

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدايتنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

طراحی کنترل برای سیستم‌های غیرخطی بر اساس مدل‌های هایپربولیک

نگارنده: محمد عابدیان

استادان راهنما

دکتر مهرداد غزنوی
دکتر محمد هادی نوری اسکندری

تیرماه ۱۳۹۷

تقدیم

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنانی که وجودشان شادی، بخش و صفایشان مایه‌ی آرامش من است

به کوهرارزنده‌ام، همسر مهربانم

که سایه مهربانش سایه سار زندگیم می‌باشد

او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود و در طول تحصیل

متحمل زحماتم بوده و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات

و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای من

به سبزترین نگاه زندگیم، دلبندانم مهدیه و مهرسام
که آسایش آنها آرامش من است
با هم آغاز کردیم، در کنار هم آموختیم و به امید هم به آینده چشم می‌دوزیم.
امروز، مستی ام به امید شماست و قلمم لبریز از عشق به شما
و خوشبختی تان منتهای آرزویم.

سپاس کزاری

صمیمانه ترین و خالصانه ترین سپاس ها را با اشک شوق به پیشگاه کبریایی پروردگار مهربانم تقدیم می دارم، او که همواره بهوت حکمتش بوده و ستم، خاضعانه در برابر الطاف بیکرانش پیشانی خضوع و بندگی بر خاک می نهم.

نهایت سپاس خود را از الطاف اساتید راهنمایی که انقدرم جناب آقای دکتر مهاداد غزنوی و جناب آقای دکتر محمد مادی نوری اسکندری دارم، اساتید ارجمندی که با خلق نیکو و صبر و حوصله بی نظیرشان پاسخگوی تمام سوالاتم بودند و بازرگوانی خود، تقایص این حقیر را مورد اغماض قرار می دادند. از خداوند متعال آرزوی طول عمر با عزت و توفیق روز افزون برایشان مسئلت می نمایم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی و جناب آقای دکتر جت احسنی

طهرانی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را به عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم.
از استاد محترم جناب آقای دکتر عبدالله آل هوزنایند تحصیلات تکمیلی که در جلسه
دفاع اینجانب شرکت کردند بسیار سپاسگزارم.
برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون از خداوند متعال
منسئت می نمایم.

تعمدنامه

اینجانب محمد عابدیان دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان طراحی کنترل برای سیستم‌های غیرخطی بر اساس مدل‌های هایپربولیک، تحت راهنمایی مهرداد غزنوی و محمد هادی نوری اسکندری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمد عابدیان
تیرماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایانامه ابتدا تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه فازی و پایداری را بیان می‌کنیم، سپس برای ترکیب قواعد اگر آنگاه فازی از دو موتور استنتاج شناخته شده به نام‌های ممدانی و تاکاگی - سوگنو یا به اختصار سوگنو برای فرآیند استنتاج استفاده خواهیم کرد تا با پذیرش ورودی‌های فازی بر اساس پایگاه قواعد فازی، خروجی فازی مناسب را ایجاد نمایند، سپس به تشریح دو مدل فازی فوق می‌پردازیم.

در ادامه مدل‌های هایپربولیک فازی را برای طراحی کنترل کننده سیستم‌های پیوسته زمانی و گسسته زمانی معرفی می‌کنیم. این مدل‌ها بر اساس قواعد اگر آنگاه فازی ساخته می‌شوند. همچنین دو روش فرایند طراحی کنترل و تعیین ماتریس H ، بطوریکه پایداری مجانی سرتاسری و مقاوم‌پذیری سیستم حلقه بسته را تضمین کند ارائه می‌دهیم.

در فصل بعدی، سیستم‌های هایپربولیک را بدون استفاده از مفاهیم فازی به دست می‌آوریم، لذا فضای توابع هایپربولیک را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم در فضای توابع پیوسته چگال است و سپس از این فضا برای تبدیل سیستم‌های کنترل به شکل هایپربولیک استفاده می‌کنیم. همچنین کنترل پایدار کننده را برای سیستم هایپربولیک به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که این مدل‌ها قابلیت تقریب زدن سیستم دینامیکی اصلی را در محدوده نقطه تعادل با دقت بالا دارند و پارامترهای مدل را با حل یک مساله برنامه ریزی غیر خطی بدست می‌آوریم و با مثال‌های عددی به شبیه‌سازی نتایج و تحلیل آنها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: سیستم‌های پیوسته زمانی، سیستم‌های گسسته زمانی، مدل‌های هایپربولیک فازی، طراحی کنترل کننده، برنامه‌ریزی غیرخطی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1 . M. Abedian, M. Ghaznavi, M.H. Noori Skandari, An Approximate Approach to Control Nonlinear Systems, Second National and First International Conference on Soft Computing, 22-23 November, 2017 Department Engineering and Technology, East of Guilan.

2 . M.H. Noori Skandari, M. Ghaznavi, M. Abedian, Stabilizer control design for nonlinear systems based on the hyperbolic modelling, submitted 2018.

فهرست مطالب

۱	تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۲	۲.۱ از مجموعه‌های کلاسیک تا مجموعه‌های فازی	۲
۵	۳.۱ روابط فازی	۵
۶	۴.۱ ترکیب روابط فازی	۶
۷	۱.۴.۱ اصل توسعه	۷
۸	۲.۴.۱ اعداد فازی	۸
۹	۵.۱ متغیرهای زبانی و قواعد اگر-آن‌گاه فازی	۹
۹	۱.۵.۱ قیود زبانی	۹
۱۰	۶.۱ قواعد اگر-آن‌گاه فازی	۱۰
۱۰	۱.۶.۱ گزاره‌های فازی	۱۰
۱۱	۲.۶.۱ ویژگی‌های مجموعه قواعد	۱۱
۱۲	۷.۱ موتور استنتاج فازی	۱۲
۱۲	۱.۷.۱ روش استنتاج ممدانی	۱۲
۱۴	۲.۷.۱ روش استنتاج تاکاگی - سوگنو	۱۴
۱۴	۳.۷.۱ تشریح مدل فازی تاکاگی - سوگنو	۱۴
۱۴	۸.۱ فازی سازها و نافازی سازها	۱۴
۱۴	۱.۸.۱ فازی ساز	۱۴
۱۶	۲.۸.۱ نافازی ساز	۱۶
۱۹	۹.۱ پایداری سیستم‌های دینامیکی	۱۹
۲۱	۱۰.۱ پایداری لیاپانوف	۲۱
۲۷	۲ مدل‌های هایپربولیک فازی و خواص آن برای سیستم‌های زمانی پیوسته	۲۷
۲۷	۱.۲ مدل هایپربولیک فازی	۲۷
۲۹	۲.۲ مشخصه مدل هایپربولیک فازی	۲۹
۳۰	۳.۲ روند مدل سازی	۳۰
۳۰	۴.۲ طراحی کنترل برای مدل هایپربولیک فازی	۳۰
۳۰	۱.۴.۲ خواص کنترل گر	۳۰
۳۴	۵.۲ شبیه سازی مثال ها	۳۴

۴۵	۳	مدل‌های هایپربولیک فازی و خواص آن برای سیستم‌های زمانی گسسته
۴۵	۱.۳	مقدمه
۴۶	۲.۳	ارایه مدل تکرار اسکالر غیرخطی SRSN
۴۶	۳.۳	قابلیت تقریب
۴۸	۴.۳	روند مدل‌سازی
۵۰	۵.۳	تخمین پارامترها
۵۲	۶.۳	طراحی کنترل
۵۶	۷.۳	شبیه‌سازی مثال‌ها
۶۱	۴	مدل‌های هایپربولیک نافازی برای سیستم‌های زمانی پیوسته
۶۱	۱.۴	مقدمه
۶۲	۲.۴	فضای توابع هایپربولیک
۶۷	۳.۴	شکل هایپربولیک سیستم‌های کنترل غیرخطی
۶۸	۴.۴	محاسبه پارامترهای نامشخص سیستم هایپربولیک
۶۹	۵.۴	طراحی کنترل پایدارکننده
۷۱	۶.۴	شبیه‌سازی مثال‌ها
۸۱	۷.۴	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۸۱	۱.۷.۴	نتیجه‌گیری
۸۲	۲.۷.۴	پیشنهادهای
۸۳		مراجع
۸۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۹۵		نمایه

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

منطق ارسطویی اساس ریاضیات کلاسیک را تشکیل می‌دهد. براساس اصول و مبانی این منطق همه چیز تنها مشمول یک قاعده ثابت می‌شود که به موجب آن یا آن چیز درست است یا نادرست. بیش از دو هزار سال است که قانون ارسطو تعیین می‌کند که از نظر فلسفی چه چیز درست است و چه چیز نادرست، این قانون «اندیشیدن» در زبان، آموزش و افکار ما رسوخ کرده است. در دنیایی که ما در آن زندگی می‌کنیم، اکثر چیزهایی که درست به نظر می‌رسند، «نسبتاً» درست هستند و در مورد صحت پدیده‌های واقعی همواره درجاتی از «عدم قطعیت» صدق می‌کند. به عبارت دیگر پدیده‌های واقعی تنها سیاه یا تنها سفید نیستند، بلکه تا اندازه ای «خاکستری» هستند. پدیده‌های واقعی همواره «فازی»، «مبهم» و «غیردقیق» هستند. بدین ترتیب در حالی که در تمامی جهان حتی یک پدیده را نمی‌توان یافت که صددرصد درست یا صددرصد نادرست باشد، علم با ابزار ریاضی خود همه پدیده‌های جهان را این طور بیان می‌کرد، در این جا بود که علم دچار اشتباه شد. در منطق ارسطویی حالت میانه‌ای وجود ندارد و شیوه استدلال «قطعی»^۱ و صریح است. از طرف دیگر ریاضیات فازی بر پایه استدلال تقریبی بنا شده که منطبق با طبیعت و سرشت سیستم‌های انسانی است. در این نوع استدلال، حالت‌های صفر و یک تنها مرزهای استدلال را بیان می‌کنند و در واقع استدلال تقریبی حالت تعمیم یافته استدلال قطعی و صریح ارسطویی است. در این فصل به بررسی تعاریف و مفاهیم اولیه منطق فازی و پایداری می‌پردازیم [۱].

^۱Crisp

۲.۱ از مجموعه‌های کلاسیک تا مجموعه‌های فازی

فرض کنید X مجموعه جهانی^۲ و شامل تمامی عناصر و اعضا ممکن در بحث یا کاربرد مورد نظر باشد. یادآوری می‌شود که یک مجموعه کلاسیک A یا به اختصار مجموعه A در مجموعه جهانی X را می‌توان با فهرست تمامی اعضا (روش فهرست)^۳ یا با مشخص کردن ویژگی‌هایی که باید توسط اعضا مجموعه پوشش داده‌شود (روش قاعده)^۴ تعریف کرد. روش فهرست را فقط می‌توان در مجموعه‌های متناهی بکار برد، بنابراین کاربرد محدودی دارد. روش قاعده کلی‌تر می‌باشد. در روش قاعده یک مجموعه A را بدین صورت می‌توان تعریف نمود [۶]:

$$A = \{x \in X \mid x \text{ برآورده می‌کند}\}.$$

روش سومی نیز برای تعریف مجموعه A وجود دارد. روش تعلق یا عضویت^۵ که یک تابع عضویت دو مقداری $\{0, 1\}$ را برای A معرفی می‌کند؛ که با $\mu_A(x)$ نشان داده می‌شود به نحوی که

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱. [۳، ۵] فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر هر زیرمجموعه معمولی A از X ، یک تابع از X به $\{0, 1\}$ است که این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X ، عددی را از بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم (به طور دقیق‌تر، یک زیرمجموعه فازی از X). بنابراین یک مجموعه فازی A ، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضا آن می‌توانند به‌طور پیوسته از $I = [0, 1]$ اختیار شوند. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم، مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X ، یک عدد را از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A ، نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_A(x)$ را می‌توان درجه پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. در حالت حدی چنانچه x کاملاً در A عضو باشد داریم $\mu_A(x) = 1$ و چنانچه اصلاً در A عضو نباشد داریم $\mu_A(x) = 0$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها، حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند [۳].

تعریف ۲.۲.۱. [۶] یک مجموعه فازی A در مجموعه جهانی X بوسیله یک تابع $\mu_A(x)$ که مقادیری در بازه $[0, 1]$ اختیار می‌کند، مشخص می‌شود.

^۲ Universal set

^۳ List method

^۴ Rule method

^۵ Membership method

بنابراین یک مجموعه فازی تعمیم یک مجموعه کلاسیک است که اجازه می‌دهد تابع عضویت هر مقداری را در بازه $[0, 1]$ اختیار کند. به عبارت دیگر یک مجموعه کلاسیک فقط می‌توانست دو مقدار ۰ و ۱ داشته باشد در حالی که تابع عضویت یک مجموعه فازی، یک تابع پیوسته در محدوده $[0, 1]$ می‌باشد. یک مجموعه فازی A را در X می‌توان با یک مجموعه از زوج‌های مرتب x و مقدار عضویت آن نمایش داد. بدین ترتیب:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}. \quad (1.1)$$

هنگامی که X پیوسته باشد $\{X = \mathbb{R} \text{ مثال}\}$ ، A را معمولاً بدین صورت مشخص می‌کنند:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x, \quad (2.1)$$

که علامت $\int$ نشان دهنده انتگرال نیست، بلکه اجتماع تمامی نقاط $x \in X$ و مقدار تابع عضویت متناظر $\mu_A(x)$ را نشان می‌دهد. هنگامی که X گسسته باشد، A معمولاً بدین صورت نوشته می‌شود:

$$A = \sum_X \mu_A(x)/x = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n, \quad (3.1)$$

که در این جا نیز علامت Σ به معنای جمع ریاضی نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط $x \in X$ و توابع عضویت متناظر را نشان می‌دهد و نیز منظور از علامت $+$ ، اجتماع است نه جمع حسابی [۳] و [۶].

مثال ۱.۲.۱. اگر مجموعه مرجع به صورت $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نشان دهنده تعداد فرزندان باشد که یک خانواده تمایل به داشتنشان دارند؛ در این صورت مجموعه فازی A بدین صورت خواهد بود:

$$A = \{(0, 0/1), (1, 0/3), (2, 0/7), (3, 1), (4, 0/7), (5, 0/3), (6, 0/1)\},$$

و یا به صورت

$$A = \{0/1/0 + 0/3/1 + 0/7/2 + 1/3 + 0/7/4 + 0/3/5 + 0/1/6\}.$$

تعریف ۳.۲.۱. [۶] تکیه‌گاه^۶ مجموعه فازی A در مجموعه جهانی X یک مجموعه غیرفازی است که شامل تمامی عضوهای غیرصفر X می‌شود. یعنی

$$Sup(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}. \quad (4.1)$$

$Sup(A)$ نشان دهنده تکیه‌گاه مجموعه فازی است. اگر تکیه‌گاه یک مجموعه فازی خالی باشد، آن را یک مجموعه فازی تهی می‌نامند. یک منفرد فازی^۷، یک مجموعه فازی است که تکیه‌گاه آن یک نقطه واحد در X می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱. [۳] مقدار $M = \sup \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد آن‌گاه A نرمال نامیده می‌شود. در غیر این صورت A را زیرنرمال گوییم. بدیهی است که هر مجموعه فازی زیرنرمال A را می‌توان با تقسیم $\mu_A(x)$ ها بر ارتفاع A ، نرمال کرد. اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_A(x) = \frac{1}{M}$ ، x را یک نقطه گذر A گوییم.

^۶Support

^۷Fuzzy singleton

تعریف ۵.۲.۱. [۳] مجموعه فازی A را تهی گوئیم اگر برای هر $x \in X$ ، $\mu_A(x) = 0$ باشد.

تعریف ۶.۲.۱. [۳] مجموعه فازی A را تام گوئیم اگر برای هر $x \in X$ ، $\mu_A(x) = 1$ باشد.

تعریف ۷.۲.۱. [۳] زیر مجموعه عناصری از X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی α ($\alpha > 0$) باشد، $- \alpha$ برش A (یا مجموعه تراز α وابسته به A) گوئیم و با A_α نشان می‌دهیم. پس

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (5.1)$$

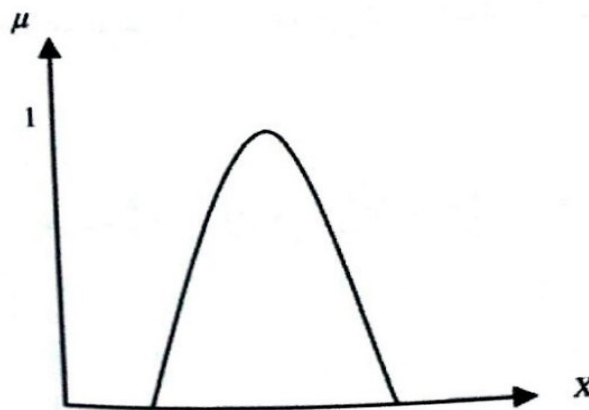
در بعضی موارد نیز از مفهوم $- \alpha$ برش قوی استفاده می‌شود که با $A_{\bar{\alpha}}$ نشان داده شده و این گونه تعریف می‌شود:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}. \quad (6.1)$$

تعریف ۸.۲.۱. [۳، ۶] مجموعه فازی A را محدب گوئیم اگر هر $- \alpha$ برش A (برای تمام $0 < \alpha \leq 1$) محدب باشد. یک تعریف معادل تحدب به صورت زیر است:

مجموعه فازی A محدب است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[A(x_1), A(x_2)].$$



شکل ۱.۱: مجموعه محدب

تعریف ۹.۲.۱. [۳، ۶] مجموعه فازی A را زیر مجموعه فازی B گوئیم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

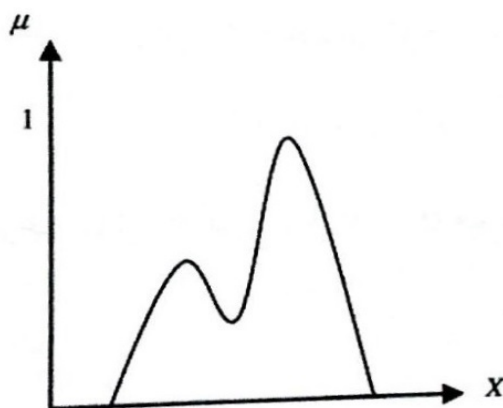
تعریف ۱۰.۲.۱. [۳، ۶] دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوئیم و می‌نویسیم $A = B$ اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

تعریف ۱۱.۲.۱. [۳، ۶] اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت مجموعه فازی $A \cup B$ در X ، با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in X. \quad (7.1)$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (8.1)$$



شکل ۲.۱: مجموعه غیرمحدب

تعریف ۱۲.۲.۱. [۳، ۶] اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت مجموعه فازی $A \cap B$ در X ، با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in X. \quad (۹.۱)$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (۱۰.۱)$$

یک راه شهودی برای تعریف اجتماع بدین ترتیب است که اجتماع A و B کوچکترین مجموعه فازی است که هم دربردارنده A و هم دربردارنده B باشد. به‌طور دقیق‌تر، اگر C یک مجموعه فازی باشد که دربردارنده هم A و هم B باشد، آن‌گاه دربردارنده اجتماع A و B نیز خواهد بود. برای این‌که نشان دهیم این همان تعریف قبلی است، در ابتدا می‌بینیم که $A \cup B$ به صورت رابطه تعریف شده دربردارنده هم A و هم B می‌باشد، چرا که $\max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_A(x)$ و $\max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_B(x)$ ؛ به‌علاوه اگر C یک مجموعه فازی باشد که دربردارنده A و B است، آن‌گاه $\mu_C(x) \geq \mu_A(x)$ و نیز $\mu_C(x) \geq \mu_B(x)$ ؛ بنابراین $\mu_C(x) \geq \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x)$ که بدین معنی است که مجموعه $A \cup B$ که به‌صورت (۷.۱) تعریف شده، کوچکترین مجموعه فازی است که دربردارنده A و B می‌باشد. عمل اشتراک که به‌وسیله رابطه (۹.۱) تعریف شده را نیز می‌توان به‌همین ترتیب توجیه کرد [۲].

۳.۱ روابط فازی

تعریف ۱.۳.۱. [۲] فرض کنید U و V دو مجموعه کلاسیک دلخواه (غیر فازی و قطعی) باشند. ضرب کارتزین $U \times V$ که با $U \times V$ نشان داده می‌شود یک مجموعه غیرفازی شامل تمامی زوج مرتب‌های (u, v) می‌باشد؛ به‌نحوی که $u \in U$ و $v \in V$. بدین معنی که:

$$U \times V = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}. \quad (۱۱.۱)$$

در حالت کلی ضرب کارتزین n مجموعه غیر فازی دلخواه $U_1, U_2, \dots, U_n$ که با $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ نشان داده می‌شود، یک مجموعه غیرفازی از تمامی n عضوهای $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ است؛ به

^۱Cartesian product

نحوی که برای $i \in \{1, 2, \dots\}$ داریم:

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}. \quad (12.1)$$

یک رابطه (غیرفازی) بین مجموعه‌های (غیرفازی) $U_1, U_2, \dots, U_n$ زیرمجموعه‌ای از ضرب کارتیزین $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ می‌باشد. بدین معنی که اگر ما از $Q(U_1, U_2, \dots, U_n)$ برای نمایش رابطه میان $U_1, U_2, \dots, U_n$ استفاده کنیم، آن‌گاه

$$Q(U_1, U_2, \dots, U_n) \subset U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n.$$

تعریف ۲.۳.۱. [۲] یک رابطه فازی، یک مجموعه فازی است که در فضای حاصل ضرب برداری مجموعه‌های قطعی $U_1, U_2, \dots, U_n$ تعریف شده است. با استفاده از نحوه نمایش (۱.۱) یک رابطه فازی Q در فضای $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ به صورت یک مجموعه فازی مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$Q = \{((u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_Q(u_1, u_2, \dots, u_n)) | (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n\} \quad (13.1)$$

که

$$\mu_Q : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1].$$

مثال ۱.۳.۱. [۲] اگر $V = U = \mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه رابطه فازی a تقریباً با b برابر است W را که با W نشان می‌دهیم دارای تابع عضویتی به صورت زیر است:

$$\mu_W(a, b) = e^{-(a-b)^2}$$

همچنین رابطه فازی M به صورت a خیلی خیلی بزرگتر از b است M دارای تابع عضویتی شبیه به تابع زیر خواهد بود:

$$\mu_M(a, b) = \frac{1}{1 + e^{-(a-b)}}$$

۴.۱ ترکیب روابط فازی

فرض کنید $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ دو رابطه دودویی غیرفازی باشند، که از یک مجموعه V به طور مشترک استفاده می‌کنند. ترکیب P و Q که با $P \circ Q$ نشان داده می‌شود، به صورت رابطه‌ای در $U \times W$ تعریف می‌شود به نحوی که $(x, z) \in P \circ Q$ اگر و فقط اگر حداقل یک $y \in V$ وجود داشته باشد، به طوری که: $(x, y) \in P$ و $(y, z) \in Q$. با استفاده از نمایش روابط به شکل توابع عضویت، تعریف معادلی برای ترکیب توابع به صورت لم زیر به دست می‌آید.

لم ۱.۴.۱. [۲] ترکیب $P \circ Q$ و $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ است اگر و فقط اگر

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_y t[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)], \quad (14.1)$$

که $y \in V, (x, z) \in V \times W$ و t یک t -نرم است.

حال مفهوم ترکیب را به روابط فازی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱. [۲] فرض کنید P و Q روابط فازی باشند. ترکیب روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ که با $P \circ Q$ نشان داده می‌شود، به صورت یک رابطه فازی در $U \times W$ تعریف می‌گردد که تابع عضویت آن مطابق با رابطه (۱۴.۱) خواهد بود. از آنجا که t - نرم در رابطه (۱۴.۱) می‌تواند انواع مختلفی باشد، برای هر نوع t - نرم یک ترکیب خاص به دست می‌آوریم.

