بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده  علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز

رساله دکتری

# تخمین ضرایب برای کلاس‌هایی از توابع تحلیلی و دو- تک‌ارز توسط چندجمله‌ای فابر

نگارنده: ابراهیم انالوئی عادگانی

استاد راهنما

دکتر احمد معتمدنژاد

شهریور ۱۳۹۷

# الهی...

ای دوست قبولم کن و جانم بستان
مستم کن و وز هر دو جهانم بستان

با هر چه دلم قرار گیرد بی تو
آتش به من اندر زن و آنم بستان

ای زندگی تن و توانم همه تو
جانی و دلی ای دل و جانم همه تو

تو هستی من شدی از آنی همه من
من نیست شدم در تو از آنم همه تو

خود ممکن آن نیست که بردارم دل
آن به که به سودای تو بسپارم دل

گر من به غم عشق تو نسپارم دل
دل را چه کنم بهر چه می‌دارم دل

مولانا

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و خواهران دلسوزم که دیگر در بین ما نیستند ولی یاد و خاطره شان تا ابد با ماست. نبودن هایی هست که هیچ بودنی جبرانشان نمی کند و آدم هایی هستند که هرگز تکرار نمی شوند و شما آن گونه اید پدر و مادر عزیزم ای بی همتاترین نعمت های الهی

و همسر عزیزم

# سپاس‌گزاری...

در ابتدا سپاس بی‌پایان از استاد راهنمای گرامی و فرهیخته‌ام آقای دکتر معتمدنژاد که همواره در راه کسب علم و دانش مرا یاری نموده و استاد علم و ادب اینجانب بوده‌اند.

سپاس فراوان از همسر عزیزم همراه و همگام همیشگی من؛ خواهر دلسوز و برادران مهربانم که در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور من بوده‌اند.

از اساتید بزرگ و اندیشمند همانند پروفسور جهانگیری [۱]، پروفسور بولوت [۲]، پروفسور بولباکو [۳]، پروفسور کاناس [۴]، پروفسور زونک [۵]، پروفسور کوشینسکی [۶]، پروفسور سریواستاوا [۷]، پروفسور چو [۸] و خانم دکتر حمیدی که همواره نگارنده را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده مورد لطف و محبت خود قرار داه‌اند، کمال تشکر و سپاس را دارم.

از اساتید فرزانه و دلسوز، آقای دکتر ایرانمنش، آقای دکتر بیدخام و آقای دکتر غفوری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند و در بهبود رساله اینجانب را یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. هم‌چنین از آقای دکتر هاشمی، ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی بخاطر زحمات‌شان تقدیر و تشکر می‌نمایم.

در نهایت، ارج می‌نهم زحمات تمامی اساتید بزرگ به‌ویژه آقای دکتر داود علیمحمدی، آقای دکتر سیروس مرادی و آقای بهزاد رمضانی که در امر آموزش از ابتدا تاکنون مرا را خاضعانه مورد حمایت خود قرار داده‌اند و از هیچ کوششی دریغ ننموده‌اند و سپاس بی‌دریغ خدمت دوستان گران‌مایه‌ام که مرا صمیمانه یاری داده‌اند.

*خود را به خدا بسپار، همراه سراسر اوست*

*تو چه می‌خواهی! بهر طلب از دوست*

**ابراهیم انالوئی عادگانی**
**شهریور ۱۳۹۷**

[1] Jahangiri
[2] Bulut
[3] Bulboacă
[4] Kanas
[5] Zwonek
[6] Kosinski
[7] Srivastava
[8] Cho

# تعهد نامه

اینجانب **ابراهیم انالوئی عادگانی** دانشجوی مقطع دکتری رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تخمین ضرایب برای کلاس‌هایی از توابع تحلیلی و دو- تک‌ارز توسط چندجمله‌ای فابر** ، تحت راهنمایی **احمد معتمدنژاد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**ابراهیم انالوئی عادگانی**
**شهریور ۱۳۹۷**

# چکیده

در این رساله، با استفاده از چندجمله‌ای فابر و با یک روش متفاوت از کارهای پیشین تخمینی از ضرایب $|a_n|$ برای زیرکلاس‌هایی از $\Sigma$ شامل توابع دو_تک‌ار که توسط زیرترتیبی در قرص یکه تعریف شده است را بدست می‌آوریم که کران ارائه شده برخی از کارهای اخیر که در این زمینه انجام شده‌اند را توسیع و بهبود می‌بخشد. هم‌چنین با یک روش متفاوت از کارهای قبلی کرانی برای دترمینان هنکل دوم توابع زیرکلاس‌هایی از $\Sigma$ که توسط زیرترتیبی در قرص یکه تعریف شده است را محاسبه می‌کنیم که کران حاصل شده برخی از نتایج پیشین که در این حوزه انجام شده اند را توسیع و بهبود می‌بخشد.

کلمات کلیدی: تخمین ضرایب، توابع دو_تک‌ارز، زیرترتیبی، چندجمله‌ای فابر، دترمینان هنکل دوم

# لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. E. Analouei Adegani, S. Bulut, A. Zireh, Coefficient estimates for a subclass of analytic bi-univalent functions, Bull. Korean Math. Soc., 55 (2018) 405-413.

2. A. Zireh, E. Analouei Adegani, M. Bidkham, Faber polynomial coefficient estimates for subclass of bi-univalent functions defined by quasi-subordinate, Math. Slovaca., 68 (2018) 369-378.

3. S. Kanas, E. Analouei Adegani, A. Zireh, An unified approach to second hankel determinant of bi-Subordinate functions, Mediterr. J. Math., (2017) 14:233.

4. A. Zireh, E. Analouei Adegani, S. Bulut, Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions defined by subordination, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 23 (2016) 487-504.

5. E. Analouei Adegani, S. G. Hamidi, J. M. Jahangiri, A. Zireh, Coefficient estimates of m-fold symmetric bi-subordinate functions by Faber poly- nomial, Hacet. J. Math. Stat., In Press.

6. E. Analouei Adegani, A. Zireh, M. Jafari, Coefficient estimates for a new subclass of analytic and bi-univalent functions by Hadamard product, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática (BSPM)., In Press.

7. A. Zireh, T. Bulboacă, E. Analouei Adegani, N. Dibagar, Second Hankel determinant for a subclass of analytic bi-univalent functions defined by subordination, Turk. J. Math., In Press.

8. E. Analouei Adegani, A. Zireh, T. Bulboacă, Sufficient condition for $p$-valent strongly starlike functions, Submitted.

9. E. Analouei Adegani, A. Zireh, T. Bulboacă, Simple sufficient subordination conditions for close-to-convexity, Submitted.

10. A. Zireh, E. Analouei Adegani, S. Bulut, Upper bound of second Hankel determinant for $k$-bi-subordinate functions, Submitted.

# فهرست مطالب

# فهرست تصاویر

# فهرست نمادها

| نماد | توضیح |
|---|---|
| $\mathcal{A}$ | کلاس توابع تحلیلی نرمالیزه |
| $\mathcal{B}(\beta;\mu)$ | کلاس توابع بالازویچ از مرتبه $\beta$ و نوع $\mu$ |
| $\mathbb{C}$ | صفحه مختلط |
| $\mathcal{C}$ | کلاس توابع محدب |
| $\mathcal{C}(\varphi)$ | کلاس توابع محدب ما_ میندا |
| $\mathcal{C}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ | کلاس توابع دوطرف_ محدب |
| $\mathbb{U}$ | قرص یکه |
| $D$ | میدان |
| $D^k$ | عملگر مشتق |
| $H_q(n)$ | دترمینان هنکل |
| $f*g$ | تلفیق $f$ و $g$ |
| $f\prec g$ | $f$ زیرترتیبی $g$ |
| $f\prec_q g$ | $f$ شبه_ زیرترتیبی $g$ |
| $F_n$ | $n$_ امین چندجمله‌ای فابر |
| $K_n^p$ | چندجمله‌ای همگن |
| $k(z)$ | تابع کوئب |
| $\ell$ | تابع بیشینه از توابع محدب |
| $\mathcal{M}_{\Sigma}(\alpha;\varphi)$ | کلاس توابع دوطرف_ محدب_ موناکو |
| $\mathbb{N}$ | مجموعه اعداد طبیعی |
| $\mathbb{N}_0$ | $\mathbb{N}\cup\{0\}$ |
| $\mathcal{N}_{\Sigma}^{\alpha}$ | $\{f\in\Sigma : \lvert arg(f'(z))\rvert\leq\frac{\alpha}{2}\ \text{و}\ \lvert arg(f^{-1})'(z))\rvert\leq\frac{\alpha}{2},\ z\in\mathbb{U}\}$ |
| $P$ | کلاس توابع تحلیلی با قسمت حقیقی مثبت و $p(0)=1$ |
| $\mathbb{R}$ | اعداد حقیقی |
| $\mathrm{Re}$ | قسمت حقیقی از یک عدد مختلط |
| $R(p;\beta)$ | $\{f\in\mathcal{A} : \mathrm{Re}(f'(z))^p>\beta\ \text{و}\ \mathrm{Re}(f^{-1}(z))^p>\beta,\ z\in\mathbb{U}\}$ |
| $\mathcal{S}$ | کلاس توابع تک‌ارز نرمالیزه |
| $\mathcal{S}^*$ | کلاس توابع ستاره‌گون |
| $\mathcal{S}^*(\varphi)$ | کلاس توابع ستاره‌گون ما_ میندا |
| $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ | کلاس توابع دوطرف_ ستاره‌گون |
| $\widetilde{S}^*(\alpha)$ | کلاس توابع به‌طورقوی ستاره‌گون |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | اعداد صحیح |
| $\Sigma$ | کلاس توابع دوطرف‌ـ تک‌ارز |
| $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$ | $\left\{f \in \mathcal{A} : f \in \Sigma,\ (1-\lambda)\left(\frac{(f*\Theta)(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda\left(f*\Theta\right)'(z)\left(\frac{(f*\Theta)(z)}{z}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(z)\right.$ و $(1-\lambda)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda\left((f*\Theta)^{-1}\right)'(w)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(w), \quad \left. z,w\in\mathbb{U}\right\}$ |

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه و مقدمات

در این فصل که مشتمل بر چهار بخش است به بیان مباحث مقدماتی، تعاریف کلی و تحقیقات وابسته به برخی زیرکلاس‌های $\Sigma$ شامل توابع دو_ تک‌ارز می‌پردازیم و تخمین بدست آمده برای ضرایب توابع مربوط به این‌گونه کلاس‌ها را با استفاده از چندجمله‌ای فابر بیان می‌کنیم. هم‌چنین کران بدست آمده برای دترمینان هنکل دوم توابع مربوط به برخی از زیرکلاس‌های $\Sigma$ را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم

## ۱.۱ توابع تک‌ارز

فرض کنید $\zeta \in \mathbb{C}$ و $r > 0$، در این‌صورت قرص باز به مرکز $\zeta$ و شعاع $r$ به‌صورت

$$\mathbb{U}(\zeta, r) = \{z \in \mathbb{C}; \mid z - \zeta \mid < r\},$$

تعریف می‌شود که مجموعه‌ی اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین $\mathbb{U} = \mathbb{U}(0, 1)$ به عنوان قرص یکه در نظر گرفته می‌شود. هر مجموعه‌ی همبند و باز در $\mathbb{C}$ را یک میدان می‌نامیم. میدان را معمولا با $D$ نشان می‌دهیم. تابع $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نقطه‌ی $z_0 \in D$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_0$ مشتق‌پذیر باشد. تابع $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ را در میدان $D$ تحلیلی گوییم اگر در هر نقطه‌اش تحلیلی باشد.

**تعریف ۱.۱.۱.** تابع تحلیلی که یک‌به‌یک باشد را تک‌ارز می‌نامیم. بنابراین اگر $f$ تابع تک‌ارز باشد، $f(z_1) = f(z_2)$ نتیجه می‌دهد $z_1 = z_2$.

توابع تك‌ارز از دیدگاه تحلیلی مشتقی مخالف صفر دارند و از دیدگاه هندسی خم‌های ساده را به خم‌های ساده می‌نگارند. از طرفی با توجه به قضیه نگاشت ریمان که یکی از مهم‌ترین قضایای نظریه هندسی توابع است، هر تابع که در یك میدان همبند ساده (بغیر از تمام صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص یکه تعریف شده است، متناظر کرد.

**قضیه ۱.۱.۱** (قضیه نگاشت ریمان)**.** فرض کنیم $D$ میدان همبند ساده (بغیر از تمام صفحه) و $z_0$ نقطه ای از $D$ باشد در این‌صورت تابع تك‌ارز و منحصر بفرد $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ موجود است که $D$ را به قرص $\mathbb{U}$ می‌نگارد بطوری‌که $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$.

یکی از مباحث بسیار مهم و جالب در آنالیز مختلط، بررسی ویژگی‌های هندسی تابع‌هایی است که بر قرص یکه در صفحه مختلط تعریف شده‌اند. روشن است که نمودار تابع تحلیلی $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ترسیم پذیر نیست ولی برد آن یعنی مجموعه $f(\mathbb{U})$ توصیف هندسی دارد. هم‌چنین ارتباطی که بین ویژگی‌های هندسی برد این‌گونه توابع با ضرایب $a_n$ وجود دارد، منجر به پیدایش نظریه‌ای مهم با عنوان نظریه هندسی تابع‌های تک‌ارز شد.

**تعریف ۲.۱.۱.** $\mathcal{A}$ را کلاس همه‌ی توابع $f$ به فرم

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{۱.۱}$$

در نظر می‌گیریم که در قرص یکه $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ تحلیلی هستند و با شرط $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ نرمالیزه گردیده‌اند. علاوه بر این، کلاس همه‌ی توابع $\mathcal{A}$ که در $\mathbb{U}$ تک‌ارز هستند را با $\mathcal{S}$ نمایش می‌دهیم.

یک نمونه بارز از یک تابع در کلاس $\mathcal{S}$ تابع کوئب

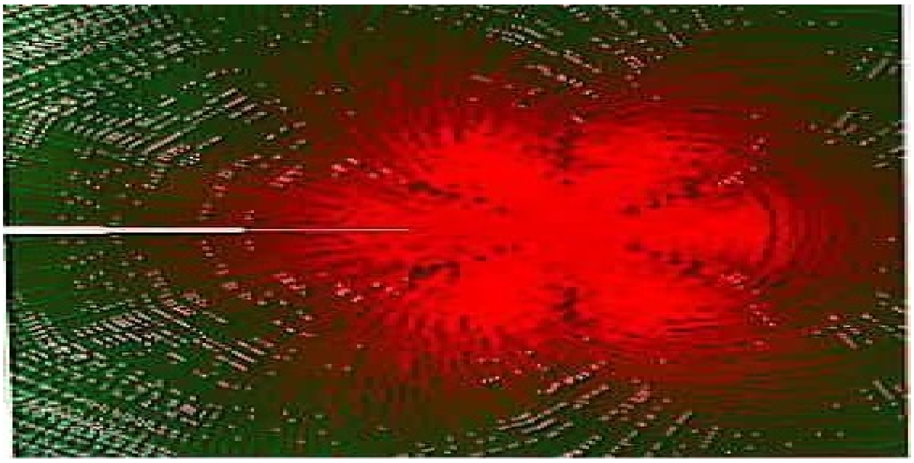
$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n,$$

است. این تابع $\mathbb{U}$ را بر صفحه‌یی که در امتداد محورحقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا $\infty$ بریده شده است می‌نگارد. برای هر عدد حقیقی $\alpha$، $e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z)$ دوران تابع کوئب نامیده می‌شود و برای برخی مسائل مختلف کلاس $\mathcal{S}$ به عنوان تابع بیشینه شناخته شده است. شکل ۱.۱ را ببینید.

مشابه رده $\mathcal{S}$، فرض کنیم کلاس $\Sigma'$ شامل همه‌ی توابع تک‌ارز به‌صورت

$$h(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{b_n}$$

شکل ۱.۱: تصویر قسمتی از $\mathbb{U}$ تحت تابع کوئب



در $\Delta = \{z : |z| > 1\}$ باشد که نقطه بی‌نهایت قطب ساده برای $h$ است، آن‌گاه با استفاده از تبدیل $f(z) = \frac{1}{h(\frac{1}{z})}$ می‌توانیم تناظری یک‌به‌یک بین کلاس‌های $\mathcal{S}$ و $\Sigma'$ برقرار کنیم [۳۶]. یکی از مسائل مهم در این حوزه، حدس معروف بیبرباخ [1] است که ایده آن از قضیه مساحت گرفته شد.

**قضیه ۲.۱.۱** (قضیه مساحت). [۳۶] اگر تابع $h(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{b_n}$ در $\Sigma'$ باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

در سال ۱۹۱۶، بیبرباخ [۱۸] ثابت کرد که برای $f \in \mathcal{S}$، $|a_2| \leq 2$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $f$ یک دورانی از تابع کوئب باشد. این نتیجه به عنوان قضیه بیبرباخ شناخته شده است. او هم‌چنین پیش‌بینی کرد که برای $f \in \mathcal{S}$،

$$|a_n| \leq n \quad (n \geq 2),$$

در حالت کلی معتبر است. این حدس به عنوان حدس (یا ضریب) بیبرباخ شناخته شده است.

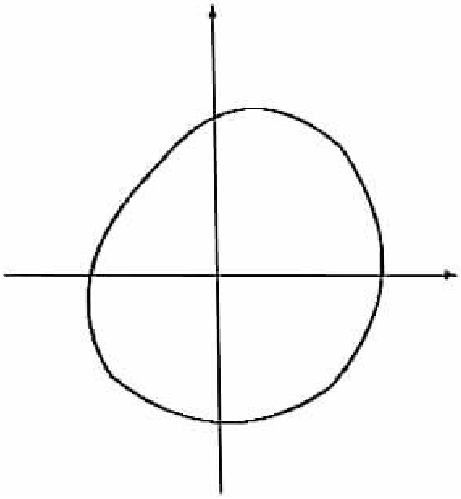
با توجه به حدس بیبرباخ انگیزه برای مطالعه ضرایب بسط تیلور توابع تک‌ارز آغاز شد. این حدس و گمان الهام بخش بسیاری از ریاضی‌دانان برای تحقیق ضرایب بسط تیلور انواع زیرکلاس‌های توابع تک‌ارز قرار گرفت. اکثر ریاضی‌دانان در حال تلاش برای اثبات حدس بیبرباخ، یا به‌طور آگاهانه یا به‌طور ناخودآگاه حقایق و قضیه‌های جدیدی را درباره توابع تک‌ارز بدست آوردند. اغراق نیست که بیان کنیم نظریه هندسی توابع بیشتر مدیون توسعه این تلاش‌ها برای اثبات حدس بیبرباخ است.

میدان $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ را محدب گوئیم اگر چنان‌چه پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه از $\mathcal{D}$ را به هم وصل می‌کند در $\mathcal{D}$ قرار بگیرد. شکل ۲.۱ را ببینید.

**تعریف ۳.۱.۱.** تابع $f \in \mathcal{A}$ را محدب گوئیم اگر $\mathbb{U}$ تحت $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته

[1] Bieberbach

شکل ۲.۱: میدان محدب



شود. تابع خاص $\ell(z) = \dfrac{z}{1-z}$ که $\mathbb{U}$ را به نیم‌صفحه راست می‌نگارد یک تابع محدب است که به عنوان تابع بیشینه توابع محدب شناخته شده است.

