

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدايتنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

تعیین کران‌هایی برای عدد احاطه گری منصف در گراف‌ها

نگارنده: مجید حاجیان

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

آبان ۱۳۹۷

تقدیم به:

روح شهید مدافع حرم

محسن . محبی

با سپاس فراوان از:

پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

همسر عزیزم

استاد گرامیم

مجید حاجیان
آبان ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **مجید حاجیان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **تعیین کران‌هایی برای عدد احاطه گری منصف در گراف‌ها**، تحت راهنمایی **نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مجید حاجیان

آبان ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مجموعه D از رئوس را در گراف G یک مجموعه احاطه‌گر گوییم هرگاه هر رأس $v \in V(G)$ یا در D باشد یا با عضوی از D مجاور باشد. یک مجموعه احاطه‌گر منصف در گراف G یک مجموعه احاطه‌گر S است به‌طوری‌که هر رأس از G که عضو S نباشد توسط تعداد یکسانی از اعضای S احاطه شده باشد. عدد احاطه‌گری منصف گراف G ، $fd(G)$ ، برابر است با اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر منصف در گراف G . در این رساله به مطالعه این پارامتر پرداخته و برخی از کران‌های موجود برای عدد احاطه‌گری منصف را بیان می‌کنیم. سپس برخی از این کران‌ها را بهبود بخشیده و کران‌های جدیدی برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک‌دوری، کاکتوس‌گراف‌ها و گراف‌های مسطح خارجی بیان می‌کنیم. همچنین گراف‌هایی که در کران‌های جدید دقیق هستند را مشخص می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مجموعه‌های احاطه‌گر، مجموعه‌های احاطه‌گر منصف، گراف‌های تک‌دوری، کاکتوس‌گراف‌ها، گراف‌های مسطح خارجی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. Hajian and N. Jafari Rad, Trees and unicyclic graphs with large fair domination number, *Utilitas Mathematica* (In press).
2. M. Hajian and N. Jafari Rad, Fair domination number in cactus graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* (In press).
3. M. Hajian and N. Jafari Rad, A note on the fair domination number in outerplanar graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* (In press).
4. M. Hajian and N. Jafari Rad, A new lower bound on the double domination number of a graph, *Discrete Applied Mathematics* (In press).

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	تعاریف و مقدمات
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ تعاریف مقدماتی
۹	۲ برخی کران های موجود برای عدد احاطه گری منصف
۹	۱.۲ مقدمه
۱۰	۲.۲ نتایج اولیه و مشاهدات
۱۰	۳.۲ کران های بالا
۱۲	۴.۲ درخت ها
۱۳	۵.۲ گراف های مسطح خارجی، k -درخت ها
۱۴	۶.۲ کران های نوردهاوس گادوم
۱۵	۳ عدد احاطه گری منصف در درخت ها
۱۵	۱.۳ خانواده ی درخت های T
۱۷	۲.۳ نتایجی در مورد درخت های خانواده T
۲۰	۳.۳ قضیه اصلی برای درخت ها
۲۳	۴ عدد احاطه گری منصف در گراف های تک دوری
۲۳	۱.۴ نتایجی از عدد احاطه گری منصف در درخت ها
۲۶	۲.۴ کران برای عدد احاطه گری منصف در گراف های تک دوری
۲۷	۳.۴ خانواده ی $\mathcal{G}_1$ گراف های تک دوری
۲۸	۴.۴ نتایجی در مورد خانواده ی $\mathcal{G}_1$
۲۹	۵.۴ قضیه ی اصلی در مورد عدد احاطه گری منصف در گراف های تک دوری

۳۵	۵	عدد احاطه‌گری منصف در کاکتوس گراف‌ها
۳۵	۱.۵	کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در کاکتوس گراف‌ها
۳۶	۱.۱.۵	تعاریف
۳۶	۲.۱.۵	کران بالا
۳۸	۲.۵	خانواده‌ی G_k
۳۹	۳.۵	خواص خانواده‌ی G_k
۴۲	۴.۵	قضیه‌ی اصلی
۵۳	۶	عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های مسطح خارجی
۵۳	۱.۶	تعاریف و مشاهدات اولیه
۵۴	۲.۶	کران بالا
۶۳	۷	کران جدید برای عدد احاطه‌گری دوگانه
۶۳	۱.۷	کران چلالی
۶۴	۲.۷	کران جدید
۶۴	۱.۲.۷	خانواده‌ی گراف‌ها
۶۵	۲.۲.۷	کران پایین
۶۹		مراجع
۷۳		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱.۵	C_i ، برای $i = 1, 2, 3$ ، یک دور برگی است و v_j ، برای $j = 1, 2, \dots, 8$ یک راس
۳۶	برشی ویژه است.
۳۹	۲.۵ ساختار خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل، پس از تعریف گراف و مفاهیم مقدماتی در نظریه گراف به معرفی مجموعه‌های احاطه‌گری می‌پردازیم، سپس مجموعه احاطه‌گری منصف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با گراف براساس مراجع [۶، ۱۳، ۲۶] است.

۲.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. گراف^۱ ساده‌ی $G = (V(G), E(G))$ عبارت است از مجموعه‌ی متناهی $V(G)$ و خانواده‌ی $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب از اعضای متمایز در $V(G)$. هر عضو $V(G)$ ، **راس^۲** و هر عضو $E(G)$ ، **یال^۳** نامیده می‌شود. تعداد راس‌ها، $|V(G)|$ ، **مرتبه^۴** گراف نامیده می‌شود و با $n(G)$ نمایش داده می‌شود. تعداد یال‌ها، $|E(G)|$ ، **اندازه^۵** گراف نامیده می‌شود و با $m(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین مفهوم $\{v, u\} \in E(G)$ را با $vu \in E(G)$ مشخص کرده و اگر

^۱Graph

^۲Vertex

^۳Edge

^۴Order

^۵Size

$e = vu \in E(G)$ می‌گوییم v با u مجاور^۶ است.

تعریف ۲.۲.۱. درجه^۷ راس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G است که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $\deg_G(v)$ نمایش می‌دهیم. **بیشترین درجه^۸**، **کمترین درجه^۹** و **میانگین درجه^{۱۰}** را به ترتیب با $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ و $\bar{d}(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین بیشترین تعداد تکرار درجه‌ی یک راس در دنباله درجات گراف را **عدد تکرار^{۱۱}** گراف $rep(G)$ و با $rep(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. یک راس **منفرد^{۱۲}** راسی است که با هیچ راس دیگری مجاور نباشد. یک **برگ^{۱۳}** راسی از درجه‌ی یک است. راسی که در همسایگی یک راس برگ باشد را **پشتیبان^{۱۴}** می‌نامیم. یک راس پشتیبان را **پشتیبان قوی^{۱۵}** می‌گوییم هرگاه دارای حداقل دو برگ در همسایگی خود باشد. یک راس پشتیبان را که در همسایگی خود دقیقاً یک برگ داشته باشد را **پشتیبان ضعیف^{۱۶}** می‌گوییم. مجموعه‌ی برگ‌های گراف G را با $L(G)$ و مجموعه رئوس پشتیبان آن را با $S(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. برای هر زیر مجموعه S از $V(G)$ ، **زیرگراف القایی^{۱۷}** توسط S ، $G[S]$ ، زیر گراف ماکسیمال از G با مجموعه رئوس S را مشخص می‌کند. برای یک زیرمجموعه S از رئوس‌های گراف G گراف $G \setminus S$ ، گراف به دست آمده از G با حذف رئوس‌های S است.

تعریف ۵.۲.۱. مجموعه رئوس‌هایی از G که با رئوس v از گراف G مجاور باشند را **همسایگی باز^{۱۸}** v نامیده و آن را با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. همسایگی باز زیرمجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\bigcup_{v \in S} N(v)$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می‌دهیم. $N(v) \cup \{v\}$ را **همسایگی بسته^{۱۹}** v نامیده و آن را با $N[v]$ نمایش می‌دهیم. همچنین همسایگی بسته زیرمجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $N(S) \cup S$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N[S]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید G یک گراف و $e = uv$ یک یال آن باشد. اگر $u = v$ آن گاه یال e را

^۶ Adjacent

^۷ Degree

^۸ Maximum degree

^۹ Minimum degree

^{۱۰} Average degree

^{۱۱} Repetition number

^{۱۲} Isolated vertex

^{۱۳} Leaf

^{۱۴} Support vertex

^{۱۵} Strong support

^{۱۶} Weak support

^{۱۷} Induced subgraph

^{۱۸} Open neighborhood

^{۱۹} Close neighborhood

یک طوقه^{۲۰} گویند. در صورتی که بین یک زوج از رأس‌های G چند یال وجود داشته باشد، این یال‌ها را موازی^{۲۱} یا چندگانه^{۲۲} گویند. همچنین گراف G را گراف ساده^{۲۳} گویند در صورتی که دارای طوقه و یال چندگانه نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. گراف G را متناهی گویند هرگاه مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ هر دو متناهی باشند. اگر $V(G)$ فقط شامل یک عضو و $E(G) = \emptyset$ گراف G را یک گراف بدیهی^{۲۴} و سایر گراف‌ها را غیربدیهی^{۲۵} گویند.

تعریف ۸.۲.۱. گراف کامل^{۲۶}، گرافی است که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. یک گراف کامل از مرتبه n ، را با K_n نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۲.۱. گراف دوبخشی^{۲۷} گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. **متمم**^{۲۸} گراف G که با $\bar{G}$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأس‌های $V(\bar{G}) = V(G)$ و هر دو رأس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.

تعریف ۱۱.۲.۱. **گراف مسطح**^{۲۹} گرافی است که می‌توان آن را در یک صفحه رسم کرد به گونه‌ای که یال‌هایش یکدیگر را تنها در رأس‌ها قطع کنند. گراف مسطحی که تمام رئوس آن روی مرز وجه خارجی باشند را **گراف مسطح خارجی**^{۳۰} گوئیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک گشت^{۳۱} به طول k ، یک دنباله متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست، به طوری که به ازای هر $i = 1, \dots, k$ یک یال $e_i = v_i v_{i-1}$ باشد. یک مسیر^{۳۲} گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_0, v_1, \dots, v_n$ در نظر می‌گیریم، به طوری که به ازای هر $i = 1, \dots, n$ ، $e_i = v_{i-1} v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم. یک دور^{۳۳} گشت بسته‌ای

^{۲۰} Loop^{۲۱} Parallel^{۲۲} Multi^{۲۳} Simple graph^{۲۴} Trivial graph^{۲۵} Nontrivial^{۲۶} Complete graph^{۲۷} Bipartite graph^{۲۸} Complement^{۲۹} Planar graph^{۳۰} Outerplanar graph^{۳۱} Walk^{۳۲} Path^{۳۳} Cycle

به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. گراف G را **گراف منتظم**^{۳۴} گوئیم هرگاه درجه تمام رئوس با هم برابر باشند. اگر درجه تمام رئوس k باشد، آنگاه گراف را k -منتظم نامیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. گراف G **همبند**^{۳۵} نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر دو رأس متمایز u و v مسیری از u به v موجود باشد. در غیر این صورت G را **ناهمبند**^{۳۶} گوئیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. راسی که با حذف آن گراف ناهمبند شود را **راس برشی**^{۳۷} گویند. در یک گراف، یک زیر گراف همبند ماکسیمال که دارای راس برشی نباشد را یک **بلوک**^{۳۸} از گراف گویند.

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف همبند و فاقد دور را **درخت**^{۳۹} می‌نامیم. یک درخت **ریشه‌دار**^{۴۰} درختی است که یک رأس آن از بقیه رئوس متمایز شده باشد. رأس متمایز شده **ریشه درخت**^{۴۱} نامیده می‌شود. اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد، آنگاه زیردرخت ریشه دار در رأس v را با نماد T_v نمایش می‌دهیم. اگر $u \in N_{T_v}(v)$ گوئیم u **فرزند**^{۴۲} v و v **پدر**^{۴۳} u است.

تعریف ۱۷.۲.۱. گراف همبند که شامل دقیقاً یک دور باشد را **گراف تک‌دوری**^{۴۴} گویند. گرافی که هیچ دو دور آن دارای یال مشترک نباشد را **کاکتوس گراف**^{۴۵} گویند.

تعریف ۱۸.۲.۱. منظور از **ستاره**^{۴۶} S_n ، گراف دوبخشی کامل $K_{1,n}$ است. رأس درجه n در ستاره **رأس مرکزی**^{۴۷} نامیده می‌شود. یک **ستاره دوگانه**^{۴۸} درختی با دقیقاً دو رأس غیر برگ است که این دو رأس نیز رأس‌های مرکزی ستاره دوگانه نامیده می‌شوند. یک ستاره دوگانه با رأس‌های مرکزی از درجه m و n را به صورت $S_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

^{۳۴} Regular graph

^{۳۵} Connected

^{۳۶} Disconnected

^{۳۷} Cutvertex

^{۳۸} Block

^{۳۹} Tree

^{۴۰} Rooted tree

^{۴۱} Root of the tree

^{۴۲} Child

^{۴۳} Father

^{۴۴} Unicyclic graph

^{۴۵} Cactus graph

^{۴۶} Star

^{۴۷} Central vertex

^{۴۸} Double star

تعریف ۱۹.۲.۱. یک خوشه^{۴۹} در یک گراف، مجموعه‌ای از رئوس است که زیرگراف القا شده روی آن گراف کامل باشد. اندازه‌ی بزرگترین خوشه یک گراف را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم. یک زیر مجموعه از رئوس گراف که زیر گراف القایی آن در گراف شامل هیچ یالی نباشد را یک **مجموعه مستقل**^{۵۰} گراف گوئیم. اندازه‌ی بزرگترین مجموعه مستقل گراف را **عدد استقلال**^{۵۱} گویند و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم. **عدد رنگی**^{۵۲} گراف را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. **فاصله**^{۵۳} دو رأس u و v در گراف G ، $d_G(v, u)$ برابر با اندازه کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است. اگر هیچ مسیری بین دو رأس u و v موجود نباشد آنگاه می‌گوئیم $d_G(v, u) = \infty$.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. گراف بدست آمده از افزودن یک برگ به هر رأس G را **تاج**^{۵۴} گراف G می‌نامیم و آن را با $cor(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. یک گراف را **همیلتونی**^{۵۵} گویند اگر دارای یک دور فراگیر باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. مجموعه‌ی S را یک **پوشش راسی**^{۵۶} از $E(G)$ گوئیم هرگاه برای هر یال از گراف، یک راس از S روی آن واقع باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. گراف G را k -**منحط گراف**^{۵۷} گویند هرگاه هر زیر گراف القایی آن یک راس از درجه حداکثر k داشته باشد. یک k -**درخت**^{۵۸} گرافی است که از یک خوشه‌ی $k+1$ راسی شروع شده و هر راس که به گراف اضافه می‌کنیم، دقیقاً به k راس دو به دو مجاور گراف، متصل شود.

تعریف ۲۵.۲.۱. مجموعه Q از رئوس را در گراف G یک **مجموعه بیرون-منتظم**^{۵۹} گوئیم هرگاه برای هر دو راس u و v از مجموعه Q داشته باشیم

$$|N(u) \cap V(G) - Q| = |N(v) \cap V(G) - Q| > 0.$$

به‌وضوح اگر $G \neq \overline{K}_n$ آنگاه G دارای راس غیر تنهای v است حال واضح است که $\{v\}$ یک مجموعه بیرون-منتظم برای گراف G است. بنابراین هر گراف ناتهی دارای یک مجموعه

^{۴۹} Clique

^{۵۰} Independent set

^{۵۱} Independence number

^{۵۲} Chromatic number

^{۵۳} Distance

^{۵۴} Corona

^{۵۵} Hamiltonian

^{۵۶} Vertex cover

^{۵۷} k -degenerate graphs

^{۵۸} k -tree

^{۵۹} Out-regular

بیرون-منتظم است. عدد بیرون-منتظم^{۶۰} گراف G ، $or(G)$ ، برابر است با تعداد رئوس بزرگترین مجموعه بیرون-منتظم در G . طبق قرار داد اگر $G = \overline{K}_n$ ، آنگاه $or(G) = n$. یک مجموعه بیرون-منتظم از اندازه $or(G)$ را با $or(G)$ -مجموعه نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۲.۱. مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ را یک **مجموعه‌ی احاطه‌گر**^{۶۱} گوئیم هرگاه برای هر راس $v \in V(G)$ ، $|N_G(v) \cap S| \geq 1$. کمترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G را **عدد احاطه‌گری**^{۶۲} گراف G نامیده و با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود. به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر G با اندازه‌ی $\gamma(G)$ یک **مجموعه** گفته می‌شود.

تعریف ۲۷.۲.۱. مجموعه‌ی احاطه‌گر S را یک **مجموعه‌ی r -احاطه‌گر**^{۶۳} گوئیم هرگاه برای هر راس v از $V(G) - S$ داشته باشیم، $|N_G(v) \cap S| \geq r$. کمترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی r -احاطه‌گر در بین تمام مجموعه‌های r -احاطه‌گر گراف G را **عدد r -احاطه‌گری**^{۶۴} گراف G نامیده و با $\gamma_r(G)$ نشان داده می‌شود. به یک مجموعه‌ی r -احاطه‌گر G با اندازه‌ی $\gamma_r(G)$ یک **مجموعه γ_r -مجموعه** گفته می‌شود.

تعریف ۲۸.۲.۱. یک زیر مجموعه‌ی D از رئوس G را یک **مجموعه احاطه‌گر k -تایی**^{۶۵} نامیم هرگاه، $|N_G[v] \cap D| \geq k$ ، برای هر $v \in V(G)$. کمترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -تایی در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر k -تایی گراف G را **عدد احاطه‌گری k -تایی**^{۶۶} گراف G نامیده و با $\gamma_{\times k}(G)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر k -تایی از مرتبه‌ی $\gamma_{\times k}(G)$ را یک **مجموعه $\gamma_{\times k}(G)$ -مجموعه** نامیم. در حالتی که $k = 2$ یک مجموعه احاطه‌گر k -تایی را یک **مجموعه احاطه‌گر دوگانه**^{۶۷}، به اختصار DDS نامیم. کمترین اندازه‌ی یک مجموعه احاطه‌گر دوگانه در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر دوگانه‌ی گراف G را **عدد احاطه‌گری دوگانه**^{۶۸} گراف G نامیده و با $\gamma_{\times 2}(G)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر دوگانه از مرتبه‌ی $\gamma_{\times 2}(G)$ را یک **مجموعه $\gamma_{\times 2}(G)$ -مجموعه** نامیم.

تعریف ۲۹.۲.۱. مجموعه‌ی احاطه‌گر S را یک **مجموعه‌ی احاطه‌گر موثر**^{۶۹} گوئیم هرگاه برای هر راس v از $V(G)$ داشته باشیم $|N_G(v) \cap S| = 1$.

^{۶۰} Out-regular number

^{۶۱} Dominating set

^{۶۲} Domination number

^{۶۳} K-dominating set

^{۶۴} K-domination number

^{۶۵} k-tuple dominating set

^{۶۶} k-tuple domination number

^{۶۷} Double dominating set

^{۶۸} Double domination number

^{۶۹} Efficient dominating set

تعریف ۳۰.۲.۱. مجموعه‌ی احاطه گر S را یک مجموعه‌ی احاطه گر کامل^{۷۰} گوئیم هرگاه هرگاه برای هر راس v از $V(G) - S$ داشته باشیم $|N_G(v) \cap S| = 1$.

تعریف ۳۱.۲.۱. برای عدد صحیح $k \geq 1$ یک مجموعه k -احاطه گر منصف^{۷۱} (مختصراً kFD -مجموعه) در G یک مجموعه احاطه گر است به طوری که برای هر راس v از G که عضو این مجموعه نباشد v دقیقاً k همسایه در این مجموعه احاطه گری داشته باشد. عدد k -احاطه گری منصف^{۷۲} گراف G ، $fd_k(G)$ ، برابر است با اندازه کوچکترین مجموعه k -احاطه گر منصف در گراف G . یک مجموعه k -احاطه گر منصف از اندازه $fd_k(G)$ را با $fd_k(G)$ -مجموعه نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه گر منصف^{۷۳} (مختصراً FD -مجموعه) در G یک مجموعه k -احاطه گر منصف برای یک عدد صحیح $k \geq 1$ است. بنابراین یک مجموعه احاطه گر S یک مجموعه احاطه گر منصف است اگر $S = V(G)$ یا اینکه اگر S مخالف $V(G)$ بود، آنگاه هر راس از G که عضو S نبود توسط تعداد یکسانی از اعضای S احاطه شود و این یعنی اینکه برای هر $u, v \in G(V) - S$ داشته باشیم $|N(u) \cap S| = |N(v) \cap S| > 0$. برای گراف $G \neq \bar{K}_n$ کاملاً واضح است که اگر v راسی غیر تنها در G باشد $V(G) - v$ یک مجموعه احاطه گر منصف است. بنابراین هر گراف ناتهی دارای یک مجموعه احاطه گر منصف از اندازه اکیدا کمتر از مرتبه گراف است. عدد احاطه گری منصف^{۷۴} گراف G ، $fd(G)$ ، برابر است با اندازه کوچکترین مجموعه احاطه گر منصف در گراف G . طبق قرار داد اگر $G = \bar{K}_n$ ، آنگاه عدد احاطه گری منصف را $fd(G) = n$ تعریف می‌کنیم. بنابراین اگر G یک گراف ناتهی باشد آنگاه $fd(G) = \min\{fd_k(G)\}$. یک مجموعه احاطه گر منصف از اندازه $fd(G)$ را با $fd(G)$ -مجموعه نشان می‌دهیم.

^{۷۰} Perfect dominating set

^{۷۱} K-fair dominating

^{۷۲} K-fair domination number

^{۷۳} Fair dominating set

^{۷۴} Fair domination number

فصل ۲

برخی کران‌های موجود برای عدد احاطه‌گری منصف

۱.۲ مقدمه

مجموعه‌های احاطه‌گر منصف برای اولین بار توسط کارو^۱ و دیگر نویسندگان [۱۳] در سال ۲۰۱۲ معرفی شدند. همچنین ایشان عدد احاطه‌گری منصف را که اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر منصف است را معرفی کردند. ایشان به بررسی این پارامتر پرداختند. همچنین بیان شده است که این پارامتر ارتباط نزدیکی با پارامترهای مختلف گراف از قبیل مجموعه‌های احاطه‌گر کامل، مجموعه‌های k -احاطه‌گر مجموعه‌های بیرون منتظم، مجموعه‌های احاطه‌گر موثر و غیره وجود دارد. با توجه به آن چه که گفته شد بررسی این پارامتر می‌تواند به گسترش علم کمک زیادی کند. در این رساله به بررسی این پارامتر می‌پردازیم. در این فصل کران‌های موجود در مورد عدد احاطه‌گری منصف در برخی از گراف‌ها را بیان می‌کنیم. ابتدا در بخش ۲.۲ یکسری نتایج اولیه و مشاهدات را بیان می‌کنیم، سپس در بخش ۳.۲ کران‌های بالای موجود در مورد عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌ها را بیان می‌کنیم، پس از آن در بخش ۴.۲ نتایج موجود در مورد عدد احاطه‌گری منصف در درخت‌ها را بیان می‌کنیم. در ادامه‌ی این فصل در بخش ۵.۲ کران‌های موجود در مورد این پارامتر را برای برخی از گراف‌های خاص،

^۱Yair Caro

چون گراف‌های منتظم، گراف‌های مسطح خارجی با بیشترین یال، k -درخت‌ها و غیره را بیان می‌کنیم. و در آخر در بخش ۶.۲ کران‌های نوردهاوس گادوم^۲ را بیان می‌کنیم.

۲.۲ نتایج اولیه و مشاهدات

در ابتدا، از آنجایی که هر مجموعه‌احاطه‌گر منصف یک مجموعه‌احاطه‌گر است، کارو و همکاران در [۱۳] مشاهده‌ی زیر را بیان کردند.

مشاهده ۱.۲.۲. [۱۳] فرض کنید G گراف از مرتبه n باشد، آنگاه نتایج زیر برقرار است.

$$(۱) \gamma(G) \leq fd(G)$$

$$(۲) fd(G) \leq n, \text{ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر } G = \overline{K_n}.$$

توجه داشته باشید که اگر G دارای یک مجموعه‌احاطه‌گر موثر S باشد آنگاه

$$fd(G) \leq fd_1(G) \leq |S| = \gamma(G)$$

در این صورت طبق مشاهده ۱.۲.۲ کارو و دیگر همکاران در [۱۳] مشاهده‌ی زیر را بیان کرده‌اند.

مشاهده ۲.۲.۲. [۱۳] اگر G دارای یک مجموعه‌احاطه‌گر موثر باشد آنگاه،

$$fd(G) = fd_1(G) = \gamma(G)$$

در ادامه مشاهده‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

مشاهده ۳.۲.۲. [۱۳] برای $m, n \geq 1$ ، اگر $G \in \{P_n, K_n, K_{m,n}\}$ آنگاه $fd(G) = \gamma(G)$. همچنین برای $n \geq 3$ داریم $fd(C_n) = \gamma(G)$ به جز برای $n \equiv 2 \pmod{3}$ (به پیمانه ۳) و $n \geq 5$ ، که در این حالت $fd(G) = \gamma(G) + 1$.

۳.۲ کران‌های بالا

کارو و دیگر همکاران در [۱۳] کران بالایی برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌ها با توجه به مرتبه‌ی گراف بیان کردند.

قضیه ۱.۳.۲. [۱۳] اگر G گرافی از مرتبه‌ی $n \geq 3$ با $\delta(G) \geq 1$ باشد، آنگاه $fd(G) \leq n - 2$ و این کران قابل دسترسی است.

