

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

رساله دکتری

یک کاربرد از پایه‌های مرتبه کسری برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری

نگارنده: سلیمان حسین پور

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

آذر ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای سلیمان حسین پور دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۲۱۵۷۲۵ ورودی مهر ماه سال ۹۲ در تاریخ ۹۶/۰۹/۲۲ از رساله خود با عنوان : یک کاربرد از پایه های کسری برای حل رده های از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۲۰ به درجه : دکتری نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵ ☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐

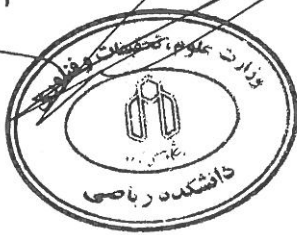
ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	امضاء
۱-	دکتر علیرضا ناظمی	استاد راهنما	دانشیار	
۲-	دکتر حجت احسنی طهرانی	استاد مدعو داخلی (داور)	دانشیار	
۳-	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استاد مدعو داخلی (داور)	استادیار	
۴-	دکتر سهراب عفتی	استاد مدعو خارجی (داور)	استاد	
۵-	دکتر ابراهیم هاشمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیئت داوران: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء:



تقدیم به مقدس ترین واژه مادر لغت نامه دلم،
مادر مهربانم که زندگیم را دیون مهر و عطوفت آن می دانم.
پدر، مهربانی مشفق، برادر و حامی.
همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است.
برادر و خواهرانم، همراهان، همیشگی و پشتوانه های زندگیم.

سپاس‌گزاری...

خدایا! شکر که تو را حدی برایمت تصور نیست. سپاس تو را که بی‌نهایت مهربانی. خدایا! حمد و سپاس از آن توست که محیطی بر تمام عالم و تو تکیه‌گاهی بر تمام موجودات. معبودا! تو آن قدر گویایی که من از وصف تو ناتوانم. بند بند وجودم از شعاع نور توست که گرم و روشن می‌شود.

اکنون که با عنایت خداوند متعال این دوره‌ی علمی به پایان رسیده است وظیفه خود را می‌دانم که تشکر قلبی خود را نسبت به کسانی که به طریقی در انجام این پژوهش مرا یاری نموده‌اند ابراز دارم. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از جناب آقای دکتر عمران توحیدی به خاطر نکته‌های دلاویز و کمک‌های ارزشمندشان، صمیمانه تشکر می‌کنم. همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر سهراب عفتی، جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر محمد هادی نوری اسکندری که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان از همه دوستان و عزیزانی که با اندیشه و قلبشان در این راه یاری‌ام نمودند، خالصانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

سلیمان حسین پور
آذر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **سلیمان حسین پور** دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **یک کاربرد از پایه های مرتبه کسری برای حل رده های از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سلیمان حسین پور

آذر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

با توسعه و پیچیده‌تر شدن مسائل کنترل بهینه، نیاز به روش‌های نوین برای حل این مسائل گسترش یافته است. هنگامی که دستگاه‌های دینامیکی پیچیده و یا دارای حافظه باشند، جنبش و انتشار دیگر از قوانین مشتق معمولی پیروی نمی‌کنند. در این گونه موارد، حرکت‌ها از قوانین مرتبه کسری پیروی می‌کنند. سیستم‌های تاخیری به دلیل کاربردهای فراوان در علوم، مهندسی و پزشکی همواره مورد توجه محققان رشته‌های مختلف قرار گرفته است و ویژگی غیرموضعی بودن عملگر مشتق کسری منجر به ترکیب این دو موضوع و مشاهده نتایج بهتر شده است. از آنجایی که یافتن جواب دقیق برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری در حالت کلی وجود ندارد، در طول سال‌های اخیر روش‌های عددی مختلفی در این زمینه مورد مطالعه قرار گرفته است. انتخاب روش عددی متناسب با ساختار مشتق کسری، همواره یکی از چالش‌های مهم در این زمینه بوده است. در این پایان نامه به مطالعه چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری می‌پردازیم و روشی عددی بر پایه چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه می‌دهیم. همچنین برای مقایسه روش پیشنهادی و ساختار جواب‌های مسائل تاخیری، توابع پایه ناهموار بلاک پالس و موجک‌های هار مورد بررسی قرار گرفته و با چند روش عددی مقایسه شده‌اند.

کلمات کلیدی: مشتق کسری، کنترل بهینه کسری تاخیری، چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری، موجک‌های هار، توابع بلاک پالس

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول:

S. Hosseinpour, A. Nazemi, Solving fractional optimal control problems with fixed or free final states by Haar wavelet collocation method, IMA Journal of Mathematical Control and Information, (2016) 543–561.

۲. مقاله دوم:

S. Hosseinpour, A. Nazemi, A collocation method via block-pulse functions for solving delay fractional optimal control problems, IMA Journal of Mathematical Control and Information, (2016) 1–23.

فهرست مطالب

ک فهرست تصاویر

م فهرست جداول

۱ مروری بر حسابان کسری و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ پیش نیازها ۲

۳.۱ توابع پر کاربرد در حسابان کسری ۴

۴.۱ مشتقات و انتگرال مرتبه کسری ۷

۵.۱ معادلات دیفرانسیل کسری ۱۵

۶.۱ معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری ۱۶

۷.۱ برخی از کاربردهای حسابان کسری ۱۶

۸.۱ چند جمله‌ای‌های مرتبه کسری ۱۷

۱.۸.۱ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری ۱۸

۲.۸.۱ چند جمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری ۱۸

۳.۸.۱ چند جمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری ۲۰

۴.۸.۱ چند جمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری ۲۱

۵.۸.۱ چند جمله‌ای‌های لاگر کسری ۲۲

۶.۸.۱ چند جمله‌ای‌های مونتس-لژاندر ۲۳

۷.۸.۱ چند جمله‌ای‌های ژاکوبی ۲۵

۹.۱ مروری بر روش‌های طیفی و شبه طیفی ۲۶

۲ حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری ۲۹

۱.۲ مقدمه ۲۹

۲.۲ پایداری و کنترل پذیری سیستم‌های مرتبه کسری ۳۰

۳.۲ شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه کسری ۳۳

۳۵	۴.۲	ویژگی‌های موجک‌های هار
۳۶	۱.۴.۲	تقریب توابع
۳۸	۲.۴.۲	ماتریس عملیاتی انتگرال کسری
۴۰	۳.۴.۲	روش گسسته سازی هار
۴۱	۴.۴.۲	برنامه ریزی غیرخطی
۴۲	۵.۲	مثال‌های عددی
۴۹	۳	حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با استفاده از توابع بلاک پالس
۴۹	۱.۳	مقدمه
۵۰	۲.۳	توابع بلاک پالس
۵۱	۱.۲.۳	ماتریس عملیاتی تأخیری
۵۲	۲.۲.۳	ماتریس عملیاتی انتگرال کسری
۵۵	۳.۳	همگرایی روش
۵۷	۴.۳	مثال‌های عددی
۶۷	۴	تقریب پاده برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری
۶۷	۱.۴	مقدمه
۶۸	۲.۴	تقریب پاده
۶۹	۳.۴	تقریب پاده برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری
۷۱	۴.۴	روش عددی مونته‌کارتو-لژاندر برای حل مسئله کنترل بهینه کسری
۷۱	۱.۴.۴	ماتریس عملیاتی مشتق کسری
۷۳	۲.۴.۴	تقریب مسئله کنترل بهینه کسری
۷۵	۳.۴.۴	حل مسئله بهینه سازی نهایی
۷۶	۵.۴	نتایج عددی
۸۷	۵	تقریب پاده برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری جزئی تاخیری
۸۷	۱.۵	مقدمه
	۲.۵	یک رویکرد برای تبدیل مسئله معادلات دیفرانسیل کسری جزئی تاخیری
۸۸		به یک مسئله بدون تاخیر
۸۸	۱.۲.۵	تبدیل لاپلاس دوطرفه برای توابع دو متغیره
۹۰	۳.۵	روش عددی برای حل مسئله
۹۱	۴.۵	روش هم محلی
۹۳	۵.۵	مثال‌های عددی
۱۰۱		مراجع

فهرست تصاویر

۵	 نمودار تابع گاما	۱.۱
۳۱	 ناحیه همگرایی برای سیستم مرتبه کسری	۱.۲
۳۶	 نمودار ۸ موجک هار به ازای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$	۲.۲
۴۳	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۲	۳.۲
۴۳	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۲	۴.۲
۴۴	 مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۱.۵.۲	۵.۲
۴۴	 مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۱.۵.۲	۶.۲
۴۵	 مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۲.۵.۲	۷.۲
۴۵	 مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۲.۵.۲	۸.۲
۴۶	 مسیرهای بهینه تقریبی $x_1(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۵.۲	۹.۲
۴۷	 مسیرهای بهینه تقریبی $x_2(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۵.۲	۱۰.۲
۴۷	 مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۵.۲	۱۱.۲
۵۸	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۳	۱.۳
۵۹	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۳	۲.۳
۵۹	 مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۱.۴.۳	۳.۳
۶۰	 مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۱.۴.۳	۴.۳
۶۱	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $K = 36$ در مثال ۲.۴.۳	۵.۳
۶۱	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $K = 36$ در مثال ۲.۴.۳	۶.۳
۶۲	 مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 36$ در مثال ۲.۴.۳	۷.۳
۶۲	 مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 36$ در مثال ۲.۴.۳	۸.۳
۶۳	 مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۴.۳	۹.۳
۶۴	 مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۴.۳	۱۰.۳
۶۵	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۴.۴.۳	۱۱.۳
۶۵	 مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۴.۴.۳	۱۲.۳

۷۹	مقادیر تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $N = 2^\circ$ در مثال ۱.۵.۴	۱.۴
۷۹	مقادیر تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $N = 2^\circ$ در مثال ۱.۵.۴	۲.۴
۸۲	مقادیر تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $N = 5$ در مثال ۲.۵.۴	۳.۴
۸۲	مقادیر تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $N = 5$ در مثال ۲.۵.۴	۴.۴
۸۴	مقادیر تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $N = 2^\circ$ در مثال ۳.۵.۴	۵.۴
۸۵	مقادیر تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $N = 2^\circ$ در مثال ۳.۵.۴	۶.۴
۹۳	جواب عددی $u_N(x, t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 5$ در مثال ۱.۵.۵	۱.۵
۹۶	خطای مطلق به ازای $N = 1^\circ$ در مثال ۲.۵.۵	۲.۵
۹۶	جواب عددی $u_N(x, t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 1^\circ$ در مثال ۲.۵.۵	۳.۵
۹۷	جواب عددی $u_N(x, t)$ در $t = 1$ با $N = 1^\circ$ در مثال ۲.۵.۵	۴.۵
۹۷	جواب عددی $u_N(x, t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 5$ در مثال ۳.۵.۵	۵.۵

فهرست جداول

۴۲	مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۲	۱.۲
۴۵	مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۵.۲	۲.۲
۴۸	مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۳.۵.۲	۳.۲
۶۰	مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۳	۱.۳
۶۳	مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۴.۳	۲.۳
۶۴	مقادیر تقریبی تابع هدف J در مثال ۴.۴.۳	۳.۳
۶۶	بعضی مقادیر عددی برای $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۴.۴.۳	۴.۳
۷۸	نتایج تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۴	۱.۴
۸۰	مقادیر تقریبی تابع هدف J در مثال ۱.۵.۴	۲.۴
۸۱	مقادیر تقریبی J در مثال ۲.۵.۴	۳.۴
۸۴	مقادیر تقریبی تابع هدف J در مثال ۳.۵.۴	۴.۴
۹۴	خطای مطلق به ازای $\alpha = 1$ و $N = 5$ در مثال ۱.۵.۵	۱.۵
۹۵	برخی از مقادیر عددی به ازای $N = 10$ در مثال ۲.۵.۵	۲.۵
۹۸	خطای مطلق به ازای $N = 10$ و $\alpha = 0.9$ در مثال ۳.۵.۵	۳.۵

فصل ۱

مروری بر حسابان کسری و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

حسابان کسری به دلیل اهمیتی که در سال‌های اخیر پیدا کرده است به عنوان حساب قرن ۲۱ معرفی شده است. ریشه حسابان کسری به قرن ۱۷ و به بحث‌های هوپیتال^۱ و لایب نیس^۲ برای معرفی نمادی برای مشتق به صورت $\frac{dx}{dt}$ باز می‌گردد. از این رو بسیاری از دانشمندان تاریخ تولد حسابان کسری را ۳۰ سپتامبر ۱۶۶۹ مصادف با اولین نامه لایب نیس به هوپیتال در نظر می‌گیرند. ریاضیدانان مختلف، تلاش‌های بسیاری برای بسط و تعمیم این مفهوم جدید در ریاضیات انجام دادند اما کاربردها و تفسیر این مفهوم جدید تا سال‌ها ناشناخته باقی مانده بود. در سال ۱۹۲۰ ناتینگ^۳ [۱۰] برای اولین بار از عملگر مشتق کسری در چارچوب مسائل فیزیکی استفاده کرد. او مشاهده کرد که فرمول میزان کشش^۴ و فشار^۵ برای بعضی از مواد می‌تواند به صورت توانی کسری از زمان بیان شود. جمنت^۶ [۱۰] اولین کسی بود که پیشنهاد استفاده از مشتق کسری را برای این معادلات ارائه داد.

^۱Hopital

^۲Leibniz

^۳Nutting

^۴Strain

^۵Stress

^۶Gemant

۲.۱ پیش نیازها

در این قسمت به مرور برخی از تعاریف و پیش نیازها می پردازیم [۲۷].

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ که $x \mapsto \|x\|$ یک نرم روی X است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$(1) \quad x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$(2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

اگر $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد، آنگاه $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای برداری نرم دار^۷ نامیده می شود. بعضی از مهم ترین نرم ها عبارتند از

(۱) نرم L^p : برای عدد حقیقی $p \geq 1$ داریم

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

(۲) نرم بینهایت L^∞ یا نرم یکنواخت^۸: این نرم حد نرم L^p وقتی که $p \rightarrow \infty$ است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

تعریف ۲.۲.۱. برای هر $p \in [1, \infty)$ به مجموعه همه توابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ که $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$ گفته می شود. برای هر $f \in L^p[a, b]$ تعریف می کنند

$$\|f(\cdot)\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۳.۲.۱. فضای همه توابع پیوسته مطلق را با $AC[a, b]$ نمایش می دهند. به عبارت دیگر

$$f(x) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \phi(t) dt, \quad \phi(t) \in L[a, b], \quad c = f(a).$$

تعریف ۴.۲.۱. یک فضای برداری نرم دار $(X, \|\cdot\|)$ را فضای کامل یا باناخ می گویند، اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در X همگرا در X باشد.

تعریف ۵.۲.۱. مجموعه همه توابع $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ که $\Omega \in \mathbb{R}^n$ و f دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه k می باشد، را با $C^k(\Omega)$ نمایش می دهند.

^۷Normed vector space

^۸Infinity norm or uniform norm

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد، اگر $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک ضرب داخلی روی X باشد، آنگاه $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. یک فضای ضرب داخلی را یک فضای هیلبرت^۹ می‌نامند اگر و تنها اگر $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد که نرم $\|\cdot\|$ به صورت ضرب داخلی $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ تعریف می‌شود.

فضای سوبولف

در ریاضی، فضای سوبولف^{۱۰} یک فضای برداری از توابع است که با یک نرم که ترکیبی از نرم L^p از توابع و مشتقاتش تا مرتبه مفروض است تعریف می‌شود. مشتقات در یک حالت مناسب از مشتق ضعیف برای اینکه فضا کامل شود تعریف می‌شوند. بطور شهودی، فضای سوبولف یک فضا از توابع و مشتقاتش می‌باشد و برای حوزه‌های کاربردی مثل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که با یک نرم مجهز شده است مورد استفاده قرار می‌گیرد. جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بطور طبیعی در فضای سوبولف یافت خواهد شد و نه در فضای توابع پیوسته که با یک مشتق به فرم کلاسیک تعریف شده است. در قرن بیستم مشخص شد که فضاهای $C^1, C^2, \dots$ فضاهای دقیقی برای مطالعه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل نیستند. از این رو فضای سوبولف به عنوان یک جایگزین مناسب برای این فضاها در نظر گرفته می‌شود.

در حالت یک بعدی (روی $\mathbb{R}$) فضای سوبولف $W^{k,p}$ برای زیر مجموعه‌ای از توابع $f \in L^p[a, b]$ با نرم زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\|f(\cdot)\|_{k,p} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}(\cdot)\|_{L^p} = \sum_{i=0}^k \left(\int_a^b |f^{(i)}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

با در نظر گرفتن نرم $\|\cdot\|_{k,p}$ ، یک فضا با باناخ است. هنگامی که $p = 2$ فضای سوبولف فضای هیلبرت را شکل می‌دهد: $H^k = W^{k,2}$ و در نتیجه ضرب داخلی تعریف می‌شود. برای مطالعه بیشتر در مورد فضای سوبولف و همچنین فضای سوبولف با استفاده از مشتق کسری [۳] را مطالعه کنید.

حاصلضرب کرونکر

در ریاضیات حاصلضرب کرونکر^{۱۱} که با $\otimes$ نمایش داده می‌شود، عملگری بر روی دو ماتریس با اندازه‌های مختلف با خروجی به صورت یک ماتریس بلوکی می‌باشد. این نوع ضرب نباید با ضرب معمولی دو ماتریس اشتباه گرفته شود.

^۹Hilbert space

^{۱۰}Sobolev space

^{۱۱}Kronecker product

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد، آنگاه حاصلضرب کرونگر $A \otimes B$ یک ماتریس بلوکی $mp \times nq$ به صورت زیر است [۲۵]

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

که در آن

$$(A \otimes B)_{p(r-1)+v, q(s-1)+w} = a_{rs}b_{vw}.$$

برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}.$$

۳.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری

در این بخش بطور خلاصه به معرفی بعضی از مهم‌ترین توابع پرکاربرد در حسابان کسری می‌پردازیم. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توانید [۲۷] را مطالعه نمایید.

تابع گاما

تابع گاما مفهوم $n!$ (n فاکتوریل) را برای هر عدد دلخواه n حتی اگر n مختلط باشد را بیان می‌کند. تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \mathcal{R}(\alpha) > 0.$$

که $\mathcal{R}(\alpha)$ قسمت حقیقی α می‌باشد. برخی از خواص تابع گاما عبارتند از

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}, \quad (1)$$

زیرا با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} t^z \Big|_0^b \right) + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z).$$

به روشنی نتیجه می‌گیریم که $\Gamma(n + 1) = n!$

از این رو می‌توان تابع گاما را تعمیم مفهوم فاکتوریل در نظر گرفت.

(۲) با استفاده از خاصیت اول به راحتی می‌توان نشان داد

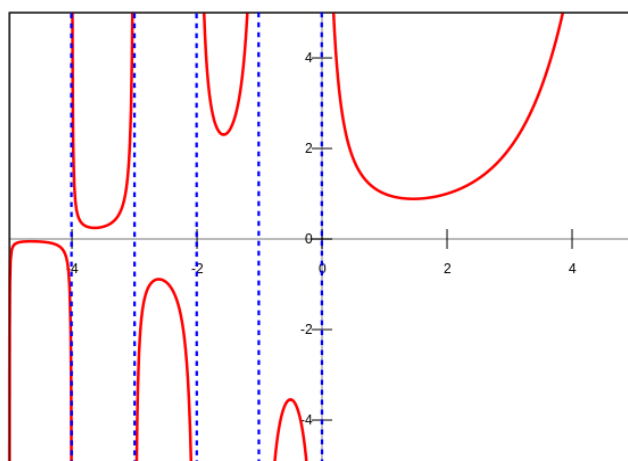
$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + m - 1)},$$

$$-m < \mathcal{R}(\alpha) < -m + 1, m \in \mathbb{Z}^+, \alpha \neq \{0, -1, -2, \dots\},$$

که با استفاده از خاصیت اول به راحتی این نتیجه بدست می‌آید.

(۳) تعریف حدی تابع گاما به صورت زیر است [۲۸]

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)}, \quad \mathcal{R}(\alpha) > 0.$$



شکل ۱.۱: نمودار تابع گاما

در شکل ۱.۱ می‌توانید نمودار تابع گاما را مشاهده نمایید.

تابع بتا

در بعضی موارد بهتر است از تابع بتا به جای ترکیب مشخصی از توابع گاما استفاده کرد. تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (\mathcal{R}(x) > 0, \mathcal{R}(y) > 0).$$

لم ۱.۳.۱. [۲۸] رابطه بین تابع بتا و تابع گاما به صورت زیر است

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

تابع میتاگ لفلر

تابع میتاگ لفلر ^{۱۲} به دلیل اهمیت و کاربرد آن در حسابان کسری، به عنوان ملکه توابع حسابان کسری در نظر گرفته می‌شود. این تابع به دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری به صورت زیر تقسیم می‌شود

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

تابع نمایی e^z که نقش مهمی را در نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح دارد، با استفاده از تابع میتاگ لفلر تک پارامتری به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

تابع $E_{\alpha}(z)$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ همگرا است. تابع میتاگ – لفلر دو پارامتری اهمیت بسیار زیادی در حسابان کسری دارد که برخی از حالت‌های خاص آن در زیر بیان شده است

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad E_{\frac{1}{2}, 1}(-z^2) = \cos(z), \quad E_{1, \frac{1}{2}}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{\frac{1}{2}, 1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

تابع فوق هندسی

یکی دیگر از پرکاربردترین توابع در حسابان کسری تابع فوق هندسی است که با استفاده از سری فوق هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad |x| < 1,$$

که ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+k-1).$$

برای مثال به ازای $p=2$ و $q=1$ تابع فوق هندسی به صورت زیر نوشته می‌شود

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad |x| < 1.$$

این تابع جواب معادله دیفرانسیل فوق هندسی اولر ^{۱۳} زیر است

$$x(1-x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy(x)}{dx} - aby(x) = 0.$$

^{۱۲} Mittag-Leffler function

^{۱۳} Euler's hypergeometric differential equation

بسیاری از توابع معروف می‌توانند بر حسب تابع فوق هندسی بیان شوند. برای مثال

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x {}_2F_1(1, 1; 2; -x), \\ (1-x)^{-a} &= {}_2F_1(a, 1; 1; x), \\ \arcsin(x) &= x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right).\end{aligned}$$

۴.۱ مشتقات و انتگرال مرتبه کسری

تعاریف مختلفی برای مشتق و انتگرال مرتبه کسری موجود است که در اینجا به بعضی از مهم‌ترین تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری می‌پردازیم. تعاریف و قضیه‌های بیشتر را می‌توانید در [۲۷] مشاهده کنید.

مشتق و انتگرال گرانوالد-لتنیکوف

فرمول

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h},$$

برای مشتق می‌تواند به صورت بازگشتی برای محاسبه مشتقات مراتب بالاتر بکارگرفته شود. برای مثال مشتق مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

در حالت کلی برای مشتق مرتبه صحیح و مثبت n فرمول زیر را داریم

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad n \in \mathbb{N}.$$

با حذف این محدودیت که n صحیح و مثبت باشد، به طور منطقی تعریف زیر را خواهیم داشت

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad \alpha > 0, \quad (1.1)$$

که $a \leq t \leq b$ و $[\cdot]$ نشان دهنده جزء صحیح می‌باشد. برای تقریب مشتق کسری (۱.۱) در روش‌های عددی، از این تعریف با مجموع متناهی استفاده می‌شود [۲۶].

می‌توان با جا به جایی α و $-\alpha$ در فرمول (۱.۱)، انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف^{۱۴} از

^{۱۴}Grünwald-Letnikov

مرتبه α را تعریف کرد

$$\begin{aligned} {}_a^GL I_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t - kh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1)} f(t - kh), \alpha > 0. \end{aligned}$$

مشتق و انتگرال ریمن-لیوویل

فرض می‌کنیم $f(\tau)$ پیوسته و در هر بازه متناهی (a, t) انتگرال پذیر باشد. آنگاه طبق فرمول کوشی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$I^n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

که I^n ، n بار انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد. با الهام گرفتن از فرمول کوشی، انتگرال‌های ریمن-لیوویل ${}_a I_t^\alpha f$ و ${}_t I_b^\alpha f$ از مرتبه دلخواه $\alpha \in \mathbb{C}$ که $\mathcal{R}(\alpha) > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \quad (3.1)$$

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \quad (4.1)$$

این انتگرال‌ها به ترتیب انتگرال‌های چپ و راست ریمن-لیوویل نامیده می‌شوند [۲۷]. با استفاده از انتگرال‌های کسری، مشتقات کسری چپ و راست ریمن-لیوویل ${}_a^{RL} D_t^\alpha f$ و ${}_t^{RL} D_b^\alpha f$ از مرتبه α که $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} ({}_a^{RL} D_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n ({}_a I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = \lfloor \mathcal{R}(\alpha) \rfloor + 1, t > a), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} ({}_t^{RL} D_b^\alpha f)(t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n ({}_t I_b^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = \lfloor \mathcal{R}(\alpha) \rfloor + 1, t < b). \end{aligned} \quad (6.1)$$

در حالت خاص، وقتی $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} ({}_a^{RL} D_t^\alpha f)(t) &= ({}_t^{RL} D_b^\alpha f)(t) = f(t) \\ ({}_a^{RL} D_t^n f)(t) &= f^{(n)}(t), \quad ({}_t^{RL} D_b^n f)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

خواص مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل

در اینجا به برخی از مهمترین ویژگی‌های مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل می‌پردازیم. اثبات و جزئیات بیشتر را می‌توان در [۲۷، ۲۸] مشاهده کرد.

(۱) همانند مشتق گیری مرتبه صحیح، عملگر مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل خطی است

$$\begin{aligned} {}^{RL}_a D_t^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) &= c_1 {}^{RL}_a D_t^\alpha f_1 + c_2 {}^{RL}_a D_t^\alpha f_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ {}_a I_t^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) &= c_1 {}_a I_t^\alpha f_1 + c_2 {}_a I_t^\alpha f_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(۲) اگر $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$ که $\mathcal{R}(\beta) > [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ ، آنگاه

$$({}_a I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0), \quad (7.1)$$

$$({}^{RL}_a D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0), \quad (8.1)$$

9

$$\begin{aligned} ({}_t I_b^\alpha (b-t)^{\beta-1}) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0), \\ ({}^{RL}_t D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1}) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0). \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $\beta = 1$ و $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ ، آنگاه در حالت کلی مشتق کسری ریمن-لیوویل از تابع ثابت صفر نیست. برای مثال

$$({}^{RL}_a D_t^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad ({}^{RL}_t D_b^\alpha 1)(t) = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

از طرف دیگر برای $j = 1, 2, \dots, [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ داریم

$$({}^{RL}_a D_t^\alpha (t-a)^{\alpha-j})(t) = 0, \quad ({}^{RL}_t D_b^\alpha (b-t)^{\alpha-j})(t) = 0.$$

(۳) اگر $\mathcal{R}(\alpha) > 0$ و $\mathcal{R}(\beta) > 0$ ، آنگاه

$$({}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta)(t) = ({}_a I_t^{\alpha+\beta})(t), \quad ({}_t I_b^\alpha {}_t I_b^\beta)(t) = ({}_t I_b^{\alpha+\beta})(t).$$

(۴) برای مشتق کسری ریمن-لیوویل رابطه زیر برقرار است

$${}^{RL}_a D_t^m {}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}_a D_t^\alpha {}^{RL}_a D_t^m f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-m+k}}{\Gamma(-\alpha-m+k+1)}.$$

این رابطه بیان می کند که مشتق کسری جابه جایی پذیر است یعنی

$${}^{RL}_a D_t^m {}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}_a D_t^\alpha {}^{RL}_a D_t^m f(t) = {}^{RL}_a D_t^{m+\alpha} f(t), \quad n-1 < \alpha < n,$$

اگر و فقط اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m). \quad (9.1)$$

(۵) اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L^p(a, b)$ که $(1 \leq p \leq \infty)$ است، آنگاه

$${}^{RL}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}^{RL}_b D_b^\alpha ({}_b I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

یعنی عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه است.

(۶) عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست. یعنی

$${}_a I_t^\alpha ({}^{RL}_a D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (t-a)^{\alpha-j},$$

که در آن $f_{n-\alpha}(x) = ({}_a I_t^{n-\alpha} f)(x)$ است و

$${}_b I_b^\alpha ({}^{RL}_b D_b^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n-j} f_{n-\alpha}^{(n-j)}(b)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (b-t)^{\alpha-j},$$

که در آن $f_{n-\alpha}(x) = ({}_b I_b^{n-\alpha} f)(x)$.

مشتق و انتگرال لیوویل

در این قسمت به بررسی مشتق و انتگرال کسری لیوویل^{۱۵} روی $\mathbb{R}^+$ می‌پردازیم. برای جزئیات بیشتر در این مورد می‌توانید به [۲۷] مراجعه کنید. مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل روی بازه متناهی $[a, b]$ تعریف می‌شود. به طور طبیعی آن‌ها قابل تعمیم به بازه $\mathbb{R}^+$ هستند. انتگرال‌های کسری لیوویل متناظر با روابط (۳.۱) و (۴.۱) در صورت زیر تعریف می‌شوند

$${}_0^L I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0), \quad (10.1)$$

$${}_t^L I_\infty^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0). \quad (11.1)$$

مشتقات کسری لیوویل متناظر با روابط (۵.۱) و (۶.۱) به ازای $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} ({}_0^L D_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n ({}_0^L I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0), \\ ({}_t^L D_\infty^\alpha f)(t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n ({}_t^L I_\infty^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^\infty (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0). \end{aligned}$$

^{۱۵}Liouville

اگر $\mathcal{R}(\lambda) > 0$ ، آنگاه

$$({}_t^L I_\infty^\alpha e^{-\lambda t})(t) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0),$$

$$({}_t^L D_\infty^\alpha e^{-\lambda t})(t) = \lambda^\alpha e^{-\lambda t}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0).$$

بطور مشابه می توان مشتق و انتگرال لیوویل را روی محور حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف کرد [۲۷].

مشتق کسری کاپوتو

تعریف مشتق کسری ریمن-لیوویل نقش مهمی را در توسعه نظریه مشتق و انتگرال کسری دارد. اما این روش در حل معادلات دیفرانسیل کسری، شرایط اولیه را به صورت مقادیر اولیه مشتق مرتبه صحیح اعمال نمی کند. برخلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل شرایط اولیه برای مشتق کسری کاپوتو^{۱۶} به صورت مقادیر اولیه مشتق مرتبه صحیح است. لذا برای بیان شرایط اولیه به صورت $y^{(k)}(0) = b_k$ ، $k = 0, 1, \dots, n-1$ از مشتق کسری کاپوتو استفاده می کنیم. تعاریفی که کاپوتو ارائه داد عبارت است از

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = {}_a I_t^{n-\alpha} D^n f(t), \quad (12.1)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = (-1)^n {}_t I_b^{n-\alpha} D^n f(t), \quad (13.1)$$

که $f \in AC^n[a, b]$ و $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ به ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ و ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$ به ترتیب مشتقات چپ و راست کاپوتو می گویند.

