

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لا ندر



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش جبر

رساله دکتری

برخی ویژگی‌های گراف‌های ناجابجایی گروه‌ها

نگارنده: مریم نصیری

استاد راهنما

دکتر سید حیدر جعفری

تیر ۱۳۹۷

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات
تکمیلی

فرم شماره 12: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم مریم نصیری دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض به شماره دانشجویی 9246515 ورودی بهمن ماه سال 1392 در تاریخ 1397/4/26 از رساله خود با عنوان : برخی ویژگی های گراف های ناجابجایی گروه ها دفاع و با اخذ نمره به درجه : عالی نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره 19-20 ☒ ب) درجه بسیار خوب: نمره 18/99 - 17 ☐
ج) درجه خوب: نمره 16/99 - 15 ☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐

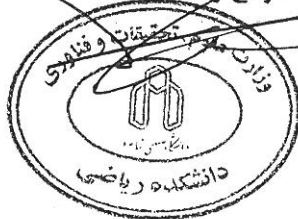
ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1	دکتر سید حیدر جعفری	استاد راهنما	استادیار	
2	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد مدعو داخلی	استاد	
3	دکتر مهدی رضا خورسندی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
4	دکتر احمد عرفانیان	استاد مدعو خارجی	استاد	
5	دکتر احمد معتمدنژاد	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء



پیش کشی است ناقابل

تقدیم بابوسه بردستان پدرم

تقدیم به مادر عزیزتر از جانم

به پاس زحمات بی دریغشان.

تقدیم به همسر مهربانم

که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم.

تقدیم به دلبندم

غزل، امیدبخش جانم، که آسایش او آرامش من است.

ستایش

من به سرچشمه خورشید نه خود بردم راه ذره ای بودم و مهر تو مرا بالا برد

بشارت باد بندگان مرا، آنان که به سخن ها گوش فرامی دهند و آسمگاه از آنی که بهتر است پیروی می کنند. این افراد اند که خداوند هدایتشان کرده است و این افرادند که خردمندانه. (سوره زمر / ۱۷ و ۱۸)

ستایش خداوندی را سزااست که نه اول او را آغازی و نه ازلی بودن او را پایانی است! وجود آشکاری است که نمی توان پرسید: از چیست؟ و حقیقت پنهانی است که نمی توان پرسید در کجاست؟! (خطبه ی ۱۶۳ نج البلاغه)

اکنون که چنین است، ای معبود من! بر محمد (ص) و دودانش درود فرست و ایمانم را به کامل ترین مرتبه ی آن برسان و یقینم را برترین یقین ها قرار ده، و یتیم را به نیکوترین نیت ها نشتی کن و در پرتو فضل و احسانت مرا بر مرکب کرم و بزرگواری ات نشان و به مقتضای عدل خود، بر تو سن استحقاق و سزاواری نشان! (صحیفه ی سجادیه)

سپاس و قدردانی

سپاس خدایی را که نیکویی های آفرینش را برای ما برگزید و سپاس خدایی را که سیاهی ندانستن را از من زدود و هزاران سپاس از برای او...

سپاس میکران بر همدلی و همراهی مادر دلسوز و مهربانم که سجاده ی ایشان گل محبت را در وجودم پروراند و پدرم که در سختی های زندگی همواره یوری دلسوز و پشتیبانی مطمئن برایم بوده است و همسر م که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود. در ابتدا بسی شایسته است از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری که با نکته های بلند، صحیفه ی سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راهگشای نگارنده در اتمام و اکمال رساله بوده است، تشکر و سپاس گزاری نمایم. با تقدیر و درود فراوان از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر احمد عرفانیان، جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی و جناب آقای دکتر مهدی رضا خورسندی که با لطف بی دریغشان زحمت دآوری این رساله را متقبل شدند. همچنین، از جناب آقای دکتر احمد معتمد نژاد که زحمت هدایت این جلسه را بر عهده گرفتند، سپاس گزارم. در آخر تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مراد به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند؛ باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب **مریم نصیری** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **برخی ویژگی‌های گراف‌های ناجابجایی گروه‌ها**، تحت راهنمایی **سید حیدر جعفری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم نصیری

تیر ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله به بررسی گراف‌های ناجابجایی و گراف‌های جابجایی وابسته به گروه‌ها می‌پردازیم. انرژی و طیف گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها مانند D_{2n} و $GL(2, q)$ را محاسبه می‌کنیم. حاصلضرب مستقیم گروه‌های G و H را با این شرط که G یک گروه متناهی ناآبلی و H یک گروه متناهی آبلی باشد در نظر گرفته و به محاسبه‌ی انرژی $\Gamma_{G \times H}$ می‌پردازیم. همچنین طیف و انرژی $\Gamma_{D_{2n} \times D_{2n}}$ را محاسبه می‌کنیم. در ادامه با در نظر گرفتن گراف جابجایی $\mathcal{C}(GL(n, q), X)$ ، که X مجموعه‌ی تمام ترانسوکشن‌ها در $GL(n, q)$ است، برخی شاخص‌های گرافی مانند عدد خوشه‌ای، عدد غالب، قطر، مسطح بودن و ... را برای این گراف‌ها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: گراف ناجابجایی، گراف جابجایی، انرژی گراف، طیف گراف، ترانسوکشن‌ها، قطر، عدد خوشه‌ای، عدد غالب، مسطح بودن، تام بودن.

لیست مقالات مستخرج از رساله

۱. نصیری م، جعفری س. ح، (۱۳۹۶)، نهمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن،

” The energy and spectrum of non-commuting graphs”

دانشگاه تبریز، تبریز.

۲. نصیری م، جعفری س. ح، (۱۳۹۶)، چهل و هشتمین کنفرانس ریاضی ایران،

” The energy and spectrum of non-commuting graphs”

دانشگاه بوعلی سینا، همدان.

۳. نصیری م، جعفری س. ح، (۱۳۹۶)، دهمین کنفرانس نظریه گراف و ترکیبات جبری،

” A note on commuting graphs for general linear groups ”

دانشگاه یزد، یزد.

4. M. Nasiri, S. H. Jafari, A note on commuting graphs for general linear groups, **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, (accepted)2018.
5. M. Nasiri, S. H. Jafari, The energy and spectrum of non-commuting graphs, **Ars Combinatoria**, (accepted)2017.

بررسی ساختارهای جبری با استفاده از گراف‌ها، یکی از زمینه‌های جدید پژوهش در سالهای اخیر می‌باشد که منجر به زایش قضیه‌های نو و پرسش‌های تازه‌ای گشته است. شیوه کار این گونه است که به یک ساختار جبری مانند گروه یا حلقه یک گراف نسبت داده می‌شود. این گراف پاره‌ای از ویژگی‌های ساختار جبری را در خود دارد. دو پرسش اساسی همه‌ی این پژوهش‌ها چنین است:

- (۱) بررسی ویژگی‌های گراف مورد نظر از دیدگاه نظریه گراف.
- (۲) گراف تا چه میزان حافظ ویژگی‌های ساختار جبری است که از آن حاصل شده است. برای نمونه برخی از گراف‌های وابسته به گروه‌ها را نام می‌بریم: گراف توانی^۱، گراف کیلی^۲، گراف ناجابجایی^۳، گراف جابجایی^۴، گراف کلاس تزویج^۵، گراف اول^۶، گراف نادوری^۷.

هدف این رساله مطالعه‌ی گراف ناجابجایی و گراف جابجایی برای گروه‌ها است. پاول اردوش^۸ نخستین بار ایده گراف ناجابجایی را مطرح کرد. به هر گروه ناآبلی دلخواه، گراف ناجابجایی آن نسبت داده می‌شود که رأس‌های آن عناصر غیر مرکزی گروه و دو رأس گراف مجاورند اگر و تنها اگر این دو عضو در گروه با هم جابجا نشوند. او این پرسش ترکیبیاتی را مطرح کرد که: اگر هر زیر گراف کامل گراف ناجابجایی یک گروه ناآبلی، متناهی باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که عدد خوشه‌ای گراف متناهی است؟ نیومن^۹ به این پرسش در سال ۱۹۷۶ پاسخ مثبت داد.

در سال ۲۰۰۶ عبداللهی-اکبری-میمنی مقاله‌ای را به چاپ رساندند که تا اندازه زیادی به بررسی جواب برای دو پرسش بالا می‌پرداخت. از یک سو ویژگی‌های نظریه گرافی گراف ناجابجایی را بررسی کردند و از سوی دیگر به پایدار ماندن ویژگی‌های نظریه گروهی در گراف‌های یکریخت پرداختند.

شاید یکی از دلایلی که ریاضی‌دانان را به این روش تحقیقاتی علاقه‌مند کرده است این باشد که در فرآیند برقراری رابطه بین خواص گراف و ویژگی‌های ساختار جبری، ظرافت تعاریف جبری جلوه‌گرتر می‌شود و عمق برخی قضایا بیش از پیش نمود می‌کند. وقتی به یک ساختار جبری یک گراف نسبت داده می‌شود، مسائل جبری فراوانی از ترجمه بعضی خواص جبری گراف‌ها مانند عدد خوشه‌ای، عدد استقلال، عدد رنگی و ... بوجود می‌آید. جذابیت این گونه تحقیقات ما را بر آن داشت تا در این پایان‌نامه به معرفی و بررسی خواص گراف جابجایی یک گروه بپردازیم. فرض کنید G گروهی متناهی و X زیرمجموعه‌ای از آن باشد. به این گروه، گراف $\mathcal{C}(G, X)$ را این گونه نسبت می‌دهیم: X مجموعه رأس‌های گراف است و دو رأس

^۱power graph

^۲cayley graph

^۳non-commuting graph

^۴commuting graph

^۵conjugacy class graph

^۶prime graph

^۷non-cyclic graph

^۸Paul Erdős

^۹Neumann

متمايز x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy = yx$. پژوهشگران زیادی گراف جابجایی را برای انتخاب‌های متفاوت G و X با دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه قرار دادند. برای نمونه کارهای انجام شده در این حوزه‌ی پژوهشی می‌توانید به [۱۰]، [۲۳]، [۳۳]، [۳۷]، [۳۸]، [۳۹] رجوع کنید. حال با بیان خلاصه‌ای از آنچه پیش رو دارید، بحث را آغاز می‌کنیم. این رساله در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های مختلف راه گشا می‌باشند، گرد هم می‌آوریم. تمام قضیه‌ها بدون اثبات بیان شده‌اند. در فصل دوم، گراف ناجابجایی و گراف جابجایی وابسته به یک گروه را معرفی می‌کنیم و به بررسی برخی از ویژگی‌های این گراف‌ها می‌پردازیم، که از آن جمله می‌توان به قطر، همبندی، عدد خوشه‌ای، ... اشاره کرد. لازم به ذکر است قضایای مطرح شده در این فصل همچون قطره‌ای در برابر دریای قضیه‌های اثبات شده در این زمینه می‌باشند. البته در طی این راه، سؤالات متعددی مطرح شد که برای برخی از آن‌ها پاسخی مناسب یافتیم که همین مطالب، محتوای فصل سوم را در برمی‌گیرند. در این فصل، انرژی و طیف گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها مانند D_{2n} و $GL(2, q)$ را محاسبه می‌کنیم. حاصلضرب مستقیم گروه‌های G و H را با این شرط که G یک گروه متناهی ناآبلی و H یک گروه متناهی آبلی باشد در نظر گرفته و به محاسبه‌ی انرژی $\Gamma_{G \times H}$ می‌پردازیم. همچنین طیف و انرژی $\Gamma_{D_{2n} \times D_{2n}}$ محاسبه می‌شود. در فصل چهارم با در نظر گرفتن گراف جابجایی $\mathcal{C}(GL(n, q), X)$ ، که X مجموعه‌ی تمام ترانسوکشن‌ها در $GL(n, q)$ است، برخی شاخص‌های گرافی مانند عدد خوشه‌ای، عدد غالب، قطر، مسطح بودن و ... را برای این گراف‌ها مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در پایان نگاهی مختصر به انرژی گراف جابجایی $\mathcal{C}(GL(2, 3), X)$ خواهیم داشت.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

ف

فهرست جداول

ق

۱ پیش نیازها و مقدمات

۱

۱.۱ مفاهیم مورد نیاز در نظریه گروه‌ها

۱

۱.۱.۱ گروه‌های خطی

۳

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز در نظریه گراف

۵

۳.۱ ماتریس‌های وابسته به گراف‌ها و مقادیر ویژه

۱۰

۱.۳.۱ انرژی و انرژی لاپلاسین گراف

۱۱

۲.۳.۱ دترمینان

۱۳

۲ گراف ناجابجایی و گراف جابجایی گروه‌ها

۱۵

۱.۲ گراف ناجابجایی یک گروه

۱۵

۲.۲ گراف جابجایی گروه‌ها

۱۸

۳ طیف و انرژی گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها

۲۱

۱.۳ انرژی و انرژی لاپلاسین گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها

۲۱

۲.۳ انرژی گراف ناجابجایی حاصلضرب مستقیم گروه‌ها

۳۰

۴ بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم‌ارزی در گروه‌های خطی عام

۴۹

۱.۴ طیف و انرژی $C(GL(3,2), X)$

۵۷

مراجع

۵۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۶۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

۶۵

فهرست تصاویر

۱۱	۱.۱	۱- اتیل ۲- متیل سیکلو بوتان و گراف مولکولی متناظر با آن.
۵۳	۱.۴	تصویری از گراف Γ در حالتی که $q = 2$ و $n = 3$ باشد.
۵۶	۲.۴	تصویری از گراف $\mathcal{C}(GL(3, 2), X)$

فهرست جداول

۱.۳	چند جمله ای مشخصه، مقادیر ویژه و انرژی گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها.	۲۶
۲.۳	چند جمله ای مشخصه، مقادیر ویژه و انرژی لاپلاسین گراف ناجابجایی	
۳۰	برخی گروه‌ها.	

فصل ۱

پیش نیازها و مقدمات

در این فصل، اصطلاحات و قضایایی را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است در سه بخش بیان خواهیم کرد. بخش اول به مفاهیم مقدماتی در نظریه‌ی گروه‌ها اختصاص دارد که اکثر قضایا و تعاریف از مراجع [۱] و [۲] انتخاب شده‌اند. در بخش دوم به بیان مفاهیمی از نظریه‌ی گراف می‌پردازیم که مطالب این بخش از مراجع [۹]، [۲۲] و [؟؟] انتخاب شده‌اند. همچنین در بخش سوم به معرفی ماتریس مجاورت، مقادیر ویژه و انرژی یک گراف می‌پردازیم که اکثر تعاریف این بخش از مراجع [۱۱] و [۱۶] گرد آوری شده‌اند.

۱.۱ مفاهیم مورد نیاز در نظریه گروه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G گروهی دلخواه و X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. عمل (چپ) G روی X تابعی است مانند $G \times X \rightarrow X$: که معمولاً با gx نمایش داده می‌شود که به ازای هر $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$ داریم

$$(i) \quad ex = x \text{ که در آن } e \text{ عنصر همانی است.}$$

$$(ii) \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوییم g عضو x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $gx = x$. مجموعه‌ی اعضای G را که هر عضو X را ثابت نگه می‌دارند،

هسته‌ی عمل می‌نامیم. به وضوح هسته عمل یک زیرگروه است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت پایدارساز x در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

G_x زیرگروهی از G است. همچنین عمل گروه G روی X یک رابطه‌ی هم‌ارزی به صورت زیر روی مجموعه‌ی X تعریف می‌کند

$$\forall x, y \in X \quad x \sim y \iff \exists g \in G; \quad gx = y.$$

این رابطه‌ی هم‌ارزی مجموعه‌ی X را به رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند و هر رده هم‌ارزی شامل x را یک مدار x در G می‌نامیم و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$Orb(x) = \{gx \mid g \in G\}.$$

همچنین برای عضو ثابت $g \in G$ مجموعه $\{x \in X \mid gx = x\}$ را مجموعه نقاط ثابت g در X می‌گوییم و آن را با علامت $Fix(g)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. این عمل را تراپا یا متعدی گوییم در صورتی که X تنها مدار عمل باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو x مانند x_1 و x_2 ، عضوی از G مانند g موجود باشد به طوری که $gx_1 = x_2$.

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه مدار-پایدارساز) فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت، تناظری یک به یک بین $Orb_G(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدست‌های راست G_x در G وجود دارد. به خصوص، اگر $Orb_G(x)$ متناهی باشد

$$|G| = |Orb_G(x)| |G_x|.$$

واضح است که اگر گروه متناهی G بر مجموعه‌ی X عمل کند آنگاه به ازای هر $x \in X$ ، مجموعه‌ی $Orb_G(x)$ متناهی است و $|Orb_G(x)| |G_x| = |G|$.

تعریف ۴.۱.۱. G یک AC - گروه است هرگاه مرکزساز هر عضو غیر مرکزی آن آبدی باشد.

تعریف ۵.۱.۱. گروه تقارن‌های یک n ضلعی منتظم گروهی از مرتبه $2n$ است که با عناصر a و b با روابط $a^n = b^2 = 1$ و $b^{-1}ab = a^{-1}$ تولید می‌شود. این گروه را گروه دووجهی مرتبه $2n$ می‌نامیم و با D_{2n} نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

تعریف ۶.۱.۱. گروه کواترنیون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q_n = \langle a, b | a^{2^n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle,$$

این گروه از مرتبه $4n$ است.

فرض کنیم G یک گروه باشد. می‌دانیم مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G همراه با عمل ترکیب توابع، تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را گروه خودریختی‌های G می‌نامیم و آن را با $\text{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم G یک گروه باشد. $i_g : G \rightarrow G$ با ضابطه‌ی $i_g(x) = g^{-1}xg$ را خودریختی داخلی G القا شده توسط g می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های داخلی G را با $\text{Inn}(G)$ نمایش می‌دهیم. $\text{Inn}(G)$ یک زیرگروه نرمال $\text{Aut}(G)$ است.

قضیه ۲.۱.۱. [۱۵، قضیه ۳.۱۲] (فراتینی^۱) فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و H زیرگروه G باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) H بر مجموعه‌ی X متعدی عمل می‌کند.

(۲) گروه G بر مجموعه‌ی X متعدی عمل می‌کند و برای عنصری مانند $x \in X$ ، $G = HG_x$. در این صورت به ازای هر $x \in X$ ، $G = HG_x$.

۱.۱.۱ گروه‌های خطی

فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر بعد فضا n باشد آن را به صورت $V_n(F)$ می‌نویسیم. در حالتی که F میدان گالوای $GF(q)$ باشد آنگاه نمادگذاری به صورت $V_n(q)$ خواهد بود. هر زیرفضای $n-1$ بعدی در V را یک ابرصفحه می‌نامیم. تعداد زیرفضاهای یک بعدی در $V_n(q)$ برابر با $\frac{q^n-1}{q-1}$ است که با تعداد ابرصفحه‌ها در $V_n(q)$ برابر می‌باشد. تبدیل خطی f از V به F یک تابع خطی روی V نامیده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی تابع‌های خطی روی V به صورت طبیعی فضایی برداری تشکیل می‌دهد که این فضا را با V^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان V می‌نامیم. اگر بعد V متناهی باشد، آنگاه $\dim(V) = \dim(V^*)$.

مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی وارون پذیر روی V با قانون ترکیب توابع دارای ساختار گروه است که آن را گروه خطی عام می‌نامیم و با $GL(V, F)$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $\dim(V) = n$ از نماد $GL(V, F) = GL_n(F)$ استفاده می‌شود. در این حالت یک تناظر یک به یک بین عناصر $GL_n(F)$ و ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ روی F وجود دارد و بنابراین گاهی از نمایش ماتریسی تبدیلات خطی استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی با دترمینان ۱ را گروه خطی خاص می‌نامیم و آن را با $SL_n(F)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱.

$$.SL_n(F) \leq GL_n(F) \quad (۱)$$

$$. \frac{GL_n(F)}{SL_n(F)} \cong F^* \quad (۲)$$

قضیه ۴.۱.۱.

$$. |GL(n, q)| = q^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n (q^i - 1) \quad (۱)$$

$$. |SL(n, q)| = q^{\binom{n}{2}} \prod_{i=2}^n (q^i - 1) \quad (۲)$$

قضیه ۵.۱.۱.

$$. Z(GL(n, q)) = \{\lambda I : \lambda \in F^*\} \quad (۱)$$

$$. Z(SL(n, q)) = \{\lambda I : \lambda \in F^*, \lambda^n = 1\} \quad (۲)$$

گروه خطی عام تصویری و گروه خطی خاص تصویری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$PGL(V) = \frac{GL(V)}{Z(GL(V))}, \quad PSL(V) = \frac{SL(V)}{Z(SL(V))}.$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم W یک ابرصفحه در $V_n(F)$ باشد. تبدیل خطی $T \neq I$ یک ترانسوکشن^۱ با ابرصفحه‌ی W نامیده می‌شود، هرگاه داشته باشیم:

$$(۱) \text{ برای هر } v \in W, T(v) = v$$

$$(۲) \text{ برای هر } v \in V, T(v) - v \in W$$

به بیان دیگر T عناصر فضاهاى بردارى W و $\frac{V}{W}$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد و T تبدیل غیر همانی است.

لم ۱.۱.۱. فرض کنیم W یک ابرصفحه در $V_n(F)$ است. در این صورت تابعک خطی

$$\mu : V_n(F) \rightarrow F \text{ وجود دارد به قسمی که } W = \ker \mu.$$

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنیم T یک ترانسوکشن با ابرصفحه‌ی W و μ یک تابعک خطی روی $V_n(F)$ باشد، به طوری که $W = \ker \mu$. در این صورت بردار $a \in W, a \neq 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $v \in V_n(F)$ داریم $T(v) = v - \mu(v)a$. بعکس اگر $\mu \neq 0$ یک تابعک خطی باشد و $a \in V_n(F), a \neq 0$ و $\mu(a) = 0$ ، آنگاه تبدیل خطی T از $V_n(F)$ با ضابطه‌ی $T(v) = v - \mu(v)a$ ، برای هر $v \in V$ ، یک ترانسوکشن با ابرصفحه‌ی $W = \ker \mu$ می‌باشد.

