با علامت  $St_G(x)$  (یا  $St(x)$ ) نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱-۲-۶.** فرض کنیم گروه  $G$  بر مجموعه  $X$  عمل کند. رابطه  $\sim$  را در  $X$  چنین تعریف می‌کنیم. گوییم  $x_1 \sim x_2$  در صورتی که به ازای عضوی از  $G$  مانند  $g$ ،  $x_1 g = x_2$ ، رابطه  $\sim$  یک رابطه هم‌ارزی روی  $X$  است. هر رده هم‌ارزی را یک مدار<sup>۲</sup> عمل، یا گاهی اوقات یک  $G$ -مدار، می‌نامیم.

---

<sup>1</sup> stabilizer  
<sup>2</sup> orbit

برای  $x \in X$  رده هم‌ارزی شامل  $x$  را مدار  $x$  در  $G$  می‌نامیم و آن را با علامت  $Orb_G(x)$  (یا  $Orb(x)$ ) نشان می‌دهیم.

با توجه به تعاریف فوق،  $Orb_G(x) = \{xg | g \in G\}$ . بر طبق خواص رده‌های هم‌ارزی معلوم می‌شود که مدارها افزایی از  $X$  اند و در نتیجه هر دو مدار متمایز از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر  $X$  است.

**تعریف ۱-۲-۷.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $x \in G$ . مجموعه همه اعضای از  $G$  که با  $x$  مزدوج اند را رده مزدوجی  $x$  می‌نامیم و با  $cl(x)$  نشان می‌دهیم.

فرض کنیم  $G$  یک گروه دلخواه باشد. می‌دانیم  $G$  با تزویج بر  $G$  عمل می‌کند. در اینجا با فرض  $x \in G$  خواهیم داشت  $St(x) = C(x)$  و  $Orb(x) = cl(x)$ . بنابراین به موجب قضیه مدار-پایدارساز،  $|G:C(x)| = |cl(x)|$ . به ویژه، اگر  $G$  متناهی باشد آنگاه  $|cl(x)| = \frac{|G|}{|C(x)|}$ . اینک با توجه به اینکه مدارهای عمل مجموعه  $G$  را افراز می‌کنند خواهیم داشت

$$|G| = |cl(x_1)| + \dots + |cl(x_n)|,$$

که در آن  $x_1, \dots, x_n$  نماینده‌های همه رده‌های مزدوجی متمایز  $G$  اند. بنابراین،

$$|G| = |G:C(x_1)| + \dots + |G:C(x_n)|.$$

این تساوی را معادله رده‌ای  $G$  می‌نامند.

حال فرض کنیم از بین  $x_1, \dots, x_n$  عناصر  $x_{k_1}, \dots, x_{k_t}$  و  $x_{k_t+1}, \dots, x_n$  در مرکز گروه باشند و  $n-t$  عضو باقی مانده که آنها را  $g_1, \dots, g_r$  می‌نامیم چنین نباشند ( $r = n-t$ ). در این صورت معادله رده‌ای به صورت زیر درمی‌آید

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r |G:C(g_i)|.$$

در معادله فوق به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq r$ ،  $|G:C(g_i)| > 1$ .

**لم ۱-۲-۸.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $H \leq G$ . در این صورت  $H \triangleleft G$  اگر و تنها اگر  $H$  اجتماعی از رده‌های مزدوجی  $G$  باشد.

**برهان.** فرض کنیم  $H$  اجتماعی از رده‌های مزدوجی  $G$  باشد، و  $h \in H$  و  $g \in G$ . واضح است که  $g^{-1}hg \in H$  پس  $H \triangleleft G$ .

برعکس، اگر  $H \triangleleft G$  آنگاه به ازای هر  $h$  از  $H$  و هر  $g$  از  $G$ ، داریم  $g^{-1}hg \in H$ . بنابراین  $cl_G(h) \subseteq H$ . در نتیجه  $H = \bigcup_{h \in H} cl_G(h)$ ، یعنی  $H$  اجتماعی از رده‌های مزدوجی  $G$  است. ■

**لم ۱-۲-۹.** فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی باشد و  $N \triangleleft G$ . در این صورت به ازای هر  $x \in G$ ،  $|cl(xN)| \leq |cl(x)| \leq |N||cl(xN)|$ .

**برهان.** تابع  $\varphi: cl(x) \rightarrow cl(xN)$  را با ضابطه  $\varphi(x^g) = x^gN$  تعریف می‌کنیم. به وضوح  $\varphi$  تابعی پوشا است. پس  $|cl(xN)| \leq |cl(x)|$ . حال اگر  $xN$  تصویر  $t$  عنصر  $x_1, \dots, x_t$  و  $x_t$  باشد آنگاه به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq t$ ،  $x_i \in xN$  در نتیجه  $|cl(xN)| \leq |cl(x)| = |N||cl(xN)|$ . بنابراین  $t \leq |N|$  و لذا  $|cl(x)| \leq |N||cl(xN)|$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**تعریف ۱-۲-۱۰.** فرض کنیم  $G$  یک گروه، و  $p$  یک عدد اول باشد. گروه  $G$  را یک  $p$ -گروه می‌نامیم در صورتی که مرتبه هر عضو  $G$  توانی از  $p$  باشد. زیرگروه  $H$  از  $G$  را یک  $p$ -زیرگروه  $G$  گوییم در صورتی که  $H$  یک  $p$ -گروه باشد.

**تعریف ۱-۲-۱۱.**  $p$ -گروه آبلی متناهی  $G$  را آبلی مقدماتی می‌گوییم در صورتی که مرتبه هر عضو نابدیهی  $G$  عدد اول  $p$  باشد.

**لم ۱-۲-۱۲.**  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی است اگر و تنها اگر مرتبه  $G$  توانی از عدد اول  $p$  باشد.

**برهان.** اگر مرتبه  $G$  توانی از عدد اول  $p$  باشد، آنگاه واضح است که مرتبه هر عضو  $G$  باید توانی از عدد اول  $p$  باشد. بنابراین  $G$  یک  $p$ -گروه است.

برعکس، فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد. اگر  $q \neq p$  عددی اول باشد که  $q \mid |G|$  آنگاه بنابر قضیه کوشی  $G$  باید عضوی از مرتبه  $q$  داشته باشد که متناقض با  $p$ -گروه بودن  $G$  است. بنابراین مرتبه  $G$  باید توانی از عدد اول  $p$  باشد. ■

**لم ۱-۲-۱۳.** اگر  $G$  یک  $p$ -گروه باشد، آنگاه هر زیرگروه  $G$  و هر گروه خارج قسمتی  $G$  نیز  $p$ -گروه است.

**قضیه ۱-۲-۱۴.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی نابدیهی باشد و  $N < G$ . در این صورت اگر  $N \neq 1$  آنگاه  $N \cap Z(G) \neq 1$ .

**برهان.** چون  $N < G$ ، گروه  $G$  بر  $N$  با تزویج عمل می‌کند. بنابراین،

$$\begin{aligned} |N| &= \sum_{x \in N} |Orb_G(x)| \\ &= 1 + \sum_{x \in N - \{1\}} |Orb_G(x)|. \end{aligned}$$

حال گوییم چون  $|Orb_G(x)|$  توانی صحیح و نامنفی از  $p$  است و  $p \mid |N|$ ، بنابر تساوی اخیر، طول یکی از  $G$ -مدارها باید برابر یک باشد. پس عضوی نابدیهی مانند  $x_0$  از  $N$  هست که  $Orb_G(x_0) = \{x_0\}$ . در نتیجه به ازای هر  $g$  از  $G$ ،  $x_0^g = x_0$  یعنی  $x_0 \in Z(G) \cap N$  و حکم ثابت می‌شود. ■

نتیجه ۱-۲-۱۵. اگر  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی نابديهی باشد آنگاه  $Z(G) \neq \{1\}$ .

قضیه ۱-۲-۱۶. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد و  $H < G$ . در این صورت،  $H < N(H)$ .

برهان. فرض کنیم  $K = Core_G(H)$ . واضح است که  $G/K$  یک  $p$ -گروه متناهی نابديهی است. بنابراین  $Z(G/K) \neq 1$ . فرض کنیم  $Z(G/K) = L/K$ . لذا  $K < L$  و  $L \triangleleft G$ . اینک از تعریف  $Core_G(H)$  نتیجه می‌شود که  $L \not\leq H$ . ثابت می‌کنیم  $L \leq N_G(H)$ . با اثبات این حکم معلوم خواهد شد که  $H \neq N_G(H)$ . فرض کنیم  $x$  عضو دلخواهی از  $L$  و  $h$  عضو دلخواهی از  $H$  باشد. بنابراین  $xhx^{-1}h^{-1} \in K$  و  $(Kx)(Kh) = (Kh)(Kx)$  حال چون  $K \leq H$  و  $h \in H$ ، خواهیم داشت  $xhx^{-1} \in H$  و در نتیجه  $H \leq H^x$ . چون  $H$  متناهی است پس  $H = H^x$ . بنابراین  $x \in N(H)$ ، یعنی  $L \leq N(H)$ . ■

نتیجه ۱-۲-۱۷. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی نابديهی باشد و  $H \leq G$ . در این صورت  $H$  زیرگروه ماکسیمال  $G$  است اگر و تنها اگر  $H \triangleleft G$  و  $|G/H| = p$ .

### ۳-۱ سریها

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. یک سری نرمال  $G$ ، زنجیری متناهی از زیرگروههای نرمال  $G$  به صورت زیر است

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G.$$

تعریف ۱-۳-۲. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی<sup>۱</sup> گویند در صورتی که به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq r$ ،  $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$

**تعریف ۱-۳-۳.** گروه  $G$  را پوچتوان<sup>۲</sup> گویند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد.

طول کوتاهترین سری مرکزی  $G$  را رده پوچتوانی<sup>۳</sup>  $G$  گویند و آن را با  $c(G)$  نشان می‌دهند.

واضح است که هر گروه آبلی نابدیهی یک گروه پوچتوان از رده پوچتوانی ۱ است.

**لم ۱-۳-۴.** اگر  $G$  یک گروه پوچتوان نابدیهی باشد آنگاه  $Z(G) \neq 1$ .

**لم ۱-۳-۵.** هر  $p$ -گروه متناهی پوچتوان است.

**برهان.** با استقراء نسبت به مرتبه گروه حکم را ثابت می‌کنیم. واضح است که هر گروه از مرتبه

$p$  پوچتوان است. فرض می‌کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی (نابدیهی) باشد. اگر  $G = Z(G)$ ، حکم واضح

است. در غیر این صورت  $G/Z(G)$  یک  $p$ -گروه متناهی (نابدیهی) است که مرتبه آن از مرتبه  $G$

کوچکتر است. بنابراین دارای یک سری مرکزی مانند

$$1 = \frac{G_0}{Z(G)} \leq \frac{G_1}{Z(G)} \leq \dots \leq \frac{G_r}{Z(G)} = \frac{G}{Z(G)}$$

است. اینک ملاحظه می‌شود که سری

$$1 \leq Z(G) = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G.$$

یک سری مرکزی برای  $G$  است. ■

به موجب بند (۶) لم ۱-۱-۷، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

**لم ۱-۳-۶.** گروه  $G$  پوچتوان است اگر و تنها اگر سری نرمالی مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq r$ ،  $[G, G_i] \leq G_{i-1}$

---

<sup>1</sup> central series  
<sup>2</sup> nilpotent  
<sup>3</sup> nilpotency class

قضیه ۱-۳-۷. فرض کنیم  $G$  یک گروه پوچتوان از رده  $r$  باشد. در این صورت

(۱) هر زیرگروه  $G$ ، پوچتوان از رده حداکثر  $r$  است.

(۲) هر تصویر همریخت  $G$ ، پوچتوان از رده حداکثر  $r$  است.

نتیجه ۱-۳-۸. اگر  $G$  پوچتوان باشد آنگاه هر گروه خارج قسمتی  $G$  نیز پوچتوان است.

تعریف ۱-۳-۹. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. دنباله  $\{\Gamma_n(G)\}_{n=1}$  از زیرگروههای  $G$  را به استقراء

چنین تعریف می کنیم

$$\Gamma_1(G) = G, \quad \Gamma_n(G) = [G, \Gamma_{n-1}(G)] \quad (n > 1).$$

در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه (یعنی  $G$ ) پیش نیاید، به جای  $\Gamma_n(G)$  از  $\Gamma_n$  استفاده می کنیم.

به آسانی با استقراء ثابت می شود که هر  $\Gamma_n$  یک زیرگروه مشخصه  $G$  است. در نتیجه به ازای

هر  $n$  طبیعی،  $\Gamma_n \triangleleft G$ . بر طبق بند (۳) لم ۱-۱-۷ به ازای هر  $n$  طبیعی که  $n > 1$ ,

$$\Gamma_n = [G, \Gamma_{n-1}] \leq \Gamma_{n-1}$$

تعریف ۱-۳-۱۰. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. سری

$$G = \Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \dots \geq \Gamma_n(G) \geq \dots$$

را سری مرکزی پایینی  $G$  می نامند.

تعریف ۱-۳-۱۱. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. دنباله  $\{Z_n(G)\}_{n=0}$  از زیرگروههای  $G$  را به استقراء

چنین تعریف می کنیم

$$Z_0(G) = 1, \quad \frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right) \quad (n \geq 1).$$

در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه پیش نیاید، به جای  $Z_n(G)$  از  $Z_n$  استفاده می کنیم.

به آسانی با استقراء ثابت می‌شود که هر  $Z_n$  یک زیرگروه مشخصه  $G$  است. بنابراین، به ازای

هر  $n$  صحیح نامنفی،  $Z_n \triangleleft G$ .

**تعریف ۱-۳-۱۲.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. سری

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) \leq \dots$$

را سری مرکزی بالایی  $G$  می‌نامند.

**لم ۱-۳-۱۳.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. همچنین فرض کنیم اعداد صحیح نامنفی  $r$  و  $s$  چنان

باشند که  $1 = \Gamma_{r+1}(G)$  یا  $Z_s(G) = G$  در این صورت  $G$  پوچتوان است.

**لم ۱-۳-۱۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه پوچتوان باشد. در این صورت اگر

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

یک سری مرکزی برای  $G$  باشد آنگاه

(۱) به ازای هر  $n$  طبیعی که  $n \leq r+1$ ،  $\Gamma_n \leq G_{r-n+1}$

(۲) به ازای هر  $n$  صحیح نامنفی که  $n \leq r$ ،  $G_n \leq Z_n$

**برهان.** با استقراء نسبت به  $n$  هر دو حکم را ثابت می‌کنیم. واضح است که حکم (۱) به

ازای  $n=1$  برقرار است. فرض کنیم  $1 \leq n < r+1$  و حکم به ازای  $n$  برقرار باشد. داریم

$$\Gamma_{n+1} = [G, \Gamma_n] \leq [G, G_{r-n+1}] \leq G_{r-n}.$$

بنابراین (۱) ثابت می‌شود. برای اثبات (۲) گوییم حکم به ازای  $n=0$  به وضوح برقرار است. فرض

کنیم  $0 \leq n < r$  و حکم به ازای  $n$  برقرار باشد. داریم  $[G, G_{n+1}] \leq G_n \leq Z_n$ . پس به ازای هر  $x$

از  $G_{n+1}$  و هر  $g$  از  $G$ ،  $[x, g] \in Z_n$ . در نتیجه  $[Z_n x, Z_n g] = Z_n [x, g] = Z_n$ . بنابراین

■  $Z_n x \in Z(\frac{G}{Z_n}) = \frac{Z_{n+1}}{Z_n}$  و در نتیجه  $x \in Z_{n+1}$  پس  $G_{n+1} \leq Z_{n+1}$  و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۱-۳-۱۵. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. در این صورت

(۱)  $G$  پوچتوان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند  $r$  موجود باشد به طوری که  $\Gamma_{r+1} = 1$ .

(۲)  $G$  پوچتوان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند  $s$  موجود باشد به طوری که  $Z_s = G$ .

برهان. به عنوان نمونه حکم (۱) را ثابت می‌کنیم. با توجه به لم ۱-۳-۱۳، تنها کافی است ثابت

کنیم اگر  $G$  پوچتوان باشد، سری مرکزی پایینی  $G$  به زیرگروه بدیهی ختم می‌شود. فرض

کنیم  $G$  پوچتوان باشد. بنابراین دارای یک سری مرکزی مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

است. به موجب بند (۱) لم ۱-۳-۱۴، به ازای هر  $n$  طبیعی که  $n \leq r+1$ ، داریم  $\Gamma_n \leq G_{r-n+1}$

بنابراین، با  $n = r$ ، خواهیم داشت  $\Gamma_{r+1} \leq G_0 = 1$  و حکم ثابت می‌شود. ■

نتیجه ۱-۳-۱۶. فرض کنیم  $G$  یک گروه پوچتوان باشد. در این صورت اگر  $r$  کوچکترین عدد صحیح

نامنفی باشد که  $\Gamma_{r+1} = 1$  یا  $Z_r = G$  آنگاه  $c(G) = r$ .

قضیه ۱-۳-۱۷. به ازای هر دو عدد طبیعی  $i$  و  $j$ ،  $[F_i, F_j] \leq F_{i+j}$ .

برهان. با استقراء نسبت به  $j$  حکم را ثابت می‌کنیم. اگر  $j = 1$  آنگاه به ازای هر  $i$  طبیعی،

$$[F_i, Y_1] = [F_i, G] = F_{i+1}.$$

فرض کنیم حکم به ازای عدد طبیعی  $j$  برقرار باشد. بنابراین، به ازای هر  $i$  طبیعی،

$$[F_i, F_j, G] = [[F_i, F_j], G] \leq [F_{i+j}, G] = F_{i+j+1},$$

$$[G, F_i, F_j] = [[G, F_i], F_j] = [F_{i+1}, F_j] \leq F_{i+j+1}.$$

اینک از لم ۱-۱-۱۱ داریم

$$[F_i, F_{j+1}] = [F_{j+1}, F_i] = [[F_j, G], F_i] = [F_j, G, F_i] \leq F_{i+j+1}.$$

یعنی حکم به ازای  $j+1$  نیز برقرار است. ■

## ۴-۱ معرفی گروههای $SD_{\frac{n}{2}}$ و $Q_{4n}$ ، $D_{2n}$

تعریف ۱-۴-۱. گروه  $G = \langle a, b | a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ ،  $(n \geq 3)$  را گروه دووجهی<sup>۱</sup>

مرتبه  $2n$  می‌نامیم و با  $D_{2n}$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۴-۱. گروه  $G = \langle a, b | a^n = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ ،  $(n \geq 2)$  را گروه کواترنيون تعمیم

یافته<sup>۲</sup> (یا چهارگانه) از مرتبه  $4n$  می‌نامیم و با  $Q_{4n}$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳-۴-۱. گروه  $G = \langle a, b | a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}} \rangle$ ،  $(n > 3)$  را گروه

نیم دووجهی<sup>۳</sup> از مرتبه  $2^n$  می‌نامیم و با  $SD_{\frac{n}{2}}$  نمایش می‌دهیم.

لم ۴-۴-۱. (۱)  $Z(Q_{4n}) = \langle a^n \rangle$  از مرتبه ۲ می‌باشد.

(۲)  $Q_{4n}$  پوچتوان است اگر و تنها اگر  $n$  توانی از ۲ باشد.

(۳) هر عضو خارج از  $\langle a \rangle$  در  $Q_{4n}$  از مرتبه ۴ است.

برهان. به [۲۵] رجوع شود. ■

لم ۵-۴-۱. (۱)  $D_{2n}$  پوچتوان است اگر و تنها اگر  $n$  توانی از ۲ باشد.

(۲) هر عضو  $\langle a \rangle$  از  $D_{2n}$  از مرتبه ۲ است.

---

<sup>1</sup> dihedral group  
<sup>2</sup> generalized quaternion group  
<sup>3</sup> semidihedral group

$$Z(D_{\sqrt{n}}) = \{e, a^{n/\sqrt{n}}\} \quad (3)$$

برهان. به [۲۵] رجوع شود. ■

لم ۱-۴-۶. برای هر عضو از مرتبه ۲ در  $D_{\sqrt{n}}$  مانند  $x$  یکی از حالت‌های زیر برقرار است.

$$(1) \text{ اگر } n \text{ فرد باشد آنگاه } |C_{D_{\sqrt{n}}}(x)| = 2$$

$$(2) \text{ اگر } n \text{ زوج باشد، } x \in Z(D_{\sqrt{n}}) \text{ و } x \in \langle a \rangle \text{ آنگاه } |C_{D_{\sqrt{n}}}(x)| = 2n$$

$$(3) \text{ اگر } n \text{ زوج باشد و } x \notin Z(D_{\sqrt{n}}) \text{ آنگاه } |C_{D_{\sqrt{n}}}(x)| = 4$$

برهان. به [۲۵] رجوع شود. ■

## فصل دوم

### $p$ -گروه‌های از رده ماکسیمال

در این فصل  $p$ -گروه‌ها از رده پوچتوانی ماکسیمال را تعریف می‌کنیم. همچنین اگر فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد، یک کران پایین با جمله‌هایی از  $p, m$  و درجه جابجایی برای کرانه  $G$  بدست می‌آوریم. در پایان فصل نیز،  $p$ -گروه‌های از رده ماکسیمال را بررسی می‌کنیم که کرانه آنها صفر است.

توجه. در این فصل و همچنین فصل بعدی،  $Y_i(G)$  (و یا مختصراً  $Y_i$ ) به ازای  $i \geq 2$ ، همان جملات سری مرکزی پایینی است.

### ۱-۲ تعاریف اساسی و نتایج بنیادی

لم ۱-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $N \leq G$ . در این صورت اگر  $G/N$  دوری باشد آنگاه

$$G' = [G, N]$$

برهان. داریم

$$K = [G, N] \leq [G, G] = G'$$

چون  $N \leq G$  پس  $K \subseteq N$  حال گروه  $G/K$  را در نظر می‌گیریم. چون  $G/N$  دوری است و  $(G/K)/(N/K) \cong G/N$ ، پس  $(G/K)/(N/K)$  نیز دوری است. از طرفی

$$[G/K, N/K] = [G, N]K/K = 1.$$

بنابراین  $N/K \subseteq Z(G/K)$  از طرفی چون  $\frac{G/K}{N/K}$  دوری است پس  $\frac{G/K}{Z(G/K)}$  دوری است، و لذا  $G/K$  آبلی است. در نتیجه  $G' \subseteq K$  و حکم ثابت می‌شود. ■

در یک گروه ناآبلی و پوچتوان  $G$ ،  $Y_{\frac{1}{2}}(G) = G'$  و  $Y_{\frac{1}{2}}(G) \neq Y_{\frac{1}{3}}(G)$ . بنابراین با قرار دادن  $N = Y_{\frac{1}{2}}(G)$  در لم ۱-۱-۲، خواهیم داشت  $[G, Y_{\frac{1}{2}}(G)] = Y_{\frac{1}{3}}(G) \neq G'$ . بنابراین  $G/Y_{\frac{1}{2}}(G)$  نمی‌تواند دوری باشد. به ویژه اگر  $G$  یک  $p$ -گروه ناآبلی باشد، چون  $G$  پوچتوان است پس  $|G:Y_{\frac{1}{2}}(G)| \geq p^2$ . همچنین اگر  $G$  یک  $p$ -گروه از رده پوچتوانی  $m-1$  ( $m \geq 3$ ) باشد آنگاه به ازای  $i = 3, 4, \dots, m$ ، هر یک از گروه‌های  $Y_{i-1}(G)/Y_i(G)$  از مرتبه حداقل  $p$  هستند. بنابراین  $G$  از مرتبه حداقل  $p^m$  است. در نتیجه یک گروه از مرتبه  $p^m$ ، پوچتوان از رده حداکثر  $m-1$  است.