استفاده از تعریف کاپوتو به علت سودمندی آن در فرمولبندی و حل مسائل کاربردی است. به همین دلیل در این پایان نامه از تعریف مشتق کسری کاپوتو برای بیان سیستم دینامیکی مسئله کنترلی در فصل های بعد استفاده می کنیم.

خواص مشتق کسری کاپوتو

در این قسمت برخی از مهم ترین ویژگی های مشتق کسری کاپوتو را بیان می کنیم.

(۱) برخلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل مشتق کسری کاپوتو از تابع ثابت، صفر است.

(۲) اگر $\mathcal{R}(\alpha) > 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$ و $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ ، آنگاه

$$({}_a^C D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\beta) > n), \quad (14.1)$$

$$({}_t^C D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\beta) > n). \quad (15.1)$$

^{۱۶}Caputo

(۳) مشتق کسری کاپوتو جابه‌جایی پذیر است، یعنی

$${}_a^C D_t^m {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^m f(t) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t), \quad n-1 < \alpha < n,$$

اگر و فقط اگر

$$f^k(a) = 0, \quad (k = n, n+1, \dots, m).$$

(۴) اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L^p(a, b)$ که $(1 \leq p \leq \infty)$ است، آنگاه

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}_t^C D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

یعنی عملگر مشتق کسری کاپوتو، معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه است.

(۵) عملگر مشتق کسری کاپوتو، معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست، یعنی

$${}_a I_t^\alpha ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad (16.1)$$

$${}_t I_b^\alpha ({}_t^C D_b^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \quad (17.1)$$

(۶) فرض کنید $n-1 < \alpha < n$ ، در این صورت بین مشتق کسری چپ و راست کاپوتو رابطه زیر برقرار است [۲۲]

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \Phi(t) + (-1)^{-\alpha} {}_t^C D_t^\alpha f(t),$$

$$\text{که } \Phi(t) = \frac{(-1)^{-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau.$$

لم ۱.۴.۱. [۲۷] اگر $f \in C^n$ و $n-1 < \alpha < n$ ، آنگاه رابطه زیر بین مشتقات کسری برقرار است

$${}_t^{RL} D_b^\alpha f(t) = {}_t^{GL} D_b^\alpha f(t) = {}_t^C D_b^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}.$$

مشتق و انتگرال کاپوتو-فابریسیو

تعریفی که کاپوتو از مشتق کسری ارائه داد، به صورت زیر است

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1.$$

این تعریف دارای یک نقطه تکیه در $t = \tau$ است. برای رفع این مشکل کاپوتو و فابریسیو^{۱۷} تعریفی جدید به صورت زیر ارائه دادند [۲۹]

^{۱۷}Caputo and Fabrizio

$${}_a^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{(\Upsilon - \alpha)M(\alpha)}{\Upsilon(1 - \alpha)} \int_a^t \exp\left(-\frac{\alpha}{1 - \alpha}(t - \tau)\right) f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1.$$

که $M(\alpha)$ ثابت نرمال شده برحسب α است که در [۲۹] به صورت $M(\alpha) = \frac{\Upsilon}{\Upsilon - \alpha}$ در نظر گرفته شده است. طبق تعریف جدید واضح است که اگر f تابعی ثابت باشد، آنگاه مشابه تعریف مشتق کاپوتو ${}_a^{CF}D_t^\alpha f = 0$. تفاوت اصلی بین مشتق جدید و مشتق کاپوتو آن است که مشتق جدید در نقطه $t = \tau$ دارای نقطه تکینی نیست.

همانطور که می‌دانیم تبدیلات لاپلاس نقش مهمی را در مطالعه معادلات دیفرانسیل ایفا می‌کنند. در مورد تعریف جدید، تبدیلات لاپلاس به صورت زیر است

$$\mathcal{L}[{}_a^{CF}D_t^\alpha f(t)](s) = \frac{(\Upsilon - \alpha)M(\alpha)}{\Upsilon(s + \alpha(1 - s))} (s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)), \quad s > 0.$$

برای مطالعه بیشتر در مورد کاربردها و قضایای مربوط در این زمینه می‌توانید [۲۹] را مشاهده نمایید.

مشتق و انتگرال ژومقی

همانطور که در قسمت‌های قبل بیان شد، مشتق کسری ریمن-لیوویل از عدد ثابت صفر نیست. همچنین بایستی توجه داشته باشیم که مشتق کسری کاپوتو از یک تابع زمانی قابل محاسبه است که مشتقات صحیح آن موجود باشند. برای این منظور ژومقی^{۱۸} [۳۰] تعریف جدیدی از مشتق کسری ارائه داد که مشتق کسری از عدد ثابت صفر شود و لزومی به وجود مشتقات مرتبه صحیح برای مشتق کسری نباشد. انتگرال ژومقی به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^J I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

به ازای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری ژومقی به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D {}_a^J I_t^{\alpha-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau.$$

برای $n - 1 < \alpha < n$ و $n \geq 1$ مشتق کسری ژومقی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D^{(n)} {}_a^J I_t^{\alpha-n} f(t).$$

با توجه به تعریف بالا، مشتق کسری ژومقی از تابع ثابت، صفر است و برای محاسبه مشتق کسری ژومقی به ازای $0 < \alpha < 1$ ، لزومی به وجود مشتق مرتبه اول تابع f نیست. تبدیل لاپلاس از مشتق ژومقی به صورت زیر است

$$\mathcal{L}[{}_a^J D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad 0 < \alpha < 1.$$

^{۱۸}Jumarie

ژومقی همچنین بسط تیلور یک تابع برحسب مشتق کسری جدید خود را به صورت زیر ارائه داد.

لم ۲.۴.۱. [۲۰] فرض کنید تابع پیوسته $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات کسری از مرتبه $k\alpha$ برای مقدار مثبت k و مقدار دلخواه α ، $0 < \alpha < 1$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)} {}^J D_t^{\alpha k} f(x). \quad (18.1)$$

مشتق کسری همدیس پذیر

در این قسمت به بررسی مشتق کسری همدیس پذیر^{۱۹} می پردازیم. این تعریف از مشتق کسری به صورت حدی تعریف می شود و به دلیل سادگی و سازگاری با بعضی مدل ها در فیزیک و مهندسی کاربردهای فراوانی پیدا کرده است.

مشتق کسری چپ همدیس پذیر به صورت زیر تعریف می شود [۹]

$$T_a^{\alpha} f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

اگر حد فوق موجود باشد، آنگاه تابع از چپ مشتق پذیر است.

مشتق کسری راست همدیس پذیر به صورت زیر تعریف می شود

$${}_b T^{\alpha} f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

اگر حد فوق موجود باشد، آنگاه تابع از راست مشتق پذیر است. نکته مهم در مورد مشتق همدیس پذیر آن است که به ازای $\alpha = 1$ با تعریف کلاسیک مشتق صحیح برابر است. با توجه به تعاریف، لازم به ذکر است که این تعریف از مشتق کسری، خاصیت حافظه را دارا نیست زیرا به صورت انتگرال تعریف نمی شود.

برای مشتق همدیس پذیر ویژگی های زیر برقرار است [۹]

$$T_a^{\alpha}(f+g) = T_a^{\alpha}(f) + T_a^{\alpha}(g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$T_a^{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}, \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$T_a^{\alpha}(fg) = fT_a^{\alpha}(g) + gT_a^{\alpha}(f) \quad (3)$$

$$T_a^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_a^{\alpha}(g) - gT_a^{\alpha}(f)}{g^2} \quad (4)$$

$$T_a^{\alpha}(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \quad (5)$$

نکته مهم دیگر در مورد مشتق همدیس پذیر آن است که برخلاف مشتق های کسری دیگر، قاعده زنجیره ای برای این مشتق برقرار است.

^{۱۹}Conformable fractional derivative

۵.۱ معادلات دیفرانسیل کسری

مسائلی که دینامیک آنها با معادلات دیفرانسیل کسری همراه می‌شوند در بسیاری از مسائل علوم، مهندسی، اقتصاد و زمینه‌های دیگر کاربرد دارند [۱۴، ۱۵]. هنگامی که دستگاه‌های دینامیکی پیچیده هستند و یا ذرات دینامیکی در مقیاس ذره بینی می‌باشند آنگاه جنبش و حرکت دیگر از قوانین معمولی مشتقات مرتبه صحیح پیروی نمی‌کنند. در این گونه موارد حرکت‌ها از قوانین مرتبه کسری پیروی می‌کنند، به این معنی که رفتارشان با معادلات دیفرانسیل کسری همراه می‌شوند.

در دهه‌های اخیر بدلیل کاربردهای فراوان معادلات دیفرانسیل کسری در زمینه‌های مختلف علمی تلاش‌های فراوانی در زمینه حل معادلات دیفرانسیل کسری انجام شده است. معادلات دیفرانسیل کسری با توجه به تعاریف مختلف از مشتق کسری تعریف می‌شوند که مهم‌ترین آنها مشتق کسری ریمن-لیوویل و کاپو هستند. معادله دیفرانسیل با مشتق کسری ریمن-لیوویل در حالت خاص به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases} {}^{RL}D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & (\mathcal{R}(\alpha) > 0), t > a, \\ [{}^{RL}D_t^{\alpha-k} y(t)]_{t \rightarrow a} = b_k, & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (19.1)$$

که برای $\alpha \notin \mathbb{N}$ ، $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ و اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ آنگاه $n = \alpha$. این معادله دیفرانسیل قابل تبدیل به معادله انتگرال ولترا نوع دوم^{۲۰} به صورت زیر است [۲۷]

$$y(t) = \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (t-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx, \quad (t > a). \quad (20.1)$$

همچنین یک معادله دیفرانسیل از نوع کاپوتو در حالت خاص به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & (\mathcal{R}(\alpha) > 0), t > a, \\ y^{(k)}(a) = b_k, & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (21.1)$$

که برای $\alpha \notin \mathbb{N}$ ، $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ و اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ آنگاه $n = \alpha$. این معادله دیفرانسیل قابل تبدیل به معادله انتگرال ولترا به صورت زیر است [۲۷]

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (t-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx, \quad (t > a). \quad (22.1)$$

برای مطالعه قضایای وجود و یکتایی و همچنین روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری [۱۴، ۱۵] را مطالعه نمایید.

^{۲۰}Voltra integral equation of second kind

۶.۱ معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری

مدل سازی ریاضی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تاخیری^{۲۱} بطور گسترده برای آنالیز و پیش بینی در رشته های مختلف، برای مثال دینامیک جمعیت^{۲۲}، فیزیولوژی^{۲۳}، شبکه های عصبی^{۲۴} و غیره مورد استفاده قرار گرفته است [۱۶]. تاخیر زمانی در این مدل ها می تواند به مدت زمان فرایندهای پنهان خاص مانند مراحل زندگی، زمان بین عفونت یک سلول و تولید ویروس های جدید، طول مدت عفونت دوره، دوره ایمنی و غیره در نظر گرفته شود.

در معادلات دیفرانسیل معمولی، متغیر حالت و مشتق آن، در یک زمان سنجیده می شوند. در حالی که در معادلات دیفرانسیل تاخیری، بررسی سیستم در زمان مشخص، وابسته به زمان گذشته می باشد. وجود تاخیر در معادلات دیفرانسیل باعث افزایش پیچیدگی سیستم می شود و پایداری و کنترل این سیستم ها از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

با توجه به اهمیت حسابان کسری که در قسمت های قبل بیان شد، در سال های اخیر معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است و مقالات فراوانی در زمینه مدل سازی پدیده های طبیعی با استفاده از مفاهیم حسابان کسری به چاپ رسیده است [۱۳].

معادله دیفرانسیل کسری تاخیری در حالت کاپوتو به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t > 0, n-1 < \alpha \leq n, \\ x(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (23.1)$$

که τ تاخیر، $\phi(t)$ مقدار اولیه و n عدد طبیعی می باشد. از آنجایی که در این پایان نامه به بررسی مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری می پردازیم، خواننده می تواند برای توضیحات بیشتر در این زمینه [۱۷] را مطالعه نماید.

۷.۱ برخی از کاربردهای حسابان کسری

از زمان تولد حسابان کسری تاکنون تلاش های بسیاری برای معرفی تعاریف جدید از مشتق کسری برای تفسیر و مدلسازی بهتر پدیده های طبیعی در رشته های مختلف علوم انجام شده است. همانطور که در قسمت های قبل بیان شد، تعمیم مفهوم مشتق به مرتبه دلخواه با استفاده از مفهوم انتگرال انجام شد و این ویژگی باعث غیرموضعی شدن تعریف مشتق کسری برخلاف مشتق مرتبه صحیح شده است. این بدان معناست که برای محاسبه مشتق کسری

^{۲۱} Delay differential equations

^{۲۲} Population dynamic

^{۲۳} Physiology

^{۲۴} Neural network

در یک نقطه نیاز به محاسبه مقادیر تابع از ابتدای بازه تعریف مشتق کسری تا نقطه مورد می‌باشد. با توجه به تعاریف مشتق و انتگرال کسری، یافتن تفسیر فیزیکی برای این مشتقات تا مدت‌ها ناشناخته باقی مانده بود. در سال ۲۰۰۲، پادلوبنی^{۲۵} یک تفسیر فیزیکی برای مشتق و انتگرال کسری ارائه داد [۲۰]. اگرچه قدمت مفاهیم نظری در حسابان کسری طولانی است اما کاربرد این مفاهیم در علوم و مهندسی به چند دهه پیش باز می‌گردد.

پیدایش کاربردهای حسابان کسری در زمینه‌های مختلف، بیانگر این موضوع است که مدلسازی اکثر پدیده‌های طبیعی بر اساس سیستم‌های مرتبه کسری بیان دقیق‌تری برای توصیف این پدیده‌هاست [۲۷]. پدیده‌های فیزیکی حافظه دار و دارای خاصیت وراثت از جمله مواردی هستند که با استفاده از مفاهیم حسابان کسری توصیف می‌شوند. از جمله کاربردهای حسابان کسری که تاکنون مطرح شده است می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

(۱) مدلی برای بیان رابطه بین میزان کشش و فشار در مواد ویسکو الاستیک^{۲۶} (مواد ویسکو الاستیک رفتاری میان دو خاصیت کلی ویسکوز بودن و کشسان بودن از خود نشان می‌دهند و این خاصیت به هنگام تحمیل نیروی خارجی و اعمال تغییر شکل بر آن پدیدار می‌شود) [۱۰].

(۲) مدل بیماری HIV با استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری و کنترل بهینه آن [۱۱].

(۳) پردازش تصاویر با استفاده از مفاهیم حسابان کسری [۱۲].

(۴) مدل معادلات دیفرانسیل تاخیری برای بیماری HIV و تحلیل عددی آن [۱۳].

موارد بالا تنها بخشی از کاربردهای فراوان حسابان کسری در علوم مختلف، پزشکی و مهندسی هستند. برای مطالعه بیشتر در مورد کاربردهای دیگر حسابان کسری می‌توانید [۱۸] را مطالعه نمایید.

۸.۱ چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های کلاسیک همچون لژاندر^{۲۷}، چبیشف^{۲۸}، لاگرانژ^{۲۹} و غیره، نقش بسیار مهمی در حل مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل و کنترل بهینه کلاسیک ایفا کرده‌اند. این چندجمله‌ای‌ها دارای توان‌های صحیح هستند. مشتق کسری از این چندجمله‌ای‌ها، توابعی با توان‌های کسری هستند. این ویژگی باعث می‌شود که با افزایش تعداد چندجمله‌ای‌ها،

^{۲۵}Podlubny

^{۲۶}Viscoelastic Materials

^{۲۷}Legendre

^{۲۸}Chebyshev

^{۲۹}Lagrange

خطا با نرخ بسیار کمی کاهش پیدا کند. یکی از روش‌های موثر برای حل مسائل مربوط به حسابان کسری استفاده از توابع پایه به صورت $\Phi_n = \sum_{i=0}^n c_i x^{i\alpha}$ است. مشتق کسری از این چندجمله‌ای‌ها تابعی با توان‌های کسری هستند که باعث می‌شود نرخ همگرایی این چندجمله‌ای‌ها نسبت به توابع پایه کلاسیک سریع تر باشد. در ادامه به معرفی برخی از مهم‌ترین توابع پایه از مرتبه کسری می‌پردازیم.

۱.۸.۱ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری

فرض کنید $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ نقاط درونیابی مفروض در بازه $[0, 1]$ باشند. در این صورت j امین چندجمله‌ای لاگرانژ $G_j(t)$ از مرتبه $N-1$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۳]

$$G_j(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \tau^\alpha$ ، j امین چندجمله‌ای لاگرانژ کسری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G_j^\alpha(\tau) = \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \frac{\tau^\alpha - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

که در آن $t_i = \tau_i^\alpha$. مشابه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، ویژگی زیر برای چندجمله‌ای لاگرانژ کسری برقرار است

$$G_j^\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = \tau_j, \\ 0, & \tau \neq \tau_j. \end{cases} \quad (24.1)$$

زائر نوری^۳ و همکارانش [۳۴] روشی دیگر برای محاسبه این چندجمله‌ای‌ها ارائه داده‌اند. در این مقاله چندجمله‌ای‌های لاگرانژ کسری از درجه $N + \alpha - 1$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$h_j^\alpha(t) = \left(\frac{t - t_1}{t_j - t_1} \right)^\alpha \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{t - t_k}{t_j - t_k}, \quad 2 \leq j \leq N.$$

برای مطالعه بیشتر در مورد این چندجمله‌ای‌ها، [۳۳، ۳۴] را مطالعه نمایید.

۲.۸.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های متعامد در بازه $[-1, 1]$ می‌باشند که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند [۵]

$$L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1} x L_i(x) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

که در آن $L_0(x) = 1$ و $L_1(x) = x$. با استفاده از تغییر متغیر $x = 2t - 1$ چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_m(t)$ از مرتبه m روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$P_{m+1}(t) = \frac{2m+1}{m+1}(2t-1)P_m(t) - \frac{m}{m+1}P_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (25.1)$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = 2t - 1.$$

برای چندجمله‌ای‌های $P_m(t)$ داریم

$$\int_0^1 P_m(t)P_n(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (26.1)$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_n(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} t^k. \quad (27.1)$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر با دستور $P(n, x)$ و فراخوانی کتابخانه *orthopoly* در نرم افزار میپل قابل استفاده هستند. همچنین این چندجمله‌ای‌ها با استفاده از فرمول رودریگز^{۳۱} روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر قابل نمایش هستند

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((2t-1)^n). \quad (28.1)$$

در [۶] با جایگزینی مشتق کسری با مشتق معمولی در (۲۸.۱)، تعمیمی از چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه کسری بدست آمده است. پیچیدگی این چندجمله‌ای‌ها امکان استفاده از آن‌ها را در مسائل کاربردی دشوار ساخته است. از این رو در [۷] با استفاده از تغییر متغیر $t = x^\alpha$ در فرم بازگشتی (۲۵.۱) چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری انتقال یافته در بازه $[0, 1]$ را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری مورد مطالعه قرار داده‌اند. اگر FL_m^α چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری از درجه m باشند، آنگاه

$$FL_{m+1}^\alpha(x) = \frac{2m+1}{m+1}(2x^\alpha - 1)FL_m^\alpha(x) - \frac{m}{m+1}FL_{m-1}^\alpha(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (29.1)$$

$$FL_0^\alpha(x) = 1, \quad FL_1^\alpha(x) = 2x^\alpha - 1.$$

فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$FL_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} x^{k\alpha}. \quad (30.1)$$

این چندجمله‌ای‌ها با توجه به تابع وزن $w(x) = x^{\alpha-1}$ در بازه $[0, 1]$ متعامد هستند

$$\int_0^1 FL_m^\alpha(x)FL_n^\alpha(x)w(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{(2n+1)\alpha} & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (31.1)$$

^{۳۱}Rodrigues formula

تابع دلخواه f متعلق به بازه $[0, 1]$ قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری به صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n FL_n^{\alpha}(t), \quad c_n = \alpha(\gamma n + 1) \int_0^1 f(t) FL_n^{\alpha}(t) w(t) dt.$$

۳.۸.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند و از فرمول بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند [۸]

$$T_{i+1}(x) = \gamma x T_i(x) - T_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

که در آن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$. این چندجمله‌ای‌ها با دستور $T(i, x)$ در نرم افزار میپل فراخوانی می‌شوند. رابطه تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{\gamma} & m = n \neq 0, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (32.1)$$

با استفاده از تغییر متغیر $x = \frac{\gamma t}{L} - 1$ چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته $T_m^*(t)$ از مرتبه m در بازه $[0, L]$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$T_m^*(t) = T_m\left(\frac{\gamma t}{L} - 1\right),$$

که $T_0(t) = 1$ و $T_1(t) = \frac{\gamma t}{L} - 1$. فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته $T_m^*(t)$ از مرتبه m در بازه $[0, L]$ به صورت زیر است

$$T_m^*(t) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)! \gamma^k}{(n-k)! (\gamma k)! L^k} t^k.$$

مشابه چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری می‌توان با تغییر متغیر $t = x^{\alpha}$ چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری را به صورت زیر تعریف کرد [۲۱]

$$FT_n^{\alpha}(x) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)! \gamma^k}{(n-k)! (\gamma k)! L^k} x^{k\alpha}.$$

خاصیت تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$\int_0^L FT_m^{\alpha}(x) FT_n^{\alpha}(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{Lx^{\alpha} - x^{\gamma\alpha}}} dx = \delta_{mn} h_n,$$

که در آن $h_n = \frac{b_n}{\Gamma_\alpha} \pi$ با $b_\circ = 2$ و $b_n = 1, n \geq 1$. تابع دلخواه f متعلق به بازه $(\circ, L]$ قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری به صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n FT_n^\alpha(t),$$

که ضرایب c_n به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$c_n = \frac{1}{h_n} \int_{\circ}^L f(t) FT_n^\alpha(t) w(t) dt, \quad n = \circ, 1, 2, \dots. \quad (33.1)$$

۴.۸.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های برنشتاین^{۳۲} به دلیل سادگی در محاسبه ضرایب، کاربردهای فراوانی در حل مسائل عددی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. این چندجمله‌ای‌ها در بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۲]

$$B_{i,m}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \binom{m}{i} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{t-b}{b-a}\right)^{m-i}, \quad i = \circ, 1, 2, \dots, m.$$

بعلاوه روی بازه $[\circ, 1]$ داریم

$$B_{i,m}(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i}, \quad i = \circ, 1, 2, \dots, m.$$

فرض کنید m و n اعداد صحیح و مثبتی باشند و $i, j = \circ, 1, \dots, m$. برای چندجمله‌ای‌های برنشتاین خواص زیر برقرار است

(۱) با فرض $B_{\circ,\circ} = \circ$ و $B_{-1,m} = \circ$ این چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$B_{i,m+1}(t) = t B_{i-1,m}(t) + (1-t) B_{i,m}(t).$$

$$\sum_{k=\circ}^m B_{i,m}(t) = 1 \quad (2)$$

$$B_{i,m}(t) B_{j,n}(t) = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j,m+n}(t) \quad (3)$$

$$\int_{\circ}^1 B_{i,m}(t) dt = \frac{1}{m+1} \quad (4)$$

با تغییر متغیر $t = x^\alpha$ چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری در بازه $[\circ, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۳]

$$FB_{i,m}^\alpha(x) = \binom{m}{i} x^{i\alpha} (x^\alpha - 1)^{m-i}, \quad i = \circ, 1, 2, \dots, m.$$

^{۳۲} Bernstein polynomials

تابع دلخواه $f(x)$ متعلق به بازه $[0, 1]$ قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری به صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n FB_{i,m}^{\alpha}(x) = C^T \Phi_m(x),$$

که در آن $\Phi_m(t) = [FB_{0,m}^{\alpha}(x), FB_{1,m}^{\alpha}(x), \dots, FB_{m,m}^{\alpha}(x)]^T$ و ضرایب $C = [c_0, c_1, \dots, c_m]^T$ از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$C = Q^{-1} \langle f, \Phi_m(x) \rangle,$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} \langle f, \Phi_m(x) \rangle &= \int_0^1 f(x) \Phi_m(x) dx \\ &= [\langle f(x), FB_{0,m}^{\alpha}(x) \rangle, \langle f(x), FB_{1,m}^{\alpha}(x) \rangle, \dots, \langle f(x), FB_{m,m}^{\alpha}(x) \rangle]^T, \end{aligned}$$

و مولفه‌های ماتریس $Q = (Q_{i+1,j+1})_{i,j=0}^m$ از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$Q_{i+1,j+1} = \alpha \int_0^1 FB_{i,m}^{\alpha}(x) FB_{j,m}^{\alpha}(x) x^{\alpha-1} dx.$$

لازم به ذکر است که برای حل عددی با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری بردار ضرایب C مجهول در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از روش‌های هم محلی یا روش‌های عددی دیگر این ضرایب محاسبه می‌شوند.

۵.۸.۱ چندجمله‌ای‌های لاگر کسری

هنگامی که بازه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد، چندجمله‌ای‌های لاگر^{۳۳} بهترین گزینه برای حل عددی با استفاده از توابع پایه هستند. این چندجمله‌ای‌ها همچنین برای حل انتگرال‌هایی به فرم زیر با استفاده از کوادراتورهای گوسی^{۳۴} مورد استفاده قرار می‌گیرند

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-t} dt.$$

این چندجمله‌ای‌ها معمولاً با $L_0, L_1, \dots$ نمایش داده می‌شوند که با استفاده از فرمول رودریگز به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right)^n t^n.$$

و در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$(n+1)L_{n+1}(t) = (2n+1-t)L_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

^{۳۳} Laguerre polynomials

^{۳۴} Gaussian quadrature

که $L_0(t) = 1$ و $L_0(t) = 1 - t$. فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} t^k. \quad (34.1)$$

خاصیت تعامد با توجه به تابع وزن $w(x) = e^{-x}$ برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$\int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm}.$$

که δ_{nm} دلتای کرونکر است. در [۲۴] چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه کسری از مرتبه α به صورت زیر تعریف شده است

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \frac{t^{-n} e^t}{n!} {}^C D^\alpha (e^{-t} t^{\alpha+n}), \quad n > -1.$$

این چندجمله‌ای‌ها به عنوان تابعی از α پیوسته هستند و داریم

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^+} \mathcal{L}_\alpha(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n^-} \mathcal{L}_\alpha(t) = L_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

قضیه ۱.۸.۱. [۲۴] فرض کنید $\alpha \in (m-1, m)$ و $n > -1$. فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها با استفاده از تابع فوق هندسی به صورت زیر است

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-x)^{m-k} \Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+m+n-k)} {}_1F_1(m-\alpha; 1+m+n-k; x).$$

چندجمله‌ای‌های لاگر کسری با توجه به تابع وزن $e^{-\frac{x}{\gamma}} x^{\frac{n}{\gamma}}$ در بازه $L_\gamma(0, \infty)$ متعامد و در حقیقت جواب معادله دیفرانسیل زیر هستند

$$x \frac{d^\gamma u(x)}{dx^\gamma} + (1+n-x) \frac{du(x)}{dx} + \alpha u(x) = 0.$$

۶.۸.۱ چندجمله‌ای‌های مونتنس-لژاندر

در این بخش چندجمله‌ای‌های مونتنس^{۳۵} را در نظر می‌گیریم. همه مفاهیمی که در این بخش بیان می‌شوند را می‌توانید با جزئیات بیشتر در [۱] مطالعه کنید. فرض کنید $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \infty$. قضیه کلاسیک مونتنس-سزاس^{۳۶} بیان می‌کند که چندجمله‌ای‌های مونتنس به فرم $\sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}$ در $L^2[0, 1]$ چگال هستند اگر

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k} = \infty. \quad (35.1)$$

اگر تابع ثابت ۱ متعلق به سیستم باشد یا به عبارت دیگر $\lambda_0 = 0$ ، آنگاه نتایج مشابهی برای $C[0, 1]$ با نرم یکنواخت برقرار است.

^{۳۵}Müntz

^{۳۶}Müntz-Szász

فرض کنید اعداد مختلط در مجموعه $\Lambda_n = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ در رابطه $\mathcal{R}(\lambda_k) > -\frac{1}{p}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ صدق کند. آنگاه چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر^{۳۷} در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]

$$M_n(x) = M_n(x; \Lambda_n) = \sum_{k=0}^n C_{n,k} x^{\lambda_k}, \quad C_{n,k} = \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\lambda_k + \bar{\lambda}_v + 1)}{\prod_{v=0, v \neq k}^{n-1} (\lambda_k - \bar{\lambda}_v)},$$

که با توجه به ضرب داخلی در بازه $[0, 1]$ متعامد هستند، یعنی

$$(M_n, M_m) = \int_0^1 M_n(x) M_m(x) dx = \frac{\delta_{nm}}{\lambda_n + \bar{\lambda}_n + 1}, \quad (36.1)$$

که δ_{nm} دلتای کرونکر^{۳۸} و $(., .)$ ضرب داخلی را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن $\lambda_k = \alpha k$ ، آنگاه چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند [۴]

$$L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=0}^n C_{n,k} t^{k\alpha}, \quad C_{n,k} = \frac{(-1)^{n+k}}{\alpha^n k! (n-k)!} \prod_{v=0}^{n-1} ((k+v)\alpha + 1). \quad (37.1)$$

با توجه به ویژگی تعامد (۳۶.۱) داریم

$$(L_{n,\alpha}, L_{m,\alpha}) = \int_0^1 L_{n,\alpha}(t) L_{m,\alpha}(t) dt = \frac{\delta_{nm}}{\alpha(n\alpha + 1)}.$$

هر تابع دلخواه $f \in L^2[0, 1]$ توسط چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به صورت زیر قابل تقریب است

$$f(t) \simeq \sum_{n=0}^N c_n L_{n,\alpha}(t), \quad c_n = (\alpha(n\alpha + 1)) \int_0^1 f(t) L_{n,\alpha}(t) dt.$$

اکنون مهم ترین ویژگی چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر را بیان می‌کنیم. مشتق کسری از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به صورت زیر حاصل می‌شود

$${}^C D_t^\alpha L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^n D_{n,k} t^{(k-1)\alpha}, \quad D_{n,k} = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1 - \alpha)} C_{n,k}.$$

توجه داریم که به ازای $\alpha = 1$ چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر همان چندجمله‌ای‌های لژاندر هستند. در ادامه به ارتباط مهم بین چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و مونتس-لژاندر می‌پردازیم.