تعریف ۲.۴.۱. [۲] ترکیب ماکزیمم - مینیمم روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک رابطه فازی $P \circ Q$ در $U \times W$ بوده که به وسیله تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_y \min[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)], \quad (15.1)$$

که در آن $y \in V, (x, z) \in U \times W$.

تعریف ۳.۴.۱. [۲] ترکیب ماکزیمم-حاصل ضرب روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک رابطه فازی $P \circ Q$ در $U \times W$ بوده که به وسیله تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_y (\mu_P(x, y) \cdot \mu_Q(y, z)), \quad (16.1)$$

که در آن $y \in V, (x, z) \in U \times W$.

۱.۴.۱ اصل توسعه

اصل توسعه یک معادله اساسی است، که اجازه می دهد دامنه یک تابع را از نقاط عضو U به مجموعه های فازی عضو U توسعه داد. مشخص تر این که، فرض کنید $f: U \rightarrow V$ تابعی از مجموعه قطعی U به مجموعه قطعی V باشد. همچنین فرض کنید که یک مجموعه فازی A عضو U داده شده و ما می خواهیم مجموعه فازی B را در V به نحوی معین کنیم که $B = f(A)$. اگر f یک نگاشت یک به یک باشد، آن گاه داریم:

$$\mu_B(y) = \mu_A[f^{-1}(y)], \quad y \in V; \quad (17.1)$$

که در آن f^{-1} معکوس f است، بدین معنی که:

$$f[f^{-1}(y)] = y.$$

اگر f یک نگاشت یک به یک نباشد، آن گاه هنگامی که دو یا چند نقطه متمایز در U با مقادیر عضویت متفاوت در A به یک نقطه یکسان در V نگاشته شوند، ابهامی بوجود خواهد آمد. به عنوان مثال ما می توانیم داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) = y \text{ اما } x_1 \neq x_2 \text{ و } \mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$$

در نتیجه سمت راست رابطه (۱۷.۱) می تواند دو مقدار مختلف $\mu_A(x_1) = f^{-1}(y)$ یا $\mu_A(x_2) = f^{-1}(y)$ را اختیار نماید. برای رفع این ابهام، ما مقدار بزرگتر را در بین دو مقدار عضویت به $\mu_B(y)$ نسبت می دهیم. در حالت کلی، تابع عضویت برای B به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_B(y) = \sup_{x: y=f(x)} \mu_A(x), \quad y \in V, x \in f^{-1}(y), \quad (18.1)$$

که $f^{-1}(y)$ نشان دهنده مجموعه تمامی نقاط $x \in U$ است، به نحوی که $f(x) = y$. معادله (۱۸.۱) اصل توسعه نامیده می شود [۴].

در حالت کلی تر اگر X حاصل ضرب کارتزین مجموعه های مرجع به شکل $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ ، $A_1, A_2, \dots, A_r$ مجموعه های فازی تعریف شده در $X_1, X_2, \dots, X_r$ ، f یک تابع از X به مجموعه مرجع دیگری به صورت Y و $y = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ باشند. اصل توسعه اجازه می دهد مجموعه فازی B را در Y به صورت زیر تعریف کنیم:

$$B = \{(y, \mu_B(y)) | y = f(x_1, \dots, x_r); (x_1, \dots, x_r) \in X\},$$

که داریم [۲]:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{نقاط سایر} \end{cases}$$

مثال ۱.۴.۱. [۲] اگر $A = \{(-1, 0/5), (0, 0/8), (1, 1), (2, 0/4)\}$ باشد و $f(x) = x^2$ در این صورت با استفاده از اصل توسعه مجموعه فازی B به صورت زیر خواهد بود:
 $B = f(A) = \{(0, 0/8), (1, 1), (4, 0/4)\}$

۲.۴.۱ اعداد فازی

یکی از کاربردهای اصل توسعه، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع و ضرب برای اعدادی است که به اعداد فازی موسوم اند و یک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی می باشند.

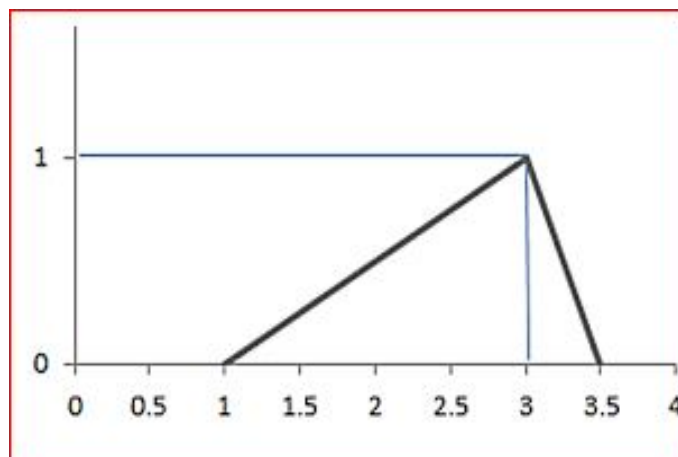
تعریف ۴.۴.۱. [۴]. یک مجموعه فازی محدب مانند N از R (خط حقیقی) را یک عدد فازی گوئیم، هرگاه

- $N(x)$ تک نمایی باشد یعنی دقیقاً یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$.
- $N(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد. مجموعه تمام اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می دهیم.

مثال ۲.۴.۱. تابع عضویت زیر مربوط به یک عدد فازی می باشد:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 7-2x, & 3 < x < 3.5 \end{cases}$$

تابع عضویت مثلثی می باشد لذا محدب است و $A(3) = 1$ و پیوسته نیز است. این تابع عضویت



شکل ۳.۱: تابع عضویت مثلثی مربوط به عدد فازی ۳ مثال (۲.۴.۱).

مربوط به تقریباً ۳ یا عدد فازی ۳ می باشد.

تعریف ۵.۴.۱. [۲]. فرض کنید $M, N \in F(R)$ با توابع عضویت پیوسته باشند و $*$: $R \times R \rightarrow R$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم $*$ را برای اعداد فازی با $\otimes$ نشان دهیم،

با استفاده از اصل توسعه حاصل $M \otimes N$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود؛

$$(M \otimes N)(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(y)] \quad (19.1)$$

۵.۱ متغیرهای زبانی و قواعد اگر-آن گاه فازی

در زندگی روزمره، کلماتی وجود دارند که اغلب برای توصیف متغیرها استفاده می‌شوند. به عنوان مثال هنگامی که می‌گوییم "امروز گرم است." یا معادل آن "دمای هوا امروز بالا است." ما از واژه "بالا" برای توصیف "دمای هوای امروز" استفاده کردیم. بدین معنی که متغیر "دمای هوای امروز" واژه "بالا" را به عنوان مقدار خود پذیرفته است. واضح است که متغیر "دمای هوای امروز" می‌تواند مقادیری نظیر ۲۵ درجه سانتی گراد، ۱۹ درجه سانتی گراد و... را اختیار کند. هنگامی که یک متغیر، اعداد را به عنوان مقدار بپذیرد، ما یک چهارچوب ریاضی مشخص برای فرموله کردن آن داریم اما هنگامی که متغیر، واژه‌ها را به عنوان مقدار می‌پذیرد، چهارچوب مشخصی برای فرموله کردن آن در نظریه ریاضیات کلاسیک نداریم؛ برای این که چنین چهارچوبی به دست آوریم، مفهوم متغیرهای زبانی تعریف شده است.

تعریف ۱.۵.۱. [۲] اگر یک متغیر بتواند واژه‌هایی از زبان طبیعی را به عنوان مقدار خود بپذیرد، آن گاه یک متغیر زبانی نامیده می‌شود، به طوری که واژه‌ها به وسیله مجموعه‌های فازی در محدوده‌ای که متغیرها تعریف شده‌اند، مشخص می‌شوند.

متغیرهای زبانی، عناصر اساسی در نمایش دانش بشری محسوب می‌شوند. هنگامی که ما بر فرض مثال از سنسورها برای اندازه‌گیری یک متغیر استفاده می‌کنیم، آن‌ها به ما مقادیر عددی می‌دهند. هنگامی که از انسان‌های خبره می‌خواهیم که یک متغیر را ارزیابی کنند، به ما کلمات و واژه‌هایی می‌دهند. به عنوان مثال هنگامی که از یک رادار برای اندازه‌گیری سرعت ماشین استفاده می‌کنیم، به ما اعدادی نظیر 42mph ، 39mph می‌دهد. هنگامی که از یک انسان می‌خواهیم راجع به سرعت ماشین اظهار نظر کند، اغلب با کلماتی نظیر "پایین"، "بالا" آن را بیان می‌کند. بنابراین با معرفی متغیرهای زبانی قادر خواهیم بود، توصیف‌های مبهم و نامعلوم در زبان‌های طبیعی را در گزاره‌های ریاضی دقیق فرموله کنیم.

۱.۵.۱ قیود زبانی

با مفهوم متغیرهای زبانی قادر خواهیم بود، واژه‌ها را به عنوان مقادیر متغیرها (زبانی) بپذیریم. در زندگی امروزه اغلب از چندین کلمه برای توصیف یک متغیر استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، اگر ما سرعت ماشین را به عنوان یک متغیر زبانی ببینیم، آن گاه مقدار آن ممکن است "کند نیست"، "خیلی کند"، "اندکی تند"، کم و متوسط و نظایر آن باشد. در حالت کلی، مقدار یک متغیر زبانی یک گزاره مرکب $x = x_1 x_2 \dots x_n$ که از اتصال اجزاء $x_1, x_2, \dots, x_n$ تشکیل شده، می‌باشد. این اجزاء را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

- اصطلاحات پایه، که بر حسب مجموعه‌های فازی می‌باشند. عبارت‌هایی نظیر "کند"، "متوسط"، و "تند".

- مکمل کننده "نه" و متصل کننده های "و" و "یا".
- قیودی نظیر "خیلی"، "اندکی"، "کم بیش" و

۶.۱ قواعد اگر-آن گاه فازی

۱.۶.۱ گزاره های فازی

در سیستم های فازی، دانش بشری به شکل قواعد اگر-آن گاه فازی نشان داده می شود. یک قاعده اگر-آن گاه فازی یک گزاره شرطی به شکل زیر می باشد:

فازی < گزاره آن گاه فازی > گزاره > اگر (۲۰.۱)

به طور کلی دو نوع گزاره فازی وجود دارد. گزاره فازی ساده و گزاره فازی مرکب. گزاره فازی ساده بدین شکل است:

$$x \text{ is } A$$

که x یک متغیر زبانی و A مقدار زبانی متغیر x است (بدین معنی که A یک مجموعه فازی تعریف شده در دامنه تعریف X می باشد). یک گزاره فازی مرکب، ترکیبی از گزاره های فازی ساده با استفاده از اتصال دهنده "و"، "یا" و "نه" که نشان دهنده اشتراک فازی، اجتماع فازی و مکمل فازی هستند، می باشد. در یک عبارت فازی مرکب، عبارت های فازی ساده مستقل هستند. یعنی x ها در عبارت های مرکب می توانند متغیرهای متفاوتی باشند. در واقع متغیرهای زبانی در یک عبارت فازی مرکب، در حالت کلی یکسان نیستند. به عنوان مثال فرض کنید که x سرعت ماشین و $y = x$ شتاب ماشین باشد. اگر مجموعه فازی "بزرگ" (F) را برای سرعت و مجموعه فازی "بزرگ" (L) را برای شتاب تعریف کنیم، در آن صورت عبارت زیر، یک عبارت مرکب خواهد بود.

$$x \text{ is } F \text{ AND } y \text{ is } L$$

بنابراین عبارت های فازی مرکب باید به عنوان روابط فازی در نظر گرفته شوند.

تعریف ۱.۶.۱. [۲] یک پایگاه قواعد فازی^۹ از مجموعه ای از قواعد اگر - آن گاه فازی تشکیل می شود. پایگاه قواعد فازی از این نظر که سایر اجزاء سیستم فازی برای پیاده سازی این قواعد به شکل موثر و کارا استفاده می شوند، قلب یک سیستم فازی محسوب می شود. به طور مشخص، پایگاه قواعد فازی شامل قواعد اگر - آن گاه فازی زیر است:

$$(۲۱.۱) \quad Ru^{(l)}: \text{ اگر } x_1 \text{ در } A_1^l \text{ و } \dots \text{ و } x_n \text{ در } A_n^l \text{ باشد، آن گاه } y \text{ در } B^l \text{ است.}$$

که B^l و A_i^l مجموعه هایی فازی و $x = (x_1, \dots, x_n)$ و y به ترتیب متغیرهای ورودی و خروجی (زبانی) سیستم فازی می باشند.

فرض کنید M تعداد قواعد موجود در پایگاه قواعد فازی باشد یعنی $l = 1, 2, \dots, M$. ما قواعدی به شکل (۲۱.۱) را کانونیک می نامیم.

^۹Fuzzy Rule Base

لم ۱.۶.۱. [۲] قواعد اگر - آن گاه فازی کانونیک به شکل (۲۱.۱) در حالت خاص شامل قواعد زیر می باشند:

- قواعد جزئی:
اگر x_1 در A_1^l و ... و x_m در A_m^l باشد؛ آن گاه y در B^l است.
- قواعد یا:
 x_1 در A_1^l و ... و x_m در A_m^l باشد؛ یا x_{m+1} در A_{m+1}^l و ... و x_n در A_n^l باشد؛ آن گاه y در B^l است.
- قواعد فازی منفرد:
 y در B^l است.
- قواعد تدریجی: به عنوان مثال
 x کوچکتر، y بزرگتر
- قواعد غیر فازی (یا همان قواعد ضرب متداول)

۲.۶.۱ ویژگی های مجموعه قواعد

تعریف ۲.۶.۱. [۲] یک مجموعه از قواعد اگر - آن گاه فازی کامل نامیده می شود اگر برای هر $x \in X$ حداقل یک قاعده 10 در پایگاه قواعد فازی وجود داشته باشد، به عبارت دیگر قاعده $Ru^{(l)}$ وجود دارد به نحوی که

$$\mu_{A_i^l}(x) \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (22.1)$$

مثال ۱.۶.۱. [۲]. یک رابطه فازی دو ورودی - یک خروجی با $U = U_1 \times U_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ و $V = [0, 1]$ در نظر بگیرید. سه مجموعه فازی S_1, M_1, L_1 در U_1 و دو مجموعه فازی S_2, L_2 در U_2 تعریف شده اند. برای این که پایگاه قواعد فازی کامل باشد، باید شامل شش قاعده زیر که بخش های اگر آن ها، تمامی ترکیب های ممکن S_1, M_1, L_1 با S_2, L_2 را در بر می گیرند، باشد.

- $Ru^{(1)}$: اگر x_1 در S_1 و x_2 در S_2 آن گاه باشد، y در B^1 است.
- $Ru^{(2)}$: اگر x_1 در S_1 و x_2 در L_2 آن گاه باشد، y در B^2 است.
- $Ru^{(3)}$: اگر x_1 در M_1 و x_2 در S_2 آن گاه باشد، y در B^3 است.
- $Ru^{(4)}$: اگر x_1 در M_1 و x_2 در L_2 آن گاه باشد، y در B^4 است.
- $Ru^{(5)}$: اگر x_1 در L_1 و x_2 در S_2 آن گاه باشد، y در B^5 است.
- $Ru^{(6)}$: اگر x_1 در L_1 و x_2 در L_2 آن گاه باشد، y در B^6 است.

که B^l ($l = 1, 2, \dots, 6$) مجموعه های فازی در V هستند. اگر یکی از قواعد در این مجموعه حذف شود، آن گاه می توانیم نقطه ای مانند $x^* \in U$ را پیدا کنیم که در آن نقطه بخش اگر تمامی قواعد باقی مانده مقدار عضویت صفر داشته باشند.

¹⁰ Rule

تعریف ۳.۶.۱. [۲] یک مجموعه از قواعد اگر - آن گاه فازی سازگار نامیده می‌شوند اگر قواعدی یافت نشوند که بخش‌های اگر یکسان و بخش‌های آن گاه متفاوت داشته باشند.

برای قواعد حاصل ضرب غیرفازی، سازگاری یک نیاز اساسی است چراکه در صورتی که قواعد متضاد وجود داشته باشند جستجو با مشکل مواجه خواهد شد. با این حال برای قواعد فازی سازگاری آن چنان حیاتی نیست چراکه در صورت وجود قواعد متضاد بخش‌های موتور استنتاج و غیرفازی‌ساز میانگین آن‌ها را برای بدست آوردن یک نتیجه بهینه به‌طور خودکار محاسبه می‌کند. البته در ابتدا بهتر است که یک پایگاه قواعد فازی سازگار داشته باشیم.

تعریف ۴.۶.۱. [۲] یک مجموعه از قواعد اگر - آن گاه فازی پیوسته نامیده می‌شوند، اگر قواعد همسایه‌ای وجود نداشته‌باشند که اشتراک مجموعه‌های فازی بخش آن گاه آن‌ها تهی باشند. به‌طور شهودی، پیوستگی بدین معناست که رفتار ورودی - خروجی سیستم فازی باید آرام و نرم باشد.

۷.۱ موتور استنتاج فازی

دریک موتور استنتاج فازی، اصول منطق فازی برای ترکیب قواعد اگر- آن گاه در پایگاه قواعد فازی استفاده شده‌اند. در این پایان نامه ما از دو موتور استنتاج شناخته شده به نام‌های ممدانی^{۱۱} و تاکاگی^{۱۲} یا به اختصار سوگنو برای فرآیند استنتاج استفاده می‌کنیم تا با پذیرش ورودی‌های فازی بر اساس پایگاه قواعد فازی، خروجی فازی مناسب را ایجاد نمایند.

۱.۷.۱ روش استنتاج ممدانی

در بررسی چگونگی استدلال ممدانی ابتدا به کمک یک مثال ساده با دو قاعده که در زیر آمده است، شروع می‌کنیم. در این جا دو متغیر در قسمت فرض و یک متغیر در قسمت نتیجه داریم. در واقع دو ورودی و یک خروجی را دارا هستیم.

قاعده اول: اگر x در A_1 باشد و y در B_1 باشد، آن گاه z در C_1 است.

قاعده دوم: اگر x در A_2 باشد و y در B_2 باشد، آن گاه z در C_2 است.

که در آن‌ها $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ مجموعه‌های فازی هستند. اکنون فرض کنیم x_0 و y_0 به ترتیب ورودی‌هایی برای متغیرهای x و y قسمت فرض باشند. ورودی‌ها را به صورت (x_0, y_0) نشان می‌دهیم. فرآیند استدلال برای ورودی (x_0, y_0) به صورت زیر است:

گام ۱: سازگاری هر قاعده برای ورودی (x_0, y_0) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$W_1 = \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \quad \text{۱: قاعده سازگاری} \quad (23.1)$$

$$W_2 = \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0) \quad \text{۲: قاعده سازگاری}$$

در قاعده‌های قبلی دو متغیر x و y در قسمت فرض وجود دارند؛ بر این اساس می‌توانیم دو مقدار عضویت برای دو متغیر ورودی x_0 و y_0 به‌دست آوریم. اگر عمل $\wedge$ (مینیمم)

^{۱۱} Mamdani

^{۱۲} Takagi-Sugeno

را برای مقادیر عضویت قبلی به کار ببریم، سازگاری هر قاعده را به دست خواهیم آورد. اکنون این روش را برای حالت کلی تعمیم می‌دهیم. اگر m ورودی وجود داشته باشد، قاعده اگر-آن گاه شامل فرضی به شکل زیر است:

x_1 در A_1 است و ... و x_m در A_m است.

سازگاری قسمت فرض به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_m}(x_m).$$

گام ۲: با بکارگیری سازگاری در گام ۱ مجموعه‌های فازی در قسمت نتیجه و ارزش هر قاعده را به دست می‌آوریم.

$$\mu_{C'_1}(z) = W_1 \wedge \mu_{C_1}(z), \quad \forall z \in Z \quad \text{قاعده ۱: ارزش} \quad (24.1)$$

$$\mu_{C'_2}(z) = W_2 \wedge \mu_{C_2}(z), \quad \forall z \in Z \quad \text{قاعده ۲: ارزش}$$

گام ۳: ارزش هر قاعده که در گام ۲ به دست آمده را جمع‌بندی می‌کنیم و ارزش نهایی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\mu_C(z) = \mu_{C'_1}(z) \vee \mu_{C'_2}(z), \quad \text{نهایی: ارزش} \quad (25.1)$$

در حالت کلی با n قاعده، می‌توان رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$\mu_C(z) = \mu_{C'_1}(z) \vee \mu_{C'_2}(z) \vee \dots \vee \mu_{C'_n}(z). \quad (26.1)$$

این نتیجه فرآیند استدلال را کامل می‌کند. به جای عمل $\wedge$ (مینیمم) در بالا می‌توان از عمل ضرب استفاده کرد.

گام ۴: نتیجه نهایی به صورت مجموعه فازی در گام ۳ آمده است. این نتیجه قابل اعمال نیست زیرا به یک مقدار معین به عنوان خروجی استدلال نیاز داریم. بنابراین لازم است که مجموعه فازی را به یک عدد معین برگردانیم. عمل برگرداندن یک مجموعه فازی به یک مقدار معین را نافازی‌سازی می‌نامند که در (۲.۸.۱) به طور مفصل مورد بحث قرار خواهد گرفت. در این جا تنها با اشاره‌ای کوچک یادآور می‌شویم که خروجی نهایی z_0 با روش نافازی‌سازی مرکز ثقل به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$z_0 = \frac{\int \mu_C(z)z dz}{\int \mu_C(z) dz}, \quad (27.1)$$

که در آن $\int$ به معنی انتگرال معمولی است.

در فرآیند استدلال پیشین ورودی‌های x_0 و y_0 معین فرض شده بودند. حالت‌هایی وجود دارند که ورودی‌ها توسط مجموعه‌های فازی A' و B' داده می‌شوند. در چنین حالت‌هایی، محاسبه سازگاری در گام ۱ ممکن است با گام زیر تعویض شود [۴].

سازگاری قاعده ۱:

$$W_1 = (\max(\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A'}(x))) \wedge (\max(\mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{B'}(y))).$$

سازگاری قاعده ۲:

$$W_2 = (\max(\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A'}(x))) \wedge (\max(\mu_{B_2}(y) \wedge \mu_{B'}(y))).$$

۲.۷.۱ روش استنتاج تاکاگی - سوگنو

در میان مدل های مختلف فازی، مدل فازی تاکاگی - سوگنو ($T - S$) بیشترین توجه را به خود جلب کرده است. مدل فازی $T - S$ که به ترتیب توسط تاکاگی و سوگنو پیشنهاد شده است برای مدل سازی دینامیک سیستم های پیچیده غیر خطی مناسب می باشد. تفاوت اصلی این روش با روش ممدانی در خروجی است. خروجی این مدل به صورت یک تابع خطی بیان می شود.

۳.۷.۱ تشریح مدل فازی تاکاگی - سوگنو

مدل فازی تاکاگی - سوگنو به شکل کلی زیر است:

$$R^i : \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^i, x_2 \text{ is } A_2^i, \dots, x_m \text{ is } A_m^i, \\ \text{THEN } y^i = P_o^i + P_1^i x_1 + P_2^i x_2 + \dots + P_m^i x_m, \quad (28.1)$$

در رابطه بالا R^i ، i امین قاعده، A_j^i یک زیرمجموعه فازی، y^i خروجی i امین قاعده، P_j^i یک پارامتر از بخش نتیجه و x_j متغیر ورودی کلی است. برای یک بردار ورودی $(x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{mo})$ معین، خروجی $\hat{y}$ می تواند با گرفتن میانگین وزنی از y_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ به صورت

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^n G^i y^i}{\sum_{i=1}^n G^i}$$

استنتاج شود. در این جا n تعداد قواعد فازی است و y^i از معادله خروجی i - امین قاعده بدست آمده و نیز وزن G^i یعنی ارزش درستی فرض i - امین قاعده برای ورودی، که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$G^i = \prod_{j=1}^m \mu_{A_j^i}(x_{jo})$$

که نماد Π مینیمم یا حاصل ضرب توابع عضویت مجموعه های فازی $A_j^i(x_{jo})$ تعریف شده است.