در [۱۳] گراف‌های $H = H_n$ که در کران قضیه فوق برای آنها دقیق هستند ارائه شده است. برای $n \geq 3$ گراف $H = H_n$ از مرتبه‌ی $2n$ به صورت زیر است: فرض کنید $V(H) = X \cup Y$

^۲Nordhaus–Gaddum

که در آن $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ و راس x_i به راس y_j ، برای $i \geq j$ ، متصل است، همچنین Y یک مجموعه مستقل است و برای $i, j > 1$ راس x_i به x_j متصل است. حال کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری منصف برحسب مرتبه، عدد رنگی، میانگین درجات و بیشترین و کمترین درجه گراف بیان می‌کنیم. برای این کار نیاز به دو قضیه زیر داریم.

قضیه ۲.۳.۲. [۳۷، ۱۱] برای هر گراف از مرتبه‌ی n داریم،

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + \deg_G(v)} \geq \frac{n}{\bar{d}(G) + 1}$$

لم ۱.۳.۲. [۱۲] اگر G گرانی از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه،

$$rep(G) \geq \frac{n}{2\bar{d}(G) - 2\delta(G) + 1}$$

حال قضیه‌ی زیر که مورد گراف‌های منتظم است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۲. [۱۳] اگر G گرانی از مرتبه‌ی n باشد آنگاه نتایج زیر برقرار است.

$$(۱) \text{ اگر } n \geq ۲ \text{ و } \delta(G) \geq ۱ \text{ آنگاه، } fd(G) \leq n - n/(\bar{d}(G) + 1)\Delta(G).$$

$$(۲) \text{ } fd(G) \leq n - n/(2\bar{d}(G) - 2\delta(G) + 1)\chi(G).$$

$$(۳) \text{ برای } r \geq ۳، \text{ اگر } G \text{ یک گراف } r\text{-منتظم باشد، آنگاه } fd(G) \leq rn/(r + ۱).$$

توجه داشته باشید وقتی G یک گراف منتظم باشد مسئله پیدا کردن $fd(G)$ - مجموعه با پیدا کردن بزرگترین زیر گراف منتظم (غیر بدیهی) برای گراف G برابر است. در این صورت قضیه بالا ارتباط مستقیم با مسئله پیدا کردن بزرگترین زیر گراف منتظم [۱] دارد. قضیه زیر نیز برای حل این مسئله کمک می‌کند.

قضیه ۴.۳.۲. [۱۳] برای $r \geq ۱$ ، اگر G یک گراف r -منتظم از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه برای

$$c > ۰ \text{ داریم } fd(G) \leq n - c \log n$$

طبق قضیه‌ی ۱.۳.۲، $fd(G) \leq n - ۲$ اما اینکه دقیقاً چه گراف‌هایی برای این کران دقیق هستند هنوز یک مسئله‌ی باز است. قضیه‌ی زیر که یک شرط لازم برای گراف‌هایی که در این کران دقیق باشند بیان شده است.

قضیه ۵.۳.۲. [۱۳] اگر G گراف همبندی از مرتبه‌ی $n \geq ۶$ باشد به طوری که $fd(G) = n - ۲$ ،

$$۲ \leq rep(G) \leq ۴ \text{ آنگاه}$$

توجه داشته باشید که در قضیه فوق مرتبه‌ی گراف بزرگتر از ۶ در نظر گرفته شده است، و این فرض ضروری است، زیرا برای $G = C_5$ مرتبه گراف ۵ بوده و $rep(G) = ۵$ از طرفی $fd(G) = ۳ = n - ۲$.

۴.۲ درخت ها

در ابتدای این بخش مشاهده زیر را که در [۱۳] آمده است بیان می کنیم.

مشاهده ۱.۴.۲. [۱۳] هر $FD-1$ مجموعه از یک گراف شامل تمام رئوس پشتیبان قوی گراف است.

کارو و دیگر نویسندگان در [۱۳] قضیه ی زیر را برای عدد احاطه گری منصف در درخت ها بیان کرده اند.

قضیه ۱.۴.۲. [۱۳] اگر T درختی از مرتبه $2 \leq n$ باشد آنگاه $fd_1(T) \leq n/2$ و تساوی رخ می دهد اگر و تنها اگر T تاجی از یک درخت باشد.

در [۲۴] نویسندگان مقاله نشان دادند که برای هر درخت از مرتبه n داریم $\gamma_2(T) \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$. از طرفی چون هر $FD-k$ مجموعه یک k -احاطه گر است با توجه به قضیه ی ۱.۴.۲ در [۱۳] مشاهده ی زیر بیان شده است. در این مشاهده نشان داده می شود که در یک درخت هر FD - مجموعه یک $FD-1$ مجموعه است.

مشاهده ۲.۴.۲. در یک درخت هر FD - مجموعه یک $FD-1$ مجموعه است.

باتوجه به اینکه هر $FD-1$ مجموعه یک مجموعه احاطه گر کامل است، مشاهده ی فوق نشان می دهد که هر نتیجه ای درباره ی عدد احاطه گری منصف بیان شود این نتیجه در مورد یک مجموعه احاطه گر کامل نیز صادق است.

در ادامه مشاهده ی زیر که در [۱۳] آمده است را بیان می کنیم.

مشاهده ۳.۴.۲. [۱۳] اگر T درختی از مرتبه ی n با l برگ باشد، آنگاه $fd(G) \leq n - l$.

در [۱۳] کارو و دیگر نویسندگان تمام گراف هایی که در کران قضیه فوق دقیق هستند را مشخص نموده اند. برای این کار فرض کنید H زیر درختی از درخت T باشد به طوری که H یک تاج از درختی باشد، $H \neq T$ و $N(x) \cap S_H = \emptyset$ برای هر $x \in V \setminus V(H)$ ، در این صورت H را یک زیردرخت-تاج ویژه از T گوئیم. حال قضیه ی زیر را داریم.

قضیه ۲.۴.۲. [۱۳] فرض کنید T درختی از مرتبه ی $3 \leq n$ با l برگ باشد. آنگاه نتایج زیر معادل هستند:

$$(1) \quad fd(T) = n - l$$

(۲) وجود دارد یک $fd(T)$ - مجموعه ی D ، به طوری که D یک پوشش راسی است

(۳) درخت T شامل هیچ زیردرخت-تاج ویژه نیست.

۵.۲ گراف‌های مسطح خارجی، k -درخت‌ها

در این بخش ابتدا عدد احاطه‌گری منصف را در گراف‌های مسطح خارجی با بیشترین یال مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این کار ابتدا مشاهده‌ی زیر را که در مورد عدد برون منتظم یک گراف است را بیان می‌کنیم.

مشاهده ۱.۵.۲. [۱۳] فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی n باشد، در این صورت $or(G) \geq 0$ و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $G = K_n$.

در ادامه قضیه‌ی زیر را که ارتباط بین عدد بیرون -منتظم گراف و عدد احاطه‌گری منصف گراف است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۲. [۱۳] برای هر گراف G از مرتبه‌ی n ، $fd(G) + or(G) = n$.

حال با توجه به قضیه‌ی بالا یک کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های مسطح خارجی با بیشترین یال، به اختصار MOP، که در [۱۳] آمده است بیان می‌کنیم. برای این کار ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۵.۲. [۱۳] اگر G یک MOP گراف از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد، آنگاه زیر گراف القایی تشکیل شده از رئوس از درجه ۳ گراف یک گراف دوبخشی است.

حال می‌توانیم قضیه‌ی زیر را بیان کنیم.

قضیه ۲.۵.۲. [۱۳] اگر G یک MOP گراف از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد، آنگاه $fd(G) < 17n/19$.

در [۱۰]، نویسندگان مقاله به مجموعه‌های مستقل در یک گراف که دارای درجه‌ی یکسان هستند پرداخته‌اند. بیشترین اندازه از یک چنین مجموعه‌های مستقل -منتظم را با $\alpha_{reg}(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G از مرتبه n باشد و $\delta(G) \geq 1$ باشد آنگاه واضح است که

$$\alpha_{reg} + fd(G) \leq n$$

در [۲۷] نویسندگان مقاله با توجه به این نامساوی و نتایجی که در [۱۰] برای $\alpha_{reg}(G)$ بیان شده است کران‌های جدیدی برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های مسطح، مسطح خارجی بابیشترین یال و k -درخت‌ها بیان کرده‌اند که در ادامه می‌آوریم.

قضیه ۳.۵.۲. [۲۷] اگر G گراف مسطح همبند، غیر از دورهای فرد، از مرتبه‌ی $n \geq 5$ باشد، آنگاه:

$$(1) \text{ اگر } \delta = 1 \text{ آنگاه } fd(G) \leq \frac{63}{65}n$$

$$(2) \text{ اگر } \delta = 2 \text{ آنگاه } fd(G) \leq \frac{117}{131}n$$

$$(3) \text{ اگر } \delta = 3 \text{ آنگاه } fd(G) \leq \frac{25}{26}n$$

$$fd(G) \leq \frac{19}{4}n \text{ آنگاه } \delta = 4 \text{ اگر } (4)$$

$$fd(G) \leq \frac{11}{13}n \text{ آنگاه } \delta = 5 \text{ اگر } (5)$$

برای گراف های مسطح با بیشترین یال قضیه زیر کران بهتری ارائه می کند.

قضیه ۴.۵.۲. [۲۷] اگر G گراف مسطح همبند یال ماکسیمال، از مرتبه ی $n \geq 5$ باشد، آنگاه:

$$fd(G) \leq \frac{58}{61}n \text{ آنگاه } \delta = 3 \text{ اگر } (1)$$

$$fd(G) \leq \frac{17}{18}n \text{ آنگاه } \delta = 4 \text{ اگر } (2)$$

$$fd(G) \leq \frac{11}{13}n \text{ آنگاه } \delta = 5 \text{ اگر } (3)$$

برای گراف های مسطح خارجی کران زیر برای مجموعه احاطه گر منصف وجود دارد.

قضیه ۵.۵.۲. [۲۷] اگر G گراف مسطح خارجی همبند از مرتبه ی $n \geq 4$ باشد، آنگاه:

$$fd(G) \leq \frac{12}{13}n \text{ آنگاه } \delta = 3 \text{ اگر } (1)$$

$$fd(G) \leq \frac{17}{19}n \text{ آنگاه } \delta = 4 \text{ اگر } (2)$$

برای k -منحط گراف ها، کران زیر برای عدد احاطه گری منصف وجود دارید.

قضیه ۶.۵.۲. [۲۷] اگر G یک k -منحط گراف همبند، غیر از دورهای فرد، باشد به طوری که

$n \geq k + 2$ باشد، آنگاه:

$$fd(G) \leq \frac{37k^2 + 27k - 22 + \delta(-12\delta + 12 + (2\delta^2 - 3\delta + 1)^{-1})}{37k^2 + 27k - 10 + \delta(-12\delta + 12 + (2\delta^2 - 3\delta + 1)^{-1})}n \text{ آنگاه } \delta > k \text{ اگر } (1)$$

$$fd(G) \leq \frac{2k^2 + 3k - 2}{2k^2 + 3k - 1}n \text{ آنگاه } \delta = k \text{ اگر } (2)$$

و در آخر قضیه ی زیر که در مورد k -درخت ها وجود دارد را بیان می کنیم.

قضیه ۷.۵.۲. [۲۷] اگر G یک k -درخت باشد، آنگاه داریم

$$fd(G) \leq \frac{48k^3 - 16k^2\sqrt{8k-7} + 132k^2 - 124k + 13\sqrt{8k-7} + 38}{48k^3 - 16k^2\sqrt{8k-7} + 132k^2 - 100k + 13\sqrt{8k-7} + 38}n$$

۶.۲ کران های نوردهاوس گادوم

در این بخش کران های نوردهاوس گادوم را که در [۱۳] بیان شده است را ارائه می کنیم.

قضیه ۱.۶.۲. [۱۳] اگر G گرانی از مرتبه n باشد، آنگاه

$$(1) \text{ اگر } n \geq 5, \text{ آنگاه } 3 \leq fd(G) + fd(\overline{G}) \leq 2n - 4 \text{ و این کران قابل دسترسی است.}$$

$$(2) \text{ اگر } n \geq 4, \text{ آنگاه } 2 \leq fd(G).fd(\overline{G}) \leq (n-2)^2 \text{ و این کران قابل دسترسی است.}$$

فصل ۳

عدد احاطه گری منصف در درخت ها

برای هر درخت T از مرتبه n ، $fd(T) \leq n/2$ است و این کران فقط برای تاج درخت ها قابل دسترسی است [۱۳]. در این فصل تمام درخت های T که $fd(T) = \lfloor n/2 \rfloor$ است را بیان می کنیم. برای این کار ابتدا در بخش ۱.۳ خانواده ای از درخت ها را معرفی می کنیم و سپس در بخش ۲.۳ نشان می دهیم که برای این خانواده از درخت ها عدد احاطه گری منصف برابر با $(n-1)/2$ است. در آخر در بخش ۳.۳ قضیه اصلی این فصل را بیان می کنیم.

۱.۳ خانواده ی درخت های T

در این بخش خانواده ای از درخت ها را به صورت بازگشتی می سازیم. برای این هدف ابتدا در نظر داشته باشید که در این فصل به راس v از درخت T که داری درجه دو باشد و همچنین $N[v] \cap S(T) = \emptyset$ ، راس ویژه ی درخت می گوئیم.

حال برای ادامه سه خانواده ی $\mathcal{F}_1$ ، $\mathcal{F}_2$ و $\mathcal{F}_3$ از درخت ها را به صورت زیر تعریف می کنیم.

- فرض کنید $\mathcal{F}_1$ خانواده تمام درخت های T باشند که از تاج $cor(T_0)$ ، درخت T_0 از مرتبه ی حداقل ۲ با اضافه کردن یک برگ و اتصال به برگی از $cor(T_0)$ بدست می آیند.
- فرض کنید $\mathcal{F}_2$ خانواده ی تمام درخت های T باشند که از تاج $cor(T_0)$ ، درخت T_0 از مرتبه حداقل دو با اضافه کردن یک مسیر P_3 و اتصال یک برگ از P_3 به برگی از $cor(T_0)$ بدست می آیند.

• فرض کنید $\mathcal{F}_1$ خانواده‌ی تمام درخت‌های T باشند که از تاج $cor(T_0)$ ، درخت T_0 با اضافه کردن یک برگ به راس پشتیبانی از $cor(T_0)$ بدست می‌آیند.

حال در ادامه برای رسیدن به هدف خود خانواده‌هایی از درخت‌ها را به صورت زیر با استفاده از خانواده‌های $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ و $\mathcal{F}_3$ می‌سازیم.

• فرض کنید $\mathcal{T}_1$ خانواده‌ی تمام درخت‌های T باشند که از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ ، از درخت‌ها به دست آید، به‌طوری‌که $T_1 \in \mathcal{F}_1$ و اگر $k \geq 2$ آنگاه برای $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ درخت T_{i+1} از درخت T_i با عملگر $\mathcal{O}_1$ ساخته شود.

• عملگر $\mathcal{O}_1$: فرض کنید v راسی از درخت T_i با $\deg(v) \geq 2$ باشد. آنگاه درخت T_{i+1} از درخت T_i با اضافه کردن مسیر P_2 و اتصال برگی از P_2 به راس v بدست می‌آید.

• فرض کنید $\mathcal{T}_2$ خانواده‌ی تمام درخت‌های T باشد که از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ ، از درخت‌ها به دست آید، به‌طوری‌که $T_1 \in \mathcal{F}_2$ و اگر $k \geq 2$ ، آنگاه برای $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ روی یک راس غیر ویژه درخت T_i ساخته شود.

• فرض کنید $\mathcal{T}_3$ خانواده‌ی تمام درخت‌های T باشد که از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ ، از درخت‌ها به دست آید، به‌طوری‌که $T_1 \in \mathcal{F}_3$ و اگر $k \geq 2$ ، آنگاه برای $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ یا عملگر $\mathcal{O}_2$ ساخته شود.

• عملگر $\mathcal{O}_2$: فرض کنید v برگی از درخت T_i باشد. آنگاه درخت T_{i+1} از درخت T_i با اضافه کردن دو برگ به راس v بدست می‌آید.

• فرض کنید $\mathcal{T} = \cup_{i=1}^3 \mathcal{T}_i$

این بخش را با مشاهده‌ی زیر که از تعریف خانواده‌های فوق به سادگی نتیجه می‌شود به پایان می‌بریم.

مشاهده ۱.۱.۳. (۱) هر درخت $T \in \mathcal{T}$ از مرتبه فرد است.

(۲) اگر $T \in \mathcal{T}_1$ درختی از مرتبه n باشد، آنگاه

$$|S(T)| = |L(T)| = (n-1)/2 \text{ و } |V(T) - (L(T) \cup S(T))| = 1$$

(۳) فرض کنید v یک راس ویژه از درخت $T_1 \in \mathcal{F}_2$ و $N_{T_1}(v) = \{v_1, v_2\}$. آنگاه

$$V(T_1) - (S(T_1) \cup L(T_1)) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

از طرفی دیگر اگر $T_k \in \mathcal{T}_2$ درختی از مرتبه n باشد که از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k$ با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ ساخته شده باشد، آنگاه v یک راس ویژه‌ی درخت یکتا برای T_k است و

$$|S(T)| = |L(T)| = (n-3)/2 \text{ همچنین } V(T_k) - (S(T_k) \cup L(T_k)) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

(۴) اگر $T \in \mathcal{T}_3$ درختی از مرتبه n باشد، آنگاه $|L(T)| = (n+1)/2$.

۲.۳ نتایجی در مورد درخت‌های خانواده $\mathcal{T}$

این بخش را با لم زیر در مورد خانواده‌ی $\mathcal{T}_1$ شروع می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. اگر $T \in \mathcal{T}_1$ درختی از مرتبه n باشد، آنگاه $fd_1(T) = (n-1)/2$.

برهان. فرض کنید $T \in \mathcal{T}_1$ درختی از مرتبه n باشد. از مشاهده‌ی ۱.۱.۳ (۲)، داریم $|S(T)| = (n-1)/2$ و طبق مشاهده ۱.۴.۲، $|S(T)| \leq fd_1(T)$. حال باتوجه به قضیه‌ی ۱.۴.۲ چون n فرد است $fd_1(T) \leq (n-1)/2$. بنابراین $fd_1(T) = (n-1)/2$.

□

در لم زیر بیان می‌کنیم که اگر T درختی از خانواده‌ی $\mathcal{T}_k$ باشد، آنگاه $fd_1(T) = (n-1)/2$.

لم ۲.۲.۳. اگر $T \in \mathcal{T}_k$ درختی از مرتبه‌ی n باشد آنگاه $fd_1(T) = (n-1)/2$.

برهان. فرض کنید $T \in \mathcal{T}_k$ درختی از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه T از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ ، از درخت‌ها به دست آمده به‌طوری که $T_1 \in \mathcal{F}_k$ و اگر $k \geq 2$ ، آنگاه برای $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ ، درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ روی یک راس غیر ویژه درخت T_i ساخته شده است. حال اثبات را با استفاده از استقرا روی k انجام می‌دهیم. برای گام اول استقرا فرض کنید $k = 1$. بنابراین $T_1 \in \mathcal{F}_1$. چون n فرد است طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲ $fd_1(T_1) \leq (n-1)/2$. حال برای اثبات $fd_1(T_1) = (n-1)/2$ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $fd_1(T_1) < (n-1)/2$. حال فرض کنید S یک $fd_1(T_1)$ -مجموعه باشد. بنابراین $|S| \leq (n-3)/2$. فرض کنید درخت T_1 از تاج، $cor(T')$ درخت T' با مرتبه‌ی حداقل دو، با اضافه کردن مسیر $P_3 = x_1 x_2 x_3$ و یال xx_1 ، که در آن x برگه‌ی از $cor(T')$ است بدست آمده باشد. فرض کنید $x_3 \in S$. به وضوح $S \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$. درنتیجه $S' = S - \{x_3\}$ یک $1FD$ -مجموعه برای $T'' = T - \{x_2, x_3\}$ و همچنین $|S'| \leq (n-5)/2$ است. بنابراین $|S'| \leq (n(T'')-3)/2$. حال چون $T'' \in \mathcal{F}_1$ درنتیجه این یک تناقض با لم ۱.۲.۳ است. بنابراین $x_3 \notin S$ درنتیجه $x_2 \in S$. حال اگر $x_1 \in S$ ، آنگاه $S' = S - \{x_2\}$ یک $1FD$ -مجموعه برای $T'' = T - \{x_2, x_3\}$ است. حال چون $T'' \in \mathcal{F}_1$ مانند قبل این یک تناقض با لم ۱.۲.۳ است.

بنابراین $x_1 \notin S$. درنتیجه $S' = S - \{x_2\}$ یک $1FD$ -مجموعه برای $cor(T')$ است و درنتیجه $|S'| \leq (n(cor(T'))-2)/2$ که این یک تناقض با قضیه‌ی ۱.۴.۲ است. این نتیجه می‌دهد که $fd_1(T_1) = (n-1)/2$. بنابراین گام اول استقرا ثابت می‌شود. حال فرض کنید که برای $2 \leq k' < k$ حکم برقرار باشد. حال فرض کنید $T = T_k$.

به‌وضوح درخت T از درخت T_{k-1} با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست می‌آید. فرض کنید $x_1 x_2$ یک مسیر باشد و x_1 به راس $y \in V(T_{k-1})$ متصل شده باشد که در آن $\deg_{T_{k-1}}(y) \geq 2$ و همچنین y یک راس غیر ویژه T_{k-1} باشد. اکنون چون n فرد است طبق قضیه ۱.۴.۲ $fd_1(T) \leq (n-1)/2$. حال نشان می‌دهیم که $fd_1(T_k) = (n-1)/2$. به برهان خلف فرض کنید

که $fd_1(T_k) < (n-1)/2$. در این صورت فرض کنید که S_k یک $fd_1(T_k)$ -مجموعه باشد. در این صورت $|S_k| \leq (n-3)/2$. فرض کنید z یک راس ویژه از درخت T_{k-1} باشد و $z_1, z_2 \in N_{T_{k-1}}(z)$. طبق مشاهده ۱.۱.۳ (۳)، داریم

$$V(T_{k-1}) - (S(T_{k-1}) \cup L(T_{k-1})) = \{z, z_1, z_2\}$$

فرض کنید $\{z_1, z_2\} \ni y$. اگر $x_2 \in S_k$ آنگاه $S \cap \{x_1, y\} = \emptyset$. در این صورت $S_{k-1} = S_k - \{x_2\}$ یک FD -مجموعه برای درخت T_{k-1} است و همچنین $|S_{k-1}| \leq (n(T_{k-1}) - 3)/2$ بوده که این یک تناقض با فرض استقرا است. بنابراین $x_2 \notin S_k$ در نتیجه $x_1 \in S_k$. چون y یک راس پشتیبان برای درخت T_{k-1} است به وضوح $y \in S_k$. بنابراین $S_{k-1} = S_k - \{x_1\}$ یک FD -مجموعه برای درخت T_{k-1} است و همچنین $|S_{k-1}| \leq (n(T_{k-1}) - 3)/2$ بوده که این یک تناقض با فرض استقرا است. در این صورت می توان نتیجه گرفت که $y \in \{z_1, z_2\}$. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید که $y = z_1$. اگر $x_2 \in S_k$ آنگاه $S \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$. در نتیجه $S_{k-1} = S_k - \{x_2\}$ یک FD -مجموعه برای درخت T_{k-1} است و همچنین $|S_{k-1}| \leq (n(T_{k-1}) - 3)/2$ بوده که این یک تناقض با فرض استقرا است. در نتیجه $x_2 \notin S_k$ لذا $x_1 \in S_k$. اگر $z_1 \in S_k$ ، آنگاه مانند قبل یک تناقض با فرض استقرا بدست می آید. در این صورت $z_1 \notin S_k$. توجه داشته باشید که $N_{T_{k-1}}(z_1) \cap S_k = \emptyset$. به وضوح $N_{T_{k-1}}(z_1) \cap S(T_{k-1}) \neq \emptyset$. فرض کنید $u \in N_{T_{k-1}}(z_1) \cap S(T_{k-1})$ و همچنین فرض کنید u_1 برگ متصل به راس u باشد. به وضوح $u_1 \in S_k$. توجه داشته باشید که هر مولفه $T_{k-1} - \{z_1\}$ یک تاج از یک درخت است. فرض کنید T^* مولفه ای از $T_{k-1} - \{z_1\}$ باشد که شامل راس u باشد. بنابراین توجه داشته باشید که T^* تاجی از یک درخت است. در این صورت چون $u \notin S_k$ می توانیم نتیجه بگیریم که $S_k \cap V(T^*)$ فقط شامل تمام برگ های درخت T^* است. اگر $P_T \neq T^*$ ، آنگاه

$$S_{k-1} = (S_k - L(T^*)) \cup S(T^*) - \{x_1\}$$

یک FD -مجموعه برای درخت T_{k-1} بوده و همچنین $|S_{k-1}| \leq (n(T_{k-1}) - 3)/2$ ، که این یک تناقض با فرض استقرا است. بنابراین $T^* = P_T$. در این صورت

$$S_{k-1} = (S_k - \{u_1\}) \cup \{u\} - \{x_1\}$$

یک FD -مجموعه برای درخت T_{k-1} بوده و همچنین $|S_{k-1}| \leq (n(T_{k-1}) - 3)/2$ ، که این $\square$ یک تناقض با فرض استقرا است. در نتیجه $fd_1(T_k) = (n-1)/2$.

در ادامه به بیان لم زیر نیاز مندیم.

لم ۳.۲.۳. اگر $T \in \mathcal{T}_3$ ، آنگاه هر FD -مجموعه در درخت T شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در درخت T است.

برهان. فرض کنید $T \in \mathcal{T}_k$ ، آنگاه درخت T از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ ، از درخت‌ها بدست آمده، به صورتی که $T_1 \in \mathcal{F}_k$ و اگر $k \geq 2$ آنگاه برای $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ بدست می‌آید. اثبات را با استقرا روی k انجام می‌دهیم. برای گام اول استقرا فرض کنید $k = 1$.