^{۳۷}Müntz-Legendre

^{۳۸}Kronecker delta

۷.۸.۱ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی^{۳۹} در بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند و توسط رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند

$$J_i^{(a,b)}(t) = \frac{(a+b+2i-1)^2 - b^2 + t(a+b+2i)(a+b+2i-2)}{2i(a+b+i)(a+b+2i-2)} J_{i-1}^{(a,b)}(t), \quad (38.1)$$

$$- \frac{(a+i-1)(b+i-1)(a+b+2i)}{i(a+b+i)(a+b+2i-2)} J_{i-2}^{(a,b)}(t), \quad i = 2, 3, \dots,$$

که در آن

$$J_{\circ}^{(a,b)}(t) = 1 \quad \text{و} \quad J_1^{(a,b)}(t) = \frac{a+b+2}{2}t + \frac{a-b}{2}.$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = 2\frac{x}{T} - 1$ چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی در بازه $[\circ, T]$ حاصل می‌شوند. فرض کنید چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی $J_{T,i}^{(a,b)}(2\frac{x}{T} - 1)$ با $J_{T,i}^{(a,b)}(x)$ نمایش داده شوند، آنگاه

$$J_{T,i}^{(a,b)}(x) = \frac{(a+b+2i-1)^2 - b^2 + (2x-1)(a+b+2i)(a+b+2i-2)}{2i(a+b+i)(a+b+2i-2)} J_{T,i-1}^{(a,b)}(x),$$

$$- \frac{(a+i-1)(b+i-1)(a+b+2i)}{i(a+b+i)(a+b+2i-2)} J_{T,i-2}^{(a,b)}(x), \quad i = 2, 3, \dots,$$

که در آن

$$J_{T,\circ}^{(a,b)}(x) = 1, \quad J_{T,1}^{(a,b)}(x) = \frac{a+b+2}{2}(2\frac{x}{T} - 1) + \frac{a-b}{2}.$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های انتقال یافته $J_{T,i}^{(a,b)}(x)$ از درجه i توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$J_{T,i}^{(a,b)}(x) = \sum_{k=\circ}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+b+1)\Gamma(i+k+a+b+1)}{\Gamma(k+b+1+1)\Gamma(i+a+b+1)(i-k)!k!} \left(\frac{x}{T}\right)^k. \quad (39.1)$$

قضیه ۲.۸.۱. فرض کنید $\alpha > \circ$ عددی حقیقی و $J_{T,n}^{(\circ, -1+1/\alpha)}(t)$ چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی با پارامترهای $a = \circ, b = -1 + \frac{1}{\alpha}$ باشند. برای چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر رابطه زیر برقرار است

$$L_{n,\alpha}(t) = J_{T,n}^{(\circ, -1+1/\alpha)}\left(2\left(\frac{t}{T}\right)^\alpha - 1\right). \quad (40.1)$$

بنابراین چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر می‌توانند توسط رابطه بازگشتی (۳۸.۱) محاسبه شوند. فرم دیگری از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به صورت زیر است

$$L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=\circ}^n (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{\alpha})\Gamma(n+k+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(k+\frac{1}{\alpha})\Gamma(n+\frac{1}{\alpha})(n-k)!k!} \left(\frac{t}{T}\right)^{k\alpha}. \quad (41.1)$$

^{۳۹}Jacobi polynomials

۹.۱ مروری بر روش‌های طیفی و شبه طیفی

روش‌های طیفی^{۴۰} و شبه طیفی^{۴۱} رده‌ای از روش‌های عددی هستند که در ابتدا برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مورد استفاده قرار گرفتند. ریشه روش‌های طیفی و شبه طیفی از تقریب یک تابع با استفاده از توابع فوریه^{۴۲} سینوس و کسینوس گرفته شده است. بطور صریح می‌توان گفت روش‌های طیفی، تقریب یک تابع با استفاده از توابع پایه هستند و روش‌های شبه طیفی به تقسیم بازه به نقاط هم محلی^{۴۳} گفته می‌شود. در واقع هر جا از توابع پایه و هم محلی برای حل مسائل استفاده شود از روش‌های شبه طیفی و یا طیفی نام برده می‌شود [۳۱].

فحرو^{۴۴} و همکارانش از روش‌های شبه طیفی برای حل مسائل کنترل بهینه در مقالات متعددی استفاده کرده‌اند [۳۵، ۳۶]. در این مقالات، توابع پایه را لاگرانژ و نقاط هم محلی را ریشه‌های لژاندر در نظر گرفته‌اند. توابع پایه دیگر را نیز می‌توان برای حل عددی در نظر گرفت. برای مثال در مقاله [۳۷] توابع پایه را لژاندر در نظر گرفته‌اند. در این پایان نامه با توجه به مطالب ذکر شده در بخش‌های قبل، توابع پایه را چندجمله‌ای‌های مونتمس-لژاندر در نظر می‌گیریم. با توجه به بازه‌ای که مسئله روی آن تعریف می‌شود، نام‌های مختلفی برای روش‌های طیفی در نظر گرفته می‌شود [۳۸]. برای مثال اگر نقاط ابتدا و انتها مورد نیاز نباشند از روش لژاندر-گوس^{۴۵} استفاده می‌شود. فرض کنید N تعداد نقاط هم محلی باشد، در اینصورت نقاط لژاندر-گوس، ریشه‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر L_N در بازه $(-1, 1)$ هستند.

اگر نقاط مرزی هر دو مورد نیاز باشند از روش لژاندر-گوس-رادو^{۴۶} که در حقیقت ریشه‌های $(x^2 - 1)L'_{N-1}$ هستند، استفاده می‌کنیم. اگر تنها نقطه ابتدا بازه مورد نیاز باشد از روش لژاندر-گوس-لوباتو^{۴۷} که ریشه‌های $L_{N-1} + L_N$ هستند استفاده می‌کنیم.

اگر مسئله هموار باشد این روش‌ها جزو بهترین روش‌های عددی هستند. اگر مسئله هموار نباشد، برای مثال در مسائل کنترل زمانی، اصلاحا پدیده گیبس اتفاق می‌افتد و این روش‌ها انتخاب خوبی برای حل این مسائل نیستند. در این گونه موارد از روش‌های شبه طیفی انطباقی^{۴۸} استفاده می‌شود که در آن بازه مسئله به چند زیر بازه تقسیم می‌شود [۳۹]. اخیراً هگر^{۴۹} و همکارانش از نوعی روش شبه طیفی استفاده کرده‌اند که در حقیقت ترکیبی از

^{۴۰} Spectral method

^{۴۱} Pseudospectral methods

^{۴۲} Fourier function

^{۴۳} Collocation points

^{۴۴} Fahroo

^{۴۵} Legendre-Gauss

^{۴۶} Legendre-Gauss-Rado

^{۴۷} Legendre-Gauss-Lobatto

^{۴۸} Adaptive pseudospectral methods

^{۴۹} Hager

روش‌های شبه طیفی انطباقی و روش‌های عددی جدید برای افزایش سرعت محاسبات می‌باشند [۴۰]. نرم افزار میپل اکثر این توابع پایه را در کتابخانه خود دارا است و یکی از نرم افزارهای بسیار مهم برای حل عددی مسائل با استفاده از روش‌های شبه طیفی است. برای مطالعه دقیق‌تر در مورد روش‌های شبه طیفی می‌توان مرجع [۴۱] که یکی از کتاب‌های پر استناد در این زمینه است را مطالعه کرد.

فصل ۲

حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری

۱.۲ مقدمه

مسائل کنترل بهینه با مشتقات مرتبه صحیح، بخش وسیع و کاملی از تحقیقات در زمینه کنترل و کنترل بهینه را شامل می‌شوند. مسائل کنترل بهینه کسری در واقع همان مسائل کنترل بهینه هستند که دستگاه‌های دینامیکی همراه کننده آن‌ها، دستگاه‌های دینامیکی کسری است. یک مسئله کنترل بهینه کسری با توجه به تعاریف مختلفی که از مشتقات کسری موجود است تعریف می‌شود، که مهم‌ترین آن‌ها مشتقات کسری ریمن-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو هستند. در سال‌های اخیر، به دلیل ضرورتی که در فصل قبل بیان شد، بحث کنترل بهینه کسری متولد و رشد کرده است و مقالات بسیار زیادی در زمینه‌های مهندسی، علوم، اقتصاد و دیگر زمینه‌ها به چاپ رسیده است.

تا کنون روشی تحلیلی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه نشده است، از این رو روش‌های عددی مناسب برای مسائل کنترل بهینه کسری از اهمیت خاصی برخوردار هستند. برای مثال در [۵۰] از روش چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل مسائل کنترل بهینه کسری استفاده شده است. در [۵۱] روشی تقریبی برای حل مسائل کنترل بهینه زمانی که دستگاه دینامیکی همراه کننده آن کسری است ارائه شده است. همچنین شرایط لازم بهینگی نیز برای

مسائل کنترل بهینه کسری توسعه یافته است. برای مثال در [۵۲، ۵۳] شرایط لازم بهینگی در حالت مشتق کسری ریمن-لیوویل و در [۵۴] در حالت کاپوتو به دست آمده است. در [۵۵] نویسنده از روش گسسته سازی برای حل شرایط لازم بهینگی استفاده کرده است. در این فصل بعد از مرور مختصری از پایداری و کنترل پذیری سیستم‌های مرتبه کسری به معرفی روش موجک‌های هار برای حل مسائل کنترل بهینه کسری می‌پردازیم.

۲.۲ پایداری و کنترل پذیری سیستم‌های مرتبه کسری

در این قسمت مفاهیم مهم پایداری و کنترل پذیری سیستم‌های مرتبه کسری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شرایط مختلفی برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری با توجه به مشتقات کسری ارائه شده است. از آنجایی که در این فصل به دنبال بدست آوردن کنترل بهینه برای مسائل کنترل بهینه کسری هستیم، به توضیح مختصری از این مفاهیم بسنده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. نقطه x_e را نقطه تعادل سیستم $\dot{x}(t) = f(x(t))$ می‌نامند، هرگاه

$$f(x_e) = 0.$$

تعریف ۲.۲.۲. نقطه تعادل x_e را پایدار به مفهوم لیاپانف گویند، اگر برای هر t_0 و هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد، بطوریکه اگر $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ برای همه $t \geq t_0$ ، آنگاه داشته باشیم $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$.

یعنی می‌توان با انتخاب حالت اولیه به اندازه کافی نزدیک نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری کرد. حالت قوی‌تری از پایداری وقتی است که پاسخ علاوه بر نزدیک ماندن به حالت تعادل، به سمت آن نیز میل کند. در این حالت می‌گوییم سیستم پایدار مجانبی است.

تعریف ۳.۲.۲. نقطه تعادل پایدار مجانبی است اگر

(الف) پایدار به مفهوم لیاپانف باشد.

(ب) برای هر t_0 یک δ وجود داشته باشد، بطوریکه اگر $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ آنگاه هنگامی که $t \rightarrow \infty$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0.$$

بنابراین پایداری مجانبی علاوه بر پایداری به مفهوم لیاپانف، همگرایی سیستم به نقطه تعادل را تضمین می‌کند.

سیستم‌های مرتبه کسری به دلیل وجود حافظه از سیستم‌های مرتبه صحیح پایدارتر هستند [۹۲]. بطور کلی در مقایسه با سیستم‌های کلاسیک، سیستم‌های مرتبه کسری شرایط بهتری را برای پایداری و طراحی سیستم فراهم می‌کنند. به همین دلیل مطالعه پایداری سیستم‌های مرتبه کسری یکی از زمینه‌های جذاب و مورد توجه در رشته کنترل محسوب می‌شود.

بطور کلی دستگاه

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

بطور مجانبی پایدار است، هرگاه [۹۸]

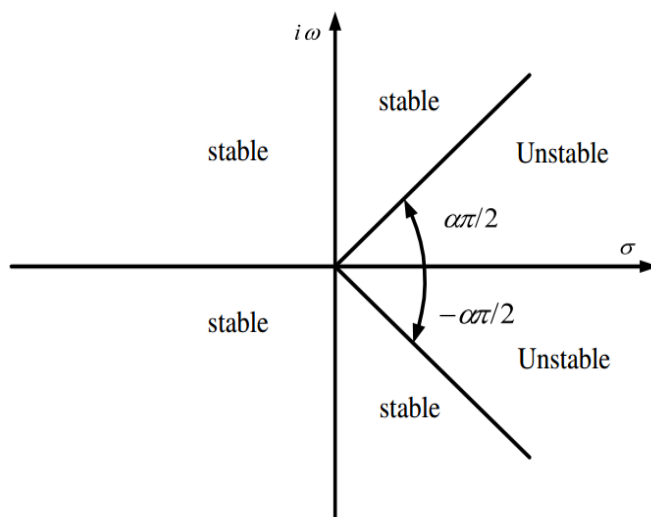
$$|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

که $0 < \alpha < 1$ و $\text{eig}(A)$ مقادیر ویژه ماتریس A است. ناحیه پایداری سیستم‌های مرتبه کسری در شکل ۱.۲ نمایش داده شده است. اکنون سیستم مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(x).$$

نقاط تعادل سیستم بالا از حل معادله $f(x) = 0$ حاصل می‌شوند. این نقاط به طور موضعی و مجانبی پایدار هستند هرگاه مقادیر ویژه ژاکوبین ماتریس $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ در نقاط تعادل در شرایط زیر صدق کنند [۹۸]

$$|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$



شکل ۱.۲: ناحیه همگرایی برای سیستم مرتبه کسری

مهم‌ترین ویژگی سیستم‌های مرتبه کسری در رابطه با آنالیز و پایداری آنها، آن است که همه پارامترهای سیستم (برای مثال ناحیه پایداری) توسط α تحت تاثیر قرار می‌گیرد. در ادامه دو قضیه بسیار مهم برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. [۹۹] (تعمیم روش لیاپانف برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری) فرض کنید $x = 0$ نقطه تعادل برای سیستم مرتبه کسری زیر باشد (توجه داریم که این شرط محدودیتی

برای سیستم نیست زیرا می‌توانیم با یک تغییر متغیر هر نقطه تعادل دیگر را به نقطه صفر انتقال دهیم)

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

که $0 < \alpha < 1$ ، و فرض کنید $V(t, x(t))$ تابع لیاپانف و توابع صعودی اکید γ_i ، $i = 1, 2, 3$ که $\gamma_i(0) = 0$ موجود باشند که در شرایط زیر صدق کنند

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)) \leq \gamma_2(\|x\|),$$

$${}^C D_t^\alpha V(x(t)) \leq -\gamma_3(\|x\|),$$

آنگاه دستگاه (۱.۲) بطور مجانبی پایدار است.

قضیه ۲.۲.۲. [۹۹] سیستم مرتبه کسری با مشتق کسری کاپوتو زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

که $0 < \alpha < 1$ و $x = 0$ نقطه تعادل آن است. اگر شرط زیر برقرار باشد

$$x(t)f(t, x(t)) \leq 0, \quad \forall x,$$

آنگاه مبدأ، یک نقطه تعادل پایدار و اگر شرط زیر برقرار باشد

$$x(t)f(t, x(t)) < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

آنگاه مبدأ، پایدار مجانبی است.

برهان. فرض کنید تابع لیاپانف و معین مثبت زیر را برای بررسی پایداری سیستم در نظر گرفته‌ایم

$$V(x(t)) = \frac{1}{\alpha} x^2(t).$$

می‌توان نشان داد که رابطه زیر برقرار است [۹۹]

$${}^C D_t^\alpha V(x(t)) \leq x(t) {}^C D_t^\alpha x(t). \quad (2.2)$$

اگر $x(t)f(t, x(t)) \leq 0$ ، آنگاه $x(t) {}^C D_t^\alpha x(t) \leq 0$ و در نتیجه طبق قضیه ۱.۲.۲ سیستم ۲.۲ پایدار است.

اگر به ازای $x \neq 0$ ، $x(t)f(t, x(t)) < 0$ آنگاه $x(t) {}^C D_t^\alpha x(t) < 0$ و در نتیجه بنابه قضیه ۱.۲.۲ سیستم پایدار مجانبی است. $\square$

مثال ۱.۲.۲. [۹۹] سیستم مرتبه کسری و وابسته زمانی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha x_1(t) &= -\sin^2(t)x_1(t) - \sin(t)\cos(t)x_2(t), \\ {}^C D_t^\alpha x_2(t) &= -\sin(t)\cos(t)x_1(t) - \cos^2(t)x_2(t). \end{aligned}$$

برای بررسی پایداری، تابع لیپانف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) \geq 0. \quad (3.2)$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{1}{2} {}^C D_t^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{2} {}^C D_t^\alpha x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t) {}^C D_t^\alpha x_1(t) + x_2(t) {}^C D_t^\alpha x_2(t) = -[\sin(t)x_1(t) + \cos(t)x_2(t)]^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

نامساوی (۴.۲) نشان می‌دهد که مشتق کسری از تابع لیپانف نیمه معین منفی است و لذا سیستم مرتبه کسری پایدار به مفهوم لیپانف است.

تعریف ۴.۲.۲. [۴۲] سیستم مرتبه کسری

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = ax(t) + b(t, u(t)) + f(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.2)$$

در بازه $[0, T]$ کنترل‌پذیر است، هرگاه برای هر $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ و T ثابت، تابع کنترل $u(t) \in L^2[0, T]$ موجود باشد بطوریکه تابع حالت متناظر $x(t)$ با شروع از نقطه $x(0) = x_0$ در رابطه $x(T) = x_1$ صدق کند.

برای توضیحات و قضایای بیشتر در مورد کنترل‌پذیری سیستم‌های مرتبه کسری می‌توانید [۴۲] را مطالعه کنید.

۳.۲ شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه کسری

مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J(x(t), u(t)) = \phi(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} F(x(t), u(t)) dt, \quad (6.2)$$

subject to

$$M\dot{x}(t) + N {}^C D_t^\alpha x(t) = G(t, x(t), u(t)), \quad (7.2)$$

با شرایط اولیه

$$x(0) = x_0,$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^m$ و $u(t) \in \mathbb{R}^n$. همچنین M و N ماتریس‌های ثابت هستند که همزمان صفر نیستند. بدون از دست دادن کلیات، فرض می‌کنیم $\alpha \in (0, 1)$ و توابع F و G مشتق‌پذیر هستند.

قضیه ۱.۳.۲. [۹۰] اگر (x, u) یک کمینه برای مسئله (۶.۲) – (۷.۲) باشد، آنگاه تابع λ موجود است که سه تایی (x, u, λ) در شرایط زیر صدق می‌کند

(الف) سیستم همیلتونین

$$\begin{cases} M\dot{\lambda}(t) - N {}_t D_{t_f}^{\alpha} x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \\ M\dot{x}(t) + N {}_0^C D_t^{\alpha} x(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \end{cases}$$

(ب) شرط بهینگی برای تابع کنترل

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, t_f],$$

(ج) شرایط مرزی

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}_0^C D_t^{\alpha} x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_{t_f}^{1-\alpha} \lambda(t) \right]_{t=t_f} = 0, \quad (۸.۲)$$

$$\left[M\lambda(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_{t_f}^{1-\alpha} \lambda(t) \right]_{t=t_f} = 0, \quad (۹.۲)$$

که همیلتونین H به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = F(x(t), u(t)) + \lambda G(t, x(t), u(t)).$$

قضیه بالا شرایط لازم بهینگی را برای یک مسئله کنترل بهینه کسری با توجه به شرایط اولیه اعمال شده بر مسئله بیان می‌کند.

ملاحظه ۱.۳.۲. در مقاله [۹۱] شرایط لازم بهینگی برای حالتی که زمان نهایی نامشخص است، بدست آمده است. نکته جالب در این حالت آن است که اگر نقاط $x(t_f)$ و $x(0)$ را با هم جا به جا کنیم، زمان بهینه متفاوتی بدست خواهد آمد. همانطور که می‌دانیم در مسائل کنترل بهینه کلاسیک این جا به جایی بر زمان بهینه بی‌تاثیر است.

در ادامه به دنبال ارائه یک روش عددی با استفاده از موجک‌های هار^۱ برای حل ردهای از مسائل کنترل بهینه کسری که مشتق کسری آن در حالت کاپوتو است، هستیم. در حالت کلی دو روش غیرمستقیم و مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه کسری وجود دارد. در روش غیرمستقیم با تبدیل مسئله کنترل بهینه کسری با استفاده از قضیه ۱.۳.۲ به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری به حل مسئله پرداخته می‌شود اما در روش مستقیم، مسئله کنترل بهینه کسری به یک مسئله بهینه سازی خطی یا غیرخطی تبدیل می‌شود. در این فصل

^۱ Haar wavelates

با استفاده از یک روش مستقیم بر مبنای موجک‌های هار به حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری می‌پردازیم. مسئله‌ای که در نظر گرفته‌ایم به صورت زیر است

$$\text{minimize } J(t, x(t), u(t)) = \int_0^1 f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (10.2)$$

subject to

$${}^C D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.2)$$

$$h(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad (12.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad (13.2)$$

که مشتق کسری در حالت کاپوتو است. با نوشتن ${}^C D_t^\alpha x(t)$ و متغیر کنترلی $u(t)$ بر حسب موجک‌های هار و استفاده از روش گسسته سازی هار، مسئله کنترل بهینه کسری به یک مسئله بهینه سازی غیرخطی تبدیل می‌شود. با حل مسئله بهینه سازی، ضرایب نامعلوم بسط ${}^C D_t^\alpha x(t)$ و متغیر کنترلی $u(t)$ بدست می‌آیند.

۴.۲ ویژگی‌های موجک‌های هار

موجک‌های هار $RH(r, t)$ که $r = 1, 2, \dots$ ، ترکیبی از مقادیر $0, -1, +1$ هستند که در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$RH(r, t) = \begin{cases} 1, & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}}, \\ -1, & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که در آن

$$J_u = \frac{j-u}{2^i}, \quad u = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

و مقدار r توسط دو پارامتر i و j تعریف می‌شود

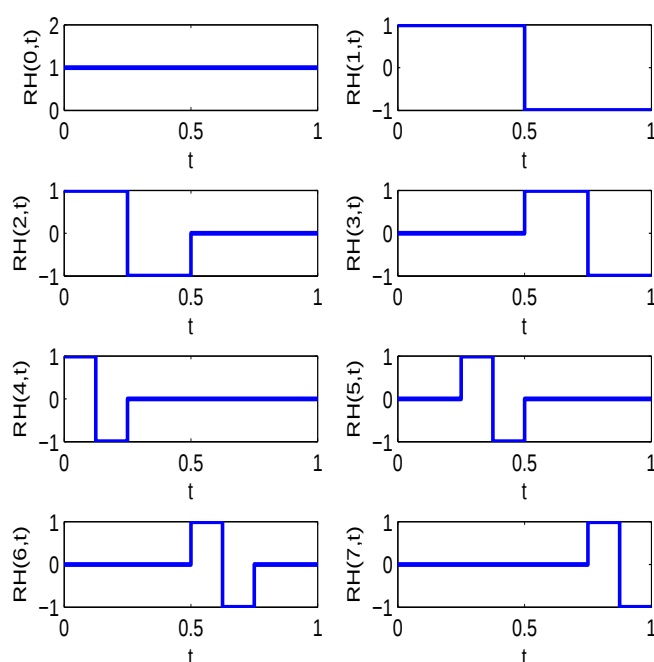
$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 2^i.$$

تابع $RH(0, t)$ به ازای $i = j = 0$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$RH(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1.$$

مجموعه هشت موجک اول هار که $r = 0, 1, 2, \dots, 7$ ، در شکل ۲.۲ نشان داده شده است خاصیت تعامد به صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_0^1 RH(r, t) RH(\nu, t) dt = \begin{cases} 2^{-i}, & r = \nu, \\ 0, & r \neq \nu, \end{cases}$$



شکل ۲.۲: نمودار ۸ موجک هار به ازای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$.

که در آن

$$\nu = 2^n + m - 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2^n.$$

مجموعه موجک‌های هار یک مجموعه کامل را در فضای هیلبرت $L^2[0, 1]$ تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توانیم هر تابع در این فضا را با استفاده از موجک‌های هار تقریب بزنیم.

۱.۴.۲ تقریب توابع

تابع دلخواه $G(t) \in L^2[0, 1]$ قابل نمایش برحسب موجک‌های هار به صورت زیر است

$$G(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r RH(r, t), \quad (14.2)$$

که a_r ها توسط رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$a_r = 2^i \int_0^1 G(t) RH(r, t) dt, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

با $r = 2^i + j - 1$ که $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ، $j = 1, 2, 3, \dots, 2^i$ و $r = 0$ برای $i = j = 0$. سری در (۱۴.۲) شامل بی نهایت جمله است. اگر فرض کنیم $i = 0, 1, 2, \dots, \alpha$ ، آنگاه سری در (۱۴.۲)

قابل تقریب زدن با K جمله به صورت زیر است

$$\mathcal{G}(t) \simeq \sum_{r=0}^{K-1} a_r RH(r, t) = A^T \Phi_K(t), \quad (15.2)$$

که در آن

$$K = 2^{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$$

بردار ضرایب A و بردار توابع هار $\Phi_K(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T,$$

$$\Phi_K(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{K-1}(t)]^T,$$

که در آن

$$\phi_r(t) = RH(r, t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, K-1.$$

اگر مجموعه همه نقاط هم محلی t_l را در وسط بازه تعریف موجک هار در نظر بگیریم، آنگاه t_l از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

با انتخاب این نقاط هم محلی، تابع به نقاطی با فاصله مساوی گسسته سازی می‌شود. بردار $\phi_r(t)$ ، $r = 0, 1, 2, \dots, K-1$ نیز می‌تواند در این نقاط هم محلی محاسبه شود. فرض کنید ماتریس هار $\hat{\Phi}_{K \times K}$ ترکیبی از $\phi_r(t)$ ، $r = 0, 1, 2, \dots, K-1$ در نقاط هم محلی باشد، بنابراین داریم

$$\hat{\Phi}_{K \times K} = [\Phi_K(t_1), \Phi_K(t_2), \dots, \Phi_K(t_K)]. \quad (16.2)$$

اگر هر کدام از موجک‌ها به هشت زیر بازه تقسیم شود، آنگاه ماتریس هار به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۵۷]

$$\hat{\Phi}_{8 \times 8} = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم

$$[\mathcal{G}(t_1), \mathcal{G}(t_2), \dots, \mathcal{G}(t_K)] = A^T \hat{\Phi}_{K \times K}. \quad (17.2)$$

از (۱۷.۲) داریم

$$A^T = [\mathcal{G}(t_1), \mathcal{G}(t_2), \dots, \mathcal{G}(t_K)] \hat{\Phi}_{K \times K}^{-1},$$

که در آن

$$\hat{\Phi}_{K \times K}^{-1} = \left(\frac{1}{K}\right) \hat{\Phi}_{K \times K}^T \text{diag}(1, 1, 2, 2, \underbrace{2^2, \dots, 2^2}_{2^2}, \underbrace{2^3, \dots, 2^3}_{2^3}, \dots, \underbrace{\frac{K}{2}, \dots, \frac{K}{2}}_{\frac{K}{2}}). \quad (18.2)$$

همچنین مربع خطا برای تقریب تابع $\mathcal{G}(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$\varepsilon = \int_0^1 (\mathcal{G}(t) - A^T \Phi_K(t))^2 dt.$$

واضح است که هنگامی که K افزایش پیدا می‌کند، آنگاه ε کاهش پیدا می‌کند. بنابراین ε به سمت صفر میل می‌کند هرگاه K به سمت بی نهایت میل کند.

۲.۴.۲ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری

برای حل مسائل کنترل بهینه کسری، ما معمولاً با معادلات شامل انتگرال و مشتق کسری سروکار داریم. همانطور که می‌دانیم به دلیل وجود ناپیوستگی در موجک‌های هار، مشتق گیری کسری در همه نقاط آن امکان پذیر نیست. از این رو در اینجا به نحوه‌ی محاسبه ماتریس عملیاتی^۲ انتگرال کسری موجک‌های هار می‌پردازیم. انتگرال از موجک‌های هار به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\int_0^t \Phi_K(\tau) d\tau \approx P_{K \times K} \Phi_K(t),$$

که در آن P ماتریس عملیاتی انتگرال موجک هار نامیده می‌شود [۵۸]. در ادامه با توجه به مقاله [۶۰] ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک‌های هار را محاسبه می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم انتگرال کسری ریمن-لیوویل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$({}_0 I_t^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

اکنون اگر $f(t)$ برحسب توابع هار، طبق رابطه (۱۵.۲) نوشته شود، آنگاه انتگرال کسری ریمن-لیوویل به صورت زیر بیان می‌شود

$$({}_0 I_t^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} C^T \Phi_K(\tau) d\tau = C^T ({}_0 I_t^\alpha \Phi_K)(t).$$

^۲Operational matrix

مجموعه K تایی از توابع بلاک پالس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{i}{K}, \frac{i+1}{K}\right], \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که در آن $i = 0, 1, 2, \dots, (K-1)$.

توابع $b_i(t)$ دارای خاصیت تعامد به صورت زیر هستند

$$b_i(t)b_l(t) = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ b_i(t), & i = l, \end{cases}$$

$$\int_0^1 b_i(\tau)b_l(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ \frac{1}{K}, & i = l. \end{cases}$$

از آنجایی که موجک‌های هار به طور قطعه‌ای ثابت هستند می‌توانند برحسب توابع بلاک پالس^۳ به صورت زیر نوشته شوند

$$\Phi_K(t) = \hat{\Phi}_{K \times K} B_K(t), \quad (19.2)$$

که $B_K(t) := [b_0(t) \ b_1(t) \ \dots \ b_i(t) \ \dots \ b_K(t)]^T$.