**تعریف ۱-۲-۲.**  $p$ -گروه  $G$  را از رده ماکسیمال می‌نامیم هرگاه  $G$  از مرتبه  $p^m$  و رده پوچتوانی  $m-1$  باشد.

**توجه.** اگر  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد آنگاه  $|G:Y_{\frac{1}{2}}(G)| = p^2$  و به ازای  $i = 3, 4, \dots, m$ ،  $|Y_{i-1}(G):Y_i(G)| = p$ .

**لم ۱-۲-۳.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و  $N$  یک زیرگروه نرمال از  $G$  باشد به طوری که  $|G:N| = p^r$  و  $r \geq 2$  در این صورت  $N = Y_r(G)$ .

**برهان.** چون  $|G:N| = p^r$  پس  $|G/N| = p^r$ . در نتیجه رده پوچتوانی  $G/N$  حداکثر  $r-1$  است. بنابراین  $Y_r(G/N) = 1$  از طرفی

$$Y_j(G/N) = Y_j(G)N/N \quad (j = 2, 3, \dots).$$

بنابراین خواهیم داشت  $Y_r(G/N) = Y_r(G)N/N = 1$  در نتیجه  $Y_r(G) \leq N$  اما

$$\blacksquare \quad Y_r(G) = N \quad \text{و در نتیجه} \quad |N| = |Y_r(G)| \quad \text{لذا} \quad |G:Y_r(G)| = p^r = |G:N|$$

**تعریف ۲-۱-۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد و  $m$  و  $n$  اعداد صحیحی باشند که  $3 \leq m \leq n$  را

یک  $CF$ -گروه  $(G \in CF(m, n, p))$  یا  $G$  گوئیم هرگاه  $G$  از مرتبه  $p^n$  باشد،  $c(G) = m - 1$  و

$$\text{به ازای } i = 3, 4, \dots, m, \quad |Y_{i-1}(G):Y_i(G)| = p$$

توجه. اگر  $G \in CF(m, n, p)$  و  $m = n$  آنگاه  $G$  یک گروه از رده ماکسیمال است.

**تعریف ۲-۱-۵.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد.  $G$  را یک  $ECF$ -گروه  $(G \in ECF(m, n, p))$  یا  $G$  گوئیم

هرگاه  $G \in CF(m, n, p)$  و  $G/Y_p(G)$  آبلی مقدماتی باشد.

**لم ۲-۱-۶.** فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  و  $N$  یک زیرگروه نرمال از  $G$  باشد به طوری که  $|N| = p^i$

$$\text{و } N \subseteq Y_p(G) \quad \text{در این صورت} \quad N = Y_{m-i}(G)$$

**برهان.** با استقراء روی  $m - i$  حکم را ثابت می‌کنیم. اگر  $i = m - 2$  آنگاه  $|N| = p^{m-2}$

$$\text{و } |Y_{m-i}(G)| = |Y_p(G)| = p^{m-2} \quad \text{از طرفی} \quad N \subseteq Y_p(G) \quad \text{بنابراین} \quad N = Y_p(G) \quad \text{حال}$$

فرض می‌کنیم  $m - i > 2$  چون  $G/N \triangleleft Y_p(G)/N \triangleleft Y_p(G)/N \cap Z(G/N) \neq 1$  پس  $1 \neq Y_p(G)/N \cap Z(G/N)$  در

نتیجه عنصری مانند  $xN \in Y_p(G)/N \cap Z(G/N)$  وجود دارد که  $o(xN) = p$  قرار می‌دهیم

$$M = \langle x, N \rangle \quad \text{در نتیجه} \quad |M| = p^{i+1}, \quad M \triangleleft G \quad \text{و} \quad N < M \leq Y_p(G) \quad \text{بنابر فرض استقراء}$$

$$M = Y_{m-i-1}(G) \quad \text{اما} \quad M/N \text{ زیرگروه نرمال } G/N \text{ است و } |M/N| = p^{i+1}/p^i = p \quad \text{بنابراین}$$

$$M/N \leq Z(G/N) \quad \text{یعنی} \quad [G, M] \leq N \quad \text{در نتیجه} \quad [G, M] = [G, Y_{m-i-1}(G)] = Y_{m-i}(G) \leq N$$

$$\blacksquare \quad \text{از طرفی} \quad |N| = p^i = |Y_{m-i}(G)| \quad \text{پس} \quad N = Y_{m-i}(G)$$

فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  ( $m > 3$ ). قرار می‌دهیم

$$Y_1(G)/Y_p(G) = C_{G/Y_p(G)}(Y_p(G)/Y_p(G)).$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$Y_1(G)/Y_p(G) = \{g \in G \mid \forall x \in Y_p(G) \quad [g, x] \in Y_p(G)\}.$$

یعنی  $Y_1(G)$  زیرگروهی از  $G$  است به طوری که

$$[Y_1(G), Y_p(G)] \leq Y_p(G). \quad (1-2)$$

لم ۷-۱-۲. فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  ( $m > 3$ ). در این صورت

(۱)  $Y_1(G)$  یک زیرگروه سره و مشخصه از  $G$  است.

$$Y_p(G) \leq Y_1(G) \quad (2)$$

برهان. (۱) فرض کنیم  $Y_1(G)$  زیرگروه سره نباشد. یعنی  $Y_1(G) = G$ . بنابراین طبق رابطه

(۱-۲) خواهیم داشت

$$[Y_1(G), Y_p(G)] = [G, Y_p(G)] = Y_p(G) \leq Y_p(G).$$

که یک تناقض است. بنابراین  $Y_1(G)$  زیرگروه سره از  $G$  است.

طبق تعریف سری مرکزی پایینی،  $Y_p(G)$  و  $Y_p(G)$  زیرگروه‌های مشخصه از  $G$  هستند. چون  $G$  متناهی

است پس  $Y_1(G)/Y_p(G) = C_{G/Y_p(G)}(Y_p(G)/Y_p(G))$  زیرگروه مشخصه از  $G/Y_p(G)$  است.

بنابراین  $Y_1(G)$  زیرگروه مشخصه  $G$  است.

(۲) چون  $G \in CF(m, n, p)$  پس  $|Y_p(G):Y_p(G)| = |Y_p(G):Y_p(G)| = p$  در نتیجه

$|Y_p(G):Y_p(G)| = p^2$ . بنابراین  $Y_p(G)/Y_p(G)$  آبلی است. در نتیجه خواهیم داشت

$$Y_p(G)/Y_p(G) \leq C_{G/Y_p(G)}(Y_p(G)/Y_p(G)) = Y_1(G)/Y_p(G).$$

بنابراین  $Y_p(G) \leq Y_1(G)$  ■

لم ۸-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک گروه پوچتوان از رده  $m-1$  ( $m > 3$ ) باشد، و برای  $i = 3, 4, \dots, m$ ،  
 $Y_{i-1}(G)/Y_i(G)$  دوری باشد. همچنین فرض کنیم به ازای  $i = 3, 4, \dots, m-1$  زیرگروهی از  
 $G$  باشد به طوری که  $K_i/Y_{i+1}(G) = C_{G/Y_{i+1}(G)}(Y_{i-1}(G)/Y_{i+1}(G))$  در این صورت  $G/K_i$  یک  
گروه دوری است و  $|G/K_i| = |Y_i(G)/Y_{i+1}(G)|$ .

برهان. به [۱، قضیه ۵-۲] رجوع شود. ■

نتیجه ۹-۱-۲. اگر  $G \in CF(m, n, p)$  آنگاه  $|G:Y_1(G)| = p$ .

برهان. اگر در لم ۸-۱-۲، قرار دهیم  $i = 3$ ، آنگاه داریم

$$K_3/Y_4(G) = C_{G/Y_4(G)}(Y_3(G)/Y_4(G)) = Y_3(G)/Y_4(G).$$

لذا  $G/Y_1(G)$  دوری است و  $|G/Y_1(G)| = |Y_3(G)/Y_4(G)| = p$  بنابراین  $|G:Y_1(G)| = p$ . ■

در گروههای از رده ماکسیمال، از رابطه  $|G:Y_3(G)| = p^2$  و نتیجه ۹-۱-۲، داریم  
 $|Y_1(G):Y_3(G)| = p$ . بنابراین با قرار دادن  $G = Y_0$ ، سری  $\{Y_i\}_{i \geq 0}$  را بدست می آوریم که به  
ازای هر  $i$ ،  $0 \leq i \leq m-1$ ،  $|Y_i:Y_{i+1}| = p$ .

لم ۱۰-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  ( $m \geq 5$ ) باشد. قرار می دهیم  
 $\bar{G} = G/Z(G)$  در این صورت به ازای هر  $i$ ،  $\bar{Y}_i = Y_i(\bar{G})$ .

برهان. ابتدا فرض می کنیم  $i \geq 2$ . چون  $\bar{G}/\bar{Y}_2 \cong G/Y_2$  و  $G/Y_2$  آبلی است پس  $\bar{G}/\bar{Y}_2$  نیز

آبلی است. در نتیجه  $Y_3(\bar{G}) \subseteq \bar{Y}_2$  حال فرض می کنیم  $Y_{i-1}(\bar{G}) \subseteq \bar{Y}_{i-1}$  داریم

$$Y_i(\bar{G}) = [Y_{i-1}(\bar{G}), \bar{G}] \subseteq [\bar{Y}_{i-1}, \bar{G}] = \bar{Y}_i.$$

در نتیجه  $Y_i(\bar{G}) \subseteq \bar{Y}_i$  قرار می دهیم  $U_i = \frac{U_i}{Z(G)}$  که  $U_i \leq G$  داریم

$$1 \subset Z(G) = U_{m-1} \subset U_{m-2} \subset \dots \subset U_2 \subset U_1 \subset G,$$

$$1 \subset Z(G) = Y_{m-1} \subset Y_{m-2} \subset \dots \subset Y_2 \subset Y_1 \subset G.$$

چون به ازای  $2 \geq i$ ،  $U_i \subseteq Y_i$  پس بنابر لم ۲-۱-۳،  $U_i = Y_i$ . بنابراین  $Y_i(\bar{G}) = \bar{Y}_i$ . حال فرض می‌کنیم

$i = 1$ . داریم  $Y_1(\bar{G}) = C_{\bar{G}/Y_1(\bar{G})}(Y_2(\bar{G})/Y_1(\bar{G})) = C_{\bar{G}/\bar{Y}_1}(\bar{Y}_2/\bar{Y}_1) \cong C_{G/Y_1}(Y_2/Y_1)$  از

طرفی  $\bar{Y}_1/\bar{Y}_1 = C_{\bar{G}/\bar{Y}_1}(\bar{Y}_2/\bar{Y}_1)$  لذا  $|\bar{Y}_1/\bar{Y}_1| = |C_{G/Y_1}(Y_2/Y_1)|$  و  $\bar{Y}_1/\bar{Y}_1 \subseteq C_{\bar{G}/\bar{Y}_1}(\bar{Y}_2/\bar{Y}_1)$

بنابراین  $Y_1(\bar{G}) = \bar{Y}_1$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**تعریف ۲-۱-۱۱.** فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$ ،  $m \geq 4$ . در این صورت درجه جابجایی  $^1 G$  را به

صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t = t(G) = \max \left\{ l \leq m - 2 \mid \forall i, j \in \mathbb{N} \quad [Y_i, Y_j] \leq Y_{i+j+l} \right\}.$$

به وضوح  $t(G) \geq 0$ .

**لم ۲-۱-۱۲.** اگر  $Y_1$  آبدی باشد آنگاه  $t(G) = m - 2$ .

**لم ۲-۱-۱۳.** فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$ ،  $m > 3$ ،  $s \geq 0$  و به ازای هر  $i \geq 1$ ،  $[Y_1, Y_i] \leq Y_{i+1+s}$ .

در این صورت به ازای هر  $i, j \geq 1$ ،  $[Y_j, Y_i] \leq Y_{i+j+s}$ .

**برهان.** به استقراء روی  $j$  حکم را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض، حکم به ازای  $j = 1$  برقرار

است. حال فرض می‌کنیم حکم برای  $j = k$  برقرار باشد. پس  $[Y_k, Y_i] \leq Y_{i+k+s}$ . حال

داریم  $[Y_k, Y_i, G] \subseteq [Y_{i+k+s}, G] = Y_{i+k+1+s}$  از طرفی

$$[Y_i, G, Y_k] = [Y_{i+1}, Y_k] = [Y_k, Y_{i+1}] \subseteq Y_{k+1+i+s}.$$

لذا بنابر لم سه زیرگروه داریم  $[Y_{k+1}, Y_i] = [G, Y_k, Y_i] \subseteq Y_{i+k+1+s}$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**قضیه ۲-۱-۱۴.** فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  و  $(m \geq 5)$  و  $t(G/Y_{m-1}) > 0$  در این صورت

(۱) اگر  $m$  فرد باشد آنگاه  $t(G) \geq 1$

(۲) اگر  $m$  زوج باشد آنگاه،  $t(G) \geq 1$  اگر و تنها اگر  $Y_{\frac{m-1}{2}}(G)$  آبلی باشد.

برهان. به [۱، قضیه ۲-۱۰] رجوع شود. ■

نتیجه ۲-۱-۱۵. فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  و  $Y_p(G)$  آبلی باشد. در این صورت  $t(G) \geq 1$ .

برهان. به [۱، نتیجه ۲-۱۰] رجوع شود. ■

قضیه ۲-۱-۱۶. فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$ . در این صورت اگر  $m$  فرد باشد و  $1 \leq m \leq 2p + 1$

آنگاه  $t(G) \geq 1$ .

برهان. به [۱، قضیه ۲-۱۱] رجوع شود. ■

نتیجه ۲-۱-۱۷. فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$ . در این صورت اگر  $m \geq 4$  آنگاه  $t(G/Z(G)) \geq 1$ .

قضیه ۲-۱-۱۸. فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  ( $m > 3$ ). در این صورت  $t(G) \geq 1$  اگر و تنها

اگر  $Y_1(G) = C_G(Y_{m-2}(G))$ .

برهان. به [۱، قضیه ۲-۱۴] رجوع شود. ■

قضیه ۲-۱-۱۹. فرض کنیم  $G \in CF(m, n, p)$  ( $m > 3$ ). در این صورت

(۱) اگر  $t(G) \geq 1$  آنگاه  $G$ ،  $p^2 - p$  رده تزویج از مرتبه ماکزیمم  $p^{m-2}$  دارد که مجموعه نرمال

$G - Y_1(G)$  را می پوشاند.

(۲) اگر  $t(G) = 0$  آنگاه  $G$ ،  $(p-1)^2$  رده تزویج از مرتبه ماکزیمم  $p^{m-2}$  دارد که مجموعه نرمال

$G - (Y_1(G) \cup C_G(Y_{m-2}(G)))$  را می پوشاند.

برهان. به [۱، نتیجه ۲-۱۵] رجوع شود. ■

قضیه ۲-۱-۲۰. فرض کنیم  $G \in ECF(m, n, p)$ ،  $m \geq p + 1$  و  $Y_p(G)$  آبلی باشد. در این

صورت به ازای  $i = 1, 2, \dots, p$ ،  $[Y_1, Y_i] \leq Y_{m-p+i}$ .

برهان. به [۱، قضیه ۳-۱۰] رجوع شود. ■

لم ۲-۱-۲۱. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد. در این صورت  $[Y_i, Y_i] = [Y_i, Y_{i+1}]$ .

برهان. طبق تعریف سری مرکزی پایینی،  $Y_i \supset Y_{i+1}$ . همچنین  $Y_i$  و  $Y_{i+1}$  در  $G$  نرمال هستند،

پس  $Y_{i+1}$  در  $Y_i$  نرمال است. از طرفی  $|Y_i : Y_{i+1}| = p$ . بنابراین  $Y_i/Y_{i+1}$  دوری است. در نتیجه به

موجب لم ۲-۱-۱،  $[Y_i, Y_{i+1}] = Y_i'$ . بنابراین  $[Y_i, Y_{i+1}] = [Y_i, Y_i]$ . ■

توجه. در ادامه فصل،  $m \geq 4$  فرض شده است.

لم ۲-۱-۲۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این

صورت یا  $t(G) = m - 2$  یا  $t(G) \leq m - 4$ .

برهان. اگر  $t(G) \geq m - 3$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$[Y_1, Y_1] \leq Y_{3+t(G)} \leq Y_{3+m-3} = Y_m = 1.$$

در نتیجه  $Y_1 \leq Z(Y_1)$ . از طرفی  $Y_1/Y_1$  دوری است. پس لزوماً  $Y_1$  آبلی است. لذا بنابر لم ۲-۱-۱۲،

$t(G) = m - 2$  در نتیجه برای هر  $p$ -گروه از رده ماکسیمال، اگر  $Y_1$  آبلی باشد آنگاه  $t(G) = m - 2$

و در غیر این صورت  $t(G) \leq m - 4$ . ■

قضیه ۲-۱-۲۳. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  ( $p \geq 7$ ) باشد. در این

صورت  $2t(G) \geq m - 2p + 5$ .

برهان. به [۳] رجوع شود. ■

تعریف ۲-۱-۲۴. فرض کنیم  $S$  زیرمجموعه ناتهی از  $G$  باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$r_G(S) = |\{cl_G(g) | cl_G(g) \cap S \neq \emptyset\}|.$$

توجه.  $r_G(G)$  همان تعداد رده های مزدوجی  $G$  است که با  $r(G)$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۱-۲۵. فرض کنیم  $s_0 \in G - (Y_1 \cup C(Y_{m-1}))$  و  $s_1 \in Y_1 - Y_2$  در این صورت به ازای

$$s_i = [s_{i-1}, s_0], \quad i \geq 2$$

لم ۲-۱-۲۶. با مفروضات تعریف ۲-۱-۲۵، اگر  $i \leq m-1$  آنگاه  $s_i \in Y_i - Y_{i+1}$  و اگر  $i \geq m$  آنگاه

$$s_i = 1$$

برهان. به [۳] رجوع شود. ■

تعریف ۲-۱-۲۷. اگر قرار دهیم  $z_0 = r_G(s_0 Y_1)$  و به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq m-1$ ،

$$z_i = r_{Y_i}(s_i Y_{i+1}), \quad \sigma_G = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$$

برای  $\bar{G} = G/Z(G)$  قرار می دهیم  $\bar{z}_0 = r_{\bar{G}}(\bar{s}_0 Y_1(\bar{G}))$  و به ازای  $i = 1, 2, \dots, m-2$

$$\bar{z}_i = r_{Y_i(\bar{G})}(\bar{s}_i Y_{i+1}(\bar{G}))$$

توجه. قرار می دهیم  $z_0 = z, s_0 = s$  و  $\bar{z}_0 = \bar{z}, \bar{s}_0 = \bar{s}$

توجه. برای اختصار، بردار  $(p^n, p^{n-1}, \dots, p, 1)$  را با علامت  $\tau_n$  نمایش می دهیم.

فرض کنیم  $G$  یک گروه از مرتبه  $p^m = p^{n+e}$  باشد که  $e \in \{0, 1\}$ . حال  $e$  در [۶] نشان می دهد

یک عدد صحیح مانند  $k = k(G) \geq 0$  وجود دارد به طوری که

$$r(G) = n(p^2 - 1) + p^e + k(p^2 - 1)(p - 1).$$

قرار می دهیم  $r(G) = f_k(|G|)$  و  $k(G)$  را کرانه  $G$  گوئیم. همچنین اگر  $\bar{G} = G/Z(G)$  آنگاه

$$r(\bar{G}) = f_{\bar{k}}(|\bar{G}|)$$

لم ۲-۱-۲۸. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد به طوری که

$$m = 2n + e \quad \text{و} \quad e \in \{0, 1\} \quad \text{در این صورت}$$

$$\frac{z}{p} + \frac{z_1}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-1}}{p^n} + \frac{z_n}{p^{n+1}} + \dots + \frac{z_{m-1}}{p^m} + \frac{1}{p^{m(p^2-1)}} = \frac{r(G)}{p^2-1}.$$

برهان. به [۲] رجوع شود. ■

لم ۲-۱-۲۹. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد که  $m = 2n + e$  و

$$e \in \{0, 1\} \text{ در این صورت } \sigma_G = (z, z_1, \dots, z_{n-1}, \tau_{n-1+e}),$$

$$\frac{z}{p} + \frac{z_1}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-1}}{p^n} = n + k(p-1). \quad (2-2)$$

برهان. طبق تعریف داریم  $\sigma_G = (z, z_1, \dots, z_{m-1})$  برای  $i \in \{n, \dots, m-1\}$

داریم  $1 = Y_m = Y_{2n+1} \leq Y_{2i+1} \leq [Y_i, Y_{i+1}] = [Y_i, Y_i]$ . بنابراین  $Y_i$  آبدی است. در نتیجه

$$z_i = r_{Y_i}(s_i Y_{i+1}) = |s_i Y_{i+1}| = p^{m-i-1}$$

$$(z_n, z_{n+1}, \dots, z_{m-1}) = (p^{n-1+e}, p^{n-2+e}, \dots, 1) = \tau_{n-1+e}.$$

بنابراین  $\sigma_G = (z, z_1, \dots, z_{n-1}, \tau_{n-1+e})$ . بنابر لم ۲-۱-۲۸، داریم

$$\begin{aligned} \frac{z}{p} + \frac{z_1}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-1}}{p^n} + \frac{z_n}{p^{n+1}} + \dots + \frac{z_{m-1}}{p^m} + \frac{1}{p^{m(p^2-1)}} \\ = \frac{r(G)}{p^2-1} = \frac{f_k(|G|)}{p^2-1} = n + \frac{p^e}{p^2-1} + k(p-1). \end{aligned} \quad (3-2)$$

اکنون با توجه به اینکه به ازای  $i = n, \dots, m-1$ ،  $z_i = p^{m-i-1}$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{m-1} \frac{z_i}{p^{i+1}} &= \sum_{i=n}^{m-1} p^{m-2i-2} \\ &= p^{m-2} \sum_{i=n}^{m-1} (p^{-2})^i = p^{m-2} \frac{(p^{-2})^m - (p^{-2})^n}{p^{-2}-1} \\ &= p^{m-2} \frac{p^{-2m}(1-p^{2m-2n})}{p^{-2}(1-p^2)} = \frac{(p^{m+e}-1)}{p^m(p^2-1)}. \end{aligned}$$

حال با جایگذاری این مقدار در رابطه (۳-۲)، رابطه (۲-۲) بدست می آید. ■

**تعریف ۲-۱-۳۰.** فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. در این صورت مجموعه  $\mathcal{F}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F} = \{G \mid t(G) \neq t(G/Z(G)) \text{ و } G \text{ یک } p\text{-گروه از رده ماکسیمال است}\}.$$

**لم ۲-۱-۳۱.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این صورت

$$(۱) \text{ اگر } t(G) = ۰ \text{ آنگاه } G \in \mathcal{F}.$$

$$(۲) \text{ اگر } Y_1(G/Z(G)) \text{ آبلی باشد آنگاه } G \in \mathcal{F}.$$

**برهان.** (۱) چون  $m \geq ۴$  پس بنابر نتیجه ۲-۱-۱۷،  $t(G/Z(G)) = t(\bar{G}) > ۰$ . از طرفی

$$t(G) = ۰. \text{ بنابراین } t(G) \neq t(G/Z(G)) \text{ در نتیجه } G \in \mathcal{F}.$$

$$(۲) \text{ با توجه به اینکه } Y_1(G/Z(G)) \text{ آبلی است، خواهیم داشت}$$

$$t(G) = (m-۱) - ۲ = m-۳ \neq t(G).$$

بنابراین  $G \in \mathcal{F}$ . ■

**لم ۲-۱-۳۲.** اگر  $m = ۴$  آنگاه  $t(G) = ۲$  و  $G \in \mathcal{F}$ .

**برهان.** بنابر لم ۲-۱-۲۲،  $t(G) = m-۲ = ۴-۲ = ۲$  یا  $t(G) \leq m-۴ = ۰$ . از

طرفی  $Y_1 = C\left(\frac{Y_2}{Y_4}\right) = C_G(Y_2)$  در نتیجه  $t(G) \neq ۰$ . بنابراین  $t(G) = ۲$ . از طرفی چون برای

$$m = ۳, Y_1(G) \text{ و درجه جابجایی تعریف نمی‌شود پس } G \in \mathcal{F}. \quad \blacksquare$$

**لم ۲-۱-۳۳.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد. در این صورت  $t(\bar{G}) \geq t(G)$ .

**برهان.** طبق تعریف به ازای هر  $i, j \geq ۱$ ،  $[Y_i, Y_j] \leq Y_{i+j+t(G)}$ . در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} [\bar{Y}_i, \bar{Y}_j] &= \left[ \frac{Y_i Z(G)}{Z(G)}, \frac{Y_j Z(G)}{Z(G)} \right] = \frac{[Y_i, Y_j] Z(G)}{Z(G)} \\ &\leq \frac{Y_{i+j+t(G)} Z(G)}{Z(G)} = \bar{Y}_{i+j+t(G)} \end{aligned}$$

بنابراین طبق تعریف درجه جابجایی لزوماً  $t(\bar{G}) \geq t(G)$ . ■

لم ۲-۱-۳۴. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد و  $x \in G$  در این صورت

اگر  $[x] \cap s^i Y_1 \neq \emptyset$  و  $[x] \cap s^j Y_1 \neq \emptyset$  آنگاه  $i = j$ .