به‌وضوح $S(T_1)$ زیر مجموعه‌ی هر $1FD$ - مجموعه از درخت T است. حال فرض کنید حکم مسئله برای $2 \leq k' < k$ برقرار باشد. حال فرض کنید $T = T_k$. به‌وضوح درخت T از درخت T_{k-1} با اعمال یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ بدست آمده است. فرض کنید S یک $1FD$ - مجموعه برای درخت T باشد. ابتدا فرض کنید درخت T از درخت T_{k-1} با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست آمده باشد. فرض کنید $x_1 x_2$ یک مسیر بوده و x_1 به راس $y \in V(T_{k-1})$ ، که $\deg_{T_{k-1}}(y) \geq 2$ ، متصل شده باشد. توجه داشته باشید که $\{x_1, x_2\} \cap S \neq \emptyset$. اگر $x_1 \notin S$ ، آنگاه $x_2 \in S$ و $y \notin S$. در نتیجه $S - \{x_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای درخت T_{k-1} است که شامل راس y نمی‌باشد، که این یک تناقض با فرض استقرا است. بنابراین فرض کنید $x_1 \in S$. فرض کنید $y \notin S$. در اینصورت $N_{T_k}(y) \cap S = \emptyset$. به‌وضوح y یک راس پشتیبان نیست. فرض کنید $y_1 \in N_{T_{k-1}}(y)$ و T' مولفه‌ای از $T_{k-1} - y$ باشد که شامل راس y_1 است. در این صورت $(S - \{x_1, x_2\}) \cup V(T')$ یک $1FD$ - مجموعه برای T_{k-1} است که شامل راس y نمی‌باشد که این یک تناقض با فرض استقرا است. بنابراین $y \in S$. به‌وضوح $S - \{x_1, x_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای درخت T_{k-1} است. با توجه به فرض استقرا $S - \{x_1, x_2\}$ شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو از درخت T_{k-1} می‌باشد. در نتیجه S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو از درخت T_k است.

حال فرض کنید درخت T_k از درخت T_{k-1} با اعمال عملگر $\mathcal{O}_2$ بدست آمده باشد. فرض کنید x برگ‌ای از درخت T_{k-1} باشد و درخت T_k از درخت T_{k-1} با اضافه کردن دو برگ x_1 و x_2 به راس x بدست آمده باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، $x \in S$. در اینصورت S یک $1FD$ - مجموعه برای درخت T_{k-1} است. با توجه به فرض استقرا S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو از درخت T_{k-1} است. در نتیجه S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو از درخت T_k است.

□

حال با توجه به لم فوق نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱.۲.۳. اگر $T \in \mathcal{T}_k$ درختی از مرتبه‌ی n باشد آنگاه

$$(1) \quad V(T) - L(T) \text{ یکتا } fd_1(T) \text{ - مجموعه است.}$$

$$(2) \quad fd_1(T) = (n-1)/2.$$

در پایان این بخش باتوجه به لم‌های ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ و همچنین نتیجه فوق لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۴.۲.۳. اگر $T \in \mathcal{T}$ درختی از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $fd_1(T) = (n-1)/2$.

۳.۳ قضیه اصلی برای درخت ها

در این بخش قضیه اصلی این فصل را بیان می کنیم. برای این کار ابتدا به دو لم زیر نیاز داریم.

مشاهده ۱.۳.۳. اگر T درختی از مرتبه n با $fd_1(T) = (n-1)/2$ باشد آنگاه هر راس پشتیبان قوی T حداکثر به دو برگ متصل است.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه n و $fd_1(T) = (n-1)/2$ باشد. فرض کنید S یک $-fd_1(T)$ مجموعه باشد. فرض کنید $v \in S(T)$. به برهان خلف فرض کنید راس v به حداقل سه برگ v_1, v_2, v_3 و v_3 متصل باشد. طبق مشاهده ۱.۴.۲، $v \in S$ در نتیجه می توانیم فرض کنیم که $S \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \emptyset$. فرض کنید $T' = T - \{v_1\}$. در نتیجه S یک $FD-1$ مجموعه برای درخت T' از مرتبه $n(T')/2 = (n-1)/2$ است. طبق مشاهده ۱.۴.۲ هر $-fd_1(T')$ مجموعه شامل راس v است در نتیجه S یک $-fd_1(T')$ مجموعه است، این یک تناقض با قضیه ۱.۴.۲ است، چون T' تاج هیچ درختی نیست.

□

لم ۱.۳.۳. اگر $T \in \mathcal{T}_i$ ، برای $i = 1, 2$ ، آنگاه وجود دارد یک $-fd_1(T)$ مجموعه که شامل هر برگ از درخت T باشد.

برهان. فرض کنید $T \in \mathcal{T}_1$ یک درخت از مرتبه n باشد. طبق مشاهده ۱.۱.۳ (۲)، $|V(T) - (L(T) \cup S(T))| = 1$. فرض کنید $u \in V(T) - (L(T) \cup S(T))$. به وضوح هر مولفه از $T - \{u\}$ تاج یک درخت است. فرض کنید $H_1, \dots, H_k$ ، برای $k \geq 2$ ، یک مولفه از $T - \{u\}$ باشد. حال فرض کنید v یک راس از درخت T باشد. آنگاه v برگ از درخت H_j است که در آن $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. فرض کنید $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. اگر $H_i \neq P_T$ ، آنگاه $S(H_i) \cup (L(T) - L(H_i))$ یک $FD-1$ مجموعه برای درخت T از مرتبه $(n-1)/2$ است. طبق لم ۱.۲.۳، مجموعه $S(H_i) \cup (L(T) - L(H_i))$ یک $-fd_1(T)$ مجموعه بوده که شامل راس v است. در این صورت فرض کنید $H_i = P_T = xy$ ، که در آن $y \in N_T(u)$. بنابراین $\{y\} \cup (L(T) - \{x\})$ یک $FD-1$ مجموعه برای درخت T از مرتبه $(n-1)/2$ است. طبق لم ۱.۲.۳، مجموعه $S(H_i) \cup (L(T) - L(H_i))$ یک $-fd_1(T)$ مجموعه بوده که شامل راس v است.

حال فرض کنید $T \in \mathcal{T}_2$ یک درخت از مرتبه n باشد. فرض کنید u یک راس ویژه درخت از درخت T باشد. آنگاه $L(T) \cup \{u\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای درخت T از مرتبه $(n-1)/2$ بوده که شامل تمام برگ های درخت T است. طبق مشاهده ۱.۱.۳ (۳)، داریم $|L(T) \cup \{u\}| = (n-1)/2$. در این صورت طبق لم ۲.۲.۳ داریم $L(T) \cup \{u\}$ ، یک $-fd_1(T)$ مجموعه است.

□

حال می توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. اگر T درختی از مرتبه‌ی n باشد آنگاه $fd_1(T) = (n-1)/2$ اگر و تنها اگر $T \in \mathcal{T}$.

برهان. ابتدا فرض کنید T درختی از مرتبه‌ی $n \geq 2$ با $fd_1(T) = (n-1)/2$ باشد، نشان می‌دهیم که $T \in \mathcal{T}$. به‌وضوح n فرد است. اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم. برای گام اول استقرا اگر $n = 3$ ، آنگاه $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{P}_3 = T$. در این صورت فرض کنید که برای درخت‌های T' از مرتبه‌ی $n' < n$ با $fd_1(T') = (n'-1)/2$ حکم برقرار باشد. حال درخت T با مرتبه‌ی $n \geq 5$ را در نظر می‌گیریم. درخت T را برحسب برگ v_0 از مسیر $v_0 v_1 \dots v_d$ ، که $d = \text{diam}(T)$ ، ریشه دار می‌کنیم به‌طوری‌که $\deg(v_{d-1})$ بیشترین مقدار را داشته باشد. اگر $d = 2$ ، آنگاه T یک ستاره است. چون $fd_1(T) = 1 \neq (n-1)/2$ ، این یک تناقض است. در این صورت $d \geq 3$. فرض کنید $d = 3$ در نتیجه T یک ستاره دوگانه است. به‌وضوح $fd_1(T) = 2$. چون $fd_1(T) = (n-1)/2$ داریم که $\{2, 3\} = \{\deg(v_1), \deg(v_2)\}$. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $\deg(v_2) = 3$ ، آنگاه درخت T از $cor(P_2)$ با اضافه کردن یک برگ به یک راس پشتیبان از $cor(P_2)$ ساخته شده است، در نتیجه $T \in \mathcal{F}_3$. در این صورت در ادامه فرض می‌کنیم که $d \geq 4$. در ادامه با توجه به $\deg_T(v_{d-1})$ چند حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: $d \geq 4$. فرض کنید $\deg_T(v_{d-2}) = 2$. فرض کنید $T' = T - T_{v_{d-2}}$. طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲، $fd_1(T') \leq n(T')/2$. فرض کنید $fd_1(T') < n(T')/2$. فرض کنید S' یک $fd_1(T') -$ مجموعه باشد. اگر $v_{d-3} \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک $FD -$ مجموعه برای درخت T است و اگر $v_{d-3} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $FD -$ مجموعه برای درخت T است. بنابراین $fd_1(T) \leq fd_1(T') + 1$ و همچنین $fd_1(T) < n(T')/2 + 1 = (n-1)/2$ ، که این یک تناقض است. در نتیجه $fd_1(T') = n(T')/2$. طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲، T' تاجی از یک درخت است. فرض کنید که $T' = cor(T')$. اگر $\deg_T(v_{d-3}) = 2$ ، آنگاه v_{d-3} برگ‌گی از درخت T' است، در نتیجه درخت T از درخت $T' = cor(T')$ با اضافه کردن مسیر $P_3 = x_1 x_2 x_3$ و یال $x_1 x_2$ ساخته شده است، که در آن x یک برگ از درخت T' است. در نتیجه $T \in \mathcal{F}_3$. بنابراین فرض کنید $\deg_T(v_{d-3}) \geq 3$. در این صورت v_{d-3} برگ‌گی از درخت T' نیست. چون $T' = cor(T')$ تاجی از یک درخت است می‌توانیم نتیجه بگیریم که درخت $T - v_d$ نیز تاجی از یک درخت است. فرض کنید $T - v_d = cor(T'')$. در نتیجه درخت T از درخت $cor(T'')$ با اضافه کردن یک برگ به برگ‌گی از درخت $cor(T'')$ بدست آمده است، در نتیجه $T \in \mathcal{F}_3$.

در ادامه فرض کنید که $\deg_T(v_{d-2}) \geq 3$. فرض کنید $T' = T - T_{v_{d-1}}$. طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲، داریم $fd_1(T') \leq n(T')/2$ در نتیجه چون n فرد است داریم $fd_1(T') \leq (n(T')-1)/2$. به برهان خلف فرض کنید که $fd_1(T') < (n(T')-1)/2$. فرض کنید S' یک $fd_1(T') -$ مجموعه باشد.

اگر $v_{d-2} \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $FD -$ مجموعه برای درخت T است و اگر $v_{d-2} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک $FD -$ مجموعه برای درخت T است. در نتیجه $fd_1(T) \leq fd_1(T') + 1$ و همچنین $fd_1(T) < (n(T')-1)/2 + 1 = (n-1)/2$ ، که این یک تناقض است.

نشان دادیم که $fd_1(T') = (n(T') - 1)/2$. حال طبق فرض استقرا $T' \in \mathcal{T}$. به وضوح v_{d-2} یک راس ویژه درخت برای درخت T' نیست. در نتیجه درخت T از درخت T' با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ ساخته شده است. در نتیجه $T \in \mathcal{T}$.

حالت ۲: $deg_T(v_{d-1}) \geq 3$. طبق مشاهده ۱.۳.۳، $deg(v_{d-1}) = 3$. حال فرض کنید $x \neq v_d$ دیگر فرزند v_{d-1} باشد. فرض کنید $T' = T - \{x, v_d\}$. طبق قضیه ۱.۴.۲، $fd_1(T') \leq n(T')/2$ و چون n فرد است داریم $fd_1(T') \leq (n(T') - 1)/2$. به برهان خلف فرض کنید که $fd_1(T') < (n(T') - 1)/2$. فرض کنید S' یک FD -مجموعه برای درخت T است، اگر $v_{d-1} \notin S'$ آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD -مجموعه برای درخت T است. در نتیجه $fd_1(T) \leq fd_1(T') + 1$ و همچنین $fd_1(T) < (n(T') - 1)/2 + 1$. که این یک تناقض است. در نتیجه $fd_1(T') = (n(T') - 1)/2$. طبق فرض استقرا $T' \in \mathcal{T}$. چون $fd_1(T) = fd_1(T') + 1$ طبق لم ۱.۳.۳، داریم $T' \notin \bigcup_{i=1}^2 \mathcal{T}_i$. در نتیجه $T' \in \mathcal{T}_3$. بنابراین T از درخت T' با اعمال عملگر $\mathcal{O}_3$ ساخته شده است و این نتیجه می دهد که $T \in \mathcal{T}$. طبق لم ۴.۲.۳ برگشت قضیه نیز برقرار است.

□

حال باتوجه به قضیه ۱.۳.۳ و همچنین قضیه ۱.۴.۲ می توانیم نتیجه اصلی این فصل را بیان کنیم.

نتیجه ۱.۳.۳. اگر T درختی از مرتبه n باشد آنگاه $fd(T) = \lfloor n/2 \rfloor$ اگر و تنها اگر T یک تاج از درختی باشد یا $T \in \mathcal{T}$.

فصل ۴

عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک دوری

در این فصل به بررسی عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک‌دوری می‌پردازیم. در بخش ۱.۴ چند نتیجه از عدد احاطه‌گری منصف در درخت‌ها بیان می‌کنیم. در بخش ۲.۴ کرانی برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک دوری ارائه می‌کنیم. در بخش ۳.۴ خانواده‌ی $\mathcal{G}_1$ از گراف‌های تک‌دوری را معرفی می‌کنیم. در بخش ۴.۴ نشان می‌دهیم که خانواده‌ی $\mathcal{G}_1$ در کران گراف‌های تک‌دوری دقیق است. در انتها در بخش ۵.۴ قضیه اصلی این فصل را بیان می‌کنیم.

۱.۴ نتایج از عدد احاطه‌گری منصف در درخت‌ها

در ابتدای این بخش مشاهده‌ای از کارو و دیگر نویسندگان که در [۱۳] آمده است را بیان می‌کنیم. این مشاهده در مورد عدد احاطه‌گری منصف در درخت‌ها است.

مشاهده ۱.۱.۴. [۱۳] اگر درخت T تاجی از یک درخت بوده و از مرتبه n باشد آنگاه $V(T)$ را می‌توان به دو $fd(T) -$ مجموعه افراز کرد.

در ادامه نیاز به لم زیر درمورد درخت‌ها داریم.

لم ۱.۱.۴. برای هر راس v از درخت T از مرتبه n نتایج زیر برقرار است.
(۱) اگر n زوج باشد، آنگاه راس v عضو یک $1FD$ - مجموعه از درخت T از مرتبه حداکثر $n/2$ است.

(۲) اگر n فرد باشد، آنگاه یا v عضو یک $1FD$ - مجموعه از درخت T از مرتبه حداکثر $(n-1)/2$ است یا اینکه وجود دارد یک $1FD$ - مجموعه برای $T-v$ از مرتبه حداکثر $(n-1)/2$ به طوری که راس v را احاطه نمی‌کند.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه n باشد. اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم. برای گام اول استقرا، اگر $n \leq 3$ باشد به وضوح حکم برقرار است. فرض کنید حکم برای تمام درخت‌های T' از مرتبه‌ی $n' < n$ برقرار باشد. حال فرض کنید درخت T از مرتبه‌ی n باشد. فرض کنید v راسی از درخت T باشد. فرض کنید $H_1, H_2, \dots, H_k$ ، $k \geq 0$ ، مولفه‌های از مرتبه زوج و $H'_1, H'_2, \dots, H'_{k'}$ ، $k' \geq 0$ ، مولفه‌های از مرتبه‌ی فرد $T-v$ باشند که در آن $k + k' \geq 1$. فرض کنید $|H_i| = n_i$ و $|H'_j| = n'_j$. در این صورت

$$\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^{k'} n'_j = n - 1.$$

برای $i = 1, 2, \dots, k$ ، فرض کنید $v_i \in N_T(v) \cap H_i$ و برای $j = 1, 2, \dots, k'$ فرض کنید $v'_j \in N_T(v) \cap H'_j$.

ابتدا فرض کنید n زوج باشد. برای $1 \leq i \leq k$ ، طبق فرض استقرا، v_i عضو یک $1FD$ - مجموعه در H_i از مرتبه‌ی حداکثر $n_i/2$ است. از طرفی برای $1 \leq i \leq k'$ ، طبق فرض استقرا، قسمت (۲) برای راس v'_i در H'_i صدق می‌کند. فرض کنید S'_i یک $1FD$ - مجموعه برای H'_i باشد که در قسمت (۲) صدق کند. بنابراین

$$S = \bigcup_{i=1}^k S_i \bigcup_{j=1}^{k'} S'_j \cup \{v\}$$

یک $1FD$ - مجموعه برای درخت T است. در این صورت

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{i=1}^k n_i/2 + \sum_{j=1}^{k'} (n'_j - 1)/2 + 1 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^{k'} n'_j - k'}{2} + 1 \\ &= (n - 1 - k')/2 + 1. \end{aligned}$$

توجه کنید که چون n زوج است آنگاه $k' \geq 1$.

در ادامه فرض کنید n فرد باشد. فرض کنید $k' \geq 1$. در نتیجه $k' \geq 2$. برای $1 \leq i \leq k$ طبق فرض استقرا، v_i عضو یک $1FD$ - مجموعه‌ی S_i برای H_i از مرتبه‌ی حداکثر $n_i/2$ است.

از طرفی برای $1 \leq i \leq k'$ ، طبق فرض استقرا، قسمت (۲) حکم برای راس v'_i در H'_i برقرار است. فرض کنید S'_i یک FD -مجموعه برای H'_i باشد، به طوری که در قسمت (۲) حکم صدق کند. بنابراین مانند قبل

$$S = \bigcup_{i=1}^k S_i \bigcup_{j=1}^{k'} S'_j \cup \{v\}$$

یک FD -مجموعه در درخت T است و قسمت (۱) حکم برقرار است. چون $k' \geq 2$ ، از قسمت (۱) حکم داریم $k' \geq 2$. در ادامه فرض کنید $k' = 0$. فرض کنید برای $1 \leq i \leq k$ ، درخت H_i تاجی از یک درخت باشد. توجه داشته باشید که طبق مشاهدۀ ۱.۱.۴ برای $1 \leq i \leq k$ وجود دارد یک $fd_1(H_i)$ -مجموعه F_i به صورتی که $v_i \notin F_i$. در این صورت $S = \bigcup_{i=1}^k F_i$ یک FD -مجموعه برای $T - v$ است به طوری که راس v را احاطه نمی‌کند و $|S| = (n-1)/2$. در نتیجه می‌توان فرض کرد که حداقل یک مولفه از $T - v$ تاجی از یک درخت نباشد. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید برای $1 \leq l \leq k$ درخت‌های $H_1, H_2, \dots, H_l$ تاجی از هیچ درخت نباشند و $H_{l+1}, H_{l+2}, \dots, H_k$ تاج درخت باشند. فرض کنید وجود داشته باشد یک مولفه H_j ، برای $1 \leq j \leq l$ ، به طوری که v_j عضو یک $fd_1(H_j)$ -مجموعه باشد. فرض کنید D همان $fd_1(H_j)$ -مجموعه‌ی شامل راس v_j باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲ چون درخت H_j تاجی از هیچ درخت نیست، داریم $|D| < n_j/2$. در نتیجه $|D| \leq n_j/2 - 1$. طبق فرض استقرا برای $1 \leq i \leq k$ داریم، $i \neq j$ در نتیجه درخت H_i در قسمت (۱) حکم صدق می‌کند. برای $1 \leq i \leq k$ ، $i \neq j$ فرض کنید S_i یک FD -مجموعه در H_i باشد، به طوری که در قسمت (۱) حکم صدق کند. در این صورت

$$S = \bigcup_{i=1, i \neq j}^k S_i \cup D \cup \{v\}$$

یک FD -مجموعه برای درخت T است. توجه داشته باشید که

$$|S| \leq \sum_{i=1, i \neq j}^k (n_i)/2 + |D| + 1 \leq \sum_{i=1, i \neq j}^k (n_i)/2 + n_j/2 - 1 + 1 = (n-1)/2$$

حال فرض کنید وجود نداشته باشد هیچ مولفه H_j ، برای $1 \leq j \leq l$ ، به طوری که v_j عضو یک $fd_1(H_j)$ -مجموعه باشد. فرض کنید D_j برای $1 \leq j \leq l$ یک $fd_1(H_j)$ -مجموعه باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲ داریم $|D_j| < n_j/2$ ، برای $1 \leq j \leq l$. به وضوح $v_j \notin D_j$ برای $1 \leq j \leq l$. توجه داشته باشید برای $l+1 \leq j \leq k$ ، طبق مشاهدۀ ۱.۱.۴، وجود دارد یک $fd_1(H_j)$ -مجموعه F_j به طوری که $v_j \notin F_j$. در این صورت $S = \bigcup_{i=1}^l D_i \bigcup_{j=l+1}^k F_j$ یک FD -مجموعه برای $T - v$ است به طوری که راس v را احاطه نمی‌کند و $|S| \leq (n-1)/2$.

□

این بخش را با نتیجه‌ی زیر که از بخش (۲) لم فوق به راحتی بدست می‌آید به پایان می‌رسانیم.

نتیجه ۱.۱.۴. اگر درخت T از مرتبه فرد n باشد آنگاه هر راس پشتیبان از درخت T عضو یک FD - مجموعه در درخت T از مرتبه‌ی حداکثر $(n-1)/2$ است.

۲.۴ کران برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک دوری

در این بخش یک کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک دوری بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. اگر گراف G یک گراف تک دوری از مرتبه‌ی n باشد آنگاه

$$fd_1(G) \leq (n+1)/2.$$

برهان. فرض کنید گراف G یک گراف تک دوری از مرتبه n باشد. با استقرا روی n نشان می‌دهیم که $fd_1(G) \leq (n+1)/2$. برای گام اول استقرا، فرض کنید $n=3$ در نتیجه $fd_1(C_3) = 1 \leq (n+1)/2$. فرض کنید حکم برای تمام گراف‌های تک دوری از مرتبه‌ی $n' < n$ برقرار باشد. در ادامه گراف تک دوری G از مرتبه‌ی $n \geq 4$ را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $C = u_1, u_2, \dots, u_k, u_1$ دور گراف G باشد. اگر $G = C$ آنگاه طبق مشاهده ۳.۲.۲ داریم $fd_1(G) \leq (n(G)+1)/2$. در نتیجه فرض کنید $G \neq C$. فرض کنید v_d برگ‌ی از گراف G باشد به طوری که $d(v_d, C)$ از بیشترین مقدار باشد. فرض کنید $v_0 v_1 \dots v_d$ کوتاه‌ترین مسیر بین v_d و $v_0 \in C$ باشد.

فرض کنید $d \geq 2$. فرض کنید $deg_G(v_{d-1}) = 2$. فرض کنید $G' = G - \{v_d, v_{d-1}\}$. طبق فرض استقرا $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2 = (n-1)/2$. فرض کنید S' یک FD - مجموعه باشد. اگر $v_{d-2} \in S'$ آنگاه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD - مجموعه برای گراف G است، اگر $v_{d-2} \notin S'$ آنگاه $S = S' \cup \{v_d\}$ یک FD - مجموعه برای گراف G است. در نتیجه $fd_1(G) \leq (n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$.

حال فرض کنید $deg_G(v_{d-1}) \geq 3$. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام برگ‌های راس v_{d-1} بدست آید. طبق فرض استقرا $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2 \leq (n-1)/2$. فرض کنید S' یک FD - مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ آنگاه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD - مجموعه برای گراف G است، اگر $v_{d-1} \notin S'$ در نتیجه $v_{d-2} \in S'$ آنگاه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD - مجموعه برای گراف G است. در نتیجه $fd_1(G) \leq (n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$.

در ادامه فرض کنید $d=1$. اگر $deg(u_i) \geq 3$ برای $1 \leq i \leq k$ آنگاه تمام رئوس دور C یک راس پشتیبان هستند. در این صورت $V(C)$ یک FD - مجموعه برای گراف G از مرتبه‌ی حداکثر $n/2$ است. در این صورت فرض کنید $deg(u_i) = 2$ برای بعضی از $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. فرض کنید u_j و u_{j+1} دو راس متوالی از دور C باشند به طوری که $deg_G(u_j) = 2$ و $deg_G(u_{j+1}) \geq 3$.

فرض کنید n فرد باشد. در این صورت $G - u_{j+1}u_j$ یک درخت است. طبق نتیجه‌ی ۱.۱.۴ راس u_{j+1} عضو یک $1FD$ - مجموعه‌ی S در درخت $G - u_{j+1}u_j$ از مرتبه‌ی $(n-1)/2$ است. چون u_j برگی از درخت $G - u_{j+1}u_j$ است، آنگاه $S \cap \{u_j, u_{j-1}\} \neq \emptyset$. اگر $u_j \in S$ آنگاه S یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G از مرتبه‌ی حداکثر $(n-1)/2$ است. در نتیجه فرض کنید $u_j \notin S$. در این صورت $u_{j-1} \in S$ و یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G از مرتبه‌ی حداکثر $(n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$ است.