**قضیه ۳.۱.۱.** [۸۲] اگر $f \in \mathcal{A}$ یک تابع محدب باشد که طبق (۱.۱) نمایش داده شود آن‌گاه برای هر $n$، $|a_n| \leq 1$. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

$$f(z) = \frac{z}{1+e^{i\beta}\, z} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

کلاس همه‌ی توابع تک‌ارز که در $\mathbb{U}$ محدب هستند را با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم. کلاس توابع محدب توسط استادی [1] [۱۱۳] در سال ۱۹۱۳ معرفی شد.

چون تعیین محدب بودن با استفاده از توصیف هندسی بسیار مشکل است، لازم است شرط دیگری را که اغلب در اثبات‌ها و محاسبات بسیار سودمند و کارآمد است، معرفی کنیم.

**قضیه ۴.۱.۱.** [۳۶، ۸۶] فرض کنیم $f$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ باشد. آن‌گاه تابع $f$ در $\mathbb{U}$ محدب است اگر و فقط اگر $f'(z) \neq 0$ و

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{۲.۱}$$

میدان $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ را ستاره‌گون نسبت به $w_0$ گوئیم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر نقطه از $\mathcal{D}$ را به $w_0$ وصل می‌کند در $\mathcal{D}$ قرار بگیرد. میدان نشان داده شده در شکل ۳.۱ ستاره‌گون نسبت به $w_0$ است اما ستاره‌گون نسبت به مبدا نیست.

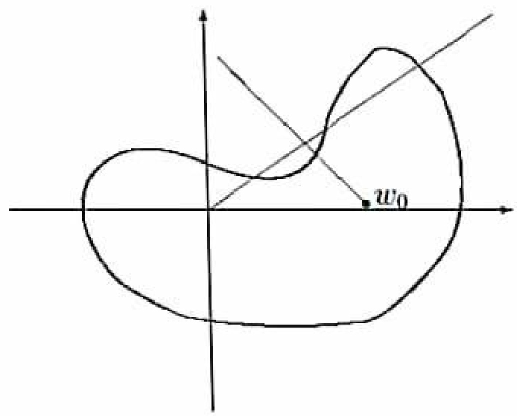
[1] Study

**تعریف ۴.۱.۱.** تابع $f \in \mathcal{A}$ را ستاره‌گون گوئیم اگر $\mathbb{U}$ تحت $f(z)$ بر یک میدان ستاره‌گون نسبت به $w_0 = 0$ نگاشته شود.

**قضیه ۵.۱.۱.** [۳۶، ۸۶] فرض کنیم $f$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ باشد و $f(0) = 0$. آنگاه تابع $f$ در $\mathbb{U}$ ستاره‌گون نسبت به $w_0 = 0$ است اگر و فقط اگر $f'(z) \neq 0$ و

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{۳.۱}$$

شکل ۳.۱: میدان ستاره‌گون نسبت به $w_0$




توابع ستاره‌گون ابتدا توسط الکساندر [1] [۶] معرفی شد. کلاس همه‌ی توابع تک‌ارز در $\mathbb{U}$ که ستاره‌گون نسبت به $w_0 = 0$ هستند را با $\mathcal{S}^*$ نمایش می‌دهیم. در مورد توابع ستاره‌گون تصویر قرص‌های کوچک‌تر وارث بعضی خواص تصویر قرص واحد هستند. تابع کوئب یک تابع ستاره‌گون است که ناحیه‌اش ستاره‌گون نسبت به هر $w_0 > -\frac{1}{4}$ است.

در سال ۱۹۱۵، الکساندر [۶] رابطه بین توابع محدب و ستاره‌گون را بیان کرد.

**قضیه ۶.۱.۱.** [۳۶، قضیه الکساندر] فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$. در این‌صورت $f \in \mathcal{C}$ اگر و فقط اگر $zf' \in \mathcal{S}^*$.

گام بعدی برای اثبات حدس بیبرباخ، در اوایل سال ۱۹۲۰ برای حالت توابع ستاره‌گون توسط نوانلینا [2] [۸۹] صورت گرفت

**قضیه ۷.۱.۱.** [۸۹] اگر $f \in \mathcal{S}^*$ آنگاه برای هر $n$، $|a_n| \leq n$. تساوی برای تابع کوئب و دورانی از آن برقرار است.

[1] Alexander
[2] Nevanlinna

پس از نتیجه نوالینا در اثبات حدس بیبرباخ برای یک زیرکلاس از $S$، مشخص شد این احتمال وجود دارد که این حدس قابل اثبات باشد. اما این گزاره برای مدت طولانی حل نشد. تاریخچه تلاش‌ها برای اثبات این حدس پرفراز و نشیب و در عین حال، پیوسته است. قدم اول برای اثبات حدس بیبرباخ در سال ۱۹۲۳ توسط لونر [1] [۸۳] برداشته شد و با استفاده از روش نمایش پارامتری برای نگاشت‌های برش اثبات کرد $|a_3| \leq 3$. تا سال ۱۹۵۵ تلاش‌های زیادی برای تعیین کران $|a_4|$ انجام گرفت که همگی به شکست انجامیدند تا اینکه گارابدیان [2] و شیفر [3] [۴۴] ثابت کردند $|a_4| \leq 4$. در سال ۱۹۶۸، پدرسون [۷۳] و اوزاوا [4] [۷۲] با استفاده از نامساوی های گرانسکی [5] ثابت کردند که $|a_6| \leq 6$. بدست آوردن کران برای ضریب پنجم تا حدودی مشکل‌تر می‌نمود تا اینکه در سال ۱۹۷۲، پدرسون [6] و شیفر [۷۴] با استفاده از نامساوی‌های گارابدیان–شیفر که تعمیمی از نامساوی های گرانسکی هستند، ثابت کردند $|a_5| \leq 5$. در نهایت در سال ۱۹۸۵، دی برنگس [7] [۳۵] با روش لونر ثابت کرد حدس بیبرباخ (که در حال حاضر به عنوان قضیه دی برنگس شناخته شده است) برای همه ضرایب $n$ برقرار است.

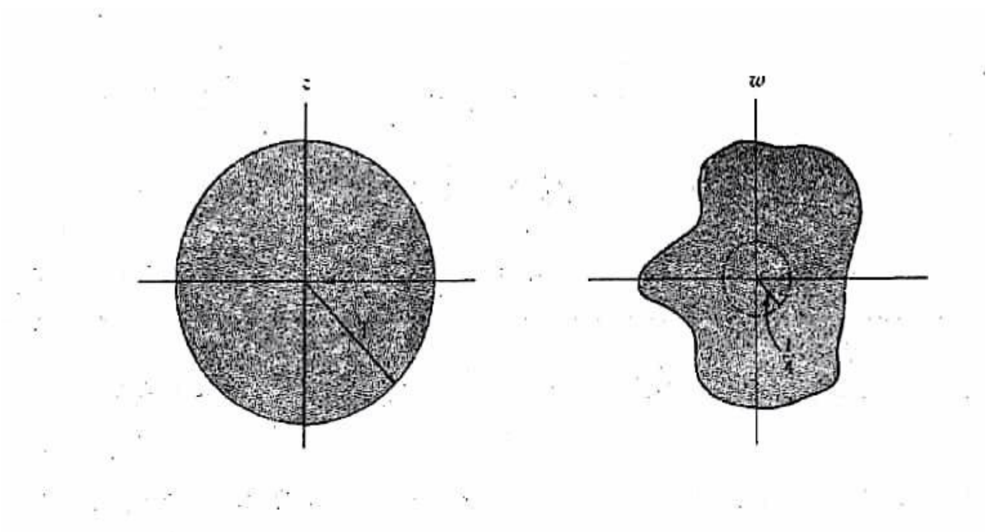
**قضیه ۸.۱.۱.** [۳۵، قضیه دی برنگس] فرض کنیم $f \in S$، در این‌صورت

$$|a_n| \leq n \quad (n \geq 2).$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $f$ تابع کوئب یا دورانی از آن باشد.

یکی از مهم‌ترین کاربردهای حدس بیبرباخ به قضیه پوشش معروف است و مبین آن است هر تابعی در $S$ قرص $\mathbb{U}$ را بر میدانی در صفحه $w$ می‌نگارد که این میدان شامل قرص $|w| < \frac{1}{4}$ است. بهترین کران شناخته شده برای شعاع در قضیه پوشش برای تابع کوئب است.

شکل ۴.۱: تعبیر هندسی قضیه پوشش




[1] Löwner
[2] Garabedian
[3] Schiffer
[4] Ozawa
[5] Grunsky
[6] Pederson
[7] de Branges

**قضیه ۹.۱.۱.** [۳۶]، قضیه پوشش] تصویر هر تابع $f \in \mathcal{S}$ شامل قرص $\{w: \ |w| < \frac{1}{4}\}$ است.

در سال ۱۹۳۶، رابرتسون [۱] مفاهیمی از توابع محدب و ستاره‌گون از مرتبه $\beta$ $(0 \le \beta < 1)$ را برای $f \in \mathcal{S}$ به‌ترتیب به‌صورت زیر معرفی کرد

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

و

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U}).$$

زیرکلاس‌های توابع محدب و ستاره‌گون از مرتبه $\beta$ $(0 \le \beta < 1)$ به‌ترتیب توسط $\mathcal{C}(\beta)$ و $\mathcal{S}^*(\beta)$ نشان داده می‌شود [۱۰۲].

در سال ۱۹۶۹، برانان [۲] و کروان [۳] [۲۰] کلاسی از توابع به‌طورقوی ستاره‌گون از مرتبه $\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ را به‌صورت زیر معرفی کردند که این کلاس را توسط $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۵.۱.۱.** تابع $f \in \mathcal{A}$ را به‌طورقوی ستاره‌گون از مرتبه $\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ می‌نامیم هرگاه داشته باشیم

$$\left|arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

**تعریف ۶.۱.۱.** [۱۷] برای $0 \le \beta < 1$ و $0 \le \mu < 1$ تابع $f \in \mathcal{S}$ را بلازویچ [۴] از مرتبه $\beta$ و نوع $\mu$ گوییم و این زیرکلاس را با نماد $\mathcal{B}(\beta;\mu)$ نشان می‌دهیم هرگاه داشته باشیم

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1-\mu} f'(z)\right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U}).$$

با توجه به ارتباط نزدیک کلاس‌های $\mathcal{C}$ و $\mathcal{S}^*$ با کلاس $P$ که شامل همه‌ی توابع

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n,$$

که در $\mathbb{U}$ تحلیلی هستند و

$$\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{۴.۱}$$

کاراتئودری [۵] [۳۰] لم زیر را که به عنوان لم کاراتئودری شناخته شده است را بیان کرد.

[1] Robertson
[2] Brannan
[3] Kirwan
[4] Bazilevič
[5] Caratheodory

**لم ۱.۱.۱.** [۳۰، لم کاراتئودری] فرض کنیم $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ در $P$ باشد، در این‌صورت برای هر $n\in\mathbb{N}$، $|p_n|\leq 2$. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

$$p(z)=\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}\quad \lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda|=1\ (z\in\mathbb{U}).$$

**لم ۲.۱.۱.** [۴۸] فرض کنیم $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ در $P$ باشد، در این‌صورت برای بعضی از $x$ و $s$ها با $|x|\leq 1$ و $|s|\leq 1$ داریم

$$\begin{aligned}2p_2 &= p_1^2+x(4-p_1^2)\\ 4p_3 &= p_1^3+2(4-p_1^2)p_1x-p_1(4-p_1^2)x^2+2(4-p_1^2)(1-|x|^2)s.\end{aligned}$$

لم شوارتس [1] یکی از مفاهیم پرکاربرد در توابع تحلیلی است که به‌صورت زیر بیان می‌شود

**لم ۳.۱.۱.** [۳۶، لم شوارتس] فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در قرص

$$\mathbb{U}(0,R)=\{z\in\mathbb{C};|z|<R\},$$

باشد به‌طوری‌که $f(0)=0$ و برای ثابت $M$، $|f(z)|<M$. در این‌صورت برای $|z|=r$ که $r<R$

$$|f(z)|\leq\frac{r}{R}M.$$

چندین زیرکلاس از توابع محدب و ستاره‌گون می‌تواند با استفاده از تعریف زیرترتیبی و شبه‌ـزیرترتیبی در نظر گرفته شود. برای دو تابع تحلیلی $f$ و $g$ که در $\mathbb{U}$ تحلیلی هستند تابع $f$ را زیرترتیبی $g$ گوئیم هرگاه تابعی شوارتس مانند $w$ با $w(0)=0$ و $|w(z)|<1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که در $\mathbb{U}$ تحلیلی باشد و $f(z)=g(w(z))$ و به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$f(z)\prec g(z)\quad (z\in\mathbb{U}).$$

طبق لم شوارتس ما داریم

$$|w(z)|\leq|z|\quad (z\in\mathbb{U}),$$

که نتیجه می‌دهد اگر $f(z)\prec g(z)$ آنگاه $f(0)=g(0)$ و $f(\mathbb{U})\subset g(\mathbb{U})$. به‌خصوص اگر تابع $g$ در $\mathbb{U}$ تک‌ارز باشد، در این‌صورت هم‌ارزی زیر را داریم

$$f(z)\prec g(z)\Longleftrightarrow f(0)=g(0)\quad \text{و}\quad f(\mathbb{U})\subset g(\mathbb{U}).$$

---
[1] Schwartz

فرض کنیم $\varphi(z)$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ باشد و $|\varphi(z)| \leq 1$ به‌طوری که

$$\phi(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots . \tag{۵.۱}$$

برای دو تابع تحلیلی $f$ و $g$ که در $\mathbb{U}$ تحلیلی هستند تابع $f$ را شبه‌ـزیرترتیبی $g$ گوئیم هرگاه یک تابع تحلیلی $\phi(z)$ در $\mathbb{U}$ طبق تعریف فوق وجود داشته باشد بطوری که $f(z)/\phi(z)$ در $\mathbb{U}$ تحلیلی باشد و

$$\frac{f(z)}{\phi(z)} \prec g(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

شبه‌ـزیرترتیبی را با نماد

$$f(z) \prec_q g(z) \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{۶.۱}$$

نشان می دهیم. توجه کنید که شبه‌ـزیرترتیبی (۶.۱) با

$$f(z) = \phi(z) g(w(z)) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

هم‌ارز است که $|\varphi(z)| \leq 1$. برای $\phi(z) \equiv 1$، تعریف شبه‌ـزیرترتیبی با زیرترتیبی معادل است [۱۰۳، ۱۰۴].

**لم ۴.۱.۱.** [۸۸، صفحه ۱۷۲] فرض کنیم $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n$ تابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ باشد به‌طوری‌که

$$w(0) = 0, \quad |w(z)| < 1.$$

در این‌صورت

$$|w_1| \leq 1, \quad |w_n| \leq 1 - |w_1|^2, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

**مثال ۱.۱.۱.** فرض کنید $f(z) = \frac{1}{4}z$ و $g(z) = z$ در $\mathbb{U}$ تعریف شوند. در این‌صورت تابع شوارتس $w$ به‌صورت $w = \frac{1}{4}z$ خواهد بود که در شرایط مورد نظر صدق می‌کند.

با توجه به تعریف زیرترتیبی شرط (۴.۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

در این راستا شرط‌های (۲.۱) و (۳.۱) به‌ترتیب با

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+z}{1-z} \quad (z\in\mathbb{U})$$

و

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z} \quad (z\in\mathbb{U}),$$

هم‌ارز هستند.

ما [1] و میندا [2] [۶۸] با تحلیلی مشابه زیرکلاس‌هایی متفاوت از توابع ستاره‌گون و محدب با جایگزینی یک تابع تحلیلی کلی‌تر به‌جای $p(z) := \frac{1+z}{1-z}$ معرفی کردند. برای این هدف، آن‌ها تابع تحلیلی $\varphi$ با قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ با شرایط $\varphi(0)=1$، $\varphi'(0)>0$ به‌طوری‌که $\varphi$ قرص $\mathbb{U}$ را به یک میدان ستاره‌گون نسبت به $w_0=1$ می‌نگارد و $\varphi(\mathbb{U})$ نسبت به محور حقیقی متقارن باشد را در نظر گرفتند و زیرکلاس‌های زیر را بیان کردند:

$$\mathcal{C}(\varphi)=\left\{f\in\mathcal{A}:\ 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\prec\varphi(z)\right\}$$

و

$$\mathcal{S}^*(\varphi)=\left\{f\in\mathcal{A}:\ \frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\varphi(z)\right\}.$$

این توابع به‌ترتیب توابع محدب و ستاره‌گون ما_میندا نامیده می‌شوند. روشن است که برای انتخاب‌های خاصی از $\varphi$ این زیرکلاس‌ها شامل زیرکلاس‌های شناخته شده از توابع تک‌ارز هستند. برای مثال با انتخاب

$$\varphi_\beta(z)=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} \quad (0\le\beta<1),$$

داریم $\mathcal{C}(\varphi_\beta)=\mathcal{C}(\beta)$ و $\mathcal{S}^*(\varphi_\beta)=\mathcal{S}^*(\beta)$.

**تعریف ۷.۱.۱.** تلفیق یا ضرب *هادامارد*[3] دو تابع تحلیلی $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n,\ |z|<r_1$ و $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n,\ |z|<r_2$ به‌صورت

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_nz^n=(g*f)(z), \tag{۷.۱}$$

تعریف می‌شود که در $|z|<r_1r_2$ تحلیلی است.

[1] Ma
[2] Minda
[3] Hadamard

هادامارد [۴۹] ثابت کرد که شعاع همگرایی $f*g$ متناظر با حاصل‌ضرب شعاع همگرایی $f$ و $g$ است.

## ۲.۱ توابع دو_تک‌ارز

می‌دانیم اگر $f(z)$ تابعی تک‌ارز از دامنه‌ی $D_1$ به‌روی دامنه‌ی $D_2$ باشد، در این‌صورت تابع معکوس آن یعنی $g$ تعریف شده به‌صورت $g(f(z)) = z$ که $z \in D_1$، تابعی تک‌ارز از $D_2$ به $D_1$ است .علاوه بر این، به‌وسیله‌ی قضیه‌ی ۹.۱.۱، واضح است که تصویر $\mathbb{U}$ تحت هر تابع $f \in \mathcal{S}$ حاوی یک قرص با شعاع $\frac{1}{4}$ است. در نتیجه به‌وضوح، هر تابع تک‌ارز $f \in \mathcal{S}$ در $\mathbb{U}$، معکوسی مانند $f^{-1}$ دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$f^{-1}(f(z)) = z \qquad (z \in \mathbb{U})$$

و

$$f\left(f^{-1}(w)\right) = w \qquad \left(|w| < r_0(f);\ r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right),$$

که معکوس تابع $f(z)$ دارای بسط تیلوری در قرصی حول مبدا به‌صورت زیر است

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + \cdots. \qquad (۸.۱)$$

**تعریف ۱.۲.۱.** تابع $f \in \mathcal{A}$ در $\mathbb{U}$ دو_تک‌ارز نامیده می‌شود هرگاه $f$ و $f^{-1}$ هر دو در $\mathbb{U}$ تک‌ارز باشند. کلاس همه‌ی توابع $f(z)$ که در $\mathbb{U}$ دو_تک‌ارز و به‌صورت بسط تیلور(۱.۱) هستند را توسط $\Sigma$ نمایش می‌دهیم.