فرض کنیم W یک ابرصفحه در فضای برداری V باشد. قرار می‌دهیم

$$\tau(W) = \{I_V\} \cup \{\text{تمام ترانسوکشن‌ها با ابرصفحه‌ی ثابت } W\}.$$

با توجه به این نماد گذاری قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

^۱transvection

لم ۲.۱.۱. فرض کنیم W یک ابرصفحه در فضای برداری V باشد. در این صورت $\tau(W)$ یک زیرگروه آبدی از $GL_n(F)$ است که با گروه جمعی W یکریخت می باشد.

لم ۳.۱.۱. دترمینان هر ترانسوکشن برابر با ۱ است.

قضیه ۷.۱.۱. برای $n > 1$ ، $SL_n(F)$ با ترانسوکشن ها تولید می شود.

توجه می کنیم که وارون هر ترانسوکشن یک ترانسوکشن است.

قضیه ۸.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد n روی میدان F باشد. در این صورت اشتراک فضای پوچ هر k تابع خطی مستقل، یک زیرفضای $n - k$ بعدی از V است.

گزاره ۱.۱.۱. همه ی ترانسوکشن ها در $GL_n(F)$ مزدوج می باشند. بعلاوه اگر $n \geq 3$ ، آنگاه همه ی ترانسوکشن ها در $SL_n(F)$ مزدوج هستند.

لم ۴.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است:

(۱) اگر f و g دو تابع خطی روی V باشند و $a, b \in V$ به طوری که $a + b \neq 0$ و $f(a) = 0$ و $g(b) = 0$ ، آنگاه $f(b) = g(a) = g(b) = 0$

$$T_{a,f} T_{b,f} = T_{a+b,f}, \quad T_{a,f} T_{a,g} = T_{a,f+g}.$$

(۲) برای هر $\alpha \in F^*$ ، $T_{a,\alpha f} = T_{\alpha a,f}$.

(۳) $T_{a,f} = T_{b,g}$ اگر و تنها اگر اسکالر $\alpha \in F^*$ وجود داشته باشد به طوری که $a = \alpha b$ و $g = \alpha f$.

(۴) اگر $S \in GL(V)$ ، آنگاه $S^{-1} T_{a,f} S = T_{Sa,fS^{-1}}$.

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز در نظریه گراف

گراف G ، یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ی ناتهی $V(G)$ از رأس ها، یک مجموعه ی $E(G)$ از یال ها و یک تابع وقوع ψ_G که به هر یال از G ، یک زوج نامرتب از رأس های G را که الزاماً متمایز نیستند، نسبت می دهد. اگر e یک یال، u و v دو رأس باشند به طوری که $\psi_G(e) = uv$ ، در این صورت گفته می شود که e ، رأس های u و v را به یکدیگر متصل کرده است و رأس های u و v ، دو سر یال e نامیده می شوند. طوقه یالی است که ابتدا و انتهای آن یک رأس است.

تعریف ۱.۲.۱. یک گراف ساده است، اگر هیچ طوقه ای نداشته باشد و بین هر دو رأس متمایز آن، بیش از یک یال نباشد.

تعریف ۲.۲.۱. مکمل^۱ یک گراف ساده G که با $\bar{G}$ نشان داده می‌شود گرافی است با همان مجموعه رأس‌های G ، به طوری که u و v در $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر u و v در G مجاور نباشند.

تعریف ۳.۲.۱. یک زیرگراف^۲ از گراف G ، یک گراف H است به طوری که $V(H) \subset V(G)$ و $E(H) \subset E(G)$ ، در این صورت می‌نویسیم $H \subseteq G$.

اگر H زیرگراف G بوده ولی $G \neq H$ ، آنگاه H را یک زیرگراف سره می‌نامیم. اگر $H \subseteq G$ و $V(G) = V(H)$ ، آنگاه H را یک زیرگراف فراگیر می‌نامیم. فرض کنیم X زیر مجموعه‌ای از $V(G)$ باشد. در این صورت زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن X و مجموعه یال‌هایش برابر همه یال‌هایی از G باشد که هر دو رأس آن‌ها در X واقع است، زیرگراف القایی G روی X نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. در گراف ساده G ، تعداد یال‌هایی که از رأس v می‌گذرند را درجه‌ی رأس v می‌گوییم و آن را با $d(v)$ نشان می‌دهیم. بزرگترین و کوچکترین درجه رئوس به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان داده می‌شود.

یک رأس تنها^۳ دارای درجه ۰ است. عدد

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

میانگین درجات گراف است. واضح است که $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

تعریف ۵.۲.۱. گرافی که درجه تمام رئوس آن یکسان باشد گراف منتظم^۴ می‌نامیم. اگر درجه همه‌ی رأس‌های گراف برابر با k باشد، آن را گراف k - منتظم می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. گراف کامل^۵ گرافی ساده است که بین هر دو رأس آن یک یال وجود داشته باشد. یک گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم. یک گراف کامل K_n یک گراف منتظم از درجه $n - 1$ و دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است.

تعریف ۷.۲.۱. زیرمجموعه‌ی X از رأس‌های G یک خوشه^۶ نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القا شده روی X ، گراف کامل باشد. بزرگترین اندازه‌ی یک خوشه در گراف G را عدد خوشه‌ای G می‌نامیم و آن را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۲.۱. زیرمجموعه‌ی X از رأس‌های گراف G مجموعه‌ی مستقل^۷ نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القا شده روی X فاقد یال باشد. بزرگترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی مستقل در گراف G را عدد استقلال G می‌نامیم و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

^۱ complement

^۲ subgraph

^۳ isolated

^۴ regular graph

^۵ complete graph

^۶ clique

^۷ independent set

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $k > 0$ عدد صحیح باشد. گراف G دارای k -رنگ آمیزی رأسی^۱ است هرگاه بتوان رأس‌های آن را با k رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که رأس‌های مجاور دارای رنگ‌های متفاوت باشند. کوچکترین k ای که گراف G ، k -رنگ آمیزی رأسی داشته باشد، عدد رنگی^۲ گراف G نام دارد که آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای گراف ساده G و زیرمجموعه‌ی S از رأس‌های G ، $N_G[S]$ مجموعه‌ای از رأس‌های گراف G است که در S قرار دارند یا با رأسی در S مجاورند. اگر $N_G[S] = V(G)$ ، آنگاه S را یک مجموعه‌ی غالب^۳ می‌نامیم. عدد غالب^۴ گراف G ، که با $\gamma(G)$ نمایش داده می‌شود، کمترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی غالب در گراف G است.

تعریف ۱۱.۲.۱. پوشش^۵ C از گراف G زیر مجموعه‌ای از رئوس است به طوری که حداقل یک سر هر یال G در C باشد. پوشش C را پوشش مینیمم می‌نامیم اگر هیچ پوشش C' در G با شرط $|C'| < |C|$ وجود نداشته باشد. مینیمم اندازه از یک پوشش رأسی را با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. گرافی که مجموعه رئوس آن را می‌توان به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز کرد که یک سر تمام یال‌های آن در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد، را گراف دو بخشی می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. گراف دو بخشی کامل، گرافی دو بخشی با بخش‌های X و Y است که در آن هر رأس X به هر رأس Y وصل شده باشد. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ باشد، آنگاه گراف دو بخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. گراف G را r -بخشی می‌نامیم هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به r زیر مجموعه، طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. گراف r -بخشی کامل، یک گراف ساده‌ی r -بخشی است که در آن، هر رأس به تمام رأس‌هایی که در زیر مجموعه‌ای غیر یکسان با آن قرار دارند، وصل شده است. اگر G یک گراف متناهی r -بخشی کامل باشد به قسمی که مجموعه رئوس آن اجتماع جدا از همی به شکل $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ باشد و $|V_i| = n_i$ آنگاه G را با نماد $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. یک مسیر^۶ گراف ناتهی $P = (V, E)$ است که در آن

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$$

به طوری که تمامی رئوس به جز x_0 و x_k متمایز هستند. معمولاً یک مسیر را به صورت دنباله‌ای طبیعی از رئوسش مانند $P = x_0x_1 \dots x_{k-1}x_k$ می‌نویسیم.

^۱k-vertex coloring
^۲chromatic number
^۳dominating set

^۴domination number
^۵covering
^۶path

تعداد یال‌های یک مسیر را طول آن می‌نامیم. طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس متمایز u و v در گراف G را فاصله‌ی این دو رأس می‌گوییم و آن را با نماد $d(u, v)$ نمایش می‌دهیم. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد، فاصله‌ی این دو رأس را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. سوپریمم فاصله‌ی بین رئوس گراف G را قطر $^1 G$ می‌نامیم و با $\text{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. یک دور 2 مسیری با حداقل سه رأس است که رئوس ابتدا و انتهای آن یکی باشد. یک دور را به صورت $x_0 x_1 x_2 \dots x_k x_0$ نمایش می‌دهیم که طول آن k است.

طول کوتاهترین دور در گراف G را کمر 3 گراف می‌گوییم و آن را با نماد $\text{girth}(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G بدون دور باشد، آنگاه کمر G را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. گراف ناتهی G را همبند 4 می‌گوییم هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آن را ناهمبند 5 می‌گوییم.

تعریف ۲۰.۲.۱. زیر مجموعه‌ی S از رئوس گراف همبند G ، یک مجموعه برش نام دارد هرگاه $G \setminus S$ یک گراف ناهمبند باشد.

یک مجموعه‌ی برش با k عنصر را یک k – برش رأسی می‌نامیم و همبندی رأسی G ، $\kappa(G)$ ، را کوچکترین k ای در نظر می‌گیریم که به ازای آن G یک k – برش رأسی داشته باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ را یکرخت می‌گوییم، و می‌نویسیم $G \simeq G'$ ، هرگاه نگاشت یک به یک و پوشایی چون $\varphi: V \rightarrow V'$ وجود داشته باشد که برای هر $u, v \in V$

$$uv \in E \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E',$$

نگاشت φ را یک یکرختی گرافی می‌نامیم. اگر $G = G'$ ، آنگاه φ را یک خودریختی گرافی G می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. یک جورسازی (تطابق) 6 در یک گراف مجموعه‌ای از یال‌های دو به دو مجزا می‌باشد. رأس‌های متعلق به یال‌های یک جورسازی، اشباع شده 7 و سایر رأس‌ها اشباع نشده نامیده می‌شوند.

اگر یک جورسازی هر رأس از G را اشباع کند، آن را یک جورسازی کامل 8 یا جورسازی کامل می‌نامیم. یک k – عامل از یک گراف، یک زیرگراف فراگیر k – منتظم است. به طور کلی یک 1 – عامل یک جورسازی کامل است.

¹diameter

²cycle

³girth

⁴connect

⁵disconnected

⁶matching

⁷saturated

⁸perfect matching

تعریف ۲۳.۲.۱. گراف $G = (V, E)$ را مسطح^۱ می‌نامیم هرگاه بتوان G را چنان در صفحه رسم کرد که یال‌های آن فقط در رأس‌ها یکدیگر را قطع کنند. چنین ترسیمی از G را یک نشان دادن مسطح می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم $e = uv$ یالی در G باشد. یک انقباض یالی^۲ e ، گراف $G \setminus e$ است که در آن رأس‌های u و v به یک رأس جدید تبدیل می‌شود که این رأس به همه‌ی رئوسی که با u یا v مجاورند، مجاور است.

تعریف ۲۵.۲.۱. یک انقباض^۳ از گراف G گرافی است که با حذف رئوس، حذف یال‌ها یا انقباض یال‌هایی از G به دست آید.

قضیه ۱.۲.۱. گراف‌های K_5 و $K_{3,3}$ مسطح نیستند.

قضیه ۲.۲.۱. [۲۲، قضیه ۴.۶] (واگنر^۴) یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر شامل انقباضی از K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. گراف G تام^۵ است اگر برای هر زیرگراف القایی $H \subseteq G$ داشته باشیم $\chi(H) = \omega(H)$.

تعریف ۲۷.۲.۱. گراف G را برگ^۶ می‌نامیم هرگاه G یا $\bar{G}$ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ نداشته باشند.

قضیه ۳.۲.۱. [۱۴، قضیه ۱.۱] گراف G تام است اگر و تنها اگر مکمل آن تام باشد.

قضیه ۴.۲.۱. [۱۴، قضیه ۲.۱] (قضیه گراف قویاً تام) یک گراف تام است اگر و تنها اگر گراف برگ باشد.

تعریف ۲۸.۲.۱. گراف G را رأس متعدی^۷ گوئیم هرگاه گروه خودریختی‌های گراف G بر مجموعه رأس‌های G متعدی عمل کند.

قضیه ۵.۲.۱. [۲۵، قضیه ۳.۶.۳] فرض کنیم G گراف رأس-متعدی همبند از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت G شامل دوری به طول حداقل $\sqrt{3n}$ است.

قضیه ۶.۲.۱. [۱۳، قضیه ۱.۷] فرض کنیم G گرافی k -منتظم، همبند، رأس-متعدی و از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت

(۱) اگر n زوج باشد آنگاه G دارای ۱-عامل است.

(۲) حاصلضرب عدد خوشه‌ای و عدد استقلال گراف G کمتر از n است.

^۱planar
^۲edge contraction
^۳minor
^۴Wagner

^۵perfect
^۶Berge
^۷vertex-transitive

۳.۱ ماتریس‌های وابسته به گراف‌ها و مقادیر ویژه

تعریف ۱.۳.۱. ماتریس مجاورت گراف G که سطرها و ستون‌های آن با رأس‌های گراف برچسب گذاری می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ مجاور باشند} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

مقادیر ویژه^۱ یک ماتریس برابر با ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه‌ی آن، یعنی ریشه‌های معادله $\det(A(G) - \lambda I) = 0$ هستند. مقادیر ویژه‌ی گراف همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت آن هستند. ماتریس مجاورت گراف ساده متقارن است و در نتیجه تمام مقادیر ویژه آن حقیقی هستند.

تعریف ۲.۳.۱. ماتریس لاپلاسین^۲ گراف G ماتریسی $n \times n$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ مجاور باشند} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

که در آن d_i درجه رأس i است.

بنابراین $L(G) = D(G) - A(G)$ که $D(G)$ ماتریس قطری^۳ است به طوری که D_{ii} درجه رأس i می‌باشد. مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسین گراف G را مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین G می‌نامیم. ماتریس لاپلاسین یک گراف متقارن است بنابراین تمام مقادیر ویژه لاپلاسین آن حقیقی هستند.

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه‌ای شامل همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت $A(G)$ را طیف^۴ ماتریس مجاورت می‌نامیم. طیف گراف متناهی G طیف ماتریس مجاورت آن می‌باشد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_t \\ k_1 & k_2 & \dots & k_t \end{pmatrix}$$

که برای هر $1 \leq i \leq t$ ، k_i مرتبه تکرار مقدار ویژه λ_i است و $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_t$.

بزرگترین مقدار ویژه گراف G از لحاظ قدرمطلق را شعاع طیفی گراف G می‌نامیم. طیف لاپلاسین گراف G به طور مشابه تعریف می‌شود.

^۱eigenvalues

^۲Laplacian matrix

^۳distance matrix

^۴spectrum

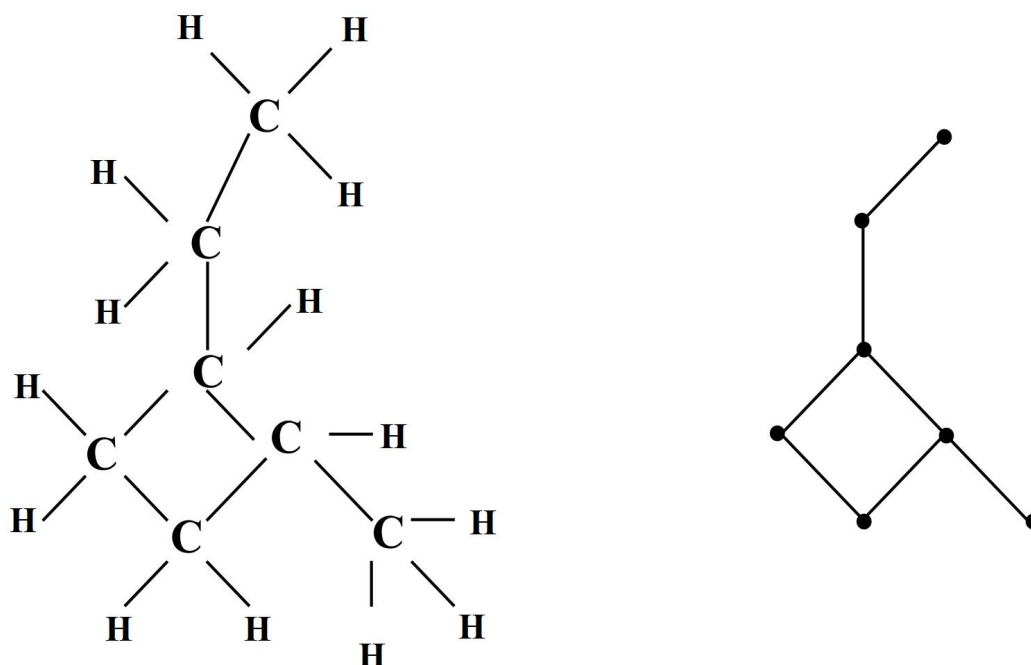
۱.۳.۱ انرژی و انرژی لاپلاسین گراف

تعریف ۴.۳.۱. انرژی گراف G ، که آن را با $\mathcal{E}(G)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

که $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف G هستند.

مفهوم انرژی یک گراف توسط گاتمن^۱ در [۲۶] معرفی شد و به طور گسترده در شیمی مورد مطالعه قرار گرفت. امروزه نظریه HMO ^۲ یکی از مهمترین زمینه‌های شیمی نظری است که بر مقادیر ویژه‌ی گراف استوار است. رأس‌های یک گراف وابسته به یک مولکول در تناظر یک به یک با اتم‌های کربن یک سیستم هیدروکربن هستند. گراف مولکولی $G = (V, E)$



شکل ۱.۱: ۱- اتیل ۲- متیل سیکلو بوتان و گراف مولکولی متناظر با آن.

گرافی ساده با $|V| = n$ رأس و $|E| = m$ یال است به طوری که هر $v_i \in V$ نشان دهنده‌ی اتم‌های غیر هیدروژن و هر یال $(v_i, v_j) \in E$ نشان دهنده‌ی یک پیوند کووالانسی بین اتم‌های متناظر است. گراف مولکولی هیدروکربن‌ها که تنها با اتم‌های کربن و هیدروژن تشکیل شده‌اند، نشان دهنده‌ی اسکلت کربنی مولکول است. برای مثال گراف مولکولی ۱- اتیل ۲- متیل سیکلو بوتان را در شکل ۱.۳.۱ مشاهده می‌کنیم. انرژی π - الکترون تام، $\mathcal{E}_\pi$ ، از مهمترین اطلاعاتی است که در رابطه‌ی مستقیم با مولکول است. $\mathcal{E}_\pi$ در [۲۷] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}_\pi = \alpha n + \beta E$$

^۱Gutman

^۲Hückel Molecular Orbital

(۱) α, β پارامترهای استاندارد HMO هستند.

(۲) n تعداد اتم‌های کربن (تعداد رأس‌های گراف مولکولی) است.

(۳) $\mathcal{E}$ انرژی گراف مولکولی است.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ مقادیر ویژه لاپلاسیان گراف G باشند. در این صورت انرژی لاپلاسیان G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{LE}(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i - d(G)|,$$

به طوری که $d(G) = \frac{\sum m}{n}$ میانگین درجات گراف G است.

قضیه ۱.۳.۱. [۲۰، قضیه ۱] فرض کنیم $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ گراف کامل t - بخشی، $t > 1$ ، روی $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ رأس باشد و $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t > 0$. در این صورت چند جمله‌ای مشخصه‌ی $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ برابر است با:

$$P(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}, \lambda) = \lambda^{(n-t)} \left(1 - \sum_{i=1}^t \frac{n_i}{\lambda + n_i}\right) \prod_{j=1}^t (\lambda + n_j).$$

طیف گراف $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ شامل شعاع طیفی λ_1 است که از تساوی $\sum_{i=1}^t \frac{n_i}{\lambda + n_i} = 1$ بدست می‌آید. مقدار ویژه‌ی 0 با مرتبه‌ی تکرار $n - t$ و همچنین $t - 1$ مقدار ویژه‌ی دیگر واقع بر بازه‌های $[-n_t, -n_{t-1}], \dots, [-n_2, -n_1]$ هستند.

لم ۱.۳.۱. [۴۲، لم ۱.۲] اگر λ_1 شعاع طیفی گراف کامل چند بخشی $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ باشد آنگاه

$$\mathcal{E}(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 2\lambda_1.$$

حالت‌های خاصی از قضیه ۱.۳.۱ به صورت زیر هستند:

(۱) اگر $t = 2$ ، آنگاه

$$P(K_{n_1, n_2}, \lambda) = \lambda^{n-2} (\lambda^2 - n_1 n_2).$$

بنابراین شعاع طیفی و انرژی این گراف برابر است با:

$$\lambda_1 = \sqrt{n_1 n_2}, \quad \mathcal{E}(K_{n_1, n_2}) = 2\sqrt{n_1 n_2}.$$

(۲) اگر $t = 3$ ، آنگاه

$$P(K_{n_1, n_2, n_3}, \lambda) = \lambda^{(t-3)} (\lambda^3 - (n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1) \lambda - 2 n_1 n_2 n_3).$$

۲.۳.۱ دترمینان

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت

$$\det(A) = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}.$$

برهان. بنابر تعریف داریم

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

اگر ابتدا (-1) برابر ستون اول را به سایر ستون‌ها اضافه کنیم و سپس مجموع تمام سطرها را به سطر اول اضافه کنیم، دترمینان بدون تغییر می‌ماند و داریم:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a + (n - 1)b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a - b & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & a - b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & a - b \end{bmatrix}.$$

چون ماتریس بدست آمده یک ماتریس پایین مثلثی است در نتیجه دترمینان آن برابر با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی است. بنابراین داریم $\det(A) = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}$.