در ادامه فرض کنید n زوج باشد. حال درخت $G - u_j$ را در نظر بگیرید. طبق نتیجه‌ی ۱.۱.۴ راس u_{j+1} عضو یک $1FD$ - مجموعه‌ی S از درخت $G - u_j$ از مرتبه‌ی حداکثر $(n-2)/2$ است. اگر $u_{j-1} \notin S$ آنگاه S یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G از مرتبه‌ی حداکثر $(n-2)/2$ است. در نتیجه فرض کنید $u_{j-1} \in S$. در این صورت $S \cup \{u_j\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G از مرتبه‌ی حداکثر $n/2 + 1 = (n-2)/2 + 1$ است. $\square$

۳.۴ خانواده‌ی $\mathcal{G}_1$ گراف‌های تک‌دوری

در این فصل برای یک گراف تک‌دوری G با دور C ، هر راس از درجه دو روی دور C را یک راس ویژه‌ی دور از گراف G گوئیم.

در این بخش خانواده‌ی $\mathcal{G}_1$ از گراف‌های تک‌دوری را تعریف می‌کنیم. برای این کار ابتدا خانواده‌ی $\mathcal{C}_1$ که تعریف آن در زیر آمده است را در نظر بگیرید.

- فرض کنید $\mathcal{C}_1$ خانواده‌ی تمام گراف‌های G باشد که از تاج، $cor(C_k)$ ، یک دور C_k ($k \geq 3$) با حذف دقیقاً یک برگ از $cor(C_k)$ بدست آمده باشد.
- فرض کنید $\mathcal{G}_1$ خانواده‌ی تمام گراف‌های تک‌دوری G باشد که از دنباله‌ی $G_1, G_2, \dots, G_k$ از گراف‌های تک‌دوری ساخته می‌شود، به طوری که $G_1 \in \mathcal{C}_1$ ، و اگر $k \geq 2$ آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, k-1$ گراف G_{i+1} از گراف G_i با یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ بدست آید.
- **عملگر $\mathcal{O}_1$:** فرض کنید v راسی از گراف تک‌دوری G_i با درجه‌ی $\deg(v) \geq 2$ باشد، به طوری که v راس ویژه‌ی دور از گراف G_i نباشد. در این صورت گراف G_{i+1} از گراف G_i با اضافه کردن مسیر P_v و اتصال یک برگ از P_v به راس v ساخته شود.
- **عملگر $\mathcal{O}_2$:** فرض کنید v برگی از گراف تک‌دوری G_i باشد. در این صورت گراف G_{i+1} از گراف G_i با اضافه کردن دو برگ به راس v ساخته شود.

مشاهده‌ی زیر به سادگی از تعریف خانواده‌ی $\mathcal{G}_1$ بدست می‌آید.

مشاهده ۱.۳.۴. (۱) هر گراف $G \in \mathcal{G}_1$ دارای دقیقاً یک راس ویژه‌ی دور است.

(۲) اگر $G \in \mathcal{G}_1$ یک گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $|L(G)| = (n-1)/2$

۴.۴ نتایجی در مورد خانواده‌ی $\mathcal{G}_1$

لم ۱.۴.۴. اگر $G \in \mathcal{G}_1$ ، آنگاه هر $1FD$ - مجموعه در گراف G شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در گراف G است.

برهان. فرض کنید $G \in \mathcal{G}_1$. در نتیجه G از دنباله‌ی $G_1, G_2, \dots, G_k = G$ ، از گراف‌های تک‌دوری بدست آمده است، به طوری که $G_1 \in \mathcal{C}$ ، و اگر $k \geq 2$ ، آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, k-1$ گراف G_{i+1} از گراف G_i با یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ ساخته می‌شود. فرض کنید C تک دور گراف G باشد. اثبات را با استقرا روی k انجام می‌دهیم. برای گام اول از استقرا، فرض کنید $k = 1$. به وضوح $V(G_1) - L(G_1)$ زیر مجموعه‌ی تمام $1FD$ - مجموعه‌ها برای گراف G است. فرض کنید حکم مسئله برای $2 \leq k' < k$ برقرار باشد. در این صورت فرض کنید $G = G_k$. به وضوح گراف G از گراف G_{k-1} با استفاده از یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ بدست آمده است. فرض کنید S یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G باشد.

ابتدا فرض کنید گراف G از گراف G_{k-1} با بکار بردن عملگر $\mathcal{O}_1$ ساخته شده باشد. فرض کنید $x_1 x_2$ یک مسیر بوده و x_1 به راس $y \in V(G_{k-1})$ متصل شده باشد، که در آن $\deg_{G_{k-1}}(y) \geq 2$ و y یک راس ویژه‌ی دور از گراف G_{k-1} نباشد. به راحتی می‌توان دید که $\{x_1, x_2\} \cap S \neq \emptyset$. اگر $x_1 \notin S$ آنگاه $x_2 \in S$ و $y \notin S$. در این صورت $S - \{x_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G_{k-1} بوده که شامل راس y نیست و این یک تناقض با فرض استقرا است. در این صورت می‌توان فرض کرد که $x_1 \in S$. فرض کنید $y \notin S$. در نتیجه $N_{G_{k-1}}(y) \cap S = \emptyset$. به وضوح y یک راس پشتیبان نیست. به وضوح $G_{k-1} - y$ دارای مولفه‌ی G' است، به طوری که $V(G') \cap V(C) = \emptyset$. فرض کنید $y_1 \in N_{G_{k-1}}(y) \cap V(G')$. در نتیجه $(S - \{x_1, x_2\}) \cup V(G')$ یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G_{k-1} بوده که شامل راس y نیست، که این یک تناقض با فرض استقرا است. در این صورت $y \in S$. به وضوح $S - \{x_1, x_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G_{k-1} است. طبق فرض استقرا، $S - \{x_1, x_2\}$ شامل تمام رئوس از گراف G_{k-1} دارای درجه حداقل دو است. در این صورت S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در گراف G_k است. در ادامه فرض کنید گراف G_k از گراف G_{k-1} با بکار بردن عملگر $\mathcal{O}_2$ بدست آمده باشد. فرض کنید x برگی از گراف G_{k-1} بوده و گراف G_k با اضافه کردن دو راس x_1 و x_2 و اتصال آنها با راس x بدست آمده باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $x \in S$. در این صورت S یک $1FD$ - مجموعه برای گراف G_{k-1} است. طبق فرض استقرا S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در گراف G_{k-1} است. در این صورت S ، شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در گراف G_k است. $\square$

با توجه به مشاهده‌ی ۱.۳.۴ (۲) و لم ۱.۳.۵ نتیجه‌ی زیر را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۱.۴.۴. اگر $G \in \mathcal{G}_1$ یک گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $V(G) - L(G)$ یکتا $fd_1(G)$ - مجموعه است.

۵.۴ قضیه‌ی اصلی در مورد عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های تک دوری

این بخش را با مشاهده‌ی زیر شروع می‌کنیم.

مشاهده ۱.۵.۴. فرض کنید G یک گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی n با $fd_1(G) = (n+1)/2$ باشد. آنگاه هر راس پشتیبان در G دارای حداکثر دو برگ است.

برهان. فرض کنید G یک گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی n با $fd_1(G) = (n+1)/2$ باشد. به‌وضوح n فرد است. فرض کنید G دارای یک راس پشتیبان v ، به گونه‌ای باشد که v ، حداقل به سه برگ v_1, v_2 و v_3 متصل باشد. فرض کنید $G' = G - v_1$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴ داریم، $fd_1(G') \leq (n-1)/2$ ، در نتیجه چون n فرد است، $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2 = n/2$. فرض کنید S یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $v \in S$ ، در نتیجه S یک FD -مجموعه در G است، که این یک تناقض است. $\square$

قضیه ۱.۵.۴. اگر گراف G یک گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $fd_1(G) = (n+1)/2$ اگر و تنها اگر $G = C_5$ یا $G \in \mathcal{G}_1$.

برهان. فرض کنید G یک گراف تک‌دوری از مرتبه‌ی n با $fd_1(G) = (n+1)/2$ باشد. به‌وضوح n فرد است. فرض کنید $G \neq C_5$. حال با استقرا روی n نشان می‌دهیم که $G \in \mathcal{G}_1$. برای گام اول استقرا، توجه داشته باشید که $n \neq 3$ ، چون $fd_1(C_3) = 1 \neq (3+1)/2$. فرض کنید $n = 5$. اگر دور گراف G از مرتبه‌ی ۴ باشد، آنگاه $2 < fd_1(G) = 3$. در نتیجه فرض کنید دور گراف G ، از مرتبه‌ی ۳ باشد. در این صورت می‌توانیم ببینیم که G از حذف یک برگ گراف $cor(C_3)$ بدست آمده است. در این صورت $G \in \mathcal{G}_1$. حال فرض کنید حکم برای تمام گراف‌های تک‌دوری G' از مرتبه‌ی $n' < n$ با $fd_1(G') = (n'+1)/2$ برقرار باشد. فرض کنید $C = u_1, u_2, \dots, u_k, u_1$ دور گراف G باشد. طبق مشاهده ۳.۲.۲ داریم $G \neq C$. فرض کنید v_d راسی از G باشد، به‌طوری‌که $d(v_d, C)$ از بیشترین اندازه‌ی ممکن باشد، و $\deg(v_{d-1})$ از کمترین مقدار ممکن باشد، و $\deg(v_0)$ از بیشترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید $v_0, v_1, \dots, v_d$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن از $v_0 \in C$ به v_d باشد.

حالت ۱: $d \geq 3$. فرض کنید $\deg_G(v_{d-1}) = 2$. فرض کنید $\deg_G(v_{d-2}) = 2$. فرض کنید $G' = G - \{v_{d-2}, v_{d-1}, v_d\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴، داریم $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2 = (n-2)/2$. در نتیجه $fd_1(G') \leq (n-3)/2$ ، چون n فرد است. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-3} \in S'$ ، آنگاه $S = S' \cup \{v_d\}$ یک FD -مجموعه برای G است و $|S| \leq (n-1)/2$ ، و این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $v_{d-3} \notin S'$. در این صورت $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD -مجموعه برای G است و $|S| \leq (n-1)/2$ ، این یک تناقض است. در این صورت $\deg_G(v_{d-2}) \geq 3$.

فرض کنید $G' = G - \{v_{d-1}, v_d\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴ داریم $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2$. فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') + 1)/2$. در این صورت فرض کنید $v_{d-3} \notin S'$. در نتیجه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G و $|S| \leq (n-1)/2$ ، این یک تناقض است. در این صورت فرض کنید $deg_G(v_{d-2}) \geq 3$. فرض کنید $G' = G - \{v_{d-1}, v_d\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴ داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2$$

فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') + 1)/2$. فرض کنید S' یک $FD-1$ مجموعه باشد. اگر $v_{d-2} \in S'$ ، آنگاه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n+1)/2$ ، این یک تناقض است. در این صورت فرض کنید $v_{d-2} \notin S'$ ، در نتیجه $S = S' \cup \{v_d\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n+1)/2$ ، این یک تناقض است. در نتیجه نشان دادیم که $fd_1(G') = (n(G') + 1)/2$. طبق فرض استقرار، $G' \in \mathcal{G}_1$. چون $d \geq 3$ ، داریم v_{d-2} یک راس ویژه‌ی دور از G' نیست. در این صورت G از G' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست آمده است و $G \in \mathcal{G}_1$.

در ادامه فرض کنید $deg_G(v_{d-1}) \geq 3$. طبق مشاهده‌ی ۱.۵.۴، داریم $deg(v_{d-1}) = 3$. فرض کنید $x \neq v_d$ برگی باشد که به راس v_{d-1} متصل شده است و فرض کنید $G' = G - \{x, v_d\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴، داریم $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2$. فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') + 1)/2$. فرض کنید S' یک $FD-1$ مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ ، آنگاه $S = S' \cup \{v_d\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G بوده و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n+1)/2$ ، این یک تناقض است. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم $v_{d-1} \notin S'$. در نتیجه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G بوده و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n+1)/2$ ، این یک تناقض است. در نتیجه $fd_1(G') = (n(G') + 1)/2$. طبق فرض استقرار $G' \in \mathcal{G}_1$. در نهایت G از G' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_2$ ساخته شده است و $G \in \mathcal{G}_1$.

حالت ۲: $d = 2$. ابتدا فرض کنید $deg(v_1) = 2$. فرض کنید $deg(v_0) = 3$. فرض کنید $G' = G - \{v_1, v_2\}$. فرض کنید $fd_1(G') = (n(G') + 1)/2$. طبق مشاهده‌ی ۱.۳.۴ راس v_0 تنها راس ویژه‌ی دور برای گراف G' است، زیرا $deg_{G'}(v_0) = 2$. ابتدا نشان می‌دهیم که $deg_{G'}(x) = 3$ برای هر $x \in \{u_1, \dots, u_k\} - \{v_0\}$.

فرض کنید $deg_{G'}(u_j) \geq 4$ برای برخی از $u_j \in \{u_1, \dots, u_k\} - \{v_0\}$. فرض کنید u_j به t_1 برگ و t_2 پشتیبان قوی و t_3 پشتیبان ضعیف متصل باشد، به طوری که $t_1 + t_2 + t_3 \geq 2$. طبق انتخاب مسیر $v_0 v_1 \dots v_d$ ، داریم $t_3 = 0$. فرض کنید $G'' = G' - u_j u_{j+1}$. طبق لم ۱.۱.۴ (۲)، یا u_{j+1} عضو یک $FD-1$ مجموعه برای G'' ، از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G') - 1)/2$ است، یا اینکه وجود دارد یک $FD-1$ مجموعه برای $G'' - u_{j+1}$ ، از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G') - 1)/2$ ، به طوری که راس u_{j+1} را احاطه نمی‌کند. فرض کنید S' یک $FD-1$ مجموعه باشد به طوری که در خاصیت فوق صدق کند. چون S' طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، شامل تمام رئوس پشتیبان قوی است و $t_1 + t_2 \geq 2$ ، داریم $u_j \in S'$. در این صورت S' یک $FD-1$ مجموعه برای G' از مرتبه‌ی

حداکثر $(n(G') - 1)/2$ است، این یک تناقض است.

در نتیجه $\deg_{G'}(x) = 3$ برای تمام $x \in \{u_1, \dots, u_k\} - \{v_0\}$. در این صورت $N_G(C) - C$ یک $1FD$ - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $n/2$ است، این یک تناقض است. ما نشان دادیم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 = (n - 3)/2$ و همچنین $fd_1(G') < (n(G') + 1)/2$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_0 \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_1\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n - 1)/2$ است، این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $v_0 \notin S'$. در این صورت $S' \cup \{v_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n - 1)/2$ است، این یک تناقض است.

در نتیجه فرض کنید $\deg(v_0) \geq 4$. فرض کنید $G' = G - \{v_2, v_1\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴ داریم $fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2$. فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') + 1)/2$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_0 \in S'$ ، آنگاه $S = S' \cup \{v_1\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n + 1)/2$ ، این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $v_0 \notin S'$. در این صورت فرض کنید $S' \cup \{v_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n + 1)/2$ ، این یک تناقض است. بنابراین $fd_1(G') = (n(G') + 1)/2$. طبق فرض استقرای $G' \in \mathcal{G}_1$. چون $\deg(v_0) \geq 4$ ، راس v_0 یک راس ویژه‌ی دور از G' نیست. در این صورت G از G' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست آمده است، در نتیجه $G \in \mathcal{G}_1$.

در ادامه فرض کنید $\deg_G(v_1) \geq 3$. طبق مشاهده‌ی ۱.۵.۴ داریم $\deg(v_1) = 3$. فرض کنید $v_2 \neq x$ دیگر برگ متصل به v_1 باشد و $G' = G - \{x, v_2\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۴ داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') + 1)/2$$

فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') + 1)/2$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ ، آنگاه $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n + 1)/2$ ، این یک تناقض است. در نتیجه فرض می‌کنیم $v_{d-1} \notin S'$. در این صورت $S = S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و $|S| \leq fd_1(G') + 1 < (n + 1)/2$ ، این یک تناقض است. نشان دادیم $fd_1(G') = (n(G') + 1)/2$. طبق فرض استقرای $G' \in \mathcal{G}_1$. بنابراین G از G' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_2$ بدست آمده است، در نتیجه $G \in \mathcal{G}_1$.

حالت ۳. $d = 1$. فرض کنید u_j یک راس پشتیبان قوی در G ، برای یک $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ باشد. فرض کنید $G' = G - u_j u_{j+1}$. طبق لم ۱.۱.۴ (۲)، یا u_{j+1} عضو یک $1FD$ - مجموعه در G' از مرتبه‌ی حداکثر $(n - 1)/2$ است، یا اینکه وجود دارد یک $1FD$ - مجموعه در G' از مرتبه‌ی حداکثر $(n - 1)/2$ به طوری که راس u_{j+1} را احاطه نکند. فرض کنید S' یک $1FD$ - مجموعه باشد، به طوری که در خاصیت فوق صدق کند. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $u_j \in S'$. در این صورت S' یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده، یک تناقض است.

در نتیجه G دارای هیچ راس پشتیبان قوی نیست. چون n فرد است G دارای حداقل یک راس از درجه دو است. فرض کنید G دارای حداقل دو راس از درجه‌ی دو باشد. فرض کنید

G دارای حداقل دو راس مجاور از درجه دو باشد. فرض کنید j یک عدد صحیح باشد که $\deg(u_j) = \deg(u_{j+1}) = 2$ و $\deg(u_{j+2}) = 3$. فرض کنید $G' = G - \{u_j, u_{j+1}\}$. طبق نتیجه ۱.۱.۴، وجود دارد یک $1FD$ - مجموعه‌ی S' برای G' از مرتبه‌ی حداکثر $(n-3)/2 = (n(G')-1)/2$ ، به طوری که شامل راس u_{j+2} باشد. اگر $u_{j-1} \in S'$ ، آنگاه S' یک $1FD$ - مجموعه برای G است، این یک تناقض است. در این صورت $u_{j-1} \notin S'$. در نتیجه $S' \cup \{u_{j+1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n-1)/2$ است، این یک تناقض است.

در این صورت G دارای هیچ دو راس مجاور از درجه‌ی دو نیست. فرض کنید u_j و u_l ، برای $(l > j)$ ، دو راس از درجه دو باشند و $\deg(u_i) = 3$ ، برای $i = j+1, \dots, l-1$ ، باشد. به وضوح $\deg(u_{l+1}) = 3$. فرض کنید G' مولفه‌ی $G - \{u_{j-1}u_j, u_lu_{l+1}\}$ باشد، به طوری که شامل راس u_{j-1} باشد و G'' مولفه‌ی $G - \{u_{j-1}u_j, u_lu_{l+1}\}$ باشد، به طوری که شامل راس u_j باشد. فرض کنید $u'_i \in N(u_i) - C$ ، برای $i = j+1, \dots, l-1$. توجه داشته باشید که G' از مرتبه‌ی فرد است. طبق مشاهده‌ی ۱.۱.۴ وجود دارد یک $1FD$ - مجموعه، S' ، برای G' از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G')-1)/2$ ، به طوری که شامل راس u_{j-1} است. اگر $u_{l+1} \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{u'_{j+1}, \dots, u'_{l-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n-1)/2$ است، این یک تناقض است. در این صورت فرض کنید $u_{l+1} \notin S'$. در نتیجه $S' \cup \{u_j, \dots, u_{l-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n-1)/2$ است، این یک تناقض است. نشان دادیم که G دارای دقیقاً یک راس از درجه دو است در نتیجه $G \in \mathcal{C}_1$.
برای طرف برگشت طبق نتیجه ۱.۳.۵ داریم، $V(G) - L(G)$ یکتا $fd_1(G)$ - مجموعه است. در این صورت طبق ۱.۳.۴، داریم $fd_1(G) = (n+1)/2$.

□

با استفاده از قضیه‌های ۱.۲.۴ و ۱.۵.۴ قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۲.۵.۴. اگر G یک گراف تک دوری از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $fd(G)_1 \leq (n+1)/2$ ، و تساوی رخ می‌دهد، اگر و تنها اگر $G = C_5$ یا $G \in \mathcal{G}_1$.
نتیجه‌ی زیر به سادگی از قضیه‌ی فوق بدست می‌آید.

نتیجه ۱.۵.۴. فرض کنید G گراف تک دوری از مرتبه‌ی n باشد. اگر n زوج باشد آنگاه $fd_1(G) \leq n/2$.

حال در ادامه به قضیه‌ای در مورد γ_2 نیاز مندیم که در زیر بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۵.۴. اگر G گراف تک دوری از مرتبه n باشد، آنگاه $\gamma_2(G) \geq n/2$.

برهان. فرض کنید G یک گراف تک دوری از مرتبه‌ی n بوده و S یک $\gamma_2(G)$ - مجموعه باشد. فرض کنید $C = u_1u_2 \dots u_ku_1$ تک دور گراف G باشد. اگر وجود داشته باشد $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

به‌طوری‌که $\{u_i, u_{i+1}\} \subseteq S$ یا $S \cap \{u_i, u_{i+1}\} = \emptyset$ ، آنگاه S یک مجموعه‌ی ۲-احاطه‌گر برای درخت $G - u_i u_{i+1}$ است. در نتیجه طبق نتیجه‌ای از فینک و جاکوبسن^۱ در [۲۴] داریم $\gamma_2(G) \geq n/2$. پس نتیجه می‌گیریم که k زوج است و S شامل دقیقاً نیمی از رئوس C است.

حال سه راس متوالی u_j و u_{j+1} و u_{j+2} ، به‌طوری‌که $\{u_j, u_{j+2}\} \subseteq S$ و $u_{j+1} \notin S$ ، را در نظر بگیرید. فرض کنید G_1 مولفه‌ی $G - \{u_j u_{j+1}, u_{j+1} u_{j+2}\}$ باشد که شامل راس u_j باشد و G_2 مولفه‌ی $G - \{u_j u_{j+1}, u_{j+1} u_{j+2}\}$ باشد که شامل راس u_{j+1} باشد. به‌وضوح $S \cap G_1$ یک مجموعه‌ی ۲-احاطه‌گر از درخت G_1 است و $S \cap G_2 \cup \{u_{j+1}\}$ یک مجموعه‌ی ۲-احاطه‌گر از درخت G_2 است. طبق نتیجه‌ای از فینک و جاکوبسن در [۲۴] داریم،

$$|S| + 1 \geq \lceil (n(G_1) + 1)/2 \rceil + \lceil (n(G_2) + 1)/2 \rceil \geq n/2$$

□

اگر S یک k -FD مجموعه در G برای $k \geq 2$ باشد، آنگاه $|N(x) \cap S| = k \geq 2$ برای $x \in V - S$ ، که این نتیجه می‌دهد S یک مجموعه‌ی ۲-احاطه‌گر است. در این صورت نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۵.۴. در یک گراف تک دوری هر fd_1 - مجموعه یک fd - مجموعه است.

برهان. فرض کنید G یک گراف تک دوری از مرتبه‌ی n باشد. فرض کنید یک $fd_k(G) -$ مجموعه یک fd - مجموعه برای G باشد که در آن $k \neq 1$. فرض کنید $fd_1(G) < fd_k(G)$. طبق قضیه‌ی ۳.۵.۴، داریم $n/2 \leq fd_k(G)$. فرض کنید n زوج باشد، در نتیجه $n/2 < fd_1(G)$ ، این یک تناقض با نتیجه‌ی ۱.۵.۴ است. در این صورت n فرد است. در این صورت $(n+1)/2 \leq fd_k(G)$ ، در نتیجه $(n+1)/2 < fd_1(G)$ ، این یک تناقض با قضیه‌ی ۲.۵.۴ است. در این صورت $fd_1(G) \leq fd_k(G)$ که در آن $k \neq 1$. در نتیجه هر fd_1 - مجموعه یک fd - مجموعه برای G است.

□

در آخر این بخش را با قضیه زیر به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۴.۵.۴. اگر G یک گراف تک دوری از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $fd(G) \leq (n+1)/2$ ، و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $G = C_5$ یا $G \in \mathcal{G}_1$.

^۱ Fink and Jacobson

فصل ۵

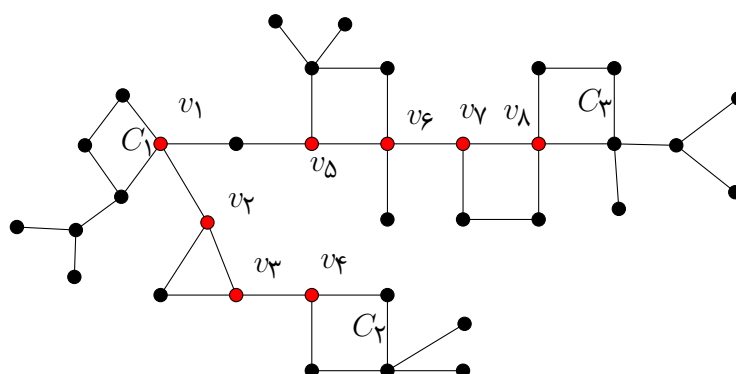
عدد احاطه‌گری منصف در کاکتوس گراف‌ها

در این فصل ابتدا کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در کاکتوس گراف‌ها، با استفاده از تعداد دورهای آن ارائه می‌کنیم و سپس تمام گراف‌هایی که در این کران دقیق هستند را مشخص می‌کنیم.

۱.۵ کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در کاکتوس گراف‌ها

در این بخش نشان می‌دهیم که برای یک کاکتوس گراف G از مرتبه‌ی n با $k \geq 1$ دور عدد احاطه‌گری منصف کمتر از $(n(G) - 1)/2 + k$ است. برای رسیدن به این هدف ابتدا به یکسری از تعاریف در مورد یک کاکتوس گراف نیاز داریم که در بخش ۱.۱.۵ می‌آوریم، سپس در بخش ۲.۱.۵ کران مورد نظر را بیان می‌کنیم. ابتدا مشاهده‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

مشاهده ۱.۱.۵. فرض کنید S یک $1FD$ - مجموعه در G بوده، همچنین v راس پشتیبانی از G باشد و برگ آن راس v' باشد. اگر S شامل راس $u \in N_G(v) - \{v'\}$ ، آنگاه $v \in S$.



شکل ۱.۵: C_i ، برای $i = 1, 2, 3$ ، یک دور برگی است و v_j ، برای $j = 1, 2, \dots, 8$ یک راس برشی ویژه است.