**مثال ۱.۲.۱.** مثال هایی از توابع متعلق به کلاس $\Sigma$ عبارتند از:

$$\frac{z}{1-z}, \qquad \log\frac{1}{1-z}, \qquad \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

به‌هر حال تابع شناخته شده کوئب متعلق به کلاس $\Sigma$ نیست. مثال‌های دیگری که به کلاس $\Sigma$ متعلق نیستند عبارتند از:

$$\frac{2z-z^2}{2}, \qquad \frac{z}{1-z^2}.$$

نخستین بار در سال ۱۹۶۷، لوین [1] [۷۸] کلاسی از توابع دو_تک‌ارز را معرفی و مورد مطالعه قرار داد و با استفاده از نامساوی گرانسکی نشان داد $|a_2| < 1.51$. سپس برانان و کلونی[2] [۲۱]

[1] Lewin
[2] Clunie

حدس زدند که $|a_2| \leq \sqrt{2}$. از سوی دیگر نتانیاهو[۱] [۷۰] نشان داد که

$$\max_{f\in\Sigma}|a_2| = \frac{4}{3}.$$

در سال ۱۹۸۵، تان[۲] [۱۱۶] نشان داد

$$|a_2| \leq 1.485.$$

براننان و طاها[۳] [۲۳] زیرکلاس‌های خاصی از توابع دو-تک‌ارز کلاس $\Sigma$، همانند زیرکلاس‌های $\mathcal{S}^*(\beta)$ و $\mathcal{C}(\beta)$، به‌ترتیب از توابع ستاره‌گون و محدب از مرتبه $\beta$ $(0 \leq \beta < 1)$ را معرفی کردند. هم‌چنین مراجع [۲۲، ۱۱۵] را ببینید.

**تعریف ۲.۲.۱.** تابع $f \in \Sigma$ را در زیرکلاس $\mathcal{S}^*_\Sigma(\beta)$ از توابع دو-ستاره‌گون یا $\mathcal{C}^*_\Sigma(\beta)$ از توابع دو-محدب از مرتبه $\beta$ $(0 \leq \beta < 1)$ گوئیم هرگاه $f$ و $f^{-1}$ هر دو در $\mathbb{U}$ به‌ترتیب ستاره‌گون یا محدب باشند.

براننان و طاها مشابه کلاس $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$ زیرکلاس $\widetilde{\mathcal{S}}^*_\Sigma(\alpha)$ از توابع به‌طورقوی دو-ستاره‌گون از مرتبه $\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ را معرفی کردند.

**تعریف ۳.۲.۱.** [۲۳] تابع $f \in \Sigma$ را در کلاس $\widetilde{\mathcal{S}}^*_\Sigma(\alpha)$ گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند

$$\left|arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1, z \in \mathbb{U})$$

و

$$\left|arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1, w \in \mathbb{U}),$$

که $g = f^{-1}$.

سریواستاوا [۴] و همکارانش زیرکلاسی از $\Sigma$ مانند $\mathcal{N}^\alpha_\Sigma$ $(0 < \alpha \leq 1)$ را به‌صورت زیر معرفی کردند و تخمینی از ضرایب نخستین توابع این زیرکلاس را بدست آوردند.

**تعریف ۴.۲.۱.** [۱۱۱] تابع $f \in \Sigma$ را متعلق به کلاس $\mathcal{N}^\alpha_\Sigma$ $(0 < \alpha \leq 1)$ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$|arg(f'(z))| \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad |arg(g'(w))| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad g = f^{-1}.$$

[1] Netanyahu
[2] Tan
[3] Taha
[4] Srivastava

همان‌طور که قبلا اشاره شد فرض کنیم $\varphi$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ و $\varphi(\mathbb{U})$ نسبت به محور حقیقی متقارن باشد به‌طوری‌که

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots \qquad (B_1 > 0). \tag{۹.۱}$$

سریواستاوا و بنسل [1] زیرکلاس از $\Sigma$ را باتوجه به $\varphi$ به‌صورت زیر معرفی کردند و تخمینی از ضرایب نخستین توابع این زیرکلاس را بدست آوردند.

**تعریف ۵.۲.۱.** [۱۰۹] فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{A}$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. گوئیم تابع

$$f \in \Sigma(\tau, \gamma, \varphi) \quad \left(0 \leq \gamma \leq 1,\ \tau \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\right),$$

هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$1 + \frac{1}{\tau}[f'(z) + \gamma z f''(z) - 1] \prec \varphi(z) \qquad (z \in \mathbb{U})$$

و

$$1 + \frac{1}{\tau}[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1] \prec \varphi(w) \qquad (w \in \mathbb{U})$$

که $g = f^{-1}$.

بولوت [2] زیرکلاس جامع از $\Sigma$ را باتوجه به $\varphi$ به‌صورت زیر معرفی کرد و تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ را برای این زیرکلاس بدست آورد.

**تعریف ۶.۲.۱.** [۲۵] فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{A}$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود و همچنین فرض کنیم

$$\Theta \in \Sigma \qquad \text{و} \qquad \Theta(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \quad (b_n > 0).$$

گوئیم تابع

$$f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi; \Theta) \quad (\lambda \geq 1,\ \mu \geq 0),$$

هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$f \in \Sigma,$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{(f*\Theta)(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda (f*\Theta)'(z)\left(\frac{(f*\Theta)(z)}{z}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(z) \quad (z \in \mathbb{U})$$

[1] Bansal [2] Bulut

و

$$(1-\lambda)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\left((f*\Theta)^{-1}\right)'(w)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu-1}\prec\varphi(w)\quad(w\in\mathbb{U}),$$

که تابع $(f*\Theta)^{-1}$ توسط

$$(f*\Theta)^{-1}(w)=w-a_2b_2w^2+\left(2a_2^2b_2^2-a_3b_3\right)w^3-\left(5a_2^3b_2^3-5a_2b_2a_3b_3+a_4b_4\right)w^4+\cdots,$$

بیان می‌شود.

**قضیه ۱.۲.۱.** [۲۵] فرض کنیم تابع $f\in\mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. آنگاه

$$|a_2|\leq\frac{1}{b_2}\min\left\{\frac{B_1}{\lambda+\mu},\sqrt{\frac{2(B_1+|B_2-B_1|)}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}},\frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2(B_2-B_1)(\lambda+\mu)^2|}}\right\} \tag{۱۰.۱}$$

و

$$|a_3|\leq\frac{1}{b_3}\min\left\{\frac{B_1^2}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{B_1}{2\lambda+\mu},\frac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]}{2(\mu+1)(2\lambda+\mu)}+\frac{2|B_2-B_1|}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)},\frac{B_1}{2\lambda+\mu}+\frac{2B_1^3}{|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2(B_2-B_1)(\lambda+\mu)^2|}\right\}. \tag{۱۱.۱}$$

**تعریف ۷.۲.۱.** [۹] تابع $f\in\mathcal{S}$ را متعلق به کلاس $\mathcal{M}_{\Sigma}(\alpha;\varphi)$ گوئیم هرگاه داشته باشیم

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\varphi(z),\quad z\in\mathbb{U}$$

و

$$(1-\alpha)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\alpha\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\prec\varphi(w),\quad w\in\mathbb{U},$$

که $\alpha\geq 0$ و $g=f^{-1}$. یک تابع در کلاس $\mathcal{M}_{\Sigma}(\alpha;\varphi)$، تابع دوـمحدبـموناکو [۱] از نوع ماـمیندا نامیده می‌شود.

گویال [۲] و کومار [۳] با توجه به مفهوم شبه‌ـزیرترتیبی، زیرکلاسی از $\Sigma$ را معرفی کردند و تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ را برای توابع این زیرکلاس بدست آوردند.

[1] Mocanu
[2] Goyal
[3] Kumar

**تعریف ۸.۲.۱.** [۴۶] تابع $f\in\Sigma$ را متعلق به کلاس $H_q^{\Sigma}(\lambda,h)$ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\prec_q \varphi(z),\qquad z\in\mathbb{U}$$

و

$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\prec_q \varphi(w),\qquad w\in\mathbb{U},$$

که $\lambda\geq 1$ و $g=f^{-1}$.

در سال ۱۹۸۳، سالاجین [1] [۱۰۵] عملگر مشتق $D^k:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ را به‌صورت زیر معرفی کرد

$$D^0f(z)=f(z),\qquad D^1f(z)=Df(z)=zf'(z),$$

در حالت کلی داریم

$$D^kf(z)=D(D^{k-1}f(z)),\qquad k\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}.$$

هم‌چنین می‌توان نوشت

$$D^kf(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}n^ka_nz^n,\qquad k\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\},$$

که $D^kf(0)=0$.

**تعریف ۹.۲.۱.** [۲۴] فرض کنیم $m,k\in\mathbb{N}_0$، $m>k$ و $\gamma\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. تابع $f\in\Sigma$ را متعلق به کلاس $\mathcal{B}_{\Sigma}^{m,k}(\gamma;\varphi)$ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^mf(z)}{D^kf(z)}-1\right)\prec\varphi(z),\qquad z\in\mathbb{U}$$

و

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^mg(w)}{D^kg(w)}-1\right)\prec\varphi(w),\qquad w\in\mathbb{U},$$

که $g=f^{-1}$.

اخیرا، محققان زیادی [۹، ۴۳، ۱۲۰، ۱۲۱] تخمینی از دو ضریب نخستین توابع دو_تک‌ارز، برای زیرکلاس‌های مختلف از کلاس $\Sigma$ را بدست آورده‌اند.

[1] Sălăgean

## ۳.۱ بسط چندجمله‌ای فابر

متناظر با هر

$$h(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{b_n} \in \Sigma'$$

چندجمله‌ای فابر [۱] $F_n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{zh'(z)}{h(z)-w} = \sum_{n=o}^{\infty} F_n(w) z^{-n}.$$

این چندجمله‌ای‌ها توسط فابر [۴۰] در سال ۱۹۰۳ معرفی شدند و در سال ۱۹۱۹، [۴۱] در ارتباط با مسئله تعمیم بسط تیلور از قرص واحد به ناحیه همبند ساده تعمیم داده شدند و در ادامه، در سال ۱۹۳۹، توسط گرانسکی [۴۷] و در سال ۱۹۴۵، توسط شور [۲] [۱۰۷] مورد مطالعه قرار گرفتند. رساله سنتین [۳] [۱۱۴] و مقاله کورتیس [۴] [۳۲] منابع درخور توجه برای بسیاری از کاربردهایی است که چندجمله‌ای‌های فابر در نظریه تقریب و چندجمله‌ای‌های متعامد دارند.

خواص چندجمله‌ای‌های فابر را می‌توان در [۳۲، ۱۰۶، ۶۹، ۱۱۴] پیدا کرد. این چندجمله‌ای‌ها نقش مهمی در شاخه‌های مختلف علوم ریاضی، به‌ویژه در نظریه هندسی توابع ایفا می‌کنند (به عنوان مثال گونگ [۵] [۴۵] و شیفر [۱۰۶] را ببینید). اخیرا، ایرالت [۶] [۲]، ایرالت و رن [۷] [۵]، بوعلی [۸] [۱۹] ایرالت و بوعلی [۳]، ایرالت و نرتین [۹] [۴]، بسط توابع تحلیلی، توابع مرومورفیک و توابع ستاره‌گون را با استفاده از چندجمله‌ای‌های فابر بدست آوردند.

**تعریف ۱.۳.۱.** اگر همه جمله‌های یک چندجمله‌ای هم‌درجه باشند آن چندجمله‌ای را همگن می‌نامند.

ایرالت و رن [۵]، با استفاده از مفهوم چند جمله ای همگن و فابر ستاره‌گونی توابع تک‌ارز و مرومورفیک را مطرح کردند و در ادامه، بوعلی [۱۹] فرمول کلی $F_n$ را بیان کرد.

انگیزه خاصی برای محاسبه چندجمله‌ای‌های فابر به‌خصوص هنگامی‌که آن شامل تابع $g = f^{-1}$، که تابع معکوس $f$ با زیرکلاس‌های مشخصی از توابع دوـ‌تک‌ارز مرتبط است بوجود آمد. نویسندگان در [۳، ۵] بسط چندجمله‌ای فابر را برای توابع $f \in S$ به‌صورت

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

---

[1] Faber
[2] Schur
[3] Suetin
[4] Curtiss
[5] Gong
[6] Airult
[7] Ren
[8] Bouali
[9] Neretin

به‌کار بردند و ضرایب تابع معکوس $g = f^{-1}$ را به‌صورت زیر بیان کردند

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, \ldots, a_n) w^n, \tag{۱۲.۱}$$

که

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{-n} \quad = \quad & \frac{(-n)!}{(-2n+1)!(n-1)!} a_2^{n-1} + \frac{(-n)!}{(2(-n+1))!(n-3)!} a_2^{n-3} a_3 \\ & + \frac{(-n)!}{(-2n+3)!(n-4)!} a_2^{n-4} a_4 + \frac{(-n)!}{(2(-n+2))!(n-5)!} a_2^{n-5} \\ & \times [a_5 + (-n+2) a_3^2] + \frac{(-n)!}{(-2n+5)!(n-6)!} a_2^{n-6} [a_6 + (-2n+5) a_3 a_4] \\ & + \sum_{j \geq 7} a_2^{n-j} V_j, \end{aligned}$$

به‌طوری که $V_j$ با $7 \leq j \leq n$ یک چندجمله‌ای همگن در متغییرهای $a_2, a_3, \ldots, a_n$ است که سه جمله اول $K_{n-1}^{-n}$ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} K_1^{-2} = -a_2, \\ & \frac{1}{3} K_2^{-3} = 2a_2^2 - a_3, \\ & \frac{1}{4} K_3^{-4} = -(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4). \end{aligned}$$

**لم ۱.۳.۱.** [۲، ۳] فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}$. در این‌صورت برای هر $p \in \mathbb{Z}$، بسط $K_n^p$ به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$(1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_k z^{k-1} + \cdots)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^p(a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) z^n,$$

که

$$K_n^p(a_2, \ldots, a_{n+1}) = p a_{n+1} + \frac{p(p-1)}{2} D_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!} D_n^3 + \cdots + \frac{p!}{(p-n)!(n)!} D_n^n \tag{۱۳.۱}$$

و

$$D_n^m = D_n^m(a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!(a_2)^{i_1} \cdots (a_{n+1})^{i_n}}{i_1! \cdots i_n!}, \tag{۱۴.۱}$$

که اعداد صحیح غیر منفی $\mu_1, \ldots, \mu_n$ در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m, \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + n\mu_n = n. \end{cases}$$

واضح است که

$$D_n^n(a_2, a_3, \cdots a_{n+1}) = a_2^n.$$

به‌طور خاص

$$\begin{aligned} &K_n^1 = a_{n+1},\ K_1^2 = 2a_2 \\ &K_2^2 = 2a_3 + a_2^2,\ K_3^2 = 2a_4 + 2a_2a_3, \\ &K_4^2 = 2a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2. \end{aligned}$$

### ۱.۳.۱ کاربرد چندجمله‌ای فابر در تخمین ضرایب توابع زیرکلاس $\Sigma$

در سال ۱۹۲۳ لونر [1] [۸۳] اثبات کرد که عکس تابع کوئب $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ بهترین کران‌های بالایی را برای ضرایب معکوس توابع $f \in S$ فراهم می‌کند. کران‌های دقیقی برای ضرایبی از معکوس توابع تک‌ارز به طرز ساده اما شگفت‌آور به دست آمده است، در حالی‌که برای مواردی از زیرکلاس‌های توابع تک‌ارز به یک چالش تبدیل شده است. در ۱۹۷۹ کرزیز [2] و همکارانش [۶۶] کران‌های دقیقی برای دو ضریب نخستین معکوس توابع ستارگون از مرتبه $\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$ بدست آوردند. در ۱۹۸۲ لیبرا [3] و زلوتکیویچ [4] [۷۹] کران‌هایی برای هفت ضریب نخستین معکوس توابع محدب بدست آوردند. سپس آن‌ها در [۸۰] شش ضریب نخستین معکوس توابع را به‌شرطی‌که

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \ (z \in \mathbb{U}),$$

را محاسبه کردند. در ادامه [۷۹] آن‌ها تابع فرد

$$f(z) = z + a_3z^3 + a_5z^5 + \cdots,$$

[1] Löwner
[2] Krzyz
[3] Libera
[4] Zlotkiewicz

را در نظر گرفتند و نشان دادند که اگر

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

آن‌گاه حالت تساوی برای کران ضرایب تابع معکوس $f$ در

$$[-z + \log((1+z)/(1-z))]^{-1}$$

برقرار است. در ۱۹۸۶ جونجا [1] و راجزکاران [2] [۶۱] تخمین ضرایبی برای توابع معکوس $\alpha$ـ مارپیچ بدست آوردند. در ۱۹۸۹ سیلورمن [3] [۱۰۸] ثابت کرد که اگر $f \in \mathcal{S}$ به‌طوری‌که

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$$

آن‌گاه $n$ـ امین ضریب تابع معکوس $f$ به

$$\frac{1}{n}\binom{n-2}{2n-3}\frac{1}{2^{n-2}}$$

محدود می‌شود. در ۱۹۹۲ لیبرا و زلوتکیویچ [۸۱] نشان دادند که $n$ـ امین ضریب معکوس توابع ستارگون به

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

محدود می‌شود. چو [4] [۳۱] در ۱۹۹۴ ثابت کرد اگر $f \in \mathcal{S}$ و

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

آن‌گاه حالت تساوی برای کران ضرایب تابع معکوس $f$ در

$$[-z + 2\log(1+z)]^{-1}$$

برقرار است. تخمین‌ها برای دو ضریب نخستین از معکوس زیرکلاس‌هایی از توابع ستاره‌گون هم‌چنین در [۳۶] و [۱۱۲] بدست آمده است.

تا به امروز، آخرین نتایج شناخته شده در این حوزه توسط مقاله‌های زیر ارائه شده است. کاپور [5] و میشرا [6] [۶۵] کران‌های دقیقی برای ضرایب توابع تک‌ارز ستاره‌گون در $\mathbb{U}$ از مرتبه

---

[1] Juneja
[2] Rajasekaran
[3] Silverman
[4] Chou
[5] Kapoor
[6] Mishra

$\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$ پیدا کردند و برای توابع معکوسش، زمانی‌که $\frac{n-1}{n} \le \alpha < 1$ کران

$$\frac{2(1-\alpha)}{n+1},$$

را بدست آوردند. در ادامه، سریواستاوا و همکارانش [۱۱۲] کران‌های دقیقی برای ضرایب توابع تک‌ارز ستاره‌گون از مرتبه $\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$ که شکاف مکرر مرتبه‌ی $m$ در نمایش سری‌شان در $\mathbb{U}$ دارند پیدا کردند و هم‌چنین توابع معکوس‌شان را بدست آوردند. دو مقاله فوق، کران ضرایب را برای توابع ستاره‌گون و معکوسش مورد ارزیابی قرار دادند اما آن‌ها توابع را به عنوان توابع دوـ ستاره‌گون در نظر نگرفته‌اند.

هنگامی مشکل پدیدار می‌شود که شرایط دوـ تک‌ارزی بر تابع $f$ تحمیل شده باشد. شرایط دوـ تک‌ارزی ایجاب می‌کند که پیدا کردن کران برای ضرایب $f$ و تابع معکوسش $g = f^{-1}$ اهمیت زیادی پیدا کند. با الهام گرفتن از مقاله ها و کارهایی که در بالا اشاره شد تخمین ضرایب برای توابع دوـ ستاره‌گون با کاربرد چندجمله‌ای فابر مورد بررسی قرار گرفتند. در این راستا جهانگیری و و همکارانش [۵۹] زیرکلاس از $\Sigma$ را به‌صورت زیر معرفی کردند و تخمینی از ضرایب $|a_n|$ $(n \ge 3)$ را برای توابع این زیرکلاس بدست آوردند.