□

قضیه ۳.۳.۱. [۴۰، صفحه ۵] فرض کنیم A, B, C, D به ترتیب ماتریس‌هایی با بعد های $n \times n, m \times m, n \times m$ و $m \times n$ باشند به طوری که ماتریس D وارون پذیر است. در این صورت

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D) \det(A - BD^{-1}C).$$

قضیه ۴.۳.۱. [۴۰، قضیه ۳]

(۱) فرض کنیم $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ به طوری که $A, B, C, D \in F^{(n \times n)}$ و $CD = DC$. در این صورت

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

همچنین اگر حداقل یکی از بلوک‌های A, B, C, D برابر صفر باشد آنگاه

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

(۲) فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی باشد و برای $m \geq 2$ داشته باشیم $M \in R^{m \times m}$. فرض کنیم $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix}$ به طوری که A, B, C و d به ترتیب ماتریس‌هایی با بعدهای $m-1 \times m-1, m-1 \times m-1, m-1 \times m-1$ و 1×1 باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix} &= (d-1)\det A + \det(A-BC) \\ &= (d+1)\det A - \det(A+BC). \end{aligned}$$

فصل ۲

گراف ناجابجایی و گراف جابجایی گروه‌ها

۱.۲ گراف ناجابجایی یک گروه

همانطور که در پیشگفتار هم بیان شد، پاول اردوش نخستین بار ایده گراف ناجابجایی را مطرح کرد. به هر گروه ناآبلی دلخواه، گراف ناجابجایی آن نسبت داده می‌شود که رأس‌های آن عناصر غیر مرکزی گروه هستند و دو رأس گراف با هم مجاورند اگر و تنها اگر این دو عضو در گروه با هم جابجا نشوند. او این پرسش ترکیبیاتی را مطرح کرد که: اگر هر زیر گراف کامل گراف ناجابجایی یک گروه ناآبلی، متناهی باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که عدد خوشه‌ای گراف متناهی است؟ نیومن به این پرسش در سال ۱۹۷۶ پاسخ مثبت داد.

در سال ۲۰۰۶ عبداللہی-اکبری-میمنی مقاله‌ای را به چاپ رساندند که از یک سو ویژگی‌های نظریه گرافی گراف ناجابجایی را بررسی کردند و از سوی دیگر به پایدار ماندن ویژگی‌های نظریه گروهی در گراف‌های یکرخت پرداختند. سه انگاره اساسی پرداخته شده در این مقاله بدین ترتیب هستند:

(الف) اگر G و H دو گروه متناهی ناآبلی با گراف‌های ناجابجایی یکرخت باشند آنگاه $|G| = |H|$.

(ب) اگر G و H دو گروه متناهی ناآبلی با گراف‌های ناجابجایی یکرخت باشند و یکی از گروه‌ها

پوچ توان باشد، آنگاه گروه دیگر نیز پوچ توان است.

(ج) اگر G و H دو گروه متناهی ناآبلی با گراف‌های ناجابجایی یکریخت باشند و یکی از گروه‌ها ساده باشد، آنگاه $G \cong H$.

انگاره اول با مثال نقضی که در [۳۲] آمده است، رد شد. در این مثال دو گروه G و H با مرتبه‌های $2^{10} \cdot 5^3$ و $2^3 \cdot 5^6$ ارائه شدند که دارای گراف‌های ناجابجایی یکریخت هستند. انگاره سوم در [۱۷] به اثبات رسیده است.

در این بخش به برخی از نتایج بدست آمده در مورد گراف ناجابجایی وابسته به گروه‌ها اشاره می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۲. [۳، گزاره ۲۶.۳] فرض کنیم $G = GL(2, q)$ ، p یک عدد اول باشد و $q = p^n > 2$. همچنین فرض کنیم a یک عضو غیر مرکزی از G باشد. در این صورت $C_G(a)$ با یکی از زیرگروه‌های زیر مزدوج است:

(۱) زیرگروهی متشکل از همه‌ی ماتریس‌های قطری در G که آن را با D نمایش می‌دهیم و $|D| = (q-1)^2$.

(۲) یک زیرگروه دوری از G ، که آن را با I نمایش می‌دهیم و $|I| = q^2 - 1$.

(۳) $PZ(G)$ ، که P یک p -زیرگروه سیلو از G شامل همه‌ی ماتریس‌هایی به شکل $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است به طوری که x متعلق به میدان زمینه است و $|PZ(G)| = q(q-1)$.

گزاره ۲.۱.۲. [۳، گزاره ۱۰.۲] فرض کنیم G یک گروه ناآبلی باشد. در این صورت $diam(\Gamma_G) = 2$. بعلاوه، Γ_G همبند است. همچنین Γ_G برابر با ۳ است.

گزاره ۳.۱.۲. [۳، گزاره ۱۸.۲] (۱) برای هر گروه متناهی ناآبلی ساده، عدد غالب برابر با ۲ است. (۲) فرض کنیم n عددی صحیح و F یک میدان باشد. اگر $n = 2$ و $|F| > 3$ یا $n > 2$ ، آنگاه

$$\gamma(\Gamma_{GL(n,F)}) = \gamma(\Gamma_{SL(n,F)}) = 2.$$

لم ۱.۱.۲. [۳، لم ۱۰.۴] فرض کنیم G یک گروه متناهی ناآبلی باشد. در این صورت $\chi(\Gamma_G)$ برابر با کمترین تعداد زیرگروه‌های آبلی در G است که اجتماع آنها با G برابر است. همچنین

$$\omega(\Gamma_G) \leq \chi(\Gamma_G) \leq |G : Z(G)|.$$

لم ۲.۱.۲. [۳، لم ۴.۲] فرض کنیم G یک AC -گروه متناهی ناآبلی است. در این صورت $\omega(\Gamma_G) = \chi(\Gamma_G)$.

گزاره ۴.۱.۲. [۳، گزاره ۳.۴] فرض کنیم $G = GL(2, q)$ و $q > 2$. در این صورت

$$\omega(\Gamma_G) = \chi(\Gamma_G) = q^2 + q + 1.$$

همچنین اگر برای گروه H داشته باشیم $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ آنگاه $|G| = |H|$.

گزاره ۵.۱.۲. [۳، گزاره ۲.۳] فرض کنیم G یک گروه نآبلی باشد به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_{S_3}$. در این صورت $G \cong S_3$.

گزاره ۶.۱.۲. [۳، قضیه ۱۶.۳] فرض کنیم G یک گروه و $n > 2$ عددی صحیح باشد. در این صورت

$$(1) \text{ اگر } \Gamma_G \cong \Gamma_{S_n} \text{ آنگاه } |G| = |S_n|.$$

$$(2) \text{ اگر } n > 3 \text{ و } \Gamma_G \cong \Gamma_{A_n} \text{ آنگاه } |G| = |A_n|.$$

گزاره ۷.۱.۲. [۳، گزاره ۱۹.۳] فرض کنیم $n > 2$ عدد صحیح باشد و $G = D_{2n}$. اگر H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ ، آنگاه $|G| = |H|$ و H شامل زیرگروهی آبلی با اندیس ۲ است.

گزاره ۸.۱.۲. [۱۸، قضیه ۳.۱] فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\Gamma_G \cong \Gamma_{\mathbb{A}_{p+3}}$ به طوری که برای عدد اول p ، $\mathbb{A}_{p+3}$ گروه متناوب از درجه $p+3$ است. در این صورت $G \cong \mathbb{A}_{p+3}$.

گزاره ۹.۱.۲. [۱۷، قضیه ۱] فرض کنیم H یک گروه ساده‌ی متناهی نآبلی و G گروهی باشد به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ در این صورت $|G| = |H|$.

گزاره ۱۰.۱.۲. [۱۸، گزاره ۱۴.۳] فرض کنیم G یک AC - گروه غیرحلقه‌پذیر متناهی و H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ در این صورت $|G| = |H|$.

گزاره ۱۱.۱.۲. [۵، قضیه ۲.۱] فرض کنیم G و H دو گروه پوچ توان نآبلی متناهی با گراف‌های ناجابجایی نامنتظم باشند به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$. در این صورت $|G| = |H|$.

گزاره ۱۲.۱.۲. [۴، قضیه ۲.۱] اگر P یک p - گروه نآبلی متناهی باشد به طوری که برای گروهی مانند G داشته باشیم $\Gamma_G \cong \Gamma_P$ آنگاه $|G| = |P|$.

در گزاره‌ی زیر $\kappa(G)$ تعداد رده‌های تزویج در G است.

گزاره ۱۳.۱.۲. [۲۹، لم ۱.۲] فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت

$$|E(\Gamma_G)| = \frac{1}{2} |G| (|G| - \kappa(G)).$$

گزاره ۱۴.۱.۲. [۴۲، قضیه ۸.۳] فرض کنیم D_{2n} گروه دووجهی باشد. در این صورت برای هر عدد طبیعی n ، احکام زیر برقرار است:

(۱) اگر n عددی زوج باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \omega(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= \frac{n}{4} + 1 \quad (i) \\ \alpha(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= n - 2 \quad (ii) \\ \chi(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= \frac{n}{4} + 1 \quad (iii) \\ \beta(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= n \quad (iv) \end{aligned}$$

(۲) اگر n عددی فرد باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \omega(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= n + 1 \quad (i) \\ \alpha(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= n - 1 \quad (ii) \\ \chi(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= n + 1 \quad (iii) \\ \beta(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) &= n \quad (iv) \end{aligned}$$

۲.۲ گراف جابجایی گروه‌ها

فرض کنیم G گروهی متناهی و X زیرمجموعه‌ای از آن باشد. به این گروه گراف جابجایی $\mathcal{C}(G, X)$ را این گونه نسبت می‌دهیم: X مجموعه‌ی رأس‌های گراف است و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $yx = xy$. در حالتی که X مجموعه‌ی عناصر غیر مرکزی G باشد، گراف جابجایی G را با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

بسیاری از پژوهشگران $\mathcal{C}(G, X)$ را برای انتخاب‌های مختلف G و X مطالعه کرده‌اند و آن را از دیدگاه‌های متفاوت مورد بررسی قرار داده‌اند. برای نمونه به برخی از نتایج بدست آمده در این زمینه اشاره می‌کنیم. در [۱۰]، این گراف برای حالتی که $X = G - \{1\}$ و G مرتبه زوج دارد، مطالعه شده است. این گراف در [۷]، برای حالتی که G متقارن و X یک رده تزویج در G است بررسی شده است. تحقیقات بیشتر در این زمینه در پایان‌نامه موشه^۱ [۳۳] یافت می‌شود. در این بخش به برخی نتایج بدست آمده در مورد گراف‌های جابجایی وابسته به گروه‌ها می‌پردازیم.

در قضیه زیر قطر گراف جابجایی $\mathcal{C}(G, X)$ برای حالتی که $G = S_n$ و X یک رده‌ی تزویج در آن است، محاسبه شده است.

قضیه ۱.۲.۲. [۶، قضیه ۲.۱] فرض کنیم $\sigma \in S_n$ به طوری که $|Fix(\sigma)| = m + r$ و $m \geq 3$ و $r \geq 0$ در این صورت:

$$\begin{aligned} (1) \text{ اگر } \sigma &= (123\dots m), r \geq 1, \text{ آنگاه } diam\mathcal{C}(G, X) = \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 1 \\ (2) \text{ اگر } r &\geq 1 \text{ و } \sigma = (123\dots m)(m+1 \ m+2) \text{ آنگاه } diam\mathcal{C}(G, X) \leq \lceil \frac{m-1}{r} \rceil + 3 \\ (3) \text{ اگر } \sigma &= (123\dots m)(m+1\dots 2m-1) \text{ آنگاه } diam\mathcal{C}(G, X) \leq 3\lceil \frac{m-2}{r+1} \rceil + 4 \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $G = S_n$ گروه متقارن و X رده‌ی تزویج عناصر مرتبه ۳ در G است.

^۱Moshe

قرار می‌دهیم :

$$t = (1, 2, 3)(4, 5, 6) \dots (3r-2, 3r-1, 3r).$$

بنابراین t از مرتبه‌ی ۳ و از نوع $1^{n-3r} 3^r$ است. فرض کنیم $X = t^G$ رده‌ی تزویج عنصر t باشد. در این صورت قضیه‌ی زیر قطر گراف جابجایی $\mathcal{C}(G, X)$ را در این حالت مشخص می‌کند.

قضیه ۲.۲.۲. [۳۴، قضایای ۱.۱، ۲.۱، ۳.۱]

(۱) اگر $n \geq 8r$ آنگاه $\text{diam}(\mathcal{C}(G, X)) = 2$

(۲) اگر $6r < n < 8r$ آنگاه $\text{diam}(\mathcal{C}(G, X)) = 3$

(۳) اگر $r > 1$ و $n = 6r$ آنگاه $\text{diam}(\mathcal{C}(G, X)) \leq 4$

فرض کنیم $G = S_n$ گروه متقارن و $a \in G$ دوری از نوع $e_1^{f_1} e_2^{f_2} \dots e_m^{f_m}$ باشد. حال گرافی را معرفی می‌کنیم که به نوع دور عنصر $a \in G$ وابسته است. فرض کنیم Γ گرافی با مجموعه رأس‌های $V(\Gamma) = \{1, 2, \dots, m\}$ و مجموعه یال‌های

$$E(\Gamma) = \{(i, j) | i \neq j, e_i h_i = e_j h_j; 1 \leq h_i \leq f_i, 1 \leq h_j \leq f_j\}$$

باشد. یال $(i, j) \in E(\Gamma)$ را کامل^۱ می‌نامیم هرگاه $h_i = f_i, h_j = f_j$. برای $1 \leq i \leq m$ قرار می‌دهیم:

$$b(i) := \frac{e_i}{\text{lcm}\{d : d|e_i, d \leq f_i\}}$$

یال $(i, j) \in E(\Gamma)$ را خاص^۲ با منبع i می‌نامیم هرگاه $e_j f_j = e_i$ و $b(i) = e_i$. در ادامه بر اساس نمادگذاری‌های فوق قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که قطر گراف جابجایی $\mathcal{C}(G, X)$ را در این حالت مشخص می‌کنند.

قضیه ۳.۲.۲. [۱۲، قضیه ۱] فرض کنیم $G = S_n$ و $a \in G$ دوری از نوع e^f باشد و $X = a^G$. در این صورت $\mathcal{C}(G, X)$ همبند است اگر و تنها اگر $b(1) = 1$ یا $e \leq 3$ و $f = 1$.

به عنوان مثال، فرض کنیم $G = S_n$ و $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$. در این صورت a یک دور از نوع 6^2 است و $b(1) = \frac{6}{6} = 1$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۲ گراف $\mathcal{C}(G, X)$ ناهمبند است.

قضیه ۴.۲.۲. [۲۴، قضیه ۱.۱] فرض کنیم m یک عدد طبیعی مرکب باشد و $n \geq 2$. در این صورت گراف‌های $\Delta(GL(n, \mathbb{Z}_m))$ و $\Delta(M(n, \mathbb{Z}_m))$ همبند هستند و

$$\text{diam}(\Delta(GL(n, \mathbb{Z}_m))) = \text{diam}(\Delta(M(n, \mathbb{Z}_m))) = 3,$$

که در آن $M(n, \mathbb{Z}_m)$ حلقه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_m$ است.

قضیه ۵.۲.۲. [۲۱، قضیه ۲.۲] فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت گراف جابجایی $\Delta(G)$ اجتماعی از گراف‌های کامل K_p ، برای عدد اول p ، است اگر و تنها اگر $p = ۲$ و $G \cong D_8$ یا Q_8 .

قضیه ۶.۲.۲. [۲۱، قضیه ۲.۲] فرض کنیم G یک AC - گروه ناآبلی متناهی باشد. در این صورت طیف گراف جابجایی گروه G برابر است با

$$\{(-1)^{\sum_{i=1}^n |X_i| - n(Z(G)+1)}, (|X_1| - |Z(G)| - 1)^1, \dots, (|X_n| - |Z(G)| - 1)^1\},$$

که در آن $X_1, \dots, X_n$ مرکزسازهای متمایز عناصر غیر مرکزی گروه G هستند.

قضیه ۷.۲.۲. [۲۱، گزاره ۱.۳] گروه دووجهی D_{2m} را به ازای $m > ۲$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$Spec(\Delta(D_{2m})) = \begin{cases} \{(-1)^{m-2}, 1^m, (m-2)^1\} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ \{(-1)^{\frac{m}{2}-3}, 1^{\frac{m}{2}}, (m-3)^1\} & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

قضیه ۸.۲.۲. [۲۱، گزاره ۳.۳] فرض کنیم Q_{4n} گروه کواترنیون تعمیم یافته باشد و $n \geq ۲$. در این صورت

$$Spec(\Delta(Q_{4n})) = \{(-1)^{2n-3}, 1^n, (2n-3)^1\}.$$

قضیه ۹.۲.۲. [۲۱، لم ۲.۳] فرض کنیم G یک گروه ناآبلی از مرتبه‌ی pq باشد، به طوری که p و q اعداد اول با شرط $p|(q-1)$ هستند. در این صورت

$$Spec(\Delta(G)) = \{(-1)^{pq-q-1}, (p-2)^q, (q-2)^1\}.$$

فصل ۳

طیف و انرژی گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی و $Z(G)$ مرکز آن باشد. گراف ناجابجایی $\Gamma(G)$ را در نظر می‌گیریم. در این فصل انرژی و طیف گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها مانند D_{2n} و $GL(2, q)$ را محاسبه می‌کنیم. حاصلضرب مستقیم گروه‌های G و H را با این شرط که G یک گروه متناهی ناآبلی و H یک گروه متناهی آبلی باشد در نظر گرفته و به محاسبه انرژی $\Gamma_{G \times H}$ می‌پردازیم. همچنین طیف و انرژی $\Gamma_{D_{2n} \times D_{2n}}$ را محاسبه می‌کنیم.

۱.۳ انرژی و انرژی لاپلاسین گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها

در این قسمت انرژی و انرژی لاپلاسین گراف ناجابجایی گروه دووجهی D_{2n} را محاسبه می‌کنیم. همچنین به محاسبه انرژی گراف ناجابجایی گروه $GL(2, q)$ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱.۳.