در [۵۹] ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع بلاک پالس F^α به صورت زیر محاسبه شده است

$$({}_0 I_t^\alpha B_K)(t) \simeq F^\alpha B_K(t), \quad (20.2)$$

که

$$F^\alpha = \frac{1}{K^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{K-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{K-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{K-3} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

با $\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}$

فرض کنید

$$({}_0 I_t^\alpha \Phi_K)(t) \simeq P_{K \times K}^\alpha \Phi_K(t), \quad (21.2)$$

که $P_{K \times K}^\alpha$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک هار نامیده می‌شود. با استفاده از (۱۹.۲) و (۲۰.۲) داریم

$$({}_0 I_t^\alpha \Phi_K)(t) \simeq ({}_0 I_t^\alpha \hat{\Phi}_{K \times K} B_K)(t) = \hat{\Phi}_{K \times K} ({}_0 I_t^\alpha B_K)(t) \simeq \hat{\Phi}_{K \times K} F^\alpha B_K(t). \quad (22.2)$$

^۳Block pulse functions

با استفاده از روابط (۲۱.۲) و (۲۲.۲) داریم

$$P_{K \times K}^\alpha \Phi_K(t) = P_{K \times K}^\alpha \hat{\Phi}_{K \times K} B_K(t) = \hat{\Phi}_{K \times K} F^\alpha B_K(t).$$

بنابراین ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک هار $P_{K \times K}^\alpha$ به صورت زیر بیان می‌شود [۶۰]

$$P_{K \times K}^\alpha = \hat{\Phi}_{K \times K} F^\alpha \hat{\Phi}_{K \times K}^{-1}. \quad (23.2)$$

برای مثال به ازای $\alpha = 0.9$ و $K = 8$ ماتریس عملیاتی $P_{K \times K}^\alpha$ به صورت زیر است

$$P_{8 \times 8}^{0.9} = \begin{bmatrix} 0.5472 & -0.2540 & -0.1361 & -0.1205 & -0.0729 & -0.0646 & -0.0613 & -0.0593 \\ 0.2540 & 0.3993 & -0.1361 & 0.1517 & -0.0729 & -0.0646 & 0.0846 & 0.0699 \\ 0.0603 & 0.0758 & 0.0210 & -0.0053 & -0.0729 & 0.0813 & -0.0051 & -0.0012 \\ 0.0681 & -0.0681 & 0 & 0.0210 & 0 & 0 & -0.0729 & 0.0813 \\ 0.0148 & 0.0175 & 0.0406 & -0.0006 & 0.0113 & -0.0028 & -0.0005 & -0.0002 \\ 0.0153 & 0.0211 & -0.0365 & -0.0025 & 0 & 0.0113 & -0.0028 & -0.0005 \\ 0.0161 & -0.0161 & 0 & 0.0406 & 0 & 0 & 0.0113 & -0.0028 \\ 0.0182 & -0.0182 & 0 & -0.0365 & 0 & 0 & 0 & 0.0113 \end{bmatrix}.$$

۳.۴.۲ روش گسسته سازی هار

در بحث مربوط به موجک‌های هار بیان کردیم که چگونه می‌توان یک تابع را با استفاده از موجک‌های هار تقریب بزنیم. برای محاسبه جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه کسری نیاز به تقریب تابع حالت و کنترل است. برای این منظور در این قسمت از روش هم محلی با استفاده از موجک‌های هار استفاده می‌کنیم. نقاط هم محلی t_l توسط رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K,$$

که K تعداد نقاط هم محلی است. توجه داریم که بزرگی K برحسب توانی از ۲ است و در نتیجه تعداد نقاط هم محلی نیز به صورت توانی از ۲ افزایش پیدا می‌کند. تمام نقاط هم محلی در بازه $[0, 1]$ و با فاصله $\frac{1}{K}$ قرار دارند. فرض می‌کنیم که مشتق کسری تابع حالت و تابع کنترل برحسب موجک‌های هار با K نقطه هم محلی قابل تقریب است، یعنی

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) \approx C^T \Phi(t), \\ u(t) \approx B^T \Phi(t), \end{cases} \quad (24.2)$$

که در آن

$$\begin{cases} C^T = [c_1, c_2, \dots, c_K]^T, \\ B^T = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T. \end{cases}$$

با استفاده از (۲۳.۲) و (۲۴.۲)، $x(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x(t) = {}^C I_t^{\alpha} D_t^{\alpha} x(t) + x(\circ) \approx \mathcal{C}^T P_{K \times K}^{\alpha} \Phi(t) + x(\circ), \quad (25.2)$$

که $P_{K \times K}^{\alpha}$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری از مرتبه α است. همانطور که در (۹.۳) بیان شد، بسط ماتریس $\Phi(t)$ در نقاط هم محلی، ماتریس $K \times K$ هار $\hat{\Phi}$ را نتیجه می‌دهد

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\alpha} x(t_l) \approx \mathcal{C}^T \hat{\Phi}(t_l), \\ u(t_l) \approx \mathcal{B}^T \hat{\Phi}(t_l), \\ x(t_l) \approx \mathcal{C}^T P_{K \times K}^{\alpha} \hat{\Phi}(t_l) + x(\circ). \end{cases} \quad (26.2)$$

با استفاده از معادلات بالا می‌توانیم توابع حالت و کنترل را در هر نقطه هم محلی بوسیله حاصل ضرب بردار ضرایب در ستون متناظر از ماتریس هار محاسبه کنیم.

۴.۴.۲ برنامه ریزی غیرخطی

هنگامی که روش هم محلی هار برای حل مسئله کنترل بهینه کسری در نظر گرفته می‌شود، بردار ضرایب نامعلوم مشتق کسری تابع حالت و تابع کنترل به عنوان متغیرهای مسئله بهینه سازی در نظر گرفته می‌شوند. در اینصورت تابع هدف (۱۰.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$J = \int_{\circ}^1 f(t, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^{\alpha} \Phi(t) + x(\circ), \mathcal{B}^T \Phi(t)) dt.$$

از آنجایی که موجک‌های هار در هر زیر بازه مقدار ثابتی دارند، عبارت بالا می‌تواند به صورت ساده‌تر زیر نوشته شود

$$J = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K f(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^{\alpha} \Phi(t_l) + x(\circ), \mathcal{B}^T \Phi(t_l)).$$

با جایگذاری ${}^C D_t^{\alpha} x(t), x(t), u(t)$ در (۱۰.۲)–(۱۲.۲) با استفاده از جملات هار معرفی شده در (۲۴.۲)، داریم

$$\mathcal{C}^T \Phi(t_l) = g(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^{\alpha} \Phi(t_l) + x(\circ), \mathcal{B}^T \Phi(t_l)),$$

$$h(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^{\alpha} \Phi(t_l) + x(\circ), \mathcal{B}^T \Phi(t_l)) \leq \circ.$$

در این صورت معادلات مسئله کنترل بهینه کسری به عنوان محدودیت‌های مسئله بهینه سازی در نظر گرفته می‌شوند. مسئله بهینه سازی غیرخطی نهایی را می‌توان با استفاده از نرم افزارهای مختلف بهینه سازی حل کرد. از آنجایی که نقاط ابتدایی و انتهایی جزو نقاط هم محلی نیستند، برای محاسبه آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{cases} x(\circ) = x(t_1) - \frac{{}^C D_t x(t_1)}{(\Upsilon K)^{\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}, \\ x(1) = x(t_K) + \frac{{}^C D_t x(t_K)}{(\Upsilon K)^{\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}. \end{cases}$$

جدول ۱.۲: مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۲.

J	تعداد نقاط هم محلی
۶/۱۴۶۰۹۶	$K = 8$
۶/۱۴۶۹۶۷	$K = 16$
۶/۱۴۹۰۶۱	$K = 32$

با این روش مسئله کنترل بهینه کسری به یک مسئله بهینه سازی غیرخطی تبدیل می‌شود که در اینجا با استفاده از نرم افزار لینگو ۱۱ به حل این مسئله می‌پردازیم.

۵.۲ مثال‌های عددی

در این قسمت با حل چند مثال عددی به بررسی دقت روش ارائه شده می‌پردازیم. لازم به ذکر است که نتایج این فصل به صورت یک مقاله در [۷۲] بیان شده است.

مثال ۱.۵.۲. مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = \frac{1}{2} \int_0^1 [3x^2(t) + u^2(t)]dt,$$

subject to

$${}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t),$$

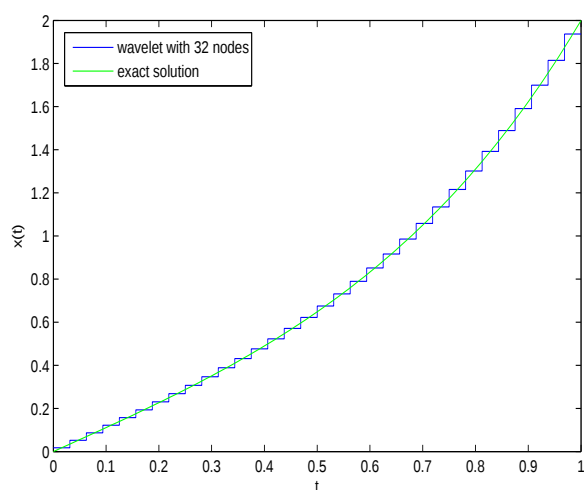
$$x(0) = 0, \quad x(1) = 2.$$

برای این مسئله، جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

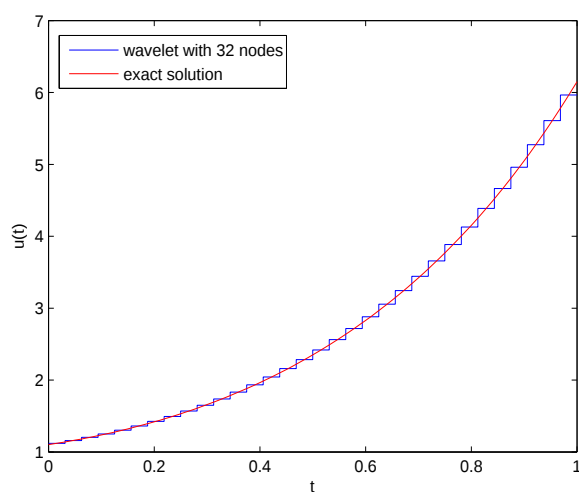
$$\begin{cases} x^*(t) = \frac{2}{\sinh 2} \sinh(2t), \\ u^*(t) = \frac{2}{\sinh 2} (2 \cosh(2t) + \sinh(2t)). \end{cases}$$

مقدار دقیق تابع هدف به ازای $\alpha = 1$ برابر است با $J^* = 6/149258$ [۶۱]. در جدول ۱.۲، مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف K با استفاده از روش بیان شده، نشان داده شده است. تابع کنترل $u(\cdot)$ و مسیر متناظر $x(\cdot)$ در شکل‌های ۳.۲، ۴.۲ و ۵.۲ و ۶.۲ رسم شده است.

مثال ۲.۵.۲. مسئله سیستم خطی با محدودیت‌های کنترل به صورت نامساوی زیر را در نظر



شکل ۳.۲: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۲.



شکل ۴.۲: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۲.

بگیرید

$${}^C D_t^\alpha x(t) = \ln(2)(x(t) + u(t)),$$

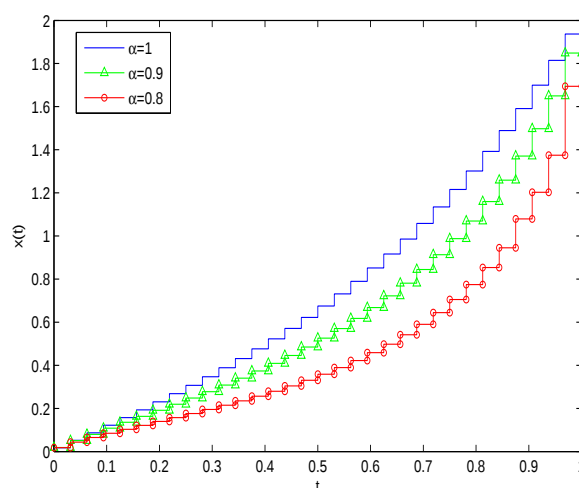
$$|u(t)| \leq 1, x(t) + u(t) \leq 2,$$

$$x(0) = 0,$$

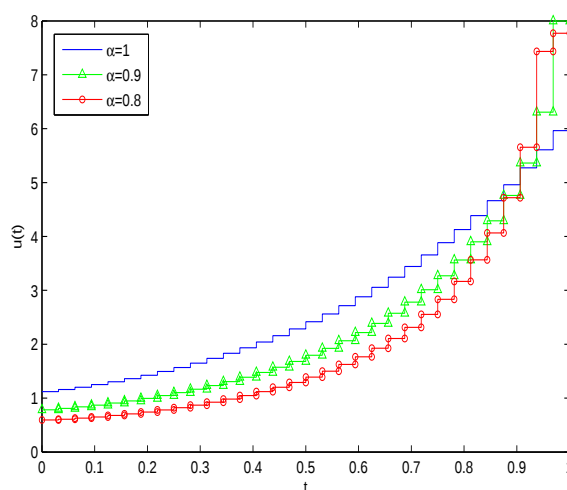
با تابع هدف

$$\text{minimize } J = \int_0^1 -\ln(2)x(t)dt.$$

این مسئله دارای مقدار دقیق تابع هدف $J^* = -0.30682$ به ازای $\alpha = 1$ است [۶۲]. در جدول ۲.۲، مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف K با استفاده از روش



شکل ۵.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = ۳۲$ در مثال ۱.۵.۲.

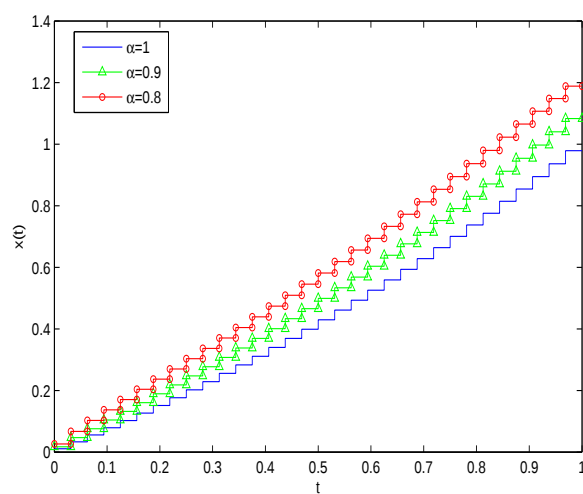


شکل ۶.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = ۳۲$ در مثال ۱.۵.۲.

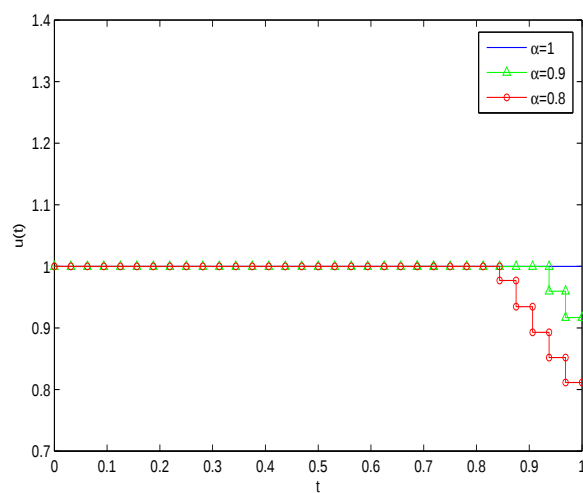
بیان شده، نشان داده شده است. تابع کنترل $u(\cdot)$ و مسیر متناظر $x(\cdot)$ در شکل‌های ۷.۲ و ۸.۲ رسم شده است.

جدول ۲.۲: مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۵.۲.

J	تعداد نقاط هم محلی
$K = 8$	-0.3077212
$K = 16$	-0.3070697
$K = 32$	-0.3069070



شکل ۷.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۲.۵.۲.



شکل ۸.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۲.۵.۲.

مثال ۳.۵.۲. مسئله کنترل بهینه کسری با حالت انتهایی آزاد زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = \int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + 0.5u^2(t)]dt,$$

subject to

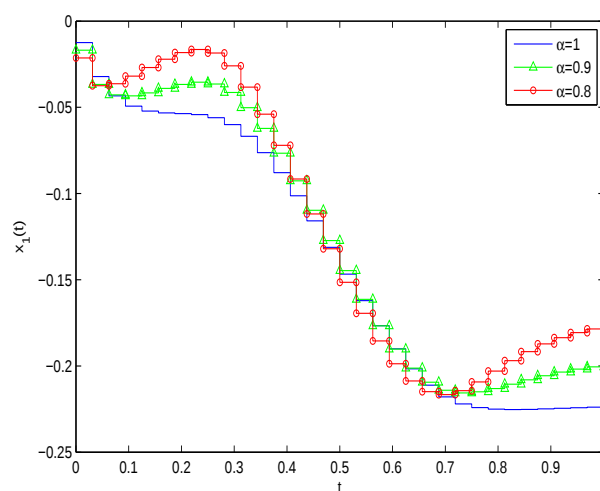
$${}^C D_t^\alpha x_1(t) = x_2(t),$$

$${}^C D_t^\alpha x_2(t) = -x_2(t) + u(t),$$

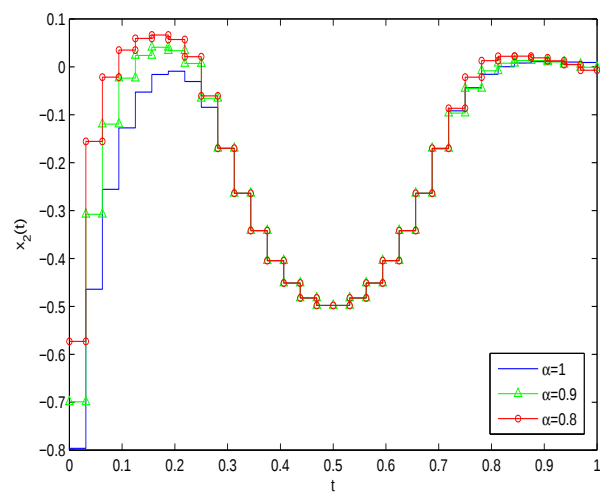
$$x_1(0) = 0, x_2(0) = -1,$$

$$x_2(t) \leq 8(t - 0.5)^2 - 0.5.$$

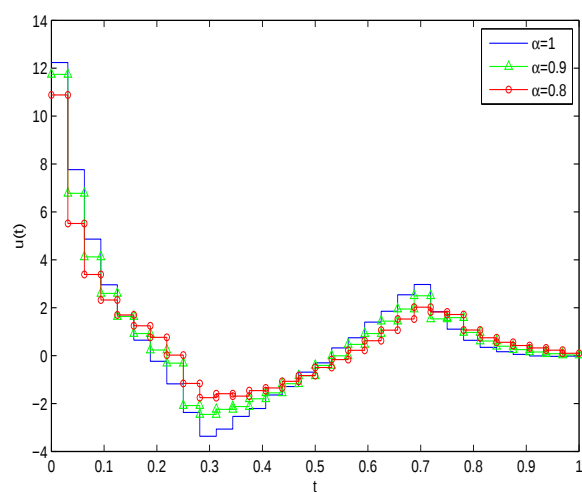
این مسئله به ازای $\alpha = 1$ در [۶۳] معرفی و توسط نویسندگان مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل‌های ۹.۲، ۱۰.۲ و ۱۱.۲ مسیرهای بهینه تقریبی $x_1(\cdot)$ ، $x_2(\cdot)$ و $u(\cdot)$ را به ازای مقادیر مختلف α نمایش می‌دهند. همچنین مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف K در جدول ۳.۲ نشان داده شده است.



شکل ۹.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $x_1(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۵.۲.



شکل ۱۰.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $x_2(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۵.۲.



شکل ۱۱.۲: مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۵.۲.

جدول ۳.۲: مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۳.۵.۲.

J	روش
چندجمله‌ای‌های چبیشف کلاسیک [۶۵]	
$\circ/17358^\circ$	$k = 26, m = 8$
$\circ/17185^\circ$	$k = 28, m = 16$
توابع هیبرید [۶۶]	
$\circ/17^\circ 13645$	$n = 4, m = 3, w = 15$
$\circ/17^\circ 1364^\circ$	$n = 4, m = 4, w = 15$
روش حاضر	
$\circ/1725475$	$K = 8$
$\circ/171262^\circ$	$K = 16$
$\circ/17^\circ 1118$	$K = 32$

فصل ۳

حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با استفاده از توابع بلاک پالس

۱.۳ مقدمه

اگرچه مسائل کنترل بهینه تاخیری با مشتقات مرتبه صحیح [۴۳، ۴۴] با استفاده از روش‌های مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است، اما مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری یکی از زمینه‌های نوظهور در ریاضیات و مهندسی محسوب می‌شوند. مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری در واقع همان مسائل کنترل بهینه هستند که دستگاه‌های دینامیکی همراه کننده آنها، دستگاه‌های دینامیکی کسری تاخیری است. در حالت کلی یافتن جواب دقیق برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری امکان پذیر نیست، از این رو در سال‌های اخیر، چند روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه شده است. برای مثال در [۴۵] شرایط لازم بهینگی در یک حالت خاص برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه شده است و یک روش برنامه ریزی خطی برای حل مسئله نهایی بکار گرفته شده است. همچنین بهراوی^۱ و همکارانش [۴۶] یک روش عددی بر مبنای چندجمله‌ای‌های لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه داده‌اند. در [۴۷] با استفاده از رهیافت نظریه اندازه و تبدیل مسئله به یک مسئله برنامه ریزی خطی به حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری پرداخته شده است.

^۱Bhrawy

۵۰ حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با استفاده از توابع بلاک پالس

جواب دقیق سیستم‌های تاخیری در حالت کلی هموار نیستند. به همین دلیل تقریب جواب‌ها با استفاده از توابع پایه‌ای هموار، باعث کندی همگرایی و یا افزایش خطا در نقاطی می‌شود که مشتق موجود نیست. از این رو در این قسمت به معرفی توابع پایه‌ای ناهموار بلاک پالس برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری می‌پردازیم. مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = H(t_f, x_{t_f}) + \int_0^{t_f} G(t, x(t), x(t - \sigma), u(t), u(t - \tau)) dt, \quad (1.3)$$

subject to

$${}^C D_t^\alpha x(t) = F(t, x(t), x(t - \sigma), u(t), u(t - \tau)), \quad t \in [0, t_f], \quad (2.3)$$

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.3)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\sigma, 0], \quad (4.3)$$

$$u(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (5.3)$$

که توابع برداری F, g و توابع اسکالر H, G در حالت کلی با توجه به x و u غیرخطی و مشتق پذیر هستند. توابع $\phi(t)$ و $\psi(t)$ پیوسته هستند و $0 \leq \tau \leq \sigma$ و t_f زمان انتهایی را نشان می‌دهد. در ادامه به معرفی توابع بلاک پالس و ماتریس‌های عملیاتی متناظر برای حل عددی مسئله (۱.۳) – (۵.۳) به روش مستقیم می‌پردازیم.

۲.۳ توابع بلاک پالس

مفهوم توابع بلاک پالس اولین بار در مهندسی برق بوسیله هارموث^۲ بکار گرفته شد [۶۴]. مجموعه K تایی از توابع بلاک پالس روی بازه $[0, t_f]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۸۷]

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & \frac{it_f}{K} \leq t \leq \frac{(i+1)t_f}{K}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (6.3)$$

که $i = 0, 1, \dots, K-1$. توابع بلاک پالس دارای خواص بسیاری هستند که مهم‌ترین آنها مجزا بودن^۳، تعامد^۴ و کامل بودن^۵ آنها می‌باشد. با توجه به تعریف توابع بلاک پالس مجزا بودن واضح است زیرا

$$b_i(t)b_j(t) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ b_i(t), & i = j. \end{cases}$$

^۲ Harmoth

^۳ Disjointness

^۴ Orthogonality

^۵ Completeness

ویژگی دیگر تعامد می باشد، یعنی

$$\int_0^{t_f} b_i(\tau)b_j(\tau) = h\delta_{ij},$$

که δ_{ij} دلتای کرونگر و $h = \frac{t_f}{K}$ می باشد. ویژگی دیگر کامل بودن است. برای هر تابع $f \in [0, t_f]$ هنگامی که K به سمت بی نهایت میل می کند اتحاد پارسوال برقرار است

$$\int_0^{t_f} f^2(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 \|b_i(x)\|^2,$$

که در آن

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^{t_f} f(x)b_i(x)dx.$$

توابع بلاک پالس را می توان با استفاده از بردار K تایی $B_K(t)$ که $b_i(t)$ به عنوان i امین مؤلفه آن است در نظر گرفت. فرض کنید $f(t)$ تابعی انتگرال پذیر و پیوسته روی $[0, t_f]$ است در این صورت بسط بلاک پالس تابع f به صورت زیر بیان می شود

$$f(t) \simeq \sum_{i=0}^{K-1} a_i b_i(t) = A^T B_K(t), \quad (7.3)$$

که در آن $A = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T$ و $B_K(t) = [b_0(t), b_1(t), \dots, b_{K-1}(t)]^T$. ضرایب a_i از رابطه زیر بدست می آیند

$$a_i = \frac{K}{t_f} \int_{\frac{(i)t_f}{K}}^{\frac{(i+1)t_f}{K}} f(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, K-1. \quad (8.3)$$

برای بکار بردن یک روش هم محلی بازه $[0, t_f]$ را به K قسمت مساوی تقسیم و نقاط هم محلی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K} t_f, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

فرض کنید $\hat{B}_{K \times K}$ ترکیب توابع بلاک پالس در همه نقاط هم محلی باشد، بنابراین داریم

$$\hat{B}_{K \times K} = [B_K(t_1), B_K(t_2), \dots, B_K(t_K)]. \quad (9.3)$$

برای مثال فرض کنید $K = 8$. در این صورت ماتریس $\hat{B}_{8 \times 8}$ به صورت زیر بدست می آید

$$\hat{B}_{8 \times 8} = I_8.$$

۱.۲.۳ ماتریس عملیاتی تأخیری

اگر یک مجموعه K تایی از بلاک پالس ها دارای تأخیری به اندازه $h = \frac{t_f}{K}$ باشد می توان نشان داد که

$$B(t - \frac{t_f}{K}) = \Delta_K B(t),$$

که

$$\Delta_K = \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

در حالت کلی وقتی $h = \frac{(N+\delta)t_f}{K}$ ، $0 \leq \delta \leq 1$ و N عدد صحیح مثبت کوچکتر از K باشد داریم

$$B(t-h) = DB(t), \quad t > h. \quad (10.3)$$

در اینجا $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ماتریس عملیاتی تأخیری توابع بلاک پالس است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$D = (1-\delta)\Delta_K^N + \delta\Delta_K^{N+1},$$

با

$$\Delta_K = \begin{bmatrix} \circ_{(K-1)} \times 1 & I_{K-1} \\ \circ & \circ_{1 \times (K-1)} \end{bmatrix}.$$

برای اینکه خطا در ماتریس عملیاتی اتفاق نیفتد بایستی δ صفر یا یک اختیار شود [۸۷].

۲.۲.۳ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری

از آنجایی که توابع بلاک پالس دارای ناپیوستگی ذاتی یا پرش هستند در اینجا برای استفاده از یک روش عددی از ماتریس عملیاتی انتگرال کسری استفاده می‌کنیم. انتگرال بردار $B_K(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود [۸۷]

$$\int_0^t B_K(\tau) d\tau \approx P_{K \times K} B_K(t).$$

هدف ما محاسبه‌ی ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع بلاک پالس است [۸۸]. همانطور که بیان شد انتگرال کسری ریمن-لیوویل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t < t_f.$$

فرض کنید

$$(I^\alpha B_K)(t) \approx P_{K \times K}^\alpha B_K(t),$$

که $P_{K \times K}^\alpha$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری نامیده می‌شود. چون در بازه $[\frac{it_f}{K}, \frac{(i+1)t_f}{K}]$ به ازای $B_i(t) = 1$ $i = 0, \dots, K-1$ در نتیجه داریم

$$I^\alpha B_i(t) = \begin{cases} \circ, & t \leq \frac{it_f}{K}, \\ \frac{(t - \frac{it_f}{K})^\alpha}{\alpha}, & \frac{it_f}{K} \leq t \leq \frac{(i+1)t_f}{K}, \\ \frac{(t - \frac{it_f}{K})^\alpha - (t - \frac{(i+1)t_f}{K})^\alpha}{\alpha}, & \frac{(i+1)t_f}{K} \leq t \leq t_f. \end{cases}$$

برای دیگر مقادیر $(I^{\alpha} b_i)(t)$ ، $i = 1, \dots, K-1$ با استفاده از خاصیت انتقال می‌توانیم ضرایب دیگر بسط را برای توابع بلاک پالس بدست آوریم. در نتیجه خواهیم داشت

$$P_{K \times K}^{\alpha} = \frac{1}{K^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{K-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{K-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{K-3} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.3)$$

که $\alpha = 0.9$ و $\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}$ ، $i = 1, 2, \dots, K-1$ برای مثال به ازای $K=8$ ، ماتریس عملیاتی $P_{8 \times 8}^{0.9}$ به صورت زیر است

$$P_{8 \times 8}^{0.9} = \begin{bmatrix} 0.0842 & 0.1459 & 0.1347 & 0.1292 & 0.1254 & 0.1226 & 0.1204 & 0.1186 \\ 0 & 0.0842 & 0.1459 & 0.1347 & 0.1292 & 0.1254 & 0.1226 & 0.1204 \\ 0 & 0 & 0.0842 & 0.1459 & 0.1347 & 0.1292 & 0.1254 & 0.1226 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0842 & 0.1459 & 0.1347 & 0.1292 & 0.1254 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0842 & 0.1459 & 0.1347 & 0.1292 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0842 & 0.1459 & 0.1347 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0842 & 0.1459 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0842 \end{bmatrix}.$$

برای بکارگیری یک روش عددی مبتنی بر روش هم محلی، بازه $(0, t_f]$ را به K قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط هم محلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K} t_f, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

تقریب مشتق کسری متغیر حالت و متغیر کنترل را بر حسب توابع بلاک پالس با K نقطه هم محلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\alpha} x(t) \approx C^T B(t), \\ u(t) \approx U^T B(t), \end{cases} \quad (12.3)$$

که در آن

$$\begin{cases} C^T = [c_1, c_2, \dots, c_K]^T, \\ U^T = [u_1, u_2, \dots, u_K]^T. \end{cases}$$

با استفاده از (11.3) و (12.3)، $x(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$x(t) = {}^0 I_t^{\alpha C} D_t^{\alpha} x(t) + x(0) \approx C^T P_{K \times K}^{\alpha} B(t) + x(0). \quad (13.3)$$

بعلاوه با استفاده از (۱۰.۳) و (۱۳.۳)، $x(t-\sigma)$ و $u(t-\tau)$ بر حسب توابع بلاک پالس به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$x(t-\sigma) = \begin{cases} \phi(t-\sigma), & t \in [0, \sigma], \\ \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha D_\sigma B(t) + x(0), & t \in [\sigma, t_f], \end{cases}$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} \psi(t-\tau), & t \in [0, \tau], \\ \mathcal{U}^T D_\tau B(t), & t \in [\tau, t_f], \end{cases}$$

که D_σ و D_τ ماتریس‌های عملیاتی تأخیری هستند. با در نظر گرفتن بردار $B(t)$ در K نقطه هم محلی داریم

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t_l) \approx \mathcal{C}^T B(t_l), \\ u(t_l) \approx \mathcal{U}^T B(t_l), \\ x(t_l) \approx \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \end{cases} \quad (14.3)$$

و

$$x(t_l - \sigma) = \begin{cases} \phi(t_l - \sigma), & t_l \in [0, \sigma], \\ \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha D_\sigma B(t_l) + x(0), & t_l \in [\sigma, t_f], \end{cases} \quad (15.3)$$

$$u(t_l - \tau) = \begin{cases} \psi(t_l - \tau), & t_l \in [0, \tau], \\ \mathcal{U}^T D_\tau B(t_l), & t_l \in [\tau, t_f]. \end{cases} \quad (16.3)$$

هنگامی که روش هم محلی را برای مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری بکار ببریم، با توجه به خاصیت قطعه‌ای ثابت بودن توابع بلاک پالس، تابع هدف و محدودیت‌ها برای مسئله (۱.۳) - (۵.۳) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned} J = & H(t_f, x(t_f)) + \frac{t_f}{K} \left\{ \sum_{l=0}^{N\sigma} G(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \mathcal{U}^T B(t_l), \phi(t_l - \sigma), \psi(t_l - \tau)) \right. \\ & + \sum_{l=N\sigma+1}^{N\tau} G(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \mathcal{U}^T B(t_l), \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha D_\sigma B(t_l) + x(0), \psi(t_l - \tau)) \\ & \left. + \sum_{l=N\tau+1}^K G(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \mathcal{U}^T B(t_l), \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha D_\sigma B(t_l) + x(0), \mathcal{U}^T D_\tau B(t_l)) \right\}, \end{aligned}$$

بطوریکه

$$\mathcal{C}^T B(t_l) = \begin{cases} F(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \mathcal{U}^T B(t_l), \phi(t_l - \sigma), \psi(t_l - \tau)), & t_l \in [0, \sigma], \\ F(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha D_\sigma B(t_l) + x(0), \psi(t_l - \tau)), & t_l \in [\sigma, \tau], \\ F(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(0), \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha D_\sigma B(t_l) + x(0), \mathcal{U}^T D_\tau B(t_l)), & t_l \in [\tau, t_f], \end{cases}$$

$$g(t_l, \mathcal{C}^T P_{K \times K}^\alpha B(t_l) + x(\circ), \mathcal{U}^T B(t_l)) \leq \circ. \quad (۱۷.۳)$$

با توجه به اینکه نقاط انتهایی و نقاط هم محلی برهم منطبق نیستند در نتیجه نقاط انتهایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$\begin{cases} x(\circ) = x(t_1) - \frac{(t_f)^\alpha \mathcal{C} D_t^\alpha x(t_1)}{(\mathfrak{Y}K)^\alpha \Gamma(1 + \alpha)}, \\ x(t_f) = x(t_K) + \frac{(t_f)^\alpha \mathcal{C} D_t^\alpha x(t_K)}{(\mathfrak{Y}K)^\alpha \Gamma(1 + \alpha)}. \end{cases} \quad (۱۸.۳)$$

در این صورت مسئله کنترل بهینه کسری تأخیری به یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود که با استفاده از نرم افزارهای متلب یا لینگو قابل محاسبه است.