۸.۱ فازی سازها و نافازی سازها

۱.۸.۱ فازی ساز

یک فازی کننده^{۱۳} مقادیر قطعی متغیرهای ورودی را می گیرد و آن ها را به درجه بندی مناسبی از متغیرهای زبانی نگاشت می کند. فازی ساز به عنوان نگاشتی از یک نقطه مانند $x^* \in X \subset R^n$ به یک مجموعه فازی A در X تعریف شده است. معیارهای زیر در طراحی فازی ساز مطرح می باشند:

- ورودی در نقطه x^* قطعی است، بدین معنی که مجموعه فازی A باید در نقطه x^* مقدار تعلق بزرگی داشته باشد.

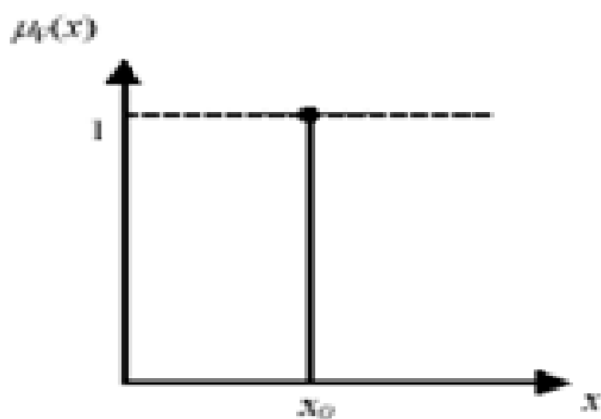
^{۱۳}Fuzzifier

- فازی ساز باید بتواند در ساده کردن محاسبات مربوط به موتور استنتاج فازی نقش داشته باشد.

به معرفی چند فازی ساز می پردازیم.

۱. **فازی ساز منفرد:** یک نقطه $x^* \in X$ با مقدار حقیقی را به یک منفرد فازی A در X می نگارد که مقدار عضویت در نقطه x^* برابر با ۱ و در سایر نقاط X برابر ۰ می باشد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = x^* \\ 0 & x \neq x^* \end{cases} \quad (29.1)$$



شکل ۴.۱: فازی ساز منفرد

۲. **فازی ساز گوسین:** نقطه $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ را به مجموعه فازی A در X با تابع عضویت گوسین زیر می نگارد.

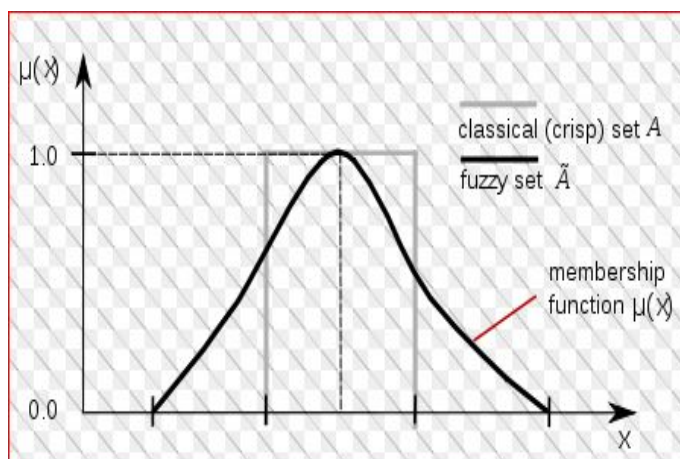
$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} * \dots * e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}, \quad (30.1)$$

که a_i ها پارامترهای مثبت و * نشان دهنده $-t$ نرم بوده که معمولاً از نوع حاصل ضرب یا مینیمم انتخاب می شود.

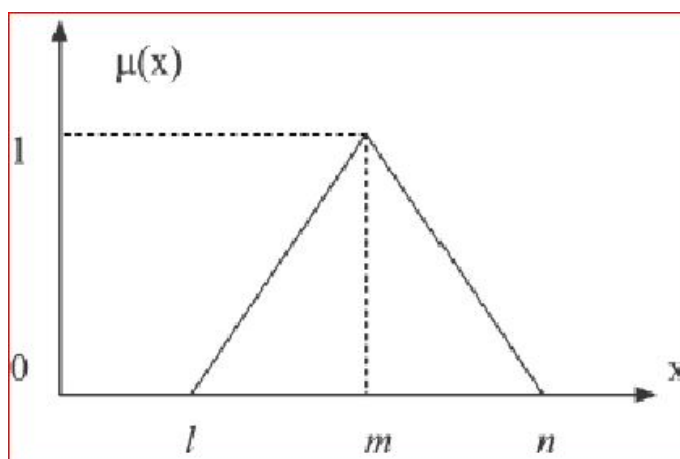
۳. **فازی ساز مثلثی:** نقطه $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ با مقدار حقیقی را به مجموعه فازی A در X با تابع عضویت مثلثی زیر می نگارد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \left[1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}\right] * \dots * \left[1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}\right] & \forall i, |x_i - x_i^*| \leq b_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (31.1)$$

که b_i ها پارامترهای مثبت و * نشان دهنده $-t$ نرم بوده که معمولاً از نوع حاصل ضرب یا مینیمم انتخاب می شود.



شکل ۵.۱: فازی سازگوسین



شکل ۶.۱: فازی ساز مثلثی

۲.۸.۱ نافازی ساز

نافازی ساز^{۱۴} به عنوان یک نگاشت از مجموعه فازی B در $V \subset R$ (که خروجی موتور استنتاج فازی است) به یک نقطه قطعی $y^* \in V$ تعریف می گردد. وظیفه نافازی ساز مشخص کردن نقطه ای است که بهترین نماینده مجموعه فازی B باشد. معیارهای زیر را در انتخاب نافازی ساز داریم:

- توجیه پذیری یعنی نقطه y^* از نظر شهودی باید نشان دهنده مجموعه فازی B باشد. به عنوان مثال در وسط B قرار گرفته باشد یا با درجه بالا به B تعلق داشته باشد.
- سادگی در محاسبات داشته باشیم.
- یک تغییر کوچک در B نباید به تغییر بزرگی در y^* منجر شود. این ویژگی پیوستگی نام دارد.

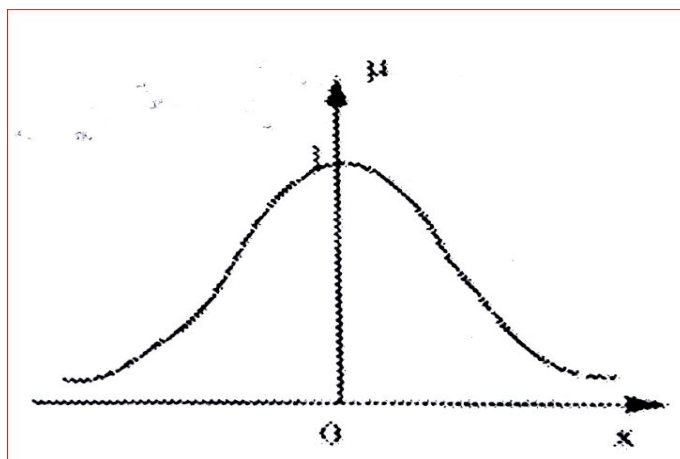
^{۱۴}Defuzzifier

به معرفی چند نافازی ساز می پردازیم.

۱. **نافازی ساز مرکز ثقل** ^{۱۵} : نافازی ساز مرکز ثقل، نقطه y^* را به عنوان مرکز ناحیه ای که به وسیله تابع عضویت B پوشش داده شده، تعریف می کند؛ بدین معنا که

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_B(y) dy}{\int_V \mu_B(y) dy}. \quad (۳۲.۱)$$

نماد $\int$ در حالت پیوسته نشان دهنده عمل انتگرال معمولی می باشد. در حالت گسسته $\sum$ جایگزین انتگرال می شود. شکل زیر این موضوع را نشان می دهد.



شکل ۷.۱: نافازی ساز مرکز ثقل

۲. **نافازی ساز میانگین مراکز** ^{۱۶} : از آن جا که مجموعه فازی B اجتماع یا اشتراک M مجموعه فازی می باشد، یک تقریب خوب رابطه (۳۲.۱) میانگین وزنی مراکز M مجموعه فازی با وزن هایی برابر با ارتفاع مجموعه های فازی متناظر می باشد. اگر $\bar{y}^l$ ، مرکز مجموعه فازی l ام و w_l درجه ارتفاع آن باشد، نافازی ساز میانگین مراکز y^* را بدین ترتیب تعریف می کند:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}. \quad (۳۳.۱)$$

برای $M = ۲$ داریم

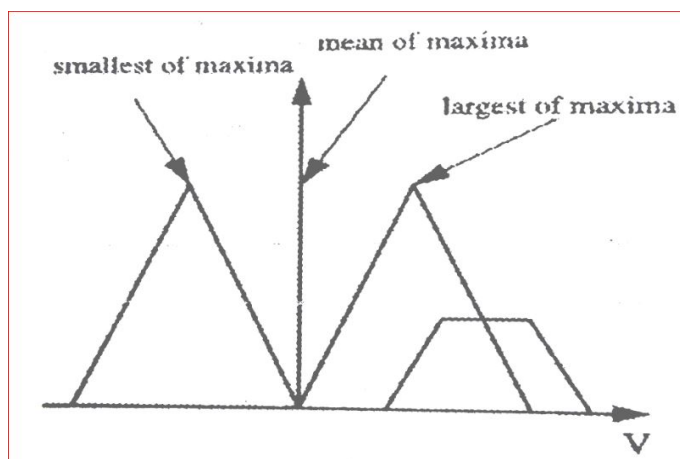
$$y^* = \frac{y_1 w_1 + y_2 w_2}{w_1 + w_2} \quad (۳۴.۱)$$

۳. **نافازی ساز ماکزیمم** ^{۱۷} : نافازی ساز ماکزیمم نقطه y^* را به عنوان نقطه ای در V که $\mu_B(y)$ به ماکزیمم مقدار خود می رساند، تعریف می کند. مجموعه زیر را در نظر بگیرید

^{۱۵} Center of gravity defuzzifier

^{۱۶} Center average defuzzifier

^{۱۷} Maximum Defuzzifier



شکل ۸.۱: نافازی ساز میانگین مراکز

$$hgt(B) = \{y \in V | \mu_B(y) = \sup_{y \in V} \mu_B(y)\} \quad (35.1)$$

بدین معنی که $hgt(B)$ مجموعه تمام نقاطی از مجموعه V است که در آن‌ها $\mu_B(y)$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. غیرفازی ماکزیمم نقطه y^* را به‌عنوان یک عضو دلخواه $hgt(B)$ تعریف می‌کند. به عبارت دیگر

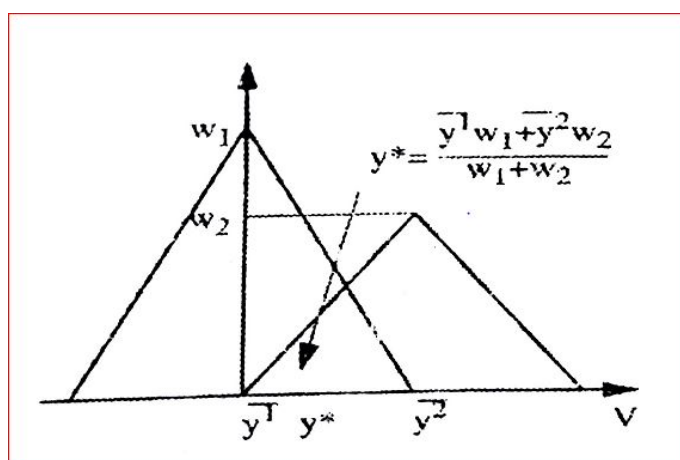
$$y^* = hgt(B) \quad \text{یک نقطه در}$$

بسته به اینکه $hgt(B)$ تنها شامل یک نقطه و یا بیشتر باشد، موارد زیر را خواهیم داشت

$$y^* = \inf\{y^* \in hgt(B)\} \quad \bullet \text{ نافازی ساز کوچکترین ماکزیمم}$$

$$y^* = \sup\{y^* \in hgt(B)\} \quad \bullet \text{ نافازی ساز بزرگترین ماکزیمم}$$

$$y^* = \frac{\int_{hgt(B)} y dy}{\int_{hgt(B)} dy} \quad \bullet \text{ نافازی ساز میانگین ماکزیمم}$$



شکل ۹.۱: نافازی سازهای ماکزیمم

۹.۱ پایداری سیستم‌های دینامیکی

تعاریف بسیاری در مورد پایداری یک سیستم دینامیکی بیان شده است. از تعاریف متداول برای پایداری یک سیستم دینامیکی می‌توان به پایداری پوانکاره یا اوربیتالی^{۱۸}، پایداری ژاکوفسکی^{۱۹}، پایداری لیاپانوف^{۲۰} و پایداری مجانی^{۲۱} اشاره کرد. برای حالتی که هدف تحلیل پایداری یک نقطه تعادل است تعاریف مربوط به پایداری پوانکاره، ژاکوفسکی و لیاپانوف معادل است از این رو به تبیین پایداری لیاپانوف برای یک نقطه تعادل بسنده می‌کنیم. پایه‌ای‌ترین کار برای تضمین پایداری مجانی، روش مستقیم لیاپانوف می‌باشد. در این روش برای اثبات پایداری مجانی نقطه تعادل مربوط به یک سیستم دینامیکی، هدف بدست آوردن تابع معین مثبتی است که مشتق آن نسبت به زمان معین منفی باشد.

سیستم‌های دینامیکی را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد [۲۷]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{cases} \quad (۳۶.۱)$$

که $\dot{x}_i$ مشتق x_i نسبت به متغیر زمان t است، و $u_1, \dots, u_p$ متغیرهای ورودی و $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای حالت نامیده می‌شوند.

عموماً سیستم دینامیکی (۳۶.۱) را می‌توان به فرم برداری بصورت زیر نوشت:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

و با بازنویسی n معادله دیفرانسیل مرتبه اول عددی بصورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برداری n بعدی^{۲۲} به فرم زیر خواهیم داشت:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (۳۷.۱)$$

رابطه (۳۷.۱) را معادله حالت^{۲۳}، x را بردار حالت^{۲۴} و u را بردار ورودی^{۲۵} می‌نامیم. گاهی به همراه معادله (۳۷.۱) معادله دیگری به شکل زیر بکار گرفته می‌شود:

$$y = h(t, x, u) \quad (۳۸.۱)$$

^{۱۸}Orbitally

^{۱۹}Zhukovsky

^{۲۰}Lyapunov

^{۲۱}Orbitally

^{۲۲}N-dimensional first order vector differential equation

^{۲۳}State equation

^{۲۴}State

^{۲۵}Input

این معادله بیانگر بردار خروجی ^{۲۶} است که شامل متغیرهایی است که در تحلیل سیستم دینامیکی به بررسی آن متغیرها علاقه مندیم مانند متغیرهایی که می‌توان آن را بصورت فیزیکی اندازه گرفت و یا متغیرهایی که لازم است رفتار خاصی را از خود نشان دهند. معادله (۳۸.۱) را معادله خروجی ^{۲۷} و مجموعه معادلات (۳۷.۱) و (۳۸.۱) را مدل فضای حالت ^{۲۸} و یا بطور خلاصه مدل حالت ^{۲۹} می‌نامند.

بیشترین تحلیل بر پایه معادله حالت انجام خواهد شد. در بسیاری از موارد معادله بدون حضور صریح ورودی u به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (۳۹.۱)$$

چنین حالتی، موسوم به معادله حالت بدون ورودی است ولی لزوماً به این معنا نیست که ورودی سیستم صفر است بلکه ممکن است بدین معنا باشد که ورودی به شکل تابع معلومی از زمان $(u = \gamma(t))$ تابع معلومی از حالت $(u = \gamma(x))$ و یا تابع معلومی از هر دو $(u = \gamma(x, t))$ است. با جایگذاری $u = \gamma$ در رابطه (۳۷.۱) حذف u و معادله حالت بدون ورودی است. یکی از حالت‌های خاص رابطه (۳۹.۱) زمانی رخ می‌دهد که f تابع صریحی از t نباشد یعنی:

$$\dot{x} = f(x) \quad (۴۰.۱)$$

در چنین حالتی سیستم را خودگردان ^{۳۰} یا نامتغیر با زمان گوییم. رفتار چنین سیستمی نسبت به انتقال مبدا زمان تغییر نمی‌کند زیرا تغییر متغیر زمان از t به $t - \alpha = \tau$ تغییری در عبارت سمت راست معادله حالت بوجود نمی‌آورد. اگر سیستم خودگردان نباشد، ناخودگردان ^{۳۱} یا متغیر با زمان ^{۳۲} نامیده می‌شود. یکی از مفاهیم مهم در برخورد با معادله حالت، مفهوم نقطه تعادل ^{۳۳} است.

تعریف ۱.۹.۱. [۲۷] در معادله حالت نقطه $x = x^*$ را نقطه تعادل رابطه (۳۹.۱) گوییم اگر با آغاز حرکت حالت از آن نقطه، برای تمامی لحظات آینده در نقطه x^* باقی بماند.

ملاحظه ۱.۹.۱. نقطه تعادل سیستم خودگردان (۴۰.۱)، ریشه‌های حقیقی معادله ذیل است:

$$f(x) = 0. \quad (۴۱.۱)$$

ممکن است نقطه تعادل منفرد ^{۳۴} باشد بدین معنا که هیچ نقطه تعادل دیگری در مجاورتش موجود نباشد و یا به تعبیر دیگر این نقطه در ویژگی تعادل خود استمرار ^{۳۵} داشته باشد.

^{۲۶} Output vector

^{۲۷} Output equation

^{۲۸} State space model

^{۲۹} Space model

^{۳۰} Autonomous

^{۳۱} Nonautonomous

^{۳۲} Time varying

^{۳۳} Equilibrium point

^{۳۴} Isolated

^{۳۵} Continuum

۱۰.۱ پایداری لیپانوف

نظریه پایداری نقش اساسی در مهندسی سیستم‌ها دارد. مسایل مختلفی در خصوص پایداری وجود دارد که در مطالعه و بررسی سیستم‌های دینامیکی مطرح می‌شود. در این بخش به بررسی پایداری نقطه تعادل می‌پردازیم [۲۷].

معمولا پایداری نقطه تعادل را از دید لیپانوف (ریاضیدان و مهندس روسی که این نظریه را بنا نهاد و امروزه بنام خودش خوانده می‌شود) بررسی می‌کنیم. سیستم دینامیکی خودگردان ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = f(x) \quad (۴۲.۱)$$

که $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت لیپ شیتز محلی از قلمرو $D \subset \mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید $\bar{x} \in D$ یکی از نقاط تعادل معادله (۴۲.۱) باشد یعنی:

$$f(\bar{x}) = 0 \quad (۴۳.۱)$$

هدف تعیین مشخصات و مطالعه پایداری نقطه $\bar{x}$ است. برای سادگی همه تعاریف و قضایا را برای حالتی بیان می‌کنیم که نقطه تعادل منطبق بر مبدا $\mathbb{R}^n$ است، یعنی $\bar{x} = 0$. این نکته هیچ اثری بر عمومیت موضوع ندارد زیرا هر نقطه تعادل را می‌توان با تغییر متغیر به مبدا مختصات انتقال داد. برای تفهیم بیشتر اگر $\bar{x} \neq 0$ باشد می‌توان با تغییر متغیر $y = x - \bar{x}$ به هدف مطلوب طبق زیر رسید

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \cong g(y), \quad g(0) = 0$$

بدین ترتیب نقطه تعادل سیستم نسبت به متغیر جدید y در مبدا واقع است. لذا بدون کاستن از عمومیت موضوع همواره فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در رابطه $f(0) = 0$ صدق می‌کند و با این شرط به بررسی پایداری مبدا $x = 0$ می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱۰.۱. [۲۷] نقطه تعادل $x = 0$ مربوط به معادله (۴۲.۱) :

- پایدار است اگر برای هر $\epsilon > 0$ مقدار $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ چنان وجود داشته باشد که

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0$$

- ناپایدار است اگر پایدار نباشد.

- پایدار مجانی^{۳۶} است اگر پایدار باشد و بتوان δ را چنان یافت که

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

اکنون قضیه پایداری لیپانوف را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱۰.۱. [۲۷] فرض کنید $x = 0$ یکی از نقاط تعادل معادله (۴۲.۱) باشد و $D \subset \mathbb{R}^n$ قلمروبی شامل $x = 0$ باشد. در این صورت اگر $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته-مشتق پذیر باشد که برای آن داشته باشیم:

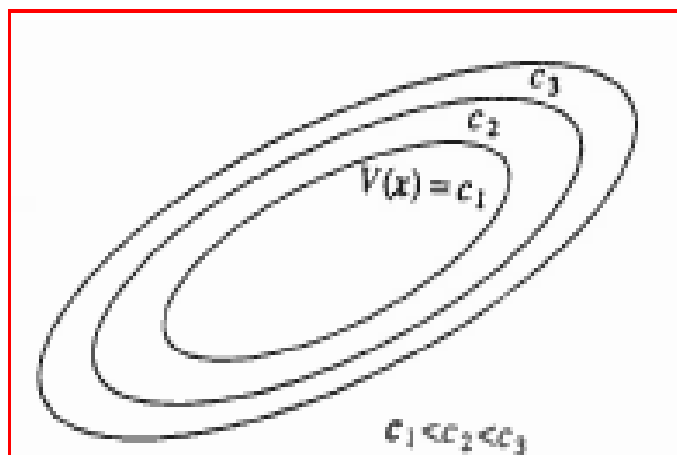
$$V(x) = 0 \quad V(x) > 0, \quad x \in D - \{0\} \quad (۴۴.۱)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in D \quad (۴۵.۱)$$

^{۳۶} Asymptotically stability

آنگاه نقطه $x = 0$ پایدار مجانی است.

ملاحظه ۱۰.۱.۱. هر تابع پیوسته مشتق پذیر $V(x)$ که شروط (۴۴.۱) و (۴۵.۱) را برآورده کند تابع لیاپانوف^{۳۷} و رویه $V(x) = c$ (به ازای مقادیر $c > 0$) رویه لیاپانوف^{۳۸} یا رویه سطح^{۳۹} نامیده می شود. شکل (۱۰.۱) با استفاده از رویه های لیاپانوف درک قضیه را بهتر می کند.



شکل ۱۰.۱: رویه های سطح یک تابع لیاپانوف

این شکل (۱۰.۱) نشان دهنده رویه های لیاپانوف برای مقادیر کاهشی c است. شرط $\dot{V} < 0$ بیانگر این نکته است وقتی یکی از مسیرهای حالت، رویه لیاپانوف $V(x) = c$ را قطع می کند، وارد مجموعه $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) \leq c\}$ شده و دیگر از آن خارج نمی شود. هنگامی که $\dot{V} < 0$ است، مسیر حالت با مقدار c کوچکتری از رویه لیاپانوف به سمت یکی دیگر از رویه های درونی لیاپانوف سوق می یابد. هر چه c کاهش یابد رویه لیاپانوف $V(x) = c$ به سمت مبدا منقبض می شود که بدین معناست که با افزایش زمان مسیر حالت به مبدا نزدیک می شود.

اگر فقط $\dot{V} < 0$ باشد نمی توان نتیجه گرفت مسیرهای حالت به سمت مبدا سوق می یابد اما می توان نتیجه گرفت مبدا پایدار است زیرا از این شرط که حالت اولیه $x(0)$ درون رویه لیاپانوفی محصور در گوی B_ϵ است، می توان نتیجه گرفت مسیر حالت درون آن گوی قرار گرفته است. بنابراین شرط اضافه دیگری که ما را مطمئن می سازد به ازای جمیع مقادیر $c > 0$ ، Ω_c کراندار باشد عبارت است از:

$$\|x(0)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(0) \rightarrow \infty$$

تابعی که چنین شرطی را برآورده کند، بیکران شعاعی^{۴۰} می نامند.