(۱) اگر n عددی زوج باشد آنگاه

$$Spec(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{pmatrix} -2 & \circ & \frac{(n-2)-\sqrt{5n^2-12n+4}}{2} & \frac{(n-2)+\sqrt{5n^2-12n+4}}{2} \\ \frac{n}{2}-1 & \frac{\Upsilon_n}{2}-3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(۲) اگر n عددی فرد باشد آنگاه

$$Spec(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{pmatrix} -1 & \circ & \frac{(n-1)-\sqrt{5n^2-6n+1}}{2} & \frac{(n-1)+\sqrt{5n^2-6n+1}}{2} \\ (n-1) & (n-2) & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(۳) اگر $n=4$ ، آنگاه $Spec(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{pmatrix} -2 & \circ & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

برهان. فرض کنیم n عددی زوج باشد. در این صورت ماتریس مجاورت گراف $\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}$ به صورت زیر است:

$$A_{ij}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{cases} \circ & 1 \leq i, j \leq n-2 \\ \circ & i = k+t, j = k+s; \quad t, s = 1 \\ & \text{یا } k = n-1, n+1, \dots, \Upsilon_n-3 \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین داریم

$$A(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \left[\begin{array}{ccc|cccc|cccc|cccc|cccc} \circ & \dots & \circ & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \circ & \circ & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \circ & \circ & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \circ & \circ & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \circ & \circ & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \circ & \circ & 1 & 1 & \dots & \circ & \circ & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \circ & \circ & 1 & 1 & \dots & \circ & \circ & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \circ & \circ & \dots & 1 & 1 & \circ & \circ \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \circ & \circ & \dots & 1 & 1 & \circ & \circ \end{array} \right],$$

$$\det(A(\Gamma_{D_{\mathbf{r}_n}}) - Ix) =$$

$-x$	$\dots$	$\circ$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\circ$	$\dots$	$-x$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$-x$	$\circ$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\circ$	$-x$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$-x$	$\circ$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\circ$	$-x$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$-x$	$\circ$	$\backslash$	$\backslash$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\circ$	$-x$	$\backslash$	$\backslash$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$-x$	$\circ$
$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\dots$	$\backslash$	$\backslash$	$\circ$	$-x$

سطرها و ستون‌های ماتریس را به ترتیب با $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$ و $c_1, c_2, \dots, c_{n-2}$ نمایش می‌دهیم. برای محاسبه‌ی دترمینان این ماتریس ابتدا (-1) برابر سطر اول را به سطرهای $r_{n-2}, \dots, r_2$ و سپس ستون‌های $c_2, \dots, c_{n-2}$ را به ستون c_1 اضافه می‌کنیم. بنابراین داریم

[illegible]

از عبارت $(-x)$ در سطرهای $r_2, r_3, \dots, r_{n-2}$ فاکتور می‌گیریم و بسط ماتریس را نسبت به

سطرهای مناسب در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم

$$\det(A(\Gamma_{D_{\frac{n}{2}}} - Ix) = (-x)^{n-3} \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n-2 & -x & \circ & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n-2 & \circ & -x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n-2 & 1 & 1 & -x & \circ & \dots & 1 & 1 \\ n-2 & 1 & 1 & \circ & -x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -x & \circ \\ n-2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \circ & -x \end{vmatrix}.$$

در ماتریس فوق n سطر آخر را در نظر می‌گیریم. این سطرها را به $\frac{n}{2}$ بخش تقسیم می‌کنیم به طوری که در هر بخش ۲ سطر وجود دارد. اکنون در بخش اول، (-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و ستون سوم را به ستون دوم اضافه می‌کنیم. به این ترتیب ماتریس زیر بدست می‌آید:

$$\det(A(\Gamma_{D_{\frac{n}{2}}} - Ix) = (-x)^{n-3} \begin{vmatrix} -x & 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & -x & \circ & 2 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ n-2 & 2 & 1 & -x & \circ & \dots & 2 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & -x & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & -x \end{vmatrix}.$$

از عبارت $(-x)$ در سطرهای مناسب فاکتور می‌گیریم و بسط ماتریس را نسبت به این سطرها در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت

$$\det(A(\Gamma_{D_{\frac{n}{2}}} - Ix) = (-x)^{n-3} (-x)^{\frac{n}{2}} \begin{vmatrix} -x & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ n-2 & -x & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ n-2 & 2 & -x & 2 & \dots & 2 & 2 \\ n-2 & 2 & 2 & -x & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 2 & 2 & 2 & \dots & -x & 2 \\ n-2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & -x \end{vmatrix}.$$

در این ماتریس تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است با $\frac{n}{2} + 1$. حال (-1) برابر سطر دوم را به سطرهای $r_3, \dots, r_{\frac{n}{2}+1}$ و ستون‌های $c_3, \dots, c_{\frac{n}{2}+1}$ را به ستون c_2 اضافه می‌کنیم. سپس داریم

$$\det(A(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) - Ix) = (-x)^{n-\Upsilon} (-x)^{\frac{n}{\Upsilon}} \begin{vmatrix} -x & n & & & \\ n-\Upsilon & -x+(n-\Upsilon) & & & \\ \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Upsilon & \Upsilon & \dots & \Upsilon & \Upsilon \\ \Upsilon & \Upsilon & \dots & \Upsilon & \Upsilon \\ -x-\Upsilon & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & -x-\Upsilon & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & -x-\Upsilon & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & -x-\Upsilon \end{vmatrix}.$$

در اینجا از عبارت $(-x - \Upsilon)$ در سطرهاى مناسب فاکتور گرفته و بسط ماتریس را نسبت به این سطرها در نظر می‌گیریم. در نتیجه داریم

$$P_{\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}}(x) = (-x)^{\frac{\Upsilon n}{\Upsilon} - \Upsilon} (-x - \Upsilon)^{\frac{n}{\Upsilon} - 1} \begin{vmatrix} -x & n \\ n - \Upsilon & -x + (n - \Upsilon) \end{vmatrix}$$

به طور مشابه، اگر n عددی فرد باشد ماتریس مجاورت $\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}$ به صورت زیر است:

$$A_{ij}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{cases} \circ & 1 \leq i, j \leq n-1 \\ \circ & i = j = n, n+1, \dots, \Upsilon n-1 \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، ماتریس فوق به شکل زیر است

$$A(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} \circ & \dots & \circ & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \circ & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \circ & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \circ & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \circ & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \circ & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \circ \end{array} \right].$$

با انجام محاسبات داریم:

$$P_{\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}}(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{\Upsilon n}{\Upsilon} - \Upsilon} (-x - \Upsilon)^{\frac{n}{\Upsilon} - 1} (x^2 - x(n - \Upsilon) - n(n - \Upsilon)) & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ (-x)^{n-\Upsilon} (-x - 1)^{n-1} (x^2 - x(n - 1) - n(n - 1)) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

در نتیجه اگر n زوج باشد

$$\text{Spec}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{pmatrix} -\Upsilon & \circ & \frac{(n-\Upsilon)-\sqrt{\Delta n^2-12n+4}}{\Upsilon} & \frac{(n-\Upsilon)+\sqrt{\Delta n^2-12n+4}}{\Upsilon} \\ \frac{n}{\Upsilon} - 1 & \frac{\Upsilon n}{\Upsilon} - 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

و اگر n فرد باشد

$$Spec(\Gamma_{D_{\gamma_n}}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{(n-1)-\sqrt{5n^2-6n+1}}{2} & \frac{(n-1)+\sqrt{5n^2-6n+1}}{2} \\ (n-1) & (n-2) & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

نتیجه ۱.۱.۳.

$$\mathcal{E}(\Gamma_{D_{\gamma_n}}) = \begin{cases} (n-2) + \sqrt{5n^2 - 12n + 4} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ (n-1) + \sqrt{5n^2 - 6n + 1} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

در جدول ۱.۳، انرژی گراف ناجابجایی برخی گروه‌های دووجهی داده شده است.

گروه‌ها	چندجمله‌ای مشخصه	مقادیر ویژه	انرژی
D_6	$(-x)(-x-1)^2(x^2-2x-6)$	$(0)_1, (-1)_2, (1+\sqrt{5}), (1-\sqrt{5})$	$2+2\sqrt{5}$
D_8	$(-x)^2(-x+4)(-x-2)^2$	$(0)_3, (4)_1, (-2)_2$	۸
D_{10}	$(-x)^2(-x-1)^4(x^2-4x-20)$	$(0)_3, (-1)_4, (2+2\sqrt{5}), (2-2\sqrt{5})$	$4+4\sqrt{5}$
D_{12}	$(-x)^6(-x-2)^2(x^2-4x-24)$	$(0)_6, (-2)_2, (2+2\sqrt{3}), (2-2\sqrt{3})$	$4+4\sqrt{3}$
D_{16}	$(-x)^9(-x-2)^2(x^2-6x-48)$	$(0)_9, (-2)_2, (2+\sqrt{5}), (2-\sqrt{5})$	$6+2\sqrt{5}$

جدول ۱.۳: چند جمله ای مشخصه، مقادیر ویژه و انرژی گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم $G = GL(2, q)$ ، p یک عدد اول باشد و $q = p^n > 2$. در این صورت

$$P_{\Gamma_G}(x) = x^{(n-1)} \left[x^3 + (-q^4 + q^3 + 4q^2 - 6q + 2)x^2 + (-2q^6 + 6q^5 - q^4 - 13q^3 + 15q^2 - 5q)x - (q-1)^4 q^2 (q-2)(q+1) \right] (x + (q-1)^2)^q \\ (x + q(q-1))^{\frac{q^2-q-2}{2}} (x + (q-1)(q-2))^{\frac{q^2+q-2}{2}}$$

جایی که $t = q^2 + q + 1$.

برهان. با توجه به گزاره ۱.۱.۲، داریم

$$G - Z(G) = \left(\bigcup_{g \in G} ((PZ(G))^g - Z(G)) \cup \left(\bigcup_{g \in G} I^g - Z(G) \right) \right) \cup \left(\bigcup_{g \in G} D^g - Z(G) \right),$$

به قسمی که D زیرگروهی از همه‌ی ماتریس‌های قطری و I زیرگروهی دوری از مرتبه‌ی $q^2 - 1$ در G می‌باشند. همچنین P یک p -زیرگروه سیلو از G شامل همه‌ی ماتریس‌هایی به شکل $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. علاوه بر این $|D| = (q-1)^2$ و $|PZ(G)| = q(q-1)$. همچنین تعداد مزدوج‌های

I ، D و $PZ(G)$ به ترتیب برابر است با $\frac{q(q+1)}{2}$ ، $\frac{q(q-1)}{2}$ و $q+1$. چون برای هر عنصر غیر مرکزی d از D ، $C_G(d) = D$ ، برای هر عنصر غیر بدیهی x از P ، $PZ(G) = C_G(x)$ و $C_G(I) = I$. در این صورت گراف ناجابجایی گروه G یک گراف کامل t - بخشی است که

$$t = \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + q + 1 = q^2 + q + 1.$$

با توجه به قضیه ۱.۳.۱، داریم

$$P_{\Gamma_G}(x) = x^{(n-t)} \left[x^3 + (-q^4 + q^3 + 4q^2 - 6q + 2)x^2 + (-2q^6 + 6q^5 - q^4 - 13q^3 + 15q^2 - 5q)x - (q-1)^4 q^2 (q-2)(q+1) \right] (x + (q-1)^2)^q \\ (x + q(q-1))^{\frac{q^2-q-2}{2}} (x + (q-1)(q-2))^{\frac{q^2+q-2}{2}}.$$

□

لم ۱.۱.۳. فرض کنیم $x^3 + px + q = 0$ و $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$. در این صورت شرایط زیر برقرار است:

(۱) اگر $\Delta > 0$ آنگاه معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

(۲) اگر $\Delta < 0$ آنگاه معادله سه ریشه‌ی حقیقی دارد.

(۳) اگر $\Delta = 0$ آنگاه دو حالت داریم:

(i) اگر $p, q \neq 0$ ، آنگاه معادله یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

(ii) اگر $p = q = 0$ ، آنگاه معادله ریشه‌ی سه گانه دارد.

نتیجه ۲.۱.۳.

$$\mathcal{E}(\Gamma_{GL}(r, q)) = \left| 2A - \frac{b}{3} \right| + 2 \left| A + \frac{b}{3} \right| + q(q-1)^2 + \frac{q^2 - q - 2}{2} q(q-1) + \frac{q^2 + q - 2}{2} (q-1)(q-2).$$

برهان. با توجه به قضیه ۲.۱.۳، داریم

$$P_{\Gamma_G}(x) = x^{(n-t)} \left[x^3 + (-q^4 + q^3 + 4q^2 - 6q + 2)x^2 + (-2q^6 + 6q^5 - q^4 - 13q^3 + 15q^2 - 5q)x - (q-1)^4 q^2 (q-2)(q+1) \right] (x + (q-1)^2)^q \\ (x + q(q-1))^{\frac{q^2-q-2}{2}} (x + (q-1)(q-2))^{\frac{q^2+q-2}{2}}.$$

فرض کنیم

$$f(x) = x^3 + (-q^4 + q^3 + 4q^2 - 6q + 2)x^2 + (-2q^6 + 6q^5 - q^4 - 13q^3 + 15q^2 - 5q)x - (q-1)^4 q^2 (q-2)(q+1),$$

$$b = (-q^4 + q^3 + 4q^2 - 6q + 2),$$

$$c = (-2q^6 + 6q^5 - q^4 - 13q^3 + 15q^2 - 5q),$$

$$d = -(q-1)^4 q^2 (q-2)(q+1).$$

در این صورت $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. برای راحتی در انجام محاسبات قرار می‌دهیم $x = y - \frac{b}{3}$ و $f(x)$ را به $y^3 + \alpha y + \beta$ تغییر می‌دهیم به طوری که $\alpha = \frac{b^2 - 2b}{3} + c$ و $\beta = \frac{-b^3 + 3b^2 - 9bc}{27} + d$ بنابراین داریم

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{3}\right)^2.$$

با توجه به لم ۱.۱.۳، چون $\Delta < 0$ پس $g(y)$ سه ریشه‌ی حقیقی دارد. در نتیجه

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(A + B) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B),$$

جایی که $A = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{3} + \sqrt{\Delta}}$ و $B = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{3} - \sqrt{\Delta}}$. چون ریشه‌ها حقیقی هستند پس $i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B) = 0$ ، بنابراین $A = B$. پس $y_1 = 2A$ و $y_2, y_3 = -A$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Gamma_{GL(2,q)}) &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \\ &= \left| 2A - \frac{b}{3} \right| + 2 \left| -A - \frac{b}{3} \right| + q \left| -(q-1)^2 \right| + \frac{q^2 - q - 2}{2} \\ &\quad \left| -q(q-1) \right| + \frac{q^2 + q - 2}{2} \left| -(q-1)(q-2) \right| \\ &= \left| 2A - \frac{b}{3} \right| + 2 \left| A + \frac{b}{3} \right| + q(q-1)^2 + \frac{q^2 - q - 2}{2} q(q-1) \\ &\quad + \frac{q^2 + q - 2}{2} (q-1)(q-2). \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۱.۳.

(۱) اگر n زوج باشد آنگاه

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{2n}})) = \begin{pmatrix} 2n-2 & 2n-4 & n & 0 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & n-3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(۲) اگر n فرد باشد آنگاه

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{2n}})) = \begin{pmatrix} 0 & n & 2n-1 \\ 1 & n-2 & n \end{pmatrix}.$$

$$(۳) \text{ اگر } n=۴, \text{ آنگاه } \text{Spec}(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}})) = \begin{pmatrix} 0 & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

برهان. فرض کنیم n زوج باشد. ماتریس لاپلاسی گراف ناجابجایی $\Gamma(D_{\Upsilon_n})$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{bmatrix} n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & (\Upsilon_n - ۴) & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & (\Upsilon_n - ۴) & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & (\Upsilon_n - ۴) & 0 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 & (\Upsilon_n - ۴) & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & (\Upsilon_n - ۴) & 0 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & (\Upsilon_n - ۴) \end{bmatrix},$$

در این صورت داریم

$$\det(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) - Ix) = \begin{vmatrix} n-x & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & n-x & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & (\Upsilon_n - ۴) - x & 0 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & (\Upsilon_n - ۴) - x & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & (\Upsilon_n - ۴) - x & 0 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & (\Upsilon_n - ۴) - x \end{vmatrix},$$

اکنون ماتریس لاپلاسی گراف $\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}$ را در حالتی که n فرد است، در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم

$$\det(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) - Ix) = \begin{vmatrix} n-x & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & n-x & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & \Upsilon_n - x & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & \Upsilon_n - x & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & \Upsilon_n - x & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \Upsilon_n - x & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & \Upsilon_n - x & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \Upsilon_n - x \end{vmatrix}.$$

مشابه با اثبات قضیه ۱.۱.۳ و انجام محاسبات داریم

$$P_{\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}})}(x) = \begin{cases} \text{اگر } n \text{ زوج باشد} & x(x-n)^{(n-۳)}(x-(\Upsilon_n-۴))^{\left(\frac{n}{۴}\right)}(x-(\Upsilon_n-۲))^{\frac{n}{۴}} \\ \text{اگر } n \text{ فرد باشد} & (-x)(n-x)^{n-۲}((\Upsilon_n-۱)-x)^n \end{cases}$$

بنابراین اگر n زوج باشد

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}})) = \begin{pmatrix} \Upsilon_n - ۲ & \Upsilon_n - ۴ & n & 0 \\ \frac{n}{۴} & \frac{n}{۴} & n-۳ & ۱ \end{pmatrix},$$

و اگر n فرد باشد

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}})) = \begin{pmatrix} 0 & n & 2n-1 \\ 1 & n-2 & n \end{pmatrix}.$$

□

نتیجه ۳.۱.۳.

$$\mathcal{LE}(\Gamma_{D_{\Upsilon_n}}) = \begin{cases} \frac{2n(n^2-4n+6)}{2n-2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 2n(n-1) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

در جدول ۲.۳، چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسین، مقادیر ویژه و انرژی لاپلاسین گراف ناجابجایی برخی گروه‌های دووجهی داده شده است.

انرژی لاپلاسین	مقادیر ویژه	چند جمله‌ای مشخصه	گروه‌ها
۸	$(0)_1, (4)_3, (6)_2$	$x(x-4)^3(x-6)^2$	D_8
۶۰	$(0)_1, (5)_3, (9)_5$	$(-x)(x-5)^3(9-x)^5$	D_{10}
$\frac{108}{5}$	$(0)_1, (6)_3, (8)_3, (10)_3$	$x(x-6)^3(x-8)^3(x-10)^3$	D_{12}
۱۲۶	$(0)_1, (7)_5, (13)_7$	$(-x)(x-7)^5(13-x)^7$	D_{14}
$\frac{304}{7}$	$(0)_1, (8)_5, (12)_4, (14)_4$	$x(x-8)^5(x-12)^4(x-14)^4$	D_{16}

جدول ۲.۳: چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه و انرژی لاپلاسین گراف ناجابجایی برخی گروه‌ها.

۲.۳ انرژی گراف ناجابجایی حاصلضرب مستقیم گروه‌ها

در این بخش حاصلضرب مستقیم گروه‌های G و H را با این شرط که G یک گروه متناهی ناآبلی و H یک گروه متناهی آبلی باشد در نظر گرفته و به محاسبه‌ی انرژی $\Gamma_{G \times H}$ می‌پردازیم. همچنین طیف و انرژی $\Gamma_{D_{\Upsilon_n} \times D_{\Upsilon_n}}$ را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی و H یک گروه آبلی متناهی از مرتبه n باشد. در این صورت $\mathcal{E}(\Gamma_{G \times H}) = n\mathcal{E}(\Gamma_G)$.

برهان. فرض کنیم $A(G)$ و $A(H)$ ماتریس‌های مجاورت گراف‌های ناجابجایی گروه‌های G و H باشند. در این صورت ماتریس مجاورت $\Gamma_{G \times H}$ به شکل زیر است.

$$A(\Gamma_{G \times H}) = \begin{bmatrix} A(G) & A(G) & \dots & A(G) \\ A(G) & A(G) & \dots & A(G) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(G) & A(G) & \dots & A(G) \end{bmatrix}.$$

بنابراین داریم

$$\det(A(\Gamma_{G \times H}) - Ix) = \begin{vmatrix} A(G) - Ix & A(G) & \dots & A(G) \\ A(G) & A(G) - Ix & \dots & A(G) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(G) & A(G) & \dots & A(G) - Ix \end{vmatrix}.$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \det(A(\Gamma_{G \times H}) - Ix) &= |(A(G) - Ix) + (n-1)A(G)| |(A(G) - Ix) - A(G)|^{n-1} \\ &= |nA(G) - Ix| |-Ix|^{n-1}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$P_{A(\Gamma_{G \times H})}(x) = n |-Ix|^{n-1} P_{A(G)}\left(\frac{x}{n}\right).$$

اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ مقادیر ویژه $A(G)$ باشند آنگاه

$$x_1 = n\lambda_1, x_2 = n\lambda_2, \dots, x_t = n\lambda_t,$$

مقادیر ویژه $A(\Gamma_{G \times H})$ هستند. لذا

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Gamma_{G \times H}) &= \sum_{i=1}^t |\lambda_i| \\ &= |n\lambda_1| + |n\lambda_2| + \dots + |n\lambda_t| \\ &= n(|\lambda_1| + \dots + |\lambda_t|) \\ &= n\mathcal{E}(\Gamma_G). \end{aligned}$$

□

مثال ۱.۲.۳. فرض کنیم $G = D_6$ و $H = \mathbb{Z}_6$. در این صورت

$$P_{\Gamma_{G \times H}}(x) = (-x)^{26}(-x-6)^2(x^2 - 12x - 216)$$

و

$$\mathcal{E}(\Gamma_{G \times H}) = 6\mathcal{E}(\Gamma_G) = 6(2 + 2\sqrt{7}).$$

حل. با توجه به قضیه ۳.۲.۱، ماتریس مجاورت گراف ناجابجایی گروه $G \times H$ به صورت زیر است:

$$A(\Gamma_{G \times H}) = \begin{bmatrix} A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \end{bmatrix}.$$

بنابراین داریم

$$\det(A(\Gamma_{G \times H}) - Ix) = \begin{vmatrix} A(G) - Ix & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) - Ix & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) - Ix & A(G) & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) - Ix & A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) - Ix & A(G) \\ A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) & A(G) - Ix \end{vmatrix}.$$

برای محاسبه‌ی این دترمینان ابتدا (-1) برابر سطر اول را به سطر دوم تا سطر ششم اضافه می‌کنیم. سپس ستون‌های دوم تا ششم را به ستون اول اضافه می‌کنیم و بسط ماتریس را نسبت به سطرهای دوم تا ششم در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم

$$\det(A(\Gamma_{G \times H}) - Ix) = (-x)^{25} \begin{vmatrix} -x & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & -x & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & -x & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & -x & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & -x \end{vmatrix}.$$

اکنون (-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و ستون دوم را به ستون اول اضافه می‌کنیم. بسط ماتریس را نسبت به سطر دوم در نظر می‌گیریم و داریم

$$\det(A(\Gamma_{G \times H}) - Ix) = (-x)^{26} \begin{vmatrix} -x & 6 & 6 & 6 \\ 12 & -x & 6 & 6 \\ 12 & 6 & -x & 6 \\ 12 & 6 & 6 & -x \end{vmatrix}.$$

در ادامه (۱-) برابر سطر دوم را به سطر سوم و چهارم و سپس ستون‌های سوم و چهارم را به ستون دوم اضافه می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\det(A(\Gamma_{G \times H}) - Ix) = (-x)^{25}(-x-6)^2 \begin{vmatrix} -x & 18 \\ 12 & -x+12 \end{vmatrix}.$$

در نتیجه

$$P_{\Gamma_{G \times H}}(x) = (-x)^{26}(-x-6)^2(x^2 - 12x - 216)$$

و با توجه به جدول ۳.۱ داریم

$$\mathcal{E}(\Gamma_{G \times H}) = 6(2 + 2\sqrt{7}) = 6\mathcal{E}(\Gamma_G).$$

لم ۱.۲.۳. فرض کنیم $G = D_8$. در این صورت

$$P_{\Gamma_{G \times G}}(x) = (-x)^{45}(-x+8)(-x-4)^4(x^2+8x-32)^4(x^2-40x-128)$$

و

$$\mathcal{E}(\Gamma_{G \times G}) = \sum_{i=1}^{60} |\lambda_i| = 8(3 + \sqrt{33} + 4\sqrt{3}).$$