**تعریف ۲.۳.۱.** [۵۹] تابع $f \in \mathcal{A}$ را متعلق به کلاس $R(p;\beta)$ گوییم هرگاه برای $f$ و تابع معکوسش $g = f^{-1}$ داشته باشیم

$$\operatorname{Re}(f'(z))^p > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

و

$$\operatorname{Re}(g'(w))^p > \beta \quad (w \in \mathbb{U}),$$

که $p \in \mathbb{N}$، $0 \le \beta < 1$ و $g = f^{-1}$.

زیرکلاس $R(1;\beta)$ قبلا توسط سریواستاوا و همکارانش [۱۱۱] معرفی شده بود که توابع این زیرکلاس به عنوان توابع تک‌ارز شناخته شده هستند.

**قضیه ۱.۳.۱.** [۵۹] فرض کنیم تابع $f \in R(p;\beta)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر $a_k = 0$ برای $2 \le k \le n-1$، آنگاه

$$|a_n| \le \frac{2(1-\beta)}{np} \quad (n \ge 3).$$

جهانگیری و حمیدی مفهومی از توابع دوـ بلازویچ [1] از مرتبه $\beta$ و نوع $\mu$ ارائه دادند و تخمینی

[1] Bi-Bazilevič

از ضرایب $|a_n|$ $(n \geq 3)$ را برای این‌گونه توابع بدست آوردند.

**تعریف ۱.۳.۳.** [۶۰] تابع $f \in \mathcal{S}$ در $\mathbb{U}$ دو-بلازویچ از مرتبه $\beta$ و نوع $\mu$ نامیده می‌شود هرگاه $f$ و معکوسش $g = f^{-1}$ هر دو در $\mathbb{U}$ بلازویچ از مرتبه $\beta$ و نوع $\mu$ باشند.

**قضیه ۱.۳.۲.** [۶۰] فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{B}(\beta; \mu)$ دو-بلازویچ باشد و طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر $a_k = 0$ برای $2 \leq k \leq n-1$، آن‌گاه

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\beta)}{(n-1)+\mu} \quad (n \geq 3).$$

اخیرا، نویسندگان زیادی با کاربرد چندجمله‌ای فابر تحت شرایط خاص [۲۵، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۱۱۰]، تخمینی از کران $|a_n|$ برای توابع دو-تک‌ارز از زیرکلاس‌های مختلف $\Sigma$ را بدست آورده‌اند.

در ادامه، بسط چندجمله‌ای فابر برخی توابع راکه محققان در تخمین ضرایب استفاده کرده‌اند را بیان می‌کنیم.

**لم ۱.۳.۲.** [۵، ۱۹] فرض کنیم $f(z) = z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \cdots \in \mathcal{S}$، در این‌صورت

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} F_n(b_1, b_2, \dots b_n) z^n,$$

که $F_n$، $n$-امین چندجمله‌ای فابر است و $F_n(b_1, b_2, \cdots b_n)$ را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد

$$F_n(b_1, b_2, \cdots b_n) = \sum_{i_1 + 2i_2 + \cdots + ni_n = n} A(i_1, i_2, \dots, i_n)(b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots b_n^{i_n}),$$

که

$$A(i_1, i_2, \cdots, i_n) := (-1)^{n+2i_1+\cdots+(n+1)i_n} \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n - 1)!n}{i_1! i_2! \cdots i_n!}.$$

نخستین چندجمله‌ای‌های فابر $F_n$ عبارتند از

$$F_1 = -b_1,$$
$$F_2 = b_1^2 - 2b_2,$$
$$F_3 = -b_1^3 + 3b_1 b_2 - 3b_3,$$
$$F_4 = b_1^4 - 4b_1^2 b_2 + 4b_1 b_3 + 2b_2^2 - 4b_4, \dots .$$

**لم ۳.۳.۱.** [۵] فرض کنیم $f(z)=z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\in\mathcal{S}$ و $k\in\mathbb{Z}$. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^k &= 1-\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}^{n+k-1}(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})z^{n-1}\\ &= 1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{n-1}{k}\right)K_{n-1}^{k}(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})z^{n-1},\end{aligned}$$

که نخستین چندجمله‌ای‌های فابر $F_{n-1}^{n+k-1}(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$ عبارتند از :

$$\begin{aligned}&F_1^{k+1}(b_1)=(1+\lambda)b_1,\\ &F_2^{k+2}(b_1,b_2)=\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{2}b_1^2+(\lambda+2)b_2,\ldots.\end{aligned}$$

**لم ۴.۳.۱.** [۳] فرض کنیم $f(z)=z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\in\mathcal{S}$، در این‌صورت

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=-\sum_{n=1}^{\infty}F_n\left(2b_1,3b_2,\ldots,(n+1)b_n\right)z^{n-1},$$

که $F_n$، $n$ـ امین چندجمله‌ای فابر است.

**لم ۵.۳.۱.** [۲] فرض کنیم $f(z)=z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\in\mathcal{S}$ و $p\in\mathbb{N}$، در این‌صورت

$$(f'(z))^p=1+\sum_{n=1}^{\infty}F_n(2b_1,3b_2,\ldots(n+1)b_n)z^n,$$

که $F_n$، $n$ـ امین چندجمله‌ای فابر است.

## ۴.۱ دترمینان هنکل

در ۱۹۷۶، $q$ـ امین دترمینان هنکل برای اعداد صحیح $q\geq 1$ و $n\geq 1$ توسط نونان[1] و توماس[2] [۹۲] به‌صورت زیر تعریف شد

$$H_q(n)=\begin{vmatrix}a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1}\\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2}\end{vmatrix}\qquad (a_1=1)\,.$$

[1] Noonan
[2] Thomas

دترمینان هنکل نقش مهمی را در مطالعه نقاط منفرد و سری‌های توانی با ضرایب انتگرالی بازی می‌کند [۲۹، ۳۴]. به عنوان مثال، برای نشان دادن این‌که یک تابع مشخصه کراندار در $\mathbb{U}$، یعنی تابعی که نسبت دو توابع تحلیلی کراندار است، با بسط لوران [۱] مربوط به آن در همسایگی مبدا با ضرایب انتگرالی، گویا است.

توجه کنید که

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

دترمینان هنکل $H_2(1) = a_3 - a_2^2$ به عنوان تابعک فکته‌ـسیزاگو [۲] هنکل شناخته شده است. علاوه بر این، فکته و سیزاگو [۴۲] تابعک توسیع یافته $a_3 - \delta a_2^2$ که $\delta$ عدد حقیقی است را برای $f \in \mathcal{A}$ معرفی کردند که برای تاریخچه غنی‌اش در نظریه هندسی توابع شناخته شده است. برای نتایج مربوط به تابعک فکته‌ـسیزاگو به [۸، ۱۰، ۸۵] رجوع کنید.

دترمینان هنکل $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ به عنوان دترمینان هنکل دوم در نظر گرفته می‌شود. برای نتایج مربوط به دترمینان هنکل دوم به [۱۶، ۵۵، ۵۶، ۸۴، ۸۷] رجوع کنید.

برای کاربرد دترمینان هنکل در مطالعه توابع مرومورفیک، به [۱۱۹] رجوع کنید. خواص مختلف این دترمینان می‌تواند در [۱۱۸]، فصل ۴] یافت شود. در ۱۹۹۶ پومرنکه [۳] [۷۵] دترمینان هنکل توابع $p$ـ متغیر، تک‌ارز و ستاره‌گون را مورد بررسی قرار داد. او در [۷۶] ثابت کرد که دترمینان توابع تک‌ارز در

$$|H_q(n)| < K\, n^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)q+\frac{3}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots,\ q = 2, 3, \ldots),$$

صدق می‌کنند که $\beta > \frac{1}{4000}$ و $K$ فقط به $q$ بستگی دارد. در ادامه، هیمن [۴] [۵۴] برای توابع تک‌ارز ثابت کرد

$$|H_2(n)| < A\, n^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

که $A$ ثابت مطلق است. در [۹۰، ۹۱، ۹۲] تخمین‌هایی از دترمینان هنکل توابع تک‌ارز $p$ـ متغیر بررسی شدند. الهوش [۵] کران‌هایی برای دترمینان هنکل توابع تک‌ارز با شاخص $\alpha$ هیمن مثبت [۳۸] و از مرتبه‌ی $k$ـ مکرر متقارن و توابع تقریبا محدب [۳۹] بدست آوردند. برای کران‌هایی از دترمینان هنکل برروی توابع تقریبا محدب به مراجع [۹۷، ۹۸، ۱۰۰] رجوع کنید. نور [۶] و ال‌ـ

---

[1] Laurent
[2] Fekete-Szegö
[3] Pommerenke
[4] Hayman
[5] ElHosh
[6] Noor

بنی [۱] دترمینان هنکل توابع بلازویچ [۹۶] و توابعی با دوران مرزی کراندار [۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۹] را مطالعه کردند.

### ۱.۴.۱ دترمینان هنکل دوم توابع زیرکلاس $\Sigma$

کاگلار [۲] و همکارانش [۲۷] کران‌هایی برای دترمینان هنکل دوم برای زیرکلاس‌های معرفی شده در تعریف ۴.۲.۱ و در بخش ۱.۳.۱ بدست آوردند.

**قضیه ۱.۴.۱.** [۲۸] فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{N}_{\Sigma}^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{4\alpha^2}{9}, & 0 < \alpha \leq \frac{7}{24} \\[2ex] \dfrac{\alpha^2}{49}\left(\frac{64\alpha^2-144\alpha+5}{12\alpha^2-12\alpha+1}\right), & \frac{7}{24} \leq \alpha \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \\[2ex] \dfrac{\alpha^2(8\alpha^2+1)}{6}, & \frac{1+\sqrt{2}}{4} \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

**قضیه ۲.۴.۱.** [۲۸] فرض کنیم تابع $f \in R(1;\beta)$ $(0 \leq \beta < 1)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{(1-\beta^2)}{2}(2(1-\beta^2)+1), & 0 \leq \beta \leq \dfrac{11-\sqrt{37}}{2} \\[2ex] \dfrac{(1-\beta^2)}{16}\left(\frac{60\beta^2-84\beta-25}{9\beta^2-15\beta+1}\right), & \frac{11-\sqrt{37}}{2} < \beta \leq 1. \end{cases}$$

دنیز [۳] و همکارانش [۳۳] کران هایی برای دترمینان هنکل دوم توابع دو–ستاره‌گون و دو–محدب به صورت زیر برای زیرکلاس‌های معرفی شده در تعریف ۲.۲.۱ بدست آوردند.

**قضیه ۳.۴.۱.** [۳۳] فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ $(0 \leq \beta < 1)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \frac{4}{3}(1-\beta)^2(4\beta^2-8\beta+5), & \beta \in \left[0, \dfrac{29-\sqrt{137}}{32}\right] \\[2ex] (1-\beta)^2\left(\dfrac{13\beta^2-14\beta-7}{16\beta^2-26\beta+5}\right), & \beta \in \left(\dfrac{29-\sqrt{137}}{32}, 1\right). \end{cases}$$

---
[1] Al-Bany
[2] Çağlar
[3] Deniz

**قضیه ۱.۴.۴.** [۳۳] فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{C}^*_\Sigma(\beta)$ $(0 \leq \beta < 1)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در اینصورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(1-\beta)^2}{24}\left(\frac{5\beta^2+8\beta-32}{3\beta^2-3\beta-4}\right).$$

اخیرا، محققان زیادی برخی از مسائل مربوط به این حوزه را با توجه به لم‌های ۱.۱.۱ و ۲.۱.۱ مطالعه کرده‌اند، برای مثال می توان به مراجع [۷، ۲۸، ۳۳، ۶۳، ۶۴، ۱۲۲، ۱۲۳] اشاره کرد.

# فصل ۲

# تخمین ضرایب توابع زیرکلاس $\Sigma$ وابسته به زیرترتیبی با استفاده از چندجمله‌ای فابر

در این فصل، با استفاده از چندجمله‌ای فابر و با یک روش متفاوت از کارهای پیشین تخمینی از ضرایب $|a_n|$ برای زیرکلاس‌هایی از $\Sigma$ شامل توابع دو–تک‌ارز که توسط زیرترتیبی در قرص یکه تعریف شده‌اند را بدست می‌آوریم که برخی از کارهای اخیر که در این زمینه انجام شده‌اند را توسیع و بهبود می‌بخشد. برای مطالعه‌ی جامع‌تر به مراجع [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۷] مراجعه شود.

## ۱.۲ تخمین ضرایب توابع زیرکلاس $\Sigma$ وابسته به زیرترتیبی

ابتدا تخمینی از ضرایب $|a_n|$ برای توابع رده‌ی $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$ بدست می‌آوریم سپس کران $|a_2|$ و $|a_3|$ برخی نتایج قبلی را بهبود می‌بخشیم. برای این‌کار ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

**لم ۱.۱.۲.** فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$، در این‌صورت به‌ازای‌هر $0 \leq \mu$ و $1 \leq \lambda$

بسط زیر را داریم

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\\&=1+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\mu+\lambda n}{\mu}\right)K_n^{\mu}(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1})z^n,\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mu+\lambda n}{\mu}\right)K_n^{\mu}(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1})=[\mu+\lambda n](\mu-1)!\\&\times\left[\sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=n}\frac{(a_2)^{i_1}(a_3)^{i_2}\cdots(a_{n+1})^{i_n}}{i_1!i_2!\cdots i_n![\mu-(i_1+i_2+\cdots+i_n)]!}\right].\end{aligned} \tag{۱.۲}$$

در حالت خاص دو جمله نخستین عبارتند از

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)K_1^{\mu}(a_2)=(\mu+\lambda)a_2,\\&\left(\frac{\mu+2\lambda}{\mu}\right)K_2^{\mu}(a_2,a_3)=(\mu+2\lambda)[\frac{\mu-1}{2}a_2^2+a_3].\end{aligned}$$

***برهان.*** ابتدا قرار می‌دهیم $h(z):=\frac{f(z)}{z}=1+\sum_{n\geq 1}a_{n+1}z^n$. با کاربرد لم ۱.۳.۱ ما داریم

$$h(z)^{\mu}=1+\sum_{n\geq 1}K_n^{\mu}(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1})z^n,$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\\&=h(z)^{\mu}+\frac{\lambda z}{\mu}\frac{d}{dz}(h(z)^{\mu})\\&=1+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\mu+\lambda n}{\mu}\right)K_n^{\mu}(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1})z^n.\end{aligned}$$

حال با استفاده از معادله (۱.۱۳) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

**نتیجه ۲.۱.۱.** فرض کنیم، $f\in\mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$ در این‌صورت

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(\frac{f*\Theta(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda(f*\Theta)'(z)\left(\frac{f*\Theta(z)}{z}\right)^{\mu-1}\\&=1+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}(a_2b_2,a_3b_3,\ldots,a_nb_n)z^{n-1},\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}F_{n-1}(a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n) &= \left(\frac{\mu+(n-1)\lambda}{\mu}\right) K_{n-1}^{\mu}(a_2b_2, a_3b_3, \cdots, a_nb_n)\\ =&\left[\sum_{i_1+\cdots+(n-1)i_{n-1}=n-1} \frac{(a_2b_2)^{i_1}(a_3b_3)^{i_2}\cdots(a_nb_n)^{i_{n-1}}}{i_1!i_2!\cdots i_{n-1}![\mu-(i_1+i_2+\cdots+i_{n-1})]!}\right]\\ &\times[\mu+(n-1)\lambda](\mu-1)!.\end{aligned}$$

***برهان.*** زمانی‌که $(f*\Theta)(z) = z+\sum_{n\geq 1} a_nb_nz^n$، با کاربرد لم ۱.۱.۲ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

**نتیجه ۲.۱.۲.** فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$، در این‌صورت

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda((f*\Theta)^{-1})'(w)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu-1}\\ =&1+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}(A_2, A_3, \dots, A_n)w^{n-1},\end{aligned}$$

که

$$F_{n-1}=\left(\frac{\mu+(n-1)\lambda}{\mu}\right)K_{n-1}^{\mu}$$

و

$$A_n=\frac{1}{n}K_{n-1}^{-n}(a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n).$$

***برهان.*** به‌طور مشابه، با توجه به نتیجه ۱.۱.۲ نتیجه مطلوب بدست می‌آید. □

**لم ۲.۱.۲.** فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$، در این‌صورت

$$F_{n-1}(a_2b_2, a_3b_3, \cdots, a_nb_n)=\sum_{k=1}^{n-1}B_kD_{n-1}^{k}(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \qquad (۲.۲)$$

و

$$F_{n-1}(A_2, A_3, \cdots, A_n)=\sum_{k=1}^{n-1}B_kD_{n-1}^{k}(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}), \qquad (۳.۲)$$

که $F_{n-1}$ و $A_n$ همانند نتیجه ۲.۱.۲ تعریف می‌شوند.