۳.۳ همگرایی روش

در این بخش به بررسی همگرایی روش معرفی شده می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۳. [۶۸] فرض کنید f تابعی مشتق پذیر در $D \subseteq \mathbb{R}$ و عدد حقیقی M موجود است به قسمی که $|f'(t)| \leq M$ به ازای هر $t \in D$. در این صورت $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ به ازای هر $y, x \in D$

قضیه ۲.۳.۳. اگر $f(t)$ با استفاده از توابع بلاک پالس $f_K(t)$ در بازه $[\circ, t_f]$ طبق رابطه (۷.۳) تقریب زده شود، آنگاه

$$\|E^K(\cdot)\|_{\mathfrak{Y}} = \|f(\cdot) - f_K(\cdot)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\mathfrak{Y}M^\mathfrak{Y}(t_f)^\mathfrak{Y}}{K^\mathfrak{Y}}, \quad (۱۹.۳)$$

$$\|\varepsilon^K(\cdot)\|_{\mathfrak{Y}} = \|(I^\alpha f)(\cdot) - (I^\alpha f_K)(\cdot)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\mathfrak{Y}M^\mathfrak{Y}(t_f)^{\mathfrak{Y}+\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)K^\mathfrak{Y}}. \quad (۲۰.۳)$$

برهان. اثبات (۱۹.۳): ابتدا خطای بین $f(t)$ و بسط تابع بلاک پالس $f_K(t)$ روی ناحیه D_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_i(t) = a_i b_i(t) - f(t) = a_i - f(t), \quad t \in D_i,$$

که در آن

$$D_i = \{t : \frac{it_f}{K} \leq t \leq \frac{(i+1)t_f}{K}\}, \quad i = \circ, \dots, K-1.$$

می‌توان نشان داد که

$$\|E_i(t)\|_{\mathfrak{Y}} = \int_{\frac{it_f}{K}}^{\frac{(i+1)t_f}{K}} E_i(t)^\mathfrak{Y} dt = \int_{\frac{it_f}{K}}^{\frac{(i+1)t_f}{K}} (a_i - f(t))^\mathfrak{Y} dt = \frac{t_f}{K} (a_i - f(\eta))^\mathfrak{Y}, \quad \eta \in D_i, \quad (۲۱.۳)$$

که از قضیه مقدار میانی برای انتگرال استفاده می‌کنیم. با استفاده از (۸.۳) و قضیه مقدار میانی داریم

$$\frac{K}{t_f} \int_{\frac{it_f}{K}}^{\frac{(i+1)t_f}{K}} f(t)dt = \frac{K}{t_f} \cdot \frac{t_f}{K} f(\mu) = f(\mu), \mu \in D_i. \quad (22.3)$$

با جایگذاری (۲۲.۳) در (۲۱.۳) و با استفاده از قضیه ۱.۳.۳ داریم

$$\|E_i(t)\|_{\mathcal{V}}^2 = \frac{t_f}{K} (f(\mu) - f(\eta))^2 \leq \frac{t_f}{K} (M(\mu - \eta))^2 \leq \frac{t_f}{K} M^2 \left(\frac{t_f}{K} \right) = \frac{4M^2(t_f)^3}{K^3}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \|E^K(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \int_0^{t_f} E^K(t)^2 dt = \int_0^{t_f} \left(\sum_{i=0}^{K-1} E_i(t) \right)^2 dt = \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^{K-1} E_i(t)^2 dt \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \int_0^{t_f} E_i(t) E_j(t) dt. \end{aligned}$$

از آنجایی که برای $i < j$ داریم $D_i \cap D_j = \emptyset$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \|E^K(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^{K-1} E_i(t)^2 dt = \sum_{i=0}^{K-1} \int_0^{t_f} E_i(t)^2 dt = \sum_{i=0}^{K-1} \int_{\frac{it_f}{K}}^{\frac{(i+1)t_f}{K}} E_i(t)^2 dt = \sum_{i=0}^{K-1} \|E_i(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &\leq K \cdot \left(\frac{4M^2(t_f)^3}{K^3} \right) = \frac{4M^2(t_f)^3}{K^2}. \end{aligned}$$

اثبات ۲۰.۳: داریم

$$\|\varepsilon^K(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 = \|(I^\alpha f)(\cdot) - (I^\alpha f_K)(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f(\cdot) - f_K(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 d\tau.$$

با استفاده از رابطه (۱۹.۳)، داریم

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^K(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|f(\cdot) - f_K(\cdot)\|_{\mathcal{V}}^2 d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{4M^2(t_f)^3}{K^2} \right) d\tau \\ &= \left(\frac{4M^2(t_f)^3}{K^2} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \left(\frac{4M^2(t_f)^3}{K^2} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{4M^2(t_f)^{3+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)K^2}. \end{aligned}$$

□

این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۳.۳.۳. [۶۷] اگر f تابعی دوبار مشتق پذیر روی $(\circ, t_f)$ باشد، آنگاه

$$\int_0^{t_f} f(t)dt = \frac{t_f}{K} \sum_{l=1}^K f(t_l) + EM,$$

که در آن

$$t_l = \frac{l - \circ/\Delta}{K} t_f, \quad EM = \frac{(t_f)^3 f''(\xi)}{24K^2}, \quad \xi \in (\circ, t_f).$$

همانطور که در بخش قبل بیان شد، مسئله (۱.۳)–(۵.۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} \text{minimize } J = & H(t_f, x(t_f)) + \frac{t_f}{K} \left\{ \sum_{l=\circ}^{Nr} G(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), U^T B_K(t_l), \phi(t_l - r), \psi(t_l - s)) \right. \\ & + \sum_{l=Nr+1}^{Ns} G(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), U^T B_K(t_l), C^T P_{K \times K}^\alpha D_r B_K(t_l) + x(\circ), \psi(t_l - s)) \\ & \left. + \sum_{l=Nr+1}^K G(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), U^T B_K(t_l), C^T P_{K \times K}^\alpha D_r B_K(t_l) + x(\circ), U^T D_s B_K(t_l)) \right\}, \end{aligned} \quad (23.3)$$

subject to

$$C^T B_K(t_l) = \begin{cases} F(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), U^T B_K(t_l), \phi(t_l - r), \psi(t_l - s)), & t_l \in [\circ, r], \\ F(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), C^T P_{K \times K}^\alpha D_r B_K(t_l) + x(\circ), \psi(t_l - s)), & t_l \in [r, s], \\ F(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), C^T P_{K \times K}^\alpha D_r B_K(t_l) + x(\circ), U^T D_s B_K(t_l)), & t_l \in [s, t_f], \end{cases} \quad (24.3)$$

$$g(t_l, C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t_l) + x(\circ), U^T B_K(t_l)) \leq \circ. \quad (25.3)$$

قضیه ۲.۳.۳ تضمین می‌کند زمانی که $K \rightarrow \infty$ ، آنگاه $U^T B_K(t), C^T P_{K \times K}^\alpha B_K(t) + x(\circ)$ به ترتیب به $U^T D_s B_K(t)$ و $C^T P_{K \times K}^\alpha D_r B_K(t) + x(\circ)$ میل می‌کنند. در اینصورت زمانی که K افزایش می‌یابد، معادلات (۲۴.۳) و (۲۵.۳) به ترتیب به سمت معادلات (۲.۳) و (۳.۳) میل می‌کنند. همچنین با استفاده از قضیه ۳.۳.۳، رابطه (۲۳.۳) به سمت رابطه (۱.۳) میل می‌کند. در حقیقت اگر μ_K مقدار کمینه مسئله (۲۳.۳)–(۲۵.۳) باشد، آنگاه

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mu_K = \mu,$$

که μ جواب بهینه مسئله است.

۴.۳ مثال‌های عددی

در این قسمت چند مثال عددی برای توضیح روش پیشهادی ارائه می‌دهیم. نتایج بدست آمده در این فصل در مقاله [۷۴] ارائه شده است.

مثال ۱.۴.۳. مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\gamma} \left[10^5 x^2(2) + \int_0^2 u^2(t) dt \right],$$

subject to

$${}^C D_t^\alpha x(t) = x(t-1) + u(t),$$

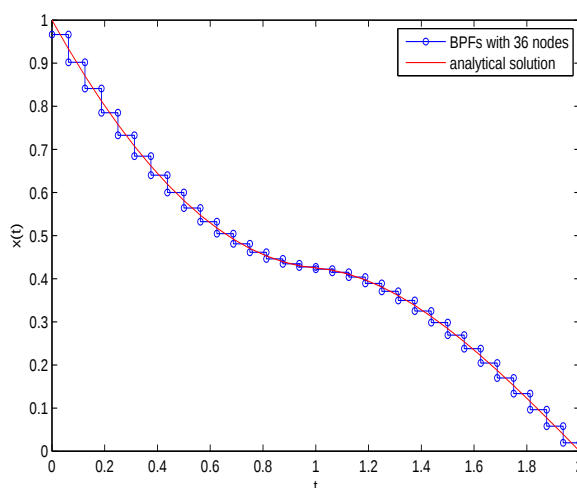
$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0].$$

برای این مسئله جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

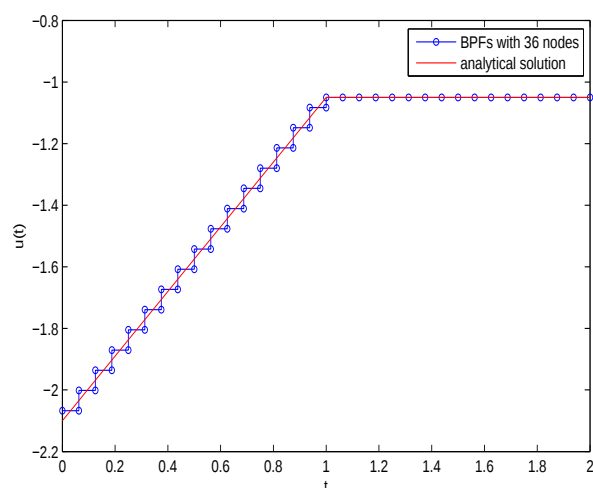
$$u^*(t) = \begin{cases} -2/1 + 1/0.5t, & t \in [0, 1], \\ -1/0.5, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

$$x^*(t) = \begin{cases} 1 - 1/1t + 0.525t^2, & t \in [0, 1], \\ -0.25 + 1/575t - 1/0.75t^2 + 0.175t^3, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

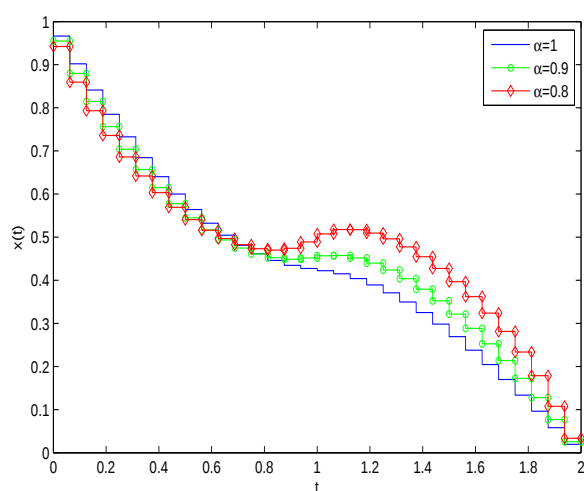
مقدار دقیق تابع هدف به ازای $\alpha = 1$ برابر است با $J^* = 1/8375$ [۶۹]. در جدول ۱.۳، مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف K با استفاده از روش بیان شده، نشان داده شده است. تابع کنترل $u(\cdot)$ و مسیر متناظر آن $x(\cdot)$ در شکل‌های ۱.۳، ۲.۳، ۳.۳ و ۴.۳ رسم شده است.



شکل ۱.۳: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۳.



شکل ۲.۳: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۳.



شکل ۳.۳: مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۱.۴.۳.

مثال ۲.۴.۳. مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری با دستگاه معادلات غیر خطی زیر را در نظر بگیرید

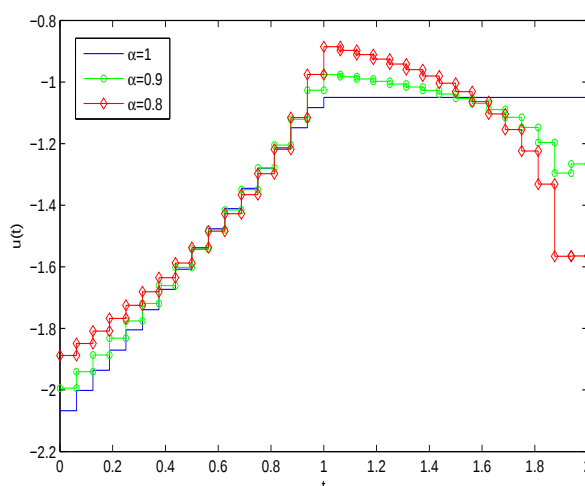
$${}^C D_t^\alpha x(t) = x(t-1)u(t-2), \quad t \in (0, 3],$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0],$$

$$u(t) = 0, \quad t \in [-2, 0],$$

با تابع هدف درجه دوم به صورت زیر

$$\text{minimize } J = \int_0^3 [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$



شکل ۴.۳: مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۱.۴.۳.

جدول ۱.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۳.

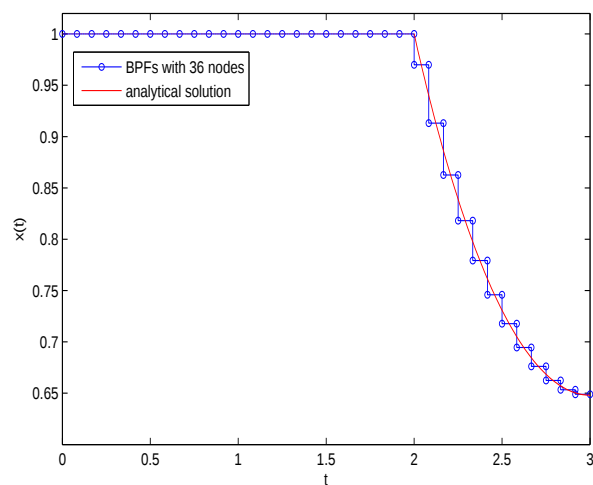
خطای مطلق	مقدار تقریبی J	مقدار دقیق	تعداد نقاط هم محلی
۰/۰۰۲۸۷۵	۱/۸۴۰۳۷۵	۱/۸۳۷۵	$K = 8$
۰/۰۰۰۷۱۷	۱/۸۳۸۲۱۸	۱/۸۳۷۵	$K = 16$
۰/۰۰۰۱۷۹	۱/۸۳۷۶۷۹	۱/۸۳۷۵	$K = 32$

برای این مسئله جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

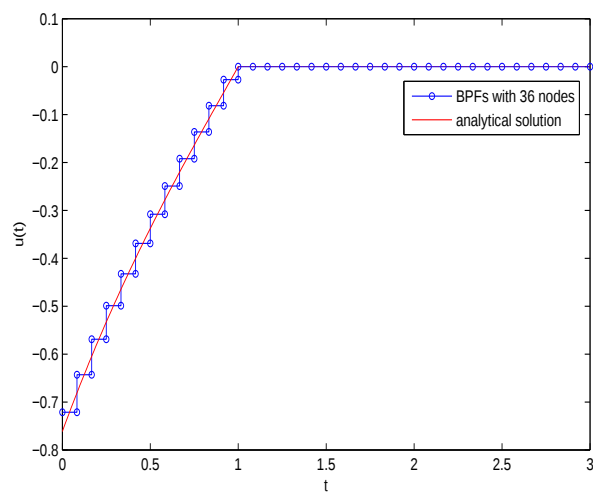
$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{e^2+1}e^{t+2} - \frac{e^4}{e^2+1}e^{-(t+2)}, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [1, 3]. \end{cases}$$

$$x^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2], \\ \frac{e^{-2}}{e^2+1}e^t + \frac{e^4}{e^2+1}e^{-t}, & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

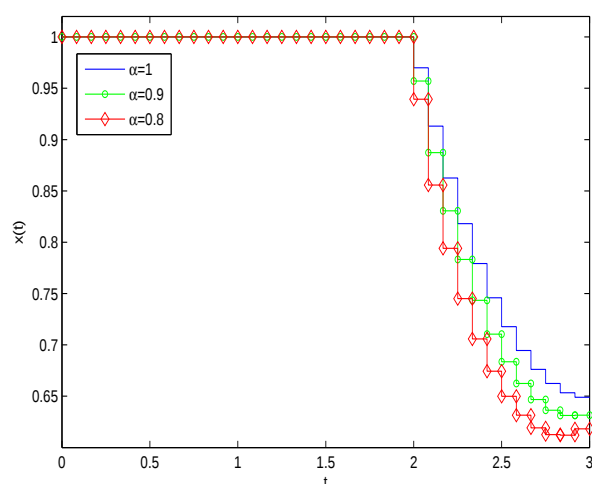
مقدار دقیق تابع هدف به ازای $\alpha = 1$ برابر است با $J^* = 2/761594$ [۷۱]. در جدول ۲.۳، مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف K با استفاده از روش بیان شده، نشان داده شده است. تابع کنترل $u(\cdot)$ و مسیر متناظر آن $x(\cdot)$ در شکل‌های ۵.۳، ۶.۳، ۷.۳ و ۸.۳ رسم شده است.



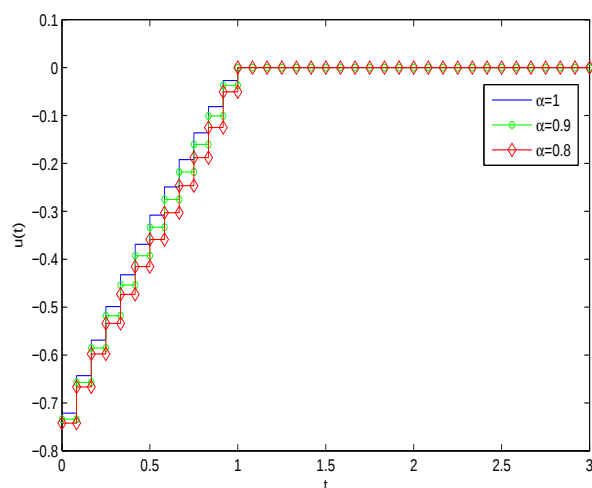
شکل ۵.۳: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $K = ۳۶$ در مثال ۲.۴.۳.



شکل ۶.۳: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $K = ۳۶$ در مثال ۲.۴.۳.



شکل ۷.۳: مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = ۳۶$ در مثال ۲.۴.۳.



شکل ۸.۳: مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = ۳۶$ در مثال ۲.۴.۳.

مثال ۳.۴.۳. مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \left[(x_1(t) + x_2(t))^2 + u^2(t) \right] dt,$$

subject to

$${}^C D_t^\alpha x_1(t) = x_1(t) + x_2(t - \frac{1}{\gamma}), \quad t \in [0, 1],$$

$${}^C D_t^\alpha x_2(t) = -\Delta x_1(t - \frac{1}{\gamma}) + x_2(t) - x_2(t - \frac{1}{\gamma}) + u(t), \quad t \in [0, 1],$$

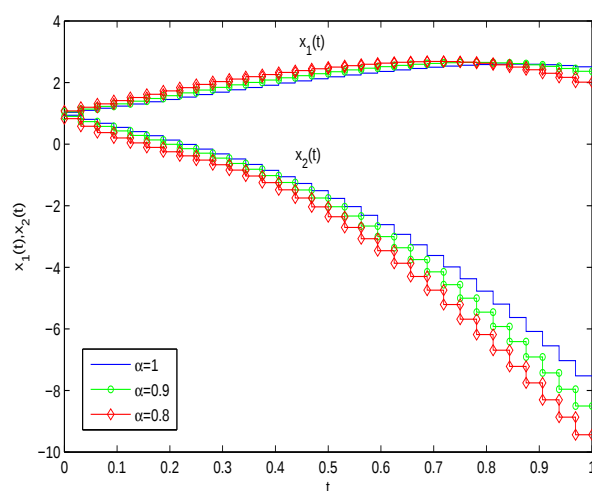
$$x_1(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\gamma}, 0],$$

$$x_2(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\gamma}, 0].$$

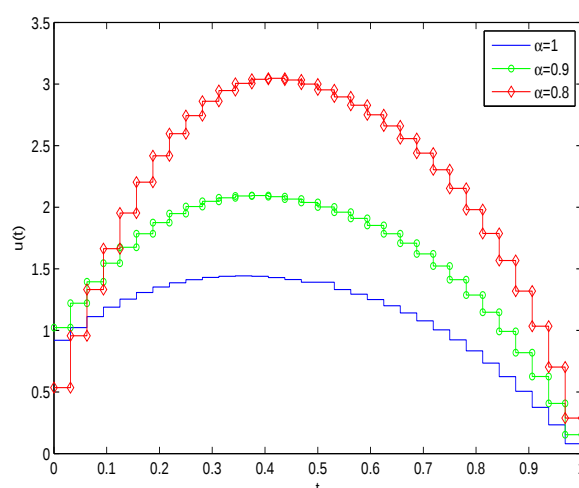
جدول ۲.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۴.۳.

روش	تعداد نقاط هم محلی	مقدار تقریبی J	مقدار دقیق
روش حاضر	$K = 6$	۲/۷۷۰۵۳۸	۲/۷۶۱۵۹۴
	$K = 12$	۲/۷۶۳۷۹۳	۲/۷۶۱۵۹۴
	$K = 36$	۲/۷۶۱۸۳۷	۲/۷۶۱۵۹۴
موجک‌های هار [۷۰]	$K = 16$	۲/۹۰۵۵۴۹	۲/۷۶۱۵۹۴
	$K = 32$	۲/۸۷۵۴۶۱	۲/۷۶۱۵۹۴
	$K = 128$	۲/۷۶۱۶۵۲	۲/۷۶۱۵۹۴

این مسئله به ازای $\alpha = 1$ در [۷۳] مطالعه شده است که مقدار تقریبی تابع هدف $J = 2/7930$ محاسبه شده است. با استفاده از روش بیان شده در این فصل به ازای $\alpha = 1$ و $K = 32$ ، مقدار تقریبی تابع هدف $J = 2/792377$ بدست آمده است. روش پیشنهادی دارای پیچیدگی محاسباتی کمتر نسبت به روش ارائه شده در [۷۳] است. تابع کنترل $u(\cdot)$ و مسیرهای متناظر $x_1(\cdot)$ و $x_2(\cdot)$ به ازای مقادیر مختلف α در شکل‌های ۹.۳ و ۱۰.۳ رسم شده است.



شکل ۹.۳: مسیرهای بهینه تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۴.۳.



شکل ۱۰.۳: مسیرهای بهینه تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $K = 32$ در مثال ۳.۴.۳.

جدول ۳.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف J در مثال ۴.۴.۳.

تعداد نقاط هم محلی	جواب تقریبی J	جواب دقیق
$K = 4$	$3/0376 \times 10^{-4}$	۰
$K = 8$	$6/3280 \times 10^{-5}$	۰
$K = 16$	$1/3522 \times 10^{-5}$	۰
$K = 32$	$3/2683 \times 10^{-6}$	۰
$K = 64$	$1/2820 \times 10^{-6}$	۰

مثال ۴.۴.۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید

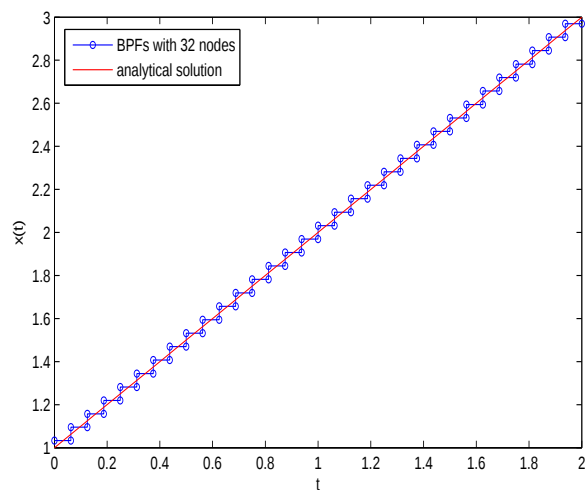
$$\text{minimize } J = \int_0^1 \left[(x(t) - t - 1)^2 + \left(u(t) - \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + t \right)^2 \right] dt,$$

subject to

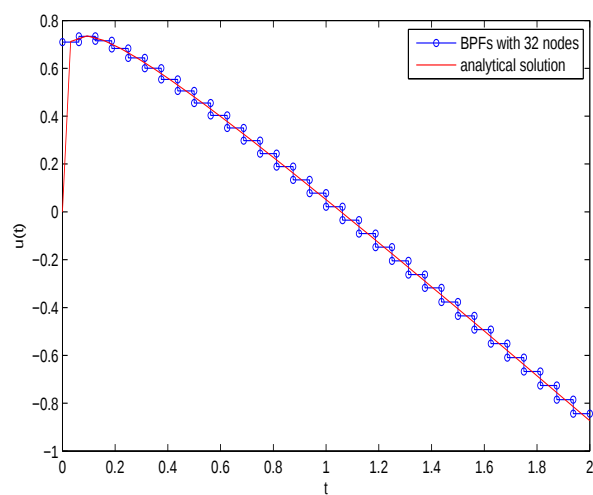
$${}^C D_t^{\alpha} x(t) = x(t - 1) + u(t),$$

$$x(t) = t + 1, \quad t \in [-1, 0].$$

برای این مسئله $x^*(t) = t + 1$ و $u^*(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} - t$ توابع حالت و کنترل بهینه هستند. مقدار دقیق تابع هدف $J^* = 0$ است. مقدار تقریبی تابع هدف J به ازای مقادیر مختلف K در جدول ۳.۳ نشان داده شده است. تابع کنترل $u(\cdot)$ و مسیر متناظر آن $x(\cdot)$ در شکل‌های ۱۱.۳ و ۱۲.۳ رسم شده است. همچنین بعضی از مقادیر عددی برای $x(t)$ در جدول ۴.۳ نمایش داده شده است.



شکل ۱۱.۳: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $x(\cdot)$ به ازای $K = ۳۲$ در مثال ۴.۴.۳.



شکل ۱۲.۳: مسیرهای بهینه تقریبی و دقیق $u(\cdot)$ به ازای $K = ۳۲$ در مثال ۴.۴.۳.

جدول ۴.۳: بعضی مقادیر عددی برای $x(\cdot)$ به ازای $K = ۳۲$ در مثال ۴.۴.۳.

t	مقدار دقیق	مقادیر عددی	خطای مطلق
۰/۰۳۱۳	۱/۰۳۱۳	۱/۰۳۳۴	$۲/۲ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۲۸۱۳	۱/۲۸۱۳	۱/۲۸۲۲	۹×۱۰^{-۴}
۰/۵۳۱۳	۱/۵۳۱۳	۱/۵۳۲۰	۷×۱۰^{-۴}
۰/۷۸۱۳	۱/۷۸۱۳	۱/۷۸۱۸	۵×۱۰^{-۴}
۱/۰۳۱۳	۲/۰۳۱۳	۲/۰۳۱۶	۴×۱۰^{-۴}
۱/۲۸۱۳	۲/۲۸۱۳	۲/۲۸۱۶	۴×۱۰^{-۴}
۱/۵۳۱۳	۲/۵۳۱۳	۲/۵۳۱۸	۶×۱۰^{-۴}
۱/۷۸۱۳	۲/۷۸۱۳	۲/۷۸۲۰	۷×۱۰^{-۴}
۱/۹۶۸۸	۲/۹۶۸۸	۲/۹۶۹۶	۹×۱۰^{-۴}

فصل ۴

تقریب پاده برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری

۱.۴ مقدمه

همانطور که در فصل قبل ذکر گردید، حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری در حالت کلی با روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر نیست. به همین علت پژوهشگران همواره سعی بر ارائه روش‌های تقریبی مختلف برای حل چنین مسائلی دارند. وجود تاخیر در کنار مشتق کسری در سیستم‌های مرتبه کسری تاخیری بر پیچیدگی این مسائل افزوده است. یکی از راهکارها در این زمینه استفاده از تقریب پاده برای حذف جملات دارای تاخیر می‌باشد. در بعضی از سیستم‌های کنترلی با تاخیر زمانی، برای برداشتن تاخیر، نیاز به جایگزینی تابع نمایی $e^{-\tau s}$ با یک تابع کسری است. یکی از مرسوم‌ترین این تقریب‌ها، تقریب پاده است. مفاهیم و کاربردهای تقریب پاده را می‌توان در [۷۵، ۷۶] مشاهده کرد.