برهان. برای گروه G ، ماتریس مجاورت $A^\circ(G)$ را مشابه با $A(G)$ با اضافه کردن رأس‌های $Z(G)$ به $A(G)$ در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های $A(G)$ و $A^\circ(G)$ تنها در برخی سطرها و ستون‌های صفر متفاوت هستند. در این صورت خواهیم داشت

$$A^\circ(\Gamma_{G \times G}) = \begin{bmatrix} A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times G}) - Ix) = \begin{vmatrix} A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & J & J & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix & J & J & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J & J & A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix \end{vmatrix}.$$

سطرهای ماتریس (که درایه‌های آن ماتریس‌های بلوکی هستند) را با $r_1, r_2, \dots, r_8$ و ستون‌های آن را $c_1, c_2, \dots, c_8$ نمایش می‌دهیم. برای محاسبه‌ی دترمینان این ماتریس

ابتدا (۱-) برابر سطر r_1 را به سطر r_2 و سپس ستون c_2 را به c_1 اضافه می‌کنیم. اکنون (۱-) برابر سطر r_3 را به r_4 و سپس ستون c_4 را به c_3 اضافه می‌کنیم. این روند را برای سطرهای r_5 و r_6 و همچنین برای r_7 و r_8 تکرار می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times G}) - Ix) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) & A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) & A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ \circ & -Ix & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & \mathfrak{A}J & J & \mathfrak{A}J & J \\ \circ & \circ & \circ & -Ix & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & A^\circ(G) & \mathfrak{A}J & J & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & \mathfrak{A}J & J \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -Ix & \circ & \circ \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & A^\circ(G) & \mathfrak{A}J & J & \mathfrak{A}J & J & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -Ix \end{vmatrix}.$$

در نتیجه

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times G}) - Ix) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}A(G)^\circ & \mathfrak{A}A^\circ(G) \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & \mathfrak{A}J & \mathfrak{A}J \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}J & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & \mathfrak{A}J \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}J & \mathfrak{A}J & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix \end{vmatrix}.$$

در ادامه (۱-) برابر سطر r_2 را به r_3 و r_4 و همچنین c_3 را به c_2 و c_4 اضافه می‌کنیم. بنابراین

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times G}) - Ix) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix + \mathfrak{A}J & \mathfrak{A}J & \mathfrak{A}J \\ \circ & \circ & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix - \mathfrak{A}J & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix - \mathfrak{A}J \end{vmatrix}.$$

سپس داریم

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times G}) - Ix) = |-Ix|^\mathfrak{A} |\mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix - \mathfrak{A}J|^\mathfrak{A} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix & \mathfrak{A}A^\circ(G) \\ \mathfrak{A}A^\circ(G) & \mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix + \mathfrak{A}J \end{vmatrix}.$$

با انجام محاسبات می‌توان نوشت

$$|\mathfrak{A}A^\circ(G) - Ix - \mathfrak{A}J|^\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} -x - \mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & \circ & \circ & \circ & \circ & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ -\mathfrak{A} & -x - \mathfrak{A} & \circ & \circ & \circ & \circ & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ \circ & \circ & -x - \mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & \circ & \circ & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ \circ & \circ & -\mathfrak{A} & -x - \mathfrak{A} & \circ & \circ & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -x - \mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -\mathfrak{A} & -x - \mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -x - \mathfrak{A} & -\mathfrak{A} \\ -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{A} & -x - \mathfrak{A} \end{vmatrix}^\mathfrak{A}$$

برای محاسبه‌ی این دترمینان، ابتدا (-1) برابر سطر r_1 را به سطر r_2 و ستون c_2 را به ستون c_1 اضافه می‌کنیم. از عبارت $-x$ در سطر دوم فاکتور گرفته و بسط ماتریس را نسبت به این سطر در نظر می‌گیریم. همچنین (-1) برابر سطر r_3 را به سطر r_4 و ستون c_4 را به ستون c_3 اضافه می‌کنیم. از عبارت $-x$ در سطر چهارم فاکتور گرفته و بسط ماتریس را نسبت به این سطر در نظر می‌گیریم. این روند را برای سطرها r_5 و r_6 و سطرها r_7 و r_8 تکرار می‌کنیم و داریم

$$|2A^\circ(G) - Ix - 2J|^2 = (-x)^8 \begin{vmatrix} -x-4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -x-4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -x-4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -x-4 \end{vmatrix}^2.$$

مشابه روند بالا می‌توان این دترمینان را نیز محاسبه کرد. بنابراین داریم

$$|2A^\circ(G) - Ix - 2J|^2 = (-x)^8 (-x-4)^4 (x^2 + 8x - 32)^2.$$

همچنین

$$\begin{vmatrix} 2A^\circ(G) - Ix & 6A^\circ(G) \\ 2A^\circ(G) & 2A^\circ(G) - Ix + 4J \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -x & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -x & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x+4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & -x+4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 0-x+4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & -x+4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & -x+4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & -x+4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -x+4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -x+4 \end{vmatrix}$$

$$= M$$

اکنون (-1) برابر سطر r_1 را به r_2 و سپس ستون c_2 را به c_1 اضافه می‌کنیم. همچنین (-1) برابر سطر r_3 را به r_4 و سپس ستون c_4 را به c_3 اضافه می‌کنیم. این روند را دو به دو برای

دیگر سطرها و ستون‌ها تکرار می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc|cccccccc} -x & \circ & ۴ & ۲ & ۴ & ۲ & \circ & \circ & \circ & \circ & ۱۲ & ۶ & ۱۲ & ۶ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ ۴ & ۲ & -x & \circ & ۴ & ۲ & \circ & \circ & ۱۲ & ۶ & \circ & \circ & ۱۲ & ۶ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ ۴ & ۲ & ۴ & ۲ & -x & \circ & \circ & \circ & ۱۲ & ۶ & ۱۲ & ۶ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & ۴ & ۲ & ۴ & ۲ & \circ & \circ & -x+۸ & ۴ & ۱۲ & ۶ & ۱۲ & ۶ & ۸ & ۴ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ ۴ & ۲ & \circ & \circ & ۴ & ۲ & \circ & \circ & ۱۲ & ۶ & \circ & -x+۸ & ۴ & ۱۲ & ۶ & ۸ & ۴ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ ۴ & ۲ & ۴ & ۲ & \circ & \circ & \circ & \circ & ۱۲ & ۶ & ۶ & ۶ & -x+۴ & ۴ & ۴ & ۴ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & ۸ & ۴ & ۸ & ۴ & ۸ & ۴ & -x+۸ & ۴ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -x & \circ & \circ \end{array} \right) = M.$$

از عبارت $(-x)$ در سطرهای مناسب فاکتور گرفته و بسط ماتریس را نسبت به این سطرها در نظر می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت

$$M = (-x)^9 \left(\begin{array}{ccc|cccc} -x & ۴ & ۴ & \circ & ۱۲ & ۱۲ & \circ \\ ۴ & -x & ۴ & ۱۲ & \circ & ۱۲ & \circ \\ ۴ & ۴ & -x & ۱۲ & ۱۲ & \circ & \circ \\ \circ & ۴ & ۴ & -x+۸ & ۱۲ & ۱۲ & ۸ \\ ۴ & \circ & ۴ & ۱۲ & -x+۸ & ۱۲ & ۸ \\ ۴ & ۴ & \circ & ۱۲ & ۱۲ & -x+۸ & ۸ \\ \circ & \circ & \circ & ۸ & ۸ & ۸ & -x+۸ \end{array} \right).$$

در اینجا سطر $r_۴$ را به $r_۱$ ، $r_۵$ را به $r_۲$ و $r_۶$ را به $r_۳$ اضافه می‌کنیم. بنابراین

$$M = (-x)^9 \left(\begin{array}{ccc|cccc} -x & \circ & \circ & x-۸ & \circ & \circ & -۸ \\ \circ & -x & \circ & \circ & x-۸ & \circ & -۸ \\ \circ & \circ & -x & \circ & \circ & x-۸ & -۸ \\ \circ & ۴ & ۴ & -x+۸ & ۱۲ & ۱۲ & ۸ \\ ۴ & \circ & ۴ & ۱۲ & -x+۸ & ۱۲ & ۸ \\ ۴ & ۴ & \circ & ۱۲ & ۱۲ & -x+۸ & ۸ \\ \circ & \circ & \circ & ۸ & ۸ & ۸ & -x+۸ \end{array} \right).$$

با توجه به قضیه ۳.۳.۱، داریم

$$\det M = (-x)^9 (-x)^3 \left(\begin{array}{cccc} -x+۸ & ۱۲ + \frac{۴(x-۸)}{x} & ۱۲ + \frac{۴(x-۸)}{x} & ۸ - \frac{۶۴}{x} \\ ۱۲ + \frac{۴(x-۸)}{x} & -x+۸ & ۱۲ + \frac{۴(x-۸)}{x} & ۸ - \frac{۶۴}{x} \\ ۱۲ + \frac{۴(x-۸)}{x} & ۱۲ + \frac{۴(x-۸)}{x} & -x+۸ & ۸ - \frac{۶۴}{x} \\ ۸ & ۸ & ۸ & -x+۸ \end{array} \right).$$

با توجه به قضیه ۴.۳.۱، داریم

$$\det M = (-x)^9(x^2 + 8x - 32)^2(x^2 - 4x - 128)(-x + 8).$$

با توجه به توضیحات آغاز اثبات، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_{G \times G}}(x) &= \frac{(-x)^{49}(-x + 8)(-x - 4)^4(x^2 + 8x - 32)^4(x^2 - 4x - 128)}{(-x)^4} \\ &= (-x)^{45}(-x + 8)(-x - 4)^4(x^2 + 8x - 32)^4(x^2 - 4x - 128) \end{aligned}$$

و

$$\mathcal{E}(\Gamma_{G \times G}) = \sum_{i=1}^{60} |\lambda_i| = 8(3 + \sqrt{33} + 4\sqrt{3}).$$

□

لم ۲.۲.۳. فرض کنیم $G = D_{12}$ در این صورت

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_{G \times G}}(x) &= (-x)^{116}(x^3 + 16x^2 - 384)^4(x + 4)^4(x + 24)(x^3 - 384x + 2304) \\ &\quad (x^4 - 104x^3 - 1152x^2 + 5376x + 55296) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Gamma_{D_{12} \times D_{12}}) &= 40 + 4(|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|) + (|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3|) \\ &\quad + (|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4|), \end{aligned}$$

که در آن $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ریشه‌های چند جمله‌ای درجه‌ی ۴ در $P_{\Gamma_{G \times G}}(x)$ ، $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ریشه‌های $(x^3 - 384x + 2304)$ و همچنین $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ریشه‌های $(x^3 + 16x^2 - 384)$ هستند.

برهان. با توجه به اثبات لم ۱.۲.۳، داریم

$$P_{\Gamma_{G \times G}}(x) = |-Ix|^5 |2A^\circ(G) - Ix - 2J|^2 \begin{vmatrix} 2A^\circ(G) - Ix & 4A^\circ(G) & 6A^\circ(G) \\ 2A^\circ(G) & 4A^\circ(G) - Ix & 6J \\ 2A^\circ(G) & 4J & 2A^\circ(G) - Ix + 4J \end{vmatrix}.$$

مشابه اثبات لم ۱.۲.۳، می‌توان دید

$$|2A^\circ(G) - Ix - 2J|^2 = (-x)^{14}(x + 4)^4(x^3 + 16x^2 - 384)^2.$$

حال فرض کنیم

$$\begin{bmatrix} 2A^\circ(G) - Ix & 4A^\circ(G) & 6A^\circ(G) \\ 2A^\circ(G) & 4A^\circ(G) - Ix & 6J \\ 2A^\circ(G) & 4J & 2A^\circ(G) - Ix + 4J \end{bmatrix} = M.$$

با انجام محاسبات داریم

$$\det(M) = (-x)^{22}$$

$-x$	۴	۴	۴	۰	۸	۸	۸	۰	۰	۱۲	۱۲	۱۲	۰
۸	$-x$	۴	۴	۱۶	۰	۸	۸	۰	۰	۲۴	۰	۱۲	۰
۸	۴	$-x$	۴	۱۶	۸	۰	۸	۰	۰	۲۴	۱۲	۰	۱۲
۸	۴	۴	$-x$	۱۶	۸	۸	۰	۰	۰	۲۴	۱۲	۱۲	۰
۰	۴	۴	۴	$-x$	۸	۸	۸	۰	۰	۲۴	۱۲	۱۲	۱۲
۸	۰	۴	۴	۱۶	$-x$	۸	۸	۰	۰	۲۴	۱۲	۱۲	۱۲
۸	۴	۰	۴	۱۶	۸	$-x$	۸	۰	۰	۲۴	۱۲	۱۲	۱۲
۸	۴	۴	۰	۱۶	۸	۸	$-x$	۰	۰	۲۴	۱۲	۱۲	۱۲
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	$-x$	۰	۲۴	۱۲	۱۲	۱۲
۰	۴	۴	۴	۱۶	۸	۸	۸	۸	$-x+16$	۱۲	۱۲	۱۲	۸
۸	۰	۴	۴	۱۶	۸	۸	۸	۸	۲۴	$-x+8$	۱۲	۱۲	۸
۸	۴	۰	۴	۱۶	۸	۸	۸	۸	۲۴	۱۲	$-x+8$	۱۲	۸
۸	۴	۴	۰	۱۶	۸	۸	۸	۸	۲۴	۱۲	۱۲	$-x+8$	۸
۰	۰	۰	۰	۱۶	۸	۸	۸	۸	۱۶	۸	۸	۸	$-x+8$

اکنون با انجام محاسبات و بنابر قضیه ۳.۳.۱، داریم

$$\det(M) = \frac{1}{x}(-x)^{22}(-2x)^5$$

$\frac{-x}{x}$	۴	۴	۴	$\frac{-x}{x}+8$	۱۲	۱۲	۱۲	۴
۸	$\frac{-x}{x}$	۴	۴	۲۴	$\frac{-x}{x}+4$	۱۲	۱۲	۴
۸	۴	$\frac{-x}{x}$	۴	۲۴	۱۲	$\frac{-x}{x}+4$	۱۲	۴
۸	۴	۴	$\frac{-x}{x}$	۲۴	۱۲	۱۲	$\frac{-x}{x}+4$	۴
$12+x$	۰	۰	۰	$\frac{12x+284}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{192}{x}$
۰	$6+x$	۰	۰	$\frac{192}{x}$	$\frac{6x+144}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{144}{x}$
۰	۰	$6+x$	۰	$\frac{192}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{6x+144}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{144}{x}$
۰	۰	۰	$6+x$	$\frac{192}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{96}{x}$	$\frac{6x+144}{x}$	$\frac{144}{x}$
۱۲	۶	۶	۶	$\frac{284x+284}{x}$	$\frac{14x+144}{x}$	$\frac{14x+144}{x}$	$\frac{14x+144}{x}$	$-x+\frac{8x+236}{x}$

قرار می‌دهیم

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{-x}{x} & 4 & 4 & 4 & \frac{-x}{x}+8 & 12 & 12 & 12 \\ 8 & \frac{-x}{x} & 4 & 4 & 24 & \frac{-x}{x}+4 & 12 & 12 \\ 8 & 4 & \frac{-x}{x} & 4 & 24 & 12 & \frac{-x}{x}+4 & 12 \\ 8 & 4 & 4 & \frac{-x}{x} & 24 & 12 & 12 & \frac{-x}{x}+4 \\ \hline 12+x & 0 & 0 & 0 & \frac{12x+284}{x} & \frac{96}{x} & \frac{96}{x} & \frac{96}{x} \\ 0 & 6+x & 0 & 0 & \frac{192}{x} & \frac{6x+144}{x} & \frac{96}{x} & \frac{96}{x} \\ 0 & 0 & 6+x & 0 & \frac{192}{x} & \frac{96}{x} & \frac{6x+144}{x} & \frac{96}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 6+x & \frac{192}{x} & \frac{96}{x} & \frac{96}{x} & \frac{6x+144}{x} \end{array} \right],$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ \frac{192}{x} \\ \frac{144}{x} \\ \frac{144}{x} \\ \frac{144}{x} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 & 6 & \frac{28x+384}{x} & \frac{14x+144}{x} & \frac{14x+144}{x} & \frac{14x+144}{x} \end{bmatrix},$$

$$d = -x + \frac{8x + 336}{x}.$$

با توجه به قضیه ۴.۳.۱ قسمت (۱)،

$$\det(A) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^4} \right) (x^3 + 16x^2 - 384)^2 \\ (x^6 - 72x^5 - 3712x^4 - 13056x^3 + 632832x^2 + 1769472x - 28311552).$$

با انجام محاسبات داریم

$$A - BC = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & b_1 & b_1 & b_1 & a_2 & b_2 & b_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & b_1 & b_1 & c_2 & d_2 & b_2 & b_2 \\ c_1 & b_1 & d_1 & b_1 & c_2 & b_2 & d_2 & b_2 \\ c_1 & b_1 & b_1 & d_1 & c_2 & b_2 & b_2 & d_2 \\ \hline a_3 & b_3 & b_3 & b_3 & a_4 & b_4 & b_4 & b_4 \\ c_3 & d_3 & e_3 & e_3 & c_4 & d_4 & e_4 & e_4 \\ c_3 & e_3 & d_3 & e_3 & c_4 & e_4 & d_4 & e_4 \\ c_3 & e_3 & e_3 & d_3 & c_4 & e_4 & e_4 & d_4 \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & 3b_1 & b_1 & b_1 & a_2 & 3b_2 & b_2 & b_2 \\ c_1 - a_1 & d_1 - b_1 & 0 & 0 & c_2 - a_2 & d_2 - b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 - b_1 & 0 & 0 & 0 & d_2 - b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 - b_1 & 0 & 0 & 0 & d_2 - b_2 \\ \hline a_3 & 3b_3 & b_3 & b_3 & a_4 & 3b_4 & b_4 & b_4 \\ c_3 & d_3 + 2e_3 & e_3 & e_3 & c_4 & d_4 + 2e_4 & e_4 & e_4 \\ 0 & 0 & d_3 - e_3 & 0 & 0 & 0 & d_4 - e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 - e_3 & 0 & 0 & 0 & d_4 - e_4 \end{array} \right],$$

که در آن

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-x}{4} - 24, c_1 = -40, b_1 = -20, a_1 = \frac{-x}{4} - 48 \\ d_2 &= \frac{-x^2 - 104x - 1152}{4x}, c_2 = \frac{-88x - 1536}{x}, b_2 = \frac{-44x - 576}{x}, a_2 = \frac{-x^2 - 208x - 3072}{4x} \\ c_3 &= \frac{-1728}{x}, b_3 = \frac{-1152}{x}, a_3 = \frac{x^2 + 12x - 2304}{x} \\ e_3 &= \frac{-864}{x}, d_3 = \frac{x^2 + 6x - 864}{x} \\ c_4 &= \frac{-3840x - 55296}{x^2}, b_4 = \frac{-2592x - 27648}{x^2}, a_4 = \frac{12x^2 - 4992x - 73728}{x^2} \\ e_4 &= \frac{-1920x - 20736}{x^2}, d_4 = \frac{6x^2 - 1872x - 20736}{x^2} \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن بسط ماتریس نسبت به سطرهای مناسب و انجام محاسبات داریم

$$\det(A - BC) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^5} \right) (x^3 + 16x^2 - 384)^2 \\ (x^7 + 448x^6 + 26368x^5 + 570624x^4 + 251904x^3 \\ - 131235888x^2 - 311427072x + 6455033856).$$

اکنون با استفاده از قضیه ۴.۳.۱ قسمت (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \det(M) &= \frac{1}{x}(-x)^{22}(-2x)^5[(d-1)\det(A) + \det(A-BC)] \\ &= (-x)^{22}(-2x)^5\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5(-x^2+7x+336)(x^3+16x^2-384)^2g(x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{x}\right)^5(x^3+16x^2-384)^2h(x)\right] \\ &= (-x)^{22}(x+24)(x^3+16x^2-384)^2(x^3-384x+2304) \\ &\quad (x^4-104x^3-1152x^2+5376x+55296), \end{aligned}$$

که در آن $g(x)$ چند جمله‌ای درجه ۶ در $\det(A)$ و $h(x)$ چند جمله‌ای درجه ۷ در $\det(A-BC)$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_{G \times G}}(x) &= \frac{(-x)^{120}}{(-x)^4}(x^3+16x^2-384)^4(x+4)^4(x+24)(x^3-384x+2304) \\ &\quad (x^4-104x^3-1152x^2+5376x+55296). \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ و γ_4 ریشه‌های چند جمله‌ای درجه‌ی ۴ در $P_{\Gamma_{G \times G}}(x)$ باشند. فرض کنیم α_1, α_2 و α_3 ریشه‌های (x^3+16x^2-384) و همچنین β_1, β_2 و β_3 ریشه‌های $(x^3-384x+2304)$ باشند. در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Gamma_{D_{12} \times D_{12}}) &= 4^0 + 4(|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|) + (|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3|) \\ &\quad + (|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4|). \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم $G = D_{2n}$. اگر n عددی زوج باشد و $n > 4$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_{G \times G}}(x) &= \frac{(-x)^{\frac{15n^2}{4}-2n-3}}{(-x)^4}(-x-4)^{\frac{n^2}{4}-n+1} \\ &\quad (-x^3-(2n+4)x^2+16n(n-2))^{n-2}f(x), \end{aligned}$$

به طوری که $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۸ است. همچنین طیف گراف $\Gamma_{G \times G}$ برابر است با

$$\text{Spec}(\Gamma_{G \times G}) = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} -4 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ \frac{n^2}{4}-n+1 & \frac{15n^2}{4}-2n-7 & n-2 & n-2 & n-2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ریشه‌های $(-x^3-(2n+4)x^2+16n(n-2))$ و $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$ ریشه‌های $f(x)$ هستند.