***برهان.*** فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$، آن‌گاه طبق فرض دو تابع شوارتس $u, v:\mathbb{U}\to\mathbb{U}$ به‌صورت

$$u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n \quad \text{و} \quad v(z)=\sum_{n=1}^{\infty}q_nz^n, \qquad (۴.۲)$$

با $u(0) = v(0) = 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$(1-\lambda)\left(\frac{f*\Theta(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda(f*\Theta)'(z)\left(\frac{f*\Theta(z)}{z}\right)^{\mu-1} = \varphi(u(z)) \tag{۵.۲}$$

و

$$(1-\lambda)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda((f*\Theta)^{-1})'(w)\left(\frac{(f*\Theta)^{-1}(w)}{w}\right)^{\mu-1} = \varphi(v(w)). \tag{۶.۲}$$

حال با استفاده از (۹.۱) و (۱۴.۱) داریم

$$\begin{aligned}\varphi(u(z)) =& 1 + B_1 u(z) + B_2(u(z))^2 + \cdots = 1 + B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \cdots \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} B_k D_n^k(p_1, p_2, \cdots, p_n) z^n \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

و

$$\begin{aligned}\varphi(v(w)) =& 1 + B_1 v(z) + B_2(v(z))^2 + \cdots = 1 + B_1 q_1 w + (B_1 q_2 + B_2 q_1^2) w^2 + \cdots \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} B_k D_n^k(q_1, q_2, \cdots, q_n) w^n. \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

با توجه به نتیجه ۱.۱.۲ و مقایسه ضرایب (۵.۲) و (۷.۲) رابطه (۲.۲) را بدست می آوریم. به‌طور مشابه، با توجه به نتیجه ۲.۱.۲ و مقایسه ضرایب (۶.۲) و (۸.۲) رابطه (۳.۲) حاصل می‌گردد، لذا اثبات کامل می‌شود. □

**قضیه ۱.۱.۲.** فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر برای $2 \leq k \leq n-1$، $a_k = 0$ آنگاه

$$|a_n| \leq \frac{B_1}{[\mu+(n-1)\lambda]b_n} \quad (n \geq 3). \tag{۹.۲}$$

***برهان.*** از فرض $2 \leq k \leq n-1$، $a_k = 0$ بدست می‌آوریم $A_n = -a_n b_n$ و

$$p_1 = \cdots = p_{n-2} = 0, \qquad q_1 = \cdots = q_{n-2} = 0.$$

بنابراین از (۲.۲) و (۳.۲) داریم

$$[\mu+(n-1)\lambda]a_n b_n = B_1 p_{n-1} \tag{۱۰.۲}$$

و

$$-[\mu + (n-1)\lambda]a_n b_n = B_1 q_{n-1}. \qquad (۱۱.۲)$$

با حل هر یک از روابط (۱۰.۲) و (۱۱.۲) برای $a_n$ و لم ۴.۱.۱ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|a_n| =& \frac{B_1|p_{n-1}|}{[\mu + (n-1)\lambda]b_n} = \frac{B_1|q_{n-1}|}{[\mu + (n-1)\lambda]b_n}\\ \leq& \frac{B_1}{[\mu + (n-1)\lambda]b_n},\end{aligned}$$

لذا اثبات کامل می‌شود. □

**قضیه ۲.۱.۲.** فرض کنیم $f \in \Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر برای $2 \leq k \leq n-1$، $a_k = 0$ آن‌گاه

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|\, B_1}{n\,[1+\gamma(n-1)]} \qquad (n \geq 3)\,.$$

***برهان.*** به‌طور مشابه، با توجه به اثبات قضیه ۱.۱.۲ نتیجه مطلوب بدست می‌آید. □

**قضیه ۳.۱.۲.** فرض کنیم $f \in H_q^{\Sigma}(\lambda, h)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر برای $2 \leq k \leq n-1$، $a_k = 0$ آن‌گاه

$$|a_n| \leq \frac{B_1 + |\alpha_{n-1}|}{1+(n-1)\lambda} \qquad (n \geq 3)\,.$$

***برهان.*** فرض کنیم $F(z) = (1-\lambda)\dfrac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)$ و $G(w) = (1-\lambda)\dfrac{g(w)}{w} + \lambda g'(w)$، لذا طبق فرض داریم

$$F(z) \prec_q \varphi(z), \qquad\qquad G(w) \prec_q \varphi(w).$$

بنابراین طبق تعریف شبه‌ــ زیرترتیبی داریم

$$F(z) = \phi(z)\varphi(u(z)), \qquad\qquad G(w) = \phi(w)\varphi(v(w)), \qquad (۱۲.۲)$$

که $u,\ v$ طبق (۴.۲) تعریف شده اند. لذا توسط (۵.۱) و (۹.۱) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\phi(z)\varphi(u(z))\\
=&(1+B_1p_1z+(B_1p_2+B_2p_1^2)z^2+\cdots)(1+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\alpha_3z^3+\cdots)\\
=&[1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}B_kD_n^k(p_1,p_2,\cdots,p_n)z^n][1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nz^n]
\end{aligned}\tag{۱۳.۲}$$

و

$$\begin{aligned}
&\phi(w)\varphi(v(w))\\
=&(1+B_1q_1w+(B_1q_2+B_2q_1^2)w^2+\cdots)(1+\alpha_1w+\alpha_2w^2+\alpha_3w^3+\cdots)\\
=&[1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}B_kD_n^k(q_1,q_2,\cdots,q_n)w^n][1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nw^n].
\end{aligned}\tag{۱۴.۲}$$

از طرفی داریم

$$F(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}[1+\lambda(n-1)]na_nz^{n-1},\tag{۱۵.۲}$$

و

$$\begin{aligned}
G(w)=&1+\sum_{n=2}^{\infty}[1+\lambda(n-1)]nb_nw^{n-1}\\
=&1+\sum_{n=2}^{\infty}[1+\lambda(n-1)]n\frac{1}{n}K_{n-1}^{-n}(a_2,a_3,\cdots,a_n)w^{n-1}.
\end{aligned}\tag{۱۶.۲}$$

با مقایسه ضرایب (۱۲.۲)، (۱۳.۲) و (۱۵.۲) بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
&[1+\lambda(n-1)]na_n\\
=&\alpha_{n-1}+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{t}B_kD_t^k(p_1,p_2,\cdots,p_t)\alpha_{n-(t+1)}\ (\alpha_0=1).
\end{aligned}\tag{۱۷.۲}$$

بطور مشابه، از (۱۲.۲)، (۱۴.۲) و (۱۶.۲) داریم

$$\begin{aligned}
&[1+\lambda(n-1)]nb_n\\
=&\alpha_{n-1}+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{t}B_kD_t^k(q_1,q_2,\cdots,q_t)\alpha_{n-(t+1)}.
\end{aligned}\tag{۱۸.۲}$$

از فرض $2\le k\le n-1$، $a_k=0$ بدست می‌آوریم $b_n=-a_n$. در نتیجه از (۱۷.۲) و (۱۷.۲)

داریم

$$[1+\lambda(n-1)]na_n = B_1p_{n-1}+\alpha_{n-1}, \tag{۱۹.۲}$$

و

$$-[1+\lambda(n-1)]na_n = B_1q_{n-1}+\alpha_{n-1}. \tag{۲۰.۲}$$

با حل هر یک از معادلات (۱۹.۲) و (۲۰.۲) برای $a_n$ و لم ۴.۱.۱ بدست می‌آوریم

$$|a_n| = \frac{|B_1p_{n-1}+\alpha_{n-1}|}{[1+\lambda(n-1)]n} = \frac{|B_1q_{n-1}+\alpha_{n-1}|}{[1+\lambda(n-1)]n} \le \frac{B_1+|\alpha_{n-1}|}{[1+\lambda(n-1)]n},$$

لذا اثبات کامل می‌شود. □

با در نظر گرفتن

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1+2\alpha z+2\alpha^2z^2+\frac{8\alpha^3+4\alpha}{6}z^3+\cdots \qquad (0<\alpha\le 1),$$

نتیجه زیر حاصل می‌شود.

**نتیجه ۳.۱.۲.** فرض کنیم $f\in\mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha};\Theta\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر برای $2\le k\le n-1$، $a_k=0$ آن‌گاه

$$|a_n| \le \frac{2\alpha}{[\mu+(n-1)\lambda]b_n} \qquad (n\ge 3).$$

**ملاحظه ۱.۱.۲.** با انتخاب $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$ و

$$\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} = 1+2(1-\beta)z+2(1-\beta)z^2+2(1-\beta)z^3+\cdots \qquad (0\le\beta<1),$$

در قضیه ۱.۱.۲، نتیجه زیر که تخمین ارائه شده در [۲۶، قضیه ۱.۲] است، بدست می‌آید.

**نتیجه ۴.۱.۲.** فرض کنیم $f\in\mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}\left(\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z};\frac{z}{1-z}\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. اگر برای $2\le k\le n-1$، $a_k=0$ آن‌گاه

$$|a_n| \le \frac{2(1-\beta)}{\mu+(n-1)\lambda} \qquad (n\ge 3).$$

**ملاحظه ۲.۱.۲.** با انتخاب $\lambda=1$ و $\mu=1$ در نتیجه ۴.۱.۲، نتایج ارائه شده در قضیه ۲.۳.۱ و [۵۸، قضیه ۱] حاصل می‌شود.

**قضیه ۴.۱.۲.** فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}(\varphi;\Theta)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2| \leq \frac{1}{b_2} \min\left\{ l(\lambda,\mu), \frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left[2B_1(\lambda+\mu)^2 + |B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1) - 2B_2(\lambda+\mu)^2|\right]}} \right\} \tag{۲۱.۲}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{b_3} \min\left\{ k(\lambda,\mu), h(\lambda,\mu) \right\}, \tag{۲۲.۲}$$

که

$$l(\lambda,\mu) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2|B_1|}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}}, & |B_2| \leq B_1 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2|B_2|}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}}, & |B_2| > B_1, \end{cases}$$

$$k(\lambda,\mu) = \begin{cases} \dfrac{B_1}{(2\lambda+\mu)}, & B_1 \leq \dfrac{(\lambda+\mu)^2}{2\lambda+\mu} \\[2ex] \frac{B_1|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1) - 2B_2(\lambda+\mu)^2| + 2(2\lambda+\mu)B_1^3}{\left[2B_1(\lambda+\mu)^2 + |B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1) - 2B_2(\lambda+\mu)^2|\right](2\lambda+\mu)}, & B_1 > \dfrac{(\lambda+\mu)^2}{2\lambda+\mu} \end{cases}$$

و

$$h(\lambda,\mu) = \begin{cases} \dfrac{B_1[(\mu+3) + |1-\mu|]}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)} + \dfrac{2(|B_2| - B_1)}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}, & |B_2| > B_1 \\[2ex] \dfrac{B_1[(\mu+3) + |1-\mu|]}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)}, & |B_2| \leq B_1. \end{cases}$$

***برهان.*** از روابط (۲.۲) و (۳.۲) به ترتیب برای $n = 2$ و $n = 3$ داریم

$$(\lambda+\mu)a_2b_2 = B_1p_1, \tag{۲۳.۲}$$

$$(\mu+2\lambda)a_3b_3 + (\mu-1)\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)a_2^2b_2^2 = B_1p_2 + B_2p_1^2, \tag{۲۴.۲}$$

$$-(\lambda+\mu)a_2b_2 = B_1q_1, \tag{۲۵.۲}$$

$$-(\mu+2\lambda)a_3b_3 + (\mu+3)\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)a_2^2b_2^2 = B_1q_2 + B_2q_1^2. \tag{۲۶.۲}$$

از (۲.۲۳) و (۲.۲۵) بدست می‌آوریم

$$p_1 = -q_1. \tag{۲.۲۷}$$

با کاربرد (۲.۲۴)، (۲.۲۶) و (۲.۲۷) داریم

$$(2\lambda+\mu)(\mu+1)a_2^2b_2^2 = B_1(p_2+q_2) + 2B_2p_1^2. \tag{۲.۲۸}$$

از (۲.۲۸) و (۲.۲۳) حاصل می‌شود

$$B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)a_2^2b_2^2 - 2B_2(\lambda+\mu)^2a_2^2b_2^2 = B_1^3(p_2+q_2).$$

با توجه به لم ۱.۱.۴ و تساوی (۲.۲۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1) - 2B_2(\lambda+\mu)^2b_2^2|a_2|^2 \leq B_1^3(|p_2|+|q_2|)\\ \leq& 2B_1^3(1-|p_1|^2) = 2B_1^3 - 2B_1(\lambda+\mu)^2b_2^2|a_2|^2.\end{aligned}$$

بنابراین

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left[2B_1(\lambda+\mu)^2 + |B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1) - 2B_2(\lambda+\mu)^2|\right] b_2^2}}. \tag{۲.۲۹}$$

همچنین با توجه به لم ۱.۱.۴ و تساوی (۲.۲۸) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_2^2|a_2^2| \leq& B_1(|p_2|+|q_2|) + 2|B_2||p_1^2|\\ \leq& 2B_1(1-|p_1|^2) + 2|B_2||p_1|^2\\ =& 2B_1 + 2|p_1|^2(|B_2| - B_1)\\ \leq& \begin{cases} 2|B_1|, & |B_2| \leq B_1 \\ \\ 2|B_2|, & |B_2| > B_1, \end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$|a_2| \le \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2|B_1|}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_2^2}}, & |B_2| \le B_1 \\ \\ \sqrt{\dfrac{2|B_2|}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_2^2}}, & |B_2| > B_1. \end{cases} \tag{۳۰.۲}$$

بنابراین تخمین موردنظر برای $|a_2|$ بیان شده در (۲۱.۲) از (۲۹.۲) و (۳۰.۲) حاصل می‌شود.

حال به‌منظور پیدا کردن کران برای $|a_3|$ توسط (۲۴.۲) و (۲۶.۲) و کاربرد (۲۷.۲) داریم

$$2(2\lambda+\mu)b_3a_3 = B_1(p_2-q_2)+2(2\lambda+\mu)a_2^2b_2^2. \tag{۳۱.۲}$$

با توجه به لم ۴.۱.۱ و تساوی‌های (۲۸.۲) و (۳۱.۲) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} b_3a_3 =& \frac{B_1(p_2-q_2)}{2(2\lambda+\mu)} + \frac{B_1(p_2+q_2)+2B_2p_1^2}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)} \\ =& \frac{B_1[(\mu+3)p_2+(1-\mu)q_2]+4B_2p_1^2}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |a_3| \le& \frac{B_1[(\mu+3)|p_2|+|1-\mu||q_2|]+4|B_2||p_1|^2}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_3} \\ \le& \frac{B_1[(\mu+3)(1-|p_1|^2)+|1-\mu|(1-|p_1|^2)]+4|B_2||p_1|^2}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_3} \\ =& \frac{B_1(1-|p_1|^2)[(\mu+3)+|1-\mu|]+4|B_2||p_1|^2}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_3} \\ =& \frac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]+4|B_2||p_1|^2-B_1|p_1|^2[(\mu+3)+|1-\mu|]}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_3}. \end{aligned}$$

لذا برای $\mu \ge 0$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} |a_3| \le& \frac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]+4|B_2||p_1|^2-4B_1|p_1|^2}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_3} \\ =& \frac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]+4|p_1|^2(|B_2|-B_1)}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)b_3}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|a_3| \leq \frac{1}{b_3}\begin{cases} \dfrac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)}+\dfrac{2(|B_2|-B_1)}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}, & |B_2|>B_1 \\ \dfrac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)}, & |B_2|\leq B_1. \end{cases} \tag{۳۲.۲}$$

از طرف دیگر با توجه به لم ۴.۱.۱ و (۲۷.۲) از (۳۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} 2(2\lambda+\mu)b_3|a_3| \leq & B_1(|p_2|+|q_2|)+2(2\lambda+\mu)|a_2|^2b_2^2 \\ \leq & 2B_1(1-|p_1|^2)+2(2\lambda+\mu)|a_2|^2b_2^2. \end{aligned}$$

از (۲۳.۲) بدست می‌آوریم

$$B_1(2\lambda+\mu)b_3|a_3| \leq [(2\lambda+\mu)B_1-(\lambda+\mu)^2]|a_2|^2b_2^2+B_1^2,$$

حال از (۲۹.۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} B_1(2\lambda+\mu)b_3|a_3| \leq & [(2\lambda+\mu)B_1-(\lambda+\mu)^2] \\ & \times \frac{2B_1^3}{2B_1(\lambda+\mu)^2+|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2B_2(\lambda+\mu)^2|}+B_1^2. \end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت

$$|a_3| \leq \frac{B_1}{(2\lambda+\mu)b_3}\left[1+\frac{2B_1\left[B_1(2\lambda+\mu)-(\lambda+\mu)^2\right]}{2B_1(\lambda+\mu)^2+\left|B_1^2\left(\mu+1\right)\left(2\lambda+\mu\right)-2B_2(\lambda+\mu)^2\right|}\right]. \tag{۳۳.۲}$$

بنابراین تخمین موردنظر برای $|a_3|$ بیان شده در (۲۲.۲) از (۳۲.۲) و (۳۳.۲) حاصل می‌شود و لذا اثبات کامل می‌شود. □

**قضیه ۵.۱.۲.** فرض کنیم $f\in\Sigma(\tau,\gamma,\varphi)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2| \leq \frac{|\tau|\, B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{4(1+\gamma)^2B_1+|3(1+2\gamma)\tau B_1^2-4(1+\gamma)^2B_2|}}$$

و

$$|a_3| \leq \min\left\{k(\gamma), l(\gamma)\right\},$$

که

$$l(\gamma)=\begin{cases}\frac{|\tau|B_1}{3(1+2\gamma)}\times\frac{3(1+2\gamma)|\tau|B_1^2+\left|3(1+2\gamma)\tau B_1^2-4(1+\gamma)^2B_2\right|}{4(1+\gamma)^2B_1+\left|3(1+2\gamma)\tau B_1^2-4(1+\gamma)^2B_2\right|}, & 0<B_1\leq\frac{4(1+\gamma)^2}{3|\tau|(1+2\gamma)}\\ \\ \frac{|\tau|B_1}{3(1+2\gamma)}, & B_1\geq\frac{4(1+\gamma)^2}{3|\tau|(1+2\gamma)}\end{cases}$$

و

$$k(\gamma)=\begin{cases}\frac{\tau|B_2|}{3(1+2\gamma)} & |B_2|>B_1\\ \\ \frac{\tau B_1}{3(1+2\gamma)} & |B_2|\leq B_1.\end{cases}$$

***برهان.*** به‌طور مشابه، با توجه به اثبات قضیه ۴.۱.۲ نتیجه مطلوب بدست می‌آید. □

**ملاحظه ۳.۱.۲.** قضیه ۴.۱.۲ یک بهبود از تخمین‌های ارائه شده توسط بولوت در قضیه ۱.۲.۱ است. برای $|a_2|$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left[2B_1(\lambda+\mu)^2+|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2B_2(\lambda+\mu)^2|\right]}}\leq&\frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{2B_1(\lambda+\mu)^2}}\\ =&\frac{B_1}{\lambda+\mu}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left[2B_1(\lambda+\mu)^2+|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2B_2(\lambda+\mu)^2|\right]}}\\ \leq&\frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2(B_2-B_1)(\lambda+\mu)^2\right|}}.\end{aligned}$$

علاوه بر این، اگر $|B_2|\leq B_1$ یا $|B_2|>B_1$. آن‌گاه داریم

$$l(\lambda,\mu)\leq\sqrt{\frac{2(B_1+|B_2-B_1|)}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}}.$$

هم‌چنین برای $|a_3|$ حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم

**(الف)** اگر $B_1\leq\frac{(\lambda+\mu)^2}{2\lambda+\mu}$، آن‌گاه داریم

$$\frac{B_1}{2\lambda+\mu}\leq\frac{B_1}{2\lambda+\mu}+\frac{2B_1^3}{\sqrt{\left|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1)-2(B_2-B_1)(\lambda+\mu)^2\right|}}$$

و

$$\frac{B_1}{2\lambda+\mu} \le \frac{B_1^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{B_1}{2\lambda+\mu}.$$

**(ب)** اگر $B_1 > \frac{(\lambda+\mu)^2}{2\lambda+\mu}$، آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{2B_1^3\,(2\lambda+\mu) + B_1\left|B_1^2\,(\mu+1)\,(2\lambda+\mu) - 2B_2(\lambda+\mu)^2\right|}{(2\lambda+\mu)\left[2B_1(\lambda+\mu)^2 + \left|B_1^2\,(\mu+1)\,(2\lambda+\mu) - 2B_2(\lambda+\mu)^2\right|\right]}\\
=&\frac{2B_1^3}{2B_1(\lambda+\mu)^2 + \left|B_1^2\,(\mu+1)\,(2\lambda+\mu) - 2B_2(\lambda+\mu)^2\right|}\\
&+\frac{B_1\left|B_1^2\,(\mu+1)\,(2\lambda+\mu) - 2B_2(\lambda+\mu)^2\right|}{(2\lambda+\mu)\left[2B_1(\lambda+\mu)^2 + \left|B_1^2\,(\mu+1)\,(2\lambda+\mu) - 2B_2(\lambda+\mu)^2\right|\right]}\\
\le&\frac{2B_1^3}{2B_1(\lambda+\mu)^2} + \frac{B_1|B_1^2(2\lambda+\mu)(\mu+1) - 2B_2(\lambda+\mu)^2|}{(2\lambda+\mu)\left|B_1^2\,(\mu+1)\,(2\lambda+\mu) - 2B_2(\lambda+\mu)^2\right|}\\
\le&\frac{B_1^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{B_1}{2\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

**(پ)** اگر $|B_2| \le B_1$ یا $|B_2| > B_1$. آن‌گاه داریم

$$h(\lambda,\mu) \le \frac{B_1[(\mu+3)+|1-\mu|]}{2(\mu+1)(2\lambda+\mu)} + \frac{2|B_2-B_1|}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}.$$

**ملاحظه ۴.۱.۲.** با توجه به ملاحظه ۳.۱.۲ و استدلالی مشابه

(۱) اگر $\Theta(z) = \frac{z}{1-z}$، آن‌گاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۱۱۷، قضیه ۱.۲ ] بدست می‌آید.