قضیه ۱۰.۱.۲. [۲۷] فرض کنید $x = 0$ یکی از نقاط تعادل معادله (۴۲.۱) باشد و تابع $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی پیوسته-مشتق پذیر باشد که برای آن داشته باشیم:

^{۳۷} Lyapunov function

^{۳۸} Lyapunov surface

^{۳۹} Level surface

^{۴۰} Radially unbounded

$$V(x) = 0 \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (۴۶.۱)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (۴۷.۱)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (۴۸.۱)$$

آنگاه نقطه $x = 0$ پایدار مجانی سراسری است.

برهان. برای نقطه اختیاری $p \in \mathbb{R}^n$ فرض می‌کنیم: $c = V(p)$ شرط (۴۷.۱) بدین معناست که برای هر $c > 0$ ، مقداری مانند $r > 0$ چنان یافت می‌شود که با شرط $\|x\| > r$ ، $V(x) > c$ خواهد بود؛ بنابراین $\Omega_c \subset B_r$ و در نتیجه Ω_c کراندار خواهد بود. ادامه برهان مشابه قضیه (۱.۱۰.۱) خواهد بود. $\square$

قضیه (۲.۱۰.۱) بنام قضیه بارباشین کراسوسکی^{۴۱} شناخته می‌شود.

ملاحظه ۲.۱۰.۱. هر تابع $V(x)$ که شرط (۴۴.۱) (برای $x \neq 0$) را برآورده کند، معین مثبت نامیده^{۴۲} می‌شود. اگر این تابع شرط ضعیف‌تر $V(x) \geq 0$ (برای $x \neq 0$) را برآورده کند، نیمه معین مثبت^{۴۳} نامیده می‌شود.

ملاحظه ۳.۱۰.۱. تابع $V(x)$ را معین منفی^{۴۴} و یا نیمه معین منفی^{۴۵} گوئیم اگر $-V(x)$ نیز بترتیب معین مثبت و یا نیمه معین مثبت باشد.

ملاحظه ۴.۱۰.۱. چنانچه تابع $V(x)$ علامت معینی به ازای هر یک از این چهار حالت نداشته باشد آن را نامعین^{۴۶} می‌نامیم.

اکنون با این واژه‌نگاری می‌توان قضیه لیپانوف را با عبارن ذیل نیز بیان کرد: مبدا پایدار است اگر تابع معین مثبت و پیوسته مشتق پذیر $V(x)$ چنان وجود داشته باشد که $\dot{V}(x)$ نیمه معین منفی باشد. همچنین این نقطه پایدار مجانی است اگر تابع $\dot{V}(x)$ معین منفی باشد.

دسته‌ای از توابع عددی که می‌توان علامت معین بودن آنها را بسادگی بررسی کرد، خانواده توابع بصورت مجذوری^{۴۷} یا توان دوم می‌باشند. یعنی:

$$V(x) = x^T p x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} x_i x_j$$

که p ماتریس متقارن حقیقی است.

در این حالت $V(x)$ معین مثبت (یا نیمه معین مثبت) است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه p

^{۴۱} Barbashin Krasovskii

^{۴۲} Positive definite

^{۴۳} Positive semi definite

^{۴۴} Negative definite

^{۴۵} Negative semi definite

^{۴۶} Indefinite

^{۴۷} Quadratic

مثبت (یا متناظرا غیر منفی) باشد، بدین معنی که باید همه کهادهای پیشرو اصلی^{۴۸} ماتریس p مثبت (یا متناظرا همه کهادهای پیشرو اصلی غیر منفی) باشد. اگر تابع $V(x) = x^T p x$ معین مثبت (یا نیمه معین مثبت) باشد، گوییم ماتریس p معین مثبت (یا نیمه معین مثبت) است و می‌نویسیم $p > 0$ یا متناظرا $(p \geq 0)$. در ادامه با آرایه چندین مثال اهداف و نتایج قضیه‌ها را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

مثال ۱.۱۰.۱. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} V(x) &= ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x^T p x \end{aligned} \quad (۴۹.۱)$$

کهادهای پیشرو اصلی ماتریس p عبارت است از: a ، a^2 و $a(a^2 - 5)$. بنابراین $V(x)$ معین مثبت است اگر $a > \sqrt{5}$ باشد. برای معین منفی بودن باید کهادهای پیشرو اصلی $-p$ ، مثبت باشد، به تعبیر دیگر باید کهادهای پیشرو اصلی p یک در میان تغییر علامت دهد. به طوری که کهادهای مرتبه فرد، منفی و کهادهای مرتبه زوج، مثبت باشند؛ بنابراین $V(x)$ معین منفی است اگر $a < -\sqrt{5}$ باشد. با محاسبه کهادهای پیشرو اصلی مشخص می‌شود اگر $a \geq \sqrt{5}$ باشد $V(x)$ نیمه معین مثبت و اگر $a \leq -\sqrt{5}$ باشد، $V(x)$ نیمه معین منفی خواهد بود. به ازای همه مقادیر $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ هم $V(x)$ نامعین است.

ملاحظه ۵.۱۰.۱. می‌توان قضیه لیپانوف را بدون حل معادله دیفرانسیل (۴۲.۱) بکار گرفت. لیکن هیچ روش منظمی برای یافتن تابع لیپانوف وجود ندارد. در برخی حالات می‌توان از نامزدهایی^{۴۹} طبیعی بعنوان تابع لیپانوف استفاده نمود، مانند توابع انرژی در سیستم‌های الکتریکی یا مکانیکی. اما در حالت‌های دیگر یافتن تابع لیپانوف بر اساس روش آزمون و خطا صورت می‌پذیرد.

مثال ۲.۱۰.۱. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -g(x)$$

که $g(x)$ بر بازه‌ی $(-a, a)$ لیپ شیتز محلی است و شروط ذیل را نیز ارضا می‌کند:

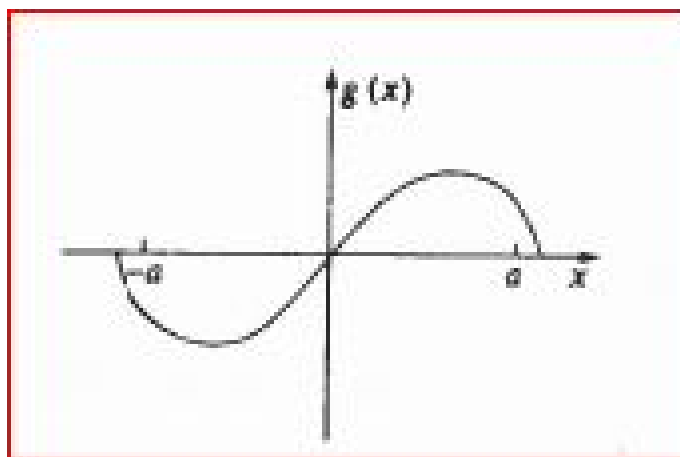
$$g(0) = 0; \quad xg(x) > 0, \forall x \neq 0, \quad x \in (-a, a)$$

نمونه‌ای از تابع $g(x)$ در شکل (۱۱.۱) نشان داده شده است. سیستم دارای یک نقطه تعادل تنها در مبدا است. در این مثال ساده، بررسی پایداری مجانی مبدا چنان مشکل نیست؛ زیرا پاسخ‌هایی که از هر طرف مبدا آغاز شوند بنا به علامت $\dot{x}$ به سوی مبدا سوق خواهند یافت. برای دسترسی به همین نتیجه با استفاده از قضیه لیپانوف، تابع ذیل را روی قلمرو $D = (-a, a)$ در نظر می‌گیریم:

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy$$

^{۴۸} Principle minors

^{۴۹} Candidate



شکل ۱۱.۱: نمونه‌ای از غیر خطی‌گری مربوط به مثال (۲.۱۰.۱)

تابع پیوسته - مشتق پذیر و $V(0) = 0$ است، ضمناً به ازای همه مقادیر $x \neq 0$ داریم: $V(x) > 0$. بنابراین یکی از نامزدهای معتبر تابع لیاپانوف است. برای بررسی اینکه آیا $V(x)$ واقعاً یک تابع لیاپانوف است یا خیر، مشتقش را در امتداد مسیرهای حالت سیستم می‌یابیم:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}[-g(x)] = -g^2(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}$$

بنابراین از قضیه (۱.۱۰.۱)، نتیجه می‌شود مبدا نقطه پایدار مجانی است.

فصل ۲

مدل‌های هایپربولیک فازی و خواص آن برای سیستم‌های زمانی پیوسته

۱.۲ مدل هایپربولیک فازی

در این بخش ابتدا به بیان و بررسی شرایطی می‌پردازیم که قواعد پایه فازی^۱ را به قواعد پایه فازی هایپربولیک^۲ تبدیل می‌کند.

تعریف ۱.۱.۲. [۵۱، ۵۲] فرض می‌کنیم یک سیستم با n متغیر وضعیت $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ و با p متغیر ورودی $u = (u_1(t), \dots, u_p(t))^T$ داده شده باشد. یک دسته قواعد پایه فازی را از نوع قواعد پایه فازی هایپربولیک می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) هر قاعده فازی به شکل زیر می‌باشد:

IF x_1 is F_{x_1} , x_2 is F_{x_2} , ..., x_n is F_{x_n} , u_1 is F_{u_1} , u_2 is F_{u_2} , ..., u_n is F_{u_n} ,

THEN $\dot{x}_l = \pm c_{x_1} \pm c_{x_2} \dots \pm c_{x_n} \pm c_{u_1} \pm c_{u_2} \dots \pm c_{u_p}$, ($l = 1, \dots, n$),

که F_{x_i} ($i = 1, \dots, n$) و F_{u_j} ($j = 1, \dots, p$) مجموعه‌های فازی از x_i ، u_j هستند که شامل P (مثبت) و N (منفی) می‌باشند، و c_{x_i} ($i = 1, \dots, n$) و c_{u_j} ($j = 1, \dots, p$) مقادیر مثبت متناظر با F_{x_i} و F_{u_j} می‌باشند. علامت مثبت یا منفی در بخش $THEN$ به روش ذیل مشخص می‌شود:

^۱Fuzzy rule base

^۲Fuzzy hyperbolic rule base

اگر در قسمت IF صفت جمله F_{x_i} هست P_z ، سپس در قسمت $THEN$ بخش c_{x_i} با علامت مثبت ظاهر می‌شود، در غیر اینصورت c_{x_i} با علامت منفی ظاهر می‌شود.
 (۲) متغیرهای ورودی^۳ و متغیرهای وضعیت در بخش IF اختیاری یا انتخابی می‌باشند و با جملات ثابت در قسمت $THEN$ متناظرند. یعنی اگر جملات F_{x_i} یا F_{u_i} در قسمت IF وجود داشته باشد در قسمت $THEN$ جملات c_{x_i} یا c_{u_i} ظاهر می‌شود.
 (۳) برای هر قاعده فازی اگر $\dot{x}_l$ در قسمت $THEN$ و m ($m \leq n$) متغیر فازی در قسمت IF ظاهر شود آنگاه قواعد فازی برای تمام حالت‌های ممکن برابر 2^m می‌باشد.

حال از مدل فازی زیر برای نمایش یک سیستم پیوسته پیچیده^۴ با چندین ورودی و خروجی بهره می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tanh(k_1 x_1) \\ \vdots \\ \tanh(k_n x_n) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

که $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ بردار وضعیت و $u = (u_1, \dots, u_p)^T$ بردار ورودی و $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و k_i ($i = 1, \dots, n$) مقادیر مثبت با توجه به تابع عضویت^۵ فازی می‌باشد. اگر فرض کنیم $k_x = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ رابطه (۱.۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{x} = A \tanh(k_x x) + Bu. \quad (2.2)$$

رابطه (۲.۲) را مدل هایپربولیک فازی^۶ می‌نامیم. که در آن $\tanh(k_x x) = (\tanh(k_1 x_1), \dots, \tanh(k_n x_n))^T$.

در ادامه نشان خواهیم داد که مدل هایپربولیک فازی را از اطلاعات و دانش موجود در رابطه با سیستم، می‌توان بدست آورد.

قضیه ۱.۱.۲. [۲۳] فرض کنید قواعد اگر- آنگاه هایپربولیک فازی داده شده باشد. تابع عضویت (مثبت بودن) P_z و (منفی بودن) N_z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{P_z}(x) = e^{\frac{-1}{\gamma}(x-k_z)^2}, \quad \mu_{N_z}(x) = e^{\frac{-1}{\gamma}(x+k_z)^2},$$

که در آن $k_z > 0$. در این صورت می‌توان به مدل زیر به عنوان خروجی قواعد اگر- آنگاه فازی رسید

$$\dot{x} = A \tanh(k_x x) + B \tanh(k_u u). \quad (3.2)$$

که $k_x = \text{diag}(k_{x_1}, \dots, k_{x_n})$ ، $k_u = \text{diag}(k_{u_1}, \dots, k_{u_n})$ ، A ، B ماتریس‌های ثابت هستند.

برهان. فرض می‌کنیم برای هر $l = 1, 2, \dots, n$ ، $\dot{x}_l$ ، m ($m \leq n$) متغیر وضعیت و q ($q \leq p$) متغیر ورودی وجود داشته باشد. حال قواعد استنتاج، فازی ساز منفرد و نافازی ساز مرکز ثقل

^۳ Input variables

^۴ Complex

^۵ Membership

^۶ Fuzzy hyperbolic modeling

را اعمال می کنیم، داریم

$$\dot{x}_l = \frac{F}{G}$$

که

$$F = (c_{x_1} + \dots + c_{x_n})\mu_{p_{x_1}}(x_1) \dots \mu_{p_{x_m}}(x_m) + \dots + (-c_{u_1} - \dots - c_{u_q})\mu_{N_{u_1}}(u_1) \dots \mu_{N_{u_q}}(u_q)$$

$$G = \mu_{p_{x_1}}(x_1) \dots \mu_{p_{x_m}}(x_m) + \dots + \mu_{N_{u_1}}(u_1) \dots \mu_{N_{u_q}}(u_q)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= \frac{F}{G} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{c_{x_i} \mu_{p_{x_i}}(x_i) - c_{x_i} \mu_{N_{x_i}}(x_i)}{\mu_{p_{x_i}}(x_i) + \mu_{N_{x_i}}(x_i)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^q \frac{c_{u_j} \mu_{p_{u_j}}(u_j) - c_{u_j} \mu_{N_{u_j}}(u_j)}{\mu_{p_{u_j}}(u_j) + \mu_{N_{u_j}}(u_j)} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{c_{x_i} e^{\frac{-1}{\tau}(x_i - k_{x_i})} - c_{x_i} e^{\frac{-1}{\tau}(x_i + k_{x_i})}}{e^{\frac{-1}{\tau}(x_i - k_{x_i})} + e^{\frac{-1}{\tau}(x_i + k_{x_i})}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^q \frac{c_{u_j} e^{\frac{-1}{\tau}(u_j - k_{u_j})} - c_{u_j} e^{\frac{-1}{\tau}(u_j + k_{u_j})}}{e^{\frac{-1}{\tau}(u_j - k_{u_j})} + e^{\frac{-1}{\tau}(u_j + k_{u_j})}} \\ &= \sum_{i=1}^m c_{x_i} \left(\frac{e^{k_{x_i} x_i} - e^{-k_{x_i} x_i}}{e^{k_{x_i} x_i} + e^{-k_{x_i} x_i}} \right) + \sum_{j=1}^q c_{u_j} \left(\frac{e^{k_{u_j} u_j} - e^{-k_{u_j} u_j}}{e^{k_{u_j} u_j} + e^{-k_{u_j} u_j}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m c_{x_i} \tanh(k_{x_i} x_i) + \sum_{j=1}^q c_{u_j} \tanh(k_{u_j} u_j). \end{aligned}$$

تعریف می کنیم

$$c_x^l = (c_{x_1}, \dots, c_{x_m}, \circ, \dots, \circ), \quad c_u^l = (c_{u_1}, \dots, c_{u_q}, \circ, \dots, \circ).$$

بنابراین داریم

$$\dot{x}_l = c_x^l \tanh(k_x x) + c_u^l \tanh(k_u u)$$

معادله بالا به این معنی است که $\dot{x}_l$ ترکیب خطی از $\tanh(k_x x)$ می باشد. لذا به ازای همه $\dot{x}_l$, ($l = 1, \dots, n$) داریم

$$\dot{x}_l = A \tanh(k_x x) + B \tanh(k_u u)$$

که

$$A = (c_x^1, c_x^2, \dots, c_x^n)^T, \quad B = (c_u^1, c_u^2, \dots, c_u^p)^T.$$

□

۲.۲ مشخصه مدل هایپربولیک فازی

(۱) مدل هایپربولیک فازی یک مدل غیر خطی است. بر خلاف مدل فازی تاکاگی-سوگنو^۷ یا ($T - S$) که ترکیبی از مدل خطی محلی است.

^۷Fuzzy Takagi Sugeno modeling

- (۲) چون مدل هاینربولیک فازی یک مدل سراسری است ما می‌توانیم یک کنترل‌گر بهینه سراسری^۸ برای آن طراحی کنیم و پایداری آن را در سیستم حلقه بسته^۹ آنالیز کنیم.
- (۳) مدل هاینربولیک فازی برای مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده مناسب است.
- (۴) مدل هاینربولیک فازی به آسانی از اطلاعات و دانش زبانی بدست می‌آید. لذا اگر مقداری اطلاعات زبانی درباره‌ی روابط بین متغیرهای حالت و متغیرهای ورودی داشته باشیم ما می‌توانیم مدل هاینربولیک فازی ایجاد نماییم.
- (۵) برای تشخیص پارامترهای مدل هاینربولیک فازی، شبیه مدل فازی تاکاگی-سوگنو می‌توانیم یک مدل شبکه عصبی^{۱۰} طراحی کنیم.

۳.۲ روند مدل‌سازی

سیستم‌های فازی، سیستم‌هایی بر پایه دانش بشری هستند که به فرم قواعد اگر آنگاه فازی ساخته می‌شوند. سهم مهم نظریه سیستم‌های فازی بدست آوردن یک روش سیستماتیک برای تبدیل دانش پایه‌ای به نگاشت غیرخطی می‌باشد. [۵۱].

مدل‌های هاینربولیک فازی می‌توانند از اطلاعات زبانی مربوط به سیستم ساخته شوند، از سوی دیگر مدل هاینربولیک فازی برای مدل‌سازی شبکه‌های عصبی استفاده می‌شود. ما می‌توانیم مقادیر اولیه وزن شبکه مدل را بوسیله تجربه متخصصین انتخاب، و سپس پارامترهای مدل را بهینه‌سازی کنیم.

۴.۲ طراحی کنترل برای مدل هاینربولیک فازی

در بخش قبل (۱.۲) توانستیم یک مدل هاینربولیک فازی (FHM) طبق رابطه زیر بدست آوریم:

$$\dot{x} = A \tanh(k_x x) + Bu. \quad (۴.۲)$$

در ادامه یک کنترل‌گر پایدار کننده‌ی^{۱۱} u برای سیستم غیرخطی (۴.۲) به شکل زیر طراحی می‌کنیم:

$$u = H \tanh(k_x x). \quad (۵.۲)$$

که در آن H ماتریس ثابت است، بطوریکه در خواص و صفات کنترل صدق کند.

۱.۴.۲ خواص کنترل‌گر

خواص کنترل‌گر u را می‌توانیم بصورت ذیل بیان نمائیم [۴۸]:

(۱) با توجه مشخصه تابع تانژانت هاینربولیک، کنترل‌گر برای مقادیر دلخواه متغیر ورودی x

^۸Global optimal controller

^۹Closed loop system

^{۱۰}Neural network model

^{۱۱}Stable controller

کران دار یا محدود است. در حقیقت در سیستم فیزیکی حقیقی متغیرها محدود هستند. (۲) اگر سیستم غیرخطی (۴.۲) بدون کنترل باشد، یعنی $u = 0$ میتوانیم رابطه (۴.۲) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\dot{x} = A \tanh(k_x x). \quad (6.2)$$

(۳) کنترل گر u می تواند بوسیله قواعد اگر آنگاه فازی و اطلاعات زبانی قابل نمایش باشد که در این صورت به آن کنترل گر فازی می گوییم. بنابراین قواعد اگر آنگاه فازی، برای کنترل گر فازی بصورت زیر بیان می شود:

$$R^1 : \text{IF } x_1 \text{ is } F_{Px_1}, x_2 \text{ is } F_{Px_2}, \dots, x_n \text{ is } F_{Px_n}, \\ \text{THEN } u = CPx_1 + CPx_2 + \dots + CPx_n;$$

$$R^2 : \text{IF } x_1 \text{ is } F_{Px_1}, x_2 \text{ is } F_{Px_2}, \dots, x_n \text{ is } F_{Nx_n}, \\ \text{THEN } u = CPx_1 + CPx_2 + \dots - CNx_n;$$

⋮

$$R^n : \text{IF } x_1 \text{ is } F_{Nx_1}, x_2 \text{ is } F_{Nx_2}, \dots, x_n \text{ is } F_{Nx_n}, \\ \text{THEN } u = -CNx_1 - CNx_2 - \dots + CNx_n;$$

که F_{Px_i} ($i = 1, \dots, n$) و F_{N_i} ($i = 1, \dots, n$) مجموعه های فازی متناظر x_i هستند که شامل P (مثبت بودن) و N (منفی بودن) می باشند. همچنین C_{Px_i} ($i = 1, \dots, n$) و C_{Nx_i} ($i = 1, \dots, n$) مقادیر مثبت مشابه F_{Px_i} و F_{N_i} می باشند. (۴) مقدار اولیه کنترل گر با توجه به کنترل کننده (۵.۲) و جایگذاری آن در رابطه (۴.۲)، به سیستم حلقه بسته زیر می رسیم:

$$\dot{x} = (A + BH) \tanh(k_x x). \quad (7.2)$$

در ادامه فرایند بدست آوردن کنترل گر ماتریس H را تعیین می کنیم بطوریکه پایداری مجانی سراسری سیستم حلقه بسته (۷.۲) تضمین شود. در این بخش دو روش فرایند طراحی و تعیین ماتریس H ، بطوریکه پایداری مجانی سرتاسری و مقاوم پذیری^{۱۲} سیستم حلقه بسته (۷.۲) را تضمین کند ارائه می دهیم.

الف) روش کنترل بازخورد

قبل از بیان روش کنترل بازخورد^{۱۳}، مفاهیم و قضایایی برای استخراج و تحلیل نتیجه اصلی لازم می باشد که در ذیل آنها را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۴.۲. [۲۳] یک ماتریس مربعی A پایدار قطری (موری) نامیده می شود اگر وجود داشته باشد ماتریس $Q > 0$ و ماتریس قطری P بطوریکه:

$$PA + A^T P = -Q. \quad (8.2)$$

به زبان دیگر، ماتریس مربعی A در معادله لیاپانوف با ماتریس قطری صدق می کند.

• اگر A در رابطه (۸.۲) صدق نماید و هر جفت ماتریس های P و Q معین مثبت باشند سپس سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ پایدار مجانی سرتاسری است.

^{۱۲}Robustness

^{۱۳}Feedback control

• اگر A در رابطه (۸.۲) صدق نماید و ماتریس P معین مثبت قطری باشد، سپس سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ پایدار مقاوم پذیر است.

تعریف ۲.۴.۲. [۲۳] مجموعه همه توابع $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که در خواص زیر صدق کند: (۱) f پیوسته است؛

(۲) $f(0) = 0$ ، و برای همه مقادیر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x)x > 0$ ؛

(۳) $\int_0^x f(y) dy \rightarrow \infty$ ، $|x| \rightarrow \infty$.

لم ۱.۴.۲. [۲۳] فرض کنیم سیستم غیر خطی زیر داده شده باشد:

$$\dot{x} = A f(x), \quad (9.2)$$

که $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$ و $f_i(\cdot) \in S_c, (i = 1, \dots, n)$. اگر ماتریس A پایدار قطری باشد آنگاه $x = 0$ برای سیستم (۹.۲) نقطه تعادل پایدار مجانی سرتاسری است.