۲.۴ تقریب پاده

فرض کنید تابع $f(x)$ دارای بسط مک لورن $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ است. تقریب پاده $[m/n]$ برای تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۷۷]

$$R_{[m/n]}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

که $P_m(x)$ و $Q_n(x)$ دو چندجمله‌ای به صورت زیر هستند

$$P_m(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m, \quad (1.4)$$

$$Q_n(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n. \quad (2.4)$$

ضرایب نامعلوم p_i ، $i = 1, \dots, m$ و q_j ، $j = 1, \dots, n$ در $R_{[m/n]}(x)$ می‌توانند با توجه به اینکه جمله اول در بسط مک لورن زیر بایستی صفر باشند، محاسبه شوند

$$f(x) - \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = O(x^{m+n+1}). \quad (3.4)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱.۴) و (۲.۴) می‌توانیم رابطه (۳.۴) را در $Q_n(x)$ ضرب کرده و در نتیجه خواهیم داشت

$$f(x)Q_n(x) - P_m(x) = 0.$$

با جایگذاری دو چندجمله‌ای در این عبارت و مقایسه ضرایب، به دستگاهی از $(m+n+1)$ معادله خطی می‌رسیم که می‌تواند به صورت ماتریسی زیر بیان شود

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_m & -a_{m-1} & \cdots & -a_{m-n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m+1} & -a_m & \cdots & -a_{m-n+2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m+2} & -a_{m+1} & \cdots & -a_{m-n+3} \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m+n-1} & -a_{m+n-2} & \cdots & -a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ a_{m+1} \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_{m+n} \end{bmatrix}.$$

با بکارگیری روش فوق، تقریب پاده $[1/1]$ برای تابع نمایی به صورت زیر است

$$e^x = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}. \quad (4.4)$$

قضیه ۱.۲.۴. [۷۷] تقریب پاده $[m/n]$ برای تابع $f(x)$ یکتاست.

تعریف ۱.۲.۴. [۷۷] تابع $f(z)$ یک سری استیلجس^۱ است اگر قابل نمایش به صورت زیر باشد

$$f(z) = \int_0^{R^{-1}} \frac{d\psi(t)}{1-tz} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i z^i,$$

که $d\psi(t)$ تابعی کراندار و غیر نزولی به صورت زیر است

$$\mu_i = \int_0^{R^{-1}} x^i d\psi(t).$$

قضیه ۲.۲.۴. [۷۷] فرض کنید $f(t)$ سری استیلجس غیر کسری با شعاع همگرایی R و $R_{[n+k/k]}(t)$ تقریب پاده تابع $f(t)$ روی بازه $[-\infty, R]$ باشد. در این صورت داریم

$$\forall n \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_{[n+k/k]}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{[k/n+k]}(t) = f(t), \quad (5.4)$$

$$\forall k \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_{[n+k/k]}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{[k/n+k]}(t) = f(t). \quad (6.4)$$

۳.۴ تقریب پاده برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری

در این قسمت تقریب پاده^۲ [۴۸] را برای تبدیل مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری (۱.۳) - (۵.۳) به یک مسئله بدون تأخیر بیان می‌کنیم.

فرض کنید $X(s)$ تبدیل لاپلاس دوطرفه [۷۹] برای $x(t)$ باشد، یعنی

$$x(t) \Leftrightarrow X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x(t) dt. \quad (7.4)$$

با توجه تعریف لاپلاس دوطرفه برای $x(t)$ ، تبدیلات لاپلاس دوطرفه $\dot{x}(t)$ و $x(t-\sigma)$ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$x(t-\sigma) \Leftrightarrow e^{-s\sigma} X(s), \quad (8.4)$$

$$\dot{x}(t) \Leftrightarrow sX(s). \quad (9.4)$$

برای حذف تأخیر تعریف می‌کنیم $y(t) = x(t-\sigma)$ و $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$. تبدیلات لاپلاس $Y(s)$ و $X(s)$ توسط رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند

$$Y(s) = e^{-s\sigma} X(s). \quad (10.4)$$

با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول، (۱۰.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$Y(s) = \frac{\frac{\gamma}{\sigma} - s}{\frac{\gamma}{\sigma} + s} X(s), \quad (11.4)$$

$$\left(\frac{\gamma}{\sigma} + s\right) Y(s) = \left(\frac{\gamma}{\sigma} - s\right) X(s). \quad (12.4)$$

^۱ Stieltjes series

^۲ Padé approximation

با تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین رابطه (۱۲.۴) خواهیم داشت

$$\dot{y}(t) = \frac{2}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t). \quad (13.4)$$

برای تأخیر در متغیر کنترل به طور مشابه می‌توان نوشت $w(t) = u(t - \tau)$ و $w(t) \Leftrightarrow W(s)$ در نتیجه

$$W(s) = \frac{\frac{2}{\tau} - s}{\frac{2}{\tau} + s} U(s), \quad (14.4)$$

$$(\frac{2}{\tau} + s)W(s) = (\frac{2}{\tau} - s)U(s). \quad (15.4)$$

با تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین رابطه بالا خواهیم داشت

$$\dot{w}(t) = \frac{2}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t). \quad (16.4)$$

برای بهبود دقت تقریب می‌توان تأخیر σ و τ را به بخش‌های کوچک‌تری تقسیم کرد. برای مثال می‌توان نوشت

$$y(t) \triangleq x(t - \frac{\sigma}{4}), \quad (17.4)$$

$$z(t) \triangleq y(t - \frac{\sigma}{4}) = x(t - \sigma), \quad (18.4)$$

$$w(t) \triangleq u(t - \frac{\tau}{4}), \quad (19.4)$$

$$q(t) \triangleq w(t - \frac{\tau}{4}) = u(t - \tau). \quad (20.4)$$

با بکارگیری مجدد تقریب پاده مرتبه اول خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{4}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{4}{\sigma}(2y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ \dot{w}(t) &= \frac{4}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t), \\ \dot{q}(t) &= \frac{4}{\tau}(2w(t) - q(t) - u(t)) + \dot{u}(t), \end{aligned}$$

و شرایط ابتدایی

$$\begin{aligned} x(\circ) &= \phi(\circ), \quad y(\circ) = \phi(-\frac{\sigma}{4}), \quad z(\circ) = \phi(-\sigma), \\ u(\circ) &= \psi(\circ), \quad w(\circ) = \psi(-\frac{\tau}{4}), \quad q(\circ) = \psi(-\tau). \end{aligned}$$

در نتیجه مسئله (۱.۳) - (۵.۳) به یک مسئله بدون تاخیر به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\text{minimize } J = H(t_f, x_{t_f}) + \int_0^{t_f} G(t, x(t), z(t), u(t), v(t)) dt, \quad (21.4)$$

subject to

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = F(t, x(t), z(t), u(t), v(t)), \quad (22.4)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\varphi}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \quad (23.4)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{\varphi}{\sigma}(\Upsilon y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \quad (24.4)$$

$$\dot{w}(t) = \frac{\varphi}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t), \quad (25.4)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\varphi}{\tau}(\Upsilon w(t) - v(t) - u(t)) + \dot{u}(t), \quad (26.4)$$

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad (27.4)$$

$$x(0) = \phi(0), \quad y(0) = \phi(-\frac{\sigma}{\varphi}), \quad z(0) = \phi(-\sigma), \quad (28.4)$$

$$u(0) = \psi(0), \quad w(0) = \psi(-\frac{\tau}{\varphi}), \quad v(0) = \psi(-\tau). \quad (29.4)$$

۴.۴ روش عددی مونتس-لژاندر برای حل مسئله کنترل بهینه کسری

در این قسمت، به دنبال ارائه یک روش عددی کارا بر مبنای روش‌های شبه طیفی با استفاده از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر هستیم. در ابتدا ماتریس عملیاتی مشتق کسری برای چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر را محاسبه می‌کنیم.

۱.۴.۴ ماتریس عملیاتی مشتق کسری

فرض کنید $\mathcal{M} = \{L_{0,\alpha}, L_{1,\alpha}, \dots, L_{m,\alpha}\} \subseteq L^2[0, 1]$ مجموعه چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به ازای مقدار مشخص $0 < \alpha \leq 1$ و f عضوی دلخواه در $L^2[0, 1]$ باشد. از آنجایی که $\mathcal{M}$ یک فضای برداری با بعد متناهی است، بنابراین $y_0 \in \mathcal{M}$ موجود است، بطوریکه

$$\exists y_0 \in \mathcal{M}; \quad \forall y \in \mathcal{M}, \quad \|f - y_0\|_2 \leq \|f - y\|_2,$$

که در آن $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

از آنجایی که $y_0 \in \mathcal{M}$ بهترین تقریب است، بنابراین ضرایب $c_j, j = 0, 1, \dots, m$ موجودند به قسمی که

$$f(t) \simeq y_0 = \sum_{j=0}^m c_j L_{j,\alpha} = C^T \mathcal{L}(t),$$

که c_j ها توسط رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$c_j = (j\alpha + 1) \int_0^1 f(t) L_{j,\alpha}(t) dt, \quad (30.4)$$

و داریم

$$\mathcal{C}^T = [c_0, c_1, \dots, c_m], \quad (31.4)$$

$$\mathcal{L}(t)^T = [L_{0,\alpha}(t), L_{1,\alpha}(t), \dots, L_{m,\alpha}(t)]. \quad (32.4)$$

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $\mathcal{L}(t)$ بردار چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر در رابطه (۳۲.۴) و همچنین $0 < \alpha < 1$. در این صورت

$${}_0^C D_t^\alpha \mathcal{L}(t) \simeq D^{(\alpha)} \mathcal{L}(t),$$

که $D^{(\alpha)}$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری $(m+1) \times (m+1)$ از مرتبه α است و به صورت زیر بیان می‌شود

$$D^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1(m+1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ D_{(m+1)1} & D_{(m+1)2} & \cdots & D_{(m+1)(m+1)} \end{bmatrix}, \quad (33.4)$$

که

$$D_{i,j} = B_{i-1,j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq m+1,$$

$$B_{i,j} = (j\alpha + 1) \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+j-k-l} \Gamma(k\alpha + 1) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + l + \frac{1}{\alpha})}{\Gamma(k\alpha + 1 - \alpha) ((k-1)\alpha + l\alpha + 1) \Gamma(l + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) (j-l)! l!}.$$

برهان. برای ساختن $D^{(\alpha)}$ از روابط (۱۴.۱) و (۴۱.۱) برای محاسبه ${}_0^C D_t^\alpha L_{i,\alpha}$ ، $i = 0, 1, \dots, m$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha L_{i,\alpha}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} L_{i,\alpha}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k} \Gamma(k\alpha + 1) \Gamma(i + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(i + k + \frac{1}{\alpha})}{\Gamma(k\alpha + 1 - \alpha) \Gamma(k + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(i + \frac{1}{\alpha}) (i-k)! k!} t^{k\alpha-\alpha}. \end{aligned}$$

اکنون $t^{k\alpha-\alpha}$ را با استفاده از $m+1$ جمله از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر تقریب می‌زنیم

$$t^{k\alpha-\alpha} \simeq \sum_{j=0}^m b_j L_{j,\alpha}(t), \quad (34.4)$$

که

$$b_j = \frac{(j\alpha + 1)}{T} \int_0^T t^{k\alpha-\alpha} L_{j,\alpha}(t) dt \quad (35.4)$$

$$= \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + l + \frac{1}{\alpha})}{((k+1)\alpha + l\alpha + 1) \Gamma(l + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) (j-l)! l!}. \quad (36.4)$$

بنابراین داریم

$${}_0^C D_t^\alpha L_{i,\alpha}(t) = \sum_{j=0}^m B_{i,j} L_{j,\alpha}(t),$$

که در آن

$$B_{i,j} = \frac{(j\alpha + 1)}{T} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+j-k-l} \Gamma(k\alpha + 1) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + l + \frac{1}{\alpha})}{\Gamma(k\alpha + 1 - \alpha) ((k+1)\alpha + l\alpha + 1) \Gamma(l + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) (j-l)!!!}.$$

□

۲.۴.۴ تقریب مسئله کنترل بهینه کسری

در این قسمت با استفاده از روش کوادراتور گوس-لژاندر به حل مسئله کنترل بهینه کسری نهایی می‌پردازیم. در رویکرد حاضر، از دستور کوادراتور برای تقریب انتگرال تابع هدف و از نقاط لژاندر-گوس یا همان ریشه‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_{N+1}(t) = 0$ ، برای گسسته سازی معادلات دیفرانسیل کسری استفاده می‌کنیم. اکنون نحوه‌ی محاسبه نقاط گوس-لژاندر انتقال یافته و وزن‌های متناظر را بیان می‌کنیم. فرض کنید x_k به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ نقاط گوس-لژاندر استاندارد روی بازه $(-1, 1)$ باشند که ریشه‌های $L_{N+1}(x)$ هستند. در این صورت وزن‌های متناظر برابرند با [۴۱]

$$w_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'(x_k)]^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

نقاط گوس-لژاندر انتقال یافته روی بازه $[0, 1]$ با η_k نمایش داده می‌شوند. واضح است که به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ وزن‌ها و نقاط متناظر به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\eta_k = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\hat{w}_k = \frac{w_k}{2}.$$

اکنون فرض کنید که جواب‌های مسئله (۲۱.۴) - (۲۹.۴) با استفاده از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به صورت زیر تقریب زده می‌شوند

$$\begin{cases} x(t) \approx x_N(t) = \mathcal{X}^T \mathcal{L}(t) = \sum_{i=0}^N X_i L_{i,\alpha}(t), \\ y(t) \approx y_N(t) = \mathcal{Y}^T \mathcal{L}(t) = \sum_{i=0}^N Y_i L_{i,\alpha}(t), \\ z(t) \approx z_N(t) = \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(t) = \sum_{i=0}^N Z_i L_{i,\alpha}(t), \\ u(t) \approx u_N(t) = \mathcal{U}^T \mathcal{L}(t) = \sum_{i=0}^N U_i L_{i,\alpha}(t), \\ w(t) \approx w_N(t) = \mathcal{W}^T \mathcal{L}(t) = \sum_{i=0}^N W_i L_{i,\alpha}(t), \\ v(t) \approx v_N(t) = \mathcal{V}^T \mathcal{L}(t) = \sum_{i=0}^N V_i L_{i,\alpha}(t), \end{cases} \quad (37.4)$$

که $X_i, Y_i, Z_i, U_i, W_i, V_i$ به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ضرایب نامعلوم چندجمله‌ای‌های مونوس-لژاندر $L_{i,\alpha}(t)$ از مرتبه α هستند. اکنون مسئله (۲۱.۴)–(۲۹.۴) را در نظر بگیرید. برای تقریب تابع هدف (۲۱.۴) از دستور کوادراتور گاوس-لژاندر و رابطه (۳۷.۴) استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر می‌توان نوشت

$$J = \int_0^1 G(t, x(t), z(t), u(t), q(t)) dt = \sum_{k=0}^N \hat{w}_k G(\eta_k, \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{V}^T \mathcal{L}(\eta_k)) + e_N,$$

که طرف راست معادله یک تقریب برای انتگرال و e_N خطای این تقریب است که برای چندجمله‌ای‌های از مرتبه کمتر از $2N + 1$ صفر است. در اینجا η_k و $\hat{w}_k$ ، $k = 0, 1, \dots, N$ به ترتیب نقاط و وزن‌های دستور کوادراتور هستند. همچنین محدودیت‌های (۲۲.۴)–(۲۷.۴) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\mathcal{X}^T D^{(\alpha)} \mathcal{L}(\eta_k) = F(\eta_k, \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{V}^T \mathcal{L}(\eta_k)), \quad (38.4)$$

$$\mathcal{Y}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma} (\mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{Y}^T \mathcal{L}(\eta_k)) - \mathcal{X}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k), \quad (39.4)$$

$$\mathcal{Z}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma} (\mathcal{Y}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k)) + \mathcal{X}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k), \quad (40.4)$$

$$\mathcal{W}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = \frac{\mathcal{F}}{\tau} (\mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{W}^T \mathcal{L}(\eta_k)) - \mathcal{U}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k), \quad (41.4)$$

$$\mathcal{V}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = \frac{\mathcal{F}}{\tau} (\mathcal{W}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{V}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k)) + \mathcal{U}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k), \quad (42.4)$$

$$g(\eta_k, \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k)) \leq 0. \quad (43.4)$$

بنابراین مسئله کنترل بهینه کسری (۲۱.۴)–(۲۹.۴) به مسئله برنامه ریزی غیرخطی زیر تبدیل می‌شود

$$\text{minimize } \sum_{k=0}^N \hat{w}_k G(\eta_k, \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{V}^T \mathcal{L}(\eta_k)),$$

subject to

$$\mathcal{X}^T D^{(\alpha)} \mathcal{L}(\eta_k) - F(\eta_k, \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{V}^T \mathcal{L}(\eta_k)) = 0,$$

$$\mathcal{Y}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) - \frac{\mathcal{F}}{\sigma} (\mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{Y}^T \mathcal{L}(\eta_k)) + \mathcal{X}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = 0,$$

$$\mathcal{Z}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) - \frac{\mathcal{F}}{\sigma} (\mathcal{Y}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k)) - \mathcal{X}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = 0,$$

$$\mathcal{W}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) - \frac{\mathcal{F}}{\tau} (\mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{W}^T \mathcal{L}(\eta_k)) + \mathcal{U}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = 0,$$

$$\mathcal{V}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) - \frac{\mathcal{F}}{\tau} (\mathcal{W}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{V}^T \mathcal{L}(\eta_k) - \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k)) - \mathcal{U}^T D^{(1)} \mathcal{L}(\eta_k) = 0,$$

$$g(\eta_k, \mathcal{X}^T \mathcal{L}(\eta_k), \mathcal{U}^T \mathcal{L}(\eta_k)) \leq 0,$$

$$\mathcal{X}^T \mathcal{L}(0) - \phi(0) = 0, \quad \mathcal{Y}^T \mathcal{L}(0) - \phi(-\frac{\sigma}{\mathcal{F}}) = 0, \quad \mathcal{Z}^T \mathcal{L}(0) - \phi(-\sigma) = 0,$$

$$\mathcal{U}^T \mathcal{L}(0) - \psi(0) = 0, \quad \mathcal{W}^T \mathcal{L}(0) - \psi(-\frac{\tau}{\mathcal{F}}) = 0, \quad \mathcal{V}^T \mathcal{L}(0) - \psi(-\tau) = 0,$$

که $k = 0, 1, \dots, N$. بنابراین مسئله کنترل بهینه کسری به یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی تبدیل شده است که با استفاده از نرم افزار میپل قابل محاسبه است [۱۹].

۳.۴.۴ حل مسئله بهینه سازی نهایی

در روش ارائه شده، از آنجایی که گرادیان تابع هدف موجود است از روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی^۳ استفاده می کنیم. این روش به عنوان یکی از روش های موفق برای حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی مقید شناخته می شود. مسئله بهینه سازی نهایی با استفاده از روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی در نرم افزار میپل اجرا شده است. در ادامه به توضیح مختصر این روش می پردازیم.

مسئله برنامه ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } f(x), \quad (44.4)$$

$$\text{subject to } h(x) = 0, \quad (45.4)$$

$$g(x) \leq 0, \quad (46.4)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad (47.4)$$

که $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی یک روند تکراری است که مسئله بهینه سازی غیرخطی را با توجه به نقطه مفروض x^k , $k \in \mathbb{N}_0$ به زیرمسئله هایی که یک برنامه ریزی درجه دوم هستند تبدیل می کند. با حل این مسئله، نقطه تکرار بعدی x^{k+1} ساخته می شود. ساختار این روش به گونه ای است که دنباله $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ به مقدار کمینه موضعی x^* مسئله برنامه ریزی غیرخطی (۴۴.۴) – (۴۷.۴) وقتی $k \rightarrow \infty$ همگرا می شود. زیر مسئله ای که در هر تکرار حل می شود به صورت زیر بدست می آید.

لاگرانژین زیر برای مسئله (۴۴.۴) – (۴۷.۴) را در نظر بگیرید

$$L(x, \lambda, \beta) = f(x) + \lambda^T g(x) + \beta^T h(x),$$

که λ و β ضربگرهای لاگرانژ هستند. در تکرار x^k ، جهت مناسب d^k از حل یک زیر مسئله که یک برنامه ریزی درجه دوم است، بدست می آید

$$\text{minimize } f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla_{xx}^2 L(x_k, \lambda_k, \beta_k) d, \quad (48.4)$$

$$\text{subject to } h(x_k) + \nabla h(x_k)^T d = 0, \quad (49.4)$$

$$g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d \geq 0. \quad (50.4)$$

توجه داریم که $f(x_k)$ به دلیل اینکه مقدار ثابتی است می تواند از تابع هدف کنار گذاشته شود. برای مطالعه بیشتر در مورد همگرایی و ساختار روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی می توانید [۴۹] را مطالعه نمایید.

^۳ Sequential quadratic programming

ملاحظه ۱.۴.۴. در بعضی از مقالات، نویسندگان از تغییر متغیر برای تبدیل یک بازه به بازه دیگر استفاده می‌کنند. برای مثال در [۸۹] نویسندگان از روش موجک برنولی برای حل مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری استفاده کرده‌اند. آنها از قاعده زنجیره‌ای برای تغییر بازه مسئله به بازه $[0, 1]$ استفاده کرده‌اند اما محاسبات آنها اشتباه است. بایستی توجه داشته باشیم که قاعده زنجیره‌ای برای مشتق کسری برقرار نیست. در این مورد برای تغییر بازه $[0, T]$ به بازه $[0, 1]$ از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۴. فرض کنید $t \in [0, T]$ و $\theta = \frac{t}{T}$. آنگاه برای مشتق کسری کاپوتو رابطه زیر برقرار است

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = T^{-\alpha} \times {}_0^C D_\theta^\alpha y(\theta). \quad (51.4)$$

برهان. ابتدا تعریف می‌کنیم $x(t) = x(T\theta) = y(\theta)$. اکنون با استفاده از تعریف مشتق کسری کاپوتو می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dx}{dt}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{T\theta} (T\theta-\tau)^{-\alpha} \frac{1}{T} \frac{dx}{dt}\left(\frac{\tau}{T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\theta (T\theta-T\rho)^{-\alpha} \frac{1}{T} \frac{dx}{dt}(\rho)(T d\rho) \\ &= \frac{T^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\theta (\theta-\rho)^{-\alpha} \frac{dx}{dt}(\rho)(d\rho) \\ &= T^{-\alpha} \times {}_0^C D_\theta^\alpha y(\theta). \end{aligned} \quad (52.4)$$

□

در ادامه از قضیه ۲.۴.۴ برای تبدیل هر بازه دلخواه به بازه $[0, 1]$ استفاده می‌کنیم.

۵.۴ نتایج عددی

در این قسمت، روش پیشنهادی با چندین مثال مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و کارایی و اعتبار آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. همه مثال‌ها با استفاده از نرم افزار میپل ۱۸ با $Digits = 20$ محاسبه شده‌اند. مسئله بهینه سازی غیرخطی نهایی با استفاده از دستور *NLPSolve* حل شده است. نتایج بدست آمده در این فصل در مقاله [۷۸] ارائه شده است.

مثال ۱.۵.۴. مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\varphi} \int_0^{\varphi} (x^{\varphi}(t) + u^{\varphi}(t)) dt, \quad (53.4)$$

subject to

$${}^C D_t^{\alpha} x(t) = x(t-1) + u(t), \quad (54.4)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]. \quad (55.4)$$

اکنون مسئله را با استفاده از روش پیشنهادی در بخش‌های قبل حل می‌کنیم. توجه داریم که در این مثال، تاخیر تنها در متغیر حالت یعنی $\sigma = 1$ است. ابتدا بازه $[0, \varphi]$ را به بازه $[0, 1]$ با استفاده از تغییر متغیر $\theta = \frac{t}{\varphi}$ تبدیل می‌کنیم. در نتیجه

$$x(t) = x(\varphi\theta) = \hat{x}(\theta), \quad (56.4)$$

$$u(t) = u(\varphi\theta) = \hat{u}(\theta), \quad (57.4)$$

$$x(t-1) = x(\varphi\theta-1) = x[\varphi(\theta-\frac{1}{\varphi})] = \hat{x}(\theta-\frac{1}{\varphi}). \quad (58.4)$$

بنابراین معادلات (۵۳.۴)–(۵۴.۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$\text{minimize } J = \int_0^1 (\hat{x}^{\varphi}(\theta) + \hat{u}^{\varphi}(\theta)) d\theta, \quad (59.4)$$

subject to

$${}^C D_{\theta}^{\alpha} \hat{x}(\theta) = \varphi^{\alpha} (\hat{x}(\theta-\frac{1}{\varphi}) + \hat{u}(\theta)), \quad (60.4)$$

$$\hat{x}(\theta) = 1, \quad \theta \in [-\frac{1}{\varphi}, 0]. \quad (61.4)$$

فرض کنید

$$\begin{cases} y(\theta) \triangleq \hat{x}(\theta-\frac{1}{\lambda}), \\ z(\theta) \triangleq y(\theta-\frac{1}{\lambda}) = \hat{x}(\theta-\frac{1}{\varphi}), \\ q(\theta) \triangleq z(\theta-\frac{1}{\varphi}) = \hat{x}(\theta-\frac{1}{\varphi}). \end{cases} \quad (62.4)$$

در نتیجه، معادله دیفرانسیل کسری (۵۴.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$${}^C D_{\theta}^{\alpha} \hat{x}(\theta) = \varphi^{\alpha} (q(\theta) + \hat{u}(\theta)), \quad (63.4)$$

$$\dot{y}(\theta) = \lambda (\hat{x}(\theta) - y(\theta)) - \dot{\hat{x}}(\theta), \quad (64.4)$$

$$\dot{z}(\theta) = \lambda (\varphi y(\theta) - z(\theta) - \hat{x}(\theta)) + \dot{\hat{x}}(\theta), \quad (65.4)$$

$$\dot{q}(\theta) = \lambda (\varphi z(\theta) - q(\theta) - \varphi y(\theta) + \varphi \hat{x}(\theta)) - \dot{\hat{x}}(\theta), \quad (66.4)$$

جدول ۱.۴: نتایج تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۴.

تابع کنترل $u(t)$			تابع حالت $x(t)$	
زمان	روش ارائه شده	روش [۸۳]	روش ارائه شده	روش [۸۳]
۰/۰۰	-۱/۹۸۰۲	-۱/۹۸۷۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
۰/۲۰	-۱/۶۵۶۳	-۱/۶۵۶۶	۰/۸۳۶۱	۰/۸۳۶۴
۰/۴۱	-۱/۳۷۵۸	-۱/۳۶۹۱	۰/۷۲۸۴	۰/۷۲۹۹
۰/۶۱	-۱/۱۵۰۵	-۱/۱۱۴۳	۰/۶۸۷۹	۰/۶۷۹۴
۰/۸۱	-۰/۹۵۵۵	-۰/۹۵۴۷	۰/۶۸۴۹	۰/۶۷۰۳
۱/۰۲	-۰/۷۷۸۳	-۰/۷۹۴۷	۰/۷۰۰۷	۰/۶۹۷۱
۱/۲۲	-۰/۶۳۲۰	-۰/۶۵۲۵	۰/۷۲۶۵	۰/۷۳۲۱
۱/۴۳	-۰/۴۸۹۱	-۰/۵۰۳۱	۰/۷۶۷۳	۰/۷۷۱۶
۱/۶۳	-۰/۳۴۰۸	-۰/۳۳۶۲	۰/۸۲۶۴	۰/۸۳۱۰
۱/۸۳	-۰/۱۶۴۳	-۰/۱۶۳۱	۰/۹۱۴۷	۰/۹۱۶۳
۲/۰۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰	۱/۰۱۹۱	۱/۰۱۸۹

با شرایط اولیه

$$\hat{x}(\circ) = 1, \quad y(\circ) = 1, \quad z(\circ) = 1, \quad q(\circ) = 1. \quad (۶۷.۴)$$

مسئله کمینه سازی (۵۳.۴) با توجه به (۶۳.۴)–(۶۷.۴) با استفاده از روش شبه طیفی مونتس–لژاندر حل شده و نتایج در جدول ۱.۴ گزارش شده است. همچنین مقادیر تابع هدف J به ازای $\alpha = ۰/۸, ۰/۹, ۱$ و $N = ۲۰$ در جدول ۲.۴ نشان داده شده است. نمودارهای توابع حالت و کنترل برای $N = ۲۰$ به ترتیب در شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ رسم شده‌اند.

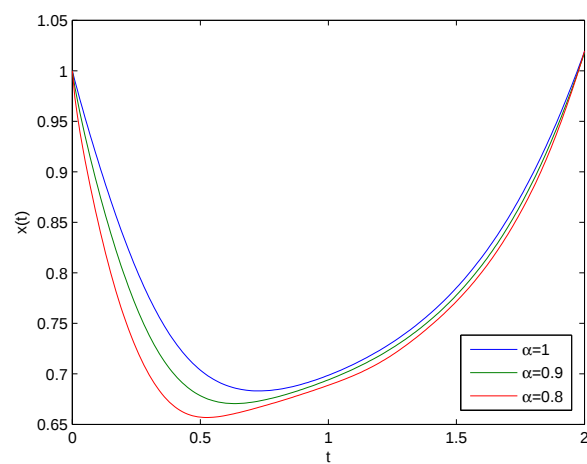
مثال ۲.۵.۴. اکنون مثال دیگری که تاخیر در متغیر کنترل است را در نظر می‌گیریم

$$\text{minimize } J = \frac{1}{\tau} \int_{\circ}^{\circ/۲۵} (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (۶۸.۴)$$

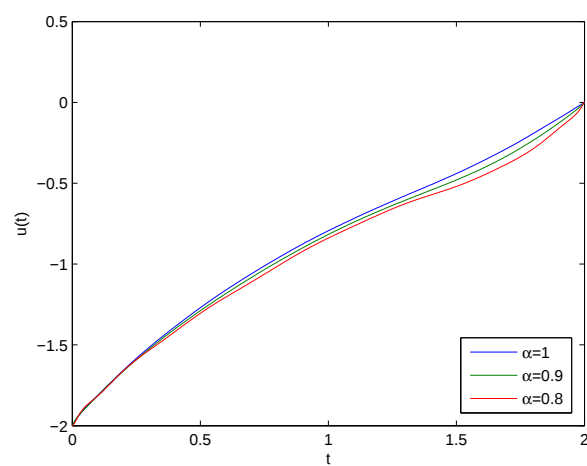
subject to

$${}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + u(t - \circ/۱) + u(t), \quad (۶۹.۴)$$

$$x(\circ) = 1, \quad u(t) = \circ \quad t \in [-\circ/۱, \circ]. \quad (۷۰.۴)$$



شکل ۱.۴: مقادیر تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $N = 2^\circ$ در مثال ۱.۵.۴.