برهان. چون  $[x] \cap s^i Y_1 \neq \emptyset$  و  $[x] \cap s^j Y_1 \neq \emptyset$  پس عناصر  $y_1, y_2 \in Y_1$  و  $g_1, g_2 \in G$

وجود دارند به طوری که  $x^{g_1} = s^i y_1$  و  $x^{g_2} = s^j y_2$ . اینک گروه  $G/Y_1$  را در نظر می‌گیریم،

خواهیم داشت  $xY_1 = xY_1^{g_1 Y_1} = s^i Y_1$  و  $xY_1 = xY_1^{g_2 Y_1} = s^j Y_1$  بنابراین  $s^{i-j} \in Y_1$ . حال

اگر  $i \neq j$  آنگاه  $(p, (i-j)) = 1$  و  $\langle s^{i-j} \rangle = \langle s \rangle \subseteq Y_1$  در نتیجه  $s \in Y_1$  که یک تناقض است.

بنابراین  $i = j$ . ■

لم ۲-۱-۳۵. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این صورت اگر

$$t(G) \geq 1 \text{ آنگاه } z = \bar{z} = p$$

برهان. چون  $t(G) \geq 1$  پس بنابر قضیه ۲-۱-۱۹،  $G$  دقیقاً  $p^2 - p$  رده تزویج از مرتبه ماکزیمم

$p^{m-2}$  دارد که مجموعه نرمال  $G - Y_1(G)$  را می‌پوشاند. بنابراین

$$r_G(G - Y_1) = r_G\left(\bigcup_{j=1}^{p-1} s^j Y_1\right) = \frac{|G - Y_1(G)|}{p^{m-2}} = p^2 - p.$$

از طرفی بنابر لم ۲-۱-۳۴، داریم

$$\begin{aligned} r_G\left(\bigcup_{j=1}^{p-1} s^j Y_1\right) &= \sum_{j=1}^{p-1} r_G(s^j Y_1(G)) \\ &= r_G(sY_1(G)) + r_G(s^2 Y_1(G)) + \cdots + r_G(s^{p-1} Y_1(G)) \\ &= r_G(sY_1(G)) + r_G(sY_1(G)) + \cdots + r_G(sY_1(G)) = (p-1)r_G(sY_1(G)). \end{aligned}$$

بنابراین  $z = r_G(sY_1(G)) = p$

می‌دانیم  $t(\bar{G}) \geq 1$ . بنابراین مشابه قسمت بالا ثابت می‌شود  $\bar{z} = p$ . ■

لم ۲-۱-۳۶. فرض کنیم  $G \in \mathcal{F}$  یک  $p$ -گروه از مرتبه  $p^m$  باشد. در این صورت

(۱) به ازای  $1 \leq i \leq (m - t(G))/2 - 1$ ،  $z_i = \bar{z}_i$

(۲) به ازای  $i = (m - t(G))/2, \dots, m - 1$ ،  $z_i = p^{m-(i+1)}$

(۳) به ازای  $i = (m - t(G))/2, \dots, m - 2$ ،  $\bar{z}_i = p^{m-(i+2)}$

(۴) اگر  $t(G) \geq 1$  آنگاه  $z = \bar{z} = p$

(۵) اگر  $t(G) = 0$  آنگاه  $z = 2p - 1$  و  $\bar{z} = p$

**برهان.** به [۲۱، لم ۹-۲] رجوع شود. ■

**لم ۱-۲-۳۷.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد که  $m = 2n + e$  و

$e \in \{0, 1\}$  در این صورت

$$\frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \frac{z_2 - \bar{z}_2}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-2+e} - \bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} = (k - \bar{k})(p - 1). \quad (4-2)$$

$$z_{n-1} = \begin{cases} p^n & t(G) \geq 1 \\ p^{n-1} & t(G) = 0 \end{cases} \quad \text{بعلاوه اگر } e = 0 \text{ آنگاه}$$

**برهان.** اگر  $e = 1$  آنگاه  $|G| = p^{2n+1}$  و  $|\bar{G}| = p^{2n}$ . بنابراین به موجب لم ۱-۲-۲۹، خواهیم

داشت

$$\frac{z - \bar{z}}{p} + \frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-1} - \bar{z}_{n-1}}{p^n} = (k - \bar{k})(p - 1).$$

چون  $e = 1$  پس  $m$  فرد است. در نتیجه بنابر قضیه ۱-۲-۱۶،  $t(G) \geq 1$ . بنابراین به موجب

لم ۱-۲-۳۶،  $z = \bar{z} = p$ . در نتیجه رابطه (۴-۲) برقرار است.

اگر  $e = 0$  آنگاه  $|G| = p^{2n}$  و  $|\bar{G}| = p^{2n-1} = p^{2(n-1)+1}$ . دوباره به موجب لم ۱-۲-۲۹، داریم

$$\frac{z - \bar{z}}{p} + \frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-2} - \bar{z}_{n-2}}{p^{n-1}} + \frac{z_{n-1}}{p^n} = (k - \bar{k})(p - 1) + 1. \quad (5-2)$$

اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر  $t(G) \geq 1$ ، آنگاه بنابر لم ۱-۲-۳۵،  $z = \bar{z} = p$  از طرفی داریم

$$[Y_{n-1}, Y_{n-1}] = [Y_{n-1}, Y_n] \leq Y_{\gamma_{n-1}+t(G)} \leq Y_{\gamma_n} = Y_m = 1.$$

بنابراین  $Y_{n-1}$  آبی است و  $Z_{n-1} = |s_{n-1}Y_n| = p^n$  در نتیجه  $\frac{Z_{n-1}}{p^n} + \frac{Z-\bar{Z}}{p} = 1$  و از رابطه (۵-۲)، رابطه (۴-۲) بدست می‌آید.

حالت دوم: اگر  $t(G) = 0$  آنگاه بنابر لم ۳۱-۱-۲،  $G \in \mathcal{F}$  و بنابر لم ۳۵-۱-۲،  $Z = 2p - 1$  و  $\bar{Z} = p$  از طرفی داریم

$$[\bar{Y}_{n-1}, \bar{Y}_{n-1}] = [\bar{Y}_{n-1}, \bar{Y}_n] \leq \bar{Y}_{\gamma_{n-1}} = \bar{Y}_{m-1} = 1.$$

در نتیجه  $\bar{Y}_{n-1}$  آبی است و  $\bar{Z}_{n-1} = |\bar{s}_{n-1}\bar{Y}_n| = p^{n-1}$  بنابر لم ۳۶-۱-۲،  $Z_{n-1} = \bar{Z}_{n-1} = p^{n-1}$  و از رابطه (۵-۲) رابطه (۴-۲) بدست می‌آید. ■

لم ۳۸-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. قرار می‌دهیم

$$\bar{G} = G/Z(G). \text{ در این صورت به ازای } i = 1, \dots, m-1, Z_i \geq \bar{Z}_i \text{ و به ازای هر } i, Z_i \leq p\bar{Z}_i.$$

برهان. تابع

$$\varphi: A = \{cl_{Y_i}(x) \mid cl_{Y_i}(x) \cap s_i Y_{i+1} \neq \emptyset\} \rightarrow \bar{A} = \{cl_{\bar{Y}_i}(\bar{x}) \mid cl_{\bar{Y}_i}(\bar{x}) \cap \bar{s}_i \bar{Y}_{i+1} \neq \emptyset\}$$

را با ضابطه  $\varphi(cl(x)) = cl(\bar{x})$  تعریف می‌کنیم. اگر  $cl_{\bar{Y}_i}(\bar{x}) \cap \bar{s}_i \bar{Y}_{i+1} \neq \emptyset$  آنگاه  $g \in G$  وجود دارد

به طوری که  $(xZ(G))^{gZ(G)} \in \bar{s}_i \bar{Y}_{i+1}$ . در نتیجه  $y \in Y_{i+1}$  وجود دارد که  $x^g Z(G) = s_i y Z(G)$

بنابراین به ازای  $z \in Z(G)$ ،  $x^g = s_i y z \in s_i Y_{i+1}$ ، در نتیجه  $cl_{Y_i}(x) \cap s_i Y_{i+1} \neq \emptyset$  از طرفی،  $\varphi$  به

وضوح تابعی پوشا است. بنابراین  $\bar{Z}_i = |\bar{A}| \leq |A| = Z_i$

اگر  $[\bar{y}] = [\bar{x}]$  آنگاه  $g \in G$  وجود دارد به طوری که  $y^{g_1} Z(G) = xZ(G)$  در نتیجه به

ازای  $z_1 \in Z(G)$ ،  $y^{g_1} = xz_1$ ، بنابراین  $y = (xz_1)^{g_1^{-1}}$  پس  $[y] = [xz_1]$  در نتیجه

$\{[y] \in \{[xz_1] | z_1 \in Z(G)\}$  پس تصویر معکوس هر مجموعه  $\bar{A}$  توسط  $\varphi$  حداکثر  $p$  عضوی است.

$$\blacksquare z_i = |A| \leq p|\bar{A}| = p\bar{z}_i$$

**نتیجه ۳۹-۱-۲.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m = p^{n+e}$  باشد. در این صورت نامساوی زیر برقرار است.

$$\bar{k} \leq k \leq p\bar{k} + n - 2 + e.$$

**برهان.** به موجب لم ۳۷-۱-۲، داریم

$$\frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \frac{z_2 - \bar{z}_2}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-2+e} - \bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} = (k - \bar{k})(p - 1).$$

اکنون با توجه به اینکه به ازای  $i = 1, \dots, m - 1$ ،  $z_i \geq \bar{z}_i$  خواهیم داشت

$$0 \leq (k - \bar{k})(p - 1). \text{ در نتیجه } k \geq \bar{k}. \text{ از طرفی به ازای هر } i, z_i \leq p\bar{z}_i \text{ لذا } z_i - \bar{z}_i \leq (p - 1)\bar{z}_i$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (k - \bar{k})(p - 1) &= \frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \frac{z_2 - \bar{z}_2}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-2+e} - \bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} \\ &\leq (p - 1) \left( \frac{\bar{z}_1}{p^2} + \dots + \frac{\bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} \right). \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

چون  $\bar{z} = p$  و  $|\bar{G}| = p^{n+e-1} = p^{n+e-1+e-e-1+1} = p^{2(n-1+e)+1-e}$  از لم ۲۹-۱-۲، داریم

$$\frac{\bar{z}_1}{p^2} + \dots + \frac{\bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} = n - 1 + e + \bar{k}(p - 1) - 1 = n - 2 + e + \bar{k}(p - 1).$$

اکنون با قرار دادن این مقدار در رابطه (۶-۲) خواهیم داشت

$$(k - \bar{k})(p - 1) \leq (p - 1)(n - 2 + e + \bar{k}(p - 1)).$$

در نتیجه  $k - \bar{k} \leq (p - 1)\bar{k} + n - 2 + e$ . بنابراین  $k \leq p\bar{k} + n - 2 + e$  و حکم ثابت

می‌شود.  $\blacksquare$

نتیجه ۴۰-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^{n+e} = p^m$  باشد. در این

صورت  $k = \bar{k}$  اگر و تنها اگر به ازای  $i = 1, \dots, n-2+e$   $z_i = \bar{z}_i$

برهان. فرض می‌کنیم به ازای  $i = 1, \dots, n-2+e$   $z_i = \bar{z}_i$  بنابر لم ۳۷-۱-۲، داریم

$$0 = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \frac{z_2 - \bar{z}_2}{p^3} + \dots + \frac{z_{n-2+e} - \bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} = (k - \bar{k})(p - 1).$$

در نتیجه  $k - \bar{k} = 0$  بنابرین  $k = \bar{k}$ .

برعکس، فرض می‌کنیم  $k = \bar{k}$  به موجب لم ۳۷-۱-۲، خواهیم داشت

$$\frac{z_1 - \bar{z}_1}{p^2} + \frac{z_2 - \bar{z}_2}{p^3} + \dots + \frac{z_{n-2+e} - \bar{z}_{n-2+e}}{p^{n-1+e}} = 0.$$

حال چون  $z_i - \bar{z}_i \geq 0$  پس به ازای  $i = 1, \dots, n-2+e$   $z_i = \bar{z}_i$  ■

نتیجه ۴۱-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد. در این صورت اگر  $t(G) = 0$

آنگاه  $k = \bar{k}$ .

برهان. چون  $t(G) = 0$  پس  $G \in \mathcal{F}$ . لذا بنابر لم ۳۶-۱-۲، به ازای  $i = 1, \dots, n-2+e$

$z_i = \bar{z}_i$  بنابرین به موجب نتیجه ۴۰-۱-۲،  $k = \bar{k}$  ■

قضیه ۴۲-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی و  $N$  یک زیرگروه نرمال  $G$  باشد. در این صورت

$$r(G) \leq r(N)r(G/N)$$

برهان. به [۵] رجوع شود. ■

لم ۴۳-۱-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و  $\bar{G} = G/Z(G)$  در این

$$\text{صورت } r(\bar{G}) \leq r(G) \leq pr(\bar{G})$$

برهان. بنابر قضیه ۴۲-۱-۲،  $r(G) \leq r_G(Z(G))r(\bar{G})$  از طرفی

$$r_G(Z(G)) = |\{cl_G(g) | cl_G(g) \cap Z(G) \neq \emptyset\}| = |Z(G)|.$$

بنابراین  $r(G) \leq pr(\bar{G})$  اینک تابع  $\varphi: CL(G) \rightarrow CL(G)$  را با ضابطه  $\varphi([g]) = [\bar{g}]$  تعریف

می‌کنیم. به وضوح تابع  $\varphi$  پوشا است. در نتیجه  $r(\bar{G}) \leq r(G)$  و حکم ثابت می‌شود. ■

لم ۲-۱-۴۴. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و  $H$  زیرمجموعه ای ناتهی از  $G$  باشد. در این

$$\text{صورت } r_{\bar{G}}(\bar{H}) \leq r_G(H)$$

برهان. تابع

$$\varphi: A = \{[x] | x \in G, [x] \cap H \neq \emptyset\} \rightarrow B = \{[xZ(G)] | [xZ(G)] \cap \bar{H} \neq \emptyset\}$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح  $\varphi$  تابع است. اگر  $[xZ(G)] \in B$  و

$[xZ(G)] \cap \bar{H} \neq \emptyset$  آنگاه  $g \in G$  و  $h \in H$  وجود دارد که  $x^g Z(G) = hZ(G)$  بنابراین به

ازای  $z_1 \in Z(G)$ ،  $x^g = hz_1$  در نتیجه  $x^g z_1^{-1} = h$  و چون  $z_1^{-1}$  با  $g$  جابجا می‌شود پس

$g^{-1}(xz_1^{-1})g = h$  بنابراین  $[xz_1^{-1}] \cap H \neq \emptyset$ . لذا  $\varphi$  پوشا است. در نتیجه  $|B| \leq |A|$ ، و حکم

ثابت می‌شود. ■

تعریف ۲-۱-۴۵. روی مجموعه  $\{p \text{ یک عدد اول است} | p\}$  توابع زیر را تعریف می‌کنیم

اگر  $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$F_\alpha(p) = \begin{cases} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} = p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p + 1, & \alpha \geq 0; \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

اگر  $\alpha \in \mathbb{Z}$  و زوج باشد،

$$I_\alpha(p) = \begin{cases} \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^2-1} = p^\alpha + p^{\alpha-2} + \dots + p^2 + 1, & \alpha \geq 0; \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

اگر  $\alpha \in \mathbb{Z}$  و فرد باشد،

$$J_\alpha(p) = \begin{cases} \frac{I_{\alpha+1}(p) - (\alpha+2)/2}{p-1} = (p+1) \sum_{i=1}^{(\alpha+1)/2} ip^{\alpha+1-2i}, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

به ازای  $\alpha \geq 0$ ، توابع  $F_\alpha(p)$ ،  $I_\alpha(p)$  و  $J_\alpha(p)$  چند جمله ای‌هایی از  $p$  و با درجه  $\alpha$  هستند. به

علاوه رابطه‌های زیر را داریم

(۱) اگر  $\alpha \geq 0$  آنگاه

$$pF_{\alpha-1}(p) = p \frac{p^{\alpha-1}}{p-1} = \frac{p^{\alpha+1}-p}{p-1} = \frac{p^{\alpha+1}-p+1-1}{p-1} = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} - 1 = F_\alpha(p) - 1.$$

(۲) اگر  $\alpha \geq 0$  و زوج باشد آنگاه

$$p^r I_{\alpha-r}(p) = p^r \frac{p^{\alpha-1}}{p^r-1} = \frac{p^{\alpha+r}-p^r}{p^r-1} = \frac{p^{\alpha+r}-p^r+1-1}{p^r-1} = \frac{p^{\alpha+r}-1}{p^r-1} - 1 = I_\alpha(p) - 1.$$

(۳) اگر  $\alpha \geq 1$  و فرد باشد آنگاه

$$\begin{aligned} p^r J_{\alpha-r}(p) &= p^r \frac{I_{\alpha-1}(p) - \frac{(\alpha+1)}{r}}{p-1} = \frac{p^r I_{\alpha-1}(p) - p^r \frac{(\alpha+1)}{r}}{p-1} \\ &= \frac{I_{\alpha+1}(p) - 1 - p^r \frac{(\alpha+1)}{r}}{p-1} = \frac{I_{\alpha+1}(p) - \frac{(r+\alpha p^r + p^r)}{r}}{p-1} \\ &= \frac{I_{\alpha+1}(p) - \frac{(r+\alpha p^r + p^r + \alpha - \alpha + 1 - 1)}{r}}{p-1} \\ &= \frac{I_{\alpha+1}(p) - \frac{\alpha+r+(\alpha+1)(p^r-1)}{r}}{p-1} \\ &= \frac{I_{\alpha+1}(p) - \frac{(\alpha+r)}{r}}{p-1} - \frac{(\alpha+1)}{r}(p+1) = J_\alpha(p) - \frac{(\alpha+1)}{r}(p+1). \end{aligned}$$

لم ۲-۱-۴۶. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد و  $t(G) = t$ . در این صورت

$$I_{t-r}(p) + J_{t-r}(p) \geq F_{t-r}(p) \text{ و همچنین } J_{t-r}(p) \geq F_{t-r}(p)$$

برهان. اگر  $t - 3 < 0$  آنگاه  $I_{t-3}(p) = J_{t-4}(p) = J_{t-3}(p) = F_{t-3}(p) = 0$  و حکم برقرار

است. اگر  $t = 3$  آنگاه  $J_{t-4}(p) = 0$  و  $I_0(p) = F_0(p) = 1$  و لذا حکم برقرار است. برای  $t - 4 \geq 0$

داریم

$$\begin{aligned} I_{t-3}(p) + J_{t-4}(p) &= p^{t-3} + p^{t-4} + \dots + p^3 + 1 + (p+1) \sum_{i=1}^{\frac{t-3}{2}} ip^{t-3-2i} \\ &= p^{t-3} + p^{t-4} + \dots + p^3 + 1 + (p+1)(p^{t-4} + 2p^{t-5} + \dots + \frac{t-4}{2}p^2 + \frac{t-3}{2}) \\ &= p^{t-3} + p^{t-4} + \dots + p + 1 + p^{t-4} + p^{t-5} + \dots + \frac{t-4}{2}p + \frac{t-3}{2} \\ &= F_{t-3}(p) + p^{t-4} + p^{t-5} + \dots + \frac{t-4}{2}p + \frac{t-3}{2} \geq F_{t-3}(p). \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} J_{t-3}(p) &= (p+1) \sum_{i=1}^{\frac{t-2}{2}} ip^{t-2-2i} = (p+1)(p^{t-4} + 2p^{t-5} + \dots + \frac{t-4}{2}p^2 + \frac{t-2}{2}) \\ &= p^{t-3} + p^{t-4} + \dots + p + 1 + p^{t-4} + p^{t-5} + 2p^{t-5} + \dots + \frac{t-4}{2}p + \frac{t-4}{2} \\ &= F_{t-3}(p) + p^{t-4} + p^{t-5} + 2p^{t-5} + \dots + \frac{t-4}{2}p + \frac{t-4}{2} \\ &\geq F_{t-3}(p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

لم ۲-۱-۴۷. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m = p^{n+e}$  باشد. همچنین

فرض کنیم  $Y_1(G)$  آبلی باشد. در این صورت  $r(G) = p^{m-2} + p^2 - 1$

برهان. به [۲۱] رجوع شود. ■

لم ۲-۱-۴۸. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m = p^{n+e}$  باشد که

$e \in \{0, 1\}$ ، و همچنین  $Y_1(G)$  آبلی باشد. در این صورت

$$k = k(G) = \begin{cases} I_{m-\Delta}(p) + J_{m-\epsilon}(p), & m \text{ فرد} \\ J_{m-\Delta}(p), & m \text{ زوج} \end{cases}$$