قضیه ۱.۴.۲. مدل هایپربولیک فازی (۷.۲) را در نظر می‌گیریم. اگر وجود داشته باشد ماتریس H بطوریکه $A + BH$ پایدار قطری باشد آنگاه $x = 0$ برای سیستم حلقه بسته (۷.۲) نقطه تعادل پایدار مجانی سرتاسری است.

برهان. با توجه به لم (۱.۴.۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که $f_i(x_i) = \tanh(k_i x_i)$ لذا بنا به قضیه (۱.۴.۲) برای طراحی کنترل گر معلوم می‌گردد ماتریس H وجود دارد بطوریکه $A + BH$ پایدار مجانی باشد. بنابراین ما می‌توانیم از روش نابرابری ماتریس خطی^{۱۴} (LMI) برای حل ماتریس H استفاده کنیم [۴۸]. $\square$

ب) روش کنترل بهینه H_2

در این بخش هدف ما تعمیم دادن نظریه کنترل بهینه درجه دوم خطی^{۱۵} به سیستم غیرخطی زیر است:

$$\dot{x}(t) = A f(x(t)) + Bu(t), \quad (10.2)$$

که $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$ و $f_i(\cdot) \in S_c, (i = 1, \dots, n)$. حال تابع هزینه^{۱۶} غیر خطی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} (f^T(x(t))Qf(x(t)) + u^T(t)Ru(t))dt, \quad (11.2)$$

که Q و R ماتریس‌های متقارن معین مثبت هستند. حال پارامتر u را چنان می‌یابیم که تابع هزینه کمترین^{۱۷} مقدار باشد.

تعریف ۳.۴.۲. مجموعه ماتریس‌های $[A, B, Q, R]$ بهینه قطری^{۱۸} نامیده می‌شوند، اگر وجود داشته باشد ماتریس قطری $P > 0$ بطوریکه:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (12.2)$$

^{۱۴} Linear Matrix Inequality

^{۱۵} The linear quadratic optimal control theory

^{۱۶} Cost function

^{۱۷} Minimal

^{۱۸} Diagonally optimal

به زبان دیگر معادله ریکاتی (۱۲.۲) جواب دارد اگر ماتریس P معین مثبت و قطری باشد.

ملاحظه ۱.۴.۲. حال در قضیه اصلی زیر کلاس بزرگی از سیستم های غیرخطی، که کنترل آنها بصورت خطی ظاهر می شود را بیان می کنیم.

قضیه ۲.۴.۲. سیستم غیرخطی (۱۰.۲) را در نظر می گیریم و همچنین تابع هزینه (۱۱.۴). اگر ماتریس های $[A, B, Q, R]$ بهینه قطری باشند، سپس کنترل گر بهینه زیر بدست می آید:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P f(x(t)), \quad (13.2)$$

که $P = (p_1, \dots, p_n)$ ماتریس معین قطری است. اگر فرض کنیم $J_{min}(x_0, t_0) = \min_{u(t)} J(x_0, t_0, u)$ آنگاه داریم:

$$J_{min}(x_0, t_0) = \sum_{i=1}^n P_i \int_0^{x_i(t_0)} f_i(k_i \tau) d\tau.$$

برهان. در اولین مرحله نشان می دهیم که $J_{min}(x(t))$ در معادله بلمن هامیلتون ژاکوبین صدق می کند

$$-\frac{\partial J_{min}}{\partial t} = \min_{u(t)} \{f^T(x)Qf(x) + u^T R u + \nabla J_{min}^T \dot{x}\}. \quad (14.2)$$

طرف چپ ^{۱۹} معادله بطور بدیهی صفر است برای برآورد طرف راست ^{۲۰} ما محاسبات زیر را شروع می کنیم

$$\nabla J_{min}^T \dot{x} = \sum f^T(x)P(Af(x) + Bu) = f^T(x)(PA + A^T P)f(x) + \sum f^T(x)PBu. \quad (15.2)$$

فرض می کنیم

$$H = f^T(x)Qf(x) + u^T R u + \nabla J_{min}^T \dot{x}$$

داریم

$$\begin{aligned} H &= f^T(x)(Q + PA + A^T P)f(x) + \sum f^T(x)PBu + u^T R u, \\ &= f^T(x)(Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P)f(x) \\ &\quad + (u + R^{-1}B^T P f(x))^T R (u + R^{-1}B^T P f(x)). \end{aligned} \quad (16.2)$$

اما جمله اول معادله بالا به صفر می رسد بنابراین داریم:

$$H = (u + R^{-1}B^T P f(x))^T R (u + R^{-1}B^T P f(x))$$

زیرا R معین مثبت است و H مینم واحد خود را بدست می آورد وقتی که $u = u^* = -R^{-1}B^T P f(x(t))$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &\min_{u(t)} \{f^T(x)Qf(x) + u^T R u + \nabla J_{min}^T \dot{x}\} \\ &= f^T(x)Qf(x) + u^{*T} R u^* + \nabla J_{min}^T \dot{x} = 0. \end{aligned}$$

^{۱۹}Left hand side

^{۲۰}Right hand side

در مرحله بعد مقدار تابع هزینه را وقتی $u^*(t)$ را اعمال می‌کنیم، محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} J(x_0, t_0, u^*) &= \int_{t_0}^{\infty} (f^T(x(t))Qf(x(t)) + u^{*T}(t)Ru^*(t)) dt, \\ &= \int_{t_0}^{\infty} (-\nabla J_{min}^T \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{dJ_{min}}{dt} \right) dt \\ &= J_{min}(x_0) - J_{min}(x(\infty)). \end{aligned} \quad (17.2)$$

زیرا سیستم حلقه بسته پایدار مجانی سراسری است، $x(\infty) = 0$ بنابراین نتیجه می‌گیریم $J(x_0, t_0, u^*) = J_{min}(x_0)$ ، لذا قضیه (۱.۱.۲) در [۲۳] ایجاب می‌کند $J_{min}(x_0)$ تابع هزینه بهینه و $u^*(t)$ کنترل گر بهینه باشد. □

۵.۲ شبیه‌سازی مثال‌ها

در این بخش با چندین مثال متنوع، روند مدل‌سازی و طراحی کنترل را در مدل‌های هایپربولیک فازی برای سیستم‌های زمانی پیوسته بررسی و تحلیل می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۲. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b u(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (18.2)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}$ متغیر وضعیت و $u(t) \in \mathbb{R}$ کنترل می‌باشد، و $b > 0$ مقدار مثبت می‌باشد. هدف ما طراحی کنترل فازی u_f می‌باشد که از هر نقطه شروع مثبت به وضعیت صفر برسیم. ما این هدف را با تابع لیپانوف انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم $V = \frac{1}{2}x^2$ کاندید تابع لیپانوف باشد. از مشتق گرفتن تابع لیپانوف داریم:

$$\dot{V} = X\dot{x} = bxu.$$

برای پایداری سیستم لازم است $\dot{V} < 0$ باشد. مشاهده می‌کنیم اگر x مثبت (منفی) باشد سپس $\dot{V} < 0$ و u باید منفی (مثبت) باشد. بنابراین قواعد کنترل فازی بروش ممدانی^{۲۱} را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

If x is $x_{positive}$ Then u is $u_{negative}$,

If x is $x_{negative}$ Then u is $u_{positive}$.

فرض کنید قواعد اگر- آنگاه هایپربولیک فازی داده شده باشد. تابع عضویت (مثبت بودن) P_z و (منفی بودن) N_z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu_{x_{positive}} = e^{-(x-\alpha)^2}, \quad \mu_{x_{negative}} = e^{-(x+\alpha)^2},$$

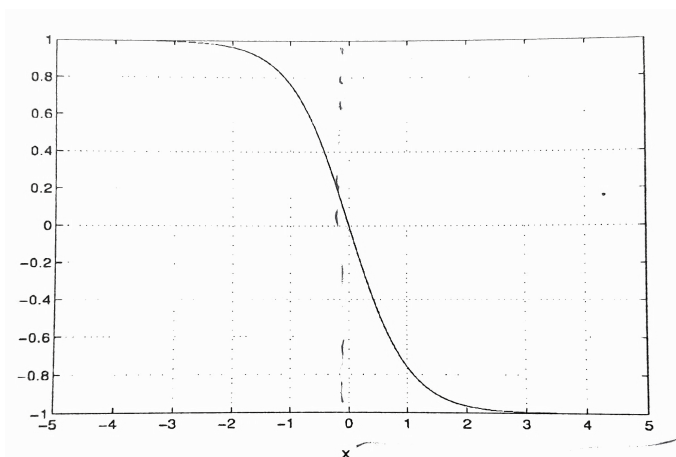
$$\mu_{u_{positive}} = e^{-(x-\beta)^2}, \quad \mu_{u_{negative}} = e^{-(x+\beta)^2}.$$

^{۲۱} Mamdani

که در آن $\alpha > 0, \beta > 0$ مقادیر مثبت می‌باشند. سپس روش نافازی سازی مرکز ثقل ^{۲۲} را اعمال می‌کنیم و کنترل‌گر فازی بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} u_f(x) &= \left(\frac{-\beta e^{-(x-\alpha)^2} + \beta e^{-(x+\alpha)^2}}{e^{-(x-\alpha)^2} + e^{-(x+\alpha)^2}} \right) \\ &= \left(\frac{-\beta e^{-x^2+2\alpha x-\alpha^2} + \beta e^{-x^2-2\alpha x-\alpha^2}}{e^{-x^2+2\alpha x-\alpha^2} + e^{-x^2-2\alpha x-\alpha^2}} \right) \\ &= -\beta \left(\frac{e^{2x\alpha} - e^{-2x\alpha}}{e^{2x\alpha} + e^{-2x\alpha}} \right) \\ &= -\beta \tanh(2\alpha x). \end{aligned} \quad (19.2)$$

کنترل‌گر فازی $u_f(x)$ طبق شکل (۱.۲) برای $\alpha = \beta = 1$ رسم کرده‌ایم. طبق شکل (۱.۲) کنترل‌گر فازی $u_f(x)$ ، به تقریب پیوسته از کنترل‌گر بنگ بنگ ^{۲۳} طبق



شکل ۱.۲: کنترل‌گر فازی $u_f(x)$ برای $\alpha = \beta = 1$

زیر وابسته است:

$$u_b(x) = \begin{cases} \beta & x < 0 \\ -\beta & x > 0. \end{cases}$$

بعلاوه چون داریم: $\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots$ لذا تقریب خطی از $u_f(x)$ عبارت است از، $u_l(x) = -2\beta\alpha x$ ، که می‌دانیم $u_b(x)$ و $u_l(x)$ از جواب‌های کنترل بهینه مساله بدست می‌آید.

مثال ۲.۵.۲. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b u(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (20.2)$$

که $b > 0$ مقدار مثبت می‌باشد. حال تابع هزینه را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J(x_0, t_0, u)(t) = \int_{t_0}^{\infty} [q^2 \tanh^2(2kx(t)) + u^2(t)] dt, \quad (21.2)$$

^{۲۲} Center of gravity defuzzifier

^{۲۳} Bang bang controller

که q و k مقادیر مثبت هستند. حال فرض می‌کنیم:

$$Q = q^2, B = b, A = 0, K = 2k, R = 1.$$

مقادیر بالا را در رابطه (۱۲.۲) جایگزین می‌کنیم که حاصلش برابر $P = \frac{q}{b}$ می‌شود. بنابراین تابع هزینه بهینه و همچنین کنترل گر بهینه بصورت زیر معلوم می‌شود:

$$\bar{J} = 2 \frac{p}{2k} \ln(\cosh(2kx_0)) = \frac{p}{bk} \ln(\cosh(2kx_0)).$$

$$\bar{u} = -R^{-1} B^T P \tanh(2kx(t)) = -q \tanh(2kx(t)).$$

مثال ۳.۵.۲. سیستم دینامیکی پاندول معکوس متناظر شکل (۲.۲) با معادلات زیر معرفی می‌شود [۸]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F(x_1, x_2) + G(x_1, x_2) u, \\ x_1(0) = \alpha, x_2(0) = \beta. \end{cases} \quad (22.2)$$

$$F(x_1, x_2) = \frac{g \sin x_1 - \left(\frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)}, \quad G(x_1, x_2) = \frac{\left(\frac{\cos x_1}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)},$$

که در آن $x_1(t)$ زاویه پاندول ^{۲۴}، $x_2(t)$ زاویه سرعت اولیه ^{۲۵}، $g = 9/8 \frac{m}{s^2}$ شتاب گرانشی ^{۲۶} جاذبه زمین، m_c جرم ارابه ^{۲۷}، m جرم میله ^{۲۸}، $2L$ طول میله ^{۲۹} و u نیروی اعمال ^{۳۰} شده به ارابه می‌باشند.

با توجه به این که $\dot{x}_1$ با x_2 و u با $\dot{x}_2$ در ارتباط است می‌توان چهار قاعده به صورت زیر نوشت:

(۱) اگر $x_2 \in P_{x_2}$ آنگاه $\dot{x}_1 = 4$

(۲) اگر $x_2 \in N_{x_2}$ آنگاه $\dot{x}_1 = -4$

(۳) اگر $u \in P_u$ آنگاه $\dot{x}_2 = 8$

(۴) اگر $u \in N_u$ آنگاه $\dot{x}_2 = -8$

که اعداد ۴ و ۸ به صورت تجربی بدست آمده است. فرض می‌کنیم که $k_{x_1} = 0/4$ ، $k_{x_2} = 0/2$ و $k_u = 1$. لذا سیستم هایپربولیک زیر از قواعد هایپربولیک فازی فوق بدست می‌آید

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4 \tanh(0/2 x_2), \\ \dot{x}_2 = 8 \tanh(u). \end{cases} \quad (23.2)$$

با تقریب خطی $\tanh(u) \approx u$ حول صفر سیستم (۲۳.۲) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\dot{x} = A \tanh(k_x x) + Bu, \quad (24.2)$$

^{۲۴} Pandulum's angle

^{۲۵} Angular velocity

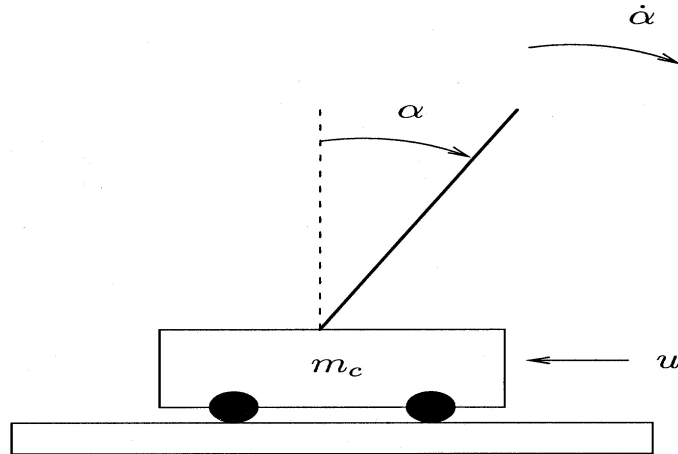
^{۲۶} Acceleration due to gravity

^{۲۷} Mass of the cart

^{۲۸} Mass of the pole

^{۲۹} Pole's length

^{۳۰} Applied force



شکل ۲.۲: سیستم پاندول معکوس

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k_x = \begin{pmatrix} 0/4 \\ 0/2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.2)$$

بنابراین سیستم (۲۴.۲) یک مدل هایپربولیک فازی متناظر سیستم پاندول معکوس می‌باشد.

مثال ۴.۵.۲. سیستم مدل هایپربولیک فازی مثال (۳.۵.۲) را در نظر می‌گیریم و طراحی کنترل‌گر پایدارکننده به روش کنترل بازخورد را برای آن اعمال می‌کنیم. با توجه به شرایط قضیه (۱.۴.۲) باید ماتریس قطری $P > 0$ و $Q > 0$ را طوری پیدا کنیم که

$$P(A + BH) + (A + BH)^T P = -Q. \quad (26.2)$$

چون در این مثال ابعاد سیستم پایین است ($H_{1 \times 2}, P = 1, N = 2$) به آسانی در رابطه (۲۶.۲) با جانشینی ($H = [h_1, h_2], P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$) و جانشینی پارامترهای مدل پاندول معکوس مثال (۳.۵.۲) در رابطه (۲۶.۲) داریم:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 4p_1 + 8p_2h_1 \\ 4p_1 + 8p_2h_1 & 16p_2h_2 \end{bmatrix}, \quad (27.2)$$

ملاحظه ۱.۵.۲. ما هرگز نمی‌توانیم Q را معین مثبت بدست آوریم زیرا قضیه (۱.۴.۲) نمی‌تواند مستقیماً عملی شود. در این مثال خاص ما می‌توانیم برای غلبه بر این مشکل از ماتریس Q معین نامنفی بجای معین مثبت استفاده می‌کنیم. حال پایداری سیستم حلقه بسته برقرار است اگر:

$$h_1 = \frac{-p_1}{2p_2}, \quad h_2 > 0. \quad (28.2)$$

چون Q معین نامنفی خواهد بود بنابراین سیستم حلقه بسته بصورت زیرمی‌باشد:

$$\dot{x}_1 = 4 \tanh(0/2 x_2), \quad \dot{x}_2 = 8 (h_1 \tanh(0/4 x_1) + h_2 \tanh(0/2 x_2)). \quad (29.2)$$

حال تابع لیانوف را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(x(t)) = 2 \sum_{i=1}^n P_i \int_0^{x_i(t_0)} \tanh(k_i \tau) d\tau \quad (30.2)$$

با توجه به مرجع [۲۳] و مشتق رابطه (۳۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{d}{dt} V(x) = \dot{x} \frac{dV}{dx} = -(\tanh(\circ/4x_1), \tanh(\circ/2x_2)) \times Q(\tanh(\circ/4x_1), \tanh(\circ/2x_2))^T \\ &= 16p_1h_1\tanh^2(\circ/2x_2).\end{aligned}\quad (31.2)$$

مجموعه W را بفرض ذیل در نظر می‌گیریم:

$$W = \{x \mid \dot{V} \equiv 0\}.$$

اگر W فقط شامل مبدا باشد یعنی $x_1 = x_2 = 0$. سیستم حتما پایدار خواهد بود. طبق رابطه (۳۱.۲) خواهیم دید اگر $x \in W$ سپس $x_2 \equiv 0$ زیرا $\dot{x}_2 = 0$.

حال معادله دوم رابطه (۲۹.۲) را جانشین می‌کنیم که خواهیم داشت $x_1 \equiv 0$. بنابراین اگر رابطه (۲۸.۲) صدق نماید، سیستم حلقه بسته یعنی رابطه (۲۰.۲) پایدار مجانی سراسری خواهد بود. در سیستم پاندول معکوس برای اعمال کنترل گر فرض می‌کنیم

$$h_1 = -1^\circ, h_2 = -5^\circ.$$

بنابراین رفتار اصلی سیستم حلقه بسته روی مدل هایپربولیک فازی طبق شکل (۳.۲) برای شرایط اولیه زیر رسم شده است.

$$\{x_1(0), x_2(0)\} = \{2^\circ, 0\}, \{45^\circ, 0\}, \{89^\circ, 0\}.$$

و طبق شکل (۴.۲) رفتار سیستم حلقه بسته وقتی کنترل گر روی سیستم اصلی پاندول معکوس برای شرط‌های ابتدایی یکسان بکار گرفته می‌شود رسم شده است. از شبیه‌سازی جواب‌ها ما می‌توانیم ببینیم که کنترل گر می‌تواند مدل هایپربولیک فازی را برای هر شرط ابتدایی پایدار کند. در شکل‌های (۳.۲) و (۴.۲) و (۶.۲) واکنش $x_1(t)$ با طراحی کنترل گر بصورت نقطه چین رسم شده است. برای اثبات مقاوم پذیری مدل هایپربولیک فازی، پارامترهای اصلی پاندول معکوس را طبق زیر عوض می‌کنیم:

$$m_c = 0/4, M = 2, l = 0/45.$$

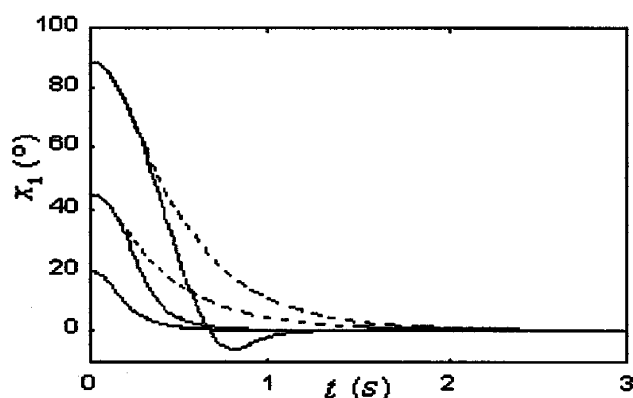
طبق شکل (۵.۲) رفتار پارامترهای جدید را بصورت خط ممتد رسم کرده‌ایم و وقتی پارامترها را عوض می‌کنیم نتیجه خواهیم گرفت نمایش و اجرای کنترل کننده می‌باشد، و این مهر تاییدی است بر این که مدل هایپربولیک فازی مقاوم پذیر می‌باشد.