برهان. با توجه به اثبات لم ۱.۲.۳، داریم

$$A_{ij}^{\circ}(\Gamma_{G \times G}) = \begin{cases} A^{\circ}(G) & 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2 \\ A^{\circ}(G) & 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2n \\ A^{\circ}(G) & 3 \leq i, j \leq n \\ A^{\circ}(G) & i = k + t, j = k + s; t, s = 1 \text{ یا } 2 \\ & \text{و } k = n + 1, \dots, 2n - 1 \\ J & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مشابه اثبات لم ۲.۲.۳، می‌توان دید که

$$P_{\Gamma_{G \times G}}(x) = \frac{|-Ix|^{\frac{2n}{2}-2}}{(-x)^4} |2A^{\circ}(G) - Ix - 2J|^{\frac{n}{2}-1} \begin{vmatrix} 2A^{\circ}(G) - Ix & (n-2)A^{\circ}(G) & nA^{\circ}(G) \\ 2A^{\circ}(G) & (n-2)A^{\circ}(G) - Ix & nJ \\ 2A^{\circ}(G) & (n-2)J & 2A^{\circ}(G) - Ix + (n-2)J \end{vmatrix}.$$

بنابراین

$$|2A^{\circ}(G) - Ix - 2J|^{\frac{n}{2}-1} = \left((-x)^{\frac{2n}{2}-2} (-x-4)^{\frac{n}{2}-1} \right)^{\frac{n}{2}-1} \left(-x^3 - (2n+4)x^2 + 16n(n-2) \right)^{\frac{n}{2}-1}.$$

حال فرض کنیم

$$\begin{bmatrix} 2A^{\circ}(G) - Ix & (n-2)A^{\circ}(G) & nA^{\circ}(G) \\ 2A^{\circ}(G) & (n-2)A^{\circ}(G) - Ix & nJ \\ 2A^{\circ}(G) & (n-2)J & 2A^{\circ}(G) - Ix + (n-2)J \end{bmatrix} = M.$$

با انجام محاسبات داریم

$$\det(M) = (-x)^{\frac{3n}{2}-5}$$

$$d = -x + \frac{bx + na + nc + \mathfrak{F}c}{x}.$$

با توجه به قضيه ۴.۳.۱ قسمت (۱)،

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(\frac{1}{\mathfrak{F}}\right)^{\frac{n}{\mathfrak{F}}+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{\mathfrak{F}}+1} (x^{\mathfrak{F}} + (\mathfrak{F}n + \mathfrak{F})x^{\mathfrak{F}} - 1\mathfrak{F}n(n - \mathfrak{F}))^{\frac{n}{\mathfrak{F}}-1} \\ &\quad \left[x^{\mathfrak{F}} + ((\mathfrak{F} - 1 \circ n) - (n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}})x^{\mathfrak{F}} \right. \\ &\quad \left(-\mathfrak{F}\mathfrak{F}n(n - \mathfrak{F}) - (n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - 1 \circ n) - n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} - \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} \right)x^{\mathfrak{F}} \\ &\quad + \left(\mathfrak{F}\mathfrak{F}n(n - \mathfrak{F})(\mathfrak{F}n - \mathfrak{F}) + \mathfrak{F}\mathfrak{F}n(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} - n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - 1 \circ n) + \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} - 1\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} - \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} \right)x^{\mathfrak{F}} \\ &\quad + \left(-\mathfrak{F}\mathfrak{F}n(n - \mathfrak{F})(\mathfrak{F}n - \mathfrak{F}) + \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} + \mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - 1 \circ n) + \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(n + \mathfrak{F}) - \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} + 9\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(n + 1) \right)x^{\mathfrak{F}} \\ &\quad + \left(-\mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}n - \mathfrak{F}) - 19\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}} + \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(n + \mathfrak{F}) + \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{F}\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(n + 1) \right)x \\ &\quad \left. + (25\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}n - \mathfrak{F}) - 9\mathfrak{F}n^{\mathfrak{F}}(n - \mathfrak{F})^{\mathfrak{F}}(n + 1)(n + \mathfrak{F})) \right]. \end{aligned}$$

مشابه با اثبات لم قبل و انجام محاسبات داريم

$$\begin{aligned} A - BC &= \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 & a_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & \dots & b_{\mathfrak{F}} \\ c_1 & d_1 & b_1 & \dots & b_1 & c_{\mathfrak{F}} & d_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & \dots & b_{\mathfrak{F}} \\ c_1 & b_1 & d_1 & \dots & b_1 & c_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & d_{\mathfrak{F}} & \dots & b_{\mathfrak{F}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & b_1 & b_1 & \dots & d_1 & c_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & \dots & d_{\mathfrak{F}} \\ \hline a_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & \dots & b_{\mathfrak{F}} & a_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & b_{\mathfrak{F}} & \dots & b_{\mathfrak{F}} \\ c_{\mathfrak{F}} & d_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & \dots & e_{\mathfrak{F}} & c_{\mathfrak{F}} & d_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & \dots & e_{\mathfrak{F}} \\ c_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & d_{\mathfrak{F}} & \dots & e_{\mathfrak{F}} & c_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & d_{\mathfrak{F}} & \dots & e_{\mathfrak{F}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & \dots & d_{\mathfrak{F}} & c_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & e_{\mathfrak{F}} & \dots & d_{\mathfrak{F}} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_1 & & \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}}b_1 & & b_1 & a_{\mathfrak{F}} & & \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}}b_{\mathfrak{F}} & & b_{\mathfrak{F}} \\ c_1 - a_1 & & d_1 - b_1 & & \circ & c_{\mathfrak{F}} - a_{\mathfrak{F}} & & d_{\mathfrak{F}} - b_{\mathfrak{F}} & & \circ \\ \circ & & \circ & & d_1 - b_1 & \circ & & \circ & & d_{\mathfrak{F}} - b_{\mathfrak{F}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \circ & & \circ & & \circ & \circ & & \circ & & d_{\mathfrak{F}} - b_{\mathfrak{F}} \\ \hline a_{\mathfrak{F}} & & \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}}b_{\mathfrak{F}} & & b_{\mathfrak{F}} & a_{\mathfrak{F}} & & \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}}b_{\mathfrak{F}} & & b_{\mathfrak{F}} \\ c_{\mathfrak{F}} & & d_{\mathfrak{F}} + (\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} - 1)e_{\mathfrak{F}} & & e_{\mathfrak{F}} & c_{\mathfrak{F}} & & d_{\mathfrak{F}} + (\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} - 1)e_{\mathfrak{F}} & & e_{\mathfrak{F}} \\ \circ & & \circ & & d_{\mathfrak{F}} - e_{\mathfrak{F}} & \circ & & \circ & & d_{\mathfrak{F}} - e_{\mathfrak{F}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \circ & & \circ & & \circ & \circ & & \circ & & d_{\mathfrak{F}} - e_{\mathfrak{F}} \end{array} \right], \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} b_1 &= \mathfrak{F} - n(n - \mathfrak{F}), a_1 = \frac{-x}{\mathfrak{F}} - \frac{n(n - \mathfrak{F})}{\mathfrak{F}} \\ d_1 &= \frac{-x}{\mathfrak{F}} - n(n - \mathfrak{F}), c_1 = \mathfrak{F}(n - \mathfrak{F}) - \frac{n(n - \mathfrak{F})}{\mathfrak{F}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{(2n-(3n-4)(n-2))x-6n(n-2)^2}{x}, a_2 = \frac{-x^2-((n-1)(n-2)^2+2(n-2)^3)x-n(n-2)^4-4n(n-2)^3}{2x} \\
 c_2 &= \frac{(2n(n-2)-n(n-2)^2-2(n-2)^3)x-n(n-2)^4-4n(n-2)^3}{2x} \\
 d_2 &= \frac{-x^2+(2(n-2)-2(3n-4)(n-2))x-12n(n-2)^2}{2x} \\
 b_3 &= \frac{n^2(n-2)(n+2)}{x}, a_3 = \frac{2x^2+n(n-2)x-n^2(n-2)^3-4n^2(n-2)^2}{2x} \\
 e_3 &= \frac{-6n^2(n-2)}{x}, d_3 = \frac{x^2+nx-6n^2(n-2)}{x}, c_3 = \frac{-3n^2(n-2)^2}{x} \\
 a_4 &= \frac{n(n-2)x^2+(n(n-2)^2(10-n-3n^2))x+n^2(n-2)^3(n+2)^2}{2x^2} \\
 c_4 &= \frac{n(n-2)^2(-9n+14)x-3n^2(n-2)^3(n+2)}{x^2}, b_4 = \frac{n(n-2)(4-(n+2)(3n-4))x-6n^2(n-2)^2(n+2)}{x^2} \\
 e_4 &= \frac{(n(n-2)(-18n+28))x-36n^2(n-2)^2}{x^2}, d_4 = \frac{nx^2+(6n(n-2)(-3n+5))x-36n^2(n-2)^2}{x^2}
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن بسط ماتریس نسبت به سطرهای مناسب و انجام محاسبات داریم

$$\det(A - BC) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}+2} (x^3 + (2n+4)x^2 - 16n(n-2)) \frac{n}{2}-1$$

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & \frac{n}{2}b_1 & a_2 & \frac{n}{2}b_2 \\
 c_1 - a_1 & d_1 - b_1 & c_2 - a_2 & d_2 - b_2 \\
 a_3 & \frac{n}{2}b_3 & a_4 & \frac{n}{2}b_4 \\
 c_3 & d_3 + (\frac{n}{2} - 1)e_3 & c_4 & d_4 + (\frac{n}{2} - 1)e_4
 \end{vmatrix}$$

اکنون با استفاده از قضیه ۴.۳.۱ قسمت (۲)، داریم

$$\begin{aligned}
 \det(M) &= \frac{1}{x} (-x)^{\frac{3n}{2}-5} (-2x)^{\frac{n}{2}+2} [(d-1)\det(A) + \det(A-BC)] \\
 &= (-x)^{\frac{3n}{2}-5} \left(-x^3 - (2n+4)x^2 + 16n(n-2)\right)^{\frac{n}{2}-1} (g(x)k(x) + h(x)),
 \end{aligned}$$

که $g(x)$ چند جمله‌ای درجه ۶ در $\det(A)$ است و

$$k(x) = -x^2 + (b-1)x + na + nc + 4c,$$

$$h(x) = \begin{vmatrix}
 a_1 & \frac{n}{2}b_1 & a_2 & \frac{n}{2}b_2 \\
 c_1 - a_1 & d_1 - b_1 & c_2 - a_2 & d_2 - b_2 \\
 a_3 & \frac{n}{2}b_3 & a_4 & \frac{n}{2}b_4 \\
 c_3 & d_3 + (\frac{n}{2} - 1)e_3 & c_4 & d_4 + (\frac{n}{2} - 1)e_4
 \end{vmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $f(x) = (g(x)k(x) + h(x))$ ، که یک چند جمله‌ای درجه ۸ است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
 P_{\Gamma \times \Gamma}(x) &= \frac{(-x)^{\frac{15n}{2}-2n-3}}{(-x)^4} (-x-4)^{\frac{n}{2}-n+1} \\
 &\quad (-x^3 - (2n+4)x^2 + 16n(n-2))^{n-2} f(x).
 \end{aligned}$$

□

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۳.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Gamma_{D_{\gamma_n} \times D_{\gamma_n}}) = & (n^2 - 4n + 4) + (n - 2)(|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|) \\ & + |\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4| + |\gamma_5| + |\gamma_6| + |\gamma_7| + |\gamma_8|. \end{aligned}$$

برهان. با توجه به قضیه فوق داریم

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_{D_{\gamma_n} \times D_{\gamma_n}}}(x) = & \frac{(-x)^{\frac{15n^2}{4} - 2n - 3}}{(-x)^4} (-x - 4)^{\frac{n^2}{4} - n + 1} \\ & (-x^3 - (2n + 4)x^2 + 16n(n - 2))^{n-2} f(x). \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$ و γ_8 ریشه‌های $f(x)$ در $P_{\Gamma_{G \times G}}(x)$ هستند. همچنین فرض کنیم α_1, α_2 و α_3 ریشه‌های $(-x^3 - (2n + 4)x^2 + 16n(n - 2))$ باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Gamma_{D_{\gamma_n} \times D_{\gamma_n}}) = & (n^2 - 4n + 4) + (n - 2)(|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|) \\ & + |\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4| + |\gamma_5| + |\gamma_6| + |\gamma_7| + |\gamma_8|. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد به قسمی که $|Z(G)| = t$. در این صورت

$$P_{\Gamma_{G \times S_3}}(x) = \frac{|-Ix|}{(-x)^t} |A^\circ(G) - Ix - J|^2 \begin{vmatrix} A^\circ(G) - Ix & 2A^\circ(G) & 3A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & 2A^\circ(G) - Ix & 3J \\ A^\circ(G) & 2J & A^\circ(G) - Ix + 2J \end{vmatrix}.$$

برهان. با توجه به اثبات لم ۱.۲.۳، ماتریس مجاورت گراف $\Gamma_{G \times S_3}$ به شکل زیر است

$$A_{ij}^\circ(\Gamma_{G \times S_3}) = \begin{cases} A^\circ(G) & i = 1, 1 \leq j \leq 6 \\ A^\circ(G) & 1 \leq i \leq 6, j = 1 \\ A^\circ(G) & 2 \leq i, j \leq 3 \\ A^\circ(G) & i = j = 4, 5, 6 \\ J & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پس داریم

$$A^\circ(\Gamma_{G \times S_3}) = \begin{bmatrix} A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & J & J \\ A^\circ(G) & J & J & A^\circ(G) & J & J \\ A^\circ(G) & J & J & J & A^\circ(G) & J \\ A^\circ(G) & J & J & J & J & A^\circ(G) \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times S_3}) - Ix) = \begin{vmatrix} A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix & A^\circ(G) & J & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) - Ix & J & J & J \\ A^\circ(G) & J & J & A^\circ(G) - Ix & J & J \\ A^\circ(G) & J & J & J & A^\circ(G) - Ix & J \\ A^\circ(G) & J & J & J & J & A^\circ(G) - Ix \end{vmatrix}.$$

با روشی مشابه به اثبات لم ۱.۲.۳، دیده می‌شود که

$$P_{\Gamma_{G \times S_3}}(x) = \frac{|-Ix|}{(-x)^t} |A^\circ(G) - Ix - J|^2 \begin{vmatrix} A^\circ(G) - Ix & 2A^\circ(G) & 3A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & 2A^\circ(G) - Ix & 3J \\ A^\circ(G) & 2J & A^\circ(G) - Ix + 2J \end{vmatrix}.$$

□

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد به قسمی که $|Z(G)| = t$. اگر n زوج باشد آنگاه

$$P_{\Gamma_{G \times D_{2n}}}(x) = \frac{|-Ix|^{\frac{2n}{2}-2}}{(-x)^{2t}} |2A^\circ(G) - Ix - 2J|^{\frac{n}{2}-1} \begin{vmatrix} 2A^\circ(G) - Ix & (n-2)A^\circ(G) & nA^\circ(G) \\ 2A^\circ(G) & (n-2)A^\circ(G) - Ix & nJ \\ 2A^\circ(G) & (n-2)J & 2A^\circ(G) - Ix + (n-2)J \end{vmatrix}.$$

برهان. با توجه به اثبات لم ۱.۲.۳ می‌توان نوشت

$$A_{ij}^\circ(\Gamma_{G \times D_{2n}}) = \begin{cases} A^\circ(G) & 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2 \\ A^\circ(G) & 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2n \\ A^\circ(G) & 3 \leq i, j \leq n \\ A^\circ(G) & i = k+t, j = k+s; t, s = 1 \text{ یا } 2 \\ & \text{و } k = n+1, \dots, 2n-1 \\ J & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت داریم

$$A^\circ(\Gamma_{G \times D_{2n}}) =$$

$$\begin{bmatrix} A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & A^\circ(G) & J & J & \dots & J & J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & A^\circ(G) & J & J & \dots & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & \dots & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & J & J \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & \dots & J & A^\circ(G) & A^\circ(G) & \dots & J & J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & \dots & J & J & J & \dots & A^\circ(G) & A^\circ(G) \\ A^\circ(G) & A^\circ(G) & J & \dots & J & J & J & \dots & A^\circ(G) & A^\circ(G) \end{bmatrix}.$$

در اینجا $A^\circ(G)$ را با A° نمایش می‌دهیم بنابراین داریم

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times D_{\Upsilon_n}}) - Ix) =$$

$$\begin{vmatrix} A^\circ - Ix & A^\circ & A^\circ & \dots & A^\circ & A^\circ & A^\circ & \dots & A^\circ & A^\circ \\ A^\circ & A^\circ - Ix & A^\circ & \dots & A^\circ & A^\circ & A^\circ & \dots & A^\circ & A^\circ \\ A^\circ & A^\circ & A^\circ - Ix & \dots & A^\circ & J & J & \dots & J & J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^\circ & A^\circ & A^\circ & \dots & A^\circ - Ix & J & J & \dots & J & J \\ A^\circ & A^\circ & J & \dots & J & A^\circ - Ix & A^\circ & \dots & J & J \\ A^\circ & A^\circ & J & \dots & J & A^\circ & A^\circ - Ix & \dots & J & J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^\circ & A^\circ & J & \dots & J & J & J & \dots & A^\circ - Ix & A^\circ \\ A^\circ & A^\circ & J & \dots & J & J & J & \dots & A^\circ & A^\circ - Ix \end{vmatrix}.$$

مشابه با اثبات قضیه ۱.۱.۳، می‌توان نوشت

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times D_{\Upsilon_n}}) - Ix) =$$

$$\begin{vmatrix} \Upsilon A^\circ - Ix & A^\circ & (n - \Upsilon)A^\circ & A^\circ & \dots & A^\circ & \Upsilon A^\circ & A^\circ & \dots & \Upsilon A^\circ & A^\circ \\ \circ & -Ix & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \Upsilon A^\circ & A^\circ & (n - \Upsilon)A^\circ - Ix & A^\circ & \dots & A^\circ & \Upsilon J & J & \dots & \Upsilon J & J \\ \circ & \circ & \circ & -Ix & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & -Ix & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \Upsilon A^\circ & A^\circ & (n - \Upsilon)J & J & \dots & J & \Upsilon A^\circ - Ix & A^\circ & \dots & J & J \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & -Ix & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Upsilon A^\circ & A^\circ & (n - \Upsilon)J & J & \dots & J & J & J & \dots & \Upsilon A^\circ - Ix & A^\circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & -Ix \end{vmatrix}.$$

اکنون از عبارت $| -Ix |$ در سطرهای مناسب فاکتور گرفته و بسط ماتریس را نسبت به این سطرها در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times D_{\Upsilon_n}}) - Ix) =$$

$$|-Ix|^{\frac{\gamma_n}{\gamma}-2} \begin{vmatrix} \gamma A^\circ - Ix & (n-\gamma)A^\circ & \gamma A^\circ & \gamma A^\circ & \dots & \gamma A^\circ & \gamma A^\circ \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)A^\circ - Ix & \gamma J & \gamma J & \dots & \gamma J & \gamma J \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)J & \gamma A^\circ - Ix & \gamma J & \dots & \gamma J & \gamma J \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)J & \gamma J & \gamma A^\circ - Ix & \dots & \gamma J & \gamma J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)J & \gamma J & \gamma J & \dots & \gamma A^\circ - Ix & \gamma J \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)J & \gamma J & \gamma J & \dots & \gamma J & \gamma A^\circ - Ix \end{vmatrix}.$$

در ماتریس فوق، (۱-) برابر سطر r_3 را به سطرهای $r_4, r_5, \dots, r_{\frac{n}{\gamma}+2}$ و ستون‌های $c_4, \dots, c_{\frac{n}{\gamma}+2}$ را به ستون c_3 اضافه می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\det(A^\circ(\Gamma_{G \times D_{\gamma_n}}) - Ix) = |-Ix|^{\frac{\gamma_n}{\gamma}-2} \begin{vmatrix} \gamma A^\circ - Ix & (n-\gamma)A^\circ & nA^\circ & \gamma A^\circ & \dots & \gamma A^\circ & \gamma A^\circ \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)A^\circ - Ix & nJ & \gamma J & \dots & \gamma J & \gamma J \\ \gamma A^\circ & (n-\gamma)J & \gamma A^\circ - Ix + (n-\gamma)J & \gamma J & \dots & \gamma J & \gamma J \\ \circ & \circ & \circ & \gamma A^\circ - Ix - \gamma J & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \gamma A^\circ - Ix - \gamma J & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \gamma A^\circ - Ix - \gamma J \end{vmatrix}.$$

در ادامه از عبارت $|\gamma A^\circ - Ix - \gamma J|$ در سطرهای مناسب فاکتور گرفته و بسط ماتریس را نسبت به این سطرها در نظر می‌گیریم. در نتیجه خواهیم داشت

$$P_{\Gamma_{G \times D_{\gamma_n}}}(x) = \frac{|-Ix|^{\frac{\gamma_n}{\gamma}-2}}{(-x)^{\gamma t}} |\gamma A^\circ(G) - Ix - \gamma J|^{\frac{n}{\gamma}-1} \begin{vmatrix} \gamma A^\circ(G) - Ix & (n-\gamma)A^\circ(G) & nA^\circ(G) \\ \gamma A^\circ(G) & (n-\gamma)A^\circ(G) - Ix & nJ \\ \gamma A^\circ(G) & (n-\gamma)J & \gamma A^\circ(G) - Ix + (n-\gamma)J \end{vmatrix}.$$

□

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه متناهی ناآبلی باشد به قسمی که $|Z(G)| = t$. در این صورت

$$P_{\Gamma_{G \times D_\lambda}}(x) = \frac{|-Ix|^\ell}{(-x)^{\gamma t}} |\gamma A^\circ(G) - Ix - \gamma J|^2 \begin{vmatrix} \gamma A^\circ(G) - Ix & \ell A^\circ(G) \\ \gamma A^\circ(G) & \gamma A^\circ(G) - Ix + \ell J \end{vmatrix}.$$

□

برهان. اثبات این قضیه مشابه با اثبات لم ۱.۲.۳ می‌باشد.