۱.۱.۵ تعاریف

راس v در یک دور C از یک کاکتوس گراف G را یک راس ویژه‌ی دور گوئیم، هرگاه درجه v دو باشد. راس w از یک دور C از یک کاکتوس گراف G را یک راس برشی ویژه گوئیم اگر w عضو یک مسیر بین دور C و دور $C' \neq C$ باشد. یک دور C را در کاکتوس گراف G یک دور-برگی گوئیم اگر C شامل دقیقاً یک راس برشی ویژه باشد.

در کاکتوس گراف نمایش داده شده در شکل ۱.۱.۵ راس v_i ، برای $i = 1, 2, \dots, 8$ ، یک راس برشی ویژه است. همچنین C_j ، برای $j = 1, 2, 3$ ، یک دور برگی است.

مشاهده ۲.۱.۵. هر کاکتوس گراف با حداقل دو دور، دارای حداقل دو دور-برگی است.

۲.۱.۵ کران بالا

در این بخش ابتدا قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱.۱.۵. اگر G یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی n با $k \geq 1$ دور باشد، آنگاه

$$fd_1(G) \leq (n(G) - 1)/2 + k$$

برهان. اگر $k = 1$ باشد، آنگاه طبق قضیه‌ی ۲.۵.۴ حکم برقرار است. در نتیجه فرض کنید $k \geq 2$. به برهان خلف، فرض کنید $fd_1(G) > (n(G) - 1)/2 + k$. فرض کنید G دارای کمترین مرتبه در بین این گراف‌ها باشد، همچنین فرض کنید G دارای کمترین اندازه در بین این گراف‌ها باشد. فرض کنید $C_1, C_2, \dots, C_k$ دوره‌های گراف G باشد. فرض کنید C_i یک دور-برگی

از گراف G باشد که در آن $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. فرض کنید $C_i = u_0 u_1 \dots u_l u_0$ که در آن u_0 راس برشی ویژه از گراف G باشد.

فرض کنید $\deg_G(u_j) = 2$ برای هر $j = 1, 2, \dots, l$. فرض کنید $G' = G - u_1 u_2$. در نتیجه طبق انتخاب گراف G ، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1 = (n(G) - 1)/2 + k - 1$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. حال اگر $|S' \cap \{u_1, u_2\}| \in \{0, 2\}$ آنگاه S' یک $1FD$ -مجموعه برای G است، یک تناقض است. در نتیجه $|S' \cap \{u_1, u_2\}| = 1$. فرض کنید $u_1 \in S'$. در این صورت $u_2 \in S'$ ، همچنین $\{u_2\} \cup S'$ یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k$ است. اگر $u_2 \in S'$ ، آنگاه $u_0 \in S'$ و $\{u_1\} \cup S'$ یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k$ بوده، این یک تناقض است.

نشان دادیم که $\deg_G(u_i) \geq 3$ ، برای برخی $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. فرض کنید v_d یک برگ از G باشد به طوری که $d(v_d, C_i - u_0)$ بیشترین مقدار ممکن باشد، و کوتاه‌ترین مسیر بین v_d تا C_i شامل راس u_0 نباشد. فرض کنید $v_0 v_1 \dots v_d$ کوتاه‌ترین مسیر بین v_d تا $u_0 \in C_i$ باشد.

فرض کنید $d \geq 2$. فرض کنید $\deg_G(v_{d-1}) = 2$. فرض کنید $G' = G - \{v_d, v_{d-1}\}$. طبق انتخاب گراف G ، $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-2} \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G است، و اگر $v_{d-2} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G است. در نتیجه $fd_1(G) \leq (n - 1)/2 + k$ ، یک تناقض است.

در نتیجه فرض کنید $\deg_G(v_{d-1}) \geq 3$. به وضوح هر راس از $N_G(v_{d-1}) - \{v_{d-2}\}$ یک برگ است. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام برگ‌های متصل به v_{d-1} بدست آید. طبق انتخاب گراف G داریم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ ، آنگاه S' یک $1FD$ -مجموعه در G است، این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $v_{d-1} \notin S'$. در این صورت $v_{d-2} \in S'$. در نتیجه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k + 1 \leq (n(G') - 1)/2 + k + 1$ است، این یک تناقض است. فرض کنید $d = 1$. فرض کنید u_i یک راس از C_i باشد، به طوری که $\deg_G(u_i) = 2$. فرض کنید $\deg_G(u_{i+1}) = 2$. فرض کنید $G' = G - u_i u_{i+1}$. طبق انتخاب گراف G داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1 = (n(G) - 1)/2 + k - 1$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $|S' \cap \{u_i, u_{i+1}\}| \in \{0, 2\}$ ، آنگاه S' یک $1FD$ -مجموعه برای G است، این یک تناقض است. در نتیجه $|S' \cap \{u_i, u_{i+1}\}| = 1$. فرض کنید $u_i \in S'$. در این صورت $u_{i+2} \in S'$ و همچنین $\{u_{i+1}\} \cup S'$ یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k$ است، یک تناقض است. در ادامه فرض کنید $u_{i+1} \in S'$. در نتیجه $u_{i-1} \in S'$ و همچنین $\{u_i\} \cup S'$ یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k$ بوده، این یک تناقض است.

در نتیجه $\deg_G(u_{i+1}) \geq 3$ ، به همین ترتیب $\deg_G(u_{i-1}) \geq 3$. چون C_i یک دور-برگی است، دارای دقیقاً یک راس برشی ویژه است. در این صورت بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که u_{i+1} یک راس پشتیبان از گراف G است. فرض کنید $G' = G - u_{i-1}u_i$. طبق انتخاب G ، داریم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $u_{i+1} \in S'$. اگر $u_{i-1} \notin S'$ ، آنگاه S' یک $1FD$ -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1$ ، این یک تناقض است. در نتیجه $u_{i-1} \in S'$. در این صورت $S' \cup \{u_i\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k$ بوده، این یک تناقض است.

نشان دادیم که $\deg_G(u_i) \geq 3$ ، برای تمام $i = 0, 1, \dots, l$. از طرف دیگر u_i یک راس پشتیبان، برای $i = 0, 1, \dots, l$ ، است. فرض کنید u_i یک راس پشتیبان قوی برای برخی $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ باشد. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام راس‌های $\cup_{i=1}^l (N[u_i] - \{u_0, u_1, u_l\})$ بدست آید. به وضوح u_0 یک راس پشتیبان قوی از گراف G' است. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $u_0 \in S'$ ، همچنین $S' \cup \{u_1, \dots, u_l\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر

$(n(G) - (2l + 1) + 2 - 1)/2 + k - 1 + l = n(G)/2 + k - 1$ بوده، این یک تناقض است. در این صورت u_i یک پشتیبان ضعیف برای هر $i = 1, 2, \dots, l$ است. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام رئوس $\cup_{i=1}^l (N[u_i] - \{u_0\})$ بدست آید. طبق انتخاب گراف G داریم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $u_0 \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{w_1, \dots, w_l\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1$ است، که در آن w_i برگ متصل به راس u_i برای $i = 1, 2, \dots, l$ است، این یک تناقض است. در نتیجه $u_0 \in S'$. در این صورت $S' \cup \{u_1, \dots, u_l\}$ یک $1FD$ -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1$ است، این یک تناقض است.

□

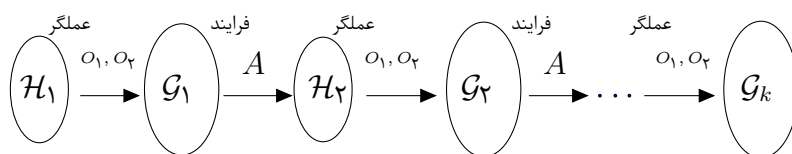
نتیجه‌ی زیر که یک کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در کاکتوس گراف‌ها ارائه می‌کند، به سادگی از قضیه‌ی فوق بدست می‌آید.

نتیجه ۱.۱.۵. اگر G یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی $n \geq 5$ با $k \geq 1$ دور باشد، آنگاه

$$fd(G) \leq (n - 1)/2 + k$$

۲.۵ خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$

در این فصل خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$ از کاکتوس گراف‌ها با k دور را معرفی می‌کنیم. این خانواده از کاکتوس گراف‌ها در کران قضیه ۱.۱.۵ دقیق هستند. برای این کار ابتدا فرض کنید $\mathcal{C}_1 = \mathcal{H}_1$ و $\mathcal{G}_1$ خانواده‌ی گراف‌های تک‌دوری باشند که در فصل قبل معرفی شدند.



شکل ۲.۵: ساختار خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$

برای $i = 2, \dots, k$ خانواده‌ی $\mathcal{H}_i$ را از خانواده‌ی $\mathcal{G}_{i-1}$ ، و خانواده‌ی $\mathcal{G}_i$ را از خانواده‌ی $\mathcal{H}_i$ به صورت زیر می‌سازیم.

- خانواده‌ی $\mathcal{H}_i$. فرض کنید $\mathcal{H}_i$ خانواده‌ی تمام گراف‌های H_i باشد، به طوری که H_i از گراف $H_1 \in \mathcal{H}_1$ و گراف $G \in \mathcal{G}_{i-1}$ با فرایند زیر ساخته شود.

– **فرایند A:** فرض کنید $w_0 \in V(H_1)$ یک راس پشتیبان از گراف H_1 ، $w \in V(G_{i-1})$ یک راس پشتیبان از گراف G_{i-1} باشد. دقیقاً یکی از برگ‌های متصل به راس w_0 و دقیقاً یکی از برگ‌های متصل به راس w را حذف کرده و دو راس w_0 و w را با هم یکی می‌کنیم.

- خانواده‌ی $\mathcal{G}_i$. فرض کنید $\mathcal{G}_i$ خانواده‌ی تمام گراف‌های G باشند به طوری که، گراف G از دنباله‌ی $G_1, G_2, \dots, G_s = G$ بدست آید، که در آن $G_1 \in \mathcal{H}_i$ ، و اگر $s \geq 2$ ، آنگاه G_{j+1} از G_j ، برای $j = 1, 2, \dots, s-1$ ، با یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ ، که در فصل قبل معرفی شدند، ساخته می‌شوند.

توجه داشته باشید که $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{G}_i$ ، برای $i = 1, 2, \dots, k$. شکل ۲.۵، ساختار کلی خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$ را نشان می‌دهد.

۳.۵ خواص خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$

مشاهده‌ی زیر با استفاده از یک استقرای ساده روی k بدست می‌آید.

- مشاهده ۱.۳.۵.** اگر $G \in \mathcal{G}_k$ یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی n با $k \geq 1$ دور باشد، آنگاه
- (۱) هیچ یک از دورهای G شامل هیچ راس پشتیبان قوی نیست، همچنین هر دور از G شامل دقیقاً یک راس ویژه دور است.
 - (۲) n فرد است.

$$|L(G)| = (n+1)/2 - k \quad (۳)$$

(۴) اگر یک راس v از G عضو حداقل دو دور از G باشد، آنگاه v یک راس پشتیبان نیست، همچنین v عضو دقیقاً دو دور از G است.

مشاهده ۲.۳.۵. فرض کنید $G \in \mathcal{G}_k$. فرض کنید G از دنباله‌ی $G_1, G_2, \dots, G_s = G$ ($s \geq 2$) بدست آمده باشد، به‌طوری‌که $G_1 \in \mathcal{H}_1$ و G_{j+1} از G_j ، برای $j = 1, 2, \dots, s-1$ ، با یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ یا فرایند A بدست آمده باشد. اگر v یک راس از G باشد که عضو دو دور از G باشد، آنگاه وجود دارد یک $i \in \{2, 3, \dots, s\}$ ، به‌طوری‌که G_i از G_{i-1} با استفاده از فرایند A روی راس v با استفاده از یک گراف $H \in \mathcal{H}_1$ بدست آمده است، که در آن v عضو یک دور از گراف G_{i-1} است.

حال مشاهده‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

مشاهده ۳.۳.۵. فرض کنید $G \in \mathcal{G}_k$ و $v \in V(G)$ یک راس از درجه چهار باشد به‌طوری‌که عضو دو دور باشد. فرض کنید D_1 و D_2 مولفه‌های $G-v$ باشند. فرض کنید G^* گراف القایی بدست آمده از $G[D_1 \cup \{v\}]$ با اضافه کردن یک برگ v^* به راس v باشد، و فرض کنید G^* گراف القایی بدست آمده از $G[D_2 \cup \{v\}]$ با اضافه کردن برگ v^* به راس v باشد. در این صورت وجود دارد $k' < k$ به‌طوری‌که $G^* \in \mathcal{G}_{k'}$ یا $G^* \in \mathcal{G}_{k'}$.

برهان. فرض کنید $G \in \mathcal{G}_k$. در این صورت G از دنباله‌ی $G_1, G_2, \dots, G_s = G$ ($s \geq 2$) بدست آمده است، به‌طوری‌که $G_1 \in \mathcal{H}_1$ و G_{j+1} از G_j ، برای $j = 1, 2, \dots, s-1$ ، با استفاده از یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ یا فرایند A بدست آمده باشد. توجه داشته باشید که $s \geq k$. در اینجا منظور از j -امین فرایند-عملگر یا به اختصار PO_j یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ یا فرایند A است که در ساختن گراف G_{j+1} از گراف G_j استفاده شده است. در این صورت G از G_1 با فرایند-عملگرهای $PO_1, PO_2, \dots, PO_{s-1}$ بدست آمده است.

فرض کنید v یک راس از G از درجه چهار باشد که عضو دو دور از G است، همچنین فرض کنید D_1 و D_2 مولفه‌های $G-v$ باشند. طبق مشاهده ۲.۳.۵ وجود دارد $i \in \{2, 3, \dots, s\}$ به‌طوری‌که G_i از G_{i-1} با اعمال فرایند A روی راس v با استفاده از گراف $H \in \mathcal{H}_1$ بدست آمده باشد. توجه داشته باشید که v یک راس پشتیبان از G_{i-1} است. فرض کنید v^* برگ راس v در G_{i-1} باشد که در فرایند A حذف شده است. به‌وضوح یا $V(G_{i-1}) \cap D_1 \neq \emptyset$ یا $V(G_{i-1}) \cap D_2 \neq \emptyset$. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $V(G_{i-1}) \cap D_1 \neq \emptyset$. در بین تمام $PO_i, PO_{i+1}, \dots, PO_{s-1}$ فرض کنید $PO_{r_1}, PO_{r_2}, \dots, PO_{r_t}$ عملگر-فرایندهایی باشند که روی یک راس از D_1 اعمال می‌شوند، که در آن $i \leq t \leq s-1$.

فرض کنید $G_{r_0} = G_{i-1}$ و $G_{r_{l+1}}$ از G_{r_l} با اعمال PO_{l+1} ، برای $l = 0, 1, 2, \dots, t-1$ ، بدست آمده باشد. به‌وضوح با استفاده از یک استقرا روی t ، می‌توانیم نشان دهیم که وجود دارد $k^* < k$ به‌طوری‌که $G_{r_t} \in \mathcal{G}_{k^*}$. توجه کنید که $G_{r_t} = G^*$.

□

لم ۱.۳.۵. اگر $G \in \mathcal{G}_k$ ، آنگاه هر FD - مجموعه در G شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو است.

برهان. فرض کنید $G \in \mathcal{G}_k$ و S یک FD - مجموعه در G باشد. اثبات را با استقرا روی k ، استقرای - اول، انجام می‌دهیم، تا نشان دهیم که S شامل تمام رئوس از درجه‌ی حداقل دو است. برای گام اول استقرا، اگر $k = 1$ آنگاه $G \in \mathcal{G}_1$ و در نتیجه طبق لم ۱.۳.۵ حکم برقرار است. فرض کنید برای تمام گراف‌های $G' \in \mathcal{G}_{k'}$ ، که در آن $k' < k$ ، حکم برقرار باشد. حال گراف $G \in \mathcal{G}_k$ ، برای $k > 1$ ، را در نظر بگیرید. به‌وضوح G از دنباله‌ی $G_1, G_2, \dots, G_l = G$ بدست آمده است، که در آن $G_1 \in \mathcal{H}_k$ و اگر $l \geq 2$ ، آنگاه G_{i+1} از G_i با اعمال یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ بدست آمده است.

حال در ادامه از استقرا روی l ، استقرای - دوم، برای نشان دان حکم مسئله استفاده می‌کنیم. برای گام اول استقرای - دوم، فرض کنید $l = 1$. در این صورت $G \in \mathcal{H}_k$. طبق ساختار گراف‌های خانواده‌ی $\mathcal{H}_k$ ، وجود دارد گراف $H \in \mathcal{H}_1$ و گراف $G' \in \mathcal{G}_{k-1}$ ، به‌طوری که G از H و G' با اعمال فرایند A بدست آمده است. به‌وضوح H از تاج، $cor(C)$ ، دور C با حذف دقیقاً یک برگ از $cor(C)$ بدست آمده است. فرض کنید $C = c_0 c_1 \dots c_r c_0$ ، به‌طوری که c_0 راس پشتیبانی از H باشد که برگ آن در فرایند A حذف می‌شود. چون که H دارای دقیقاً یک راس ویژه دور است، فرض کنید c_t راس ویژه دور H باشد. فرض کنید $w \in V(G')$ راس پشتیبان G' باشد که برگ آن، w' ، در فرایند A حذف شده باشد.

ابتدا نشان می‌دهیم $\{c_1, c_r\} \cap S \neq \emptyset$. به‌وضوح $S \cap \{c_{t-1}, c_t, c_{t+1}\} \neq \emptyset$ ، چون $\deg_G(c_t) = 2$. فرض کنید $c_t \in S$. چون حداقل یکی از c_{t-1} یا c_{t+1} راس پشتیبان است، طبق مشاهده‌ی ۱.۱.۵، $\{c_{t-1}, c_{t+1}\} \cap S \neq \emptyset$. با استفاده چند باره از مشاهده‌ی ۱.۱.۵، داریم $\{c_1, c_r\} \cap S \neq \emptyset$ ، چون هر راس از $\{c_1, \dots, c_r\} - \{c_t\}$ یک راس پشتیبان از G است. در این صورت فرض کنید $c_t \notin S$. در نتیجه $\{c_{t-1}, c_{t+1}\} \cap S \neq \emptyset$ و همچنین $\{c_1, c_r\} \cap S \neq \emptyset$ ، چون هر راس از $\{c_1, \dots, c_r\} - \{c_t\}$ یک راس پشتیبان در گراف G است. بنابراین $\{c_1, c_r\} \cap S \neq \emptyset$.

اگر $c_0 \notin S$ آنگاه $S \cup \{w'\}$ یک FD - مجموعه برای G' است، در این صورت طبق فرض استقرای - اول S' شامل راس $w = c_0$ است، این یک تناقض است. در نتیجه $c_0 \in S$. در نتیجه طبق مشاهده‌ی ۱.۱.۵ داریم $V(C) \subseteq S$ ، چون هر راس از $\{c_1, \dots, c_r\} - c_t$ یک راس پشتیبان در گراف G است. در نتیجه $S \cap V(G')$ یک FD - مجموعه برای G' است. طبق فرض استقرای - اول، $(S \cap V(G')) \cup \{w\}$ شامل تمام رئوس از درجه‌ی حداقل دو از گراف G' است. همچنین S شامل تمام رئوس از درجه‌ی حداقل دو از G است. نشان دادیم که گام اول استقرای - دوم برقرار است.

حال فرض کنید (برای استقرای - دوم) که حکم برای $l' < l$ برقرار باشد. حال فرض کنید $G = G_l$. به‌وضوح G از G_{l-1} با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_1$ یا $\mathcal{O}_2$ بدست می‌آید.

فرض کنید G از G_{l-1} با اعمال عملگر $\mathcal{O}_2$ بدست آمده باشد. فرض کنید x برگ‌ی از G_{l-1}

باشد و G از G_{l-1} با اضافه کردن دو برگ x_1 و x_2 به x بدست آمده باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $x \in S$. درنتیجه S یک FD -مجموعه برای G_{l-1} است. طبق فرض استقرای-دوم S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو از گراف G_{l-1} است. بنابراین S شامل تمام رئوس از درجه‌ی حداقل دو در گراف G_k است.

در ادامه فرض کنید G از G_{l-1} با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست آمده باشد. فرض کنید $x_1 x_2$ یک مسیر باشد و x_1 به راس $y \in V(G_{l-1})$ متصل شده باشد، که در آن $\deg_{G_{l-1}}(y) \geq 2$ و y یک راس ویژه دور از G_{l-1} نباشد. توجه داشته باشید که $\{x_1, x_2\} \cap S \neq \emptyset$. اگر $x_1 \notin S$ ، آنگاه $x_2 \in S$ و $y \notin S$. درنتیجه $S - \{x_2\}$ یک FD -مجموعه برای G_{l-1} است، به‌طوری‌که شامل y نیست، این یک تناقض با فرض استقرای-دوم است. درنتیجه فرض کنید $x_1 \in S$.

فرض کنید $y \notin S$. به‌وضوح $N_{G_{l-1}}(y) \cap S = \emptyset$. فرض کنید وجود داشته باشد مولفه‌ی G'_1 از $G_{l-1} - y$ به‌طوری‌که $|V(G'_1) \cap N_{G_{l-1}}(y)| = 1$. درنتیجه $S' = (S \cap V(G_{l-1})) \cup V(G'_1)$ یک FD -مجموعه برای G_{l-1} است و طبق فرض استقرای-دوم S' شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در گراف G_{l-1} است. درنتیجه $y \in S'$ و همچنین $y \in S$ ، یک تناقض است. در ادامه فرض کنید هر مولفه از $G_{l-1} - y$ دارای حداقل دو راس در $N_{G_{l-1}}(y)$ باشد. چون y یک راس ویژه دور نیست، y عضو حداقل دو دور از G_{l-1} است. طبق مشاهده‌ی ۱.۳.۵ (۴) داریم y عضو دقیقاً دو دور از G_{l-1} است. درنتیجه $\deg_{G_{l-1}}(y) = 4$. طبق مشاهده‌ی ۳.۳.۵ داریم $G_{l-1} - y$ دارای دقیقاً دو مولفه‌ی D_1 و D_2 است. فرض کنید G^* گراف بوجود آمده از $D_1 \cup \{v\}$ یا $D_2 \cup \{v\}$ ، با اضافه نمودن برگ v^* به راس y باشد. درنتیجه وجود دارد $k' \leq k$ به‌طوری‌که $G^* \in \mathcal{G}_{k'}$. بدیهی است که $S^* = (S \cap V(G^*)) \cup \{v^*\}$ یک FD -مجموعه برای G^* بوده و همچنین طبق فرض استقرای-دوم S^* شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در گراف G^* است (چون $G^* \in \mathcal{G}_{k'}$). درنتیجه $y \in S^*$ و همچنین $y \in S$ ، این یک تناقض است.

نشان دادیم که $y \in S$. توجه داشته باشید که $S \cap V(G_{l-1})$ یک FD -مجموعه برای G_{l-1} بوده و همچنین طبق فرض استقرا، $S \cap V(G_{l-1})$ شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در G_{l-1} است. بنابراین S شامل تمام رئوس از درجه حداقل دو در G است.

□

با استفاده از مشاهده‌ی ۱.۳.۵ (۳) و لم ۱.۳.۵ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱.۳.۵. اگر $G \in \mathcal{G}_k$ یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $V(G) - L(G)$ تنها $fd_1(G)$ -مجموعه است.

۴.۵ قضیه‌ی اصلی

اگر G یک کاکتوس گراف از مرتبه n با $k \geq 1$ دور باشد و $fd_1(G) = (n-1)/2 + k$ ، آنگاه $n \geq 3$ فرد است، و چون $fd_1(C_3) \neq 2$ ، داریم $n \geq 5$. واضح است که $fd_1(C_5) = 3 = (5-1)/2 + 1$.

حال قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۵. اگر $G \neq C_5$ یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی $n \geq 5$ با $k \geq 1$ دور باشد، آنگاه $fd_1(G) = (n-1)/2 + k$ ، اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G}_k$.

برهان. ابتدا با استقرا روی k نشان می‌دهیم که هر کاکتوس گراف از مرتبه‌ی $n \geq 5$ با $k \geq 1$ دور و $fd_1(G) = (n-1)/2 + k$ عضو خانواده‌ی $\mathcal{G}_k$ است. گام اول استقرا طبق قضیه‌ی ۲.۵.۴ برقرار است. فرض کنید حکم برای تمام گراف‌های G' با $k' < k$ دور برقرار باشد. حال فرض کنید G یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی n با $k \geq 2$ دور باشد و $fd_1(G) = (n-1)/2 + k$. به‌وضوح n فرد است.

به برهان خلف فرض کنید $G \notin \mathcal{G}_k$. فرض کنید G دارای کمترین مرتبه از بین تمام گراف‌ها با این خاصیت بوده، همچنین اندازه‌ی گراف نیز کمترین باشد. از مشاهده‌ی ۲.۱.۵ نتیجه می‌شود که G دارای حداقل دو دور-برگی است. فرض کنید $C_1 = c_0 c_1 \dots c_r c_0$ و $C_2 = c'_0 c'_1 \dots c'_r c'_0$ دو دور-برگی بوده، به‌طوری‌که c_0 و c'_0 دو راس برشی ویژه از گراف G باشند.

فرض کنید G'_1 مولفه‌ی $G - c_0 c_1 - c_0 c_r$ باشد که شامل راس c_1 باشد، همچنین فرض کنید G''_1 مولفه‌ی $G - c'_0 c'_1 - c'_0 c'_r$ باشد که شامل راس c'_1 باشد.

ادعای ۱. $V(G'_1) \neq \{c_1, \dots, c_r\}$ و $V(G''_1) \neq \{c'_1, \dots, c'_r\}$.