مثال ۵.۵.۲. سیستم مدل هایپربولیک فازی مثال (۳.۵.۲) را در نظر می‌گیریم و طراحی کنترل بهینه را بدست می‌آوریم. چون $P = 1$ فرض می‌کنیم R یک اسکالرو $r > 0$ می‌باشد. $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ را در رابطه (۱۲.۲) جایگزین می‌کنیم، لذا به رابطه زیر می‌رسیم:

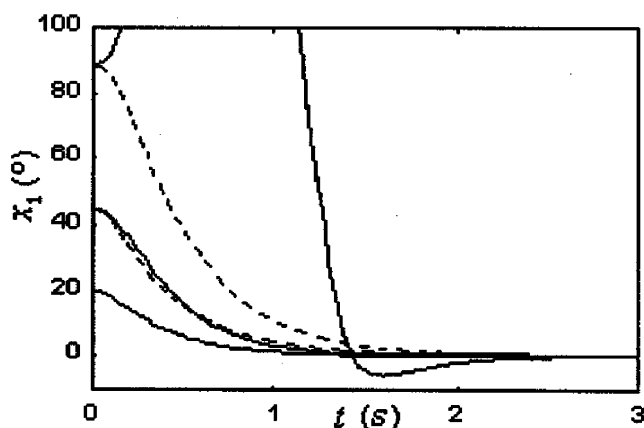
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -4p_1 \\ -4p_1 & 64r^{-1}p_1^2 \end{bmatrix}, \quad (32.2)$$

می‌دانیم در مثال (۴.۵.۲) نمی‌توان $Q > 0$ پیدا کنیم بطوریکه در رابطه (۱۲.۲) صادق باشد. بنابراین برای غلبه بر این مشکل تغییر متغیر ذیل را اعمال می‌کنیم:

$$y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2. \quad (33.2)$$



شکل ۳.۲: وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از اعمال کنترل پایدارکننده برای شرط‌های ابتدایی متفاوت روی سیستم هایپربولیک پاندول معکوس



شکل ۴.۲: وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از اعمال کنترل پایدارکننده برای شرط‌های ابتدایی متفاوت روی سیستم اصلی پاندول معکوس

لذا سیستم هایپربولیک (۲۴.۲) بصورت معادل زیر تبدیل می شود:

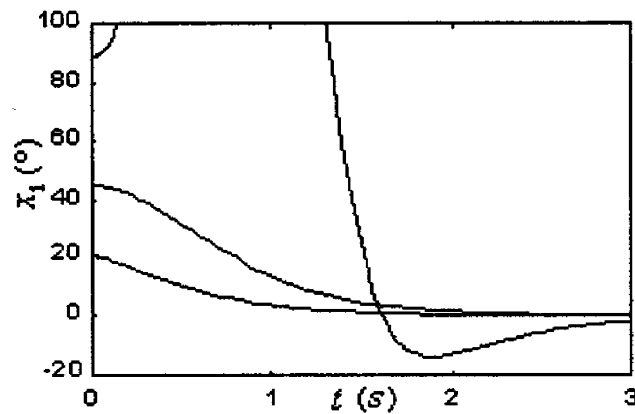
$$\dot{y} = A_y \tanh(k_y) + B_y u, \quad (34.2)$$

که در آن

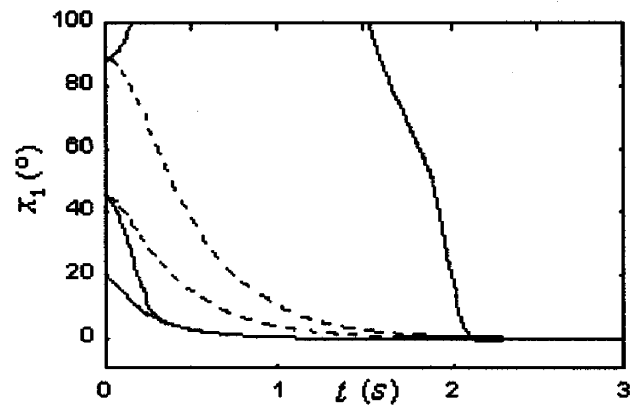
$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, B_y = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (35.2)$$

که زیر نویس y به مختصات جدید مربوط می‌شود. بنابراین اگر ما بتوانیم یک کنترل‌گر هایپربولیک بهینه برای سیستم (۳۴.۲) طراحی کنیم، سپس در سیستم حلقه بسته y_1 و y_2 بطور مجانی به صفر همگرا هستند و بنابراین x_1 و x_2 هم این چنین خواهند بود. لذا با جایگزینی (۳۵.۲) در (۱۳.۲) و فرض $r = 16p_2$ خواهیم داشت:

$$Q = \frac{4}{p_2} \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{bmatrix},$$



شکل ۵.۲: وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از تغییر پارامترها روی سیستم پاندول معکوس



شکل ۶.۲: وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از شناسایی پارامترها روی سیستم پاندول معکوس

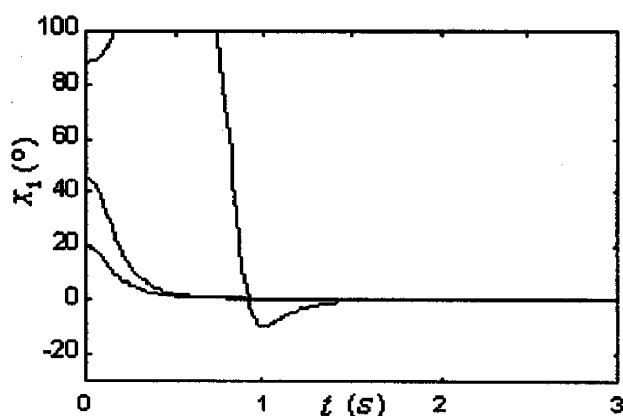
مشاهده می‌کنیم Q معین مثبت است. بنابراین می‌توانیم به کنترل گر بهینه زیر برسیم:

$$u^* = -r^{-1} B_y^T P (\tanh(\circ/4 y_1) \tanh(\circ/2 y_2))^T - \frac{1}{2p_2} (p_1 \tanh(\circ/4 y_1) + p_2 \tanh(\circ/2 y_2)) \\ = -\frac{1}{2p_2} (p_1 \tanh(\circ/4 (x_1 + x_2)) + p_2 \tanh(\circ/2 x_2)).$$

لذا برای مثال فوق می‌توان به عنوان مثال فرض کرد $p_1 = 300$ و $p_2 = 100$. بنابراین می‌توانیم به یک کنترل پایدار کننده u به صورت زیر برسیم:

$$u^* = -\frac{1}{200} 300 \tanh(\circ/4 (x_1 + x_2)) + 100 \tanh(\circ/2 x_2).$$

با استفاده از این کنترل، متغیر وضعیت را در سیستم پاندول معکوس می‌توانیم به وضعیت پایدار برسانیم که در شکل (۷.۲) نشان داده شده است.



شکل ۷.۲: وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از اعمال کنترل پایدارکننده روی سیستم پاندول معکوس

مثال ۶.۵.۲. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \tanh(k_2 x_2) + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2. \end{cases} \quad (36.2)$$

حال تابع هزینه را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J(x_1(t), x_2(t), t_0, u_1(t), u_2(t)) = \int_{t_0}^{\infty} [(\tanh(k_1 x_1(t)) - \tanh(k_2 x_2(t)))^2 + 2 \tanh^2(k_2 x_2(t)) + u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt,$$

که در آن:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

که

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

توجه شود که Q معین مثبت است. با جایگزاری و حل معادله ریکاتی (۱۲.۲) مقدار P بصورت زیر بدست می‌آید:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بنابراین برای همه مقادیر تابع هزینه بهینه و همچنین کنترل‌گر بهینه بصورت زیر معلوم می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= 2 \left[\frac{p_1}{k_1} \operatorname{Ln}(\cosh(k_1 x_1(t_0))) + \frac{p_2}{k_2} \operatorname{Ln}(\cosh(k_2 x_2(t_0))) \right] \\ &= \frac{2}{k_1} \operatorname{Ln}(\cosh(k_1 x_1(t_0))) + \frac{4}{k_2} \operatorname{Ln}(\cosh(k_2 x_2(t_0))) \end{aligned} \quad (37.2)$$

$$\bar{u} = -R^{-1} B^T P \tanh(Kx) = -\tanh(k_1 x_1) - 2 \tanh(k_2 x_2). \quad (38.2)$$

مثال ۷.۵.۲. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \tanh(kx_2) + u, \\ \dot{x}_2 = bu. \end{cases} \quad (39.2)$$

که رابطه (۳۹.۲) یک فرم از رابطه زیر است

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \tanh(kx(t)) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (40.2)$$

که در آن:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

حال تابع هزینه را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J(x_1(t), x_2(t), t_0, u(t)) = \int_{t_0}^{\infty} [c^2 \tanh^2(kx_1(t)) + 2(c^2 - c) \tanh(kx_1(t)) \\ \times \tanh(kx_2(t)) + c^2 \tanh^2(kx_2(t)) + u^2(t)] dt,$$

که

$$Q = \begin{pmatrix} c^2 & c^2 - c \\ c^2 - c & c^2 \end{pmatrix}, R = 1.$$

توجه شود که Q معین مثبت است (برای مقدار $c > 0.5$). با جایگزاری و حل معادله ریکاتی (۱۲.۲) مقدار P بصورت زیر بدست می‌آید:

$$P = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \frac{c}{b} \end{pmatrix}.$$

بنابراین برای همه مقادیر $c > 0.5, b > 0$ تابع هزینه بهینه و همچنین کنترل گر بهینه بصورت زیر معلوم می‌شود:

$$\bar{J} = \frac{2c}{k} \ln(\cosh(kx_1(t_0))) + \frac{1}{b} \ln(\cosh(2kx_2(t_0))). \quad (41.2)$$

$$\bar{u} = -R^{-1} B^T P \tanh(Kx) = -c \tanh(kx_1) - c \tanh(kx_2). \quad (42.2)$$

ملاحظه ۲.۵.۲. رابطه (۴۲.۲) با مقادیر $c = \frac{5}{6}, k = 15$ فقط یک کنترل گر فازی است.

ملاحظه ۳.۵.۲. سیستم دینامیکی پاندول معکوس رابطه (۲۲.۲) با فرم مدل رابطه (۳۹.۲) متفاوت است و کنترل گر بهینه هایپربولیک خاصیت مقاوم پذیری^{۳۱} قطعی دارد اما سیستم پاندول معکوس، کنترل گر موقتی می‌تواند باشد.

مثال ۸.۵.۲. فرض می‌کنیم قواعد اگر آنگاه فازی مطابق ذیل باشد:

IF x_1 is P_{x_1}	و	x_2 is P_{x_2} ,	THEN $\dot{x}_3 = +c_{x_1} + c_{x_2}$,
IF x_1 is N_{x_1}	و	x_2 is P_{x_2} ,	THEN $\dot{x}_3 = -c_{x_1} + c_{x_2}$,
IF x_1 is P_{x_1}	و	x_2 is N_{x_2} ,	THEN $\dot{x}_3 = +c_{x_1} - c_{x_2}$,
IF x_1 is N_{x_1}	و	x_2 is N_{x_2} ,	THEN $\dot{x}_3 = -c_{x_1} - c_{x_2}$,
IF x_1 is P_{x_1}	و	x_3 is P_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_2 = +c_{x_1} + c_{x_3}$,
IF x_1 is N_{x_1}	و	x_3 is P_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_2 = -c_{x_1} + c_{x_3}$,
IF x_1 is P_{x_1}	و	x_3 is N_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_2 = +c_{x_1} - c_{x_3}$,
IF x_1 is N_{x_1}	و	x_3 is N_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_2 = -c_{x_1} - c_{x_3}$,
IF x_2 is P_{x_2}	و	x_3 is P_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_1 = +c_{x_2} + c_{x_3}$,
IF x_2 is N_{x_2}	و	x_3 is P_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_1 = -c_{x_2} + c_{x_3}$,
IF x_2 is P_{x_2}	و	x_3 is N_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_1 = +c_{x_2} - c_{x_3}$,
IF x_2 is N_{x_2}	و	x_3 is N_{x_3} ,	THEN $\dot{x}_1 = -c_{x_2} - c_{x_3}$,

اکنون تابع عضویت فازی (مثبت بودن) P_{x_i} و (منفی بودن) N_{x_i} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{P_{x_i}}(x) = e^{\frac{-1}{\gamma}(x_i - k_i)^2}, \quad \mu_{N_{x_i}}(x) = e^{\frac{-1}{\gamma}(x_i + k_i)^2},$$

سیس مدل سه بعدی زیر را داریم:

$$\dot{x} = A f(x) = A \tanh(Kx), \quad (43.2)$$

که

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, A = \begin{pmatrix} 0 & c_{x_2} & c_{x_3} \\ c_{x_1} & 0 & c_{x_3} \\ c_{x_1} & c_{x_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

و

$$K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3) = \text{diag}(2, 3, 1).$$

فصل ۳

مدل‌های هایپربولیک فازی و خواص آن برای سیستم‌های زمانی گسسته

۱.۳ مقدمه

در این فصل ما به ارزیابی روشی برای حل سیستم‌های زمانی گسسته^۱ غیرخطی با ساختار خاص که سیستم‌های تکرار اسکالر غیرخطی^۲ ($SRSN$) نامیده می‌شود می‌پردازیم [۱۱]. چو^۳ و گلاور^۴ در زمینه طراحی کنترل کننده برای $SRSN$ که پایداری و مقاوم پذیری را تضمین کند، فعالیت می‌کنند. در ادامه نشان خواهیم داد که $SRSN$ با مجموعه قواعد و اطلاعات زبانی معادل است و این به ما اجازه می‌دهد که یک شیوه جدید برای مدل فازی و کنترل سیستم‌های گسسته زمانی توسعه دهیم، خواهیم دید این شیوه دو مزایای مهم دارد:

- (۱) پایداری و مقاوم پذیری سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند.
- (۲) با توجه به مدل، کنترل گر طراحی شده یک کنترل گر فازی می‌باشد.

و این شیوه باعث می‌شود یک نظم کلامی برای استراژی کنترل وجود داشته باشد.

^۱ Discrete time

^۲ Systems With Repeated Scalar Nonlinear

^۳ Chu

^۴ Glover

۲.۳ ارایه مدل تکرار اسکالر غیرخطی SRSN

سیستم گسسته زمانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi(x_1(k)) \\ \vdots \\ \phi(x_n(k)) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

که $\phi(\cdot)$ تابع اسکالر^۵ و A و B ماتریس‌های ثابت هستند. ما به مدل (۱.۳) بعنوان یک *SRSN* اشاره می‌کنیم. اخیراً چو و گلاور [۱۱] در زمینه طراحی کنترل کننده برای این سیستم‌های گسترده، روش‌های مختلفی را مورد مطالعه و تشریح قرار داده‌اند. با این حال یک مشکل عمده در استفاده از نتایج که در خود سیستم باقی می‌ماند این است که روشن نیست برای یک سیستم داده شده چگونه یک مدل *SRSN* بدست آوریم. هم اکنون سیستم گسسته زمانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tanh(s_1 x_1(k)) \\ \vdots \\ \tanh(s_n x_n(k)) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

که s_i مقادیر مثبت هستند. برای ساده‌تر شدن فرض می‌کنیم $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ و می‌توانیم رابطه (۲.۳) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x(k+1) = A \tanh(Sx(k)) + Bu(k). \quad (3.3)$$

به رابطه (۳.۳) مدل فضای حالت هایپربولیک می‌گوییم.

ملاحظه ۱.۲.۳. چون $\tanh(z) = z - (\frac{z^3}{3}) + (\frac{z^5}{15}) - \dots$ برای مقادیر کوچک $|x_i(k)|$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ رابطه (۳.۳) به مدل خطی زیر تبدیل می‌شود: $x(k+1) \approx ASx(k) + Bu(k)$

ملاحظه ۲.۲.۳. اگر در مدل (۳.۳) متغیرهای وضعیت و خروجی جدید را بترتیب بصورت زیر تعریف کنیم $\tilde{x}_i(t) = e_i x_i(t)$ و $\tilde{u}_j(t) = p_j u_j(t)$ که e_i و p_i ثابت هستند، سپس داریم:

$$\tilde{x}(k+1) = EA \tanh(SE^{-1}x(k)) + EBP^{-1}\tilde{u}(k)$$

که $E = \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$ و $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$

۳.۳ قابلیت تقریب

سیستم دینامیکی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$z(k+1) = f(z(k)), u(k)), \quad (4.3)$$

که $z \in \mathbb{R}^l$ ، $u \in \mathbb{R}^m$ و $f: S \times U \rightarrow \mathbb{R}^l$ تابع پیوسته و $(S)U$ مجموعه‌های بازی در $(\mathbb{R}^l)\mathbb{R}^m$ می‌باشند. ما نشان می‌دهیم که مدل هایپربولیکی که خروجی را تقریب بزند وجود دارد، بنابراین ما تابع خروجی را به مدل هایپربولیک اضافه می‌کنیم و مدل زیر را در نظر می‌گیریم:

^۵Scalar function

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \tanh(x(k)) + Bu(k) \\ y(k) &= C \tanh(x(k)). \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

قضیه ۱.۳.۳. [۲۱]. سیستم دینامیکی رابطه (۴.۳) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $D_s \in S$ و $D_u \in U$ مجموعه‌هایی فشرده باشند و $z(\circ) \in D_s$ سپس برای هر $\epsilon > 0$ و عدد طبیعی $I > 0$ و هر تابع ورودی $u : [0, \infty) \rightarrow D_u$ مدل هایپربولیکی بفرم (۵.۳) با تقریب ابتدایی^۶ و $x(1) \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد، بطوریکه

$$\|z(k) - y(k)\| < \epsilon \quad \forall k \in [1, I] \quad (۶.۳)$$

برهان. فرض می‌کنیم $\epsilon > 0$ ، $\eta > 0$ و $I > 0$ داده شده باشد. با توجه به [۲۱] و قضیه (۱.۵.۳) دینامیک بازگشتی شبکه عصبی بفرم زیر وجود دارد

$$\begin{aligned} x'(k+1) &= A \tanh(x'(k)) + Bu(k) \\ y'(k) &= Cx'(k). \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

با مقدار ابتدایی مناسب $x'(\circ)$ بطوریکه به ازای هر $k \in [0, I]$ داشته باشیم $\|z(k) - y(k)\| < \epsilon/2$. فرض می‌کنیم $A = M^{-1}TM$ ، با T بالا مثلثی و M یکتا [۲]. و همچنین فرض کنیم $\tilde{T}$ انحراف ناچیزی از T باشد، و $\tilde{A} = M^{-1}\tilde{T}M$ بنابراین $\tilde{A}$ معکوس پذیر می‌باشد. هم اکنون سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A} \tanh(\tilde{x}(k)) + Bu(k) \\ \tilde{y}(k) &= C\tilde{x}(k). \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

که $\tilde{x}(\circ) = x'(\circ)$ با توجه به لم (۲.۴.۳) و [۲۱] می‌توانیم انحراف $\tilde{T}$ را به ازای هر $k \in [0, I]$ بطوریکه $\|z(k) - y(k)\| < \epsilon/2$ سرانجام تعریف می‌کنیم:

$$x(k) = \tanh^{-1}(\tilde{A}^{-1}\tilde{x}(k)), \quad y(k) = \tilde{y}(k)$$

دقت شود $x(k)$ به ازای هر $k \in [1, I]$ خوش تعریف می‌باشد. بنابراین از فرم زیر پیروی می‌کند

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \tilde{A} \tanh(x(k)) + Bu(k) \\ y(k) &= C\tilde{A} \tanh(x(k)), \end{aligned}$$

□ که بفرم سیستم (۵.۳) می‌باشد و در رابطه (۶.۳) صدق می‌کند.

ملاحظه ۱.۳.۳. در مدل تقریبی هایپربولیک مرتبه n بطور کلی از l بزرگ‌تر خواهد بود [۲۱].

ملاحظه ۲.۳.۳. قضیه (۱.۳.۳) ایجاب می‌کند مدل هایپربولیک تقریب عمومی^۷ از سیستم‌های دینامیکی گسسته زمانی روی بازه $k \in [1, I]$ باشد [۲۱].

^۶ Appropriate initial

^۷ Universal approximator

۴.۳ روند مدل‌سازی

در این بخش نشان خواهیم داد مدل هاپیربولیک به آسانی از اطلاعات زبانی مربوط به سیستم می‌تواند بدست آید. اجازه بدهید با یک مثال ساده شروع کنیم که $\tanh(\cdot)$ را به قواعد اگر آنگاه فازی مرتبط می‌کند. قواعد اگر آنگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

IF $x(k)$ is positive, THEN $x(k+1) = +a$;

IF $x(k)$ is negative, THEN $x(k+1) = -a$;

اکنون تابع عضویت گوسین^۸ را برای جملات مثبت بودن (positive)، و منفی بودن (negative)، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{pos}(z) = e^{-\frac{1}{2}(z-s)^2}, \quad \mu_{neg}(z) = e^{-\frac{1}{2}(z+s)^2},$$

که $s > 0$. از قانون استنتاج^۹، فازی‌ساز منفرد^{۱۰} و نافازی‌ساز مرکز ثقل استفاده می‌کنیم و بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \frac{a \mu_{pos}(x(k)) + (-a) \mu_{neg}(x(k))}{\mu_{pos}(x(k)) + \mu_{neg}(x(k))} \\ &= \frac{ae^{-\frac{1}{2}(x(k)-s)^2} - ae^{-\frac{1}{2}(x(k)+s)^2}}{e^{-\frac{1}{2}(x(k)-s)^2} + e^{-\frac{1}{2}(x(k)+s)^2}} \\ &= \frac{ae^{-\frac{1}{2}(x(k)^2 - 2sx(k) + s^2)} - ae^{-\frac{1}{2}(x(k)^2 + 2sx(k) + s^2)}}{e^{-\frac{1}{2}(x(k)^2 - 2sx(k) + s^2)} + e^{-\frac{1}{2}(x(k)^2 + 2sx(k) + s^2)}} \\ &= \frac{ae^{-\frac{1}{2}(x(k)^2 + s^2)} (e^{sx(k)} - e^{-sx(k)})}{e^{-\frac{1}{2}(x(k)^2 + s^2)} (e^{sx(k)} + e^{-sx(k)})} \\ &= \frac{a(e^{sx(k)} - e^{-sx(k)})}{e^{sx(k)} + e^{-sx(k)}} \\ &= a \tanh(sx(k)). \end{aligned} \quad (9.3)$$

که بفرم رابطه (۳.۳) می‌باشد.

تعریف ۱.۴.۳. قواعد اگر آنگاه فازی یک نگاشت هاپیربولیک از $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ به f نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:
هر متغیر ورودی z_i دارای دو مشخصه زبانی مثبت و منفی است.
هر قاعده فازی به شکل زیر می‌باشد:

IF z_1 is pn_{z_1} , z_2 is pn_{z_2} , ..., z_n is pn_{z_n} , THEN $f = \pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_m$,

که a_i ($i = 1, \dots, m$) ثابت هستند و pn_{z_i} مخفف هر جملات زبانی مثبت یا منفی می‌باشد. علامت مثبت یا منفی در بخش THEN به روش ذیل مشخص می‌شود:
اگر در قسمت IF صفت جمله z_i مثبت باشد، سپس در قسمت THEN بخش a_i با علامت

^۸Gaussian membership function

^۹Inference

^{۱۰}Singleton fuzzifire

مثبت ظاهر می شود، در غیر این صورت a_i با علامت منفی ظاهر می شود. برای هر قاعده فازی در قسمت THEN و m متغیر فازی در قسمت IF ظاهر شود آنگاه قواعد اگر آنگاه برای تمام ترکیب های ممکن از $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ برابر 2^m می باشد.

لم ۱.۴.۳. فرض کنید F یک نگاشت هایپربولیک از $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ به f که یک قاعده اگر آنگاه فازی است باشد. و تابع عضویت مثبت و منفی را به ازای هر i بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_{pos_{z_i}}(y) = e^{\frac{-1}{\tau}(z-s_i)^2}, \quad \mu_{neg_{z_i}}(y) = e^{\frac{-1}{\tau}(z+s_i)^2}, \quad (10.3)$$

که $s_i > 0$. از اعمال قانون استنتاج، فازی ساز منفرد و نافازی ساز مرکز ثقل به F بدست می آوریم:

$$f = \sum_{i=1}^m a_i \tanh(s_i z_i). \quad (11.3)$$

برهان. رابطه (۱۱.۳) را بصورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^m a_i \frac{e^{s_i z_i} - e^{-s_i z_i}}{e^{s_i z_i} + e^{-s_i z_i}} \\ &= \frac{a_i e^{-\frac{1}{\tau}(z_i-s_i)^2} - a_i e^{-\frac{1}{\tau}(z_i+s_i)^2}}{e^{-\frac{1}{\tau}(z_i-s_i)^2} + e^{-\frac{1}{\tau}(z_i+s_i)^2}} \\ &= \frac{a_i \mu_{pos_{z_i}}(z_i) - a_i \mu_{neg_{z_i}}(z_i)}{\mu_{pos_{z_i}}(z_i) + \mu_{neg_{z_i}}(z_i)}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

اکنون رابطه (۱۲.۳) را بصورت $f = \frac{N}{D}$ بازنویسی می کنیم که

$$\begin{aligned} N &= (a_1 + a_2 + \dots + a_m) \mu_{pos_{z_1}}(z_1) \mu_{pos_{z_1}}(z_1) \dots \mu_{pos_{z_m}}(z_m) \\ &\quad + (a_1 - a_2 + \dots + a_m) \mu_{pos_{z_1}}(z_1) \mu_{neg_{z_2}}(z_2) \dots \mu_{pos_{z_m}}(z_m) \\ &\quad \dots + (-a_1 - a_2 \dots - a_m) \mu_{neg_{z_1}}(z_1) \mu_{neg_{z_2}}(z_2) \dots \mu_{neg_{z_m}}(z_m) \\ D &= \mu_{pos_{z_1}}(z_1) \mu_{pos_{z_2}}(z_2) \dots \mu_{pos_{z_m}}(z_m) \\ &\quad + \mu_{pos_{z_1}}(z_1) \mu_{neg_{z_2}}(z_2) \dots \mu_{pos_{z_m}}(z_m) \\ &\quad \dots + \mu_{neg_{z_1}}(z_1) \mu_{neg_{z_2}}(z_2) \dots \mu_{neg_{z_m}}(z_m) \end{aligned}$$

هر دو N و D شامل 2^m جمله هستند که همگی ترکیبی از علامت های مجموعه $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ می باشند. $\square$

تعریف ۲.۴.۳. یک سیستم با n متغیر حالت $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))^T$ و با m ورودی $u(k) = (u_1(k), \dots, u_m(k))^T$ را در نظر می گیریم. قاعده اگر آنگاه فازی که با سیستم مرتبط است را قابل قبول^{۱۱} گوئیم اگر در شرایط زیر صدق نماید:

^{۱۱} Admissible

• هر قاعده فازی به شکل زیر توصیف می‌شود:

$$R_l: \text{If } [x_1(k) \text{ is } pn_{x_1}] \text{ and } [x_2(k) \text{ is } pn_{x_2}] \dots \text{ and } [x_n(k) \text{ is } pn_{x_n}] \\ \text{and } [u_1(k) \text{ is } pn_{u_1}] \text{ and } [u_2(k) \text{ is } pn_{u_2}] \dots \text{ and } [u_m(k) \text{ is } pn_{u_m}] \quad (۱۳.۳) \\ \text{Then } x_i(k+1) = a_i,$$

• به ازای هر i ، فرض می‌کنیم F_i مجموعه‌ای از قوانین اگر آنگاه باشد که در هر جملات $Then$ شامل $x_i(k+1)$ جمله است، بنابراین F_i یک نگاشت هاپربولیک از زیر مجموعه $\{x(k), u(k)\}$ به $x_i(k+1)$ است.