برهان. بنابر لم ۲-۱-۴۷، داریم  $r(G) = p^{m-\gamma} + p^{\gamma} - 1$  بنابراین

$$k(G) = \frac{r(G) - n(p^{\gamma}-1) - p^e}{(p^{\gamma}-1)(p-1)} = \frac{p^{m-\gamma} + p^{\gamma} - 1 - n(p^{\gamma}-1) - p^e}{(p^{\gamma}-1)(p-1)}.$$

از طرفی اگر  $m$  فرد باشد ( $e = 1$ ) آنگاه

$$\begin{aligned} I_{m-\Delta}(p) + J_{m-\epsilon}(p) &= I_{m-\Delta}(p) + \frac{I_{m-\Delta}(p) - \frac{m-\gamma}{\gamma}}{p-1} = \frac{p I_{m-\Delta}(p) - \frac{m-\gamma}{\gamma}}{p-1} \\ &= \frac{p \frac{p^{m-\gamma}-1}{p^{\gamma}-1} - \frac{m-\gamma}{\gamma}}{p-1} = \frac{p \frac{p^{m-\gamma}-p}{p^{\gamma}-1} - \frac{m-\gamma}{\gamma}}{p-1} \\ &= \frac{\gamma(p^{m-\gamma}-p) - (p^{\gamma}-1)(\gamma n + 1 - \gamma - 1)}{\gamma(p^{\gamma}-1)(p-1)} \\ &= \frac{\gamma(p^{m-\gamma}-p) - \gamma(p^{\gamma}-1)(n-1)}{\gamma(p^{\gamma}-1)(p-1)} = \frac{p^{m-\gamma} - p - n(p^{\gamma}-1) + p^{\gamma}-1}{(p^{\gamma}-1)(p-1)} \end{aligned}$$

و اگر  $m$  زوج باشد ( $e = 0$ ) آنگاه

$$\begin{aligned} J_{m-\Delta}(p) &= \frac{I_{m-\gamma}(p) - \frac{m-\gamma}{\gamma}}{p-1} = \frac{p \frac{p^{m-\gamma}-1}{p^{\gamma}-1} - \frac{m-\gamma}{\gamma}}{p-1} \\ &= \frac{\gamma(p^{m-\gamma}-1) - (p^{\gamma}-1)(m-\gamma)}{\gamma(p^{\gamma}-1)(p-1)} \\ &= \frac{\gamma(p^{m-\gamma}-1) - \gamma(p^{\gamma}-1)(n-1)}{\gamma(p^{\gamma}-1)(p-1)} \\ &= \frac{p^{m-\gamma} - 1 - n(p^{\gamma}-1) + p^{\gamma}-1}{(p^{\gamma}-1)(p-1)}. \end{aligned}$$

در نتیجه حکم ثابت می‌شود. ■

قضیه ۲-۱-۴۹. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m = p^{2n+e}$  باشد که

$e \in \{0, 1\}$ . قرار می‌دهیم  $t = t(G)$ . در این صورت

(۱) اگر  $t$  فرد باشد آنگاه

$$k \geq (n - \frac{t+1}{2})F_{t-2}(p) + eI_{t-3}(p) + J_{t-4}(p). \quad (7-2)$$

(۲) اگر  $t$  زوج باشد آنگاه

$$k \geq (n - \frac{t+2}{2} + e)F_{t-2}(p) + eI_{t-2-2e}(p) + J_{t-3-2e}(p). \quad (8-2)$$

برهان. اگر  $t = 0$  نتیجه واضح است، چون طبق تعریف توابع  $F_\alpha(p)$ ،  $I_\alpha(p)$  و  $J_\alpha(p)$  عبارت

سمت راست رابطه (۸-۲) برابر صفر است. بنابراین فرض می‌کنیم  $t \geq 1$ . طبق تعریف درجه

جابجایی، به ازای  $i = 1, \dots, m-t-1$ ،  $[Y_i, Y_{m-i-t}] \leq Y_m = 1$ ، اگر  $Y_{m-i-t} \leq Y_{i+1}$  آنگاه

$z_i \geq |Y_{m-i-t}| = p^{i+t}$  از طرف دیگر، اگر  $Y_{m-i-t} \not\leq Y_{i+1}$  یا به‌طور معادل  $m-i-t \geq i+1$

آنگاه  $m-i-t < i+1$  در نتیجه  $m-i-t \leq i$  پس  $Y_i \leq Y_{m-i-t}$ . همچنین

$$[Y_i, Y_i] \leq [Y_i, Y_{m-i-t}] = 1 \text{ بنابراین } Y_i \text{ آبدی است. در نتیجه}$$

$$z_i = r_{Y_i}(s_i Y_{i+1}) = |s_i Y_{i+1}| = p^{m-i-1}.$$

شرط  $Y_{m-i-t} \leq Y_{i+1}$  هم ارز است با اینکه  $m-i-t \geq i+1$  یا به عبارت دیگر

$$2i \leq m-t-1 = 2n+e-t-1. \text{ حال می‌خواهیم مقادیری از } i \text{ را بدست آوریم که نامساوی}$$

(۷-۲) و (۸-۲) مطابق با اینکه  $t$  فرد یا زوج است، برقرار باشد. دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت اول:  $t$  فرد باشد. اگر  $e = 0$  آنگاه  $2i \leq 2n+e-t-1$  اگر و تنها  $i \leq n - \frac{t+1}{2}$ . اگر  $e = 1$

آنگاه  $2i \leq 2n+e-t-1 = 2n-t$  چون  $2i$  زوج و  $2n-t$  فرد است پس  $2i \leq 2n-t$

هم ارز است با  $2i \leq 2n - t - 1$ . در نتیجه  $2i \leq 2n - t - 1$  اگر و تنها اگر  $i \leq n - \frac{t+1}{2}$ .

بنابراین موقعی که  $t$  فرد باشد،  $Y_{m-i-t} \leq Y_{i+1}$  و  $i \leq n - \frac{t+1}{2}$  هم ارزند.

حالت دوم:  $t$  زوج باشد. اگر  $e = 0$  آنگاه  $2i \leq 2n + e - t - 1 = 2n - t - 1$  هم ارز است با

$2i \leq 2n - t - 2$  چون  $2i \leq 2n - t - 1$  زوج و  $2n - t - 1$  فرد است. پس  $2i \leq 2n - t - 2$  اگر و تنها اگر

$i \leq n - \frac{t+2}{2}$ . اگر  $e = 1$  آنگاه  $2i \leq 2n + e - t - 1 = 2n - t$  اگر و تنها اگر

$i \leq n - \frac{t}{2} = n - \frac{t+2}{2} + 1$ . بنابراین در این حالت نیز،  $Y_{m-i-t} \leq Y_{i+1}$  هم ارز است با اینکه

$$i \leq n - \frac{t+2}{2} + e$$

اکنون کران های پایینی قضیه را به دست می آوریم. قرار می دهیم

$$\lambda = \begin{cases} n - \frac{t+1}{2} & t \text{ فرد باشد} \\ n - \frac{t+2}{2} + e & t \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در این صورت به ازای  $i = 1, \dots, \lambda$ ،  $z_i \geq p^{i+t}$  و به ازای  $i = \lambda + 1, \dots, n - 1$ ،  $z_i = p^{m-i-1}$  از

طرفی چون  $t \geq 1$  پس  $z = p$  در نتیجه با استفاده از رابطه (۲-۲) در لم ۲-۱-۲۹، خواهیم داشت

$$n + k(p - 1) = \frac{z}{p} + \frac{z_1}{p^2} + \dots + \frac{z_{n-1}}{p^n} \geq 1 + p^{t-1} \lambda + \sum_{i=\lambda+1}^{n-1} p^{m-2i-2},$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=\lambda+1}^{n-1} p^{m-2i-2} &= p^{m-2} \sum_{i=\lambda+1}^{n-1} p^{-2i} = p^{m-2} \frac{(p^{-2})^n - (p^{-2})^{\lambda+1}}{p^{-2} - 1} \\ &= p^{m-2} \frac{p^{-2n}(1 - p^{-2\lambda-2+2n})}{p^{-2}(1 - p^2)} = \frac{p^m(p^{-2\lambda-2+2n-1})}{p^{2n}(p^2-1)} \\ &= \frac{p^e(p^{2(n-\lambda-1)}-1)}{p^2-1} = p^e I_{2(n-\lambda-2)}(p). \end{aligned}$$

بنابراین  $n + k(p-1) \geq 1 + p^{t-1}\lambda + p^e I_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p)$  در نتیجه

$$\begin{aligned} k(p-1) &\geq 1 + p^{t-1}\lambda + p^e I_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) - n + \lambda - \lambda \\ &= (p^{t-1} - 1)\lambda - (n - \lambda - 1) + p^e I_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) \\ &= (p^{t-1} - 1)\lambda + e(p-1)I_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) + I_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) - (n - \lambda - 1). \end{aligned}$$

بنابراین  $k \geq \frac{p^{t-1}-1}{p-1}\lambda + eI_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) + \frac{I_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) - (n-\lambda-1)}{p-1}$  در نتیجه

$$k \geq \lambda F_{t-\tau}(p) + eI_{\tau(n-\lambda-\tau)}(p) + J_{\tau(n-\lambda-\tau)-1}(p). \quad (9-2)$$

اینک با جایگذاری

$$\lambda = \begin{cases} n - \frac{t+1}{\tau} & t \text{ فرد باشد} \\ n - \frac{t+2}{\tau} + e & t \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در رابطه (9-2)، روابط (7-2) و (8-2) بدست می‌آید و حکم ثابت می‌شود. ■

**نتیجه ۲-۱-۵۰.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m = p^{n+e}$  باشد. در

این صورت

$$(1) \text{ اگر } Y_1 \text{ ناآبلی باشد آنگاه } k \geq F_{t-\tau}(p)$$

$$(2) \text{ اگر } Y_1 \text{ آبلی باشد آنگاه } k \geq F_{t-\tau}(p)$$

**برهان.** (۱) چون  $Y_1$  ناآبلی است پس بنابر لم ۲-۱-۲۲،  $t \leq m - 4 = 2n - 4 + e$ . در نتیجه

$$n - \frac{t+1}{\tau} + e \geq 1 \text{ و } n - \frac{t+2}{\tau} + e \geq 1 \text{ بنابراین بنابر قضیه ۲-۱-۴۹، } k \geq F_{t-\tau}(p)$$

(۲) چون  $Y_1$  آبلی است پس  $t = m - 2$ . بنابر لم ۲-۱-۴۸، خواهیم داشت

$$k(G) = \begin{cases} I_{t-3}(p) + J_{t-4}(p), & t \text{ فرد} \\ J_{t-3}(p), & t \text{ زوج} \end{cases}$$

در نتیجه بنابر لم ۴۶-۱-۲،  $k \geq F_{t-3}(p)$  ■

**نتیجه ۵۱-۱-۲.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال باشد. همچنین فرض کنیم  $Y_1$

ناآبلی باشد و  $k = k(G) > 0$ . در این صورت  $t(G) \leq \log_p^k + 2$  و اگر  $k > 1$  آنگاه نامساوی اکید است.

**برهان.** اگر  $t(G) \leq 2$  آنگاه نامساوی واضح است، چون اگر  $k = 1$  آنگاه  $\log_p^k = 0$  و

$t(G) \leq \log_p^k + 2$ ، و اگر  $k > 1$  آنگاه  $\log_p^k > 0$ . پس  $\log_p^k + 2 > 2$  در نتیجه

$t(G) < \log_p^k + 2$ . اگر  $t(G) \geq 3$ ، آنگاه

$$F_{t-2}(p) = \frac{p^{t-1}-1}{p-1} = p^{t-2} + p^{t-3} + \dots + p + 1 > p^{t-2}.$$

پس بنابر نتیجه ۵۰-۱-۲،  $k > p^{t-2}$ . در نتیجه  $\log_p^k > \log_p^{p^{t-2}} = (t-2)\log_p p$

بنابراین  $t < \log_p^k + 2$  ■

یک سوال طبیعی که بعد از قضیه ۴۹-۱-۲، مطرح می شود این است که، برای کدام  $p$ -گروهها

از رده ماکسیمال،  $k(G)$  با کران پایین داده شده در قضیه منطبق است؟ یعنی اگر  $m = 2n + e \geq 4$

و به ازای  $t \in \{0, 1, \dots, m-4\} \cup \{m-2\}$  تعریف کنیم

$$B_{m,p}(t) = \begin{cases} (n - \frac{t+1}{2})F_{t-2}(p) + eI_{t-3}(p) + J_{t-4}(p), & t \text{ فرد} \\ (n - \frac{t+2}{2} + e)F_{t-2}(p) + eI_{t-2-2e}(p) + J_{t-3-2e}(p), & t \text{ زوج} \end{cases}$$

چه موقع تساوی  $k(G) = B_{m,p}(t)$  اتفاق می افتد؟

با توجه به اثبات قضیه ۴۹-۱-۲، واضح است که اگر  $t(G) \geq 1$ ، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به

ازای هر  $i$  که  $0 < 2i \leq m - t(G) - 1$ ،  $z_i = p^{i+t(G)}$

لم ۲-۱-۵۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^{n+e} = p^m$  باشد. در این

صورت اگر  $i, j \geq 1$  و  $i + j = m - 1$  آنگاه

$$[Y_i, Y_j] = \begin{cases} Y_{m-1}, & t(G) = 0; \\ 1, & t(G) \geq 1. \end{cases}$$

برهان. اگر  $t(G) \geq 1$  آنگاه

$$[Y_i, Y_j] \leq Y_{i+j+t(G)} = Y_{m-1+t(G)} \leq Y_m = 1.$$

اگر  $t(G) = 0$  آنگاه بنابر قضیه ۲-۱-۱۸،  $Y_1 \neq C_G(Y_{m-2})$  بنابراین

$$1 \neq [Y_1, Y_{m-2}] \leq Y_{m-2+1+t(G)} = Y_{m-1}$$

در نتیجه چون  $|Y_{m-1}| = p$  پس  $[Y_1, Y_{m-2}] = Y_{m-1}$ .

اینک با استقرا روی  $i$  ثابت می‌کنیم به ازای  $i = 1, \dots, m-2$ ،  $[Y_i, Y_{m-i-1}] = Y_{m-1}$ . به

ازای  $i = 1$  ثابت شد که نتیجه درست است. اینک فرض می‌کنیم نتیجه برای  $i$  که

$1 \leq i \leq m-3$ ، برقرار باشد، حکم را برای  $i+1$  ثابت می‌کنیم.

قرار می‌دهیم  $[Y_i, Y_{m-i-2}] = Y_u$ . از طرفی  $[Y_i, Y_{m-i-2}] \leq Y_{m-2}$  یعنی  $u \geq m-2$ . حال

اگر  $u = m-2$  آنگاه باید داشته باشیم  $t(G/Y_{m-1}) = 0$  که با توجه به نتیجه ۲-۱-۱۷، غیر

ممکن است. بنابراین  $u \geq m-1$ . به عبارت دیگر  $Y_u \leq Y_{m-1} = Z(G)$ . در نتیجه

$$[Y_i, Y_{m-i-2}, G] = [Y_u, G] = 1$$

حال بنابر فرض استقرا خواهیم داشت

$$[Y_{m-i-2}, G, Y_i] = [Y_{m-i-1}, Y_i] = Y_{m-1}.$$

از طرفی  $[Y_{i+1}, Y_{m-i-2}] \in \{1, Y_{m-1}\}$

اینک اگر  $[G, Y_i, Y_{m-i-2}] = [Y_{i+1}, Y_{m-i-2}] = 1$  آنگاه بنابر لم سه زیرگروه  $Y_{m-1} = 1$  که

تناقض است. بنابراین  $[Y_{i+1}, Y_{m-i-2}] = Y_{m-1}$  و حکم ثابت می‌شود. ■

لم ۲-۱-۵۳. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. همچنین فرض

کنیم  $i \in \{1, \dots, m - t(G) - 1\}$  و  $[Y_i, Y_{m-i-t(G)-1}] \neq 1$  در این صورت

$$|cl_G(x)| = p|cl_{\bar{G}}(\bar{x})|, \quad x \in Y_i - Y_{i+1} \quad \text{و به ازای هر} \quad r_G(Y_i - Y_{i+1}) = r_{\bar{G}}(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{i+1}) \quad (۱)$$

(۲) اگر  $i \leq m - i - t(G) - 1$  آنگاه  $z_i = \bar{z}_i$

**برهان.** (۱) بنابر تعریف درجه جابجایی داریم  $[Y_i, Y_{m-i-t(G)-1}] \leq Y_{m-1}$ . در نتیجه

$$[Y_i, Y_{m-i-t(G)-1}] = Y_{m-1} \quad \text{از طرفی} \quad [Y_{i+1}, Y_{m-i-t(G)-1}] \leq Y_m = 1. \quad \text{بنابراین به ازای هر}$$

$$[y, g] \in Y_{m-1} - \{1\} \quad \text{عنصری مانند} \quad g \in Y_{m-i-t(G)-1} \quad \text{وجود دارد به طوری که} \quad [y, g] \in Y_{m-1} - \{1\}$$

به عبارت دیگر  $y^g = yz$  که  $z \in Y_{m-1} - \{1\}$  بنابراین به ازای هر  $j \in \{0, \dots, p-1\}$

$$y^{g^j} = yz^j \quad \text{داریم} \quad \{z^j \mid 0 \leq j \leq p-1\} = Z(G) \quad \text{و همچنین} \quad \{y^{g^j} \mid 0 \leq j \leq p-1\} = yZ(G)$$

در نتیجه  $cl(y) \cap yZ(G) = yZ(G)$ . بنابراین  $x_G(yZ(G)) = 1$  فرض می کنیم  $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r\}$

یک مجموعه کامل از نماینده های رده های مزدوجی  $\bar{G}$  باشد که  $\bar{Y}_i - \bar{Y}_{i+1}$  را بپوشاند. اینک فرض

می کنیم  $w \in Y_i - Y_{i+1}$  چون  $Y_i - Y_{i+1}$  در  $G$  نرمال است پس  $[w] \subseteq Y_i - Y_{i+1}$ . از طرفی

$$[wZ(G)] = [y_iZ(G)] \quad \text{و} \quad \{wz \mid z \in Z(G)\} \subseteq [w] \quad \text{در نتیجه} \quad u \in Y_i - Y_{i+1} \quad \text{و} \quad z_1 \in Z(G)$$

وجود دارد به طوری که  $w^u = y_iz_1$  لذا  $[w] \cap y_iZ(G) \neq \emptyset$ . چون  $y_iZ(G) \subseteq [y_i]$  پس

$$[w] \cap [y_i] \neq \emptyset. \quad \text{بنابراین} \quad [w] = [y_i], \quad \text{و حکم ثابت می شود.}$$

اکنون ثابت می کنیم به ازای هر  $x \in Y_i - Y_{i+1}$  داریم:  $|cl_G(x)| = p|cl_{\bar{G}}(\bar{x})|$

$$cl_G(x) = \{x^g \mid g \in G\}$$

$$cl_{\bar{G}}(\bar{x}) = \{\bar{x}^{\bar{h}} \mid \bar{h} \in \bar{G}\} = \{(xZ(G))^{hZ(G)} \mid h \in G\} = \{x^hZ(G) \mid h \in G\}$$

$$= \{aZ(G) \mid a \in cl_G(x)\}. \quad (۱۰-۲)$$

از طرفی  $y, yz, yz^2, \dots, yz^{p-1}$  با هم مزدوجند. بنابراین خواهیم داشت

$$cl_G(x) = \{y_1, y_1 z, \dots, y_1 z^{p-1}, y_2, y_2 z, \dots, y_2 z^{p-1}, \dots\}.$$

در نتیجه طبق رابطه (۲-۱۰) داریم

$$\begin{aligned} cl_{\bar{G}}(\bar{x}) &= \{y_1 Z(G), y_1 z Z(G), \dots, y_1 z^{p-1} Z(G), y_2 Z(G), \dots, y_2 z^{p-1} Z(G), \dots\} \\ &= \{y_1 Z(G), y_2 Z(G), \dots\}. \end{aligned}$$

بنابراین  $|cl_{\bar{G}}(\bar{x})| = \frac{|cl_G(x)|}{p}$  و حکم ثابت می‌شود.

(۲) چون  $1 \leq m - i - t(G) - 1$  پس  $Y_{m-i-t(G)-1} \leq Y_i$  لذا شبیه برهان قسمت (۱) برای

هر  $x_{Y_i}(yZ(G)) = 1$ ,  $y \in Y_i - Y_{i+1}$  اکنون فرض می‌کنیم  $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_t\}$  یک مجموعه کامل از

نماینده‌های رده‌های مزدوجی  $\bar{Y}_i$  باشد. در نتیجه  $\bar{s}_i \bar{Y}_{i+1} \subseteq [\bar{w}_1] \cup \dots \cup [\bar{w}_t]$  حال فرض می‌کنیم

$u \in s_i Y_{i+1}$  در نتیجه  $\bar{u} \in \bar{s}_i \bar{Y}_{i+1}$  بنابراین  $h \in Y_i$  و  $z \in Z(G)$  وجود دارد به طوری که

$u^h = w_i z$  و چون  $r_{Y_i}(yZ(G)) = 1$  پس  $w_i z \in [w_i]$  در نتیجه  $u^h \in [w_i]$  بنابراین

■  $[u] \cap [w_i] \neq \emptyset$  لذا  $[u] = [w_i]$  و حکم ثابت می‌شود.

**نتیجه ۲-۱-۵۴.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. همچنین فرض

کنیم  $t(G) = 0$  در این صورت

(۱) اگر  $i \in \{1, \dots, m-2\}$  آنگاه  $r_G(Y_i - Y_{i+1}) = r_{\bar{G}}(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{i+1})$  و به ازای هر  $x \in Y_i - Y_{i+1}$

$$|cl_G(x)| = p |cl_{\bar{G}}(\bar{x})|$$

(۲) اگر  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  آنگاه  $z_i = \bar{z}_i$

**برهان.** چون  $t(G) = 0$  پس بنابر لم ۲-۱-۵۲،  $Y_{m-1} \neq 1$  و  $[Y_i, Y_j] = [Y_i, Y_{m-i-1}] = Y_{m-1}$  در

نتیجه بنابر لم ۲-۱-۵۳، (۱) و (۲) برقرار است. ■

**لم ۲-۱-۵۵.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال با  $t(G) \geq 1$  باشد و

$$k(G) = B_{m,p}(t(G)) \text{ در این صورت } k(\bar{G}) = B_{m-1,p}(t(\bar{G})) \text{ و}$$

(۱) اگر  $t(G) \geq m - ۴$  آنگاه  $Y_۱(\bar{G})$  آبی است و  $t(\bar{G}) = m - ۳$ .

(۲) اگر  $t(G) \leq m - ۵$  آنگاه  $t(\bar{G}) = t(G)$ .

برهان. (۱) اگر  $t(G) \geq m - ۴$  آنگاه

$$[Y_۱, Y_۱] = [Y_۱, Y_۲] \leq Y_{۲+t(G)} \leq Y_{۳+m-۴} \leq Y_{m-۱}.$$

همچنین خواهیم داشت

$$[Y_۱(\bar{G}), Y_۱(\bar{G})] = \frac{[Y_۱, Y_۱]Z(G)}{Z(G)} \leq \frac{Y_{m-۱}Z(G)}{Z(G)} = Y_{m-۱}(\bar{G}) = ۱.$$

در نتیجه  $Y_۱(\bar{G})$  آبی است. بنابراین  $t(\bar{G}) = (m - ۱) - ۲ = m - ۳$ .