اثبات ادعای ۱. فرض کنید $V(G'_1) = \{c_1, \dots, c_r\}$. درنتیجه $\deg_G(c_i) = 2$ ، برای $i = 1, 2, \dots, r$. فرض کنید $G^* = G - c_1 c_2$ و S^* یک FD -مجموعه باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G^*) \leq (n(G^*) - 1)/2 + k - 1 = (n(G) - 1)/2 + k - 1$$

فرض کنید $r = 2$. درنتیجه c_0 یک پشتیبان قوی برای G^* بوده و طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $c_0 \in S^*$. درنتیجه $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| = 0$ و همچنین S^* یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$ بوده، این یک تناقض است.

فرض کنید $r = 3$. اگر $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| \in \{0, 2\}$ ، آنگاه S^* یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$ بوده، این یک تناقض است. درنتیجه $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| = 1$. اگر $c_1 \in S^*$ ، آنگاه $c_3 \in S^*$ ، همچنین $c_0 \in S^*$. درنتیجه $S^* - c_1$ یک FD -مجموعه در G بوده، این یک تناقض است. درنتیجه $c_1 \notin S^*$ ، همچنین $c_2 \in S^*$. چون c_1 با S^* احاطه می‌شود، داریم $c_0 \in S^*$ ، همچنین $c_3 \in S^*$. درنتیجه $S^* - c_2$ یک FD -مجموعه در G بوده، این یک تناقض است.

فرض کنید $r = 4$. فرض کنید $fd_1(G^*) = (n(G^*) - 1)/2 + k - 1$. فرض کنید

$G^*_1 = G^* - \{c_2, c_3, c_4\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G^*_1) \leq (n(G^*_1) - 1)/2 + k - 1 = n/2 + k - 3$$

درنتیجه چون n فرد است

$$fd_1(G_1^*) \leq (n-1)/2 + k - 3$$

فرض کنید S_1^* یک $fd_1(G_1^*)$ - مجموعه باشد. اگر $c_0 \in S_1^*$ ، آنگاه $S_1^* \cup \{c_2\}$ یک FD - مجموعه برای G^* بوده، و اگر $c_0 \notin S_1^*$ ، آنگاه $S_1^* \cup \{c_3\}$ ، یک FD - مجموعه برای G^* است. درنتیجه

$$fd_1(G^*) \leq |S_1^*| + 1 \leq (n-1)/2 + k - 2$$

این یک تناقض است. درنتیجه

$$fd_1(G^*) < (n(G^*) - 1)/2 + k - 1 = (n(G) - 1)/2 + k - 1$$

اگر $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| \in \{0, 2\}$ ، آنگاه S^* یک FD - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| = 1$ درنتیجه است. این یک تناقض است. $(n(G) - 1)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$ بوده، بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $c_1 \in S^*$. درنتیجه $S^* \cup \{c_2\}$ یک FD - مجموعه برای G بوده و همچنین

$$fd_1(G) \leq |S^*| + 1 < (n(G) - 1)/2 + k$$

این یک تناقض است.

درنتیجه می‌توانیم فرض کنیم $r \geq 5$. فرض کنید $fd_1(G^*) = (n(G^*) - 1)/2 + k - 1$. فرض کنید $G_1^* = G^* - \{c_2, c_3, c_4\}$. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G_1^*) \leq (n(G_1^*) - 1)/2 + k - 1 = (n)/2 + k - 3$$

درنتیجه $fd_1(G_1^*) \leq (n-1)/2 + k - 3$ ، چون n فرد است. فرض کنید S_1^* یک $fd_1(G_1^*)$ - مجموعه باشد. اگر $c_5 \in S_1^*$ ، آنگاه $S_1^* \cup \{c_2\}$ یک FD - مجموعه برای G^* بوده و اگر $c_5 \notin S_1^*$ ، آنگاه $S_1^* \cup \{c_3\}$ یک FD - مجموعه برای G^* است. درنتیجه

$$fd_1(G^*) \leq |S_1^*| + 1 \leq (n-1)/2 + k - 2$$

این یک تناقض است. درنتیجه

$$fd_1(G^*) < (n(G^*) - 1)/2 + k - 1 = (n(G) - 1)/2 + k - 1$$

اگر $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| \in \{0, 2\}$ ، آنگاه S^* یک FD - مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $|S^* \cap \{c_1, c_2\}| = 1$ درنتیجه است. این یک تناقض است. $(n(G) - 1)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$ بوده، بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $c_1 \in S^*$. درنتیجه $S^* \cap \{c_2\}$ یک FD - مجموعه برای G بوده و همچنین

$$fd_1(G) \leq |S^*| + 1 < (n(G) - 1)/2 + k$$

این یک تناقض است. نشان دادیم که $V(G'_1) \neq \{c_1, \dots, c_r\}$ به همین ترتیب $V(G''_1) \neq \{c'_1, \dots, c'_{r'}\}$. $\square$

فرض کنید $v_d \in V(G'_1) - \{c_1, \dots, c_r\}$ برگ‌ی از G'_1 باشد که دارای بیشترین فاصله از $\{c_1, \dots, c_r\}$ بوده، همچنین فرض کنید $v_0 v_1 \dots v_d$ کوتاه‌ترین مسیر بین v_d تا $\{c_1, \dots, c_r\}$ باشد، که در آن $v_0 \in \{c_1, \dots, c_r\}$. بعلاوه، فرض کنید $v'_{d'} \in \{c'_1, \dots, c'_{r'}\}$ برگ‌ی از G''_1 باشد که دارای بیشترین فاصله از $\{c'_1, \dots, c'_{r'}\}$ بوده، همچنین فرض کنید $v'_0 v'_1 \dots v'_{d'}$ کوتاه‌ترین مسیر بین $v'_{d'}$ تا $\{c'_1, \dots, c'_{r'}\}$ باشد، که در آن $v'_0 \in \{c'_1, \dots, c'_{r'}\}$. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $d' \leq d$.

ادعای ۲. هر راس پشتیبان از G حداکثر به دو برگ متصل است.

اثبات ادعای ۲. فرض کنید راس پشتیبان $v \in S(G)$ وجود داشته باشد، به طوری که v حداقل به سه برگ v_1 و v_2 و v_3 متصل باشد. فرض کنید $G' = G - \{v_1\}$ و S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، داریم $v \in S'$ ، طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم $|S'| \leq (n(G') - 1)/2 + k = (n - 2)/2 + k$. به‌وضوح S' یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده، این یک تناقض است. $\square$

ادعای ۳. اگر $d \geq 2$ ، آنگاه $G \in \mathcal{G}_k$.

اثبات ادعای ۳. فرض کنید $d \geq 2$. طبق ادعای ۲، $2 \leq \deg_G(v_{d-1}) \leq 3$. ابتدا فرض کنید $\deg(v_{d-1}) = 3$. فرض کنید $x \neq v_d$ برگ دیگر متصل به راس v_{d-1} باشد. فرض کنید $G' = G - \{x, v_d\}$. از قضیه‌ی ۱.۱.۵ داریم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ ، آنگاه S' یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده، و اگر $v_{d-1} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G است. در نتیجه

$$fd_1(G) \leq fd_1(G') + 1 < (n - 1)/2 + k$$

این یک تناقض است. بنابر این $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k$. طبق انتخاب گراف G داریم $G' \in \mathcal{G}_k$. در نتیجه G از گراف G' با اعمال عملگر $\mathcal{O}_2$ بدست آمده است. در این صورت $G \in \mathcal{G}_k$. حال فرض می‌کنیم $\deg_G(v_{d-1}) = 2$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $d \geq 3$. فرض کنید $\deg_G(v_{d-2}) = 2$. فرض کنید $G' = G - \{v_{d-2}, v_{d-1}, v_d\}$. از قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k = (n)/2 + k - 2$$

در نتیجه چون n فرد است، داریم

$$fd_1(G') \leq (n - 1)/2 + k - 2$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_{d-3} \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و اگر $v_{d-3} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G است.

در نتیجه

$$fd_1(G) \leq |S'| + 1 \leq (n-1)/2 + k - 1$$

این یک تناقض است.

در این صورت $\deg_G(v_{d-2}) \geq 3$. فرض کنید $G' = G - \{v_{d-1}, v_d\}$. از قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k$$

فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') - 1)/2 + k$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_{d-2} \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و اگر $v_{d-2} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G است. در نتیجه

$$fd_1(G) \leq |S'| + 1 \leq fd_1(G') + 1 < (n-1)/2 + k$$

این یک تناقض است.

نشان دادیم که $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k$. در نتیجه طبق انتخاب گراف G ، داریم $G' \in \mathcal{G}_k$. چون $d \geq 3$ ، داریم v_{d-2} یک راس ویژه دور از گراف G' نیست. در نتیجه G از G' با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست آمده است، بنابراین $G \in \mathcal{G}_k$.

حالت ۲.۲. $d = 2$. توجه داشته باشید که $\deg(v_1) = 2$. به وضوح $\deg(v_0) \geq 3$. ابتدا فرض کنید $\deg(v_0) \geq 4$. فرض کنید $G' = G - \{v_2, v_1\}$ از قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k$$

فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') - 1)/2 + k$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_0 \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_1\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و اگر $v_0 \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G است. در نتیجه

$$fd_1(G) \leq |S'| + 1 \leq fd_1(G') + 1 < (n-1)/2 + k$$

این یک تناقض است.

نشان دادیم که $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k$. در نتیجه طبق انتخاب گراف G ، داریم $G' \in \mathcal{G}_k$. چون $\deg_{G'}(v_0) \geq 3$ ، داریم v_0 یک راس ویژه دور از گراف G' نیست. در نتیجه G از G' با اعمال عملگر $\mathcal{O}_1$ بدست آمده است، بنابراین $G \in \mathcal{G}_k$.

در نتیجه فرض کنید $\deg(v_0) = 3$. فرض کنید $G' = G - \{v_2, v_1\}$ از قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k$$

فرض کنید $fd_1(G') < (n(G') - 1)/2 + k$. فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $v_0 \in S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_1\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G بوده و اگر $v_0 \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_2\}$ یک $1FD$ - مجموعه برای G است. در نتیجه

$$fd_1(G) \leq |S'| + 1 \leq fd_1(G') + 1 < (n-1)/2 + k$$

این یک تناقض است.

نشان دادیم که $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k$. در نتیجه طبق انتخاب گراف G ، داریم $G' \in \mathcal{G}_k$. در نتیجه v_o یک راس ویژه دور از گراف G' است. از مشاهدۀ ۱.۳.۵ (۱) داریم $\deg_G(c_i) \geq 3$ برای هر $i \in \{1, \dots, r\}$.

فرض کنید $N_G(c_j) - V(C_1)$ دارای هیچ راس پشتیبان قوی برای $j \in \{1, \dots, r\}$ نباشد. از مشاهدۀ ۱.۳.۵ (۱) داریم c_j یک راس پشتیبان قوی برای G نیست، چون $G' \in \mathcal{G}_k$. فرض کنید وجود داشته باشد $c_j \in \{c_1, \dots, c_r\}$ به طوری که c_j در همسایگی خود یک راس پشتیبان a داشته باشد. طبق فرض a یک راس پشتیبان ضعیف است. اگر a' تنها برگ متصل به راس a باشد آنگاه a' نقش v_d را بازی می‌کند. چون $\deg(v_o) = 3$ داریم $\deg(c_j) = 3$. در نتیجه طبق مشاهدۀ ۱.۳.۵ (۱) می‌توان فرض کرد $\deg_G(c_i) = 3$ ، برای هر $c_i \in \{c_1, \dots, c_r\}$. فرض کنید

$$F = \cup_{i=1}^r (N[c_i]) - \{c_o, \dots, c_r\}$$

به وضوح $|F| = r$ ، چون $\deg_G(c_i) = 3$ برای هر $c_i \in \{c_1, \dots, c_r\}$. فرض کنید

$$F = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$$

و

$$F' = \{u_i \in F \mid \deg_G(u_i) = 1\}$$

همچنین $F'' = F - F'$. در نتیجه هر راس از F'' یک راس پشتیبان ضعیف است. چون $v_1 \in F''$ داریم $|F''| \geq 1$. حال فرض کنید $G^* = G - c_o c_1 - c_o c_r$ و همچنین فرض کنید G_1^* و G_2^* مولفه‌های G^* باشند، که در آن $c_1 \in V(G_1^*)$. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵ داریم

$$fd_1(G_1^*) \leq (n(G_1^*) - 1)/2 + k - 1$$

به وضوح $n(G_1^*) = n(G) - 2r - |F''|$. فرض کنید S_1^* یک $fd_1(G_1^*)$ - مجموعه باشد. اگر $c_o \notin S_1^*$ آنگاه $S_1^* \cup F$ یک FD - مجموعه برای G است، همچنین

$$fd_1(G) \leq (n(G) - 2r - |F''| - 1)/2 + k - 1 + r < (n - 1)/2 + k$$

این یک تناقض است. در نتیجه $c_o \in S_1^*$. اگر $|F''| = 1$ ، آنگاه $S_1^* \cup C_1 \cup \{v_1\}$ یک FD - مجموعه برای G است، همچنین

$$fd_1(G) \leq fd_1(G_1^*) + r + 1 \leq (n - 2)/2 + k$$

این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $|F''| \geq 2$. فرض کنید $\{u_t, u_{t'}\} \subseteq F''$ (بدون کاستن از کلیت فرض کنید $t < t'$) به طوری که $\deg_G(u_i) = 1$ برای $1 \leq i < t$ و $t' < i \leq r$. فرض کنید u'_t و $u'_{t'}$ برگ‌های u_t و $u_{t'}$ باشند. به وضوح

$$S_1^* \cup \{c_1, \dots, c_{t-1}\} \cup \{c_{t'+1}, \dots, c_r\} \cup \{u_{t+1}, \dots, u_{t'-1}\} \cup \{u'_t, u'_{t'}\}$$

یک FD – مجموعه برای G است، در نتیجه

$$fd_1(G) \leq fd_1(G^*) + r < (n-1)/2 + k - 1$$

این یک تناقض است.

در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم که $N(c_j) - C_1$ شامل حداقل یک راس پشتیبان قوی برای $c_j \in \{c_1, \dots, c_r\}$ باشد. فرض کنید یک راس پشتیبان قوی در $N(c_j) - C_1$ باشد. طبق ادعای ۲ دقیقاً دو برگ به راس c_j متصل است. فرض کنید u' و u'' برگ‌های متصل به راس u_j باشند و همچنین $G^* = G - \{u', u''\}$. از قضیه ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G^*) \leq (n(G^*) - 1)/2 + k$$

فرض کنید $fd_1(G^*) < (n(G^*) - 1)/2 + 2$. فرض کنید S' یک FD – مجموعه باشد. اگر $u_j \in S'$ ، آنگاه S' یک FD – مجموعه برای G بوده و اگر $u_j \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{u'_j\}$ یک FD – مجموعه برای G است. در نتیجه

$$fd_1(G) \leq fd_1(G^*) + 1 < (n-1)/2 + k$$

این یک تناقض است.

نشان دادیم که $fd_1(G^*) = (n(G^*) - 1)/2 + k$. در نتیجه طبق انتخاب گراف G ، داریم $G^* \in \mathcal{G}_k$. در نتیجه G از G^* با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_7$ بوجود آمده است. در نتیجه $G \in \mathcal{G}_k$. □
از ادعاهای ۱ و ۲ می‌توان فرض کرد $d = d' = 1$.

ادعای ۴. C_i ، برای $i = 1, 2$ دارای دقیقاً یک راس ویژه دور است.

اثبات ادعای ۴. ابتدا نشان می‌دهیم که C_i ، برای $i = 1, 2$ ، دارای حداقل یک راس ویژه دور است. فرض کنید C_1 دارای راس ویژه دور نباشد. در نتیجه $\deg_G(c_i) \geq 3$ ، برای $i = 1, \dots, r$. به‌وضوح c_i ، برای $i = 1, 2, \dots, r$ ، یک راس پشتیبان است. فرض کنید c_j یک راس پشتیبان قوی برای برخی از $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ باشد. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام رئوس مجموعه‌ی

$$\bigcup_{i=1}^r (N[c_i]) - \{c_0, c_1, c_r\}$$

بدست آمده باشد. به‌وضوح c_0 یک راس پشتیبان قوی در G' است. طبق قضیه ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$$

چون c_j یک راس پشتیبان قوی در G است، داریم

$$n(G') \leq n(G) - (2r + 1) + 2$$

در نتیجه

$$fd_1(G') \leq (n(G) - (2r + 1) + 2 - 1)/2 + k - 1$$

طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $c_o \in S'$ و همچنین $S' \cup \{c_1, \dots, c_r\}$ یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر

$$(n(G) - (2r + 1) + 2 - 1)/2 + k - 1 + r = n(G)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$$

این یک تناقض است.

درنتیجه c_i ، برای $i = 1, 2, \dots, r$ ، یک راس پشتیبان ضعیف است. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام رئوس مجموعه‌ی $\cup_{i=1}^r (N[c_i]) - \{c_o\}$ بدست آمده باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. اگر $c_o \notin S'$ آنگاه $S' \cup \{u_1, \dots, u_r\}$ یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$ بوده، که در آن u_i برگ متصل به راس c_i ، برای $i = 1, 2, \dots, r$ ، این یک تناقض است. درنتیجه $c_o \in S'$. دراین صورت $S' \cup \{c_1, \dots, c_r\}$ یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر

$$(n(G) - 1)/2 + k - 1 < (n(G) - 1)/2 + k$$

بوده، این یک تناقض است.

درنتیجه C_1 دارای حداقل یک راس ویژه دور است. به همین ترتیب C_2 نیز دارای حداقل یک راس ویژه دور است. فرض کنید c_t راس ویژه دور C_1 باشد و c'_h راس ویژه دور C_2 باشد. نشان می‌دهیم c_t یکتا است. به برهان خلف فرض کنید C_1 دارای حداقل دو راس ویژه دور باشد. فرض کنید $\deg_G(c'_{h+1}) = 2$. فرض کنید $G' = G - c'_h c'_{h+1}$ و همچنین S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$. اگر $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k - 1$ ، آنگاه طبق فرض استقرا $G' \in \mathcal{G}_{k-1}$ ، که این یک تناقض با مشاهده‌ی ۱.۳.۵ (۱) است، چون C_1 دارای حداقل دو راس ویژه دور است. درنتیجه $fd_1(G') < (n(G') - 1)/2 + k - 1$. اگر

$$|S' \cap \{c'_h, c'_{h+1}\}| \in \{0, 2\}$$

آنگاه S' یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1$ بوده، این یک تناقض است. درنتیجه

$$|S' \cap \{c'_h, c'_{h+1}\}| = 1$$

بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $c'_h \in S'$. درنتیجه $\{c'_{h+1}\} \cup S'$ یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k$ ، این یک تناقض است. درنتیجه فرض می‌کنیم $\deg_G(c'_{h+1}) \geq 3$. این نتیجه می‌دهد $\deg_G(c'_{h-1}) \geq 3$. چون C_2 یک دور - برگی است،

c'_h تنها راس برشی ویژه در این دور است. در نتیجه می‌توانیم بدون کاسته از کلیت، فرض کنیم $c'_{h+1} \neq c'_h$. به‌وضوح c'_{h+1} یک راس پشتیبان است. فرض کنید $G' = G - c'_h c'_{h-1}$ و S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. به‌وضوح c'_{h+1} یک راس پشتیبان قوی در G' است. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم

$$fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$$

اگر $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k - 1$ ، آنگاه طبق فرض استقرا $G' \in \mathcal{G}_{k-1}$. که این یک تناقض با مشاهده‌ی ۱.۳.۵ (۱) است، چون C_1 دارای حداقل دو راس ویژه دور است. در نتیجه $fd_1(G') < (n(G') - 1)/2 + k - 1$. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، داریم $c'_{h+1} \in S'$. اگر $c'_{h-1} \notin S'$ ، آنگاه S' یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1$ بوده، این یک تناقض است. در نتیجه $c'_{h-1} \in S'$. حال $S' \cup \{c'_h\}$ یک FD - مجموعه در G است، در نتیجه

$$fd_1(G) \leq |S'| + 1 < (n(G) - 1)/2 + k$$

این یک تناقض است. در نتیجه c_t تنها راس ویژه دور C_1 است. به همین ترتیب c'_h تنها راس ویژه دور C_2 است. $\square$

فرض کنید c_t تنها راس ویژه دور C_1 بوده و c'_h تنها راس ویژه دور C_2 باشد.

ادعای ۵. C_i ، برای $i = 1, 2$ ، شامل هیچ راس پشتیبان قوی نیست.

اثبات ادعای ۵. فرض کنید $c_j \in C_1$ یک راس پشتیبان قوی باشد. چون C_2 یک دور - برگی است، c'_h تنها راس برشی ویژه از آن دور است. در نتیجه می‌توانیم بدون کاسته از کلیت فرض کنیم c'_{h+1} یک راس پشتیبان از گراف G است. فرض کنید $G' = G - c'_h c'_{h-1}$ و S' یک $fd_1(G')$ - مجموعه باشد. به‌وضوح c'_{h+1} یک راس پشتیبان قوی در G' است. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵، داریم $fd_1(G') \leq (n(G') - 1)/2 + k - 1$. اگر $fd_1(G') = (n(G') - 1)/2 + k - 1$ ، آنگاه طبق فرض استقرا $G' \in \mathcal{G}_{k-1}$. که این یک تناقض با مشاهده‌ی ۱.۳.۵ بخش (۱) است، چون C_1 دارای راس پشتیبان قوی است. در نتیجه $fd_1(G') < (n(G') - 1)/2 + k - 1$. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، داریم $c'_{h+1} \in S'$. اگر $c'_{h-1} \notin S'$ ، آنگاه S' یک FD - مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 1$ بوده، این یک تناقض است. در نتیجه $c'_{h-1} \in S'$. حال $S' \cup \{c'_h\}$ یک FD - مجموعه در G است، در نتیجه $fd_1(G) \leq |S'| + 1 < (n(G) - 1)/2 + k$. این یک تناقض است. نشان دادیم C_1 دارای هیچ راس پشتیبان قوی نیست. به همین ترتیب C_2 نیز دارای هیچ راس پشتیبان قوی نیست. $\square$

نشان دادیم c_i ، برای $i \in \{1, 2, \dots, r\} - \{t\}$ ، یک راس پشتیبان ضعیف است و همچنین c'_i ، برای $i \in \{1, 2, \dots, r'\} - \{h\}$ یک راس پشتیبان ضعیف است. برای هر $i \in \{1, 2, \dots, r\} - \{t\}$ فرض کنید u_i برگ متصل به c_i باشد. فرض کنید G'_r مولفه‌ای از $G - c_o c_1 - c_o c_r$ باشد که شامل راس c_o باشد، همچنین G^* گرافی باشد که از G'_r با اضافه کردن یک برگ v^* به راس c_o بدست آمده باشد. به‌وضوح $n(G^*) = n(G) - 2r + 2$. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۵ داریم

$$fd_1(G^*) \leq (n(G^*) - 1)/2 + k - 1$$

فرض کنید $1 \leq fd_1(G^*) < (n(G^*) - 1)/2 + k - 1$. فرض کنید S^* یک $fd_1(G^*)$ -مجموعه باشد. اگر $c_0 \in S^*$ ، آنگاه $S^* \cup \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر

$$\begin{aligned} (n(G^*) - 1)/2 + k - 1 + r &= (n(G) - 2r + 2 - 1)/2 + k - 1 + r \\ &= (n(G))/2 + k - 1 \end{aligned}$$

بوده، این یک تناقض است. در نتیجه $c_0 \notin S^*$. در این صورت $v^* \in S^*$. اگر $t > 1$ ، آنگاه

$$S^* - \{v^*\} \cup \{c_1, \dots, c_{t-1}\} \cup \{u_{t+1}, \dots, u_r\}$$

یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر

$$\begin{aligned} (n(G^*) - 1)/2 + k - 1 - 1 + r - 1 &= (n(G) - 2r + 2 - 1)/2 + k - 1 - 1 + r - 1 \\ &= (n(G) - 1)/2 + k - 2 \end{aligned}$$

بوده، این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $t = 1$. در این صورت

$$S^* - \{v^*\} \cup \{c_2, \dots, c_r\}$$

یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(n(G) - 1)/2 + k - 2$ بوده، این یک تناقض است. بنابراین $fd_1(G^*) = (n(G^*) - 1)/2 + k - 1$. حال طبق فرض استقرا $G^* \in \mathcal{G}_{k-1}$. فرض کنید H^* گراف بدست آمده از

$$G[\{c_0, c_1, \dots, c_r, u_1, \dots, u_{t-1}, u_{t+1}, \dots, u_r\}]$$

با اضافه کردن یک برگ به c_0 باشد. به وضوح $H^* \in \mathcal{H}_1$. در این صورت G از $G^* \in \mathcal{G}_{k-1}$ و $H^* \in \mathcal{H}_1$ با اعمال فرایند A بدست آمده است. بنابراین $G \in \mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{G}_k$. برای طرف برگشت قضیه، طبق نتیجه‌ی ۱.۳.۵ داریم $V(G) - L(G)$ تنها $fd_1(G)$ -مجموعه است. حال مشاهده‌ی ۱.۳.۵ نشان می‌دهد که $fd_1(G) = (n - 1)/2 + k$.

□

در نهایت قضیه اصلی این فصل که با استفاده از قضیه فوق و قضیه‌ی ۱.۱.۵ بدست می‌آید را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۵. اگر G یک کاکتوس گراف از مرتبه‌ی $n \geq 5$ با $k \geq 1$ دور باشد، آنگاه

$$fd_1(G) \leq (n - 1)/2 + k$$

و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $G = C_5$ یا $G \in \mathcal{G}_k$.

فصل ۶

عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های مسطح خارجی

در این فصل کران بالا برای عدد احاطه‌گری منصف در گراف‌های مسطح خارجی با استفاده از تعداد بلوک‌های-قوی گراف ارائه می‌دهیم و سپس نشان می‌دهیم که این کران، کران قضیه ۲.۵.۲ را بهبود می‌دهد. در پایان حدس ۱.۲.۶ را بیان می‌کنیم.