شکل ۲.۴: مقادیر تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $N = 2^\circ$ در مثال ۱.۵.۴.

جدول ۲.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف J در مثال ۱.۵.۴.

مقادیر J	مقادیر α	روش
۱/۶۴۷۴۵۳	$\alpha = ۱$	روش ارائه شده
۱/۶۵۷۹۸۸	$\alpha = ۰/۹$	$N = ۲۰$
۱/۶۶۸۹۹۴	$\alpha = ۰/۸$	
۱/۶۴۹۷	$\alpha = ۱$	توابع والش [۸۳]
		$N = ۱۰۰$
۱/۶۴۷۸۷۴	$\alpha = ۱$	توابع هیبرید [۸۴]
		$N = ۳, M = ۶$

با استفاده از تغییر متغیر $\theta = ۴t$ داریم

$$x(t) = x\left(\frac{\theta}{۴}\right) = \hat{x}(\theta), \quad (۷۱.۴)$$

$$u(t) = u\left(\frac{\theta}{۴}\right) = \hat{u}(\theta), \quad (۷۲.۴)$$

$$u(t - ۰/۱) = u\left(\frac{\theta}{۴} - ۰/۱\right) = u\left[\frac{۱}{۴}\left(\theta - \frac{۰/۱}{۴}\right)\right] = \hat{u}\left(\theta - \frac{۰/۱}{۴}\right). \quad (۷۳.۴)$$

بنابراین معادلات (۶۸.۴) – (۷۰.۴) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\text{minimize } J = \frac{۱}{\lambda} \int_0^1 (\hat{x}^2(\theta) + \hat{u}^2(\theta)) d\theta, \quad (۷۴.۴)$$

subject to

$${}^C D_{\theta}^{\alpha} \hat{x}(t) = (۰/۲۵)^{\alpha} (\hat{x}(\theta) + \hat{u}(\theta - \frac{۰/۱}{۴}) + \hat{u}(\theta)), \quad (۷۵.۴)$$

$$\hat{x}(۰) = ۱, \quad \hat{u}(\theta) = ۰ \quad \theta \in [-\frac{۰/۱}{۴}, ۰]. \quad (۷۶.۴)$$

اکنون از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} w(\theta) \triangleq \hat{u}(\theta - \frac{۰/۱}{\lambda}), \\ v(\theta) \triangleq w(\theta - \frac{۰/۱}{\lambda}) = \hat{u}(\theta - \frac{۰/۱}{۴}). \end{cases}$$

مسئله معادلات دیفرانسیل (۷۵.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} {}^C D_{\theta}^{\alpha} \hat{x}(\theta) &= \hat{x}(\theta) + v(\theta) + \hat{u}(\theta), \\ \dot{w}(\theta) &= \frac{1}{\theta} (\hat{u}(\theta) - w(\theta)) - \dot{\hat{u}}(\theta), \\ \dot{v}(\theta) &= \frac{1}{\theta} (2w(\theta) - v(\theta) - \hat{u}(\theta)) + \dot{\hat{u}}(\theta), \end{aligned}$$

با مقادیر اولیه

$$x(\circ) = 1, \quad u(\circ) = \circ, \quad w(\circ) = \circ, \quad v(\circ) = \circ.$$

با بکارگیری روش ارائه شده، مقادیر تابع هدف به ازای $N = 5$ برابر است با $J = \circ/154268$. مقادیر تقریبی تابع هدف J به ازای مقادیر مختلف $\alpha = \circ/8, \circ/9, 1$ و $N = 5$ در جدول ۳.۴ ارائه شده است و با دو روش مقایسه شده است. در شکل‌های ۳.۴ و ۴.۴، نتایج عددی به ازای $N = 5$ برای توابع حالت و کنترل رسم شده‌اند.

جدول ۳.۴: مقادیر تقریبی J در مثال ۲.۵.۴

مقدار J	مقدار α	روش
$\circ/154268$	$\alpha = 1$	روش ارائه شده
$\circ/159209$	$\alpha = \circ/9$	$N = 5$
$\circ/163072$	$\alpha = \circ/8$	
$\circ/156586$	$\alpha = 1$	روش [۸۵]
		$N = 5$
$\circ/1563$	$\alpha = 1$	روش [۸۶]

مثال ۳.۵.۴. مسئله کنترل بهینه کسری با تاخیر در متغیر حالت و کنترل زیر را در نظر بگیرید

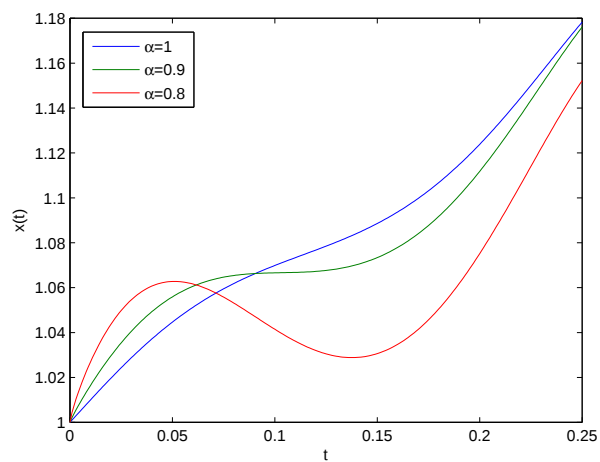
$$\text{minimize } J = \frac{1}{\varphi} \int_{\circ}^1 (x^2(t) + \frac{1}{\varphi} u^2(t)) dt, \quad (77.4)$$

subject to

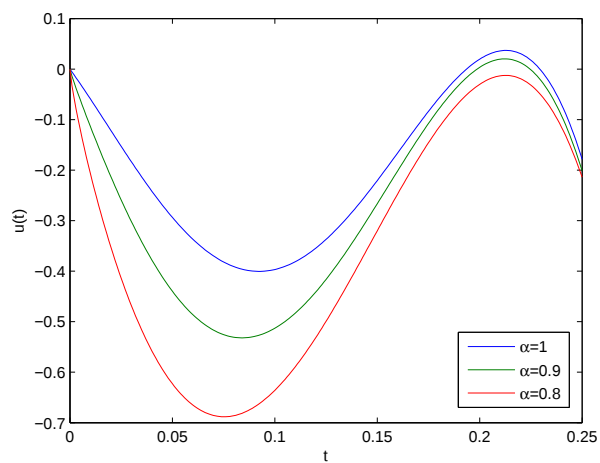
$${}^C D_t^{\alpha} x(t) = -x(t) + x(t - \frac{1}{\varphi}) + u(t) - \frac{1}{\varphi} u(t - \frac{2}{\varphi}), \quad (78.4)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\varphi}, \circ], \quad (79.4)$$

$$u(t) = \circ \quad t \in [-\frac{2}{\varphi}, \circ]. \quad (80.4)$$



شکل ۳.۴: مقادیر تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $N = 5$ در مثال ۲.۵.۴.



شکل ۴.۴: مقادیر تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $N = 5$ در مثال ۲.۵.۴.

در اینجا، مسئله دارای دو تاخیر $\sigma = \frac{1}{4}$ در متغیر حالت و $\tau = \frac{2}{3}$ در متغیر کنترل است. بطور مشابه برای بدست آوردن نتایج دقیق تر به صورت زیر عمل می کنیم

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{12}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{12}) = x(t - \frac{1}{6}), \\ q(t) \triangleq z(t - \frac{1}{6}) = x(t - \frac{1}{3}), \\ w(t) \triangleq u(t - \frac{1}{6}), \\ v(t) \triangleq w(t - \frac{1}{6}) = u(t - \frac{1}{3}), \\ k(t) \triangleq v(t - \frac{1}{3}) = u(t - \frac{2}{3}). \end{cases}$$

در اینصورت معادله (۷۸.۴) به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha x(t) &= -x(t) + q(t) + u(t) - \frac{1}{4}k(t), \\ \dot{y}(t) &= 24(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) &= 24(2y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ \dot{q}(t) &= 12(3z(t) - q(t) - 4y(t) + 2x(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{w}(t) &= 12(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t), \\ \dot{v}(t) &= 12(2w(t) - v(t) - u(t)) + \dot{u}(t), \\ \dot{k}(t) &= 6(3v(t) - k(t) - 4w(t) + 2u(t)) - \dot{u}(t), \end{aligned}$$

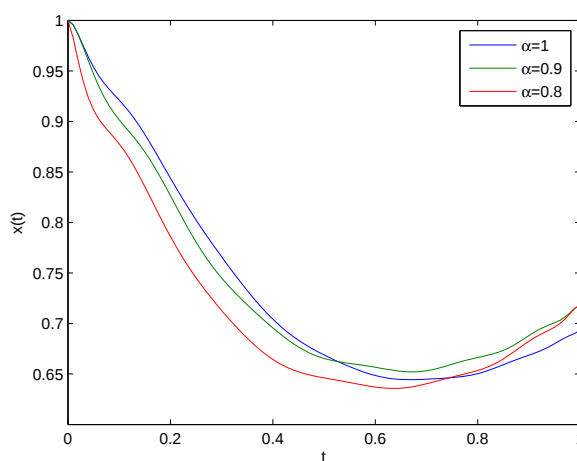
با مقادیر اولیه

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1, \quad q(0) = 1, \\ u(0) &= 0, \quad w(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad k(0) = 0. \end{aligned}$$

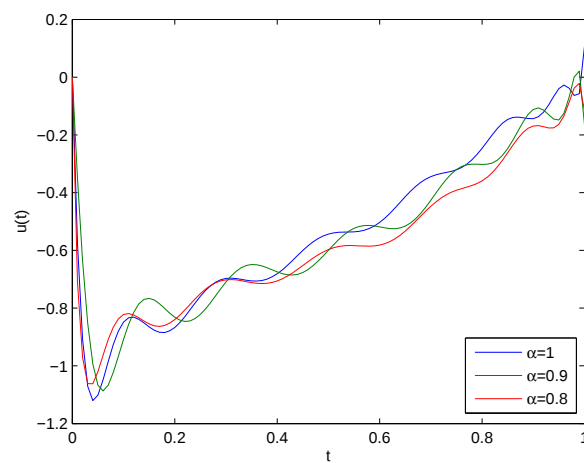
این مسئله را با استفاده از روش ارائه شده و $N = 20$ حل می کنیم. با انتخاب مقادیر مختلف α ، نتایج بدست آمده برای تابع هدف J در جدول ۴.۴ آمده است. نمودار تابع حالت و کنترل بهینه $x(t)$ و $u(t)$ در شکل های ۵.۴ و ۶.۴ نشان داده شده است.

جدول ۴.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف J در مثال ۳.۵.۴.

روش	مقدار α	مقدار J
روش حاضر $N = 20$	$\alpha = 1$	۰/۳۶۷۷۰۰
	$\alpha = 0/9$	۰/۳۶۷۳۷۸
	$\alpha = 0/8$	۰/۳۵۶۶۷۰
توابع بلاک پالس $N = 45$ [۸۷]	$\alpha = 1$	۰/۳۷۳۱۱۷
	$\alpha = 1$	۰/۳۷۳۱۱۲
توابع هیبرید [۸۴] $N = 3, M = 10$		



شکل ۵.۴: مقادیر تقریبی $x(\cdot)$ به ازای $N = 20$ در مثال ۳.۵.۴.



شکل ۶.۴: مقادیر تقریبی $u(\cdot)$ به ازای $N = 2^{\circ}$ در مثال ۳.۵.۴.

فصل ۵

تقریب پاده برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری جزئی تاخیری

۱.۵ مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بطور گسترده برای مدلسازی بسیاری از پدیده‌های مربوط به انتشار ذرات، الکترواستاتیک^۱، مکانیک سیالات^۲، مکانیک کوانتومی^۳ و غیره مورد مطالعه قرار گرفته است [۹۶]. هنگامی که محیط ناهمگن، یا پیچیده و غیرعادی باشد، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری، بیان دقیق‌تری از قوانین حرکت و انتشار ارائه می‌دهند، به همین دلیل در سال‌های اخیر مقالات فراوانی در زمینه توسعه روش‌های نظری و یافتن جواب‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری به چاپ رسیده است [۹۳]. در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارتباط بین تابع نامعلوم و مشتقات جزئی آن در یک زمان مشخص بررسی می‌شود. هنگامی که تابع معلوم علاوه بر زمان حاضر به زمان‌های گذشته نیز وابسته باشد، برای بیان دقیق این رابطه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تاخیری استفاده می‌شود. با توجه به کاربردهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات

^۱Electrostatic

^۲Fluid Mechanics

^۳Quantum mechanics

جزئی کسری و اهمیت سیستم‌های تاخیری، بطور منطقی ایده ترکیب این دو موضوع مطرح شده است. برای مثال در [۹۴] یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری تاخیری معرفی شده است. همچنین در [۹۵] شرایط وجود و یکتایی جواب برای رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری تاخیری ارائه شده است. وجود تاخیر در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری تاخیری، بر پیچیدگی و پیدا کردن روش عددی مناسب افزوده است. در این قسمت با استفاده از تقریب پاده ابتدا تاخیر را از بین برده و مسئله را به دستگاہی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری بدون تاخیر تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر و ماتریس عملیاتی مشتق کسری به حل آن می‌پردازیم. جواب‌های عددی بدست آمده، کارایی و دقت روش ارائه شده را تایید می‌کنند.

۲.۵ یک رویکرد برای تبدیل مسئله معادلات دیفرانسیل کسری جزئی تاخیری به یک مسئله بدون تاخیر

هدف از این قسمت معرفی روش تقریب پاده برای تبدیل یک معادله دیفرانسیل کسری جزئی تاخیری به یک معادله دیفرانسیل کسری بدون تاخیر است. برای این منظور به معرفی تعاریف مربوط به تقریب پاده می‌پردازیم. مسئله معادلات دیفرانسیل کسری جزئی تاخیری که در اینجا مورد مطالعه قرار می‌دهیم به صورت زیر است

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \eta \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(t, u(x, t), u(x, t - \tau)), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.5)$$

$$u(a, t) = u_a(t), \quad u(b, t) = u_b(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.5)$$

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (3.5)$$

این مسئله با استفاده از مشتقات جزئی مرتبه صحیح در [۹۷] معرفی شده است.

۱.۲.۵ تبدیل لاپلاس دوطرفه برای توابع دو متغیره

فرض کنید $f(t)$ تابعی حقیقی یا مختلط از متغیر t روی $\mathbb{R}$ باشد. همانطور که در فصل قبل بیان شد تبدیل لاپلاس دو طرفه به صورت زیر تعریف می‌شود [۷۹]

$$\mathcal{B}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

برای تبدیل لاپلاس دوطرفه شرایط زیر مورد نیاز است

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)| < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f(t)| < \infty.$$

بطور مشابه تبدیل لاپلاس دوطرفه برای تابع دو متغیره $u(x, t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{B}\{u(x, t)\} = U(x, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt.$$

یک رویکرد برای تبدیل مسئله معادلات دیفرانسیل کسری جزئی تاخیری به یک مسئله بدون تاخیر ۸۹

لم ۱.۲.۵. فرض کنید $U(x, s)$ تبدیل لاپلاس دوطرفه از تابع $u(x, t)$ باشد. در اینصورت تبدیل لاپلاس دوطرفه از $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ و $u(x, t - \tau)$ به ترتیب $e^{-\tau s}U(x, s)$ و $sU(x, s)$ هستند.

برهان. ما $B\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\} = sU(x, s)$ را اثبات می‌کنیم. قسمت دیگر بطور مشابه اثبات می‌شود. فرض کنید $B\{x(t)\} = U(x, s)$. تبدیل لاپلاس دو طرفه از $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود

$$\begin{aligned} B\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \\ &= u(x, t) e^{-st} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = sU(x, s). \end{aligned}$$

با این فرض که $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-st} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} u(x, t) = 0$.

□

برای حذف جملات دارای تاخیر در روابط (۱.۵)–(۳.۵)، از تغییر متغیر $w(x, t) \triangleq u(x, t - \tau)$ و $B\{w(x, t)\} = W(x, s)$ استفاده می‌کنیم. تبدیلات لاپلاس دو متغیره $U(x, s)$ و $W(x, s)$ طبق رابطه زیر با هم مرتبط هستند

$$W(x, s) = e^{-s\tau} U(x, s). \quad (۴.۵)$$

لم ۲.۲.۵. با در نظر گرفتن تغییر متغیر $w(x, t) \triangleq u(x, t - \tau)$ و استفاده از تقریب پاده مرتبه اول $e^x = \frac{1+\frac{x}{\tau}}{1-\frac{x}{\tau}}$ ، داریم

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\tau}{\tau} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (۵.۵)$$

برهان. با استفاده از رابطه (۴.۵) و تقریب پاده مرتبه اول، داریم

$$\begin{cases} W(x, s) = \frac{\tau - s}{\tau + s} U(x, s), \\ (\frac{\tau}{\tau} + s) W(x, s) = (\frac{\tau}{\tau} - s) U(x, s). \end{cases} \quad (۶.۵)$$

حال با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس دو طرفه داریم

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\tau}{\tau} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

□

در این صورت مسئله تاخیری (۱.۵)–(۳.۵) به سیستمی از مسائل بدون تاخیر به صورت

زیر تبدیل می شود

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \eta \frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial x^\gamma} = f(u(x, t), w(x, t)), \quad a < x < b, \quad \circ < t \leq T, \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{\tau} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad a < x < b, \quad \circ < t \leq T, \quad (8.5)$$

$$u(a, t) = u_a(t), \quad u(b, t) = u_b(t), \quad t \in (\circ, T], \quad (9.5)$$

$$u(x, \circ) = \psi(x, \circ), \quad x \in [a, b], \quad (10.5)$$

$$w(a, t) = w_a(t), \quad w(b, t) = w_b(t), \quad t \in (\circ, T], \quad (11.5)$$

$$w(x, \circ) = \psi(x, -\tau), \quad x \in [a, b]. \quad (12.5)$$

ملاحظه ۱.۲.۵. لازم به ذکر است که برای افزایش دقت روش پیشنهادی، می توانیم زمان تاخیر τ را به بازه های کوچک تر تقسیم کنیم. در این صورت تعداد معادلات افزایش می یابد. برای جزئیات بیشتر، [۷۹] را مطالعه نمایید.

۳.۵ روش عددی برای حل مسئله

در این قسمت، به دنبال ارائه یک روش عددی کارا بر مبنای روش های طیفی با استفاده از چندجمله ای های مونتس-لژاندر هستیم. برای این منظور از ماتریس عملیاتی مشتق کسری که در قضیه ۱.۴.۴ بیان شد استفاده می کنیم. این قضیه را دوباره مرور می کنیم.

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $\mathcal{L}(t)$ بردار چندجمله ای های مونتس-لژاندر در رابطه (۳۲.۴) باشد و $0 < \alpha < 1$ در این صورت

$${}^\circ D_t^\alpha \mathcal{L} \simeq D^{(\alpha)} \mathcal{L},$$

که $D^{(\alpha)}$ ماتریس عملیاتی مشتق کسری $(m+1) \times (m+1)$ از مرتبه α بر حسب مشتق کسری کاپوتو است و به صورت زیر بیان می شود

$$D^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1(m+1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ D_{(m+1)1} & D_{(m+1)2} & \cdots & D_{(m+1)(m+1)} \end{bmatrix}, \quad (13.5)$$

که

$$D_{i,j} = B_{i-1,j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq m+1,$$

$$B_{i,j} = (\gamma j \alpha + 1) \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^i \sum_{l=\circ}^j \frac{(-1)^{i+j-k-l} \Gamma(k\alpha + 1) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j+l + \frac{1}{\alpha})}{\Gamma(k\alpha + 1 - \alpha) ((k-1)\alpha + l\alpha + 1) \Gamma(l + \frac{1}{\alpha}) \Gamma(j + \frac{1}{\alpha}) (j-l)!!}.$$

اکنون با استفاده از یک روش هم محلی با استفاده از نقاط گاوس-لژاندر به حل مسئله می پردازیم.

۴.۵ روش هم محلی

در این قسمت جواب مسئله (۷.۵) - (۱۲.۵) را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$u(x, t) \simeq u_N(x, t) = \sum_{m=\circ}^N \sum_{n=\circ}^N u_{mn} L_{m,\alpha}(x) L_{n,\alpha}(t) = L(x, t) U,$$

$$w(x, t) \simeq w_N(x, t) = \sum_{m=\circ}^N \sum_{n=\circ}^N w_{mn} L_{m,\alpha}(x) L_{n,\alpha}(t) = L(x, t) W,$$

که در آن

$$L(x, t) = [L_{\circ,\alpha}(x) L_{\circ,\alpha}(t) \cdots L_{\circ,\alpha}(x) L_{N,\alpha}(t) \cdots L_{N,\alpha}(x) L_{\circ,\alpha}(t) \cdots L_{N,\alpha}(x) L_{N,\alpha}(t)] = L(x) \otimes L(t),$$

که $\otimes$ حاصلضرب کرونکر است و

$$U = [u_{\circ\circ} \cdots u_{\circ N} \cdots u_{N\circ} \cdots u_{NN}]^T,$$

$$W = [w_{\circ\circ} \cdots w_{\circ N} \cdots w_{N\circ} \cdots w_{NN}]^T.$$

لازم به ذکر است که U و W بردارهای نامعلوم هستند و با استفاده از روش ارائه شده محاسبه می شوند. داریم

$$\frac{\partial w_N(x, t)}{\partial t} = L(x, t) \widehat{D^{(1)}} W,$$

که $\widehat{D^{(1)}} = I_{N+1} \otimes D^{(1)}$ ، زیرا

$$w_{N,t}(x, t) = (L(x) \otimes L(t))_t W = [(L(x) I_{N+1}) \otimes (L(t) D^{(1)})] W = (L(x) \otimes L(t)) (I_{N+1} D^{(1)}) W.$$

همچنین داریم

$$\frac{\partial^\alpha u_N(x, t)}{\partial t^\alpha} = L(x, t) \widehat{D^{(\alpha)}} U.$$

بایستی توجه داشته باشیم که $D^{(1)}$ و $D^{(2)}$ ماتریس های عملیاتی مشتق کسری به ترتیب با $\alpha = 1$ و $\alpha = 2$ هستند. بطور مشابه می توان نتیجه گرفت که $u_{N,xx}(x, t) = L(x, t) \widehat{D^{(2)}} U$ که در آن $\widehat{D^{(2)}} = D^{(2)} \otimes I_{N+1}$. فرض کنید x_i و t_i ریشه های چندجمله ای های لژاندر هستند و فرض کنید $u(x, t)$ و $w(x, t)$ توسط $u_N(x, t)$ و $w_N(x, t)$ تقریب زده می شوند. فرض کنید $P_N(t)$ چندجمله ای لژاندر مرتبه N در بازه $[-1, 1]$ باشد. در اینجا نقاط لژاندر- گاوس- لوباتو استاندارد روی بازه $[-1, 1]$ را با x_k و t_k که $k = \circ, 1, 2, \dots, N$ نشان می دهیم که به ترتیب ریشه های $(x^2 - 1)P'_N(x)$ و $(t^2 - 1)P'_N(t)$ هستند. برای محاسبه جواب روی بازه $[a, b]$ از نقاط لژاندر- گاوس- لوباتو انتقال یافته η_k و روی بازه $[\circ, T]$ از ξ_k که به صورت زیر تعریف می شوند استفاده می کنیم [۸۱].

$$\eta_k = \frac{b-a}{2} x_k + \frac{b+a}{2},$$

$$\xi_k = \frac{T}{2} t_k + \frac{T}{2}.$$

اکنون با استفاده از نقاط لژاندر- گاوس- لوباتو انتقال یافته، مسئله (۷.۵) و (۸.۵) به صورت زیر گسسته سازی می شود

$$\frac{\partial^\alpha u_N(\eta_i, \xi_j)}{\partial t^\alpha} - \eta \frac{\partial^\gamma u_N(\eta_i, \xi_j)}{\partial x^\gamma} = f(u(\eta_i, \xi_j), w(\eta_i, \xi_j)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N, \quad (14.5)$$

$$\frac{\partial w_N(\eta_i, \xi_j)}{\partial t} - \frac{\gamma}{\tau} \left(\frac{\partial u_N(\eta_i, \xi_j)}{\partial t} - \frac{\partial w_N(\eta_i, \xi_j)}{\partial t} \right) + \frac{\partial u_N(\eta_i, \xi_j)}{\partial t} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (15.5)$$

به عبارت دیگر

$$L(\eta_i, \xi_j)(\widehat{D}^\alpha - \eta \widetilde{D}^\gamma)U = f(u(\eta_i, \xi_j), w(\eta_i, \xi_j)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N, \quad (16.5)$$

$$L(\eta_i, \xi_j)(\widehat{H} - \frac{\gamma}{\tau}(\widehat{D} - \widehat{H}) + \widehat{D}) = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (17.5)$$

شرایط اولیه (۹.۵)-(۱۲.۵) نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند

$$L(\eta_i, 0)U = \psi(\eta_i, 0), \quad i = 0, \dots, N, \quad (18.5)$$

$$L(a, \xi_j)U = u_a(\xi_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (19.5)$$

$$L(b, \xi_j)U = u_b(\xi_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (20.5)$$

$$L(\eta_i, 0)W = \psi(\eta_i, -\tau), \quad i = 0, \dots, N, \quad (21.5)$$

$$L(a, \xi_j)W = w_a(\xi_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (22.5)$$

$$L(b, \xi_j)W = w_b(\xi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (23.5)$$

معادلات (۱۶.۵)-(۲۳.۵) می توانند به صورت دستگاه خطی $AX = b$ نوشته شوند و با استفاده از نرم افزار میپل محاسبه شوند.

قبل از بررسی مثال های عددی، الگوریتم روش عددی را به صورت زیر بیان می کنیم.

(۱) مسئله اصلی را با استفاده از روش تقریب پاده به یک مسئله بدون تاخیر تبدیل کنید.

(۲) فرض کنید η_i و ξ_i ، $i = 0, \dots, N$ به ترتیب نقاط گاوس- لژاندر- لوباتو روی بازه $[a, b]$ و $[0, T]$ باشند.

(۳) چندجمله ای های مونتس- لژاندر (۴۰.۱) را به عنوان توابع پایه در نظر بگیرید.

(۴) مسئله مشتقات جزئی بدست آمده را با استفاده از نقاط η_i و ξ_i گسسته سازی کنید.

(۵) دستگاه خطی (۱۶.۵)-(۲۳.۵) را با استفاده از متلب یا میپل حل کنید.

۵.۵ مثال‌های عددی

در این بخش چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش ارائه می‌دهیم. برای حل از نرم افزار میپل ۱۸ و برای محاسبه دستگاه $AX = b$ از دستور f_{solve} استفاده می‌کنیم. برای محاسبه دقت روش، از خطای مطلق به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$E_N = |u_N(x, t) - u(x, t)|,$$

که $u(x, t)$ و $u_N(x, t)$ به ترتیب جواب تقریبی و دقیق هستند.

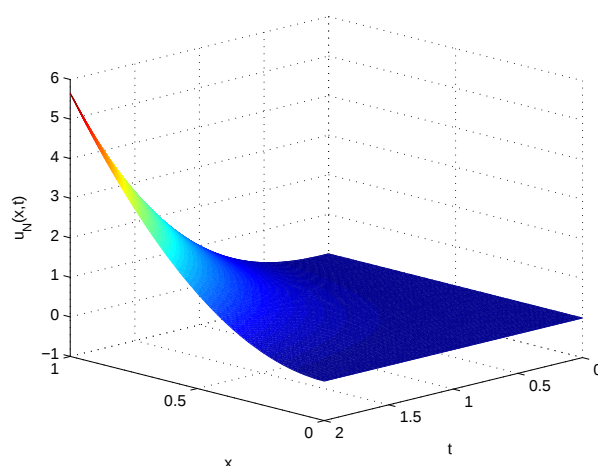
مثال ۱.۵.۵. برای نشان دادن دقت روش ابتدا یک مسئله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدون تاخیر به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})x^2 t^{\frac{5}{4}-\alpha}}{\Gamma(\frac{5}{4}-\alpha)} - 2t^{\frac{5}{4}}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 2,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t^{\frac{5}{4}}, \quad 0 < t \leq 2,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

برای این مسئله $u(x, t) = x^2 t^{\frac{5}{4}}$ جواب دقیق است. خطای مطلق به ازای $N = 5$ در جدول ۱.۵ داده شده و با چندجمله‌ای‌های لژاندر مقایسه شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌های مونتمس-لژاندر بسیار دقیق تر از چندجمله‌ای‌های لژاندر هستند. مقدار تقریبی $u_N(x, t)$ نیز در شکل ۱.۵ نشان داده شده است.



شکل ۱.۵: جواب عددی $u_N(x, t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 5$ در مثال ۱.۵.۵.

جدول ۱.۵: خطای مطلق به ازای $\alpha = 1$ و $N = 5$ در مثال ۱.۵.۵.

(x, t)	چند جمله ای های لژاندر	چند جمله ای های مونتهس-لژاندر
$(0/1, 1)$	$2/22620 \times 10^{-6}$	$1/26850 \times 10^{-18}$
$(0/2, 1)$	$1/40293 \times 10^{-5}$	$9/55000 \times 10^{-19}$
$(0/3, 1)$	$3/54943 \times 10^{-5}$	$6/40000 \times 10^{-19}$
$(0/4, 1)$	$6/677339 \times 10^{-5}$	$4/90000 \times 10^{-19}$
$(0/5, 1)$	$1/08085 \times 10^{-4}$	$2/30000 \times 10^{-19}$
$(0/6, 1)$	$1/59716 \times 10^{-4}$	$4/00000 \times 10^{-20}$
$(0/7, 1)$	$2/22020 \times 10^{-4}$	$1/60000 \times 10^{-19}$
$(0/8, 1)$	$2/95417 \times 10^{-4}$	$3/30000 \times 10^{-19}$
$(0/9, 1)$	$4/77502 \times 10^{-4}$	$6/90000 \times 10^{-19}$
$(1, 1)$	$3/22235 \times 10^{-4}$	$5/00000 \times 10^{-19}$

مثال ۲.۵.۵. مسئله معادلات دیفرانسیل تاخیری با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(u(x, t), u(x, t - 0/1)), \quad 1 < x < 2, \quad 0 < t \leq 1, \quad (24.5)$$

$$u(1, t) = -\frac{31}{33}(t^3 - 2t - 1), \quad u(2, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (25.5)$$

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{33}x^6 - x\right)(t^3 - 2t - 1), \quad 1 < x < 2, \quad -0/1 \leq t \leq 0, \quad (26.5)$$

که

$$\begin{aligned} f(u(x, t), u(x, t - 0/1)) &= u(x, t - 0/1)^2 - \frac{15}{8}x^4(t^3 - 2t - 1) \\ &+ \left(\frac{1}{33}x^6 - x\right)(3t^2 - 2) - \left(\frac{1}{33}x^6 - x\right)^2((t - 0/1)^3 - 2(t - 0/1) - 1)^2. \end{aligned}$$

جدول ۲.۵: برخی از مقادیر عددی به ازای $N = 10$ در مثال ۲.۵.۵.