(۲) اگر $\lambda = \mu = 1$ و $\Theta(z) = \frac{z}{1-z}$، آن‌گاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۹، قضیه ۱.۲ ] حاصل می‌گردد.

(۳) اگر $\mu = 1$، $\lambda \ge 1$ و $\Theta(z) = \frac{z}{1-z}$، آن‌گاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۶۷، قضیه ۲.۲ ] نتیجه می‌شود.

با انتخاب $\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ که $0 < \alpha \le 1$ در قضیه ۴.۱.۲ نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

**نتیجه ۵.۱.۲.** فرض کنیم $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha};\Theta\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2| \le \frac{1}{b_2}\min\left\{\sqrt{\frac{4\alpha}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}}, \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\alpha|\mu+2\lambda-\lambda^2|}}\right\}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{b_3} \min\left\{k(\lambda,\mu), \frac{\alpha[(\mu+3)+|1-\mu|]}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}\right\},$$

که

$$k(\lambda,\mu) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{(2\lambda+\mu)}, & 0<\alpha\leq \frac{(\lambda+\mu)^2}{2(2\lambda+\mu)} \\ \\ \dfrac{2\alpha^2|\mu+2\lambda-\lambda^2|+4\alpha^2(2\lambda+\mu)}{[(\lambda+\mu)^2+\alpha|\mu+2\lambda-\lambda^2|]\,(2\lambda+\mu)}, & \frac{(\lambda+\mu)^2}{2(2\lambda+\mu)}<\alpha\leq 1. \end{cases}$$

**ملاحظه ۲.۱.۵.** با توجه به نتیجه ۲.۱.۵ و استدلال بیان شده در ملاحظه ۲.۱.۳

(۱) اگر $\mu=1$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۳۷، قضیه ۱ ] بدست می‌آید.

(۲) اگر $\lambda=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۷۷، قضیه ۲.۲ ] حاصل می‌گردد.

(۳) اگر $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه تخمین ارائه شده برای $|a_3|$ و یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۲۷، قضیه ۲.۲ ] نتیجه می‌شود.

(۴) اگر $\lambda=\mu=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۱۱۱، قضیه ۱ ] بدست می‌آید.

(۵) اگر $\mu=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۴۳، قضیه ۲.۲ ] حاصل می‌گردد.

(۶) اگر $\mu=1$ و $\Theta(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a_1)_{n-1}\cdots(a_q)_{n-1}}{(b_1)_{n-1}\cdots(b_s)_{n-1}}\frac{1}{n!}z^n$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۱۵، قضیه ۴ ] نتیجه می‌شود.

(۷) اگر $\lambda=1$، $\mu=0$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۲۳] نتیجه می‌شود.

با انتخاب $\varphi(z)=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0\leq\beta<1$ در قضیه ۲.۱.۴ نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

**نتیجه ۲.۱.۶.** فرض کنیم $f\in\mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}\left(\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z};\Theta\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2| \leq \frac{1}{b_2}\min\left\{\sqrt{\frac{4(1-\beta)}{(2\lambda+\mu)(\mu+1)}}, \frac{2(1-\beta)}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+|(1-\beta)(2\lambda+\mu)(\mu+1)-(\lambda+\mu)^2|}}\right\}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{b_3}\min\left\{k(\lambda,\mu), \frac{(1-\beta)[(\mu+3)+|1-\mu|]}{2(2\lambda+\mu)(\mu+1)}\right\},$$

که

$$k(\lambda,\mu)=\begin{cases}\frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+\mu)}, & \frac{2(2\lambda+\mu)-(\lambda+\mu)^2}{2(2\lambda+\mu)}\leq\beta<1\\ \\ \frac{2(1-\beta)|(1-\beta)(2\lambda+\mu)(\mu+1)-(\lambda+\mu)^2|+4(2\lambda+\mu)(1-\beta)^2}{[(\lambda+\mu)^2+|(1-\beta)(2\lambda+\mu)(\mu+1)-(\lambda+\mu)^2|](2\lambda+\mu)}, & 0\leq\beta<\frac{2(2\lambda+\mu)-(\lambda+\mu)^2}{2(2\lambda+\mu)}.\end{cases}$$

**ملاحظه ۶.۱.۲.** با توجه به نتیجه ۶.۱.۲ و استدلال بیان شده در ملاحظه ۳.۱.۲

(۱) اگر $\mu=1$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۳۷، قضیه ۲ ] بدست می‌آید.

(۲) اگر $\lambda=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۷۷، قضیه ۲.۳ ] حاصل می‌گردد.

(۳) اگر $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۲۷، قضیه ۱.۳ ] نتیجه می‌شود.

(۴) اگر $\mu=\lambda=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۱۱۱، قضیه ۲ ] بدست می‌آید.

(۵) اگر $\mu=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۴۳، قضیه ۲.۳ ] حاصل می‌گردد.

(۶) اگر $\mu=1$ و $\Theta(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a_1)_{n-1}\cdots(a_q)_{n-1}}{(b_1)_{n-1}\cdots(b_s)_{n-1}}\frac{1}{n!}z^n$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۱۵، قضیه ۸ ] نتیجه می‌شود.

(۷) اگر $\lambda=1$، $\mu=0$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۲۳] نتیجه می‌شود.

(۸) اگر $\mu=1$ و $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۵۸، قضیه ۲ ] بدست می‌آید.

(۹) اگر $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۲۵، قضیه ۲ ] حاصل می‌گردد.

(۱۰) اگر $\Theta(z)=\frac{z}{1-z}$، آنگاه یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۶۰، قضیه ۲.۲ ] نتیجه می‌شود.

# فصل ۳

# دترمینان هنکل دوم توابع زیرکلاس $\Sigma$ وابسته به زیرترتیبی

در این فصل، با یک روش متفاوت از کارهای قبلی کرانی برای دترمینان هنکل دوم توابع زیرکلاس‌هایی از $\Sigma$ که توسط زیرترتیبی در قرص یکه تعریف شده‌اند را محاسبه می‌کنیم. علاوه بر این برخی از کارهای اخیر که در این حوزه انجام شده‌اند را توسیع و بهبود می‌بخشیم. برای مطالعه‌ی جامع‌تر به مرجع [۶۲، ۱۲۶، ۱۲۸] مراجعه شود.

## ۱.۳ کران دترمینان هنکل دوم توابع زیرکلاس $\Sigma$ وابسته به زیرترتیبی

ابتدا با یک روش متفاوت از کارهای قبلی کرانی برای دترمینان هنکل دوم توابع کلاس $\mathcal{M}_\Sigma(\alpha;\varphi)$ بدست می آوریم و سپس کران دترمینان هنکل دوم برخی نتایج قبلی را بهبود می‌بخشیم. برای این‌کار ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

**لم ۱.۱.۳.** اگر $\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n z^n$ یک تابع شوارتس در $\mathbb{U}$ باشد آن‌گاه برای بعضی از $x$، $s$ها

با $|x| \leq 1$ و $|s| \leq 1$

$$\psi_2 = x(1-\psi_1^2),$$
$$\psi_3 = (1-\psi_1^2)(1-|x|^2)s - \psi_1(1-\psi_1^2)x^2.$$

***برهان.*** قرار می‌دهیم

$$p(z) = \frac{1+\psi(z)}{1-\psi(z)}$$

که

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

برای هر $|z| < 1$ دارای خاصیت $\operatorname{Re} p(z) > 0$ است. با مقایسه ضرایب توان‌های $z$ داریم

$$p_1 = 2\psi_1, \qquad p_2 = 2(\psi_2 + \psi_1^2), \qquad p_3 = 2\psi_3 + 4\psi_1\psi_2 + 2\psi_1^3.$$

حال با توجه به لم ۲.۱.۱ رابطه زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 4(\psi_2 + \psi_1^2) =& 4\psi_1^2 + x(4-4\psi_1^2) \\ 4(2\psi_3 + 4\psi_1\psi_2 + 2\psi_1^3) =& 8\psi_1^3 + 4\psi_1(4-4\psi_1^2)x - 2\psi_1(4-4\psi_1^2)x^2 \\ &+ 2(4-4\psi_1^2)(1-|x|^2)s, \end{aligned}$$

که بعد از ساده کردن، اثبات کامل می‌شود. $\square$

حال نتیجه اصلی را برای $0 \leq \alpha \leq 1$ و $c_1 \in \mathbb{R}$ بیان می‌کنیم.

**قضیه ۳.۱.۱.** فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{M}_\Sigma(\alpha;\varphi)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود و $0 \leq \alpha \leq 1$. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq B_1 \times \begin{cases} R, & Q \leq 0, P \leq -Q \\ P+Q+R, & (Q \geq 0,\ P \geq -\frac{Q}{2}),\ \text{یا},\ (Q \leq 0, P \geq -Q) \\ \frac{4PR-Q^2}{4P}, & Q > 0, P \leq -\frac{Q}{2} \end{cases},$$

که

$$
\begin{aligned}
P =&\left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3}+\frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|-2\left(\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}+\frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)\\
&\frac{-2B_1}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}+\frac{B_1}{(2+4\alpha)^2}\\
Q =&2\left(\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}+\frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)+\frac{2B_1}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}-\frac{2B_1}{(2+4\alpha)^2}\\
R =&\frac{B_1}{(2+4\alpha)^2}.
\end{aligned}
$$

**برهان.** فرض کنیم $f\in\mathcal{M}_\Sigma(\alpha;\varphi)$، آنگاه طبق فرض دو تابع شوارتس $u,v:\mathbb{U}\to\mathbb{U}$

$$
u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n \quad \text{و} \quad v(z)=\sum_{n=1}^{\infty}q_nz^n,
$$

با $u(0)=v(0)=0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$
(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)=\varphi(u(z)), \tag{۱.۳}
$$

و

$$
(1-\alpha)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\alpha\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)=\varphi(v(w)), \tag{۲.۳}
$$

که توسط (۹.۱) بدست می‌آوریم

$$
\varphi(u(z))=1+B_1c_1z+(B_1c_2+B_2c_1^2)z^2+(B_1c_3+2c_1c_2B_2+B_3c_1^3)z^3+\cdots, \tag{۳.۳}
$$

و

$$
\varphi(v(w))=1+B_1d_1w+(B_1d_2+B_2d_1^2)w^2+(B_1d_3+2d_1d_2B_2+B_3d_1^3)w^3+\cdots. \tag{۴.۳}
$$

از (۱.۳)، (۳.۳) و (۲.۳)، (۴.۳) داریم

$$
(1+\alpha)a_2=B_1c_1 \tag{۵.۳}
$$

$$
2(1+2\alpha)a_3-(1+3\alpha)a_2^2=B_1c_2+B_2c_1^2 \tag{۶.۳}
$$

$$
3(1+3\alpha)a_4-3(1+5\alpha)a_2a_3+(1+7\alpha)a_2^3=B_1c_3+2c_1c_2B_2+B_3c_1^3 \tag{۷.۳}
$$

و

$$-(1+\alpha)a_2 = B_1 d_1 \tag{۸.۳}$$

$$(3+5\alpha)a_2^2 - 2(1+2\alpha)a_3 = B_1 d_2 + B_2 d_1^2 \tag{۹.۳}$$

$$(12+30\alpha)a_2a_3 - (10+22\alpha)a_2^3 - (3+9\alpha)a_4 = B_1 d_3 + 2d_1d_2B_2 + B_3d_1^3. \tag{۱۰.۳}$$

از (۵.۳) و (۸.۳) نتیجه می‌شود

$$c_1 = -d_1 \tag{۱۱.۳}$$

و

$$a_2 = \frac{B_1 c_1}{1+\alpha}. \tag{۱۲.۳}$$

حال از (۶.۳) و (۹.۳) داریم

$$a_3 = \frac{B_1^2 c_1^2}{(1+\alpha)^2} + \frac{B_1(c_2-d_2)}{4+8\alpha}. \tag{۱۳.۳}$$

همچنین از (۷.۳) و (۱۰.۳) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a_4 =& \frac{2(1+4\alpha)B_1^3c_1^3}{3(1+3\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{5B_1^2c_1(c_2-d_2)}{8(\alpha+1)(1+2\alpha)} + \frac{B_1(c_3-d_3)}{6(1+3\alpha)} \\ &+ \frac{B_2c_1(c_2+d_2)}{3(1+3\alpha)} + \frac{B_3c_1^3}{3(1+3\alpha)}. \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| = \Bigg| & \frac{-B_1^4c_1^4}{3(1+3\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_1^3c_1^2(c_2-d_2)}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} + \frac{B_1B_2c_1^2(c_2+d_2)}{3(1+3\alpha)(1+\alpha)} \\ &+ \frac{B_1B_3c_1^4}{3(1+3\alpha)(1+\alpha)} + \frac{B_1^2c_1(c_3-d_3)}{6(1+3\alpha)(1+\alpha)} - \frac{B_1^2(c_2-d_2)^2}{16(1+2\alpha)^2}\Bigg|. \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

از طرفی ازلم ۱.۱.۳ و رابطه (۱۱.۳) برای بعضی $x$، $w$، $s$، $y$ با $|x| \le 1$، $|y| \le 1$، $|s| \le 1$ و $|w| \le 1$ داریم

$$c_2 = x(1-c_1^2) \quad \text{و} \quad d_2 = y(1-d_1^2).$$

بنابراین

$$c_2 - d_2 = (1-c_1^2)(x-y) \quad \text{و} \quad c_2 + d_2 = (1-c_1^2)(x+y). \tag{۱۶.۳}$$

به‌علاوه داریم

$$c_3 = (1-c_1^2)(1-|x|^2)s - c_1(1-c_1^2)x^2$$

و

$$d_3 = (1-d_1^2)(1-|y|^2)w - d_1(1-d_1^2)y^2,$$

که

$$c_3 - d_3 = (1-c_1^2)((1-|x|^2)s - (1-|y|^2)w) - c_1(1-c_1^2)(x^2+y^2). \tag{۱۷.۳}$$

حال با استفاده از (۱۶.۳) و (۱۷.۳) در (۱۵.۳) داریم

$$\begin{aligned}
&|a_2a_4 - a_3^2| \\
=&B_1\Bigg|\left(\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)c_1^4 \\
&+\left(\frac{B_1^2(x-y)}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} + \frac{B_2(x+y)}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)\times c_1^2(1-c_1^2) \\
&-\frac{B_1c_1^2(1-c_1^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}(x^2+y^2) - \frac{B_1(1-c_1^2)^2}{(4+8\alpha)^2}(x-y)^2 \\
&+\frac{B_1c_1(1-c_1^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}[(1-|x|^2)s-(1-|y|^2)w]\Bigg|.
\end{aligned}$$

با توجه به لم ۴.۱.۱ زمانی‌که $|c_1| \leq 1$، لذا بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم

$c_1 = c \in [0,1]$، پس داریم

$$\begin{aligned}
&|a_2a_4 - a_3^2| \\
\leq &B_1\Bigg(\left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|c^4 \\
&+\left[\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} + \frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right]c^2(1-c^2)(|x|+|y|) \\
&+\frac{B_1c^2(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}(|x|^2+|y|^2) + \frac{B_1(1-c^2)^2}{(4+8\alpha)^2}(|x|+|y|)^2 \\
&+\frac{B_1c(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}[(1-|x|^2)|s| + (1-|y|^2)|w|]\Bigg) \\
\leq &B_1\Bigg(\left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|c^4 \\
&+\left[\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} + \frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right]c^2(1-c^2)(|x|+|y|) \\
&+\frac{B_1c^2(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}(|x|^2+|y|^2) + \frac{B_1(1-c^2)^2}{(4+8\alpha)^2}(|x|+|y|)^2 \\
&+\frac{B_1c(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}[(1-|x|^2) + (1-|y|^2)]\Bigg) \\
= &B_1\Bigg(\left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|c^4 + \frac{2B_1c(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)} \\
&+\left[\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} + \frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right]c^2(1-c^2)(|x|+|y|) \\
&+\left[\frac{B_1c^2(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)} - \frac{B_1c(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right](|x|^2+|y|^2) + \frac{B_1(1-c^2)^2}{(4+8\alpha)^2}(|x|+|y|)^2)\Bigg).
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\lambda = |x| \leq 1$ و $\mu = |y| \leq 1$ ، لذا داریم

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq B_1[T_1 + (\lambda+\mu)T_2 + (\lambda^2+\mu^2)T_3 + (\lambda+\mu)^2T_4] = B_1F(\lambda,\mu),$$

که

$$\begin{aligned}
T_1 = T_1(c) &= \left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|c^4 + \frac{2B_1c(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)} \geq 0 \\
T_2 = T_2(c) &= \left[\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)} + \frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right]c^2(1-c^2) \geq 0 \\
T_3 = T_3(c) &= \frac{B_1c(c-1)(1-c^2)}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)} \leq 0 \\
T_4 = T_4(c) &= \frac{B_1(1-c^2)^2}{(4+8\alpha)^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

حال ماکزیمم تابع $F(\lambda,\mu)$ را بر روی مربع بسته $[0,1]\times[0,1]$ برای هر $c \in [0,1]$ بدست می‌آوریم. برای این هدف، ماکزیمم تابع $F(\lambda,\mu)$ بر طبق $c \in (0,1)$، $c=0$ و $c=1$ با استفاده از

علامت

$$F_{\lambda\lambda}F_{\mu\mu}-(F_{\lambda\mu})^2,$$

محاسبه می‌کنیم.

ابتدا فرض کنیم $c\in(0,1)$. زمانی‌که $T_3<0$ و برای هر $c\in(0,1)$،

$$T_3+2T_4>0,$$

ما نتیجه می‌گیریم

$$F_{\lambda\lambda}F_{\mu\mu}-(F_{\lambda\mu})^2<0.$$

بنابراین تابع $F$ نمی تواند ماکزیمم خود را در نقاط داخلی مربع اختیار کند. حال ماکزیمم تابع $F$ را بر روی نقاط مرزی مربع بررسی می‌کنیم

برای $\lambda=0$ و $0\le\mu\le1$ (به‌طور مشابه $\mu=0$ و $0\le\lambda\le1$) بدست می‌آوریم

$$F(0,\mu)=H(\mu)=(T_3+T_4)\mu^2+T_2\mu+T_1.$$

**(الف)** اگر $T_3+T_4\ge0$: واضح است که برای $0<\mu<1$ و برای هر ثابت $c\in(0,1)$ تابع

$$H'(\mu)=2(T_3+T_4)\mu+T_2>0$$

یعنی، $H(\mu)$ یک تابع صعودی است. بنابراین برای هر ثابت $c\in(0,1)$ تابع $H(\mu)$ ماکزیمم خود را در $\mu=1$ اختیار می‌کند و داریم

$$\max H(\gamma)=H(1)=T_3+T_4+T_2+T_1.$$

**(ب)** اگر $T_3+T_4<0$: آن‌گاه به‌ازای‌هر ثابت $c\in(0,1)$، برای نقطه بحرانی $\mu=\frac{-T_2}{2(T_3+T_4)}=\frac{T_2}{2\theta}$ که $\theta=-(T_3+T_4)>0$ دو حالت درنظر می‌گیریم

**حالت اول:** فرض کنیم $\mu=\frac{T_2}{2\theta}>1$. لذا $\theta<\frac{T_2}{2}\le T_2$ و $T_2+T_3+T_4\ge0$. بنابراین

$$H(0)=T_1\le T_1+T_2+T_3+T_4=H(1).$$

**حالت دوم:** فرض کنیم $\mu=\frac{T_2}{2\theta}\le1$. زمانی‌که $\frac{T_2}{2}\ge0$ ما بدست می‌آوریم $\frac{T_2^2}{4\theta}\le\frac{T_2}{2}\le T_2$.