اگر  $t(\bar{G})$  فرد باشد آنگاه  $m$  زوج است یعنی  $m = ۲n + ۰$ . پس

$m - ۱ = ۲n - ۱ = ۲(n - ۱) + ۱$  اگر  $t(\bar{G})$  زوج باشد آنگاه  $m$  فرد است یعنی  $m = ۲n + ۱$ .

پس  $m - ۱ = ۲n + ۰$  بنابراین خواهیم داشت

$$B_{(m-۱),p}(t(\bar{G})) = \begin{cases} \left(n - ۱ - \frac{t(\bar{G})+۱}{۲}\right) F_{t(\bar{G})-۲}(p) + I_{t(\bar{G})-۲}(p) + J_{t(\bar{G})-۴}(p), & \text{فرد } t(\bar{G}) \\ \left(n - \frac{t(\bar{G})+۲}{۲}\right) F_{t(\bar{G})-۲}(p) + J_{t(\bar{G})-۲}(p), & \text{زوج } t(\bar{G}) \end{cases}$$

در نتیجه

$$B_{(m-۱),p}(t(\bar{G})) = \begin{cases} \left(n - ۱ - \frac{m-۲}{۲}\right) F_{m-۵}(p) + I_{m-۶}(p) + J_{m-۷}(p), & \text{فرد } (m - ۱) \\ \left(n - \frac{m-۱}{۲}\right) F_{m-۵}(p) + J_{m-۶}(p), & \text{زوج } (m - ۱) \end{cases}$$

بنابراین

$$B_{(m-۱),p}(t(\bar{G})) = \begin{cases} I_{m-۶}(p) + J_{m-۷}(p), & \text{فرد } (m - ۱) \\ J_{m-۶}(p), & \text{زوج } (m - ۱) \end{cases}$$

از طرفی بنابر ۲-۱-۴۸، خواهیم داشت

$$k(\bar{G}) = \begin{cases} I_{(m-1)-5}(p) + J_{(m-1)-6}(p), & \text{فرد } (m-1) \\ J_{(m-1)-5}(p), & \text{زوج } (m-1) \end{cases}$$

$$k(\bar{G}) = B_{m-1,p}(t(\bar{G})) \text{ بنابراین}$$

(۲) فرض کنیم  $t(G) \leq m-5$ . قرار می‌دهیم  $t = t(G)$ . بنابر لم ۲-۱-۳۳،  $t(\bar{G}) \geq t$ . با توجه

به اینکه  $k(G) = B_{m,p}(t(G))$ ، اگر  $0 < 2i \leq m-t-1$  آنگاه  $z_i = p^{i+t}$ . در نتیجه

$\bar{z}_i \leq z_i = p^{i+t}$  پس  $\bar{z}_i \leq p^{t+1}$ . چون  $t \leq m-5$  پس  $2 \geq t - (m-1) - t - 2$ . یعنی

$\bar{z}_i \geq |\bar{Y}_{(m-1)-t-2}| = p^{t+2}$  آنگاه  $[\bar{Y}_1, \bar{Y}_{(m-1)-t-2}] = 1$  اینک اگر  $\bar{Y}_{(m-1)-t-2} \leq \bar{Y}_2$

یک تناقض است. در نتیجه لزوماً  $[\bar{Y}_1, \bar{Y}_{(m-1)-t-2}] \neq 1$ . حال اگر  $t < t(\bar{G})$  آنگاه

$t \leq t(\bar{G}) - 1$  پس  $t(\bar{G}) \geq t+1$  در نتیجه خواهیم داشت

$$1 \neq [\bar{Y}_1, \bar{Y}_{(m-1)-t-2}] \leq \bar{Y}_{m-t-2+t(\bar{G})} \leq \bar{Y}_{m-1} = 1.$$

که تناقض است. بنابراین  $t(\bar{G}) = t$ . از طرفی طبق تعریف درجه جابجایی،

$$[\bar{Y}_i, \bar{Y}_{(m-1)-i-t}] \leq \bar{Y}_{i+(m-1)-i-t+t(\bar{G})} = \bar{Y}_{m-1} = 1.$$

حال اگر  $0 < 2i \leq (m-1) - t - 1$  آنگاه  $i+1 \leq (m-1) - i - t$  که هم‌ارز است با

$\bar{z}_i \geq p^{i+t}$ . در نتیجه به ازای هر  $i$  که  $0 < 2i \leq (m-1) - t - 1$ ،  $\bar{z}_i \geq p^{i+t}$ .

بنابراین اگر  $0 < 2i \leq (m-1) - t - 1$ ، آنگاه  $\bar{z}_i = p^{i+t}$  در نتیجه  $k(\bar{G}) = B_{m-1,p}(t(\bar{G}))$ . ■

**قضیه ۲-۱-۵۶.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد که  $t = t(G) \geq 1$

در این صورت رابطه‌های زیر هم‌ارز هستند.

$$(۱) \quad k(G) = B_{m,p}(t)$$

(۲) به ازای هر  $i$  که  $0 < 2i \leq m-t-1$ ،  $z_i = p^{i+t}$

(۳) به ازای هر  $i, j$  که  $i \neq j$ ،  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+t}$ .

**برهان.** هم ارزی بین رابطه‌های (۱) و (۲) قبلاً ثابت شده است. اکنون فرض می‌کنیم (۱) و

(۲) درست باشند، با استقراء روی  $|G|$ ، (۳) را ثابت می‌کنیم. اگر  $|G| = p^4$  آنگاه به ازای هر  $i$  و  $j$  که

$i \neq j$  و  $i + j \geq 4$ ،  $[Y_i, Y_j] = 1$  از طرفی چون  $t(G) \geq 1$ ،  $[Y_1, Y_p] = 1$  در نتیجه حکم برقرار

است. حال فرض می‌کنیم حکم برای  $p$ -گروه‌هایی از رده ماکسیمال با مرتبه کمتر از  $|G|$  برقرار باشد.

دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت اول:  $t \geq m - 4$ . پس  $m - 2$  یا  $t = m - 4$ . اگر  $t = m - 2$  آنگاه  $t = m - 2$  و  $i + j + t < m$  و  $i \neq j$

نتیجه می‌دهد هیچ  $i$  و  $j$ یی وجود ندارد که در شرط  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+t}$  صدق کند. پس حکم برقرار

است. اگر  $t = m - 4$  آنگاه دوباره  $t = m - 4$  و  $i + j + t < m$  و  $i \neq j$  نتیجه می‌دهد  $\{i, j\} = \{1, 2\}$  یعنی

$[Y_1, Y_p] \leq Y_{3+m-4} = Y_{m-1}$ ، در نتیجه  $[Y_1, Y_p] = Y_{m-1}$ ، بنابراین حکم

برقرار است.

حالت دوم:  $t \leq m - 5$ . بنابر لم ۲-۱-۵۵،  $t(\bar{G}) = t$  و  $k(\bar{G}) = B_{m-1,p}(t(\bar{G}))$ . بنابر فرض

استقراء، هرگاه  $i \neq j$ ،  $[\bar{Y}_i, \bar{Y}_j] = \bar{Y}_{i+j+t}$  در نتیجه اگر  $i + j + t \neq m - 1$  و  $i \neq j$

آنگاه  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+t}$ . اینک اگر  $i + j + t = m - 1$  آنگاه بدون اینکه خللی به کلیت مسأله

وارد شود فرض می‌کنیم  $i < j = m - i - t - 1$ . در نتیجه  $Y_{m-i-t-1} \leq Y_{i+1}$  اگر

$[Y_i, Y_{m-i-t-1}] = 1$  آنگاه  $|Y_{m-i-t-1}| = p^{i+t+1}$ ، که با (۲) در تناقض است. بنابراین

$[Y_i, Y_{m-i-t-1}] = Y_{m-1}$ ، و حکم ثابت می‌شود.

(۲)  $\rightarrow$  (۳). با استقراء روی  $|G|$  حکم را ثابت می‌کنیم. اگر  $t \geq m - 4$  آنگاه

$m - 2$  یا  $t = m - 4$ . اگر  $t = m - 2$  آنگاه به انتهای مقدم حکم برقرار است. اگر  $t = m - 4$

آنگاه خواهیم داشت  $3 = m - (m - 4) - 1 = 2i \leq m - 1$ ، یعنی  $i = 1$ . از طرفی  $\bar{Y}_1$  آبدی است پس

$\bar{z}_1 = r_{\bar{Y}_1}(\bar{s}_1 \bar{Y}_1) = |\bar{s}_1 \bar{Y}_1| = p^{m-3} = p^{1+t}$  از طرفی  $1 < 2$  و  $1 \neq [Y_1, Y_3]$ . پس بنابر لم

$$\bar{z}_1 = z_1 = p^{1+t}, \quad \text{۵۳-۱-۲}$$

اینک فرض می‌کنیم  $t \leq m-5$  و حکم برای گروه‌هایی از مرتبه کمتر از  $|G|$  برقرار باشد.

بنابر لم ۵۵-۱-۲،  $t(\bar{G}) = t$  از طرفی بنابر (۳)، هرگاه  $i \neq j$ ،  $[\bar{Y}_i, \bar{Y}_j] = \bar{Y}_{i+j+t}$  ابتدا  $i$  را طوری در

نظر می‌گیریم که  $0 < 2i \leq m-t-2$ . در نتیجه بنابر فرض استقراء  $\bar{z}_i = p^{i+t}$  می‌دانیم

$\bar{z}_i \leq z_i$  اینک اگر  $z_i > \bar{z}_i$  آنگاه به موجب لم ۵۳-۱-۲،  $[Y_i, Y_{m-i-t-1}] = 1$  که غیر

ممکن است، چون  $i < m-i-t-1$  و بنابر (۳)،  $[Y_i, Y_{m-i-t-1}] = Y_{m-1} \neq 1$ . بنابراین

اگر  $0 < 2i \leq m-t-2$ ، آنگاه  $z_i = \bar{z}_i = p^{i+t}$  اکنون اگر  $2i = m-t-1$  آنگاه

$i+1 = m-i-t$  پس بنابر (۳) خواهیم داشت

$$[Y_i, Y_i] = [Y_i, Y_{i+1}] = [Y_i, Y_{m-i-t}] = Y_m = 1.$$

در نتیجه  $Y_i$  آبدی است. بنابراین  $z_i = |s_i Y_{i+1}| = p^{m-i-1} = p^{i+t}$  ■

**قضیه ۵۷-۱-۲.** فرض کنیم  $G$  یک گروه از مرتبه  $p^m$  و  $G \in \mathcal{F}$  در این صورت

(۱) اگر  $t(G) \geq 1$  آنگاه  $r(G) = r(\bar{G}) + p^{t(G)-1}(p-1)$

(۲) اگر  $t(G) = 0$  آنگاه  $r(G) = r(\bar{G}) + p(p-1)$

برهان. به [۲۱، قضیه ۱۰-۲] رجوع شود. ■

## ۲-۲ $p$ -گروه‌ها با شرط $k(G) = 0$

در این بخش  $p$ -گروه‌ها با شرط  $r(G) = f_0(|G|)$  را بررسی می‌کنیم. نتایج اصلی درباره این گروه‌ها

در [۱۹] و [۲۱] بیان شده است. [۴] و [۱۹] نشان دادند که این گروه‌ها از رده ماکسیمال هستند،

بعلاوه ثابت کردند در این گروه‌ها، اگر  $p \geq 11$  آنگاه  $m \leq p+1$  و در غیر این صورت  $m \leq p+2$ .

قضیه ۲-۲-۱. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از مرتبه  $p^m$  ( $m \geq 5$ ) و  $r(G) = f_0(|G|)$  در این

صورت  $t(G) \leq 1$  و اگر  $t(G) = 0$  آنگاه  $G \in \mathcal{F}$ .

برهان. به [۲۱، قضیه ۱-۶] رجوع شود. ■

قضیه ۲-۲-۲. فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این

صورت  $r(G) = f_0(|G|)$  اگر و تنها اگر به ازای هر  $i$  و  $j$  که  $i \neq j$  و  $i + j \leq m - 2$

$$[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$$

برهان. فرض می‌کنیم  $r(G) = f_0(|G|)$  اگر  $|G| = p^4$  آنگاه  $i + j \leq 4 - 2 = 2$  و  $i \neq j$

نتیجه می‌دهد هیچ  $i$  و  $j$  بی وجود ندارد که  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$ . پس به انتهای مقدم حکم

برقرار است. اکنون فرض می‌کنیم  $|G| \geq p^5$ . بنابر قضیه ۲-۲-۱،  $t(G) \in \{0, 1\}$ . از

طرفی  $B_{m,p}(1) = B_{m,p}(0) = 0$  و چون  $k(G) = 0$  پس  $k(G) = B_{m,p}(t(G))$  اگر

$t(G) = 1$ ، به موجب قضیه ۲-۱-۵۶، هرگاه  $i \neq j$  آنگاه  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$ . اگر  $t(G) = 0$

آنگاه بنابر قضیه ۲-۱-۱۶،  $|G| \geq p^6$ . در نتیجه  $|\bar{G}| \geq p^5$ . چون  $t(G) = 0$  پس

$k(\bar{G}) = k(G) = 0$  بنابراین  $t(\bar{G}) \in \{0, 1\}$ . از طرفی  $G \in \mathcal{F}$  پس  $t(\bar{G}) = 1$  در نتیجه

$k(\bar{G}) = B_{m-1,p}(1) = 0$  بنابراین هرگاه  $i \neq j$ ،  $[\bar{Y}_i, \bar{Y}_j] = \bar{Y}_{i+j+1}$ . در نتیجه هرگاه

$i + j \leq m - 2$  و  $i \neq j$ ،  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$ . اینک اگر  $i + j = m - 2$ ، آنگاه  $j = m - 2 - i$

پس بنابر لم ۲-۱-۵۲،

$$Y_{m-1} = [Y_i, Y_{m-i-1}] \leq [Y_i, Y_j].$$

از طرف دیگر،  $[\bar{Y}_i, \bar{Y}_j] \leq \bar{Y}_{i+j+t(\bar{G})} = \bar{Y}_{m-1}$  در نتیجه

$$[Y_i, Y_j] \leq Y_{m-1} Z(G) = Y_{m-1}.$$

بنابراین  $[Y_i, Y_j] = Y_{m-1} = Y_{i+j+1}$

برعکس، فرض می‌کنیم به ازای هر  $i$  و  $j$  که  $i \neq j$  و  $i + j \leq m - 2$ ،  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$ . اگر

$|G| = p^4$  آنگاه بنابر لم ۳۲-۱-۲،  $t(G) = 2$ . لذا  $Y_1$  آبدی است. در نتیجه به موجب لم ۴۷-۱-۲،

خواهیم داشت

$$r(G) = p^{m-2} + p^2 - 1 = 2p^2 - 1 = 2(p^2 - 1) + 1.$$

بنابراین  $k(G) = 0$ . اینک فرض می‌کنیم  $|G| \geq p^5$ . بنابراین  $t(G) \in \{0, 1\}$ . اگر  $t(G) = 1$  آنگاه

بنابر فرض به ازای تمام  $i \neq j$ ،  $[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$ ، چون اگر  $m - 1$  یا  $i + j = m$  آنگاه

$[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1} = 1$ . بنابراین به موجب قضیه ۵۶-۱-۲،  $k(G) = B_{m,p}(1) = 0$ . اگر

$t(G) = 0$  آنگاه بنابر نتیجه ۴۱-۱-۲،  $k(\bar{G}) = k(G)$ . بنابر فرض هرگاه  $i \neq j$  و

$i + j \leq m - 2$ ،  $[\bar{Y}_i, \bar{Y}_j] = \bar{Y}_{i+j+1}$ . در نتیجه  $t(\bar{G}) \leq 1$  از طرفی  $t(G) = 0$  پس  $G \in \mathcal{F}$  در

نتیجه  $t(\bar{G}) = 1$  بنابراین  $k(\bar{G}) = B_{m-1,p}(1) = 0$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**نتیجه ۳-۲-۲.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد که  $t(G) = 0$ .

در این صورت  $k(G) = B_{m,p}(t(G))$  اگر و تنها اگر به ازای هر  $i$  و  $j$  که  $i \neq j$  و  $i + j \leq m - 2$ ،

$$[Y_i, Y_j] = Y_{i+j+1}$$

**برهان.** چون  $t(G) = 0$  پس  $B_{m,p}(t(G)) = 0$ . در نتیجه به موجب قضیه ۲-۲-۲، حکم ثابت

می‌شود. ■

## فصل سوم

### رده‌های مینیمال در $p$ - گروه‌ها

در این فصل ابتدا رده‌های مینیمال را تعریف می‌کنیم. سپس اندازه و تعداد رده‌های مزدوجی در  $p$ -گروه‌های متناهی و ناآبلی را بررسی می‌کنیم. بعلاوه گروه‌های فراآبلی و گروه‌های از رده ماکسیمال که دارای  $p-1$  رده مینیمال هستند را بررسی می‌کنیم.

توجه. در تمام این فصل گروه  $G$ ،  $p$ -گروه متناهی ناآبلی فرض شده است.

#### ۳-۱ رده‌های مزدوجی

**تعریف ۳-۱-۱.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد و  $x \in G$  اگر  $|cl(x)| = p^b$  آنگاه  $b$  را پهنای  $x$  می‌نامیم و با علامت  $b(x)$  نمایش می‌دهیم. همچنین پهنای  $G$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$b(G) = \max\{b(x) | x \in G\}.$$

**تبصره.** فرض کنیم  $|G| = p^m$  و  $\{1, p^{s_1}, \dots, p^{s_k}\} = \{|cl(x)| | x \in G\}$  که

$1 < p^{s_1} < \dots < p^{s_k}$ . قرار می‌دهیم  $s = s_1$ .  $Z = Z(G)$  و  $|Z| = p^z$ . فرض کنیم  $G$  شامل  $u_i$  رده

از اندازه  $p^{s_i}$  باشد. قرار می‌دهیم  $u = u_1$ .

**قضیه ۳-۱-۲.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه باشد در این صورت

(۱) به ازای هر  $i$ ،  $|u_i| = p - 1$  و  $p^z | u_i p^{s_i}$ .

(۲)  $p^s = p^z$  و  $u \equiv p - 1 \pmod{p(p-1)}$  یا  $p^s < p^z$  و  $u \equiv 0 \pmod{p(p-1)}$ .

**برهان.** (۱) فرض کنیم  $j \in \mathbb{N}$  و  $(p, j) = 1$ . تابع  $\psi: G \rightarrow G$  با ضابطه  $\psi(x) = x^j$  یک تناظر

یک به یک است. چون برای هر  $x \in G$ ،  $[x]^j = [x^j]$ ، در نتیجه  $\psi$  یک جایگشت روی رده‌های

مزدوجی  $G$  القا می‌کند. بنابراین گروه  $U_p = \{i | (i, p) = 1\}$  که  $|U_p| = \varphi(p) = (p-1)$ ، به

عنوان یک گروه جایگشتی روی مجموعه رده‌های تزویج  $G$  عمل می‌کند. اگر  $cl(x)$  تحت جایگشت

بالا تغییر نکند، یعنی  $cl(x)^j = cl(x)$  آنگاه  $x$  با  $x^j$  مزدوج است. لذا عنصری مانند  $g$  وجود دارد که

$$x^j = g^{-1} x g \Rightarrow x^{j^{o(g)}} = x \Rightarrow x^{j^{o(g)} - 1} = 1$$

$$\Rightarrow o(x) | j^{o(g)} - 1 \Rightarrow j^{o(g)} \equiv 1 \pmod{p}$$

در نتیجه  $1 = o(j^{o(g)}) = \frac{o(j)}{(o(g), o(j))} = o(j)$  بنابراین مرتبه  $j$  در گروه  $U_p$  برابر ۱ است. از طرفی

طبق قضیه مدار-پایدارساز خواهیم داشت

$$|Orb(cl(x))| = |U_p : st(cl(x))| = \frac{|U_p|}{|st(cl(x))|} = \frac{p-1}{1} = p-1$$

بنابراین طول هر رده عمل فوق برابر  $p-1$  است. از طرفی  $Orb(K) = \{K, K^2, \dots, K^{p-1}\}$  که  $K^i$ ها

رده‌های مجزا از اندازه یکسان هستند. فرض می‌کنیم رده‌های تزویج  $p^{s_i}$  عضوی به  $l$  مدار افراز شوند.

داریم

$$u_i = |\{cl(x) | |cl(x)| = p^{s_i}\}| = |\cup_{h=1}^l Orb(K_h)| = \sum_{h=1}^l |Orb(K_h)| = l(p-1).$$

بنابراین به ازای هر  $i, u_i | p - 1$ .

فرض می‌کنیم  $A$  اجتماع همه رده‌های  $G$  از اندازه  $p^{s_i}$  باشد، به موجب لم ۱-۱-۸، داریم  $AZ(G) = A$ . بنابراین  $A = \bigcup_{i=1}^t a_i Z(G)$  و  $|A| = u_i p^{s_i} = t|Z(G)| = tp^z$  در نتیجه به ازای هر  $i, p^z | u_i p^{s_i}$ .

(۲) طبق معادله رده‌ای  $G$  داریم

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |G : C(x_i)|$$

$$p^m = p^z + up^s + u_p p^{s_p} + \dots + u_k p^{s_k-s} \quad (۱-۳)$$

که نشان می‌دهد  $p^s | p^z$  یا  $s \leq z$ . طرفین رابطه (۱-۳) را بر  $p^s$  تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$p^{m-s} = p^{z-s} + u + u_p p^{s_p-s} + \dots + u_k p^{s_k-s}$$

حال گوییم چون  $p | u_p p^{s_p-s}$  و  $p | u_k p^{s_k-s}$  ... همچنین  $p | p^{m-s}$  بنابراین  $p | p^{z-s} + u$ .

اکنون اگر  $z = s$  آنگاه  $p | u + 1$  از طرفی طبق قسمت (۱)،  $p - 1 | u$  بنابراین خواهیم داشت

$$p - 1 | u - (p - 1) \quad (۲-۳)$$

$$p | u + 1 - p \Rightarrow p | u - (p - 1) \quad (۳-۳)$$

با توجه به (۲-۳) و (۳-۳) داریم  $p(p - 1) | u - (p - 1)$  بنابراین  $u \equiv p - 1 \pmod{p(p - 1)}$ .

اگر  $z > s$  آنگاه  $p | u$  دوباره بنا به قسمت (۱)،  $p - 1 | u$  در نتیجه  $p(p - 1) | u$ ، بنابراین،

$$\blacksquare u \equiv 0 \pmod{p(p - 1)}$$

**تعریف ۳-۱-۳.** اندیس مینیمال  $G$  را که با  $p^s$  نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p^s = \min\{|cl(x)| | x \in G - Z(G)\}.$$

همچنین  $x$  را از رده مینیمال<sup>۱</sup> در  $G$  می‌نامیم در صورتی که  $|cl(x)| = p^s$ . به عبارت دیگر چون

$$|cl(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|},$$

$$|C_G(x)| = \max\{|C_G(y)| \mid y \in G - Z(G)\}.$$

**لم ۳-۱-۴.** فرض کنیم  $A = \{L \mid Z(L) \not\subseteq Z(G)\}$  و  $H \in A$ . در این صورت  $|H| = \max A$  اگر و

تنها اگر  $|H| = \frac{|G|}{p^s}$ ، و هر عضو  $Z(H) - Z(G)$  از رده مینیمال باشد.