فصل ۴

بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم‌ارزی در گروه‌های خطی عام

در این فصل گراف جابجایی $\Gamma = \mathcal{C}(GL(n, q), X)$ ، که X مجموعه‌ی تمام ترانسوکشن‌ها در $GL(n, q)$ است، را در نظر می‌گیریم و به بررسی برخی شاخص‌های گرافی مانند عدد خوشه‌ای، عدد غالب، مسطح بودن و ... برای این گراف می‌پردازیم. در پایان نگاهی مختصر به انرژی گراف جابجایی $\mathcal{C}(GL(3, 2), X)$ خواهیم داشت. در سراسر این فصل V یک فضای برداری با بعد n روی میدان متناهی F است به طوری که $|F| = q$.

لم ۱.۰.۴. فرض کنیم U زیرفضای سره V باشد و $S_U = \{T_{a,f} | a \in U, U \subseteq \ker f\}$. در این صورت $|S_U| = \frac{(q^i-1)(q^{n-i}-1)}{q-1}$ ، به قسمی که $i = \dim(U)$.

برهان. روشن است که $\phi : \{\bar{f} : \frac{V}{U} \rightarrow F\} \longrightarrow \{f : V \rightarrow F | U \subseteq \ker f\}$ با ضابطه‌ی $\phi(\bar{f}(x+U)) = f(x)$ یک یکریختی است. بنابراین تعداد انتخاب‌های f برابر است با $q^{n-i} - 1$ که با تعداد تابع‌های خطی از $\frac{V}{U}$ به F برابر است. همچنین تعداد انتخاب‌های a برابر است با $|U - \{0\}| = q^i - 1$. با توجه به لم ۴.۱.۱، دیده می‌شود که $|S_U| = \frac{(q^i-1)(q^{n-i}-1)}{q-1}$.

□

۵۰ بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم‌ارزی در گروه‌های خطی عام

$$\text{لم ۲.۰.۴.} |V(\Gamma)| = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{q-1}.$$

برهان. ابرصفحه‌ی ثابت W را در نظر می‌گیریم. داریم

$$V(\Gamma) = \{T_{a,f} | a \in W, W = \ker f\} = \bigcup_{\text{ابرصفحه } W} S_W.$$

با توجه به لم ۱.۰.۴،

$$|V(\Gamma)| = \sum_{\text{ابرصفحه } W} |S_W| = (q^{n-1} - 1) \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

□

قضیه ۱.۰.۴. (لم ۱، [۳۶]) فرض کنیم $T_{a,f}$ و $T_{b,g}$ دو ترانسوکشن با ابرصفحه‌های W_1 و W_2 باشند. در این صورت $[T_{a,f}, T_{b,g}] = 1$ اگر و تنها اگر $a \in \ker g$ و $b \in \ker f$.

برهان. داریم

$$T_{a,f}T_{b,g} = T_{b,g}T_{a,f} \iff g(u)f(b)a = f(u)g(a)b.$$

اگر $\langle a \rangle \neq \langle b \rangle$ ، آنگاه $f(b) = 0$ و $g(a) = 0$. بنابراین $a \in \ker g$ و $b \in \ker f$. اگر $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ ، آنگاه براحتی نتیجه حاصل می‌شود.

□

لم ۳.۰.۴. گراف Γ رأس-متعدی است.

برهان. می‌دانیم $GL(V)$ با عمل تزویج بر $V(\Gamma)$ به صورت متعدی عمل می‌کند. در نتیجه $A = \{\bar{i}_g | \bar{i}_g : \frac{V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)}{T \mapsto g^{-1}Tg}\}$ بر $V(\Gamma)$ متعدی عمل می‌کند. اما برای هر $g \in GL(V)$ و $i_g \in \text{Aut}(GL(V))$

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 \iff i_g(T_1) i_g(T_2) = i_g(T_2) i_g(T_1),$$

پس $\bar{i}_g \in \text{Aut}(\Gamma)$. بنابراین $\text{Aut}(\Gamma)$ نیز بر $V(\Gamma)$ متعدی عمل می‌کند. به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

□

قضیه ۲.۰.۴. گراف Γ ، k - منتظم است که در آن $1 - k = \frac{(q-1)(q^{n-1}-1)+q(q^{n-2}-1)^2}{q-1}$.

برهان. بنا به لم ۳.۰.۴، گراف Γ ، k - منتظم است. اکنون مقدار k را محاسبه می‌کنیم. فرض کنیم $T_{a,f}$ یک ترانسوکشن باشد. کافی است اندازه‌ی مجموعه‌ی $\{(b, g) | b \in \ker f, a \in \ker g\}$

را محاسبه کنیم. داریم

$$\begin{aligned}
 |\{g|a \in \ker g\}| &= |\{g|\langle a \rangle \subseteq \ker g\}| \\
 &= |\{\bar{g}|\bar{g} : \frac{V}{\langle a \rangle} \longrightarrow F\}| \\
 &= |\{(b, g)|b \in \langle a \rangle, a \in \ker g\}| \\
 &= (|\langle a \rangle| - 1) \left(\left| \left(\frac{V}{\langle a \rangle} \right)^* \right| - 1 \right) \\
 &= (q - 1)(q^{n-1} - 1)
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 |\{(b, g)|b \in \ker f, a \in \ker g, \langle a \rangle \neq \langle b \rangle\}| &= |\ker f - \langle a \rangle| \left(\left| \left(\frac{V}{\langle a, b \rangle} \right)^* \right| - 1 \right) \\
 &= (q^{n-1} - q)(q^{n-2} - 1),
 \end{aligned}$$

به طوری که $(\frac{V}{\langle a \rangle})^*$ فضای دوگان $\frac{V}{\langle a \rangle}$ و $(\frac{V}{\langle a, b \rangle})^*$ فضای دوگان $\frac{V}{\langle a, b \rangle}$ می باشد. در نتیجه

$$k = \frac{(q-1)(q^{n-1}-1) + q(q^{n-2}-1)^2}{q-1} - 1.$$

□

قضیه ۳.۰.۴.

(۱) برای $\dim(V) = 2$ ، Γ ناهمبند است.

(۲) برای $\dim(V) = 3$ ، $\text{diam}(\Gamma) = 3$.

(۳) برای $\dim(V) > 3$ ، $\text{diam}(\Gamma) = 2$.

برهان. فرض کنیم $T_{a,f}$ و $T_{b,g}$ دو ترانسوکشن از V با ابرصفحه های ثابت $W_1 = \ker f$ و $W_2 = \ker g$ باشند. اگر $\dim(V) = 2$ ، آنگاه $\dim(\ker f) = 1$ چون $a \in \ker f$ بنابراین، $b \in \ker f$ اگر و تنها اگر $\langle b \rangle = \langle a \rangle$. در نتیجه Γ ناهمبند است.

فرض کنیم $\dim(V) = 3$. اگر $W_1 = W_2$ آنگاه $d(T_{a,f}, T_{b,g}) = 1$. اگر $W_1 \neq W_2$ آنگاه $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. فرض کنیم u یک عضو ناصفر در $W_1 \cap W_2$ باشد. چون $\dim(\langle u, b \rangle) \leq 2$ پس بنابر لم ۱.۱.۱، $\gamma : V \rightarrow F$ وجود دارد به قسمی که $\langle u, b \rangle \subseteq \ker \gamma$. در نتیجه $[T_{b,g}, T_{u,\gamma}] = 1$. همچنین $\delta : V \rightarrow F$ وجود دارد به قسمی که $\langle u, a \rangle \subseteq \ker \delta$. بنابراین $[T_{a,f}, T_{u,\delta}] = 1$. همچنین چون $u \in \ker \gamma \cap \ker \delta$ پس $[T_{u,\gamma}, T_{u,\delta}] = 1$ ، در نتیجه $d(T_{a,f}, T_{b,g}) \leq 3$ و $\text{diam}(\Gamma) \leq 3$. اکنون نشان می دهیم که $\text{diam}(\Gamma) = 3$. ترانسوکشن های T_{v_1, f_1} و T_{v_2, f_2} با شرایط $\ker f_1 = W_1$ و $\ker f_2 = W_2$ وجود دارند، به قسمی که $v_1 \notin W_1$ و $v_2 \notin W_2$. اگر ترانسوکشن $T_{u,h}$ با شرط $\ker h = W$ وجود داشته باشد، به قسمی که $[T_{v_1, f_1}, T_{u,h}] = 1$ و

۵۲ بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم ارزی در گروه‌های خطی عام

در این صورت $[T_{v_1, f_1}, T_{u, h}] = 1$ ، $v_1 \in \ker f_1 \cap W$ و $v_2 \in \ker f_2 \cap W$. بنابراین $v_1, v_2 \in W$. چون $\langle v_1 \rangle \neq \langle v_2 \rangle$ و $\dim(W) = 2$ ، پس $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. بنابراین می‌توان نوشت $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. از طرفی چون $u \in W_1$ پس $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W_1$. بنابراین $\lambda_2 = 0$. به طور مشابه، چون $u \in W_2$ پس $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W_2$. بنابراین $\lambda_1 = 0$. در نتیجه $u = 0$ ، که تناقض است. به این ترتیب ثابت می‌شود که $\text{diam}(\Gamma) = 3$.

اکنون فرض کنیم $\dim(V) > 3$. اگر $W_1 = W_2$ آنگاه $d(T_{a, f}, T_{b, g}) = 1$. اگر $W_1 \neq W_2$ آنگاه $W_1 \cap W_2 \neq 0$ و عضو ناصفر $u \in W_1 \cap W_2$ وجود دارد. چون $\dim(\langle u, a, b \rangle) \leq 3$ ، پس بنابر **لم ۱.۱.۱**، تابع خطی $\mu: V \rightarrow F$ وجود دارد به قسمی که $\langle u, a, b \rangle \subseteq \ker \mu$. واضح است که $[T_{a, f}, T_{u, \mu}] = 1$ و $[T_{b, g}, T_{u, \mu}] = 1$. در نتیجه $d(T_{a, f}, T_{b, g}) \leq 2$ و بنابراین $\text{diam}(\Gamma) \leq 2$. اکنون نشان می‌دهیم که $\text{diam}(\Gamma) = 2$. فرض کنیم W_1 و W_2 دو ابرصفحه‌ی متمایز باشند و $v_1 \in W_1 - W_2$ و $v_2 \in W_2 - W_1$ واضح است که $[T_{v_1, f_1}, T_{v_2, f_2}] \neq 1$ جایی که $\ker f_1 = W_1$ و $\ker f_2 = W_2$. در نتیجه $\text{diam}(\Gamma) = 2$.

□

قضیه ۴.۰.۴. به ازای $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ، $\omega(\Gamma) = \frac{(q^k - 1)(q^{n-k} - 1)}{q - 1}$.

برهان. فرض کنیم برای هر $1 \leq i \leq t$ ، T_{a_i, f_i} یک ترانسوکشن با ابرصفحه‌ی $W_i = \ker f_i$ باشد. در این صورت به ازای هر $1 \leq i, j \leq t$ داریم $[T_{a_i, f_i}, T_{a_j, f_j}] = 1$ اگر و تنها اگر $a_1, a_2, \dots, a_t \in \bigcap_{i=1}^t \ker f_i$. بنابراین $\{T_{a_1, f_1}, T_{a_2, f_2}, \dots, T_{a_t, f_t}\}$ یک زیرگراف کامل از Γ است اگر و تنها اگر زیرفضای W از V وجود داشته باشد، به قسمی که $a_1, a_2, \dots, a_t \in W$ و به ازای هر $1 \leq i \leq t$ ، $W \subseteq \ker f_i$. کافی است $|S_W|$ را محاسبه کنیم. فرض کنیم $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند به طوری که $\dim(U_i) = i$. با توجه به **لم ۱.۰.۴** دیده می‌شود که

$$|S_{U_1}| = |S_{U_{n-1}}| < |S_{U_2}| = |S_{U_{n-2}}| < \dots$$

□

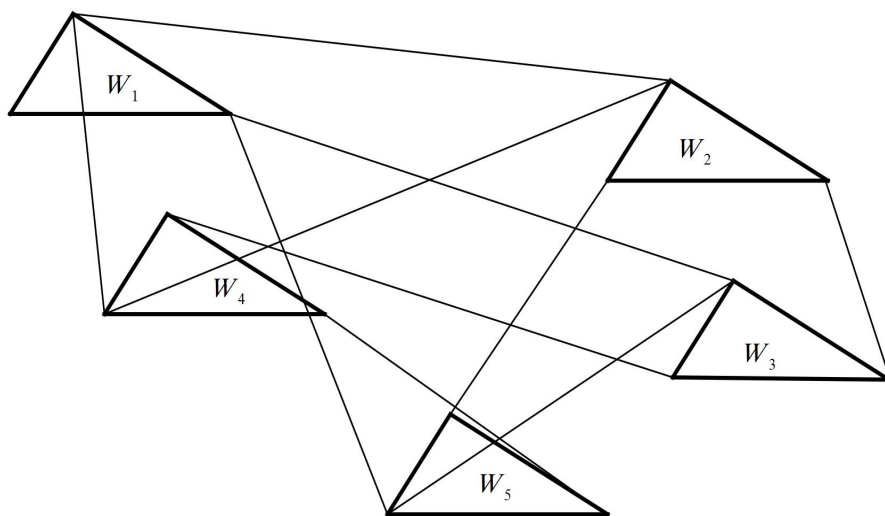
بنابراین $\omega(\Gamma) = |S_{U_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}|$.

نتیجه ۱.۰.۴. اگر $\dim(V) \geq 3$ ، آنگاه کمرگراف Γ برابر با ۳ است.

برهان. فرض کنیم W یک ابرصفحه دلخواه در V باشد. چون $\dim(W) \geq 2$ پس $|W| = q^{n-1} \geq 4$. بنابراین W شامل سه عنصر متمایز ناصفر مانند u_1, u_2 و u_3 است. فرض کنیم f یک تابع خطی باشد به طوری که $\ker f = W$. در این صورت $T_{u_1, f}, T_{u_2, f}$ و $T_{u_3, f}$ رؤوس یک مثلث در Γ هستند.

□

برهان. فرض کنیم W یک ابرصفحه در V باشد. بنابه [لم ۲.۱.۱](#)، $\tau(W) \cong W$ و زیرگراف کامل $K_{|W|-1}$ وجود دارد. بنابراین اگر $q^{n-1} - 1 \geq 5$ آنگاه Γ مسطح نیست. اکنون اگر $q^{n-1} - 1 < 5$ آنگاه $q = 2$ ، $n = 3$ و $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. فرض کنیم $W_1 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \circ$ ، $W_2 = \mathbb{Z}_2 \times \circ \times \mathbb{Z}_2$ ، $W_3 = \circ \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، $W_4 = \langle (1, \circ, \circ), (\circ, 1, 1) \rangle$ ، $W_5 = \langle (1, \circ, 1), (\circ, 1, \circ) \rangle$. در این صورت W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 ابرصفحه‌هایی در V هستند. فرض کنیم برای هر



شکل ۱.۴: تصویری از گراف Γ در حالتی که $q = 2$ و $n = 3$ باشد.

۵ $i \leq 1$ ، تابع‌های خطی f_i طوری باشند که $\ker f_i = W_i$. با توجه به **لم ۴.۰.۱**، تعداد همه‌ی ترانسوکشن‌ها با ابرصفحه‌ی ثابت W به صورت $A_i = \{T_{a, f_i} | a \in \ker f_i\}$ است. برای هر $u \in W_i \cap W_j$ ، ترانسوکشن‌های $T_{u, f_i} \in A_i$ و $T_{u, f_j} \in A_j$ وجود دارند به طوری که $[T_{u, f_i}, T_{u, f_j}] = 1$. بنابراین برای هر $i \neq j$ ، یالی از رأسی از A_i به رأسی از A_j وجود دارد. در نتیجه با توجه به قضیه **۲.۲.۱** با انقباض A_i ، برای $1 \leq i \leq 5$ ، به گراف کامل K_5 می‌رسیم. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

☐

قضیه ۶.۰.۴. گراف Γ تام است اگر و تنها اگر $\dim V = 3$.

برهان. فرض کنیم $\dim(V) = 3$ و Γ یک دور القایی به طول $m \geq 4$ داشته باشد. همچنین فرض کنیم $T_{v_1, f_1}, T_{v_2, f_2}$ و T_{v_3, f_3} سه رأس متوالی در این دور هستند، جایی که برای هر $1 \leq i \leq 3$ ، $\ker f_i = W_i$. به این ترتیب داریم $v_1 \in W_1 \cap W_2$ ، $v_2 \in W_2 \cap W_3$ و $v_3 \in W_3 \cap W_1$. اگر برای هر $1 \leq i, j \leq 3$ ، $W_i \neq W_j$ ، آنگاه $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$ و $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \subseteq W_2 \cap W_3$. در این صورت داریم $1 \leq \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \leq \dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

۵۴ بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم ارزی در گروه‌های خطی عام

بنابراین $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = W_1 \cap W_2$ و به طور مشابه داریم $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = W_2 \cap W_3$. در نتیجه $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3$. لذا $v_1 \in W_3$ و $v_3 \in W_1$ ، که تناقض است. از طرفی چون $m \geq 4$ ، پس $W_1 \neq W_3$. در نتیجه می‌توان فرض کرد $W_1 = W_2$ یا $W_2 = W_3$. اکنون فرض می‌کنیم $W_1 = W_2$ ، $W_3 = W_4$ ، $W_5 = W_6$ ، ... اگر m عددی فرد باشد آنگاه T_{v_m, f_m} ، $T_{v_{m-1}, f_{m-1}}$ و سه رأس متوالی در گراف هستند و داریم $W_1 = W_2$ و $W_{m-1} = W_{m-2}$. در این صورت $W_m \neq W_{m-1}$ و $W_m \neq W_1$ ، که تناقض است. در نتیجه m عددی زوج است و Γ دور فرد القایی به طول حداقل ۵ ندارد. به این ترتیب ثابت می‌شود که Γ تام است. اکنون فرض کنیم $\dim(V) = 4$ و $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. قرار می‌دهیم $W_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، $W_2 = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ و $\bar{W} = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ چون

$$\begin{aligned} |V - (W_1 \cup W_2 \cup \bar{W})| &= |V| - (|W_1| + |W_2| + |\bar{W}| - |W_1 \cap W_2| - |W_1 \cap \bar{W}| - |W_2 \cap \bar{W}| \\ &\quad + |W_1 \cap W_2 \cap \bar{W}|) \\ &= q^4 - (q^3 + q^3 + q^3 - q^2 - q^2 - q^2 + q) \\ &= q^4 - 3q^3 + 3q^2 - q \\ &= q(q-1)^3 > 0, \end{aligned}$$

فرض کنیم $v_5 \in V - (W_1 \cup W_2 \cup \bar{W})$. قرار می‌دهیم $W_3 = \langle v_2, v_4, v_5 \rangle$. اگر $v_4 \in W_5$ آنگاه $v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_3 v_3 + \lambda_5 v_5$ و $W_4 = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$ چون v_4, v_3, v_1 مستقل هستند، پس $\lambda_5 \neq 0$ و $v_5 \in \bar{W}$ ، که تناقض است. بنابراین $v_4 \notin W_5$. همچنین $v_4 \notin W_1$. در نتیجه $v_4 \notin W_1 \cap W_5$. به طور مشابه داریم $v_4 \notin W_3 \cap W_2$ ، $v_3 \notin W_3 \cap W_4$ ، $v_1 \notin W_3 \cap W_4$ ، $v_5 \notin W_1 \cap W_2$ ، $v_2 \notin W_4 \cap W_5$. اکنون T_{v_5, f_5} ، T_{v_4, f_4} ، T_{v_3, f_3} ، T_{v_2, f_2} ، T_{v_1, f_1} یک دور القایی به طول ۵ تشکیل می‌دهند، که در آن برای هر $1 \leq i \leq 5$ ، $\ker f_i = W_i$. چون متمم هر دور القایی به طول ۵ در Γ ، یک دور القایی به طول ۵ در $\bar{\Gamma}$ است، پس $\bar{\Gamma}$ و Γ هر دو دارای دور القایی به طول ۵ هستند. در نتیجه Γ تام نیست. اکنون فرض کنیم که $\dim(V) \geq 5$ و $V = \langle v_1, \dots, v_5 \rangle \oplus W$ برای $1 \leq i \leq 5$ ، قرار می‌دهیم

$$W_i = \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} - \{v_i\} \rangle \oplus W.$$

بنابراین T_{v_5, f_5} ، T_{v_4, f_4} ، T_{v_3, f_3} ، T_{v_2, f_2} ، T_{v_1, f_1} یک دور القایی به طول ۵ تشکیل می‌دهند، که در آن برای هر $1 \leq i \leq 5$ ، $\ker f_i = W_i$. در نتیجه Γ و $\bar{\Gamma}$ دارای دور القایی به طول ۵ هستند و در نتیجه Γ تام نیست.

□

نتیجه ۲.۰.۴. اگر $\dim V = 3$ ، آنگاه $\chi(\Gamma) = \omega(\Gamma) = q^2 - 1$.

قضیه ۷.۰.۴. برای $n \geq 3$ ، $\gamma(\Gamma) \leq \min\{(q+1)^2, \frac{q^n-1}{q-1}\}$ و برای $q = 2$ یا $n \geq 5$ ، $\gamma(\Gamma) \geq q^2$.