بنابراین

$$H(0)=T_1\leq T_1+\frac{T_2^2}{4\theta}=H(\frac{T_2}{2\theta})\leq T_1+T_2.$$

با توجه به موارد **(الف)** و **(ب)** برای $0<\mu<1$ و برای هر ثابت $c\in(0,1)$ تابع $H(\mu)$ ماکزیمم خود را زمانی‌که $T_3+T_4\geq 0$ اتخاذ می‌کند، یعنی

$$\max H(\mu)=H(1)=\underbrace{(T_3+T_4)}_{\geq 0}+T_2+T_1.$$

برای $\lambda=1$ و $0\leq\mu\leq 1$ (به‌طور مشابه $\mu=1$ و $0\leq\lambda\leq 1$) بدست می‌آوریم

$$F(1,\mu)=G(\mu)=(T_3+T_4)\mu^2+(T_2+2T_4)\mu+T_1+T_2+T_3+T_4.$$

**(پ)** اگر $T_3+T_4\geq 0$: واضح است که برای $0<\mu<1$ و برای هر ثابت $c\in(0,1)$ تابع

$$G'(\mu)=2(T_3+T_4)\mu+T_2+2T_4>0$$

یعنی، $G(\mu)$ یک تابع صعودی است. بنابراین برای هر هر ثابت $c\in(0,1)$ تابع $G(\mu)$ ماکزیمم خود را در $\mu=1$ اختیار می‌کند و داریم

$$\max G(\mu)=G(1)=T_1+2T_2+2T_3+4T_4.$$

**(ت)** اگر $T_3+T_4<0$: آن‌گاه به‌ازای‌هر ثابت $c\in(0,1)$، برای نقطه بحرانی

$$\mu=\frac{-(T_2+2T_4)}{2(T_3+T_4)}=\frac{(T_2+2T_4)}{2\theta}$$

که $\theta=-(T_3+T_4)>0$ دو حالت درنظر می‌گیریم

**حالت اول:** فرض کنیم $\mu=\frac{(T_2+2T_4)}{2\theta}>1$. لذا $\theta<\frac{T_2+2T_4}{2}\leq T_2+2T_4$ و $T_2+T_3+3T_4\geq 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}G(0)=&T_1+T_2+T_3+T_4\leq T_1+T_2+T_3+T_4+T_2+T_3+3T_4\\=&T_1+2T_2+2T_3+4T_4=G(1).\end{aligned}$$

**حالت دوم:** فرض کنیم $\mu=\frac{(T_2+2T_4)}{2\theta}\leq 1$. زمانی‌که $\frac{(T_2+2T_4)}{2}\geq 0$ ما بدست می‌آوریم

$$\frac{(T_2+2T_4)^2}{4\theta}\leq\frac{T_2+2T_4}{2}\leq T_2+2T_4.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} G(0) =&T_1+T_2+T_3+T_4 \leq T_1+T_2+T_3+T_4+\frac{(T_2+2T_4)^2}{4\theta} = G(\frac{T_2+2T_4}{2\theta}) \\ \leq& T_1+T_2+T_3+T_4+T_2+2T_4 = T_1+2T_2+T_3+3T_4 \\ =&T_1+2T_2+\underbrace{(T_3+T_4)}_{<0}+2T_4 \end{aligned}$$

باتوجه‌به موارد **(پ)** و **(ت)** برای $0 < \mu < 1$ و برای هر ثابت $c \in (0,1)$ تابع $H(\mu)$ ماکزیمم خود را زمانی‌که $T_3+T_4 \geq 0$ اتخاذ می‌کند، یعنی

$$\max G(\mu) = G(1) = T_1+2T_2+2\underbrace{(T_3+T_4)}_{\geq 0}+2T_4.$$

هم‌چنین برای $c=0$ داریم

$$F(\lambda,\mu) = \frac{4B_1(\lambda+\mu)^2}{(4+8\alpha)^2},$$

لذا

$$\max\{F(\lambda,\mu) : \lambda,\ \mu \in [0,1]\} = \frac{16B_1}{(4+8\alpha)^2}.$$

در پایان برای $c=1$ بدست می‌آوریم

$$F(\lambda,\mu) = \left| \frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)} \right|,$$

لذا

$$\max\{F(\lambda,\mu) : \lambda,\ \mu \in [0,1]\} = \left| \frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3} + \frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)} \right|.$$

با توجه به استدلال بیان شده برای حالت‌های $c$ و این‌که به‌ازای‌هر $c \in (0,1)$، $H(1) \leq G(1)$ است لذا ما داریم $\max F(\lambda,\mu) = F(1,1)$. بنابراین به‌ازای‌هر $c \in [0,1]$، $F$ ماکزیمم خود را در $\lambda = 1$ و $\mu = 1$ بروی مرز مربع اختیار می‌کند.

فرض کنیم $K : [0,1] \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$K(c) = B_1 \max F(\lambda,\mu) = B_1 F(1,1) = B_1(T_1+2T_2+2T_3+4T_4). \qquad (۱۸.۳)$$

با جای‌گذاری مقادیر $T_1$، $T_2$، $T_3$ و $T_4$ در تابع $K$ داریم

$$\begin{aligned}
&K(c)\\
=&B_1\Bigg\{\Bigg[\left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3}+\frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|-2\left(\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}+\frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)\\
&\frac{-2B_1}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}+\frac{B_1}{(2+4\alpha)^2}\Bigg]c^4+\Bigg[2\left(\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}+\frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)\\
&+\frac{2B_1}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}-\frac{2B_1}{(2+4\alpha)^2}\Bigg]c^2+\frac{B_1}{(2+4\alpha)^2}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

فرض کنیم $c^2=t$ و قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
P=&\left|\frac{-B_1^3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)^3}+\frac{B_3}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right|-2\left(\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}+\frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)\\
&\frac{-2B_1}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}+\frac{B_1}{(2+4\alpha)^2}\\
Q=&2\left(\frac{B_1^2}{8(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}+\frac{|B_2|}{(3+9\alpha)(1+\alpha)}\right)+\frac{2B_1}{2(3+9\alpha)(1+\alpha)}-\frac{2B_1}{(2+4\alpha)^2}\\
R=&\frac{B_1}{(2+4\alpha)^2}.
\end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

از طرفی داریم

$$\max_{0\le t\le 1}(Pt^2+Qt+R)=\begin{cases} R, & Q\le 0, P\le -Q\\ P+Q+R, & (Q\ge 0,\ P\ge -\frac{Q}{2}),\ \text{یا},\ \ (Q\le 0, P\ge -Q)\\ \frac{4PR-Q^2}{4P}, & Q>0, P\le -\frac{Q}{2}\end{cases},$$

لذا داریم

$$|a_2a_4-a_3^2|\le B_1\times\begin{cases} R, & Q\le 0, P\le -Q\\ P+Q+R, & (Q\ge 0,\ P\ge -\frac{Q}{2}),\ \text{یا},\ \ (Q\le 0, P\ge -Q)\\ \frac{4PR-Q^2}{4P}, & Q>0, P\le -\frac{Q}{2}\end{cases},$$

که $P$، $Q$ و $R$ طبق رابطه (۱۹.۳) تعریف شده‌اند. لذا اثبات کامل می‌شود. □

**قضیه ۲.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{B}_{\Sigma}^{m,k}(\gamma;\varphi)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right| \leq B_1|\gamma|^2 \times \begin{cases} R & Q\leq 0, P\leq -Q \\ P+Q+R & (Q\geq 0,\ P\geq -\frac{Q}{2}), \text{یا},\ (Q\leq 0, P\geq -Q) \\ \frac{4PR-Q^2}{4P} & Q>0, P\leq -\frac{Q}{2}, \end{cases}$$

که

$$\begin{aligned} P=&\left|\frac{-\left[(2^m-2^k)(2^{2k}-3^k)-2^k(3^m-3^k)+(4^m-4^k)\right]\gamma^2B_1^3}{(4^m-4^k)(2^m-2^k)^4}+\frac{B_3}{(4^m-4^k)(2^m-2^k)}\right| \\ &-2\left(\frac{|\gamma|B_1^2}{4(2^m-2^k)^2(3^m-3^k)}+\frac{|B_2|}{(4^m-4^k)(2^m-2^k)}\right)-\frac{B_1}{(4^m-4^k)(2^m-2^k)} \\ &+\frac{B_1}{(3^m-3^k)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q=&2\left(\frac{|\gamma|B_1^2}{4(2^m-2^k)^2(3^m-3^k)}+\frac{|B_2|}{(4^m-4^k)(2^m-2^k)}\right)+\frac{B_1}{(4^m-4^k)(2^m-2^k)} \\ &-\frac{2B_1}{(3^m-3^k)^2} \end{aligned}$$

$$R=\frac{B_1}{(3^m-3^k)^2}.$$

***برهان.*** به‌طور مشابه، با توجه به اثبات قضیه ۱.۱.۳ نتیجه مطلوب بدست می‌آید. $\square$

**قضیه ۳.۱.۳.** فرض کنیم تابع $f \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\lambda,\mu}\left(\varphi;\frac{z}{1-z}\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right| \leq B_1(P+Q+R),$$

که

$$\begin{aligned} P=&\left|\frac{-\left(\mu^2+3\mu+2\right)B_1^3}{6(\mu+\lambda)^4}+\frac{B_3}{(\mu+3\lambda)(\mu+\lambda)}\right|+2\left(\frac{B_1^2}{4(\mu+\lambda)^2(\mu+2\lambda)}\right. \\ &\left.+\frac{|B_2|}{(\mu+3\lambda)(\mu+\lambda)}\right)+\frac{2B_1}{2(\mu+3\lambda)(\mu+\lambda)}+\frac{B_1}{(2\lambda+\mu)^2} \\ Q=&2\left(\frac{B_1^2}{4(\mu+\lambda)^2(\mu+2\lambda)}+\frac{|B_2|}{(\mu+3\lambda)(\mu+\lambda)}\right)+\frac{2B_1}{2(\mu+3\lambda)(\mu+\lambda)}+\frac{2B_1}{(2\lambda+\mu)^2} \\ R=&\frac{B_1}{(2\lambda+\mu)^2}. \end{aligned}$$

***برهان.*** به‌طور مشابه، با توجه به اثبات قضیه ۱.۱.۳ نتیجه مطلوب بدست می‌آید. $\square$

**ملاحظه ۱.۱.۳.** برای $\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ در قضیه ۱.۱.۳ که $0 \leq \beta < 1$ یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۷۱، قضیه ۱.۲ ] حاصل می‌گردد.

**نتیجه ۱.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{M}_\Sigma(\alpha; \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z})$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq (1-\beta)^2 \begin{cases} \dfrac{4}{3(1+\alpha)^3(1+3\alpha)}|-4(1-\beta)^2+(1+\alpha)^2|, & Q \geq 0,\ P \geq -\frac{Q}{2} \\ \\ \dfrac{4}{(2+4\alpha)^2} - \dfrac{N^2}{(\alpha+1)(3+9\alpha)(1+2\alpha)^2M}, & Q > 0,\ P \leq -\frac{Q}{2} \end{cases}$$

که

$$\begin{aligned} M =& |-16(1+2\alpha)^2(1-\beta)^2 + 4(\alpha+1)^2(1+2\alpha)^2| - 2(\alpha+1)(1+2\alpha)(3+9\alpha)(1-\beta) \\ &- (\alpha+1)^2\{12(1+2\alpha)^2 - (\alpha+1)(3+9\alpha)\} \end{aligned}$$

و

$$N = (1-\beta)(3+9\alpha)(1+2\alpha) + (\alpha+1)\{6(1+2\alpha)^2 - (1+\alpha)(3+9\alpha)\}.$$

***برهان.*** زمانی‌که $f \in \mathcal{M}_\Sigma(\alpha; \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z})$ ما از قضیه ۱.۱.۳ بدست می‌آوریم

$$B_1 = B_2 = B_3 = 2(1-\beta)$$

و $Q \geq 0, P + \frac{Q}{2} \leq 0$. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

**ملاحظه ۲.۱.۳.** برای $\alpha = 0$ و $\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ در قضیه ۱.۱.۳ که $0 \leq \beta < 1$ یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در قضیه ۳.۴.۱ نتیجه می‌شود.

**نتیجه ۲.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{M}_\Sigma(0; \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z})$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{4(1-\beta)^2}{3}|4\beta^2 - 8\beta + 3|, & \beta \in [0, \frac{29-\sqrt{649}}{32}] \\ \\ (1-\beta)^2\left\{1 - \dfrac{[6-3\beta]^2}{3[|-16(1-\beta)^2+4| - 15 + 6\beta]}\right\}, & \beta \in (\frac{29-\sqrt{649}}{32}, 1). \end{cases}$$

**ملاحظه ۳.۱.۳.** برای $\beta = 0$ در نتیجه ۱.۱.۳ یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۳۳، نتیجه ۲.۲ ] نتیجه می‌شود.

**نتیجه ۳.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{M}_\Sigma(0; \frac{1+z}{1-z})$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq 4.$$

**ملاحظه ۴.۱.۳.** برای $\alpha = 1$ و $\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ در قضیه ۱.۱.۳ که $0 \leq \beta < 1$ یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در قضیه ۴.۴.۱ حاصل می‌گردد.

**نتیجه ۴.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{M}_\Sigma(1; \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z})$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq (1-\beta)^2 \left\{\frac{1}{9} + \frac{(8-3\beta)^2}{72(3\beta^2 - 9\beta + 10)}\right\}, \qquad \beta \in [0,1).$$

**ملاحظه ۵.۱.۳.** برای $\beta = 0$ در نتیجه ۴.۱.۳ یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۳۳، نتیجه ۴.۲ ] نتیجه می‌شود.

**نتیجه ۵.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{M}_\Sigma(1; \frac{1+z}{1-z})$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{5}.$$

**ملاحظه ۶.۱.۳.** ما همچنین می‌توانیم برای $\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\gamma$ در قضیه ۱.۱.۳ که $0 < \gamma \leq 1$ است کرانی برای دترمینان هنکل دوم این‌گونه توابع بدست آوریم.

**ملاحظه ۷.۱.۳.** برای

$$m = k+1, \quad \gamma = 1 \qquad \text{و} \qquad \varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} \quad (0 \leq \beta < 1)$$

در قضیه ۲.۱.۳ یک تصحیح از تخمین‌های بدست آمده در [۱۰۱، قضیه ۱.۲ ] نتیجه می‌شود.

**نتیجه ۶.۱.۳.** فرض کنیم $f \in \mathcal{B}_\Sigma^{k+1,k}\left(1; \dfrac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq 2(1-\beta) \times \begin{cases} R & Q \leq 0, P \leq -Q \\ P+Q+R & (Q \geq 0,\ P \geq -\frac{Q}{2}),\ \text{یا},\ (Q \leq 0, P \geq -Q) \\ \frac{4PR-Q^2}{4P} & Q > 0, P \leq -\frac{Q}{2}, \end{cases}$$

که

$$P =(1-\beta)\left\{ \left| \frac{-\left[2^{2k}+3(2^{k})-3^{k+1}\right](1-\beta)^2}{3(2^{5k-3})} + \frac{1}{3(2^{3k-1})} \right| - \frac{1-\beta}{(2^{2k})(3^{k})} - \frac{1}{2^{3k-1}} + \frac{1}{2(3^{2k})} \right\}$$

$$Q =(1-\beta)\left[\frac{1-\beta}{(2^{2k})(3^{k})} + \frac{1}{2^{3k-1}} - \frac{1}{3^{2k}}\right]$$

$$R =\frac{1-\beta}{2(3^{2k})}.$$

**ملاحظه ۳.۱.۸.** برای $k=0$ در نتیجه ۳.۱.۶ یک بهبود از تخمین‌های بدست آمده در [۳۳، قضیه ۱.۲] حاصل می‌شود.

**نتیجه ۳.۱.۷.** فرض کنیم $f \in \mathcal{B}_{\Sigma}^{1,0}\left(1; \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right)$ طبق (۱.۱) نمایش داده شود. در این‌صورت

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right| \leq 2(1-\beta)^2 \begin{cases} \frac{2}{3}\left(4\beta^2-8\beta+3\right), & 0 \leq \beta \leq \frac{29-\sqrt{649}}{32} \\ \frac{13\beta^2-14\beta-15}{32\beta^2-52\beta-6}, & \frac{29-\sqrt{649}}{32} \leq \beta \leq \frac{1}{2} \\ \frac{19\beta^2-50\beta+39}{32\beta^2-76\beta+54}, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases}$$

# مراجع


[1] H. Airault, Remarks on Faber polynomials, Int. Math. Forum, 3 (2008) 449-456

[2] H. Airault, Symmetric sums associated to the factorization of Grunsky coeffcients, Conference, Groups and symmetries, April 27-29, Montral, (2007).

[3] H. Airault and A. Bouali, Differential calculus on the Faber polynomials, Bull. Sci. Math., 130 (2006) 179-222.

[4] H. Airault and Y. A. Neretin, On the action of Virasoro algebra on the space of univalent functions. Bull. Sci. Math., 132 (1) (2008) 27-39.

[5] H. Airault and J. Ren, An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions, Bull. Sci. Math., 126 (2002) 343-367.

[6] J. W. Alexander, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. Math., 17 (2) (1915) 12-22.

[7] Ş. Altınkaya and S. Yalçın, Upper bound of second Hankel determinant for bi-Bazilević functions, Mediterr. J. Math., 13 (2016) 4081-4090.

[8] R. M. Ali, V. Ravichandran and N. Seenivasagan, Coeffcient bounds for p-valent functions, Appl. Math. Comput., 187 (2007) 35-46.

[9] R. M. Ali, S. K. Lee, V. Ravichandran and S. Subramaniam, Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions, Appl. Math. Lett., 25 (2012) 344-351.

[10] R. M. Ali, S. K. Lee, V. Ravichandran and S. Supramaniam, The Fekete-Szegö coeffcient functional for transforms of analytic functions, Bull. Iranian Math. Soc., 35 (2009) 119-142.

[11] E. Analouei Adegani, S. G. Hamidi, J. M. Jahangiri and A. Zireh, Coefficient estimates of m-fold symmetric bi-subordinate functions by Faber polynomial, Hacet. J. Math. Stat., In Press.

[12] E. Analouei Adegani, A. Zireh and M. Jafari, Coefficient estimates for a new subclass of analytic and bi-univalent functions by Hadamard product, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática (BSPM), In Press.

[13] E. Analouei Adegani, A. Zireh, T. Bulboacă, Sufficient condition for $p$-valent strongly starlike functions, Submitted.

[14] E. Analouei Adegani, A. Zireh, T. Bulboacă, Simple sufficient subordination conditions for close-to-convexity, Submitted.

[15] M. K. Aouf, R. M. El-Ashwah and A. M. Abd-Eltawab, New subclasses of biunivalent functions involving Dziok-Srivastava operator, ISRN Math. Anal., Art. ID 387178 (2013) 1-5.