**برهان.** فرض می‌کنیم  $|H| = \frac{|G|}{p^s}$  و هر عضو  $Z(H) - Z(G)$  از رده مینیمال باشد. چون

$Z(H) \not\subseteq Z(G)$  پس  $H \in A$ . فرض می‌کنیم  $|H|$  ماکزیمم  $A$  نباشد. یعنی  $K$ یی در  $A$  وجود داشته

باشد که  $|H| < |K|$ . فرض می‌کنیم  $x \in Z(K) - Z(G)$  در این صورت  $K \subseteq C(x)$ . در نتیجه

$|H| < |C(x)|$ . لذا  $|G:H| < |G:C(x)|$ . بنابراین  $|cl(x)| < p^s$ ، که یک تناقض است. پس

$$|H| = \max A$$

برعکس، فرض می‌کنیم  $x$  عضوی از یک رده مینیمال باشد. قرار می‌دهیم  $H_x = C(x)$ .

$H_x$  در شرط  $Z(H_x) \not\subseteq Z(G)$  صدق می‌کند. در نتیجه  $|H_x| \leq |H|$ . بنابراین  $|H| \geq \frac{|G|}{p^s}$ . حال اگر

$y \in Z(H) - Z(G)$  آنگاه  $H \subseteq C(y)$ . پس  $|G:H| \geq |G:C(y)| \geq p^s$ . در نتیجه  $|H| \leq \frac{|G|}{p^s}$ .

بنابراین  $|H| = \frac{|G|}{p^s}$ . اینک برای هر  $H \subseteq C(z)$ ،  $z \in Z(H) - Z(G)$  از طرفی  $|C(x)| \leq |H|$ .

پس  $|C(x)| \leq |C(z)| < |G|$ . لذا  $|C(x)| = |C(z)|$  و  $z$  از رده مینیمال است. ■

**لم ۳-۱-۵.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد،  $C = C(b)$  و

$|C| = \max\{|C(d)| \mid d \in G - Z(G)\}$ . در این صورت  $C$  نرمال است اگر و تنها اگر مرکزساز عنصری

از  $Z_p(G) - Z(G)$  باشد.

**برهان.** فرض می‌کنیم  $x \in Z_p(G) - Z(G)$  و  $C = C(x)$  که  $C$  یک مرکزساز ماکسیمال  $G$

باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم اگر  $g$  عضو دلخواهی از  $G$  باشد آنگاه  $[x, g] \in Z(G)$ . داریم

<sup>1</sup> minimal class

$$Z_p(G)/Z(G) = Z(G/Z(G))$$

$$\Rightarrow [xZ(G), gZ(G)] = Z(G)$$

$$\Rightarrow [x, g]Z(G) = Z(G) \Rightarrow [x, g] \in Z(G).$$

حال ثابت می‌کنیم  $C(x) \triangleleft G$ . فرض می‌کنیم  $a \in C(x)$  و  $g \in G$ ، در این صورت خواهیم داشت

$$g^{-1}agx = g^{-1}agxg^{-1}x^{-1}xg$$

$$= g^{-1}gxxg^{-1}x^{-1}axg = xg^{-1}x^{-1}axg = xg^{-1}ag$$

بنابراین  $g^{-1}ag \in C(x)$  و  $C(x) \triangleleft G$ .

بر عکس، فرض کنیم  $C$  در  $G$  نرمال باشد. در نتیجه  $Z(C) \triangleleft G$ . از طرفی  $Z(G) \subseteq C$

بنابراین  $Z(G) \subseteq Z(C)$ . گوییم چون  $G$  یک  $p$ -گروه است،  $G/Z(G)$  نیز یک  $p$ -گروه است.

همچنین  $Z(C)/Z(G) \triangleleft G/Z(G)$ . لذا  $1 \neq Z(C)/Z(G) \cap Z(G/Z(G)) \neq 1$  بنابراین

$x \in Z(C) \cap (Z_p(G) - Z(G))$  در نتیجه  $1 \neq xZ(G) \in Z(C)/Z(G) \cap Z(G/Z(G))$

بنابراین  $C \subseteq C(x) \subsetneq G$  چون  $C$  ماکسیمال است خواهیم داشت  $C = C(x)$ . ■

**قضیه ۳-۱-۶.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه ناآبلی باشد. در این صورت بعضی از رده‌های مینیمال  $G$

مشمول در  $Z_p(G)$  هستند. به عبارت دیگر بعضی مرکزسازها از مرتبه ماکسیمال، نرمال هستند. به

علاوه اگر  $x$  یک عنصر از پهنای مینیمال باشد آنگاه عنصری مانند  $w \in Z_p(G)$  از پهنای مینیمال به

فرم  $[x, y, \dots, y]$  وجود دارد که  $y \in G$ .

**برهان.** فرض می‌کنیم  $x$  عنصری از یک رده مینیمال باشد. قرار می‌دهیم  $C = C(x)$ . بنابراین

$[G:C] = p^s$ . با استقراء روی  $s$  حکم را ثابت می‌کنیم. اگر  $p^s = p^1$  آنگاه  $C \triangleleft G$ . فرض می‌کنیم

$s > 1$ . به علاوه فرض می‌کنیم  $C - N(C) \in C$  به طوری که  $y^p \in C$  برای هر  $n$ ، قرار می‌دهیم

$[x, y; n] = [x, \underbrace{y, \dots, y}_n]$ . فرض می‌کنیم  $k$  کوچکترین عددی باشد که  $[x, y; k] = 1$ . اگر  $k = 1$

آنگاه  $[x, y] = 1$ . در نتیجه  $xy = yx$ . بنابراین  $y \in C$  که یک تناقض است. بنابراین  $k > 1$ . اگر  $a$  عضو دلخواهی از  $C = C(x)$  باشد داریم  $[a, x] = 1$ . در نتیجه  $[x, a] = 1$  بنابراین  $x \in Z(C)$  لذا بنا به نتیجه ۱-۱-۳۰، با استقراء داریم  $[x, y; k-1] \in Z(C)$  و  $1 \neq [x, y; k-1]$  پس  $C \subseteq C([x, y; k-1])$ . همچنین داریم  $[x, y; k-1], y] = [x, y; k] = 1$  پس  $y \in C([x, y; k-1])$  از طرفی، چون  $y \notin C$  و  $C \neq C([x, y; k-1])$  در نتیجه  $C \subsetneq C([x, y; k-1]) \subseteq G$  چون  $C$  ماکسیمال است پس  $C([x, y; k-1]) = G$ . بنابراین  $[x, y; k-1] \in Z(G)$ . قرار می‌دهیم  $z = [x, y; k-2]$ . بنابراین  $[z, y] = [x, y; k-1] \neq 1$  لذا  $zy \neq yz$  در نتیجه  $z \notin Z(G)$  اما  $z \in Z(C)$  پس  $z$  از رده مینیمال است. همچنین داریم  $C \subseteq C(z) \subsetneq G$  با توجه به اینکه  $C$  ماکسیمال است، خواهیم داشت  $C = C(z)$ . چون  $[z, y] \in Z(G)$  پس  $[z, y]^p = [z, y^p]$  از طرفی  $y^p \in C = C(z)$  لذا  $[z, y^p] = 1$  بنابراین  $[z, y]^p = 1$  قرار می‌دهیم  $N = \langle [z, y] \rangle$  چون  $N \leq Z(G)$  پس  $N \triangleleft G$ . قرار می‌دهیم  $H = G/N$  داریم  $\frac{C(z)N}{N} \subsetneq C(zN) \subseteq \frac{G}{N}$  و  $N \subseteq C(z)$  بنابراین  $|cl(zN)| \leq p^s$  از طرفی  $yN \in C(zN)$  و  $y \notin C$  پس  $|cl(zN)| \leq p^{s-1}$ . بنا بر لم ۱-۲-۱۳،  $|cl(zN)| \geq \frac{|cl(z)|}{|N|} = \frac{p^s}{p} = p^{s-1}$  بنابراین  $|cl(zN)| = p^{s-1}$  و این رده، یک رده مینیمال در  $H$  است. بنا به فرض استقراء، عنصری مانند  $w$  وجود دارد به طوری که  $wN \in Z_\gamma(H)$  و  $wN$  در یک رده مینیمال از  $H$  قرار می‌گیرد. بنابراین  $|cl(wN)| = p^{s-1}$  در نتیجه رده  $w$  در  $G$  از اندازه حداکثر  $p^s$  است و بنا بر مینیمال بودن داریم  $|cl(w)| = p^s$  فرض می‌کنیم  $v \in G$  خواهیم داشت

$$wN \in Z_\gamma(H) \Rightarrow wNZ(H) \in Z_\gamma(H)/Z(H) = Z(H/Z(H))$$

$$\Rightarrow [wN, vN]Z(H) = 1_{H/Z(H)} = Z(H)$$

$$\Rightarrow [wN, vN] \in Z(H).$$

بنابراین برای هر  $g \in G$  داریم

$$([w, v]N)^{gN} = [w, v]N \Rightarrow [w, v]^g N = [w, v]N$$

$$\Rightarrow [w, v]^g \in [w, v]N.$$

بنابراین رده  $[w, v]$  در  $G$  مشمول در  $[w, v]N$  است و چون  $|N| = p$ ، پس  $|cl([w, v])| \leq p$  از طرفی  $p < p^s$ ، بنابراین  $[w, v] \in Z(G)$ . اینک خواهیم داشت

$$[w, v] \in Z(G) \Rightarrow [w, v]Z(G) = Z(G)$$

$$\Rightarrow [wZ(G), vZ(G)] = Z(G) = \bigcap_{G/Z(G)}$$

$$\Rightarrow wZ(G) \in Z(G/Z(G)) = Z_p(G)/Z(G)$$

بنابراین  $w \in Z_p(G)$ . اکنون دوباره با استقراء روی  $s$  شکل  $w$  را ثابت می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم  $s = 1$ ، پس  $C \triangleleft G$ . در نتیجه  $Z(C) \triangleleft G$ . بنابراین با استقراء روی  $n$  همه عناصر

به فرم  $[x, y; n]$  در  $Z(C)$  قرار می‌گیرند، جایی که  $y \notin C$ . فرض می‌کنیم به ازای هر  $i$  که  $i > 2$ ،

$[x, y] \in Z_{i-1}(G) - Z_{i-2}(G)$  پس  $xZ_{i-2} \notin Z(G/Z_{i-2})$  لذا چون  $x \in Z_i(G) - Z_{i-1}(G)$

از طرفی چون  $[x, y] \in Z(C)$  پس  $[x, y]$  از پهنای یک است. با ادامه این روش، برای عددی مانند

$$n \text{ داریم، } [x, y; n] \in Z_p(G) - Z(G)$$

حال فرض می‌کنیم  $s > 1$  و  $[x, y; n]N \in Z_p(G/N) - Z(G/N)$ . قرار می‌دهیم  $[x, y; n] = h$ .

پس برای هر  $g \in G$ ،  $[h, g]N \in Z(G/N)$ . در نتیجه برای هر  $g' \in G$ ،  $[[h, g]N, g'N] = N$ .

بنابراین  $[[h, g], g'] \in N$ . لذا  $[h, g]^{g'} \in [h, g]N$  پس  $[h, g]^{g'} \in [h, g]N$ . در نتیجه

$$[h, g] \in Z(G). \text{ بنابراین } h = [x, y; n] \in Z_p(G) \text{ و حکم ثابت می‌شود.} \blacksquare$$

**قضیه ۳-۱-۷.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه باشد. در این صورت

(۱) هر زیرگروه نرمال  $G$  از مرتبه حداکثر  $p^s$ ، مرکزی است.

(۲)  $p^s$  کوچکترین عددی است که برای آن، زیرگروه نرمالی مانند  $N$  وجود دارد که

$$Z(G/N) \neq Z(G)/N$$

**برهان.** (۱) فرض می‌کنیم  $N \triangleleft G$  و  $|N| \leq p^s$ . به موجب لم ۱-۲-۱۲،  $N = \cup_{x \in N} cl(x)$ .

بنابراین عناصر  $N$  کمتر از  $p^s$  تا، مزدوج دارند. در نتیجه در مرکز قرار می‌گیرند.

(۲) فرض می‌کنیم  $x \in Z(G \bmod N)$  خواهیم داشت

$$xN \in Z(G/N) \Rightarrow [xN, gN] = N, \quad gN \in G/N \text{ برای هر}$$

$$\Rightarrow [x, g] \in N \Rightarrow g^{-1}xg \in xN.$$

در نتیجه  $cl(x) \subseteq xN$ . بنابراین  $|cl(x)| \leq |xN| = |N|$ . اگر  $|N| < p^s$  آنگاه  $x \in Z(G)$

اینک فرض می‌کنیم  $x \in Z_p(G)$  به طوری که  $x$  از رده مینیمال باشد. قرار می‌دهیم  $N := [x, G]$

. تابع  $\varphi : N \rightarrow cl(x)$  را با ضابطه  $[x, g] \mapsto x^g$  تعریف می‌کنیم. به وضوح  $\varphi$  یک تناظر

دوسویی است. بنابراین  $N$  یک زیرگروه نرمال از مرتبه  $p^s$  است. از طرفی  $x \in Z(G \bmod N)$

پس  $Z(G \bmod N) \neq Z(G)$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**قضیه ۳-۱-۸.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه باشد. در این صورت

(۱) اگر  $x \in Z_p(G)$  و از پهنای مینیمال باشد آنگاه  $x^p \in Z(G)$

(۲) اگر  $N_1$  و  $N_p$  دو زیرگروه نرمال از مرتبه  $p^s$  باشند به طوری که  $H_i := Z(G \bmod N_i) \neq Z(G)$

$$\text{آنگاه } H_1 \cap H_p = Z(G)$$

(۳) اگر  $C_1$  و  $C_p$  دو مرکز ساز ماکسیمال متمایز باشند به طوری که  $H_i = Z(C_i)$  آنگاه

$$H_1 \cap H_p = Z(G)$$

**برهان.** (۱) فرض می‌کنیم  $x \in Z_p(G)$  و از رده مینیمال باشد. بعلاوه فرض می‌کنیم

$C = C(x)$ . چون  $C$  در  $G$  نرمال است پس فرض می‌کنیم  $y \notin C$  اما  $y^p \in C$ . قرار می‌دهیم

$K = \langle x, y \rangle$ . چون  $x \in Z_p(G)$  پس  $[x, y] \in Z(G)$  و لذا  $[x, y] \in Z(K)$ . پس  $K$  پوچتوان از

رده ۲ است. بنابراین  $[x^p, y] = [x, y^p] = 1$ . در نتیجه  $y \in C(x^p)$ . با توجه به اینکه

$C(x) \subseteq C(x^p) \subseteq G$  و  $y \notin C(x)$  خواهیم داشت  $C(x) \subsetneq C(x^p) \subseteq G$ . اینک گوییم چون  $C$

ماکسیمال است،  $C(x^p) = G$ . بنابراین  $x^p \in Z(G)$

(۲) فرض می‌کنیم  $x \in H_1 \cap H_p$  پس  $x \in Z(G \bmod N_1)$  و  $x \in Z(G \bmod N_p)$  اگر

$x \in Z(G \bmod N_1)$  آنگاه خواهیم داشت

$$xN_1 \in Z(G/N_1) \Rightarrow [xN_1, gN_1] = N_1, \quad g \in G \text{ هر}$$

$$\Rightarrow [x, g] \in N_1$$

در نتیجه  $[x, G] \subseteq N_1$ . به طور مشابه ثابت می‌شود اگر  $x \in Z(G \bmod N_p)$  آنگاه  $[x, G] \subseteq N_p$ .

بنابراین  $[x, G] \subseteq N_1 \cap N_p$ . در نتیجه تعداد مزدوجهای  $x$  کمتر از  $p^s$  تا است. پس  $x \in Z(G)$

بنابراین  $H_1 \cap H_p \subseteq Z(G)$  از طرفی چون  $Z(G) \subseteq H_1$  و  $Z(G) \subseteq H_p$ ، بنابراین

$Z(G) \subseteq H_1 \cap H_p$  و حکم ثابت می‌شود.

(۳) فرض می‌کنیم  $x \in H_1 \cap H_p$  با توجه به اینکه  $H_1 = Z(C_1)$  و  $H_p = Z(C_p)$ ، داریم

$x \in Z(C_1)$  و  $x \in Z(C_p)$  بنابراین  $C_1 \subseteq C(x) \subseteq G$  و  $C_p \subseteq C(x) \subseteq G$ . از طرفی  $C_1 \neq C_p$

پس بنابر ماکسیمال بودن  $C_1$  و  $C_p$  داریم  $C(x) = G$ . در نتیجه  $x \in Z(G)$  بنابراین

$H_1 \cap H_p \subseteq Z(G)$  بر عکس چون  $Z(G) \subseteq C_1$  و  $Z(G) \subseteq C_p$ ، داریم  $Z(G) \subseteq Z(C_1) = H_1$

و  $Z(G) \subseteq Z(C_p) = H_p$  بنابراین  $Z(G) \subseteq H_1 \cap H_p$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**تعریف ۳-۱-۹.** فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی و  $H \neq 1$  یک زیرگروه نرمال از  $G$  باشد. گوییم

$(G, H)$  دارای ویژگی  $(C)$  است اگر و تنها اگر به ازای هر  $x \in G - H$  و هر  $h \in H$  در  $G$  با  $xh$

مزدوج باشد.

**قضیه ۳-۱-۱۰.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه از رده پوچتوانی ۳ باشد که  $(G, Y_p)$  دارای ویژگی

$(C)$  باشد. همچنین فرض کنیم  $|G:Y_p| = p^m$  و  $|Y_p:Y_p| = p^n$  در این صورت

(۱)  $(G, Y_p)$  دارای ویژگی  $(C)$  است.

(۲)  $m = 2n$  و  $n$  زوج است.

**برهان.** به [۱۳، قضیه ۵-۲] رجوع شود. ■

**نتیجه ۱-۱-۱۱.** فرض کنیم  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی از رده پوچتوانی ۳ باشد که  $(G, Y_p)$  دارای

ویژگی  $(C)$  باشد. در این صورت  $Y_p(G) = Z_p(G)$  و  $Y_p(G) = Z(G)$ .

**برهان.** به [۱۳، نتیجه ۵-۳] رجوع شود. ■

**لم ۱-۱-۱۲.** فرض کنیم  $G = Q_{4n} = \langle a, b | a^n = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$  که  $n$  توانی از ۲ است. در

این صورت تعداد رده‌های مینیمال  $G$  حداقل ۳ و از اندازه ۲ است.

**برهان.** داریم  $Z(Q_{4n}) = \langle a^n \rangle$  و  $|\langle a^n \rangle| = 2$ . پس  $|\langle a \rangle| = 2n$ . اگر  $n = 2$  آنگاه

$G = Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$  و داریم  $[1] = \{1\}$ ،  $[a^2] = \{a^2\}$ ،  $[a] = \{a, a^3\}$ ،

$[b] = \{b, ba^2\}$  و  $[ba] = \{ba, ba^3\}$ . بنابراین  $Q_8$ ، ۳ رده مینیمال از اندازه ۲ دارد. حال فرض

می‌کنیم  $n \geq 4$  و  $x$  عنصری دلخواه از  $G$  باشد. دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول:  $x \in \langle a \rangle$ . چون  $\langle a \rangle$  دوری است پس  $\langle a \rangle \subseteq C(x) \subseteq G$ . حال اگر  $C(x) = G$

آنگاه  $x \in Z(G)$  بنابراین به ازای هر  $x \in \langle a \rangle - Z(G)$   $\langle a \rangle = C(x)$ . در نتیجه

$$\frac{2n-2}{2} = n-1 \geq 3 \text{ تعداد به حداقل } G, \text{ آنگاه } n \geq 4 \text{ لذا اگر } |[x]| = \frac{|G|}{|C(x)|} = \frac{4n}{2n} = 2$$

رده تزویج از اندازه ۲ دارد و لذا این رده‌ها مینیمال هستند.

حالت دوم:  $x \notin \langle a \rangle$ . پس  $x = ba^j$ . اینک  $|C(x)|$  را بدست می‌آوریم. اگر  $a^i ba^j = ba^j a^i$  آنگاه

$$ba^{-i} a^j = ba^j a^i \Rightarrow a^{-i} a^j = a^j a^i$$

$$\Rightarrow a^{-i} = a^i \Rightarrow a^{2i} = 1 \Rightarrow o(a) | 2i$$

$$\Rightarrow 2n | 2i \Rightarrow n | i \Rightarrow i = 0 \text{ یا } n.$$

و اگر  $ba^{i'}x = xba^{i'}$  آنگاه

$$\begin{aligned} ba^{i'}ba^j &= ba^jba^{i'} \Rightarrow a^{-i'}b^{\vee}a^j = a^{-j}b^{\vee}a^{i'} \\ &\Rightarrow b^{\vee}a^{j-i'} = b^{\vee}a^{i'-j} \Rightarrow a^{\vee(j-i')} = 1 \\ &\Rightarrow o(a)|\vee(j-i') \Rightarrow \vee n|\vee(j-i') \Rightarrow n|j-i' \\ &\Rightarrow j-i' = 0 \text{ یا } n \Rightarrow i' = j \text{ یا } i' = j-n. \end{aligned}$$

بنابراین  $|C(x)| = 4$ . در نتیجه  $\frac{|G|}{|C(x)|} = \frac{\vee n}{4} = n \geq 4$ . لذا  $[x]$  رده مینیمال نیست. در

نتیجه  $G$  دقیقاً  $1-n$  رده مینیمال  $\vee$  عضوی دارد. ■

لم ۳-۱-۱۳. فرض کنیم  $G = D_{\vee n} = \langle a, b | a^n = b^{\vee} = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$  که  $n$  توانی از  $\vee$

است. در این صورت تعداد رده‌های مینیمال  $G$  حداقل  $\vee$  و از اندازه  $\vee$  است.

برهان. اگر  $n = 4$  آنگاه  $G = D_4 = \{1, a, a^{\vee}, a^{\vee\vee}, b, ab, a^{\vee}b, a^{\vee\vee}b\}$  و داریم  $[1] = \{1\}$ ,

$[a] = \{a, a^{-1}\}$ ,  $[a^{\vee}] = \{a^{\vee}\}$ ,  $[b] = \{b, a^{\vee}b\}$  و  $[ab] = \{ab, a^{\vee}b\}$ . بنابراین  $D_4$  ۳ رده

مینیمال از اندازه  $\vee$  دارد. داریم  $\langle a \rangle \triangleleft G$ . فرض می‌کنیم  $x \in \langle a \rangle$  چون  $\langle a \rangle$  دوری است پس

$\langle a \rangle \subseteq C(x) \subseteq G$ . حال اگر  $C(x) = G$  آنگاه  $Z(G) = \{1, a^{n/\vee}\}$  بنابرین اگر  $x \in$

$\langle a \rangle - \{1, a^{n/\vee}\}$  آنگاه  $\langle a \rangle = C(x)$ . در نتیجه  $\frac{|G|}{|C(x)|} = \frac{\vee n}{n} = \vee$ . لذا اگر  $n > 4$  آنگاه

$G$ ، به تعداد  $1 < \frac{n-\vee}{\vee}$  رده مینیمال از اندازه  $\vee$  دارد. ■

لم ۳-۱-۱۴. فرض کنیم  $G = SD_{\vee n} = \langle a, b | a^{\vee^{n-1}} = b^{\vee} = 1, b^{-1}ab = a^{-1+\vee^{n-2}} \rangle$  در این

صورت تعداد رده‌های مینیمال  $G$  حداقل  $\vee$  و از اندازه  $\vee$  است.