۱.۶ تعاریف و مشاهدات اولیه

در یک گراف مسطح خارجی G یک بلوک K را بلوک-قوی گوییم هرگاه K شامل حداقل سه راس باشد.

یک راس w در یک بلوک-قوی K از یک گراف مسطح خارجی را راس-برشی ویژه گوییم اگر w عضو کوتاه‌ترین مسیر بین بلوک K و بلوک-قوی $K' \neq K$ باشد.

یک بلوک-قوی K از یک گراف مسطح خارجی G را بلوک-برگی گوییم اگر شامل دقیقاً یک راس-برشی ویژه باشد. تعداد بلوک‌های-قوی یک گراف مسطح خارجی را با $r(G)$ نشان می‌دهیم.

مشاهده ۱.۱.۶. هر گراف مسطح خارجی با حداقل دو بلوک-قوی، شامل حداقل دو بلوک-برگی است.

در ادامه به قضیه زیر که در [۳۴] آمده است نیازمندیم که در زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۶. [۳۴] یک گراف مسطح خارجی G همیلتونی است اگر و تنها اگر ۲-همبند باشد.

۲.۶ کران بالا

قضیه ۱.۲.۶. اگر G یک گراف مسطح خارجی از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m با $r \geq 1$ بلوک-قوی باشد، آنگاه $r - \frac{4m - 3n + 3}{2} \leq fd(G)$ و این کران قابل دسترسی است.

برهان. فرض کنید G یک گراف مسطح خارجی از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m با $r \geq 1$ بلوک-قوی باشد. نشان می‌دهیم که $r - \frac{4m - 3n + 3}{2} \leq fd_1(G)$. طبق قضیه‌ی ۲.۵.۴ اگر G یک گراف تک دوری باشد آنگاه حکم صادق است. در نتیجه فرض کنید G تک دوری نباشد. به برهان خلف فرض کنید $r - \frac{4m - 3n + 3}{2} > fd_1(G)$. فرض کنید G دارای کمترین مرتبه در بین این گراف‌ها بوده و همچنین فرض کنید دارای کمترین اندازه در بین این گراف‌ها باشد. فرض کنید $K_1, K_2, \dots, K_r$ بلوکهای-قوی از G باشند. طبق قضیه‌ی ۱.۱.۶، داریم K_j برای $1 \leq j \leq r$ همیلتونی است. فرض کنید $C^i = c_1^i c_2^i \dots c_{l_i}^i$ یک دور همیلتونی برای بلوک-قوی K_i ، برای $1 \leq i \leq r$ باشد. ادعاهای ۱ و ۲ را در زیر ثابت می‌کنیم.

ادعای ۱. برای هر $1 \leq i \leq r$ ، اگر c_j^i یک راس از درجه دو از C^i باشد، برای برخی $j \in \{0, 1, \dots, l_i\}$ آنگاه $\deg_G(c_{j+1}^i) \geq 3$ و همچنین $\deg_G(c_{j-1}^i) \geq 3$.

اثبات ادعای ۱. فرض کنید $\deg_G(c_j^i) = 2$ برای یک $j \in \{0, 1, \dots, l_i\}$. فرض کنید $\deg_G(c_{j+1}^i) = 2$. فرض کنید $G' = G - c_j^i c_{j+1}^i$. به وضوح $r - 1 \leq r(G') \leq r$. طبق انتخاب گراف G داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G') &\leq (4m(G') - 3n(G') + 3)/2 - r(G') \\ &\leq (4(m-1) - 3n + 3)/2 - (r-1) \\ &= (4m - 3n + 3)/2 - r - 1 \end{aligned}$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $|S' \cap \{c_j^i, c_{j+1}^i\}| \in \{0, 2\}$ ، آنگاه S' یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $r - 1 - \frac{4m - 3n + 3}{2}$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq \frac{4m - 3n + 3}{2} - r - 1$ ، این یک تناقض است. در نتیجه $|S' \cap \{c_j^i, c_{j+1}^i\}| = 1$. فرض کنید $c_j^i \in S'$. در این صورت $c_{j+1}^i \notin S'$ و $c_{j+2}^i \in S'$ چون S' یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. در نتیجه $\{c_{j+1}^i\} \cup S'$ یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $r - \frac{4m - 3n + 3}{2}$ و همچنین $fd_1(G) \leq \frac{4m - 3n + 3}{2} - r$ ، این یک تناقض است. در ادامه فرض کنید $c_{j+1}^i \in S'$. در نتیجه $c_j^i \notin S'$ و $c_{j-1}^i \in S'$ در این صورت $\{c_j^i\} \cup S'$ یک FD -مجموعه برای G

از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r$ و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$ این یک تناقض است بنابراین $\deg_G(c_{j+1}^i) \geq 3$. به همین ترتیب $\deg_G(c_{j-1}^i) \geq 3$. □
ادعای ۲. اگر c_j^i یک راس از درجه دو از C^i ، برای برخی $j \in \{0, 1, \dots, l_i\}$ باشد، آنگاه هیچ یک از رئوس c_{j+1}^i و c_{j-1}^i راس پشتیبان نیستند.

اثبات ادعای ۲. فرض کنید $\deg_G(c_j^i) = 2$ ، برای یک $j \in \{0, 1, \dots, l_i\}$. فرض کنید c_{j+1}^i یک راس پشتیبان باشد فرض کنید $G' = G - c_j^i c_{j-1}^i$. به وضوح $r - 1 \leq r(G') \leq r$. طبق انتخاب گراف G داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G') &\leq (4m(G') - 3n(G') + 3)/2 - r(G') \\ &\leq (4(m-1) - 3n + 3)/2 - (r-1) \\ &= (4m - 3n + 3)/2 - r - 1 \end{aligned}$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. طبق مشاهدۀ ۱.۴.۲ داریم $c_{j+1}^i \in S'$ چون c_{j+1}^i یک پشتیبان قوی از G' است. اگر $c_{j-1}^i \notin S'$ ، آنگاه S' یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r - 1$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r - 1$ ، این یک تناقض است. در نتیجه $c_{j-1}^i \in S'$. در این صورت $\{c_j^i\} \cup S'$ یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r$ و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$ ، این یک تناقض است. بنابراین یک راس پشتیبان از G نیست. به همین ترتیب c_{j-1}^i یک راس پشتیبان از G نیست. □
 حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $r = 1$. ابتدا فرض کنید $V(G) = \{c_0^1, c_1^1, \dots, c_{l_1}^1\}$ و همچنین $n = l_1 + 1$ طبق حقیقت ۱ حداقل $\lceil n/2 \rceil$ راس از C^1 از درجه‌ی حداقل ۳ هستند. حال به راحتی می‌توان دید که

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq n + \lceil n/2 \rceil / 2$$

چون $\delta(G) \geq 2$ و حداقل $\lceil n/2 \rceil$ راس از درجه‌ی حداقل ۳ داریم، در نتیجه

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 2n + \lceil n/2 \rceil$$

بنابراین $m \geq n + \lceil n/2 \rceil / 2$. اگر n زوج باشد، آنگاه $n \leq (4m - 3n)/2$ و اگر n فرد باشد، آنگاه $n \leq (4m - 3n - 1)/2$. بدست می‌آوریم که $n \leq (4m - 3n + 3)/2 - 1$. در این صورت $V(G)$ یک $1FD$ -مجموعه برای G از مرتبه‌ی n بوده و در نتیجه $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - 1$ ، این یک تناقض است. نشان دادیم که $V(G) \neq \{c_0^1, c_1^1, \dots, c_{l_1}^1\}$. چون $r = 1$ ، وجود دارد راسی از درجه یک در G . فرض کنید v_d برگه‌ی G باشد به طوری که $d(v_d, C^1)$ از بیشترین مقدار باشد. فرض کنید $v_0 v_1 \dots v_d$ کوتاه‌ترین مسیر بین v_d تا راس $v_0 \in C^1$ باشد. به وضوح

$$\{v_0, v_1, \dots, v_d\} \cap V(C^1) = \{v_0\}$$

فرض کنید $d \geq 2$. فرض کنید $\deg_G(v_{d-1}) = 2$. حال فرض کنید $G' = G - \{v_d, v_{d-1}\}$. به‌وضوح $r(G') = r$. طبق انتخاب G ، داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G') &\leq (4m(G') - 3n(G') + 3)/2 - r(G') \\ &= (4(m-2) - 3(n-2) + 3)/2 - 1 \\ &= (4m - 3n + 3)/2 - 2 \end{aligned}$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-2} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - 1$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - 1$ ، این یک تناقض است. بنابراین $v_{d-2} \in S'$. در نتیجه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - 1$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - 1$ ، این یک تناقض است. بنابراین فرض کنید $\deg_G(v_{d-1}) \geq 3$. به‌وضوح هر راس از $N_G(v_{d-1}) - \{v_{d-2}\}$ یک برگ است. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام برگ‌های متصل به راس v_{d-1} بدست آید. به‌وضوح $r(G') = r$.

طبق انتخاب G ، داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G') &\leq (4m(G') - 3n(G') + 3)/2 - r(G') \\ &\leq (4(m-2) - 3(n-2) + 3)/2 - 1 \\ &= (4m - 3n + 3)/2 - 2 \end{aligned}$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ ، آنگاه S' یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - 2$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - 2$ ، این یک تناقض است. در نتیجه فرض کنید $v_{d-1} \notin S'$. در این صورت $v_{d-2} \in S'$. حال $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - 1$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - 1$ ، این یک تناقض است. در ادامه فرض کنید $d = 1$. فرض کنید $D_1 = \{c_j \mid \deg_G(c_j) = 2\}$ و فرض کنید D_2 مجموعه‌ی تمام c_j هایی باشد که c_j یک راس پشتیبان در گراف G باشد و همچنین فرض کنید D_3 مجموعه‌ی تمام c_j هایی باشد که c_j یک راس پشتیبان در گراف G نباشد. به‌وضوح $|D_1| + |D_2| + |D_3| = l_1 + 1$. چون $d = 1$ ، داریم $|D_2| \geq 1$. طبق ادعاهای ۱ و ۲ داریم $|D_1| \leq |D_3|$. توجه داشته باشید که

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq n + |D_3|/2$$

به‌وضوح $n \geq l_1 + 1 + |D_2|$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
 (4m - 3n + 3)/2 - 1 &\geq (4(n + |D_2|/2) - 3n + 3)/2 - 1 \\
 &\geq (l_1 + 1 + |D_2| + 2|D_3| + 3)/2 - 1 \\
 &\geq (l_1 + 1 + |D_1| + |D_2| + |D_3| + 3)/2 - 1 \\
 &= l_1 + 3/2 > l_1 + 1.
 \end{aligned}$$

در نتیجه $\{c_1^1, \dots, c_l^1\}$ یک $fd_1(G)$ - مجموعه از اندازه‌ی حداکثر $l_1 + 1$ است. در این صورت $fd_1(G) < (4m - 3n + 3)/2 - r$ ، این یک تناقض است.

حالت ۲. $r \geq 2$. طبق مشاهده‌ی ۱.۱.۶ داریم، G دارای حداقل دو بلوک-برگی است. فرض کنید K_i یک بلوک-برگی از G باشد که در آن $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. فرض کنید c_i^i یک راس-ویژه برشی از G باشد. فرض کنید G' گراف بدست آمده از G با حذف تمام یال‌های $c_i^i c_j^i$ ، که در آن $c_j^i \in \{c_1^i, \dots, c_{l_i}^i\}$. به وضوح G' دارای دو مولفه است. فرض کنید G'_1 مولفه‌ای از G' باشد که شامل c_i^i ، همچنین G'_1 مولفه‌ای از G' باشد که شامل c_i^i باشد. به وضوح $\{c_1^i, c_2^i, \dots, c_{l_i}^i\} \subseteq V(G'_1)$. حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۲.۱. $V(G'_1) = \{c_1^i, c_2^i, \dots, c_{l_i}^i\}$. فرض کنید $G_1^* = G[V(G'_1) \cup \{c_i^i\}]$. به وضوح $n(G_1^*) = l_i + 1$. طبق ادعای ۱، حداقل $\lfloor l_i/2 \rfloor$ راس از $C^i - c_i^i$ از درجه حداقل ۳ است. فرض کنید l_i زوج باشد. در این صورت حداقل $l_i/2$ راس از $C^i - c_i^i$ از درجه‌ی حداقل ۳ است. حال، به راحتی می‌توان دید که

$$m(G_1^*) = \frac{1}{4} \sum_{v \in V(G_1^*)} \deg(v) \geq l_i + 1 + l_i/4$$

فرض کنید

$$G_2^* = G[V(G'_1) \cup \{c_1^i, c_{l_i}^i\}] - \{c_1^i c_{l_i}^i\}$$

به وضوح $n = n(G_2^*) + l_i - 2$ ، $m = m(G_2^*) + m(G_1^*) - 2$ و $r(G_2^*) = r - 1$. طبق انتخاب G داریم

$$fd_1(G_2^*) \leq (4m(G_2^*) - 3n(G_2^*) + 3)/2 - r(G_2^*)$$

فرض کنید S'' یک $fd_1(G_2^*)$ - مجموعه باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، داریم $c_i^i \in S''$ ، چون c_i^i یک راس پشتیبان قوی در G_2^* است. در نتیجه

$$S'' \cup \{c_1^i, c_2^i, \dots, c_{l_i}^i\}$$

یک FD - مجموعه برای G از مرتبه‌ی $|S''| + l_i$ است. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}
 (4m - 3n + 3)/2 - r &\geq (4(m(G_1^*) + m(G_1^*) - 2) - 3(n(G_1^*) + n(G_1^*) - 3) + 3)/2 - r \\
 &= (4m(G_1^*) - 3n(G_1^*) + 3)/2 - r(G_1^*) + (4m(G_1^*) - 3(l_i + 1) + 1)/2 - 1 \\
 &\geq |S''| + (4(l_i + 1 + l_i/4) - 3l_i - 2)/2 - 1 \\
 &= |S''| + l_i.
 \end{aligned}$$

در نتیجه $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$ ، این یک تناقض است.

در ادامه فرض کنید l_i فرد باشد. توجه داشته باشید که حداقل $(l_i - 1)/2$ راس از $C^i - c_o^i$ از مرتبه‌ی حداقل ۳ است. حال، به راحتی می‌توان دید که

$$m(G_1^*) = \frac{1}{4} \sum_{v \in V(G_1^*)} \deg(v) \geq l_i + 1 + (l_i - 1)/4$$

نشان می‌دهیم که $m(G_1^*) = l_i + 1 + (l_i - 1)/4$. فرض کنید $m(G_1^*) > l_i + 1 + (l_i - 1)/4$. در نتیجه $m(G_1^*) \geq l_i + 1 + (l_i - 1)/4 + 1/4$. فرض کنید $G_1^* = G[G_1' \cup \{c_1^i, c_{l_i}^i\}] - \{c_{l_i}^i c_1^i\}$. به وضوح $n = n(G_1^*) + l_i - 2$ و $m = m(G_1^*) + m(G_1^*) - 2$ ، همچنین $r(G_1^*) = r - 1$. طبق انتخاب G ، داریم $fd_1(G_1^*) \leq (4m(G_1^*) - 3n(G_1^*) + 3)/2 - r(G_1^*)$. فرض کنید S'' یک $fd_1(G_1^*) -$ مجموعه باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، داریم $c_o^i \in S''$ ، چون c_o^i یک راس پشتیبان قوی در G_1^* است. در نتیجه $S'' \cup \{c_1^i, c_1^i, \dots, c_{l_i}^i\}$ یک $FD -$ مجموعه برای G از مرتبه‌ی $|S''| + l_i$ است. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}
 (4m - 3n + 3)/2 - r &\geq (4(m(G_1^*) + m(G_1^*) - 2) - 3(n(G_1^*) + n(G_1^*) - 3) + 3)/2 - r \\
 &= (4m(G_1^*) - 3n(G_1^*) + 3)/2 - r(G_1^*) + (4m(G_1^*) - 3(l_i + 1) + 1)/2 - 1 \\
 &\geq |S''| + (4(l_i + 1 + (l_i - 1)/4 + 1/4) - 3l_i - 2)/2 - 1 \\
 &= |S''| + l_i.
 \end{aligned}$$

در نتیجه $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$ ، این یک تناقض است. نشان دادیم که

$|E(G_1^*) \cap E(C^i)| = l_i + 1$ توجه داشته باشید که $|E(G_1^*) \cap E(C^i)| = l_i + 1 + (l_i - 1)/4$. در نتیجه $|E(G_1^*) - E(C^i)| = (l_i - 1)/4$. چون $(l_i - 1)/2$ راس از $C^i - c_o^i$ از $C^i - c_o^i$ از درجه حداقل ۳ است، نتیجه می‌گیریم که، دقیقاً $(l_i - 1)/2$ راس از درجه ۳ داریم، همچنین $(l_i + 1)/2$ راس از درجه دو داریم. حال ادعای ۱ نشان می‌دهد که $\deg_G(c_1^i) = \deg_G(c_{l_i}^i) = 2$. در نتیجه داریم $\deg_{G_1^*}(c_o^i) = 2$ فرض کنید

$$A_1 = \{c_j \mid \deg_G(c_j^i) = 2, 1 \leq j \leq l_i\}$$

همچنین

$$A_2 = \{c_1^i, c_1^i, \dots, c_{l_i}^i\} - A_1$$

بهوضوح $|A_1| = (l_i + 1)/2$ و $|A_2| = (l_i - 1)/2$. توجه داشته باشید که $|A_2|$ ، چون تعداد رئوس فرد یک گراف زوج است. در نتیجه $|A_1|$ فرد است، چون l_i فرد بوده و $|A_1| + |A_2| = l_i$. در این صورت $|A_1| \geq 3$ ، چون $c_1^i, c_{l_i}^i \in A_1$. حال ادعای ۱ نشان می‌دهد که

$$A_1 = \{c_1^i, c_3^i, \dots, c_{(l_i+1)/2}^i, \dots, c_{l_i}^i\}$$

۹

$$A_2 = \{c_2^i, c_4^i, \dots, c_{l_i-1}^i\}$$

حقیقت ۱. وجود دارد دو راس مجاور $c_s^i, c_t^i \in A_2$ بهطوری که $|s - t| = 2$.
اثبات حقیقت ۱. توجه داشته باشید که $l_i \equiv 1$ (به پیمانه‌ی ۴) ف چون $\frac{l_i-1}{4}$ زوج است. اگر $l_i = 5$ ، آنگاه $c_2^i, c_4^i \in A_2$ رئوس مورد نظر هستند، چون این رئوس، تمام رئوس G^* از مرتبه‌ی ۳ هستند. در نتیجه فرض کنید $l_i \geq 9$. اگر

$$\{c_{\frac{l_i+1}{4}+1}^i, c_{\frac{l_i+1}{4}-3}^i\} \cap N(c_{\frac{l_i+1}{4}-1}^i) \neq \emptyset$$

آنگاه راس‌های $c_{\frac{l_i+1}{4}-1}^i$ و $\{c_{\frac{l_i+1}{4}+1}^i, c_{\frac{l_i+1}{4}-3}^i\} \cap N(c_{\frac{l_i+1}{4}-1}^i)$ زوج مطلوب است. در نتیجه فرض کنید

$$\{c_{\frac{l_i+1}{4}+1}^i, c_{\frac{l_i+1}{4}-3}^i\} \cap N(c_{\frac{l_i+1}{4}-1}^i) = \emptyset$$

بهوضوح وجود دارد یک راس $c_t^i \in A_2$ بهطوری که c_t^i به راس $c_{\frac{l_i+1}{4}-1}^i$ متصل است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $t < \frac{l_i+1}{4} - 3$. چون G گراف مسطح خارجی است

$$|A_2 \cap \{c_h^i : t+2 \leq h \leq \frac{l_i+1}{4} - 3\}|$$

زوج است. از طرفی، چون G یک گراف مسطح خارجی است، هر راس از

$$A_2 \cap \{c_h^i : t+2 \leq h \leq \frac{l_i+1}{4} - 3\}$$

به یک راس از

$$A_2 \cap \{c_h^i : t+2 \leq h \leq \frac{l_i+1}{4} - 3\}$$

متصل است. در نتیجه وجود دارد دو زوج

$$c_{h_1}^i, c_{h_2}^i \in A_2 \cap \{c_h^i : t+2 \leq h \leq \frac{l_i+1}{4} - 3\}$$

بهطوری که $c_{h_1}^i \in N(c_{h_2}^i)$ و $|h_1 - h_2| = 2$. □

فرض کنید c_t^i و c_{t+2}^i دو راس مجاور از A_2 باشند که در حقیقت ۱ صدق کنند. بهوضوح $\deg(c_{t+1}^i) = 2$. فرض کنید

$$G^* = G - c_t^i c_{t-1}^i - c_t^i c_{t+1}^i$$

به‌وضوح $n(G^*) = n$, $m(G^*) = m - 2$ و $r(G^*) \leq r$ و $r - 1 \leq r(G^*)$. طبق انتخاب G داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G^*) &\leq (4m(G^*) - 3n(G^*) + 3)/2 - r(G^*) \\ &\leq (4m - 3n + 3)/2 - r - 3 \end{aligned}$$

فرض کنید S^* یک $fd_1(G^*)$ -مجموعه باشد. چون c_{t+2}^i یک راس پشتیبان قوی در G^* است، طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲ داریم $c_{t+2}^i \in S^*$. اگر $c_{t-1}^i \notin S^*$ ، آنگاه S^* یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r - 3$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r - 3$ ، این یک تناقض است. در نتیجه $c_{t-1}^i \in S'$. در این صورت $S' \cup \{c_t^i, c_{t+1}^i\}$ یک FD -مجموعه در G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r - 1$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r - 1$ این یک تناقض است.

حالت ۲.۲ $V(G_1) \neq \{c_1^i, c_2^i, \dots, c_{t_i}^i\}$. چون K_i یک بلوک-برگی از G است، $G_1' - C_i$ دارای راسی از درجه‌ی حداکثر یک است. فرض کنید v_d برگ‌ی از G_1' باشد، به‌طوری‌که $d(v_d, C_i - c_i^i) \geq 1$ از بیشترین مقدار ممکن باشد، همچنین کوتاه‌ترین مسیر بین v_d تا C_i شامل راس c_i^i نباشد. فرض کنید $v_d \dots v_1 v_0$ ، کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین v_d تا راس $v_0 \in C_i$ باشد. فرض کنید $d \geq 2$. فرض کنید $\deg_G(v_{d-1}) = 2$ همچنین $G' = G - \{v_d, v_{d-1}\}$. به‌وضوح $r(G') = r$. طبق انتخاب G داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G') &\leq (4m(G') - 3n(G') + 3)/2 - r(G') \\ &= (4(m - 2) - 3(n - 2) + 3)/2 - r \\ &= (4m - 3n + 3)/2 - r - 1 \end{aligned}$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-2} \notin S'$ ، آنگاه $S' \cup \{v_d\}$ یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$ ، این یک تناقض است. در نتیجه $v_{d-2} \in S'$. آنگاه $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$ ، این یک تناقض است. نشان دادیم که $\deg_G(v_{d-1}) \geq 3$. به‌وضوح هر راس از $N_G(v_{d-1}) - \{v_{d-2}\}$ یک برگ است. فرض کنید G' از گراف G با حذف تمام برگ‌های متصل به راس v_{d-1} بدست آید. به‌وضوح $r(G') = r$. طبق انتخاب G داریم

$$\begin{aligned} fd_1(G') &\leq (4m(G') - 3n(G') + 3)/2 - r(G') \\ &\leq (4(m - 2) - 3(n - 2) + 3)/2 - r \\ &= (4m - 3n + 3)/2 - r - 1 \end{aligned}$$

فرض کنید S' یک $fd_1(G')$ -مجموعه باشد. اگر $v_{d-1} \in S'$ ، آنگاه S' یک FD -مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m - 3n + 3)/2 - r - 1$ بوده و همچنین

$v_{d-2} \in S'$ آنگاه $v_{d-1} \notin S'$ در نتیجه است. این یک تناقض است. $fd_1(G) \leq (4m-3n+3)/2-r-1$ حال $S' \cup \{v_{d-1}\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G از مرتبه‌ی حداکثر $(4m-3n+3)/2-r$ بوده و همچنین $fd_1(G) \leq (4m-3n+3)/2-r$ این یک تناقض است.

حال می‌توان فرض کرد $d=1$. فرض کنید $D_1 = \{c_j^i \mid \deg_G(c_j^i) = 2\}$ همچنین فرض کنید D_2 مجموعه تمام رئوس c_j^i باشد به‌طوری که c_j^i یک راس پشتیبان در G باشد و همچنین فرض کنید D_3 مجموعه تمام رئوس c_j^i باشد به‌طوری که c_j^i یک راس پشتیبان در G نباشد. به‌وضوح $|D_1| + |D_2| + |D_3| = l_i$. توجه داشته باشید که $|D_2| \geq 1$ چون $d=1$. در نتیجه طبق ادعاهای ۱ و ۲ داریم $|D_1| \leq |D_3|$. فرض کنید $G_1^* = G[G_1' \cup \{c_i^i\}]$. توجه داشته باشید که

$$m(G_1^*) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G_1^*)} \deg(v) \geq n(G_1^*) + |D_3|/2$$

در نتیجه $n(G_1^*) \geq l_i + 1 + |D_2|$ فرض کنید

$$G_2^* = [G_1^* \cup \{c_1^i, c_{l_i}^i\}] - \{c_{l_i}^i c_1^i\}$$

به‌وضوح $n = n(G_2^*) + n(G_1^*) - 3$ ، $m = m(G_2^*) + m(G_1^*) - 2$ و $r(G_2^*) = r - 1$. طبق انتخاب G داریم

$$fd_1(G_2^*) \leq (4m(G_2^*) - 3n(G_2^*) + 3)/2 - r(G_2^*)$$

فرض کنید S'' یک $fd_1(G_2^*)$ - مجموعه باشد. طبق مشاهده‌ی ۱.۴.۲، داریم $c_i^i \in S''$ ، چون c_i^i یک راس پشتیبان قوی از G_2^* است. در نتیجه $S'' \cup \{c_1^i, c_2^i, \dots, c_{l_i}^i\}$ یک $FD-1$ مجموعه برای G از مرتبه‌ی $|S''| + l_i$ است. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} (4m-3n+3)/2-r &\geq (4(m(G_2^*) + m(G_1^*) - 2) - 3(n(G_2^*) + n(G_1^*) - 3) + 3)/2 - r \\ &= (4m(G_2^*) - 3n(G_2^*) + 3)/2 - r(G_2^*) + (4m(G_1^*) - 3n(G_1^*) + 1)/2 - 1 \\ &\geq |S''| + (4(n(G_2^*) + |D_3|/2) - 3n(G_2^*) + 1)/2 - 1 \\ &= |S''| + (n(G_2^*) + 2|D_3| + 1)/2 - 1 \\ &\geq |S''| + (l_i + 1 + |D_2| + 2|D_3| + 1)/2 - 1 \\ &\geq (l_i + |D_2| + |D_3| + |D_1|)/2 \geq |S''| + l_i. \end{aligned}$$

در نتیجه $fd_1(G) \leq |S''| + l_i \leq (4m-3n+3)/2-r$ این یک تناقض است.