[16] M. Arif, K. I. Noor and M. Raza, Hankel determinant problem of a subclass of analytic functions, J. Inequal. Appl., 2012 (2012) 1-7.

[17] I. E. Bazilevič, On a case of integrability in quadratures of the Lowner-Kufarev equation, Mat. Sb., 37 (1955) 471-476.

[18] L. Bieberbach, Uber die Koeffzienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Semesterberichte Preuss. Akad. Wiss., 38 (1916) 940-955.

[19] A. Bouali, Faber polynomials, Cayley-Hamilton equation and Newton symmetric functions, Bull. Sci. Math., 130 (2006) 49-70.

[20] D. A. Brannan and W. E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, J. London Math. Soc., 1 (2) (1969) 431-443.

[21] D. A. Brannan and J. G. Clunie (Eds.), Aspects of Contemporary Complex Analysis Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1-20, (1979) (Academic Press, New York and London, 1980).

[22] D. A. Brannan, J. Clunie and W. E. Kirwan, Coefficient estimates for a class of starlike functions, Can. J. Math., 22 (1970) 476-485.

[23] D. A. Brannan and T. S. Taha, On some classes of bi-univalent functions, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 31 (1986) 70-77.

[24] S. Bulut, Fekete-Szegö inequalities for a subclass of analytic bi-univalent functions defined by Sălăgean operator, Honam Math. J. 39 (4) (2017) 591-601.

[25] S. Bulut, Coefficient estimates for a new subclass of analytic and bi-univalent functions defined by Hadamard product. J. Complex Anal., Art. ID 302019 (2014) 1-7.

[26] S. Bulut, Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions, C. R. Acad. Sci. Paris, 352 (2014) 479-484.

[27] M. Çağlar, H. Orhan and N. Yağmur, Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions, Filomat., 27 (2013) 1165-1171.

[28] M. Çağlar, E. Deniz and H. M. Srivastava, Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions, Turk. J. Math., 41 (2017) 694-706.

[29] D. G. Cantor, Power series with integral coefficients, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963) 362-366.

[30] C. Caratheodory, Über den Variabilit atsbereich der Fourier schen Konstante von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Palermo, 32 (1911) 193-217.

[31] S. Q. Chou, Coefficient bounds for the inverse of a function whose derivative has a positive real part, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 70 (3) (1994) 71-73.

[32] J. H. Curtiss, Faber polynomials and the Faber series, Amer. Math., Monthly, 78 (1971) 577-596.

[33] E. Deniz, M. Çağlar and H. Orhan, Second Hankel determinant for bi-starlike and bi-convex functions of order $\beta$, Appl. Math. Comput., 271 (2015) 301-307.

[34] P. Dienes, The Taylor series: an introduction to the theory of functions of a complex variable, Dover, New York (1957).

[35] L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math., 154 (1985) 137-152.

[36] P. L. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 259, Springer, New York, (1983).

[37] R. M. El-Ashwah, Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution, J. Egyptian Math. Soc., 22 (2014) 348-351.

[38] M. M. ElHosh, On the second Hankel determinant of univalent functions, Bull. Malaysian Math. Soc., (2) 9 (1986) 23-25.

[39] M. M. ElHosh, On the second Hankel determinant of close-to-convex functions, Bull. Malaysian Math. Soc., (2) 9 (1986) 67-68.

[40] G. Faber, Über polynomische Entwickelungen, Math. Ann., 57 (3) (1903) 389-408.

[41] G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome, Journal für die reine und angewandte Mathematik (in German), 150 (1919) 79-106.

[42] M. Fekete and G. Szegö, Eine Bemerkung Uber Ungerade Schlichte Funktionen, J. London Math. Soc., 8 (1933) 85-89.

[43] B. A. Frasin and M. K. Aouf, New subclasses of bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 24 (2011) 1569-1573.

[44] P. R. Garabedian and M. A.Schiffer, A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coeffcient, J. Rational Mech. Anal., 4 (1955) 427-465.

[45] S. Gong, The Bieberbach conjecture, translated from the 1989 Chinese original and revised by the author, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999).

[46] S. P. Goyal and R. Kumar, Coefficient estimates and quasi-subordination properties associated with certain subclasses of analytic and bi-univalent functions, Math. Slovaca., 65 (2015) 533-544.

[47] H. Grunsky, Koeffzientenbedingungen fr schlicht abbildende meromorphe Funktionen. Math. Z, 45 (1) (1939) 29-61.

[48] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz forms and their applications*, California Monographs in Mathematical Sciences Univ, California Press, Berkeley, (1958).

[49] J. Hadamard, . Théorém sur les sries entires, Acta Mathematica, 22 (1898) 55-63.

[50] S .G. Hamidi, Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions, PhD thesis, Inst. Math. Sci., University of Malaya, (2014).

[51] S. G. Hamidi, S. A. Halim and J. M. Jahangiri, Faber polynomial coefficient estimates for meromorphic bi-starlike functions, Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 498159 (2013) 1-4.

[52] S. G. Hamidi, S. A. Halim and J. M. Jahangiri, Coefficient estimates for a class of meromorphic bi-univalent functions, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 351 (2013) 349-352.

[53] S. G. Hamidi and J. M. Jahangiri, Faber polynomial coefficients of bi-subordinate functions, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 354 (2016), 365-370.

[54] W. K. Hayman, On the second Hankel determinant of mean univalent functions, Proc. London Math. Soc., (3) 18 (1968) 77-94.

[55] T. Hayami and S. Owa, Hankel determinant for p-valently starlike and convex functions of order $\alpha$, Gen. Math., 17 (2009) 29-44.

[56] T. Hayami and S. Owa, Generalized Hankel determinant for certain classes, Int. J. Math. Anal., (Ruse), 4 (2010) 2573-2585.

[57] T. Hayami and S. Owa, Applications of Hankel determinant for p-valently starlike and convex functions of order $\alpha$, Far East J. Appl. Math., 46 (2010) 1-23.

[58] J. M. Jahangiri and S. G. Hamidi, Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 190560 (2013) 1-4.

[59] J. M . Jahangiri, S .G. Hamidi and S. A. Halim, Coefficients of bi-univalent functions with positive real part derivatives, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 37 (2014) 633-640.

[60] J. M . Jahangiri and S .G .Hamidi, Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-Bazilevič functions, Matematicki Vesnik, 67 (2015) 123-129.

[61] O. P. Juneja and S. Rajasekaran, Coefficient estimates for inverses of ®-spiral functions, Complex Variables Theory Appl., 6 (2-4) (1986) 99-108.

[62] S. Kanas, E. Analouei Adegani and A. Zireh, An unified approach to second hankel determinant of bi-Subordinate functions, Mediterr. J. Math., (2017) 14:233.

[63] S. Kanas, An unified approach to the Fekete-Szegö problem, Appl. Math. Comput., 218 (2012) 8453-8461.

[64] S. Kanas and H. E. Darwish, Fekete-Szegö problem for starlike and convex functions of complex order, Appl. Math. Lett., 23 (2010) 777-782.

[65] G. P. Kapoor and A. K. Mishra, Coeffcient estimates for inverses of starlike functions of positive order, J. Math. Anal. Appl., 329 (2007) 922-934.

[66] J. G. Krzyz, R. J. Libera and E. Zlotkiewicz, Coefficients of inverses of regular starlike functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 33 (1979) 103–110.

[67] S. S. Kumar, V. Kumar and V. Ravichandran, Estimates for the initial coefficients of bi-univalent functions, Tamsui Oxf. J. Math. Sci., 29 (2013) 487-504.

[68] W. C. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, in: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Tianjin, 1992, 157–169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Int. Press, Cambridge, MA, (1994).

[69] V. I. Smirnov and N. A. Lebedev, *Functions of a Complex Variable: Constructive Theory*, MIT Press, Cambridge, MA, Translated form the Russian by Scripta Technica Ltd, (1968).

[70] E. Netanyahu, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$, Arch. Rational Mech. Anal., 32 (1969) 100-112.

[71] H. Orhan, N. Magesh and J. Yamini, Bounds for the second Hankel determinant of certain bi-univalent functions, Turk. J. Math., 40 (2016) 679-687.

[72] M. Ozawa, An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coeffcient, Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969) 129-132.

[73] R. N. Pederson, A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coeffcient, Arch. Rational Mech. Anal., 31 (1968/1969) 331-351.

[74] R. N. Pederson and M. Schiffer, A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coeffcient, Arch. Rational Mech. Anal., 45 (1972) 161-193.

[75] C. Pommerenke, On the coeffcients and Hankel determinants of univalent functions, J. London Math. Soc., 41 (1966) 111-122.

[76] C. Pommerenke, On the Hankel determinants of univalent functions, Mathematika 14 (1967) 108-112.

[77] S. Prema and B. S. Keerthi, Coefficient bounds for certain subclasses of analytic functions, J. Math. Anal., 4 (2013) 22-27.

[78] M. Lewin, On a coefficient problem for bi-univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 63-68.

[79] R. J. Libera and E. J. Zlotkiewicz, Early coefficients of the inverse of a regular convex function, Proc. Amer. Math. Soc., 85 (2) (1982) 225-230.

[80] R. J. Libera, E. J. Zlotkiewicz, Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in P, Proc. Amer. Math. Soc., 87 (2) (1983) 251-257.

[81] R. J. Libera and E. J. Zlotkiewicz, Löwner's inverse coefficients theorem for starlike functions, Amer. Math. Monthly, 99 (1) (1992) 49-50.

[82] K. Löwner, Untersuchungen uber die Verzerrung bei konforme Abbidungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nichtverschwinderder Ableitung geliefert werden, Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, 69 (1917) 89-106.

[83] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I, Math. Ann., 89 (1923) 103-121.

[84] A. K. Mishra and P. Gochhayat, Second Hankel determinant for a class of analytic functions defined by fractional derivative, Int. J. Math. Math. Sci., (2008) Art. ID 153280, 1-10.

[85] A. K. Mishra and P. Gochhayat, Fekete-Szegö problem for a class defined by an integral operator, Kodai Math. J., 33 (2010) 310-328.

[86] P. T. Mocanu, T. Bulboacă and G. S. Şălăgean, Geometric Theory of Univalent Functions (in Romanian), Casa Cărţii de Ştinţă, Cluj-Napoca, (1999).

[87] N. Mohamed, D. Mohamad and S. Cik Soh, Second Hankel determinant for certain generalized classes of analytic functions, Int. J. Math. Anal., (Ruse), 6 (2012) 807-812.

[88] Z. Nehari, *Conformal mapping*, McGraw-Hill, New York, (1952).

[89] R. Nevanlinna, Uber die konforme Abbidungen Sterngebieten, Oversikt av Finska Vet. Soc. Forh. (A), (6)(1921) 63.

[90] J. W. Noonan and D. K. Thomas, On the Hankel determinants of areally mean p-valent functions, Proc. London Math. Soc., (3) 25 (1972) 503-524.

[91] J. W. Noonan, Coeffcient differences and Hankel determinants of areally mean p-valent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 46 (1974) 29-37.

[92] J. W. Noonan and D. K. Thomas, On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions, Trans. Am. Math. Soc., 223 (1976) 337-346.

[93] K. I. Noor, On analytic functions related with functions of bounded boundary rotation, Comment. Math. Univ. St. Paul., 30 (1981) 113-118.

[94] K. I. Noor, On meromorphic functions of bounded boundary rotation, Caribbean J. Math., 1 (1982) 95-103.

[95] K. I. Noor, Hankel determinant problem for the class of functions with bounded boundary rotation, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 28 (1983) 731-739.

[96] K. I. Noor and S. A. Al-Bany, On Bazilevic functions, Internat. J. Math. Math. Sci., 10 (1987) 79-88.

[97] K. I. Noor, Higher order close-to-convex functions, Math. Japon., 37 (1992) 1-8.

[98] K. I. Noor, On the Hankel determinant problem for strongly close-to-convex functions, J. Natur. Geom., 11 (1997) 29-34.

[99] K. I. Noor and I. M. A. Al-Naggar, On the Hankel determinant problem, J. Natur. Geom., 14 (1998) 133-140.

[100] K. I. Noor, On certain analytic functions related with strongly close-to-convex functions, Appl. Math. Comput., 197 (2008) 149-157.

[101] H. Orhan, E. Toklu and E. Kadığlu, Second Hankel Determinant Problem for $k$-bi-starlike Functions, Filomat, 31 (2017), 3897-3904.

[102] M. I. S. Robertson, On the theory of univalent functions, Ann. Math., 37 (1936) 374-408.

[103] M. S. Robertson, Quasi-subordinate functions, In: Mathematical Essays Dedicated to A. J. MacIntyre, Ohio University Press, Athens, OH, (1970) 311-330.

[104] M. S. Robertson, Quasi-subordination and coefficient conjecture, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970) 1-9.

[105] G. S. Sălăgean, Subclasses of univalent functions, in: Complex Analysis–Fifth Romanian Finish Seminar, Bucharest, (1983) 362-372.

[106] M. Schiffer, Faber polynomials in the theory of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948) 503-517.

[107] I. Schur, On Faber polynomials, Amer. J. Math., 67 (1945) 33-41.

[108] H. Silverman, Coefficient bounds for inverses of classes of starlike functions, Complex Variables Theory Appl., 12 (1-4) (1989) 23-31.

[109] H. M. Srivastava and D. Bansal, Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions, J. Egyptian Math. Soc., 23 (2015), 242–246.

[110] H. M. Srivastava, S. S. Eker and R. M. Ali, Coeffcient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions, Filomat, 29 (2015), 1839-1845.

[111] H. M. Srivastava, A. K. Mishra and P. Gochhayat, Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 23 (2010) 1188-1192.

[112] H. M. Srivastava, A. K. Mishra and S. N. Kund, Coeffcient estimates for inverses of starlike functions represented by symmetric gap series. Panamer. Math. J., 21 (2011) 105-123.

[113] E. Study, *Vorlesungen uber ausgewahlte Gegenstande der Geometrie*, 2. Heft, Teubner, Leipzig and Berlin, (1913).

[114] P. K. Suetin, Series of Faber polynomials, Gordon and Breach Science Publica-tions, Amsterdam (1998).

[115] T. S. Taha, Topics in Univalent Function Theory, Ph.D. Thesis, University of London, (1981).

[116] D.-L. Tan, coefficient estimates for bi-univalent functions, Chinese Ann. Math. Ser. A, 5 (1984) 559-568.

[117] H. Tang, G.-T. Deng and S.-H. Li, Coefficient estimates for new subclasses of Ma-Minda bi-univalent functions. J. Inequal. Appl., Art. ID 317 (2013) 1-10.

[118] R. Vein and P. Dale, *Determinants and their applications in mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences, 134, Springer, New York (1999).

[119] R. Wilson, Determinantal criteria for meromorphic functions, Proc. London Math. Soc., (3) 4 (1954) 357-374.

[120] Q.-H. Xu, Y.-C. Gui and H. M. Srivastava, Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 25 (6) (2012) 990-994.

[121] Q.-H. Xu, H.-G. Xiao and H. M. Srivastava, A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems, Appl. Math. comput., 218 (23) (2012) 11461-11465.

[122] P. Zaprawa, On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 21 (2014) 169-178.

[123] P. Zaprawa, Estimates of initial coefficients for bi-univalent functions, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 357480 (2014) 1–6.

[124] A. Zireh, E. Analouei Adegani and S. Bulut, Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions defined by subordination, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 23 (2016), 487-504.

[125] A. Zireh, E. Analouei Adegani, S. Bulut, Coefficient estimates for a subclass of analytic bi-univalent functions, Bull. Korean Math. Soc., 55 (2018) 405-413.

[126] A. Zireh, E. Analouei Adegani and S. Bulut, Upper bound of second Hankel determinant for $k$-bi-subordinate functions, Submitted.

[127] A. Zireh, E. Analouei Adegani, M. Bidkham, Faber polynomial coefficient estimates for subclass of bi-univalent functions defined by quasi-subordinate, Math. Slovaca., 68 (2018) 369-378.

[128] A. Zireh, T. Bulboacă, E. Analouei Adegani, N. Dibagar, Second Hankel determinant for a subclass of analytic bi-univalent functions defined by subordination, Turk. J. Math., In Press.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| به‌طورقوی | Strongly |
| بسط | Expansion |
| بیشینه | Extremal |
| تابع | Function |
| تابع کوئب | Koeb Function |
| تحلیلی | Analytic |
| تخمین | Estimate |
| تصویر | Image |
| تک‌ارز | Univalent |
| تقریبا محدب | Close-to-Convex |
| تلفیق | Convolution |
| حدس | Conjecture |
| حقیقی | Real |
| خم | Curve |
| خم ساده | Simple Curve |
| دقیق | Sharp |
| دوطرف‌ـ تک‌ارز | Bi-Univalent |
| زیرترتیبی | Subordinate |
| ستاره‌گون | Starlike |
| شبه‌ـ زیرترتیبی | Quasi-subordinate |
| شعاع | Radius |
| ضریب | Coefficient |
| عملگر | Operator |
| قضیه ماکزیمم کالبد | Maximum Modulus Theorem |
| کران | Bound |
| کراندار | Bounded |

گسترش ........ Extension
مبدا ........ Origin
محدب ........ Convex
مختلط ........ Complex
مشتق ........ Derivative
معکوس ........ Inverse
میدان ........ Field
نگاشت ........ Map

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Analytic | تحلیلی |
| Bi-Univalent | دوطرف‌ـ تک‌ارز |
| Bound | کران |
| Close-to-Convex | تقریبا محدب |
| Coefficient | ضریب |
| Complex | مختلط |
| Conjecture | حدس |
| Convex | محدب |
| Convolution | تلفیق |
| Derivative | مشتق |
| Estimate | تخمین |
| Expansion | بسط |
| Extension | گسترش |
| Field | میدان |
| Fold | مکرر |
| Function | تابع |
| Gap | شکاف |
| Hadamard Product | ضرب هادامارد |
| Inverse | معکوس |
| Koeb Function | تابع کوئب |
| Map | نگاشت |
| Open Unit Disk | قرص یکه |
| Origin | مبدا |
| Quasi-subordinate | شبه‌ـ زیرترتیبی |
| Radius | شعاع |
| Real | حقیقی |

Sharp ........................................ دقیق
Simple Curve ........................................ خم ساده
Simply Connected ........................................ همبند ساده
Slit ........................................ برش
Spiral ........................................ مارپیچ
Strongly ........................................ به‌طورقوی
Starlike ........................................ ستاره‌گون
Subordinate ........................................ زیرترتیبی
Symmetric ........................................ متقارن
Univalent ........................................ تک‌ارز

# نمایه

**Aabstract**

In this dissertation, we find coefficient estimates applying the Faber polynomial expansions and using a new method of the previous results for some subclasses of analytic bi-univalent functions, which are defined by subordinations in the open unit disk. The coefficient bounds presented in this paper would generalize and improve some recent works appeared in the literature. Furthermore, we obtain the second Hankel determinant with a different method for some certain classes of analytic bi-univalent function which are defined by subordinations in the open unit disk that the presented results in this field improve or generalize the recent works of other authors.

**Keywords:** Coefficient estimates; Bi-univalent functions; Subordination; Faber polynomial; Second Hankel determinant.

**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**PhD Thesis in: Analysis**

# Coefficient Estimates for Classes of Analytic and Bi-univalent Functions by Faber Polynomial

**By: Ebrahim Analouei Adegani**

**Supervisor**

**Áhmad Motamednezhad**

**September 2018**