لم ۲.۴.۳. فرض کنید قاعده اگر آنگاه فازی قابل قبول طبق تعریف (۲.۴.۳) داده شده باشد. و تابع عضویت مثبت و منفی را به ازای هر s_z بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{pos_z}(y) = e^{\frac{-1}{\gamma}(y-s_z)^2}, \quad \mu_{neg_z}(y) = e^{\frac{-1}{\gamma}(y+s_z)^2}. \quad (۱۴.۳)$$

سپس با اعمال قانون استنتاج، مدل زیر را بدست می‌آوریم:

$$x(k+1) = A \tanh(S_x x(k)) + C \tanh(S_u u(k)). \quad (۱۵.۳)$$

که

$$S_x = \text{diag}(s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_n}) \text{ و } S_u = \text{diag}(s_{u_1}, s_{u_2}, \dots, s_{u_m}).$$

برهان. با توجه به تعریف (۲.۴.۳) و (۱.۴.۳) ایجاب می‌کند که $x_i(k+1)$ ترکیب خطی از عناصر بردار $[\tanh(s_{x_1} x_1(k)), \dots, \tanh(s_{x_n} x_n(k)), \tanh(s_{u_1} u_1(k)), \dots, \tanh(s_{u_m} u_m(k))]^T$ باشند. که ماتریسی به فرم (۱۵.۳) می‌باشد. $\square$

ملاحظه ۱.۴.۳. با خطی‌سازی رابطه (۱۵.۳) در u می‌توانیم مدل هاپربولیک رابطه (۳.۳) را بدست آوریم.

۵.۳ تخمین پارامترها

در این بخش ما پارامترهای مدل هاپربولیک (۳.۳) را تخمین^{۱۲} می‌زنیم. بنابراین در مدل زیر فرض می‌کنیم ماتریس قطری S مشخص باشد، لذا فقط باید ماتریس‌های ثابت A و B را مشخص نماییم.

$$x(k+1) = A \tanh(Sx(k)) + Bu(k). \quad (۱۶.۳)$$

در رابطه (۱۶.۳) فرض می‌کنیم که $x(k)$ و $u(k)$ به ازای تمامی مقادیر k برای محاسبه در دسترس باشد. هدف ما بدست آوردن تخمینی برای ماتریس‌های A و B است، لذا رابطه (۱۶.۳) را بصورت مجموعه‌ای از n معادله بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x_i(k+1) = (\theta^i)^T \phi(k), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۷.۳)$$

^{۱۲}Estimat

که θ^i برداری حاوی پارامترهای نامشخص^{۱۳} می باشد که باید آن را تخمین بزنیم. بعنوان مثال مدل هایپربولیک مرتبه دو بصورت زیر می باشد:

$$x_1(k+1) = a_{11} \tanh(s_1 x_1(k)) + a_{12} \tanh(s_2 x_2(k)) + b_1 u(k)$$

$$x_2(k+1) = a_{21} \tanh(s_1 x_1(k)) + a_{22} \tanh(s_2 x_2(k)) + b_2 u(k)$$

که بصورت زیر بازنویسی می کنیم

$$x_i(k+1) = (a_{i1} \ a_{i2} \ b_i) \begin{pmatrix} \tanh(s_1 x_1(k)) \\ \tanh(s_2 x_2(k)) \\ u(k) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

که بفرم رابطه (۱۷.۳) است. بنابراین باید برآوردگر $\hat{\theta}(k)$ را طراحی کنیم که بردار نامشخص θ^* را در رابطه زیر

$$x(k+1) = (\theta^*)^T \phi(k). \quad (18.3)$$

تخمین کند. لذا خطای تخمین عبارت از

$$\tilde{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \theta^* \quad (19.3)$$

که همگرا به صفر^{۱۴} است وقتی $k \rightarrow \infty$.

ملاحظه ۱.۵.۳. پارامتر $\tilde{\theta}(k)$ را نمی توان محاسبه نمود زیرا پارامتر θ^* نامشخص می باشد.

برای انجام این هدف باید از روش بازگشتی حداقل مربعات^{۱۵} (RLS) با فاکتور ثابت فراموش نشدنی^{۱۶} استفاده نمود [۲۵]. فرض می کنیم دستگاه زیر داده شده باشد:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + F(k+1)\phi(k)e^\circ(k+1), \\ F(k+1) = \frac{1}{\lambda_1} \left(F(k) - \frac{F(k)\phi(k)\phi^T(k)F(k)}{\lambda_1 + \phi^T(k)F(k)\phi(k)} \right) \\ e^\circ(k+1) = x(k+1) - \hat{\theta}^T(k)\phi(k). \end{cases} \quad (20.3)$$

که $e^\circ(k+1)$ خطای پیش بینی اولیه است، $F(k)$ ماتریس بدست آمده با مقدار آغازین $F(0) > 0$ و $\lambda_1 \in (0, 1)$ فاکتور فراموش نشدنی می باشد.

قضیه ۱.۵.۳. [۲۵]. برای مدل (۱۸.۳)، پس از حل دستگاه (۲۰.۳) برای طراحی و تخمین برآوردگر به نتایج زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{K=0}^N (e^\circ(k_1))^2 &< C < \infty \\ \lim_{N \rightarrow \infty} e^\circ(k_1) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(k+1) - \hat{\theta}(k)) &= 0. \end{aligned}$$

به زبان دیگر خطای پیش بینی اولیه^{۱۷} به صفر همگراست و برآوردگر $\hat{\theta}(k)$ این همگرایی را تضمین می کند.

^{۱۳} Unknown parameters

^{۱۴} Converge to zero

^{۱۵} Recursive Least Squares

^{۱۶} Forgetting factor

^{۱۷} Priori prediction

۶.۳ طراحی کنترل

فرض می‌کنیم سیستم هایپربولیک (۳.۳) داده شده باشد، می‌خواهیم یک کنترل گر پایدارکننده، برای سیستم طراحی کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم $S = I$ لذا سیستم هایپربولیک (۳.۳) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$x(k+1) = A \tanh(x(k)) + Bu(k). \quad (21.3)$$

در ادامه ما علاقه مند به طراحی یک کنترل کننده برای سیستم هایپربولیک (۲۱.۳) بفرم زیر هستیم:

$$u = G \tanh(x(k)), \quad (22.3)$$

این کنترل کننده سه مشخصه مهم دارد:

(۱) کران دار می‌باشد به ازای همه x ها، یعنی داریم

$$|u_i(k)| \leq \sum_{j=1}^n |g_{ij}|$$

که g_{ij} ورودی‌هایی از ماتریس G هستند.

(۲) هر $u_i(k)$ ترکیب خطی از $u_i(k) = (\tanh(k_1 x_1), \tanh(k_2 x_2), \dots, \tanh(k_n x_n))$ می‌باشد که با لم (۱.۴.۳) معادل است، بنابراین یک کنترل گر فازی است.

(۳) وقتی $u(k) = 0$ سیستم (۲۱.۳) بفرم زیر تبدیل می‌شود:

$$x(k+1) = A \tanh(x(k)), \quad (23.3)$$

در حالیکه با کنترل گر (۲۲.۳) سیستم حلقه بسته بصورت زیر می‌باشد

$$x(k+1) = (A + BG) \tanh(x(k)), \quad (24.3)$$

ملاحظه ۱.۶.۳. همانطور که مشاهده می‌کنیم سیستم حلقه بسته با کنترل (۲۴.۳) یا بدون کنترل (۲۳.۳) دارای فرمت یکسانی هستند یعنی سیستم می‌تواند با جملات زبانی یا بدون جملات زبانی توصیف شود.

در ادامه ما کنترل‌گری طراحی می‌کنیم که پایداری مجانی سرتاسری و مقاوم پذیری سیستم حلقه بسته (۲۴.۳) را تضمین نماید، برای این هدف ابتدا مفاهیم و لم‌های زیر را فرا می‌گیریم.

تعریف ۱.۶.۳. [۱۱] ماتریس مربعی P ماتریس مثبت قطری غالب^{۱۸} (PDD) نامیده می‌شود اگر P متقارن، معین مثبت و قطری غالب سطری باشد، یعنی به ازای همه i ها داشته باشیم:

$$|p_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |p_{ij}|. \quad (25.3)$$

لم ۱.۶.۳. [۱۱] فرض می‌کنیم ماتریس P یک PDD باشد و α_{ij} ها یک مجموعه از اسکالرها باشد که در شرایط زیر صدق کنند

$$|\alpha_{ij} + \alpha_{ji}| \leq -(\alpha_{ii} + \alpha_{jj}) \quad (26.3)$$

^{۱۸}Positive Diagonally Dominant

به ازای همه $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, n$ سپس

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha_{ij} \leq 0. \quad (27.3)$$

دقت شود ماتریس P قطری است لذا مجموع رابطه (۲۷.۳) به $\sum_{i=1}^n p_{ii} \alpha_{ii}$ کاهش می یابد که نامنفی است زیرا $p_{ii} > 0$ و $\alpha_{ii} \leq 0$ می باشد.

لم ۲.۶.۳. [۱۱]. فرض می کنیم ماتریس P یک PDD باشد، سپس برای همه $x \neq 0$ داریم:

$$\tanh^T(x) P \tanh(x) \leq x^T P \tanh(x) \quad (28.3)$$

$$\tanh^T(x) P \tanh(x) < x^T P x. \quad (29.3)$$

برهان. فرض می کنیم $\alpha_{ij} = \tanh(x_i) \tanh(x_j) - x_i \tanh(x_j)$ سپس داریم:

$$\begin{aligned} \tanh^T(x) P \tanh(x) - x^T P \tanh(x) &= \sum_{i,j} (\tanh^T(x_i) p_{ij} \tanh(x_j) - x_i p_{ij} \tanh(x_j)) \\ &= \sum_{i,j} p_{ij} \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

به آسانی تحقیق می شود به ازای همه x_i و x_j داریم

$$(\tanh(x_i) + \tanh(x_j))^2 \leq (x_i + x_j)(\tanh(x_i) + \tanh(x_j)) \quad (30.3)$$

که

$$\begin{aligned} 2 \tanh(x_i) \tanh(x_j) - x_i \tanh(x_j) - x_j \tanh(x_i) &\leq x_i (\tanh(x_i) - \tanh^2(x_i)) \\ &\quad + x_j \tanh(x_j) - \tanh^2(x_j). \end{aligned} \quad (31.3)$$

به طور مشابه با جایگزین کردن x_j با $-x_j$ در رابطه (۳۰.۳)، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} -2 \tanh(x_i) \tanh(x_j) + x_i \tanh(x_j) + x_j \tanh(x_i) &\leq x_i (\tanh(x_i) - \tanh^2(x_i)) \\ &\quad + x_j \tanh(x_j) - \tanh^2(x_j). \end{aligned} \quad (32.3)$$

اکنون روابط (۳۱.۳) و (۳۲.۳) رابطه (۲۶.۳) را نتیجه می دهد و در لم (۱.۶.۳) استفاده می شود، لذا رابطه (۲۸.۳) را بدست آوردیم.

برای اثبات رابطه (۲۹.۳) فرض می کنیم $x \neq 0$. در حقیقت از $P > 0$ بدست می آوریم:

$$(\tanh(x) - x)^T P (\tanh(x) - x) > 0,$$

که

$$x^T P x - x^T P \tanh(x) > x^T P \tanh(x) - \tanh^T(x) P \tanh(x)$$

لذا رابطه (۲۸.۳) ایجاب می کند که $x^T P x - x^T P \tanh(x) > 0$ و اثبات کامل می شود. $\square$

در ادامه برای طراحی کنترل گر فازی دو روش را ارائه می دهیم:

الف) کنترل گر پایدارکننده

قضیه ۱.۶.۳. اگر وجود داشته باشد ماتریس P بطوری که PDD باشد و ماتریس G بشرطی که صدق کنند در معادله لیپانوف زیر

$$(A + BG)^T P (A + BG) - P \leq \circ. \quad (۳۳.۳)$$

سپس سیستم (۲۴.۳) پایدار مجانی است.

برهان. معادله لیپانوف $V(x) = x^T P x$ را در نظر می‌گیریم، سپس داریم:

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= \tanh^T(x(k))(A + BG)^T P (A + BG) \tanh(x(k)) - x^T(k) P x(k) \\ &= \tanh^T(x(k))((A + BG)^T P (A + BG) - P) \tanh(x(k)) \\ &\quad + \tanh^T(x(k)) P \tanh(x(k)) - x^T(k) P x(k) \\ &\leq \tanh^T(x(k)) P \tanh(x(k)) - x^T(k) P x(k) \\ &< \circ. \end{aligned}$$

□

که مرحله آخر بفرم (۲۹.۳) می‌باشد.

ب) کنترل گر بهینه H_2

برنامه کنترل بهینه مطلوب برای سیستم‌های پیوسته زمان مطرح و حل شده است در [۱۸]. این فرایند با فرمول‌بندی یک تابع هزینه جدید که در آن جملات $\tanh^T(x(t)) Q \tanh(x(t))$ با $x^T(t) Q x(t)$ جایگزین شده است، انجام می‌گیرد که به تابع هزینه درجه دوم^{۱۹} مشهور است. بنابراین ما از همین ایده برای بهینه‌سازی و آنالیز کنترل گر فازی برای سیستم‌های گسسته زمان استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۶.۳. سیستم (۲۱.۳) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ماتریس‌های $Q \geq \circ$ و $R > \circ$ متقارن باشند. اگر وجود داشته باشد ماتریس P بطوری که PDD باشد و در رابطه زیر صدق کند:

$$P = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A. \quad (۳۴.۳)$$

سپس کنترل کننده‌ای که تابع هزینه زیر را به حداقل می‌رساند عبارت است:

$$\begin{aligned} J(x(\circ), u(\cdot)) &= \sum_{k=\circ}^{\infty} (\tanh^T(x(k)) Q \tanh(x(k)) + x^T(k) P x(k) \\ &\quad - \tanh^T(x(k)) P \tanh(x(k)) + u^T(k) R u(k)). \end{aligned}$$

که داریم:

$$\bar{u}(k) = G \tanh(x(k)), \quad G = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

برهان. در ابتدا نشان می‌دهیم که $\bar{u}$ برای سیستم پایدار مجانی می‌باشد. فرض می‌کنیم $M = R + B^T P B$ ، دقت شود $M > \circ$ ، بنابراین $M^{-1} > \circ$ وجود دارد.

سیستم حلقه بسته زیر را در نظر می‌گیریم

$$x(k+1) = A_c \tanh(x(k)), \quad A_c = (A - B M^{-1} B^T P A)$$

^{۱۹}Quadratic cost functional

لذا داریم

$$\begin{aligned} A_c^T P A - P_c &= A^T P A + A^T P B M^{-1} B^T P B M^{-1} B^T P A - 2 A^T P B M^{-1} B^T P A - P \\ &= A^T P A - A^T P B M^{-1} B^T P A - P + A^T P B M^{-1} (B^T P B - M) M^{-1} B^T P A \\ &= -Q - A^T P B M^{-1} R M^{-1} B^T P A. \end{aligned}$$

که معادله آخر از رابطه (۳۴.۳) پیروی می‌کند. چون $Q \geq 0$ و $R > 0$ قضیه (۱.۶.۳) ایجاب می‌کند که سیستم حلقه بسته پایدار مجانی باشد. حال نشان می‌دهیم که $\bar{u}(k)$ برای تابع هزینه J کنترل گر بهینه می‌باشد. فرض می‌کنیم تابع لیاپانوف بصورت $V(x) = x^T P x$ باشد، بنابراین داریم

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) + u^T(k) R u(k) &= (A \tanh(x(k)) + B u(k))^T P (A \tanh(x(k)) + B u(k)) \\ &\quad - x^T(k) P x(k) + u^T(k) R u(k) \\ &= \tanh^T(x(k)) Z \tanh(x(k)) - x^T(k) P x(k) \\ &\quad + (u(k) - \bar{u}(k))^T M (u(k) - \bar{u}(k)), \end{aligned}$$

که $Z = A^T (P - P B M^{-1} B^T P) A$. با جمع هر دو طرف از $k = 0$ تا $k = N$ و استفاده از رابطه (۳۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} V(x(N+1)) - V(x(0)) + \sum_{k=0}^N [u^T(k) R u(k)] &= \sum_{k=0}^N (\tanh^T(x(k)) (P - Q) + \tanh(x(k)) \\ &\quad - x^T(k) P x(k) + (u(k) - \bar{u}(k))^T M (u(k) - \bar{u}(k))) \end{aligned}$$

با بازچیدن جملات بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} V(x(0)) - V(x(N+1)) + \sum_{k=0}^N [u(k) - \bar{u}(k)]^T M (u(k) - \bar{u}(k)) &= \sum_{k=0}^N (\tanh^T(x(k)) Q \tanh(x(k)) + x^T(k) P x(k) \\ &\quad - \tanh^T(x(k)) P \tanh(x(k)) + u^T(k) R u(k)) \end{aligned}$$

هم اکنون برای هر کنترل گر u که سیستم را پایدار مجانی کند می‌توانیم فرض کنیم $N \rightarrow \infty$ و بدست آوریم:

$$\begin{aligned} V(x(0)) + \sum_{k=0}^{\infty} [u(k) - \bar{u}(k)]^T M (u(k) - \bar{u}(k)) &= J(x(0), u(\cdot)) \end{aligned}$$

□

زیرا $M > 0$ در نتیجه $J(x(0), u(\cdot))$ برای $u(k) = \bar{u}(k)$ مینیمال است.

۷.۳ شبیه‌سازی مثال‌ها

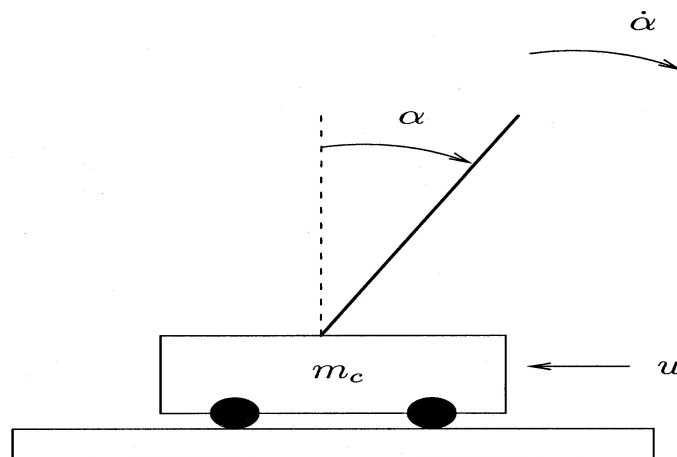
در این بخش با چندین مثال متنوع، روند مدل‌سازی و طراحی کنترل را در مدل‌های هاپربولیک فازی برای سیستم‌های گسسته زمان بررسی و تحلیل می‌کنیم.

مثال ۱.۷.۳. سیستم دینامیکی پاندول معکوس متناظر شکل (۱.۳) در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم معادله دینامیکی پیوسته زمان مطابق زیر معرفی می‌شود:

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}) + g(\alpha, \dot{\alpha}) u, \quad (35.3)$$

$$f(x, y) = \frac{g \sin x - \left(\frac{m l y^2 \cos x \sin x}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x}{m_c + m} \right)}, \quad g(x, y) = \frac{\left(\frac{\cos x}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x}{m_c + m} \right)},$$

که در آن α زاویه پاندول، $\dot{\alpha}$ زاویه سرعت اولیه، $g = 9/8 \frac{m}{s^2}$ شتاب گرانشی جاذبه زمین، m_c جرم ارابه، m جرم میله، $2L$ طول میله و u نیروی اعمال شده به ارابه، می‌باشند. مقدار



شکل ۱.۳: سیستم پاندول معکوس

پارامترهای مدل را مطابق زیر در نظر می‌گیریم:

$$m = 0.1 \text{ kg}, \quad m_c = 1 \text{ kg}, \quad l = 0.5 \text{ m}$$

ما قصد داریم از مدل گسسته ساده شده برای سیستم (۳۵.۳) استفاده کنیم که در [۴۳] بصورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} \alpha(k+1) &= \alpha(k) + \alpha'(k)h, \\ \alpha'(k+1) &= \alpha'(k) + \left(f(\alpha(k), \alpha'(k)) + g(\alpha(k), \alpha'(k))u(k) \right) h. \end{aligned} \quad (36.3)$$

که $\alpha(k)$ و $\alpha'(k)$ گسسته زمان متناظر با $\alpha(t)$ و $\alpha'(t)$ می‌باشند همچنین $h = 0.01$ در نظر می‌گیریم.

ملاحظه ۱.۷.۳. سیستم (۳۶.۳) مدل $SRSN$ نمی‌باشد، بنابراین در [۱۱] تکنیکی را توسعه می‌دهند که نمی‌تواند برای طراحی $u(k)$ بکار گرفته شود. برای غلبه بر این مشکل باید مدل هاپربولیکی برای این سیستم بدست آوریم.

فرض می‌کنیم معادلات سیستم (۳۶.۳) دقیق باشد و اطلاعات زیر را نیز در اختیار داشته باشیم

(۱) این سیستم دارای دو درجه آزادی α و α' می‌باشد که در مدل گسسته زمان بعنوان $x_1(k)$ و $x_2(k)$ اشاره شده است. بنابراین تفاوت $x_1(k+1) - x_1(k)$ با $x_2(k)$ متناظر می‌باشد.
 (۲) تفاوت $x_2(k+1) - x_2(k)$ با $u(k)$ متناظر می‌باشد.
 . لذا جملات دوم از این واقعیت پیروی می‌کنند که شتاب زاویه‌ای سیستم متناسب با نیروی اعمال شده به سیستم می‌باشد. پس برای بدست آوردن مدل هایپربولیک سیستم پاندول معکوس ابتدا اطلاعات زبانی را به قاعده اگر آنگاه فازی تبدیل می‌کنیم.

*Rule M_1 : If $x_1(k)$ is positive₁ and $x_2(k)$ is positive₂,
 Then $x_1(k+1)$ is $c_1 + c_2$,*

*Rule M_2 : If $x_1(k)$ is positive₁ and $x_2(k)$ is negative₂,
 Then $x_1(k+1)$ is $c_1 - c_2$,*

*Rule M_3 : If $x_1(k)$ is negative₁ and $x_2(k)$ is positive₂,
 Then $x_1(k+1)$ is $-c_1 + c_2$,*

*Rule M_4 : If $x_1(k)$ is negative₁ and $x_2(k)$ is negative₂,
 Then $x_1(k+1)$ is $-c_1 - c_2$,*

*Rule M_5 : If $x_2(k)$ is positive₂ and $u(k)$ is positive_u,
 Then $x_2(k+1)$ is $d_1 + d_2$,*

*Rule M_6 : If $x_2(k)$ is positive₂ and $u(k)$ is negative_u,
 Then $x_2(k+1)$ is $d_1 - d_2$,*

*Rule M_7 : If $x_2(k)$ is negative₂ and $u(k)$ is positive_u,
 Then $x_2(k+1)$ is $-d_1 + d_2$,*

*Rule M_8 : If $x_2(k)$ is negative₂ and $u(k)$ is negative_u,
 Then $x_2(k+1)$ is $-d_1 - d_2$,*

ملاحظه ۲.۷.۳. قاعده M_1 تا M_4 ، نگاشتی هایپربولیک از $\{x_1(k), x_2(k)\}$ به $x_1(k+1)$ تشکیل شده است و قاعده M_5 تا M_8 ، نگاشتی هایپربولیک از $\{x_2(k), u(k)\}$ به $x_2(k+1)$ تشکیل شده است.