برهان. چون  $G$  ناآبلی است پس  $n > 3$ . داریم  $|G:\langle a \rangle| = \vee$  و  $Z(G) \subseteq \langle a \rangle$ . چون  $G$  ناآبلی

است پس  $G/Z(G)$  دوری نیست. در نتیجه  $|G:Z(G)| \geq 4$ . بنابراین  $| \langle a \rangle : Z(G) | \geq \vee$ .

فرض می‌کنیم  $x$  عنصری دلخواه از  $\langle a \rangle - Z(G)$  باشد. در این صورت  $\langle a \rangle \subseteq C(x) \subseteq G$ .

نتیجه  $C(x) = G$  یا  $C(x) = \langle a \rangle$ . چون  $x$  مرکزی نیست پس  $C(x) = \langle a \rangle$ . بنابراین

$$|[x]| = \frac{|G|}{|C(x)|} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

لذا  $[x]$  رده مینیمال ۲ عضوی است. اینک اگر  $n > 3$  آنگاه  $G$  حداقل

$$\frac{|\langle a \rangle - Z(G)|}{2} \geq \frac{|a|/2}{2} = \frac{|a|}{4} \geq 2$$

رده مینیمال از اندازه ۲ دارد. ■

**قضیه ۱۵-۱-۳.** فرض کنیم  $G$  یک گروه از رده پوچتوانی  $c$  باشد، و دقیقاً  $p-1$  رده مینیمال داشته

باشد. در این صورت

(۱)  $Z_p(G)$  آبدلی مقدماتی است،  $|Z_p(G):Z(G)| = p$  و رده‌های مینیمال رده‌هایی هستند که در

$Z_p(G) - Z(G)$  قرار می‌گیرند. همچنین این رده‌ها، هم‌دسته‌های  $Z(G)$  هستند.

(۲) اگر  $x \in Z_p(G) - Z_p(G)$  آنگاه  $cl(x) = xZ_p(G)$ .

(۳)  $c \geq 4$ . بعلاوه  $Y_{c-1} = Z_p(G)$  و  $Y_c = Z(G)$ .

**برهان.** (۱) به موجب قضیه ۱۵-۱-۳، اگر  $u = p-1$  آنگاه  $p^s = p^z$  اینک اگر فرض

کنیم  $x \in Z_p(G) - Z(G)$  آنگاه خواهیم داشت

$$xZ(G) \in Z_p(G)/Z(G) = Z(G/Z(G))$$

$$\Rightarrow [xZ(G), gZ(G)] = Z(G) \quad , g \in G \text{ هر}$$

$$\Rightarrow [x, g] \in Z(G) \Rightarrow g^{-1}xg \in xZ(G).$$

بنابراین  $cl(x) \subseteq xZ(G)$ . در نتیجه  $|cl(x)| \leq |xZ(G)| = |Z(G)| = p^z$ . با توجه به اینکه

$x \notin Z(G)$  خواهیم داشت  $|cl(x)| \geq p^s = p^z$ . پس  $|cl(x)| = p^z$ . در نتیجه  $cl(x) = xZ(G)$ .

گوییم چون هم‌دسته‌های متمایز نابديهی  $Z(G)$  در  $Z_p(G)$  رده‌های مینیمال متمایز تولید می‌کنند

پس به تعداد حداکثر  $p-1$  تا از این هم‌دسته‌ها وجود دارد. پس  $|Z_p(G):Z(G)| \leq p$  اینک

با توجه به اینکه  $G$  یک  $p$ -گروه است خواهیم داشت،  $|Z_p(G):Z(G)| \geq p$ . بنابراین

$$|Z_p(G):Z(G)| = p. \text{ بعلاوه همه این همدسته‌های نابديهی رده‌های مینیمال هستند.}$$

دوباره فرض می‌کنیم  $x \in Z_p(G) - Z(G)$  بعلاوه فرض می‌کنیم  $z \in Z(G)$  ثابت کردیم

که  $cl(x) = xZ(G)$ . بنابراین  $xz = x^v$  که در آن  $v$  عضوی از  $G$  است. در نتیجه  $z = [x, v]$

بنابراین  $z^p = [x, v]^p = [x^p, v]$  به موجب قضیه ۳-۱-۸، قسمت (۱)،  $x^p \in Z(G)$  در

نتیجه  $z^p = [x^p, v] = 1$ ، بنابراین  $Z(G)$  آبلی مقدماتی است. از طرفی،  $|Z_p(G):Z(G)| = p$ ،

در نتیجه  $Z_p(G) = \langle x, Z(G) \rangle$  و  $Z_p(G)$  آبلی است. اینک فرض می‌کنیم  $Z_p(G)$  مقدماتی نباشد.

بنابر قضیه ۱-۱-۳۴، زیرگروه نرمالی مانند  $W$  از  $Z(G)$  وجود دارد به طوری که  $Z(G) = \langle x^p \rangle \times W$

از طرفی  $(x^p)^p = x^{p^2} = e$ . پس  $|p^2 o(x)|$ . بنابراین  $Z_p(G) = \langle x \rangle \times W$  در نتیجه  $Z_p(G)/W$

دوری و از مرتبه  $p^2$  است. بنابراین  $|W| = p^{s-1}$ . اگر فرض کنیم  $gW \in Z(G/W)$  آنگاه

برای هر  $y \in G$ ،  $[gW, yW] = W$  در نتیجه  $[g, y] \in W$ . لذا  $[g, G] \subseteq W$ . بنابراین

$$|cl(g)| = |[g, G]| \leq |W| = p^{s-1}.$$

در نتیجه  $g \in Z(G)$  لذا  $Z(G/W) = Z(G)/W$  داریم  $Z(\frac{G/W}{Z(G/W)}) = \frac{Z_p(G/W)}{Z(G/W)}$  پس

$$\frac{Z_p(G/W)}{Z(G)/W} = Z(\frac{G/W}{Z(G)/W}) \cong Z(\frac{G}{Z(G)}) = \frac{Z_p(G)}{Z(G)} \cong \frac{Z_p(G)/W}{Z(G)/W}$$

در نتیجه  $|Z_p(G/W)| = |Z_p(G)/W|$ . از طرفی  $Z_p(G)/W \subseteq Z_p(G/W)$  بنابراین

$Z_p(G/W) = Z_p(G)/W$  دوری است. پس بنابر [۷، قضیه ۳-۷-۷]  $G/W$  گروه دووجهی، چهارگانه

یا نیم دووجهی است. همچنین می‌دانیم مرتبه‌ی رده مینیمال این گروهها عددی اول است. بنابر

لم ۱-۲-۱۳، به ازای هر  $gW \in G/W$ ،  $|cl(gW)| \geq \frac{|cl(g)|}{|W|}$ . پس اگر  $|cl(g)| > p^s$  آنگاه

$|cl(gW)| \geq p^2$  و لذا  $cl(gW)$  رده مینیمال نیست. از طرفی اگر  $cl(g)$  رده مینیمال باشد آنگاه

$|cl(gW)| = p$  و لذا  $G/W$ ، دقیقاً  $p - 1$  رده مینیمال از اندازه  $p$  دارد، که بنابر لم های ۱-۳-۱۲،  
 ۱۳-۱-۳ و ۱۴-۱-۳، با ساختار  $G/W$  در تناقض است. بنابراین  $Z_p(G)$  مقدماتی است.

(۲) اگر  $x \in Z_p(G) - Z_p(G)$  آنگاه خواهیم داشت

$$xZ_p(G) \in Z_p(G)/Z_p(G) = Z(G/Z_p(G))$$

$$\Rightarrow [xZ_p(G), gZ_p(G)] = Z_p(G) \quad , g \in G \text{ هر برای}$$

$$\Rightarrow [x, g]Z_p(G) = Z_p(G) \Rightarrow [x, g] \in Z_p(G)$$

$$\Rightarrow x^g \in xZ_p(G).$$

در نتیجه  $cl(x) \subseteq xZ_p(G)$  بنابرین  $|cl(x)| \leq |xZ_p(G)| = |Z_p(G)|$  با توجه به اینکه،  
 $|Z_p(G):Z(G)| = p$  و  $|Z(G)| = p^z$  داریم  $|cl(x)| \leq p^{z+1}$  از طرفی  $|cl(x)| \geq p^{s+1}$  بعلاوه

$$p^{s+1} = p^{z+1} \text{ بنابرین } |cl(x)| = |xZ_p(G)| \text{ در نتیجه } cl(x) = xZ_p(G)$$

(۳) اگر  $c(G) = 2$  آنگاه  $G = Z_p(G)$  که با فرض ناآبلی بودن  $G$  در تناقض است. اینک

فرض کنیم  $c(G) = 3$  بنابر قسمت (۲)، به ازای هر  $x \in Z_p(G) - Z_p(G)$ ،  $cl(x) = xZ_p(G)$  در  
 نتیجه عناصر  $Z_p(G)$  جابجاگرهای  $x$  هستند. بنابراین  $G' = Z_p(G)$  در نتیجه  $x^G = xG'$  بنابرین  
 $(G, G')$  دارای ویژگی  $(C)$  است و بنابر قضیه ۱-۳-۱۰،  $|Z_p(G):Z(G)| \neq p$  که یک تناقض است.

$$\text{بنابرین } c(G) \geq 4$$

به موجب لم ۱-۳-۱۴،  $Y_{c-2} \leq Z_p(G)$  و  $Y_{c-2} \not\leq Z_p(G)$  بنابرین عنصری مانند

$x \in Y_{c-2} \leq Z_p(G)$  وجود دارد به طوری که  $x \notin Z_p(G)$  در نتیجه بنابر قسمت (۲)،

$Z_p(G) = [x, G]$  از طرفی  $[G, Y_{c-2}] = Y_{c-1}$  حال چون  $x \in Y_{c-2}$  پس  $Z_p(G) \leq Y_{c-1}$  از

طرفی می دانیم  $Y_{c-1} \leq Z_p(G)$  بنابرین  $Z_p(G) = Y_{c-1}$

به طور مشابه، عنصری مانند  $x \in Y_{c-1} \leq Z_p(G)$  وجود دارد به طوری که  $x \notin Z(G)$  در نتیجه

$$\blacksquare Y_c = Z(G) \text{ بنابراین } Y_c \leq Z(G) \text{ از طرفی } Z(G) = [x, G] \leq Y_c$$

### ۲-۳ گروه های فراآبلی

**تعریف ۱-۲-۳.** گروه  $G$  را فراآبلی<sup>۱</sup> گویند هرگاه دارای زیرگروه نرمالی مانند  $N$  باشد به طوری که  $G/N$  و  $G/N$  هردو آبلی باشند.

**قضیه ۲-۲-۳.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فراآبلی از رده حداقل ۴ باشد به طوری که  $|Z_p(G):Z(G)| = p$ . در این صورت عناصر  $Z_p(G) - Z(G)$  پهنای یک دارند.

**برهان.** فرض کنیم  $G$  از رده پوچتوانی  $c$  باشد. با توجه به اینکه  $c \geq 4$ ، خواهیم داشت

$$Y_{c-2} \not\leq Z_p(G) \cap G' \text{ و } Y_{c-2} \not\leq Z_p(G). \text{ فرض می کنیم } Y_{c-2} \leq Z_p(G) \cap G' \text{ و } Y_{c-2} \not\leq Z_p(G) \text{ بنابراین}$$

$$xZ_p(G) \in Z_p(G)/Z_p(G) = Z(G/Z_p(G)).$$

لذا عنصر  $y \in G$  وجود دارد که  $[x, y] \in Z_p(G)$  و  $[x, y] \notin Z(G)$ . چون  $|Z_p(G):Z(G)| = p$  پس

$$Z_p(G)/Z_p(G) = \langle [x, y]Z(G) \rangle \text{ و همه عناصر } Z_p(G) - Z(G) \text{ به فرم } [x, y]^i z \text{ هستند که در آن}$$

$$z \in Z(G) \text{ و } 0 < i < p. \text{ بنابر لم ۱-۱-۸، به ازای هر } i \text{ که } 0 < i < p, C([x, y]^i z) = C([x, y]^i),$$

از طرفی به موجب لم ۱-۱-۹، خواهیم داشت  $C([x, y]^i) = C([x, y])$ . بنابراین همه عناصر

$Z_p(G) - Z(G)$  مرکزسازهای یکسان دارند. فرض می کنیم  $C = C(x \bmod Z(G))$ . در

نتیجه  $|G:C| = p$ . اینک کافی است نشان دهیم  $C([x, y]) = C$ . بنابر لم سه

زیرگروه،  $[x, G, C] \leq [C, x, G][G, C, x]$ . گوئیم چون  $[C, x] \leq Z(G)$ ، داریم

$$[C, x, G] = [[C, x], G] = 1 \text{ از طرفی } [G, C] \leq G' \text{ و } x \in G' \text{ چون } G' \text{ آبلی است پس}$$

---

<sup>1</sup> metabelian group

$[G, C, x] = [[G, C], x] = 1$ . بنابراین  $[x, G, C] = 1$  و در نتیجه  $[[x, y], C] = 1$ . پس

■ چون  $|G:C| = p$  پس  $C = C([x, y])$  و حکم ثابت می‌شود.

**قضیه ۳-۲-۳.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فراآبلی از رده  $c > 2$  باشد به طوری که

$$|Z_p(G) \cap G'| = p^2. \text{ در این صورت به ازای هر } i \text{ که } 1 \leq i \leq c-1, Y_{c+1-i} \cap G' = Z_i(G) \cap G' \text{ و } G$$

یک  $CF$ -گروه است.

**برهان.** با استقراء نسبت به  $i$  حکم را ثابت می‌کنیم. اگر  $i = 1$  آنگاه داریم

$$Y_c \subseteq Z(G) \cap G' \subseteq Z_p(G) \cap G' \text{ چون } G' \triangleleft G \text{ پس } 1 \neq G' \text{ پس } Z(G) \cap G' \neq 1 \text{ از طرفی } G/Z(G)$$

ناآبلی است. پس  $1 \neq (G/Z(G))'$ . در نتیجه  $1 \neq \frac{G'Z(G)}{Z(G)} \cap \frac{Z_p(G)}{Z(G)}$  پس عنصری مانند  $aZ(G) \neq 1$  در

وجود دارد که  $a \in G'Z(G)$  و  $a \in Z_p(G) - Z(G)$ . پس به ازای  $z \in Z(G)$  و

$x \in G'$  داریم

$$a = xz \Rightarrow x = az^{-1} \in Z_p(G)$$

$$\Rightarrow x \in Z_p(G) \cap G' - Z(G) \cap G'.$$

بنابراین  $Z(G) \cap G' \subseteq Z_p(G) \cap G'$ . لذا  $|Z(G) \cap G'| = p$  چون  $Y_c \neq 1$  پس  $Y_c = Z(G) \cap G'$

حال فرض می‌کنیم  $i = 2$ . داریم  $Y_{c-1} \subseteq Z_p(G)$ . پس  $Y_{c-1} \cap G' \subseteq Z_p(G) \cap G'$  در نتیجه

$$Y_{c-1} \subseteq Z_p(G) \cap G' \neq 1. \text{ با توجه به اینکه } |Z_p(G) \cap G'| = p^2, \text{ خواهیم داشت}$$

$$|Y_{c-1}| = p^2 \text{ یا } p$$

اگر  $|Y_{c-1}| = p$  آنگاه با توجه به تعریف سری مرکزی پایینی  $(1 \subsetneq Y_c \subsetneq Y_{c-1} \subsetneq \dots)$ ،  $|Y_c| = 1$ .

که تناقض است. بنابراین  $|Y_{c-1}| = p^2$ . در نتیجه  $Y_{c-1} = Z_p \cap G'$  اینک فرض می‌کنیم حکم

برای  $i$  و همه اندیسهای کوچکتر برقرار باشد.  $G$  را بر  $Z_{i-2} \cap G'$  تقسیم می‌کنیم. اینک  $G$  را با گروه

خارج قسمتی  $G/(Z_{i-2} \cap G')$  جایگزین می‌کنیم. پس کافی است حکم را برای  $i = 3$  ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم  $Z_p - (Z_p \cap G') - x \in (Z_p \cap G')$  بعلاوه فرض می‌کنیم  $y$  عنصری باشد که  $[x, y] \notin Z(G)$ .

بنابر اثبات قضیه ۳-۲-۲،  $C := C(x \bmod Z) = C([x, y]) = C(Z_p \cap G')$  و  $|G:C| = p$ . از طرفی

$[x, y]Z(G) \neq Z(G)$ . پس  $[xZ(G), yZ(G)] \neq Z(G)$ . لذا  $C/Z(G) = C(xZ(G)) \neq yZ(G)$ .

بنابراین  $y \notin C$ . در نتیجه  $G = \langle C, y \rangle$ . همچنین اگر فرض کنیم  $Z_p - (Z_p \cap G') - v \in (Z_p \cap G')$  آنگاه به طور

مشابه  $C(v \bmod Z) = C$  و  $[v, y] = [x, y]^e z$  که در آن  $e$  یک عدد صحیح است و  $z \in Z(G)$

چون  $[x, y]$  با  $x$  تعویضپذیر است، پس  $[x, y]^e = [x^e, y]$ . بنابراین،  $[vx^{-e}, y] \in Z(G)$  و

$$[vx^{-e}, G] = [vx^{-e}, C\langle y \rangle]$$

$$= [vx^{-e}, C][vx^{-e}, \langle y \rangle] \leq Z(G).$$

در نتیجه  $vx^{-e} \in Z_p(G)$ . بنابراین  $v(Z_p \cap G') = x^e(Z_p \cap G')$  لذا  $\langle x(Z_p \cap G') \rangle = \frac{Z_p \cap G'}{Z_p \cap G'}$  از

طرفی  $[x, y]^p \in Z(G)$ . پس  $[x^p, y] \in Z(G)$ . در نتیجه خواهیم داشت

$$[x^p Z(G), yZ(G)] = Z(G)$$

$$\Rightarrow x^p Z(G) \in Z(G/Z(G)) = Z_p(G)/Z(G)$$

$$\Rightarrow x^p \in Z_p(G).$$

بنابراین  $|Z_p \cap G' : Z_p \cap G'| = p$ . با توجه به اینکه  $Z_i \cap G' \leq Y_{c+1-i}$  داریم

$$|Y_{c+1-i}| \leq |Z_i \cap G'| \leq |Y_{c+1-i}| \geq p^i \geq |Z_i \cap G'| \text{ از طرفی } |Y_{c+1-i}| \leq |Z_i \cap G'|$$

اینک با توجه به برهان بالا داریم

$$|Y_{c-1} : Y_c| = p, |Y_{c-2} : Y_{c-1}| = p, \dots, |Y_p : Y_p| = p.$$

بنابراین  $G$  یک  $CF$ -گروه است. ■

**نتیجه ۳-۲-۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فراآبلی از رده  $c > 2$  باشد. در این صورت  $G$  یک  $CF$ -گروه

است اگر و تنها اگر  $|Z_p(G) \cap G'| = p^2$ .

**برهان.** فرض می‌کنیم  $|Z_p(G) \cap G'| = p^2$ . بنابر قضیه قبل  $G$  یک  $CF$ -گروه است.

برعکس، فرض می‌کنیم  $G$  یک  $CF$ -گروه باشد. پس به ازای  $i = 3, 4, \dots, c+1$

$$|Y_{i-1}:Y_i| = p \text{ در نتیجه خواهیم داشت}$$

$$|Y_c:Y_{c+1}| = |Y_{c-1}:Y_c| = |Y_{c-2}:Y_{c-1}| = p.$$

از طرفی بنابر تعریف سری مرکزی پایینی،  $Y_{c+1} = 1$  بنابراین داریم  $|Y_c| = p$ ،  $|Y_{c-1}| = p^2$  و

$|Y_{c-2}| = p^2$  از طرفی  $Y_{c-1} \leq Z_p \cap G'$  اما  $Y_{c-2} \not\leq Z_p \cap G'$  در نتیجه  $|Z_p \cap G'| = p^2$  و  $p^3$

$$|Z_p \cap G'| = p^2 \text{ بنابراین } |Z_p(G) \cap G'| = p^2. \blacksquare$$

**نتیجه ۳-۲-۵.** فرض کنیم  $G$  یک گروه فراآبلی از رده  $c > 2$  و  $|Z_p \cap D| = p^2$  که  $D = C(G')$

در این صورت  $G$  یک  $CF$ -گروه است، و به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq c-1$ ،  $Z_i \cap D = Z_i \cap G'$

**برهان.** چون  $G'$  آبلی است پس  $G' \subseteq C(G')$  در نتیجه  $G' \cap Z_p \subseteq C(G') \cap Z_p$ .

$$\text{بنابراین } |Z_p \cap C(G')| = |G' \cap Z_p| \text{ یعنی } p^2 \text{ یا } p \text{ یا } 1. |G' \cap Z_p|$$

اگر  $|Z_p \cap G'| = 1$  آنگاه  $Y_{c-1} = 1$  که تناقض است. بعلاوه اگر  $|G' \cap Z_p| = p$  آنگاه  $Y_c = 1$  که

این هم تناقض است. بنابراین  $|Z_p \cap G'| = p^2$ . لذا بنابر قضیه ۳-۲-۳،  $G$  یک  $CF$ -گروه است و به

ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq c-1$ ،  $Z_i(G) \cap G' = Y_{c+1-i}$  پس باید ثابت کنیم به ازای هر

$i$  که  $1 \leq i \leq c-1$ ،  $Z_i \cap D = Y_{c+1-i}$ . مشابه برهان قضیه ۳-۲-۳، ثابت می‌شود که

$$|Z_i \cap D:Z_{i-1} \cap D| = p \text{ لذا } |Z_i \cap D| \geq p^i \geq |Y_{c+1-i}| \text{ از طرفی } Y_{c+1-i} \leq Z_i \cap D \text{ بنابراین}$$

$$Z_i \cap D = Y_{c+1-i} \text{ و حکم ثابت می‌شود. } \blacksquare$$

### ۳-۳ رده های مینیمال

لم ۳-۳-۱. فرض کنیم  $G$  یک  $CF$ -گروه فراآبلی از رده  $c > 3$  باشد. در این صورت اگر به ازای  $i$  ای

$$[Y_1, Y_j] \leq Y_{j+1+s}, j \geq 1, \text{ آنگاه برای هر } s \leq c-i \text{ و } 2 \leq i \leq c-2, [Y_1, Y_i] \leq Y_{i+1+s}.$$

برهان. بنابر لم سه زیرگروه خواهیم داشت

$$[Y_{i+1}, Y_1] = [Y_i, G, Y_1] \leq [Y_1, Y_i, G][G, Y_1, Y_i].$$

از طرفی داریم

$$[G, Y_1, Y_i] = [[G, Y_1], Y_i] = [Y_1, Y_i] = [G', Y_i].$$

حال با توجه به اینکه  $G'$  آبلی است و  $Y_i \subseteq G'$ ، خواهیم داشت  $[G, Y_1, Y_i] = 1$ . در نتیجه

$$[Y_{i+1}, Y_1] \leq [Y_1, Y_i, G] \leq [Y_{i+1+s}, G] = Y_{i+2+s}.$$

بنابراین به استقراء حکم برای  $i \geq j$  برقرار است.