□

در پایان توجه داشته باشید که C_5 در این کران دقیق است.

توجه داشته باشید که در [۱۳] کارو و دیگر همکاران نشان دادند که برای یک گراف مسطح خارجی بابیشترین یال ممکن $17n/19$ است. حال توجه داشته باشید که هر گراف

مسطح خارجی G با بیشترین یال، ۲-همبند است [۲۲]، در نتیجه $r(G) = 1$. بنابراین کران قضیه ۱.۲.۶ کران $17n/19$ را وقتی $4m < \frac{91n}{19} - 1$ باشد، بهبود می‌بخشد. این فصل را با حدس زیر به پایان می‌بریم.

حدس ۱.۲.۶. اگر G یک گراف از مرتبه n و اندازه‌ی m با $r \geq 1$ بلوک-قوی باشد، آنگاه

$$fd(G) \leq (4m - 3n + 3)/2 - r$$

فصل ۷

کران جدید برای عدد احاطه‌گری دوگانه

در این فصل یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری دوگانه گراف بیان می‌کنیم و تمام گراف‌هایی که در این کران دقیق هستند را مشخص می‌کنیم.

۱.۷ کران چلالی

چلالی در [۱۸] نشان داد که اگر T درختی از مرتبه‌ی n با ℓ برگ و s راس پشتیبان باشد، آنگاه $\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3$. ایشان همچنین تمام گراف‌هایی که در این کران دقیق هستند را نیز مشخص کردند. برای رسیدن به این هدف ایشان خانواده‌ای از درخت‌ها را به صورت زیر ساختند. فرض کنید که $\mathcal{G}_0$ خانواده تمام درخت‌های $T = T_k$ باشد که به صورت زیر ساخته می‌شود. فرض کنید $T_1 = P_2 = uv$ و $A(T_1) = \{u, v\}$. اگر $k \geq 2$ ، آنگاه T_{i+1} از T_i بصورت بازگشتی توسط یکی از عملگرهای زیر ساخته شود.

عملگر $\mathcal{O}_1$: فرض کنید v راس پشتیبانی از درخت T_i باشد. آنگاه درخت T_{i+1} از درخت T_i با اضافه کردن راس z و اتصال آن به راس v بدست می‌آید. فرض کنید $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{z\}$.

عملگر $\mathcal{O}_2$: فرض کنید d راسی از $A(T_i)$ باشد، به‌طوری‌که اگر d برگی از درخت T_i باشد آنگاه راس پشتیبان آن یک راس پشتیبان قوی نباشد. آنگاه درخت T_{i+1} از درخت T_i با اضافه کردن

مسیر $P_3 = abc$ و اتصال راس c به راس d بدست می‌آید. فرض کنید $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{a, b\}$.

قضیه ۱.۱.۷. [۱۸] اگر T درختی غیر بدیهی از مرتبه‌ی n با ℓ برگ و s راس پشتیبان باشد، آنگاه $\gamma_{\times 2}(T) \geq (2n + \ell - s + 2)/3$ و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $T \in \mathcal{G}_0$.

مشاهده ۱.۱.۷. [۱۸] هر مجموعه احاطه‌گر دوگانه در گراف G شامل تمام رئوس پشتیبان گراف G است.

۲.۷ کران جدید

در این بخش یک کران پایین جدید برای عدد احاطه‌گری دوگانه در گراف‌های همبند ارائه می‌کنیم، همچنین تمام گراف‌هایی که در این کران دقیق هستند را مشخص می‌کنیم. در ادامه برای یک گراف G تعداد دورهای گراف را با $k(G)$ نشان می‌دهیم.

۱.۲.۷ خانواده‌ی گراف‌ها

ابتدا در نظر داشته باشید که در یک گراف G ، یک $\gamma_{\times 2}(G)$ - مجموعه S را $\gamma_{\times 2}(G)$ - مجموعه ویژه گوئیم هرگاه S شامل حداقل دو راس x و y ، به آن‌ها راس‌های ویژه از S گوئیم، به‌طوری‌که کوتاه‌ترین مسیر بین این دو راس شامل هیچ یالی از یک دور گراف G نباشد و همچنین اگر x یا y برگ‌ی از گراف باشند، آنگاه راس پشتیبان آن یک راس پشتیبان قوی نباشد. به‌وضوح برای هر درخت $T \in \mathcal{G}_0$ هر $\gamma_{\times 2}(T)$ - مجموعه یک $\gamma_{\times 2}(T)$ - مجموعه‌ی ویژه است. حال یکسری از خانواده‌ی گراف‌ها را می‌سازیم. فرض کنید $\mathcal{G}_0$ خانواده‌ای باشد که در بخش ۱.۷ معرفی شدند. برای $i = 1, \dots, k$ خانواده‌ی $\mathcal{G}_i$ از $\mathcal{G}_{i-1}$ به‌صورت بازگشتی، به‌صورت زیر می‌سازیم.

• **فرایند B:** برای هر i ، $1 \leq i \leq k$ ، فرض کنید $\mathcal{G}_i$ خانواده‌ی تمام گراف‌های G_i باشد، به‌طوری‌که G_i از یک گراف $G_{i-1} \in \mathcal{G}_{i-1}$ با یک $\gamma_{\times 2}(G_{i-1})$ - مجموعه ویژه S_{i-1} ، با اضافه کردن یک راس جدید و اتصال این راس به دقیقاً دو راس ویژه از S_{i-1} بدست آید.

مشاهده‌ی زیر به سادگی از تعریف خانواده‌های فوق بدست می‌آید.

مشاهده ۱.۲.۷. برای $k \geq 0$ ، هر گراف $G \in \mathcal{G}_k$ دارای دقیقاً k دور است.

توجه داشته باشید که به‌سادگی می‌توان نشان داد که $G \in \mathcal{G}_k$ ، برای هر $k \geq 0$ ، یک کاکتوس گراف است.

۲.۲.۷ کران پایین

در این بخش قضیه‌ی اصلی این فصل را بیان می‌کنیم. ما کران پایین جدیدی برای عدد احاطه‌گری دوگانه برحسب مرتبه و تعداد دورهای گراف ارائه می‌کنیم همچنین تمام گراف‌هایی که در این کران دقیق هستند را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۷. اگر G یک گراف همبند از مرتبه‌ی $n \geq 2$ با $k \geq 0$ دور، ℓ برگ و s راس پشتیبان باشد، آنگاه $\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G}_k$.

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه‌ی $n \geq 2$ با $k \geq 0$ دور، ℓ برگ و s راس پشتیبان باشد. با استفاده از استقرا روی k نشان می‌دهیم که $\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$ و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G}_k$. برای گام اول استقرا فرض کنید $k = 0$. در این صورت G یک درخت است، در نتیجه حکم طبق قضیه‌ی ۱.۱.۷ برقرار است. فرض کنید حکم برای تمام گراف‌های G' با $k < k' \leq 0$ برقرار باشد. حال گراف G با $k \geq 1$ دور در نظر می‌گیریم. ابتدا نشان می‌دهیم $\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$. فرض کنید S یک $\gamma_{\times 2}(G)$ -مجموعه باشد، همچنین $C = u_1 u_2 \dots u_r u_1$ یک دور از گراف G باشد. اگر $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} \subseteq S$ ، آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر دوگانه برای گراف $G' = G - u_1 u_2$ بوده، در نتیجه طبق فرض استقرا

$$|S| \geq \gamma_{\times 2}(G') \geq (2n + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2k(G')/3$$

به‌وضوح $k(G') \leq k - 1$ و $\ell - s \leq \ell(G') - s(G')$ در نتیجه

$$\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2(k - 1)/3 > (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$$

در ادامه فرض کنید $u_j \notin S$ ، برای برخی از $1 \leq j \leq r$. طبق مشاهده‌ی ۱.۱.۷، u_j یک راس پشتیبان از گراف G نیست. فرض کنید $G'_1, G'_2, \dots, G'_w$ مولفه‌های $G - u_j$ باشند. به‌وضوح $S \cap V(G'_i)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر دوگانه در G'_i است، برای $1 \leq i \leq w$. از طرف دیگر $n(G'_i) \geq 2$ ، برای هر $1 \leq i \leq w$ ، چون u_j یک راس پشتیبان در گراف G نیست. در نتیجه، طبق فرض استقرا

$$|S| \geq \sum_{i=1}^w (\gamma_{\times 2}(G'_i) + \ell(G'_i) - s(G'_i) + 2)/3 - 2k(G'_i)/3$$

توجه داشته باشید که $\ell - s \leq \sum_{i=1}^w \ell(G'_i) - s(G'_i)$ و $k - 1 \geq \sum_{i=1}^w k(G'_i)$ ، در نتیجه

$$|S| \geq (2(n - 1) + \ell - s + 2w)/3 - 2(k - 1)/3 \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$$

و بنابراین

$$\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $\gamma_{\times 2}(G) = (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$ اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G}_k$. فرض کنید $\gamma_{\times 2}(G) = (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$. فرض کنید S یک $\gamma_{\times 2}(G)$ -مجموعه باشد، همچنین $C = u_1 u_2 \dots u_r u_1$ یک دور از G باشد. طبق بخش اول اثبات، داریم $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} \not\subseteq S$. در این صورت وجود دارد یک عدد صحیح j ، $1 \leq j \leq r$ ، به‌طوری‌که $u_j \notin S$. فرض کنید $\deg_G(u_j) \geq 3$. به‌وضوح طبق مشاهده‌ی ۱.۱.۷، u_j یک راس پشتیبان در G نیست. فرض کنید $G'_1, G'_2, \dots, G'_w$ مولفه‌های $G - u_j$ باشند. به‌وضوح $w \geq 2$. توجه داشته باشید $S \cap G'_i$ یک مجموعه احاطه‌گر دوگانه در G'_i ، برای هر $1 \leq i \leq w$ ، باشد. آنگاه طبق فرض استقرا

$$|S| \geq \sum_{i=1}^w (2(n(G'_i) + \ell(G'_i) - s(G'_i) + 2)/3 - 2k(G'_i)/3)$$

به‌وضوح $k - 1 \geq \sum_{i=1}^w k(G'_i)$ و $\ell - s \leq \sum_{i=1}^w (\ell(G'_i) - s(G'_i))$ در نتیجه

$$|S| \geq (2(n - 1) + \ell - s + 2w)/3 - 2(k - 1)/3 \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2(k - 1)/3$$

و همچنین

$$\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3 + 2/3$$

این یک تناقض است. در نتیجه $\deg_G(u_j) = 2$. واضح است که $\{u_{j-1}, u_{j+1}\} \subseteq S$ چون S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر دوگانه از G است و $u_j \notin S$. فرض کنید $G' = G - u_j$. به‌وضوح S یک مجموعه احاطه‌گر دوگانه در G' است. طبق فرض استقرا

$$|S| \geq (2(n(G') + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2k(G')/3)$$

فرض کنید

$$|S| > (2(n(G') + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2k(G')/3)$$

به‌وضوح $k(G') \leq k - 1$ و $\ell - s \leq (\ell(G') - s(G'))$. آنگاه

$$|S| > (2(n - 1) + \ell - s + 2)/3 - 2(k - 1)/3 \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$$

و همچنین

$$\gamma_{\times 2}(G) > (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$$

این یک تناقض است. در نتیجه $|S| = (2(n(G') + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2k(G')/3)$. طبق فرض استقرا $G' \in \mathcal{G}_{k(G')}$. فرض کنید کوتاه‌ترین مسیر بین u_{j-1} و u_{j+1} شامل یک یال از یک دور از G' باشد. در این صورت $k(G') \leq k - 2$. در نتیجه

$$|S| \geq (2(n(G') + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2(k - 2)/3)$$

$$\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3 + 2/3$$

این یک تناقض است. در نتیجه کوتاه ترین مسیر بین u_{j+1} و u_{j-1} شامل هیچ یال از دور از G' نیست. در نتیجه $k(G') = k - 1$ و همچنین $G' \in \mathcal{G}_{k-1}$. اگر $\{u_{j-1}, u_{j+1}\} \cap L(G') = \emptyset$ ، آنگاه u_{j+1} و u_{j-1} دو راس ویژه از S هستند و S یک $\gamma_{\times 2}(G')$ - مجموعه ویژه است. در نتیجه G از G' و u_j با فرایند B بدست می آید، در نتیجه $G \in \mathcal{G}_k$. حال فرض کنید $\{u_{j-1}, u_{j+1}\} \cap L(G') \neq \emptyset$. فرض کنید $u_{j+1} \in L(G')$. در نتیجه u_{j+2} یک راس پشتیبان از G' است. فرض کنید u_{j+2} یک پشتیبان قوی از G' است. در نتیجه $\ell(G') - s(G') < \ell - s$ و همچنین

$$\begin{aligned} |S| &= (2n(G') + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2(k-1)/3 \\ &> (2(n-1) + \ell - s + 2)/3 - 2(k-1)/3 \\ &= (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3 \end{aligned}$$

در نتیجه $\gamma_{\times 2}(G) > (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$ ، این یک تناقض است. نشان دادیم که u_{j+2} یک راس پشتیبان قوی از G' نیست. به همین ترتیب اگر $u_{j-1} \in L(G')$ آنگاه u_{j-2} یک راس پشتیبان قوی از G' نیست. در این صورت u_{j+1} و u_{j-1} دو راس ویژه از S هستند و S یک $\gamma_{\times 2}(G')$ - مجموعه ویژه است. بنابراین G از G' با اضافه کردن راس u_j طبق فرایند B بدست آمده است. در نتیجه $G \in \mathcal{G}_k$.

برای طرف برگشت فرض کنید $G \in \mathcal{G}_k$. در نتیجه G از گراف $G' \in \mathcal{G}_{k-1}$ با استفاده از فرایند B بدست آمده است. فرض کنید S' یک $\gamma_{\times 2}(G')$ - مجموعه ویژه باشد که در فرایند ساخت G استفاده شده است. طبق ۱.۲.۷، G' شامل دقیقاً $k-1$ دور است. طبق فرض استقرا $|S'| = (2(n(G') + \ell(G') - s(G') + 2)/3 - 2(k-1)/3)$. به وضوح $\ell - s = \ell(G') - s(G')$. به وضوح $|S'| = (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$. به وضوح S' یک مجموعه احاطه گر دوگانه از G است. چون طبق ۱.۲.۷، G شامل دقیقاً k دور است، در نتیجه طبق بخش اول اثبات داریم

$$\gamma_{\times 2}(G) = (2n + \ell - s + 2)/3 - 2k/3$$

و این یعنی اثبات تمام است.

□

مراجع

- [1] N. Alon, M. Krivelevich, B. Sudakov, Large nearly regular induced subgraphs, SIAM J. Discrete Math. 22 (4) (2008) 1325–1337.
- [2] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, P.J. Slater, Efficient dominating sets in graphs, in: R.D. Ringeisen and F.S. Roberts, eds., Applications of Discrete Math. (SIAM, Philadelphia, 1988) 189-199.
- [3] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, L.H. Host, P.J. Slater, Generalized domination and efficient domination in graphs, Discrete Math. 159 (1996) 1-11.
- [4] N. Biggs, Perfect codes in graphs, J. of Combinatorial Theory (B), 15 (1973) 289- 296.
- [5] M. Blidia, M. Chellali, T.W. Haynes, and M.A. Henning, Independent and double domination in trees, Utilitas Math. 70(2006), 159–173.
- [6] J.A. Bondy ,U.S.R Murty Graph Theory. (2008).
- [7] D.M. Cardoso, J.O. Cerdeira, C. Delorme, P.C. Silva, Efficient edge domination in regular graphs, Discrete Applied Math. 156 (2008) 3060-3065.
- [8] D.M. Cardoso, M. Kaminski, V. Lozin, Maximum ‘ k -regular induced subgraphs, J. Comb. Optim. 14 (4) (2007) 455–463.
- [9] D.M. Cardoso, I. Sciriha, C. Zerafa, Main Eigenvalues, (k, τ) -regular sets, Linear Algebra Appl. 432 (9) (2010) 2399–2408.
- [10] Y. Caro, A. Hansberg, Regular independent sets in graphs, preprint.
- [11] Y. Caro, New results on the independence number. Tech. Report, Tel-Aviv University, 1979.
- [12] Y. Caro, D.B. West, Repetition number of graphs, Electron. J. Combin. 16 (2009) .
- [13] Y. Caro, A. Hansberg, M. A. Henning, Fair domination in graphs, Discrete Mathematics 312 (2012), 2905-2914.

-
- [14] P. Carvalho, P. Rama, Integral graphs and (k, τ) -regular sets, *Linear Algebra Appl.* 432 (9) (2010) 2409–2417.
 - [15] G.J. Chang, C. Pandu Rangan, S.R. Coorg, Weighted independent perfect domination on co-comparability graphs, *Discrete Applied Math.* 63 (1995) 215-222.
 - [16] B. Chaluvvaraju, M. Chellali and K. A. Vidya, Perfect k -domination in graphs, *Australas. J. Combin.* 48 (2010), 175–184.
 - [17] B. Chaluvvaraju, K. Vidya, Perfect dominating set graph of a graph, *Adv. Appl. Discrete Math.* 2 (2008), 49–57.
 - [18] M. Chellali, A note on the double domination number in trees, *AKCE J. Graphs. Combin.* 3 (2) (2006), 147–150.
 - [19] E. J. Cockayne, B. L. Hartnell, S.T. Hedetniemi and R. Laskar, Perfect domination in graphs, *J. Combin. Inform. System Sci.* 18 (1993), 136–148.
 - [20] I.J. Dejter, Perfect domination in regular grid graphs, *Australas. J. Combin.* 42 (2008), 99–114.
 - [21] I.J. Dejter and A.A. Delgado, Perfect domination in rectangular grid graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 70 (2009), 177–196.
 - [22] I. Fabrici, Light graphs in families of outerplanar graphs, *Discrete Math.* 307 (2007), 866–872.
 - [23] M.R. Fellows and M.N. Hoover, Perfect domination, *Australas. J. Combin.* 3 (1991), 141–150.
 - [24] J.F. Fink, M.S. Jacobson, n -domination in graphs, in: *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, John Wiley and Sons, New York, 1985, pp. 282–300.
 - [25] D.L. Grinstead, P.L. Slater, N.A. Sherwani, N.D. Holmes, Efficient edge domination problems in graphs, *Information Processing Letters* 48 (1993) 221-228.
 - [26] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, (1998), 287–303.
 - [27] A. Hansberg, Reviewing some Results on Fair Domination in Graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* j, vol 43, 2013 Pages 367-373

- [28] H. Hatami and P. Hatami, Perfect dominating sets in the Cartesian products of prime cycles, *Electron. J. Combin.* 14 (2007) 7 pp.
- [29] J. Harant and M.A. Henning, On double domination in graphs, *Discuss. Math. Graph Theory.* 25 (2005), 29–34.
- [30] F. Harary and T.W. Haynes, Double domination in graphs, *Ars Combin.* 55 (2000), 201–213.
- [31] G. Hopkins, W. Staton, Outerplanarity without topology, *Bull. Inst. Combin. Appl.* 21 (1997) 112–116.
- [32] C.L. Lu, M.-T. Ko, C.Y. Tang, Perfect edge domination and efficient edge domination in graphs, *Discrete Applied Math.* 119 (2002) 227-250.
- [33] C.L. Lu, C.Y. Tang, Weighted efficient domination problem on some perfect graphs, *Discrete Applied Math.* 117 (2002) 163-182.
- [34] J. Leydold and P.F. Stadler, Minimal Cycle Bases of Outerplanar Graphs, *Electron. J. Combin.* 5 (1998), R16.
- [35] M. Milanić, A hereditary view on efficient domination, extended abstract in: *Proceedings of the 10th Cologne-Twente workshop 2011*, pp. 203-206. Full version to appear under the title “Hereditary efficiently dominatable graphs”.
- [36] C. Sivagnanam, Double Domination Number and Connectivity of Graphs, *International J. Digit. Inf. Wireless Communicat.* 2(1) (2012), 40–45.
- [37] V.K. Wei, A lower bound on the stability number of a simple graph, *Bell Lab. Tech. Memo.* (81-11217-9) (1981).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Size	اندازه
Leaf	برگ
Block	بلوک
Maximum	بیشترین
Weak support	پشتیبان ضعیف
Cover	پوشش
Vertex cover	پوشش راسی
Corona	تاج
Clique	خوشه
Degree	درجه
Tree	درخت
Rooted tree	درخت ریشه دار
Cycle	دور
Vertex	رأس
Cutvertex	راس برشی
Support vertex	رأس پشتیبان
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Central vertex	رأس مرکزی
Isolated vertex	رأس منفرد
Special Vertex	رأس ویژه
Root	ریشه
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Star	ستاره
Double star	ستاره دوگانه
Loop	طوقه
Independence number	عدد استقلال

Repetition number	عدد تکرار
Chromatic number	عدد رنگی
Sharp	قابل دستیابی
Diameter	قطر
Cactus graph	کاکتوس گراف
Minimum	کمترین
Graph	گراف
Trivial graph	گراف بدیهی
Unicyclic graph	گراف تک دوری
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Simple graph	گراف ساده
Complete graph	گراف کامل
Complement graph	گراف متمم
Planar graph	گراف مسطح
Outerplanar graph	گراف مسطح خارجی
Regular graph	گراف منتظم
Connected graph	گراف همبند
Walk	گشت
Adjacent	مجاور
Independent set	مجموعه مستقل
Dominating set	مجموعه احاطه گر
Double dominating set	مجموعه احاطه گر دو گانه
Efficient dominating set	مجموعه ی احاطه گر موثر
Perfect dominating set	مجموعه ی احاطه گر کامل
Fair dominating set	مجموعه احاطه گر منصف
Order	مرتبه
Path	مسیر
degenerate graphs	منحط گراف
Average degree	میانگین درجه
Open neighborhood	همسایه باز
Close neighborhood	همسایه بسته
Hamiltonian	همیلتونی
Edge	یال

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Average degree	میانگین درجه
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Block	بلوک
Cactus graph	کاکتوس گراف
Central vertex	رأس مرکزی
Chromatic number	عدد رنگی
Clique	خوشه
Close neighborhood	همسایه بسته
Complement graph	گراف متمم
Complete graph	گراف کامل
Connected graph	گراف همبند
Corona	تاج
Cover	پوشش
Cutvertex	راس برشی
Cycle	دور
Degenerate graphs	منحط گراف
Degree	درجه
Diameter	قطر
Dominating set	مجموعه احاطه گر
Double dominating set	مجموعه احاطه گر دوگانه
Double star	ستاره دوگانه
Edge	یال
Efficient dominating set	مجموعه ی احاطه گر موثر
Fair dominating set	مجموعه احاطه گر منصف
Graph	گراف

Hamiltonian	همیلتونی
Independence number	عدد استقلال
Independent set	مجموعه مستقل
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Isolated vertex	رأس منفرد
Leaf	برگ
Loop	طوقه
Maximum	بیشترین
Minimum	کمترین
Open neighborhood	همسایه باز
Order	مرتبه
Outerplanar graph	گراف مسطح خارجی
Path	مسیر
Perfect dominating set	مجموعه ی احاطه گر کامل
Planar graph	گراف مسطح
Regular graph	گراف منتظم
Repetition number	عدد تکرار
Root	ریشه
Rooted tree	درخت ریشه دار
Sharp	قابل دستیابی
Simple graph	گراف ساده
Size	اندازه
Special Vertex	رأس ویژه
Star	ستاره
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Support vertex	رأس پشتیبان
Tree	درخت
Trivial graph	گراف بدیهی
Unicyclic graph	گراف تک دوری
Vertex	رأس
Vertex cover	پوشش راسی
Walk	گشت
Weak support	پشتیبان ضعیف

Aabstract

For $k \geq 1$, a k -fair dominating set in a graph G is a dominating set S such that $|N(v) \cap S| = k$ for every vertex $v \in V \setminus S$. The k -fair domination number of G , denoted by $fd_k(G)$, is the minimum cardinality of a k FD-set. A fair dominating set in G is a k FD-set for some integer $k \geq 1$. The fair domination number of G , denoted by $fd(G)$, that is not the empty graph is the minimum cardinality of an FD-set in G . An FD-set of G of cardinality $fd(G)$ is called a $fd(G)$ -set. In this thesis, we study the fair domination number. We present new upper bounds for the 1-fair domination number of cactus graph, unicyclic graph and outerplanar graph. We also characterize all graphs achieving equality for the upper bound.

Keywords: Fair dominating set; Dominating set; Unicyclic graph; Cactus graph; Outerplanar graph



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Graphs and Combinatorics

Bounds on the fair domination number in graphs

By: Majid Hajian

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

October 2018