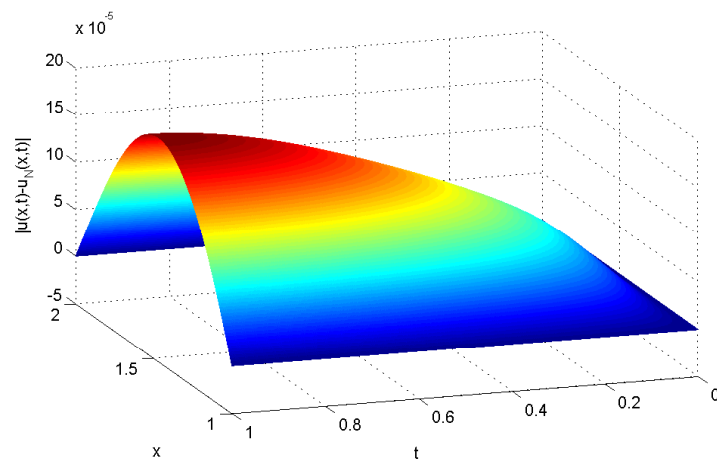
(x, t)	نتایج عددی	مقدار دقیق	خطای مطلق
$(1/5, 0/1)$	۱/۳۷۱۷۴۵	۱/۳۷۱۷۰۸	$3/830291 \times 10^{-5}$
$(1/5, 0/2)$	۱/۵۹۲۵۸۱	۱/۵۹۲۵۰۸	$7/346515 \times 10^{-5}$
$(1/5, 0/3)$	۱/۷۹۹۶۷۶	۱/۷۹۹۵۸۰	$9/720359 \times 10^{-5}$
$(1/5, 0/4)$	۱/۹۸۶۱۷۵	۱/۹۸۶۰۵۹	$1/171543 \times 10^{-4}$
$(1/5, 0/5)$	۲/۱۴۵۲۱۵	۲/۱۴۵۰۸۱	$1/349123 \times 10^{-4}$
$(1/5, 0/6)$	۲/۲۶۹۹۳۲	۲/۲۶۹۷۸۱	$1/509085 \times 10^{-4}$
$(1/5, 0/7)$	۲/۳۵۳۴۶۱	۲/۳۵۳۲۹۶	$1/650156 \times 10^{-4}$
$(1/5, 0/8)$	۲/۳۸۸۹۳۷	۲/۳۸۸۷۶۲	$1/760975 \times 10^{-4}$
$(1/5, 0/9)$	۲/۳۶۹۴۹۶	۲/۳۶۹۳۱۳	$1/834751 \times 10^{-4}$
$(1/5, 1)$	۲/۲۸۸۲۷۲	۲/۲۸۸۰۸۶	$1/862327 \times 10^{-4}$

با استفاده از روش ارائه شده، معادلات (۲۴.۵)–(۲۶.۵) به صورت زیر نوشته می‌شوند

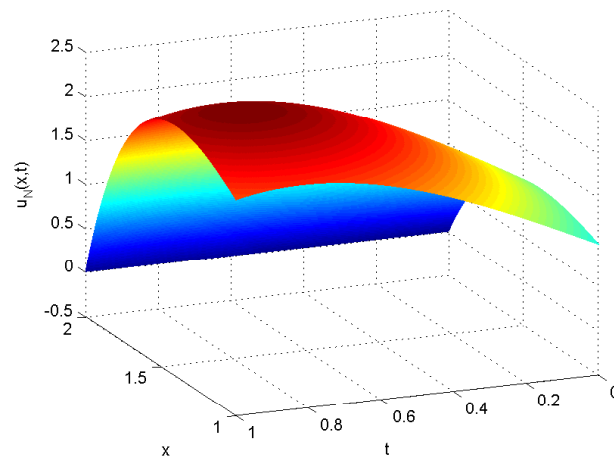
$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= w(x, t)^2 - \frac{15}{8} x^4 (t^3 - 2t - 1) + \left(\frac{1}{33} x^6 - x\right)(3t^2 - 2) \\ &- \left(\frac{1}{33} x^6 - x\right)^2 ((t - 0/1)^3 - 2(t - 0/1) - 1)^2, \quad 1 < x < 2, \quad 0 < t \leq 1, \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= 2(u(x, t) - w(x, t)) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 1 < x < 2, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(1, t) &= -\frac{31}{33}(t^3 - 2t - 1), \quad u(2, t) = 0, \quad t \in (0, 1], \\ u(x, 0) &= -\left(\frac{1}{33} x^6 - x\right), \quad 1 < x < 2, \\ w(1, t) &= -\frac{31}{33}((t - 0/1)^3 - 2(t - 0/1) - 1), \quad w(2, t) = 0, \quad t \in (0, 1], \\ w(x, 0) &= \left(\frac{1}{33} x^6 - x\right)(-0/8010), \quad 1 < x < 2. \end{aligned}$$

جواب دقیق برای این مسئله به ازای $\alpha = 1$ برابر است با $u(x, t) = (\frac{1}{33} x^6 - x)(t^3 - 2t - 1)$ [۹۷]. در جدول ۲.۵ نتایج عددی با استفاده از روش بیان شده ارائه شده است. خطای مطلق نیز در شکل ۲.۵ رسم شده است. مقادیر عددی برای $u_N(x, t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 10$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است. جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 0/7, 0/9, 1$ در نقطه $t = 1$ با $N = 10$ در شکل ۴.۵ رسم شده است. نتایج عددی بدست آمده به خوبی نتایج نظری را تایید می‌کنند.

مثال ۳.۵.۵. مسئله معادلات دیفرانسیل تاخیری با مشتقات جزئی به صورت زیر را در نظر



شکل ۲.۵: خطای مطلق به ازای $N = 10$ در مثال ۲.۵.۵.

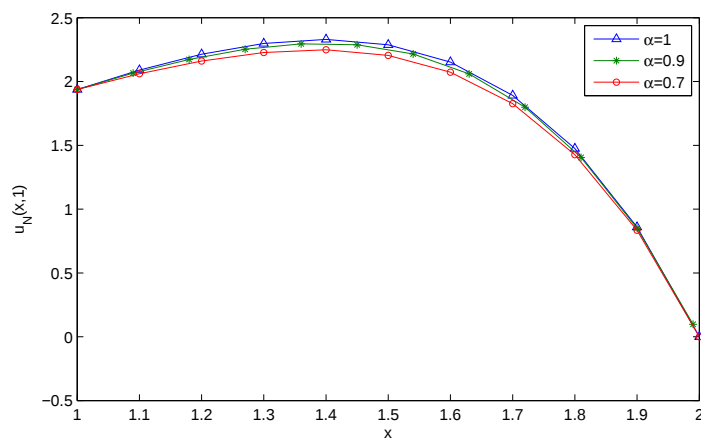


شکل ۳.۵: جواب عددی $u_N(x,t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 10$ در مثال ۲.۵.۵.

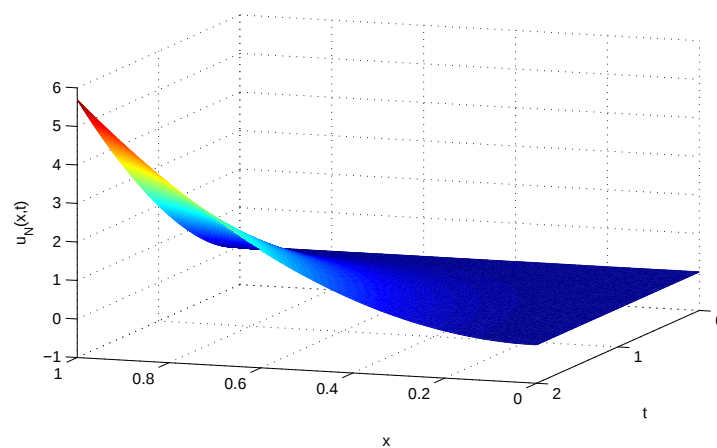
بگیرید

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= u(x,t-1) + x^2 \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{4})t^{\frac{1}{4}-\alpha}}{\Gamma(\frac{1}{4}-\alpha)} + \frac{\Gamma(\frac{3}{4})t^{\frac{3}{4}-\alpha}}{\Gamma(\frac{3}{4}-\alpha)} \right) \\ &- 2(t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{3}{4}}) - x^2((t-1)^{\frac{1}{4}} + (t-1)^{\frac{3}{4}}), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 2, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{3}{4}}, \quad t \in [0, 2], \\ u(x,t) &= x^2(t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{3}{4}}), \quad 0 < x < 1, \quad -1 \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

جواب دقیق برای این مسئله $u(x,t) = x^2(t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{3}{4}})$ است. جواب‌های دقیق و تقریبی برای این مسئله در جدول ۳.۵ نشان داده شده و با چندجمله‌ای‌های لزاندر مقایسه شده است. در شکل ۵.۵ مقدار تقریبی $u_N(x,t)$ نمایش داده شده است.



شکل ۴.۵: جواب عددی $u_N(x, t)$ در $t = 1$ با $N = 10$ در مثال ۲.۵.۵.



شکل ۵.۵: جواب عددی $u_N(x, t)$ به ازای $\alpha = 1$ و $N = 5$ در مثال ۳.۵.۵.

جدول ۳.۵: خطای مطلق به ازای $N = 10$ و $\alpha = 0.9$ در مثال ۳.۵.۵.

(x, t)	چند جمله‌ای‌های مونته-لژاندر	چند جمله‌ای‌های لژاندر
$(0/1, 1/8)$	$3/14707 \times 10^{-4}$	$1/61838 \times 10^{-3}$
$(0/2, 1/8)$	$6/33806 \times 10^{-4}$	$4/93482 \times 10^{-4}$
$(0/3, 1/8)$	$9/49793 \times 10^{-4}$	$4/40890 \times 10^{-5}$
$(0/4, 1/8)$	$1/24365 \times 10^{-3}$	$2/98649 \times 10^{-4}$
$(0/5, 1/8)$	$1/48602 \times 10^{-3}$	$5/87367 \times 10^{-4}$
$(0/6, 1/8)$	$1/63839 \times 10^{-3}$	$9/53604 \times 10^{-4}$
$(0/7, 1/8)$	$1/65424 \times 10^{-3}$	$1/23816 \times 10^{-3}$
$(0/8, 1/8)$	$1/48023 \times 10^{-3}$	$1/22565 \times 10^{-3}$
$(0/9, 1/8)$	$1/05738 \times 10^{-3}$	$8/03846 \times 10^{-4}$
$(1, 1/8)$	$3/22235 \times 10^{-4}$	$1/19071 \times 10^{-4}$

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه به دنبال یک روش عددی کارا برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری بودیم. رویکرد ما در این پایان نامه بر اساس تبدیل مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری به یک مسئله بهینه سازی و همچنین استفاده از توابع پایه و ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال کسری بود. از مزایای ماتریس‌های عملیاتی، راحتی در پیاده سازی و تسهیل در محاسبات است که در مسائل مربوط به حسابان کسری همواره مورد توجه بوده است. بکار گیری ماتریس‌های عملیاتی برای حل این مسائل از قدمت بالایی برخوردار نیست اما بطور روز افزون در حال افزایش است. در مسائل کنترل بهینه کسری یکی از چالش‌ها برای حل سیستم‌ها و مسائل تاخیری، ناهموار بودن جواب‌ها در بعضی مسائل است. استفاده از توابع پایه هموار همچون چندجمله‌ای‌ها با توجه به ماهیت جواب‌ها برای حل این دسته از مسائل باعث ایجاد خطا در نقاط مشتق ناپذیر می‌شود. یکی از ساده‌ترین توابع پایه ناهموار، توابع بلاک پالس هستند. نتایج بدست آمده از این روش در محاسبات عددی در مقایسه با چندین روش عددی دیگر همچون توابع هار، نشان از کارایی این توابع برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری دارد.

ایده تقریب پایه برای از بین بردن تاخیر در سیستم‌های تاخیری در این پایان نامه برای تبدیل مسئله کنترل بهینه کسری تاخیری به یک مسئله کنترل بهینه کسری بدون تاخیر استفاده می‌شود. با این کار مسئله نهایی با استفاده از بسیاری از الگوریتم‌های موجود برای حل مسائل کنترل بهینه قابل حل است. برای حل مسئله کنترل بهینه کسری دو روش متفاوت بیان شده است. ابتدا موجک‌های هار را که یکی دیگر از پایه‌های ذاتا ناپیوسته هستند مورد بررسی قرار دادیم و نتایج بدست آمده را با چند روش عددی دیگر مقایسه کردیم. یکی از معایب موجک‌های هار سرعت همگرایی پایین آنها در مقایسه با چندجمله‌ای‌هاست. از این رو در روش دوم برای حل مسئله کنترل بهینه کسری نهایی از چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری مونتس-لژاندر استفاده کرده‌ایم.

مزیت چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری نسبت به سایر چندجمله‌ای‌ها سرعت همگرایی بالای آنها برای مسائل مربوط به حسابان کسری است. از آنجایی که مشتق کسری از چندجمله‌ای با درجه صحیح یک چندجمله‌ای با توان کسری است، از این رو استفاده از چندجمله‌ای‌هایی که ذاتا دارای توان کسری هستند با حسابان کسری سازگاری بیشتری دارد.

در فصل آخر با استفاده از روش تقریب پاده به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری تاخیری با استفاده از ماتریس عملیاتی مشتق کسری و توابع پایه مونتس-لژاندر پرداختیم. با توجه به وجود تاخیر و مشتق کسری در مسئله مورد نظر، به عنوان یک پیشنهاد برای کارهای آتی می‌توان از ترکیب چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری و توابع بلاک پالس برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری استفاده کرد.

مراجع

- [1] A.K. Taslakyany, "Some properties of Legendre quasipolynomials with respect to a Müntz system", **Russian, Armenian Summary, Érevan University**, 2 (1984) 179–189.
- [2] P. Borwein, T. Erdélyi, J. Zhang, "Müntz systems and orthogonal Müntz–Legendre polynomials", **Transactions of the American Mathematical Society**, 342 (1994) 523–542.
- [3] D. Idczak, S.B. Walczak, "Fractional Sobolev Spaces via Riemann-Liouville Derivatives", **Journal of Function Spaces and Applications**, 2013 (2013).
- [4] Sh. Esmacili, M. Shamsi, Y Luchko, "Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on Müntz polynomials", **Computers and Mathematics with Applications**, 62 (2011) 918–929.
- [5] G.V. Badalyan, "Generalization of Legendre polynomials and some of their applications", **Russian, Armenian Summary**, 9 (1956) 3–22.
- [6] S.Z. Rida, A.M. Yousef, "On the fractional order Rodrigues formula for the Legendre polynomials", **Advances in Applied Mathematics**, 10 (2011) 509–518.
- [7] S. Kazem, S. Abbasbandy, S. Kumar, "Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations", **Applied Mathematical Modelling**, 37 (2013) 5498–5510.
- [8] M. M. Khader, A. S. Hendy, "An Efficient Numerical Scheme for Solving Fractional Optimal Control Problems", **International Journal of Nonlinear Science**, 14 (2012) 287–296.
- [9] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 264 (2014) 65–70.
- [10] K. Diethelm, "The Analysis of Fractional Differential Equations", Springer, (2010).

-
- [11] Y. Ding, Z. Wang, H. Ye, "Optimal Control of a Fractional-Order HIV-Immune System With Memory", **IEEE Transaction on Control System Technology**, 20 (2012).
 - [12] D. Chen, Y.Q. Chen, "Fractional Calculus In Image Processing: A Review", **Fractional Calculus and Applied Analysis**, 19 (2016).
 - [13] Y. Liu, P. Lu, I. Szanto, "Numerical Analysis for a Fractional Differential Time-Delay Model of HIV Infection of $CD4^+$ T-Cell Proliferation under Antiretroviral Therapy", **Abstract and Applied Analysis**, 2014 (2014).
 - [14] A. Saadatmandi, M. Dehghan, "A new operational matrix for solving fractional-order differential equations", **Computers and Mathematics with Applications**, 59 (2010) 1326–1336.
 - [15] Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, "Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids", **Applied Mechanics Reviews**, 50 (1997) 15–67.
 - [16] C. Huang, Z. Guo, Z. Yang, Y. Chen, "Dynamics of Delay Differential Equations with Their Applications", **Abstract and Applied Analysis**, 2013 (2013).
 - [17] Y. Jalilian, R. Jalilian, "Existence of Solution for Delay Fractional Differential Equations", **Mediterranean Journal of Mathematics**, 10 (2013) 1731–1747.
 - [18] J.A. Tenreiro Machado, M.F. Silva, R.S. Barbosa, I.S. Jesus, C.M. Reis, M.G. Marcos, A.F. Galhano, "Some Applications of Fractional Calculus in Engineering", **Mathematical Problems in Engineering**, (2010).
 - [19] W.P. Fox, " **Mathematical Modeling with Maple**", Brooks Cole, (2011).
 - [20] I. Podlubny, "Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation", **Fractional Calculus and Applied Analysis**, 5 (2002) 367–386.
 - [21] S. Hosseinpour, A. Nazemi, M. Yavari, "A numerical method based on fractional-order Chebyshev polynomials for solving delay fractional optimal control problems", 9th International Iranian Operation Research Conference, Shiraz , Iran, (2016).
 - [22] E. Safaie, M.H. Farahi, "An approximation method for numerical solution of multi-dimensional feedback delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials", **Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization**, 4 (2014) 77–94.

- [23] M.H.T. Alshbool, A.S. Bataineh, I. Hashim, O.R. Isik, " Solution of fractional-order differential equations based on the operational matrices of new fractional Bernstein functions", **Journal of King Saud University - Science**, 29 (2017) 1–18.
- [24] A.M.A. El-Sayed, " Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders", **Applied Mathematics and Computation**, 109 (2000) 1–9.
- [25] H. Zhang, F. Ding, " On the Kronecker Products and Their Applications", **Journal of Applied Mathematics**, 2013 (2013).
- [26] D. Baleanu, O. Defterli, O.P. Agrawal, " A Central Difference Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems", **Journal of Vibration and Control**, 15 (2009).
- [27] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, " **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**", Elsevier Science B. V, Amsterdam, (2006).
- [28] I. Podlubny, " **Fractional differential equations**", Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press Inc, San Diego, CA, (1999).
- [29] M. Caputo and M. Fabrizio, " A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel", **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, (2015) 1–13.
- [30] G. Jumarie, " Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions", **Applied Mathematical Modelling**, 32 (2008) 836–859.
- [31] B. Shizgal, " **Spectral Methods in Chemistry and Physics, Scientific Computation**", Springer Netherlands, (2015).
- [32] A. Alizadeh, S. Effati, " An iterative approach for solving fractional optimal control problems", **Journal of Vibration and Control**, (2016) 1–19.
- [33] N. Ejlali, S.M. Hosseini, " A Pseudospectral Method for Fractional Optimal Control Problems", **Journal of Optimal control Theory and Application**, 174 (2016) 83–107.
- [34] M. Zayernouri, G.E. Karniadakis, " Fractional spectral collocation method", **SIAM Journal on Scientific Computing**, 36 (2014) A40–A62.
- [35] F. Fahroo, M. Ross, " Pseudospectral Methods for Infinite-Horizon Optimal Control Problems", **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 31 (2008).
- [36] I. Michael Ross, F. Fahroo, " Pseudospectral Knotting Methods for Solving Optimal Control Problems", **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 27 (2004).

-
- [37] N.H. Sweilam, T.M. Al-Ajami, " Legendre spectral-collocation method for solving some types of fractional optimal control problems", **Journal of Advanced Research**, 6 (2015) 393–403.
- [38] M. Maleki, I. Hashim, S. Abbasbandy, A. Alsaedi, " Direct solution of a type of constrained fractional variational problems via an adaptive pseudospectral method", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 283 (2015) 41–57.
- [39] M. Shamsi, " A modified pseudospectral scheme for accurate solution of Bang-Bang optimal control problems", **Optimal control applications and methods**, 32 (2011) 668–680.
- [40] M.A. Patterson, W.W. Hager, A.V. Rao, " A ph mesh refinement method for optimal control", **Optimal Control Applications and Methods**, 36 (2015) 398–421.
- [41] G.E. Karniadakis, S.J. Sherwin, " **Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics**", Oxford University Press, (2013).
- [42] V. Govindaraj, M. Malik R.K. George, " Trajectory controllability of fractional dynamical systems", **Journal of Control and Decision**, (2016) 114–130.
- [43] M. Maleki, I. Hashim, " Adaptive pseudospectral methods for solving constrained linear and nonlinear time-delay optimal control problems", **Journal of the Franklin Institute**, 351 (2014) 811–839.
- [44] M. Dadkhah, M.H. Farahi, " Optimal Control of Time Delay Systems via Hybrid of Block-Pulse Functions and Orthonormal Taylor Series", **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, 2 (2015) 137–152.
- [45] A. Jajarmi, D. Baleanu, " Suboptimal control of fractional-order dynamic systems with delay argument", **Journal of Vibration and Control**, (2017) 1–17.
- [46] A.H. Bhrawy, S.S. Ezz-Eldien, " A new Legendre operational technique for delay fractional optimal control problems", **Calcolo**, 53 (2016) 521–543.
- [47] R. Dehghan, M. Keyanpour, " A numerical approximation for delay fractional optimal control problems based on the method of moments", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 34 (2015) 77–92.
- [48] A.Y. Lee, " Hereditary optimal control problems: numerical method based upon a Padé approximation", **Optimization Theory and Applications**, 56 (1988) 157–166 .

- [49] P.T. Boggs, J.W. Tolle, " Sequential quadratic programming for large-scale nonlinear optimization", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 124 (2000) 123–137.
- [50] M.M. Khader, A.S. Hendy, " An Efficient Numerical Scheme for Solving Fractional Optimal Control Problems", **International Journal of Nonlinear Science**, 14 (2012) 287–296.
- [51] Ch. Tricaud, Y.Q. Chen, " Time-Optimal Control of Systems with Fractional Dynamics", **International Journal of Differential Equations**, 2010 (2010).
- [52] O.P. Agrawal, " A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems", **Nonlinear Dynamic**, 38 (2004) 323–337.
- [53] O.P. Agrawal, D. Baleanu, " A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems", **Journal of Vibration and Control**, 13 (2007) 1269–1281.
- [54] O.P. Agrawal, " A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems", **Journal of Vibration and Control**, 14 (2008) 1291–1299.
- [55] O.P. Agrawal, " A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems", **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, 130 (2008).
- [56] A. Lotfi, M. Dehghan, S.A. Yousefi, " A numerical technique for solving fractional optimal control problems", **Computers and Mathematics with Applications**, 62 (2011) 1055–1067.
- [57] M. Ohkita, Y. Kobayashi, " An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations", **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 9 (1986) 853–862.
- [58] C.F. Chen, C.H. Hsiao, " Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems", **IEEE Proceedings of Control Theory and Applications**, 144 (1997) 87–94.
- [59] A. Kiliçman, Z.A.A. Al Zhour, " Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications", **Applied Mathematics and Computation**, 187 (2007) 250–265.
- [60] Y. Li, W. Zhao, " Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations", **Applied Mathematics and Computation**, 216 (2010) 2276–2285.
- [61] E.R. Pinch, " **Optimal Control and the Calculus of Variations**", New York, p.99, (1993).

-
- [62] G. N. Elnager, " Legendre and pseudospectral Legendre approaches for solving optimal control problems", PhD Thesis, Mississippi State University, (1993).
 - [63] D.L. Kleiman, T. Fortmann, M. Athans, " On the design of linear systems with piecewise-constant feedback gains", **IEEE Transactions on Automatic Control**, 13 (1968) 354–361.
 - [64] A. Ebadian, A.A. Khajehnasiri, " Block-pulse functions and their applications to solving systems of higher-order nonlinear volterra integro-differential equations", **Electronic Journal of Dierential Equations**, (2014) 1–9.
 - [65] J. Vlassenbroeck, " A chebyshev polynomial method for optimal control with state constraints", **International Federation on Automatic Control**, 24 (1988) 499–506.
 - [66] H.R. Marzban, M. Razzaghi, " Hybrid functions approach for linearly constrained quadratic optimal control problems", **Applied Mathematical Modelling**, 27(2003) 471–485.
 - [67] K.E. Atkinson, " **Introduction to Numerical Analysis** ", John Wiley Sons, (1976).
 - [68] W. Rudin, " **Principles of Mathematical Analysis**", Singapore: McGraw-Hill, (1976).
 - [69] M.A. Soliman, W.H. Ray, " Optimal feedback control for linear quadratic systems having time delays', **International Journal of Control**, 15 (1972) 609–627.
 - [70] A. Hashemi borzabadi, S. Asadi, "A wavelet collocation method for optimal control of non-linear time-delay systems via Haar wavelets", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 32 (2013) 41–54.
 - [71] L. Gollmann, D. Kern, H. Maurer, " Optimal control problems with delays in state and control variables subject to mixed control state constraints", **Optimal Control Applications and Methods**, 30 (2009) 341–365.
 - [72] S. Hosseinpour, A. Nazemi, " Solving fractional optimal control problems with fixed or free final states by Haar wavelet collocation method", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, (2016) 543–561.
 - [73] X.T. Wang, " Numerical solutions of optimal control for time delay systems by hybrid of block-pulse functions and Legendre polynomials", **Applied Mathematics and Computation**, 184 (2007) 849–856.
 - [74] S. Hosseinpour, A. Nazemi, " A collocation method via block-pulse functions for solving delay fractional optimal control problems", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, (2016) 1–23.

- [75] V. Turut, N. Güzel, "On solving Partial Differential Equations of Fractional Order by Using the Variational Iteration Method and Multivariate Padé Approximations", **European Journal of Pure and Applied Mathematics**, 6 (2013) 147–171.
- [76] A. Cuyt, "How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case?", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 105 (1999) 25–50.
- [77] G. A. Baker and P. R. Graves-Morris, " **Padé Approximants**", volume 59. Cambridge University Press, (1996).
- [78] S. Hosseinpour, A. Nazemi, "An efficient method based on Müntz-Legendre polynomials for solving delay fractional optimal control problems", The First Seminar on Control and optimization, Mashhad, Iran, (2017).
- [79] V.B. Pol, H. Bremmer, " **Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral**", London: Cambridge University Press, (1955).
- [80] I. Matsuzuka, K. Nagasawa, A. Kitahama, "A proposal for two-sided Laplace transforms and its application to electronic circuits", **Applied Mathematics and Computation**, 100 (1999) 1–11.
- [81] M. Maleki, I. Hashim, S. Abbasbandy, A. Alsaedi, "Direct solution of a type of constrained fractional variational problems via an adaptive pseudospectral method", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 283 (2015) 41–57.
- [82] Zh. Sun, Z. Zhang, "A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differential equations", **Applied Mathematical Modelling**, 37 (2013) 742–752.
- [83] K.R. Palanisamy, G.P. Rao, "Optimal control of linear systems with delays in state and control via Walsh function", **Control Theory and Applications, IEEE Proceedings**, 130 (1983) 300–312.
- [84] M. Dadkhah, M.H. Farahi, "Optimal Control of Time Delay Systems via Hybrid of Block-Pulse Functions and Orthonormal Taylor Series", **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, 2 (2015) 137–152.
- [85] F. Ghomanjani, M.H. Farahi, M. Gachpazan, "Optimal control of time-varying linear delay systems based on the Bezier curves", **Computational and Applied Mathematics**, 33 (2013) 687–715.

-
- [86] M. Basin, J. Rodriguez-Gonzalez, "Optimal control for linear systems with multiple time delays in control input", **IEEE Trans Autom Control**, 51 (2006) 91–97.
- [87] B.M. Mohan, S.K. Kar, "Optimal Control of Multi-Delay Systems via Block-pulse Functions", IEEE International Conference on Industrial and Information Systems, (2010) 614–619.
- [88] Y. Li, N. Sun, "Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix", **Computers and Mathematics with Applications**, 62 (2011) 1046–1054.
- [89] P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems", **Nonlinear Dynamics**, 86 (2016) 1649–1661.
- [90] S. Pooseh, R. Almeida, D.F. M. Torres, "Fractional order optimal control problems with free terminal time", **Journal of Industrial and Management Optimization**, 10 (2014), 363–381.
- [91] R. K. Biswas, S. Sen, "Free final time fractional optimal control problems", **Journal of the Franklin Institute**, 341 (2014) 941–951.
- [92] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, "Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predatorprey and rabies models", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 325 (1) (2007) 542–553.
- [93] J.L. Wu, "A wavelet operational method for solving fractional partial differential equations numerically", **Applied Mathematics and Computation**, 214 (2009) 31–40.
- [94] F.A. Rihan, "Computational methods for delay Parabolic and time-fractional partial differential equations", **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, 26 (2010) 1556–1571.
- [95] Z. Ouyang, "Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay", **Computers and Mathematics with Applications**, 61 (2011) 860–870.
- [96] E. Tohidi, M. Khorsand Zak, "A New Matrix Approach For Solving Second-Order Linear Matrix Partial Differential Equations", **Mediterranean Journal of Mathematics**, 16 (2016) 1353–1376.

- [97] Zh. Sun, Z. Zhang, " A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differential equations", **Applied Mathematical Modelling**, 37 (2013) 742–752.
- [98] D. Matignon, " Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", **Computational Engineering in Systems Applications, IEEE-SMC**, 2 (1996) 963–968.
- [99] N. Aguila-Camacho, M. Duarte-Mermoud, J.A. Gallegos, " Lyapunov functions for fractional order systems", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 19 (2014) 2951–2957.

Aabstract

With the development and complexity of optimal control problems, new methods have to be developed to solve these issues. When dynamic systems are complex or have memory, movement and propagation are no longer followed by ordinary derivative laws. In such cases, movements follow the rules of the fractional order. Due to its many applications in science, engineering and medicine, delay systems have always been considered by researchers of various disciplines, and the non-locality of the fractional operator has led to a combination of these two issues and achieving better results. Since there is no exact solution for the delay fractional optimal control problem in general, over the past few years various numerical methods have been published in this regard. The choice of a numerical method proportional to the fractional derivative structure has always been one of the most important challenges in this field. In this thesis we study the fractional polynomials and provide a numerical method based on the Müntz-Legendre polynomials to solve the delay fractional optimal control problems. Also, for comparing the proposed method and the structure of the solutions of the delayed problem, the block pulse functions and Haar wavelates have been investigated and compared with several numerical methods.

Keywords: Fractional derivative; Delay fractional optimal control problems; Fractional polynomials; Haar Wavelates; Block-pulse functions.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Operation Research

**An Application of Fractional Order Basis for
Solving a Class of Delay Fractional Optimal
Control Problems**

By: Soleiman Hosseinpour

Supervisor

Dr. Alireza Nazemi

December 2017