به طور مشابه بنابر لم سه زیرگروه داریم

$$[Y_1, Y_{i-1}, G] \leq [G, Y_1, Y_{i-1}][Y_{i-1}, G, Y_1].$$

اگر  $i-1 \geq 2$  آنگاه  $[G, Y_1, Y_{i-1}] = 1$ ، و اگر  $i-1 = 1$  آنگاه  $[G, Y_1, Y_{i-1}] = [Y_1, Y_1] = 1$ . در نتیجه

در هر دو حالت،  $[Y_1, Y_{i-1}, G] \leq [Y_i, Y_1]$ . بنابراین

$$[Y_1, Y_{i-1}, G] = [[Y_1, Y_{i-1}], G] \leq [Y_i, Y_1] \leq Y_{i+1+s} \leq Z_{c-i-s}.$$

$$[Y_1, Y_{i-1}] \leq G' \cap Z_{c+1-i-s} = Y_{i+1} \text{ در نتیجه } \frac{[Y_1, Y_{i-1}]Z_{c-i-s}}{Z_{c-i-s}} \subseteq Z(G/Z_{c-i-s}) = \frac{Z_{c-i-s+1}}{Z_{c-i-s}} \text{ لذا}$$

بنابراین به استقراء حکم برای  $i \leq j$  نیز برقرار است. در نتیجه حکم ثابت می شود. ■

قضیه ۳-۳-۲. فرض کنیم  $G$  یک گروه فراآبلی از رده  $c$  باشد. در این صورت  $G$ ،  $p-1$  رده مینیمال

دارد اگر و تنها اگر  $G$  در شرایط زیر صدق کند.

(۱)  $G$  یک  $CF$ -گروه باشد.

$$(۲) \quad t(G) = ۱$$

$$(۳) \quad c \geq ۴ \text{ و } C(G') \cap Z_{c-1} = G'$$

**برهان.** فرض می‌کنیم  $G$ ،  $p-۱$  رده مینیمال داشته باشد. با استفاده از قضیه‌های ۳-۱-۱۴ و

۳-۲-۲، خواهیم داشت  $c \geq ۴$  و  $p = |Z_p(G):Z(G)|$ . فرض می‌کنیم  $x \in Z_p(G) - Z(G)$  پس

$$|Z_p(G)| = p^2 \text{ و } p = |cl(x)| = |xZ(G)| = |Z(G)| \text{ لذا } ۱ \neq Z(G) \cap G' \subseteq Z(G) \text{ از طرفی}$$

$$Z(G) \cap G' = Z(G) \text{ پس } Z(G) \subseteq G' \text{ اگر } G' = Z(G) \text{ آنگاه } c(G) = ۲ \text{ که با فرض } c \geq ۴$$

تناقض دارد. بنابراین  $G'/Z(G) \cap Z(G/Z(G)) \neq ۱$  لذا  $G'/Z(G) \cap Z_p(G)/Z(G) \neq ۱$  در

نتیجه  $Z_p(G)/Z(G) \subseteq G'/Z(G)$  پس  $Z_p(G) \subseteq G'$  با توجه به اینکه  $G'$  آبدی است، خواهیم

$$\text{داشت } Z_p(G) \subseteq C(G') \text{ لذا } Z_p(G) \cap C(G') = Z_p(G) \text{ بنابراین } |Z_p(G) \cap C(G')| = p^2$$

$$\text{اینک نتیجه ۳-۲-۵، نشان می‌دهد که } G \text{ یک } CF\text{-گروه است و } C(G') \cap Z_{c-1} = Z_{c-1} \cap G'$$

$$\text{از طرفی } G' = Y_p \subseteq Z_{c-1} \text{ پس } C(G') \cap Z_{c-1} = G' \text{ بنابر نتیجه ۲-۱-۱۵، } G \text{ درجه‌ی جابجایی}$$

$$\text{مثبت دارد. اینک اگر } t > ۱ \text{ آنگاه } [Y_{c-2}, Y_1] \leq Y_{c-2+t+1} = ۱ \text{، لذا برای هر } x \in Y_{c-2}$$

$$[x, Y_1] = ۱ \text{ پس } |G:C(x)| = ۱ \text{ یا } |G:C(x)| = p \text{ اما فقط } p \text{ تا عنصر از عناصر } Y_{c-2} \text{ در مرکز}$$

$$\text{قرار دارند و بقیه غیرمرکزی‌اند. لذا برای عناصر غیرمرکزی داریم } |G:C(x)| = p \text{ یعنی } |x^G| = p$$

$$\text{در نتیجه } G \text{ حداقل } ۱ - p^{\frac{p^2-p}{p}} \text{ رده مینیمال دارد که یک تناقض است. بنابراین } t = ۱$$

برعکس، فرض می‌کنیم  $G$  در شرایط (۱) - (۳) صدق کند. نشان می‌دهیم که همه عناصر از

$$\text{پهنای } ۱ \text{ در } Z_p(G) \text{ قرار می‌گیرند. فرض می‌کنیم } b(x) = ۱ \text{ دو حالت را بررسی می‌کنیم.}$$

حالت اول: فرض می‌کنیم  $x \in G'$  در این صورت به ازای  $i$ ،  $x \in Y_i - Y_{i+1}$  چون  $G$  یک

$$CF\text{-گروه است پس } |Y_{i+1}:Y_i| = p \text{ از طرفی } Y_{i+1} < Y_i \text{ و } x \notin Y_{i+1} \text{ بنابراین } Y_i = \langle x \rangle Y_{i+1}$$

فرض کنیم  $i \leq c-2$ . اگر  $[Y_1, Y_i] \leq Y_{i+3}$  آنگاه بنابر لم ۳-۳-۱، به ازای هر  $j \geq 1$ ،

$$[Y_1, Y_j] \leq Y_{1+j+2}. \text{ لذا } t(G) \geq 2. \text{ که تناقض است. در نتیجه } [Y_1, Y_i] \not\leq Y_{i+3}. \text{ از طرفی}$$

$$[Y_1, Y_i] \leq Y_{i+2}. \text{ بنابراین } [Y_1, Y_i] = Y_{i+2}. \text{ اینک اگر } [Y_1, \langle x \rangle] = 1 \text{ آنگاه خواهیم داشت}$$

$$[Y_1, Y_i] = [Y_1, \langle x \rangle Y_{i+1}] \leq [Y_1, \langle x \rangle][Y_1, Y_{i+1}] = Y_{i+3}.$$

که یک تناقض است. بنابراین  $[Y_1, \langle x \rangle] \neq 1$ . در نتیجه  $[Y_1, x] \neq 1$ . پس  $|[Y_1, x]| \geq p$ . از

طرفی  $b(x) = 1$ ، یعنی  $|[G, x]| = p$  در نتیجه

$$p \leq |[Y_1, x]| \leq |[G, x]| = p.$$

بنابراین  $[Y_1, x] = [G, x]$  در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= [G, Y_i] = [G, \langle x \rangle Y_{i+1}] \leq [G, \langle x \rangle][G, Y_{i+1}] \\ &= [Y_1, x] Y_{i+2} = Y_{i+2}. \end{aligned}$$

که یک تناقض است. پس  $i = c-1$ . در نتیجه  $x \in Y_{c-1} \leq Z_p(G)$  بنابراین  $x \in Z_p(G)$ .

حالت دوم: فرض می‌کنیم  $x \notin G'$ . با توجه به اینکه  $x$  پهنای ۱ دارد، خواهیم داشت

$$|G : C(x)| = p. \text{ چون } G \text{ یک } p\text{-گروه است پس } C(x) \triangleleft G. \text{ لذا } G/C(x) \text{ آبلی است. در نتیجه}$$

$$G' \subseteq C(x). \text{ بنابراین } [G', x] = 1. \text{ بنابر اتحاد هال ویت برای هر دو عنصر } y, z \in G \text{ خواهیم داشت}$$

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1.$$

اینک با توجه به اینکه  $[G', x] = 1$ ، خواهیم داشت

$$[x, y^{-1}, z]^y = [[z, x^{-1}], y]^{-1} = [y, [z, x^{-1}]].$$

به عبارتی دیگر

$$\begin{aligned}
[x, y, z] &= [[x, y], z] = [y^{-1}, [z, x^{-1}]]^y = y^{-1}(y[z, x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z, x^{-1}])y \\
&= [z, x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z, x^{-1}]y = xz^{-1}x^{-1}zx x^{-1}y^{-1}xx^{-1}z^{-1}xzx^{-1}y \\
&= x[x, z]^{-1}x^{-1}y^{-1}x[x, z]x^{-1}y = [x, z]^{-1}y^{-1}[x, z]y \\
&= [[x, z], y] = [x, z, y].
\end{aligned}$$

بنابراین  $C(x) \subseteq C([x, y])$  پس  $|G: C(x)| = p$  که نتیجه می‌دهد  $|G: C([x, y])| = 1$  یا  $p$ . اگر  $|G: C([x, y])| = p$  آنگاه  $[x, y] \in Z_p(G)$ . در نتیجه  $[xZ_p(G), yZ_p(G)] = Z_p(G)$  لذا  $xZ_p(G) \in Z(G/Z_p(G)) = Z_p(G)/Z_p(G)$  بنابراین  $x \in Z_p(G)$  چون  $[G', x] = 1$  پس  $x \in C(G')$  در نتیجه  $x \in Z_p \cap C(G')$  بنابراین  $x \in G'$  که یک تناقض است. لذا  $|G: C([x, y])| = 1$  در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
[x, y] \in Z(G) &\Rightarrow [xZ(G), yZ(G)] = Z(G) \\
&\Rightarrow xZ(G) \in Z(G/Z(G)) = Z_p(G)/Z(G).
\end{aligned}$$

بنابراین  $x \in Z_p(G)$  و حکم ثابت می‌شود. ■

**نتیجه ۳-۳-۳.** فرض کنیم  $G$  یک  $ECF$ -گروه فراآبلی با  $p-1$  رده مینیمال باشد. در این صورت  $G$  از رده پوچتوانی حداکثر  $p+1$  است. به عبارت دیگر اگر  $G$  از رده ماکسیمال باشد آنگاه مرتبه آن حداکثر  $p^{p+2}$  است.

**برهان.** به موجب قضیه ۲-۱-۲۰،  $G$  درجه‌ی جابجایی حداقل  $c-p$  دارد، یعنی  $t \geq c-p$ . در نتیجه  $c \leq t+p$  از طرفی بنابر قضیه ۳-۳-۲،  $t=1$ . بنابراین  $c \leq p+1$ ، و حکم ثابت می‌شود. ■

**لم ۳-۳-۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این صورت به ازای هر

$$i \text{ که } 2 \leq i \leq m-3, Y_i = C(Y_i \text{ mod } Y_{i+2})$$

برهان. به [۷، قضیه ۳-۱۴-۶] رجوع شود. ■

**تعریف ۳-۳-۵.** فرض کنیم  $G$  یک گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این صورت اگر  $Y_1 = C(Y_{m-2})$  آنگاه  $G$  را گروه غیر استثنایی<sup>۱</sup> و در غیر این صورت  $G$  را گروه استثنایی می‌گوییم.

**قضیه ۳-۳-۶.** فرض کنیم  $G$  یک گروه از رده ماکسیمال و از مرتبه  $p^m$  باشد. در این صورت  $G$  دارای  $(p-1)$  رده مینیمال است اگر و تنها اگر  $[Y_1, Y_{m-3}] \neq 1$ . بعلاوه همه گروه‌های استثنایی و همچنین همه گروه‌ها با کرانه صفر و گروه‌هایی با شرط  $m \leq 2p-3$  در این شرط صدق می‌کنند.

**برهان.** فرض کنیم  $b(x) = 1$  و  $C = C(x)$ . پس  $|G:C| = p$ . بنابراین  $C < G$ . در نتیجه

$Z(C) < G$  و  $Z(C) \cap Z(G) \neq 1$  از طرفی  $x \in Z(C) - Z(G)$  پس  $|Z(C)| \geq p^2$ . اینک

$\frac{Z(C)}{Z(G)} < \frac{G}{Z(G)}$  و  $1 \neq \frac{Z(C)}{Z(G)} \cap Z(\frac{G}{Z(G)}) \neq 1$  در نتیجه  $\frac{Z(C)}{Z(G)} \cap \frac{Z_p(G)}{Z(G)} \neq 1$ . از طرفی داریم

لذا  $\frac{Z(C)}{Z(G)} \cap \frac{Z_p(G)}{Z(G)} = \frac{Z_p(G)}{Z(G)}$  پس  $|Z_p(G)/Z(G)| = p$  و  $1 \neq \frac{Z(C)}{Z(G)} \cap \frac{Z_p(G)}{Z(G)} \subseteq \frac{Z_p(G)}{Z(G)}$

$Z_p(G)/Z(G) \subseteq Z(C)/Z(G)$  در نتیجه  $Y_{m-2} \subseteq Z(C)$ . بنابراین  $C \subseteq C_G(Y_{m-2}) \subseteq G$  و چون

$Y_{m-2} \not\subseteq Z(G)$  پس  $C_G(Y_{m-2}) \neq G$ . حال با توجه به اینکه  $|G:C| = p$  خواهیم داشت

$C = C_G(Y_{m-2})$ . در نتیجه اگر  $y \in Y_{m-2} - Z(G)$  آنگاه  $C(y) = C$ . پس  $cl(y)$  یک رده مینیمال

است. لذا  $G$  حداقل  $\frac{p-1}{p}$  رده مینیمال دارد. از طرفی  $Z(G) \subseteq Y_{m-2} \subseteq Z(C)$ . پس اگر

$g \in Z(C) - Z(G)$  آنگاه  $C(g) = C$  و  $cl(g)$  یک رده مینیمال است. بنابراین  $G$ ،  $p-1$  رده

مینیمال دارد اگر و تنها اگر  $Z(C) = Y_{m-2}$ . اگر  $G$  گروه غیراستثنایی باشد آنگاه

$Y_1 = C(Y_{m-2}) = C$ . بنابراین  $Z(C) = Y_{m-2}$  اگر و تنها اگر  $[Y_1, Y_{m-3}] \neq 1$ . حال اگر  $G$  گروه

---

<sup>1</sup> non-exceptional group

استثنایی باشد و  $Z(C) \neq Y_{m-2}$  آنگاه داریم  $Z(C) \geq Y_{m-3}$  لذا  $C \subseteq C_G(Y_{m-3}) \subsetneq G$  در نتیجه

$C = C(Y_{m-2}) = Y_1$  بنابر لم ۳-۳-۴،  $C(Y_{m-3} \text{ mod } Y_{m-1}) = Y_1$  پس  $C(Y_{m-3}) = Y_1$

که تناقض است. پس  $Z(C) = Y_{m-2}$  از طرفی  $[Y_1, Y_{m-3}] \subseteq [Y_1, Y_{m-2}] \neq 1$  بنابراین

$$[Y_1, Y_{m-3}] \neq 1$$

اگر  $t(G) = t$  درجه جابجایی  $G$  باشد آنگاه نامساوی  $[Y_1, Y_{m-3}] \neq 1$  نشان می‌دهد که  $t = 1$

چون اگر  $t \geq 2$  آنگاه  $Y_m = 1 \leq Y_{m-2+1+t} \leq [Y_1, Y_{m-3}]$  که تناقض است. در نتیجه

بنابر قضیه ۲-۱-۲،  $m \leq 2p - 3$  اگر  $k(G) = 0$  آنگاه به موجب قضیه ۲-۲-۲،

$[Y_1, Y_{m-3}] = Y_{m-1} \neq 1$  و همچنین  $[Y_1, Y_{m-2}] = Y_m = 1$  در نتیجه  $C(Y_{m-2}) = Y_1$  و  $G$

یک گروه غیراستثنایی است و حکم ثابت می‌شود. ■

## واژه‌نامه (انگلیسی - فارسی)

|                         |               |
|-------------------------|---------------|
| abelian group           | گروه آبدلی    |
| abundance               | کرانه         |
| action                  | عمل           |
| automorphism            | خودریختی      |
| breadth                 | پهنا          |
| center                  | مرکز          |
| central                 | مرکزی         |
| centralizer             | مرکزساز       |
| CF-group                | CF-گروه       |
| characteristic subgroup | زیرگروه مشخصه |
| class equation          | معادله رده‌ای |
| commutator              | تعویضگر       |
| conjugacy class         | رده مزدوجی    |
| conjugation             | تزوید         |
| coset                   | همدسته        |
| Core                    | مغز           |
| cyclic group            | گروه دوری     |
| degree of commutativity | درجه جابجایی  |
| dihedral group          | گروه دووجهی   |
| ECF-group               | ECF-گروه      |

|                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| elementary abelian group     | گروه آبلی مقدماتی          |
| exceptional group            | گروه استثنایی              |
| finite group                 | گروه متناهی                |
| generalized quaternion group | گروه کواترنیون تعمیم یافته |
| homomorphic image            | تصویر همریخت               |
| homomorphism                 | همریختی                    |
| index                        | اندیس                      |
| invers                       | معکوس                      |
| isomorphism                  | یکریختی                    |
| kernel of an action          | هسته یک عمل                |
| lower central series         | سری مرکزی پایینی           |
| maximal subgroup             | زیرگروه ماکسیمال           |
| maximal class                | رده ماکسیمال               |
| metabelian group             | گروه فراآبلی               |
| minimal class                | رده مینیمال                |
| nilpotency class             | رده پوچتوانی               |
| nilpotent group              | گروه پوچتوان               |
| non-exceptional group        | گروه غیراستثنایی           |
| normal subgroup              | زیرگروه نرمال              |
| orbit                        | مدار                       |
| order                        | مرتبه                      |
| p-group                      | p-گروه                     |

|                      |                  |
|----------------------|------------------|
| proper subgroup      | زیرگروه سره      |
| permutation group    | گروه جایگشتی     |
| quotient group       | گروه خارج قسمتی  |
| semidihedral group   | گروه نیم دووجهی  |
| series               | سری              |
| stabilizer           | پایدارساز        |
| trivial              | بدیهی            |
| upper central series | سری مرکزی بالایی |

## REFERENCES

- [1] N. Blackburn (1958) "On a special class of  $p$ -groups", *Acta Mathematica*, 100, 45-92.
- [2] W. Burnside (1955), "*Theory of Groups of Finite Order*", 2<sup>nd</sup> ed, Dover, New York.
- [3] G. A. Fernández-Alcober (1995) "The exact lower bound for the degree of commutativity of  $p$ -group of maximal class", *Journal of Algebra*, 174, 523-530.
- [4] G. A. Fernández-Alcober and R. T. Shepherd (1988) "On the order of  $p$ -groups of abundance zero", *Journal of Algebra*, 201, 392-400.
- [5] P. X. Gallagher (1970), "*The number of conjugacy class in a finite group*", *Math. Z.*, 118, 175-179.
- [6] P. Hall (1933), "A contribution to the theory of groups of prime-power order", *Proc London Math. Soc.* (2), 36, 29-95.
- [7] B. Huppert (1967), "*Endliche Gruppen I*", Springer-Verlag, Berlin.
- [8] L. G. Kovacs and C. R. Leedham-Green (1986) "Some normally monomial  $p$ -groups of maximal class and large derived length", *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford*, Second Series, 37, 49-54.
- [9] C. R. Leedham-Green and S. McKay (1967) "On  $p$ -groups of maximal class I", *Quart. J. Math. Oxford Ser*, (2) 27, 297-311.
- [10] C. R. Leedham-Green and S. McKay (1978) "On  $p$ -groups of maximal class II", *Quart. J. Math. Oxford Ser*, (2) 29, 175-186.
- [11] C. R. Leedham-Green and S. McKay (1978) "On  $p$ -groups of maximal class III", *Quart. J. Math. Oxford Ser*, (2) 29, 281-299.
- [12] P. Longobardia (1999) "Minimal classes and maximal class in  $p$ -groups", *Israel Journal of Mathematics*, 110, 93-102.

- [13] I. D. Macdonald (1981) "Some  $p$ -groups of Frobenius and extraspecial type", *Israel Journal of Mathematics*, 40, 350-364.
- [14] I. D. Macdonald (1983) "Finite  $p$ -groups with unique maximal classes", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 26, 233-239.
- [15] A. Mann (1978) "Conjugacy classes in finite groups", *Israel Journal of Mathematics*, 31, 78-84.
- [16] A. Mann (1990) "Extreme elements of finite  $p$ -groups", *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 83, 45-54.
- [17] A. Mann (1999) "Minimal characters of  $p$ -groups", *Journal of Group Theory*, 225-250.
- [18] B. A. Panfërov (1980) "Nilpotent groups with lower central factors of minimal ranks", *Algebra i Logika*, 19, 701-706. English translation: *Algebra and Logic* 19 (1990), 455-459.
- [19] J. Poland (1965) "Two problems on finite groups with  $kn$  conjugate classes", *Journal of the Australina Mathematical Society*, 8, 49-55.
- [20] B. Rothe (1993), Diploma. Thesis, "Konjugiertenklassen in Gruppen von Primzahlpotenzordnung", RWTH Aachen.
- [21] A. Vera-López and B. Larrea (1991) "On  $p$ -groups of maximal class", *J. Algebra*, 137, 77-116.
- [22] A. Vera-López and G. A. Fernández-Alcober (1991) "On  $p$ -groups of maximal class II", *Journal of Algebra*, 143, 179-207.
- [23] M. R. Vaughan-Lee and J. Wiegold (1983) "Generation of  $p$ -groups by elements of bounded breadth", *proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 95A, 215-221.
- [24] I. O. York (1990), Ph.D. thesis, "The group of formal power series under substitution", University of Nottingham.

[۲۵] جعفری، س ح، (۱۳۸۴)، رساله دکتری "خودریختی‌های مرکزی گروه‌های متناهی"، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت معلم تهران.

[۲۶] جمالی، ع، (۱۳۸۰) "مباحثی در نظریه گروه‌ها" چاپ اول، انتشارات مبتکران، تهران، ص ۲۸۷.

[۲۷] درفشه، م ر، (۱۳۷۶) "مقدمه‌ای بر نظریه گروه‌ها" چاپ دوم، نشر علوم پایه، ص ۲۴۰.

## **Abstract**

Let  $G$  be a finite  $p$ -group. The number of non-central conjugacy classes of a given size in  $G$  is divisible by  $p - 1$ . Naturally it is better to investigate the groups in which this number is exactly  $p - 1$ . Macdonald has shown that if  $G$  is a  $p$ -group of order  $p^m$  and has  $p - 1$  classes of size  $b = b(G)$ , then  $c(G) \geq 3$ ,  $b \geq 4$ , and  $m \leq b^2 + b$ . The main point of this thesis is based on the non-central classes of minimal breadth. We investigate groups in which the number of classes of minimal size is exactly  $p - 1$ . In chapter 1, we present basic and preliminary contexts. In chapter 2, we study  $p$ -groups of maximal class. In chapter 3, we investigate metabelian groups and groups of maximal class with recent property and at the end we classify of CF metabelian groups and metabelian groups of maximal class.

**Keywords:** breadth, conjugacy class, minimal class, metabelian group, degree of commutativity, exceptional group, maximal class, abundance, CF-group, ECF-group.