برهان. برای هر ابرصفحه W ، فرض کنیم a_W عضو ناصفری در W و f_W تابع خطی ناصفر باشد، که $\ker f_W = W$. قرار می‌دهیم

$$S = \{T_{a_W, f_W} \mid W \text{ یک ابرصفحه در } V \text{ است}\}.$$

فرض کنیم $T_{b,g} \in V(\Gamma)$ و $\ker g = W_1$. در این صورت $T_{a_{W_1}, f_{W_1}} \in S$ و $[T_{b,g}, T_{a_{W_1}, f_{W_1}}] = 1$. بنابراین S یک مجموعه‌ی غالب برای Γ است. در نتیجه $\gamma(\Gamma) \leq \frac{q^n-1}{q-1}$. اکنون فرض کنیم $\dim(V) \geq 4$ و W زیرفضایی در V باشد به طوری که $\dim(W) = n-2$. در این صورت V دارای $q+1$ ابرصفحه‌ی $W_1, W_2, \dots, W_{q+1}$ است که شامل W هستند. فرض کنیم $f_1, f_2, \dots, f_{q+1}$ تابع‌های خطی باشند با این شرط که برای هر $1 \leq j \leq q+1$ ، $\ker f_j = W_j$. واضح است که $V = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{q+1}$. فرض کنیم U زیرفضایی در W باشد به قسمی که $\dim(U) = 2$. همچنین فرض کنیم $\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_{q+1} \rangle$ زیرفضاهایی متمایز با بعد یک در U باشند. ادعا می‌کنیم که

$$S = \{T_{a_i, f_j} \mid i, j \in \{1, 2, \dots, q+1\}\}$$

یک مجموعه‌ی غالب برای Γ است. ترانسوکشن دلخواه $T_{b,g}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت ابرصفحه‌ی W_j وجود دارد به قسمی که $b \in W_j$. چون $\dim(U \cap \ker g) = 1$ پس $a_i \in \ker g$ وجود دارد. در نتیجه $[T_{a_i, f_j}, T_{b,g}] = 1$. به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود. بنابراین داریم $\gamma(\Gamma) \leq |S| = (q+1)^2$. اکنون فرض کنیم $\gamma(\Gamma) = t$. چون Γ ، k - منتظم است، پس داریم

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{|V(\Gamma)|}{k} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^{n-1}-1) + (q^{n-1}-q)(q^{n-2}-1) - (q-1)} \\ &\geq \frac{q^{2n-1} - q^n - q^{n-1} + 1}{q^{2n-3} + q^n - 3q^{n-1} - q + 2} \\ &> \frac{q^{2n-1} - q^n - q^{n-1}}{q^{2n-3} + q^n - 3q^{n-1}} \\ &> \frac{(q^n - q - 1)}{(q^{n-2} + q - 3)}. \end{aligned}$$

چون برای $q=2$ یا $n \geq 5$ ، $q^{n-2} + 3q^2 - q^3 - 4 > 0$ پس $q^2 - 1 > \frac{(q^n - q - 1)}{(q^{n-2} + q - 3)}$. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. در نتیجه $\gamma(\Gamma) \leq q^2$. لذا حکم ثابت می‌شود.

□

قضیه ۸.۰.۴. اگر q عددی فرد باشد، آنگاه Γ دارای ۱ - عامل است و

$$\alpha(\Gamma) \leq \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1)(q^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1)}.$$

□

برهان. با استفاده از قضیه ۶.۲.۱ حکم ثابت می‌شود.

۵۶ بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم‌ارزی در گروه‌های خطی عام

مثال ۱.۰.۴. فرض کنیم $G = GL(3, 2)$. در این صورت گراف جابجایی $\Gamma = \mathcal{C}(G, X)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(1) \quad |V(\Gamma)| = 21.$$

(۲) گراف Γ ، ۴-منتظم است.

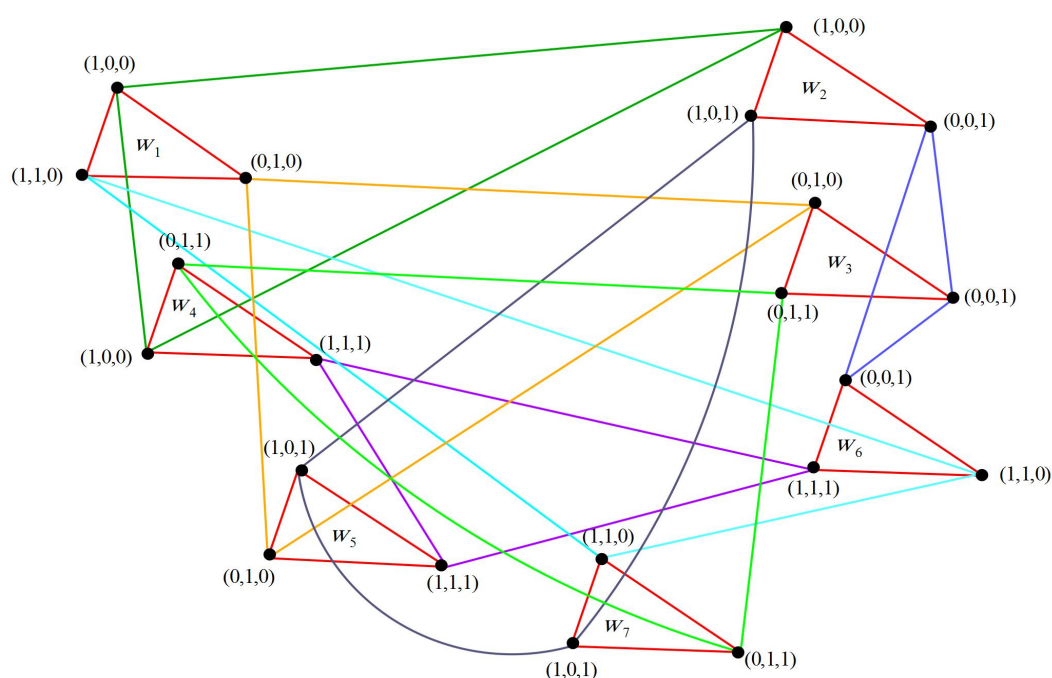
$$(3) \quad |E(\Gamma)| = 42.$$

$$(4) \quad \text{diam}(\Gamma) = 3.$$

(۵) گراف Γ تام است.

$$(6) \quad \chi(\Gamma) = \omega(\Gamma) = 3.$$

$$(7) \quad \gamma(\Gamma) = 5.$$



شکل ۲.۴: تصویری از گراف $\mathcal{C}(GL(3, 2), X)$.

حل. قسمت‌های (۱) - (۶) واضح هستند. برای قسمت (۷)، با توجه به قضیه ۷.۰.۴، می‌توان نوشت $4 \leq \gamma(\Gamma) \leq 7$. چون $|V(\Gamma)| = 21$ و $4 \times 5 \leq |V(\Gamma)|$ ، پس $\gamma(\Gamma) \geq 5$. ادعا می‌کنیم $\gamma(\Gamma) = 5$. اکنون با توجه به شکل ۲.۴ رؤوس $T_{(1,1,1),f_5}$ و $T_{(1,1,1),f_5}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\ker f_3 = W_3 = \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، $\ker f_1 = W_1 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \circ$ و $\ker f_5 = W_5 = \langle (1, \circ, 1), (\circ, 1, \circ) \rangle$. تمام رؤوس گراف بجز رأس‌های $T_{(\circ, \circ, 1), f_3}$ ، $T_{(1, \circ, 1), f_3}$ ، $T_{(\circ, 1, \circ), f_3}$ و $T_{(1, \circ, 1), f_3}$ را در نظر می‌گیریم که در

که در آن $\ker f_{\Upsilon} = W_{\Upsilon} = \mathbb{Z}_{\Upsilon} \times \circ \times \mathbb{Z}_{\Upsilon}$ ، $T_{(1, \circ, 1), f_{\Upsilon}}$ و $T_{(1, 1, \circ), f_{\Upsilon}}$ ، $T_{(1, 1, \circ), f_{\mathcal{E}}}$ ، $T_{(\circ, \circ, 1), f_{\mathcal{E}}}$ ، $\ker f_{\Upsilon} = W_{\Upsilon} = \langle (1, 1, \circ), (\circ, 1, 1) \rangle$ و $\ker f_{\mathcal{E}} = W_{\mathcal{E}} = \langle (1, 1, \circ), (\circ, \circ, 1) \rangle$ مجاور هستند (به عبارت دیگر توسط این رئوس پوشانده می‌شوند). در ادامه دو رأس $T_{(1, \circ, 1), f_{\Upsilon}}$ و $T_{(1, 1, \circ), f_{\mathcal{E}}}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت با انتخاب این دو رأس تمام آن رئوسی که تحت پوشش هیچ رأسی نبودند، توسط این رئوس پوشانده می‌شوند و در نتیجه

$$\{T_{(\cdot, \circ, \circ), f_A}, T_{(\cdot, \circ, \cdot), f_B}, T_{(\circ, \cdot, \cdot), f_C}, T_{(\cdot, \cdot, \cdot), f_D}, T_{(\cdot, \cdot, \circ), f_E}\}$$

یک مجموعه‌ی غالب برای Γ است. به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود.

۱.۴ طیف و انرژی $C(GL(3, 2), X)$

در این بخش طیف و انرژی گراف جابجایی $\mathcal{C}(GL(3, 2), X)$ ، که X مجموعه همه ترانسوکلشن‌ها در $GL(3, 2)$ می‌باشد، را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۴.

$$Spec(\mathcal{C}(GL(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}), X)) = \begin{pmatrix} -\mathfrak{V} & 1 - \sqrt{\mathfrak{V}} & 1 + \sqrt{\mathfrak{V}} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{E} & \mathfrak{E} & 1 \end{pmatrix}.$$

برهان. ماتریس مجاورت $\mathcal{C}(GL(3, 2), X)$ به صورت زیر است

[illegible]

محاسبہ نشان می دهد کہ

$$P_{\mathcal{C}(GL(\mathfrak{F}, \mathfrak{Y}), X)}(x) = -(x - \mathfrak{F})(x^{\mathfrak{Y}} - \mathfrak{Y}x - \mathfrak{I})^{\mathfrak{F}}(x + \mathfrak{Y})^{\mathfrak{A}}.$$

۵۸ بررسی برخی ویژگی‌های گراف جابجایی یک رده‌ی هم‌ارزی در گروه‌های خطی عام

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\text{Spec}(\mathcal{C}(GL(3, 2), X)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} & 4 \\ 8 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

نتیجه ۱.۱.۴.

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}(GL(3, 2), X)) = 2^0 + 12\sqrt{2}.$$

مراجع

- [۱] جمالی ع. ر، مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گروههای متناهی، چاپ اول، تهران، مبتکران، (۱۳۹۱)، ۴۶۳ صفحه.
- [۲] درفشه م. ر، گروههای خطی، چاپ دوم، موسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، (۱۳۸۷)، ۲۴۹ صفحه.
- [3] Abdollahi. A, Akbari. S. and Maimani. H. R, *Non-commuting graph of a group*, J. Algebra, **298** (2006), 468-492.
- [4] Abdollahi. A, Akbari. S, Dorbidi. H. and Shahverdi. H, *Commutativity pattern of finite non-abelian p -groups determine their orders*, Comm. Algebra, **41** (2013), 451-461.
- [5] Abdollahi. A. R and Shahverdi. H, *Non-commuting graph of nilpotent groups*, arXiv: 1304.4839v1, (2013).
- [6] Bates. C, Bundy. D, Hart. S. and Rowley. P, *A note on commuting graph for symmetric groups*, Electron. J. Comb., **16** (2009).
- [7] Bates. C, Bundy. D, Perkins. S and Rowley. P, *Commuting involution graphs for symmetric groups*, J. Algebra, **266** (2003), 133-153 .
- [8] Boncher. D, *Chemical Graph Theory*, Handbook of Graph Theory, Chapter 13· 1, publisher: CRC press, (2013), 1358-1558.
- [9] Bondy. J. A and Murty. U. S. R, *Graph Theory with Applications, Department of combinatorics and optimization*, University of Watenoo, Ontario, Canada, 270 (1970).
- [10] Brauer. R and Fowler. K. A, *On groups of even order*, Ann. of Math., **62** (1955), 565-583.
- [11] Brouwer. A. E and Haemers. W. H, *Spectra of Graphs -Monograpg*, Amsterdam, 255 (2011).

-
- [12] Bundy. D, *The connectivity of commuting graph*, J. Combin. Theory Ser. A, **113** (2006), 995-1007.
 - [13] Cameron. P. J and Mary. Q, *Automorphisms of Groups*, University of London, London E14Ns, U. K, 24 (2001).
 - [14] Chudnovsky. M, Robertson. N, Seymour. P. and Thomas. R, *The strong perfect graph theorem*, Ann. of Math., **164** (2006), 51-229.
 - [15] Conrad. K, *Transitive group actions*, www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/transitive.pdf. 1-24.
 - [16] Cvetkovic. D, Doob. M and Sachs. H, *Spectra of Graphs- Theory and Applications*, Academic Press, Mathematics, 368 (1980).
 - [17] Darafsheh. M. R, *Group with the same non-commuting graph*, Discrete Appl. Math., **157** (2009), 833-837.
 - [18] Darafsheh. M. R and Yosefzadeh. P, *A characterization of the group $\mathbb{A}_{p+3}$ by its non-commuting graph*, Int. Electron. J. Algebra, **11** (2012), 160-164.
 - [19] Darafsheh. M. R and Yousefzadeh. P, *Some results on characterization of finite groups by non-commuting graph*, Trans. Comb., **1** (2012), 41-48.
 - [20] Delorme. C, *Eigenvalues of complete multipartite graphs*, Discrete Math., **312** (2012), 2532-2535.
 - [21] Dutta. J and Nath. R. K, *Spectrum of commuting graphs of some classes of finite groups*, arXiv: 1604.07133v1[math.GR], (2016).
 - [22] Diestel. R. H, *Graph Theory, Graduate texts in mathematics*, 2th ed, 173 (2000).
 - [23] Fischer. B, *Finite groups generated by 3-transpositions*, Invent. Math., **13** (1971), 232-246.
 - [24] Giudici. M and Pope. A, *The diameters of commuting graphs of linear groups and matrix rings over the integers modulo m*, Australas. J. Combin., **48** (2010), 221-230.
 - [25] Godsil. C and Royle. G, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer Verlag, 207 (2001).
 - [26] Gutman. I, *The energy of a graph: old and new results*, Algebraic Combinatorics and Applications, (2001), 196-211.

- [27] Gutman. I. and Das. K.c, *Estimating the total π -electron energy*, J. Serb. Chem. Soc., **78** (2013), 1925-1933.
- [28] Heus. A, *A study of necessary and sufficient conditions for vertex transitive graphs to be Hamiltonian*, PhD thesis, Math, University of Amsterdam, (2008).
- [29] Jahandideh. M, Darafsheh. M. R, Sarmin. N. H and Omer. S. M. S, *Conditions on the edges and vertices of non-commuting graph*, Jurnal Teknologi, **74** (2015), 73-76.
- [30] Mahmoud. R, Sarmin. N. H and Erfanian. A, *On the energy of non-commuting graph of dihedral groups*, The 4th International Conference on Mathematical Sciences, AIP conf. Proc. 1830, (2017), 070011-1-070011-5.
- [31] Mirzargar. M, Pach. P. P and Ashrafi. A. R, *Remarks on commuting graph of a finite group*, Electron. Notes Discrete Math., **45** (2016), 103-106.
- [32] Moghaddamfar. A. R, *About non-commuting graphs*, Siberian Math. J., **47** (2006), 1112-1116.
- [33] Moshe. Y, *Graphs associated with finite groups*, M. SC. Thesis, Ben-Gurion University, (2000).
- [34] Nawawi. A and Rowley. P, *On commuting graphs for elements of order 3 in symmetric groups*, Electron. J. Combin., **22** (2015).
- [35] Neumann. B. H , *A problem of Paul Erdős on groups*, J. Aust. Math. Soc., **21** (1976), 467-472.
- [36] Poliatsek. H, *Irreducible groups generated by transvections over finite fields of characteristic two*, J. Algebra, **39** (1976), 328-333.
- [37] Rapinchuk. A. S, Segev. Y and Seitz. G. M, *Finite quotients of the multiplicative group of a finite dimensional division algebra are solvable*, J. Am. Math. Soc., **15** (2002), 929-978.
- [38] Segev. Y, *The commuting graph of minimal non-solvable groups*, Geom. Dedicata, **88** (2001), 55-66.
- [39] Segev. Y and Seitz. G. M, *Anisotropic groups of type A_n and the commuting graph of finite simple groups*, Pac. J. Math., **202** (2002), 125-226.
- [40] Silvester. J. R, *Determinants of block matrices*, Math. Gaz., **84** (2000), 460-467.

- [41] Stevanovic. D, Gutman. I and Rehman. M. U, *On spectral radius energy of complete multipartite graphs*, Ars Math. Contemp., **9** (2015), 109-113.
- [42] Talebi. A. A, *On the Non-Commuting Graphs of Group D_{γ_n}* , Int. J. Algebra, **2** (2008), 957-961.
- [43] Vahidi. J and Talebi. A. A, *The commuting graphs on groups D_{γ_n} and Q_n* , J. Math. Computer Sci., **1** (2010), 123-127.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Saturated	اشباع شده
Energy	انرژی
Contraction	انقباض
Cut-vertex	برش-رأسی
Bridge	پل
Transvection	ترانسوکشن
Isolated	تنها
Forest	جنگل
Matching	جورسازی
Perfect matching	جورسازی کامل
Characteristic polynomial	چندجمله ای مشخصه
Special	خاص
Degree	درجه
Tree	درخت
Cycle	دور
Vertex	رأس
Vertex-transitive	رأس - متعدی
k-vertex coloring	رنگ-k آمیزی رأسی
Subgraph	زیرگراف
Expectal radius	شعاع طیفی
Spectrum	طیف
Factor	عامل
Clique number	عدد خوشه ای
Chromatic number	عدد رنگی
Domination number	عدد غالب
Non-solvable	غیرحلیپذیر

Distance	فاصله
Diameter	قطر
Exact	کامل
Conjugacy class	کلاس تزویج
Girth	کمر
Perfect graph	گراف تام
Power graph	گراف توانی
Commutig graph	گراف جابجایی
Star graph	گراف ستاره
Undirected graph	گراف غیر جهت‌دار
Complete graph	گراف کامل
Cayley graph	گراف کیلی
Regular graph	گراف منتظم
Non-commutig graph	گراف ناجابجایی
Connected graph	گراف همبند
Dihedral group	گروه دووجهی
Symmetric group	گروه متقارن
Alternating group	گروه متناوب
Distance matrix	ماتریس فاصله
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاس
Independent set	مجموعه مستقل
Planar	مسطح
Path	مسیر
Eigenvalue	مقدار ویژه
Complement	مکمل
Connected component	مؤلفه همبندی
Disconnected	ناهمبند
Face	وجه
Connect	همبند
Neighbour	همسایگی
Hamiltonian	همیلتنی
Edge	یال

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Alternating group	گروه متناوب
Bridge	پل
Cayley graph	گراف کیلی
Characteristic polynomial	چندجمله ای مشخصه
Chromatic number	عدد رنگی
Commutig graph	گراف جابجایی
Complement	مکمل
Complete graph	گراف کامل
Conjugacy class	کلاس تزویج
Connected	همبند
Connected component	مؤلفه همبندی
Connected graph	گراف همبند
Contraction	انقباض
Cut-vertex	برش-رأسی
Cycle	دور
Degree	درجه
Diameter	قطر
Dihedral group	گروه دووجهی
Disconnected	ناهمبند
Distance	فاصله
Distance matrix	ماتریس فاصله
Domination number	عدد غالب
Edge	یال
Eigenvalue	مقدار ویژه
Energy	انرژی
Exact	کامل

Expectal radius	شعاع طیفی
Face	وجه
Factor	عامل
Forest	جنگل
Girth	کمر
Hamiltonian	همیلتنی
Independent set	مجموعه مستقل
Isolated	تنها
k-vertex coloring	رنگ-k آمیزی رأسی
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاس
Matching	جورسازی
Neighbour	همسایگی
Non-commutig graph	گراف ناجابجایی
Non-solvable	غیرحلیپذیر
Perfect graph	گراف تام
Perfect matching	جورسازی کامل
Path	مسیر
Planar	مسطح
Power graph	گراف توانی
Regular graph	گراف منتظم
Saturated	اشباع شده
Special	خاص
Spectrum	طیف
Star graph	گراف ستاره
Subgraph	زیرگراف
Symmetric group	گروه متقارن
Transvection	ترانسوکشن
Tree	درخت
Undirected graph	گراف غیر جهت دار
Vertex	رأس
Vertex-transitive	رأس - متعدی

Abstract

Let G be a non-abelian group and $Z(G)$ be the center of G . The non-commuting graph $\Gamma(G)$ of G is a graph whose vertices are non-central elements of G (i.e. $G - Z(G)$) and two vertices x and y are adjacent whenever $xy \neq yx$. In this thesis, we calculate the energy, Laplacian energy and spectrum of non-commuting graph of dihedral group D_{2n} . Also, we will obtain the energy of non-commuting graph of $D_{2n} \times D_{2n}$ and $G \times H$, where G is a non-abelian finite group and H is an abelian finite group.

Let G be a group and X is a non-empty subset of G . $\mathcal{C}(G, X)$ is a graph with vertex set X and two distinct elements $x, y \in X$ are adjacent whenever $xy \neq yx$. In this thesis, we study clique number, domination number, diameter, planarity, perfection and regularity of $\mathcal{C}(G, X)$ where $G = GL(n, q)$ and X is the set of all transvections.

Keywords: Non-commuting graph, Energy of a graph, Spectrum, Commuting graph, Transvections, Diameter, Clique number, Domination number, Perfection, Planarity.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Algebra

Some Properties of Non-Commuting Graphs of Groups

By: Maryam Nasiri

Supervisor

Dr. S. H. Jafari

July 2018