در آینده از جملات فازی $positive_1$ ، $negative_1$ ، $positive_2$ ، $negative_2$ ، $positive_u$ ، $negative_u$ متناظر با مرکز گوسین s_{x_1} ، $-s_{x_1}$ ، s_{x_2} ، $-s_{x_2}$ ، s_u و $-s_u$ استفاده می‌کنیم . سپس قاعده استنتاج، فازی‌کننده منفرد و نافازی‌ساز مرکز ثقل را اعمال می‌کنیم و روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= c_1 \tanh(s_{x_1} x_1(k)) + c_2 \tanh(s_{x_2} x_2(k)), \\ x_2(k+1) &= d_1 \tanh(s_{x_2} x_2(k)) + d_2 \tanh(s_u u(k)). \end{aligned} \quad (37.3)$$

سرانجام با خطی سازی u در معادلات (۳۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= c_1 \tanh(s_{x_1} x_1(k)) + c_2 \tanh(s_{x_2} x_2(k)), \\ x_2(k+1) &= d_1 \tanh(s_{x_1} x_1(k)) + d_2 s_u u(k). \end{aligned} \quad (38.3)$$

در مرحله بعد باید پارامترهای مدل را محاسبه نماییم که بصورت زیر انجام می‌شود. سیستم (۳۸.۳) را در نظر می‌گیریم که آن را برای سیستم پاندول معکوس (۳۶.۳) بدست آوردیم. فرض می‌کنیم $s_{x_1} = s_{x_2} = s_u = 1$ را برای بدست آوردن برآوردگرهای خطی برای پارامترهای $\hat{c}_1(k)$, $\hat{c}_2(k)$, $\hat{d}_1(k)$ و $\hat{d}_2(k)$ اعمال می‌کنیم. در این شبیه‌سازی فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\alpha(\circ) = \circ/3491 (\approx 2^\circ), \alpha'(\circ) = \circ, \lambda_1 = \circ/95, F(\circ) = 1000I.$$

$$u(k) = -25\alpha(k) - \alpha'(k) + \circ/2 \cos((2\pi/5^\circ)k),$$

و شرایط ابتدایی بشرح ذیل باشند:

$$x_1(\circ) = x_2(\circ) = \hat{c}_1(k) = \hat{c}_2(k) = \hat{d}_1(k) = \hat{d}_2(k) = \circ.$$

شکل (۲.۳) رفتاری از $\alpha(k)$ در رابطه (۳۶.۳) و $x_1(k)$ در سیستم هایپربولیک (۳۸.۳) را نشان می‌دهد. ممکن است دیده شود با افزایش k رفتار دینامیکی مدل و سیستم اصلی خیلی شبیه هم هستند. دقت شود تفاوت بین $x_1(k)$ و $\alpha(k)$ به $\circ/274 -$ همگرا می‌باشد، و به صفر همگرا نیست زیرا خطای موجود در طول انجام فرایند و این واقعیت که سیستم اصلی (۳۶.۳) ساختار بسیار پیچیده‌ای دارد که در مدل (۳۸.۳) نشان داده شده است.

همچنین شکل‌های (۳.۳) و (۴.۳) رفتار پارامترهای برآوردگرهای $\hat{c}_1(k)$, $\hat{c}_2(k)$, $\hat{d}_1(k)$ و $\hat{d}_2(k)$ را که تابعی از k می‌باشند را رسم کرده است و طبق شکل با افزایش k پارامترهای برآوردگر به مقادیر زیر همگرا می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(k) &\rightarrow \bar{c}_1 = 1 \\ \hat{c}_2(k) &\rightarrow \bar{c}_2 = \circ/01 \\ \hat{d}_1(k) &\rightarrow \bar{d}_1 = 1/0002 \\ \hat{d}_2(k) &\rightarrow \bar{d}_2 = \circ/01330 \end{aligned} \quad (39.3)$$

سرانجام برای بدست آوردن کنترل گر پایدارکننده مدل هایپربولیک (۳۸.۳) رادر نظر می‌گیریم حال برای سیستم پاندول معکوس

$$x(k+1) = A \tanh(x(k)) + Bu(k). \quad (40.3)$$

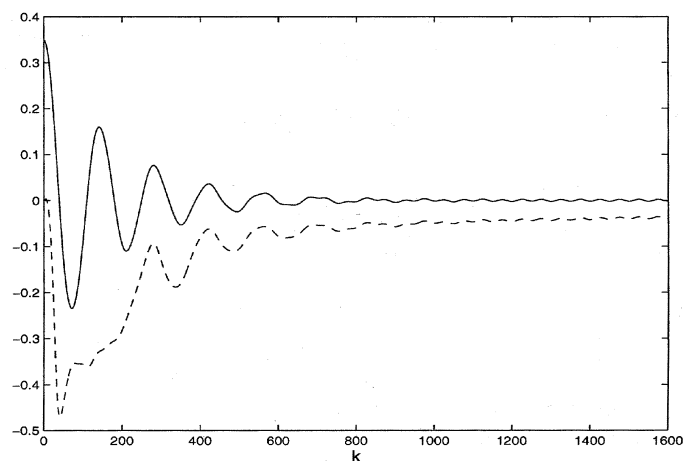
با استفاده از پارامترهای بدست آمده از حل الگوریتم (RLS) (۳۹.۳) بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \circ/01 \\ \circ & 1/0002 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ/01333 \end{pmatrix}.$$

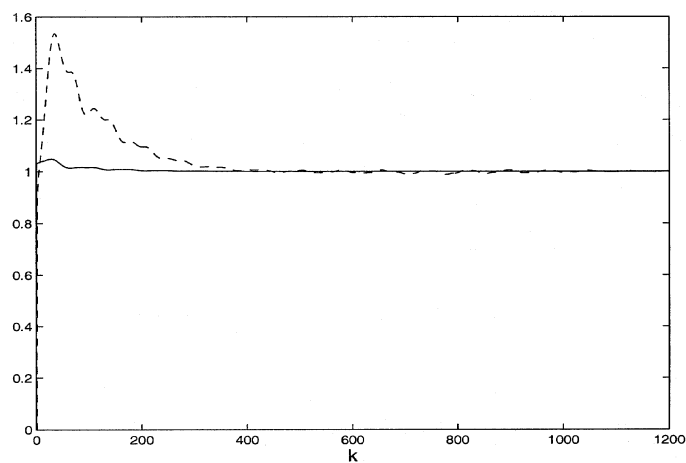
حال با اعمال کنترل گر:

$$u(k) = G \tanh(x(k)), \quad G = -(15, 15) \quad (41.3)$$

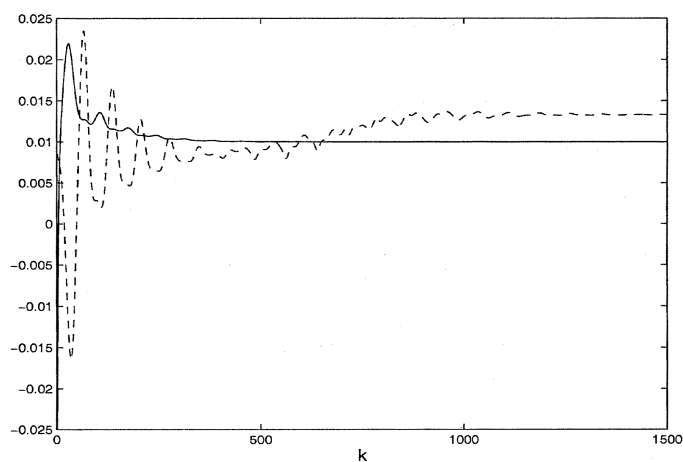
وماتریس $P = \begin{pmatrix} 1 & \circ/01 \\ \circ & 1/0002 \end{pmatrix}$ می‌توان تایید کرد که مقادیر فوق در رابطه (۳۳.۳) صادق است. بنابراین کنترل گر (۴۱.۳) سیستم هایپربولیک را پایدار می‌کند.



شکل ۲.۳: رفتاری از $\alpha(k)$ در رابطه (۳۶.۳) (خط ممتد) و $x_1(k)$ در سیستم هایپربولیک (خط نقطه چین) (۳۸.۳)



شکل ۳.۳: رفتار پارامترهای برآوردگرهای $\hat{c}_1(k)$ (خط ممتد) و $\hat{d}_1(k)$ (خط نقطه چین)



شکل ۴.۳: رفتار پارامترهای برآوردگرهای $\hat{c}_2(k)$ (خط ممتد) و $\hat{d}_2(k)$ (خط نقطه چین)

می‌دانیم u کنترل گر فازی است بنابراین با چهار قاعده زیر معادل است:

If $x_1(k)$ is *positive* $_{x_1(k)}$ and $x_2(k)$ is *positive* $_{x_2(k)}$,

Then $u(k) = -3^\circ$,

If $x_1(k)$ is *positive* $_{x_1(k)}$ and $x_2(k)$ is *negative* $_{x_2(k)}$,

Then $u(k) = 0^\circ$,

If $x_1(k)$ is *negative* $_{x_1(k)}$ and $x_2(k)$ is *positive* $_{x_2(k)}$,

Then $u(k) = 0^\circ$,

If $x_1(k)$ is *negative* $_{x_1(k)}$ and $x_2(k)$ is *negative* $_{x_2(k)}$,

Then $u(k) = 3^\circ$.

که تابع عضویت مثبت و منفی به ازای هر $i = 1, 2$ بصورت زیر تعریف شده است (لم (۱.۴.۳) را ببینید):

$$\mu_{pos_{z_i(k)}}(y) = e^{\frac{-1}{\tau}(z-1)^2}, \quad \mu_{neg_{z_i(k)}}(y) = e^{\frac{-1}{\tau}(z+1)^2},$$

ملاحظه ۳.۷.۳. در اولین قاعده اگر آنگاه فازی، اگر زاویه پاندول معکوس و سرعت زاویه‌ای هر دو مثبت باشند آنگاه کنترل منفی می‌باشد ولی در دومین قاعده فازی که زاویه پاندول معکوس مثبت و سرعت زاویه‌ای منفی است پاندول معکوس به سمت مورد نظر خود حرکت می‌کند بنابراین کنترلی مورد نیاز نیست.

فصل ۴

مدل‌های هاپربولیک نافازی برای سیستم‌های زمانی پیوسته

۱.۴ مقدمه

طراحی کنترل پایدار کننده برای سیستم‌های غیر خطی به طور کلی کاری پیچیده است و استفاده از کنترل عملکرد لیاپانوف یکی از معروف‌ترین روش‌ها، برای بررسی پایداری این سیستم‌ها می‌باشد [۱۴، ۳۳، ۳۶].

توابع کنترلی لیاپانوف برای طراحی کنترل پایدارکننده کافی است. توابع کنترل لیاپانوف برای بعضی از سیستم‌های کنترل غیرخطی نظیر کنترل آفین و سیستم‌های خطی بازخورد می‌توانند به کنترل پایدار کننده منجر شوند.

توابع کنترل مقدار لیاپانوف ^۱ (CVL) یک روش برای کاهش پیچیدگی ^۲ سیستم‌های کنترلی هستند. در واقع وجود توابع CVL با پایداری مجانی معادل است [۲۸، ۳۳].

محققان عموماً در بحث تجزیه و تحلیل پایداری، یک سیستم دینامیکی خاص را در نظر می‌گیرند و با استفاده از تکنیک خاص، یک کنترل پایدارکننده را طراحی می‌کنند، [۱۷، ۱۹، ۳۱]. مفهوم سیستم‌های کنترل غیرخطی پایدارکننده و نتایج آن در کتاب‌های ذکر شده آمده است [۲۷، ۲۲، ۲۹، ۴۴].

^۱Control Value Lyapunov

^۲Complexity

یکی از مهمترین مسائل در نظریه کنترل غیرخطی، مفهوم پایداری مجانبی^۳ است که در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. کنترل‌های بازخورد هموار برای سیستم‌های غیرخطی توسط برخی از محققان مانند [۷، ۲۰، ۳۴]. استفاده شده است. با این حال، برخی از سیستم‌های مکانیکی نمی‌توانند با استفاده از روش کنترل بازخورد هموار، حتی محلی، پایدار باشند. برای غلبه بر این مشکل، تکنیک‌های کنترل بازخورد^۴ پیوسته ارائه شده است [۱۵، ۲۴، ۱۶].

کوبین و لین یک کلاس از سیستم‌های غیر خطی مرتبه بالا را بر اساس کنترل بازخورد پیوسته مورد بررسی قرار داده‌اند [۳۷].

یکی دیگر از روش‌های طراحی کنترل پایدارکننده، کنترل پیش‌بینی می‌باشد که همچنین به عنوان افق نزولی یا کنترل افقی حرکت نامیده می‌شود. در این روش، کنترل بازخورد با حل یک توالی از مسائل کنترل بهینه به دست می‌آید. در سال‌های اخیر، کنترل فازی برای سیستم‌های غیرخطی پیچیده مورد استفاده قرار گرفته است که دارای برخی از ویژگی‌ها و ضعف‌ها است. سه کلاس از این روش‌ها گزارش شده است [۸، ۴۵، ۴۷]. به طور کلی، سیستم‌های فازی به درستی رفتار سیستم غیر خطی اصلی را تشخیص نمی‌دهند و طراحی کنترل پایدارکننده به راحتی امکان‌پذیر نیست. علاوه بر این ممکن است نیاز به کران بالا برای دقت بیشتر باشد که پیدا کردن آن ممکن است دشوار یا غیر ممکن باشد. ژانگ و همکارانش [۴۸، ۵۱، ۴۹] به منظور دستیابی به سیستم هایپربولیک، قاعده اگر آنگاه فازی ارائه کردند که یک تقریب عمومی^۵ برای سیستم اصلی می‌باشد.

در این فصل، سیستم‌های هایپربولیک را بدون استفاده از مفاهیم فازی به دست می‌آوریم. ابتدا فضای توابع هایپربولیک^۶ (HFs) را تعریف می‌کنیم و سپس این فضا را برای تبدیل سیستم‌های کنترل به شکل هایپربولیک استفاده می‌کنیم. همچنین کنترل پایدارکننده برای سیستم هایپربولیک را به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که می‌تواند سیستم کنترل اصلی را پایدار کند.

۲.۴ فضای توابع هایپربولیک

در این بخش ما فضای توابع هایپربولیک HFs را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در فضای توابع پیوسته چگال است. بنابراین با توجه به فضای HFs ما می‌توانیم تقریب یکنواختی برای توابع پیوسته غیرخطی با هر درجه دقتی بدست آوریم، که آن فضای HFs تقریبی عمومی است. برای هر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ متغیرهای تعمیم یافته را طبق زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \bar{x}_{\alpha_i+k_i} = x_i - d_{\alpha_i+k_i}, \\ k_i = 1, 2, \dots, w_i; i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1.4)$$

^۳Asymptotic Stability

^۴Feedback

^۵Universal Approximation

^۶Space of Hyperbunker Functions

که $\alpha_i = \sum_{j=0}^{i-1} w_j$, $w_0 = 0$, $m = \sum_{i=1}^n w_i$ برای هر $j = 1, 2, \dots, m$ ثابت هستند. اکنون فضای HF_s را طبق زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(\Omega) = \{f_m(x, a, b, k) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i e^{k_i \bar{x}_i} + b_i e^{-k_i \bar{x}_i}}{e^{k_i \bar{x}_i} + e^{-k_i \bar{x}_i}} : a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{R}, x \in \Omega, m \geq n\}, \quad (2.4)$$

که $\bar{x}$ طبق (۱.۴) تعریف می‌شود. حال فرض می‌کنیم:

$$p_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad q_i = \frac{a_i - b_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

با توجه به (۳.۴) فضای HF_s (۲.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H(\Omega) = \{f_m(x, p, q, k) = p + \sum_{i=1}^m q_i \tanh(k_i \bar{x}_i) : p \in \mathbb{R}, q_i \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{R}^m, x \in \Omega, m \geq n\}, \quad (4.4)$$

که

$$p = \sum_{i=1}^m p_i, \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_m), \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$$

و

$$\tanh(k\bar{x}) = (\tanh(k_1 \bar{x}_1), \tanh(k_2 \bar{x}_2), \dots, \tanh(k_m \bar{x}_m))^T. \quad (5.4)$$

ما نشان خواهیم داد: $H(\Omega)$ در فضای توابع پیوسته حقیقی چگال^۷ خواهد بود. $C(\Omega)$ ، که $\Omega \in \mathbb{R}^n$ یک مجموعه فشرده^۸ است.

تعریف ۱.۲.۴. فرض می‌کنیم $Z(\Omega)$ زیرفضایی از $C(\Omega)$ است. ما می‌گوییم که $Z(\Omega)$ نقطه مجزا^۹ روی Ω ، وقتی برای هر $x, y \in \Omega, x \neq y$ وجود داشته باشد $f(\cdot) \in Z(\Omega)$ بطوریکه $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۲.۲.۴. فرض می‌کنیم $Z(\Omega)$ زیرفضایی از $C(\Omega)$ باشد. مجموعه ای از توابع $Z(\Omega)$ یک جبر^{۱۰} $Z(\Omega)$ نامیده می‌شود اگر نسبت به جمع، ضرب و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۳.۲.۴. فرض می‌کنیم $Z(\Omega)$ زیرفضایی از $C(\Omega)$ باشد. ما می‌گوییم $Z(\Omega)$ میل نمی‌کند به نقطه‌ای در (Ω) اگر برای هر $x \in \Omega$ وجود داشته باشد $f(\cdot) \in Z(\Omega)$ بطوریکه $f(x) \neq 0$.

لم ۱.۲.۴. [۴۲] (قضیه استون و ایراشتراس^{۱۱}) . فرض می‌کنیم $Z(\Omega)$ زیرفضایی از $C(\Omega)$ باشد. که Ω یک مجموعه فشرده است. اگر Z یک جبر باشد و نقطه‌ای مجزا روی Ω و $Z(\Omega)$ به هیچ نقطه‌ای در Ω میل نکند، آنگاه بستار یکنواختی^{۱۲} از $Z(\Omega)$ شامل همه توابع پیوسته حقیقی روی Ω است، یعنی $Z(\Omega)$ در $C(\Omega)$ چگال است.

^۷Dense

^۸Compact

^۹Distinct point

^{۱۰}Algebra

^{۱۱}Stone-Weierstrass Theorem

^{۱۲}Uniformity Closure

قضیه ۱.۲.۴. فرض می‌کنیم برای هر تابع پیوسته $g(\cdot)$ روی مجموعه فشرده $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ داده شده باشد. و مقدار دلخواه $\epsilon \geq 0$ ، وجود دارد $f_m(\cdot, a, b, k) \in H(\Omega)$ بطوریکه

$$\sup_{x \in \Omega} |g(x) - f_m(x, a, b, k)| < \epsilon. \quad (۶.۴)$$

برهان. با توجه به لم (۱.۲.۴) کافی است نشان دهیم که $H(\Omega)$ یک جبر است و همچنین نقطه‌ای مجزا روی Ω می‌باشد و سرانجام به هیچ نقطه‌ای روی Ω میل نمی‌کند. ابتدا ثابت می‌کنیم $H(\Omega)$ یک جبر است. فرض می‌کنیم که

$$f_{m_1}(\cdot, a, b, k) \in H(\Omega), \quad f_{m_2}(\cdot, \hat{a}, \hat{b}, \hat{k}) \in H(\Omega).$$

می‌توانیم آنها را بصورت زیر بنویسیم:

$$f_{m_1}(x, a, b, k) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \left(\frac{a_{i_1} e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} + b_{i_1} e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}}}{e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} + e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}}} \right), \quad (۷.۴)$$

$$f_{m_2}(x, \hat{a}, \hat{b}, \hat{k}) = \sum_{i_2=1}^{m_2} \left(\frac{\hat{a}_{i_2} e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + \hat{b}_{i_2} e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}}}{e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}}} \right). \quad (۸.۴)$$

لذا داریم:

$$f_{m_1}(x, a, b, k) + f_{m_2}(x, \hat{a}, \hat{b}, \hat{k}) = \sum_{z=1}^{m_1+m_2} \left(\frac{c_z e^{k'_z \bar{x}_z} + c'_z e^{-k'_z \bar{x}_z}}{e^{k'_z \bar{x}_z} + e^{-k'_z \bar{x}_z}} \right), \quad (۹.۴)$$

که $k'_z = (k_1, \dots, k_{m_1}, \hat{k}_1, \dots, \hat{k}_{m_2})$ و $c' = (b_1, \dots, b_{m_1}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{m_2})$ ، $c = (a_1, \dots, a_{m_1}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{m_2})$ بنابراین برای تابعی که با رابطه (۹.۴) تعریف می‌شود نشان دادیم: $f_{m_1} + f_{m_2} \in H(\Omega)$. بطور مشابه می‌توانیم بدست آوریم:

$$\begin{aligned} f_{m_1}(x, a, b, k) \times f_{m_2}(x, \hat{a}, \hat{b}, \hat{k}) &= \\ \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} &\left(\frac{(a_{i_1}^* + \hat{a}_{i_2}^*) e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + (a_{i_1}^* + \hat{b}_{i_2}^*) e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}}}{(e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} + e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}})(e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}})} \right) \\ + \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} &\left(\frac{(b_{i_1}^* + \hat{a}_{i_2}^*) e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + (b_{i_1}^* + \hat{b}_{i_2}^*) e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}}}{(e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} + e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}})(e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}})} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \left(\frac{a_{i_1}^* e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} + b_{i_1}^* e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}}}{e^{k_{i_1} \bar{x}_{i_1}} + e^{-k_{i_1} \bar{x}_{i_1}}} + \frac{\hat{a}_{i_2}^* e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + \hat{b}_{i_2}^* e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}}}{e^{\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}} + e^{-\hat{k}_{i_2} \bar{x}_{i_2}}} \right) \\ &= \sum_{z=1}^{m_1+m_2} \left(\frac{c_z e^{k_z \bar{x}_z} + c'_z e^{-k_z \bar{x}_z}}{e^{k_z \bar{x}_z} + e^{-k_z \bar{x}_z}} \right), \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

که $\hat{a}_i^*$ و $a_i^*, b_i^*, \hat{b}_i^*$ در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} a_{i_1}^* + \hat{a}_{i_2}^* = a_{i_1} \hat{a}_{i_2}, \\ a_{i_1}^* + \hat{b}_{i_2}^* = a_{i_1} \hat{b}_{i_2}, \\ b_{i_1}^* + \hat{a}_{i_2}^* = b_{i_1} \hat{a}_{i_2}, \\ b_{i_1}^* + \hat{b}_{i_2}^* = b_{i_1} \hat{b}_{i_2}, \end{cases} \quad (۱۱.۴)$$

که

$k_z = (k_1, \dots, k_{m_1}, k'_1, \dots, k'_{m_1})$ و $c' = (b_1^*, \dots, b_{m_1}^*, \hat{b}_1^*, \dots, \hat{b}_{m_1}^*)$ ، $c = (a_1^*, \dots, a_{m_1}^*, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_{m_1}^*)$ بنابراین ثابت کردیم که $f_1 \times f_2 \in H(\Omega)$ می باشد. سرانجام برای هر ثابت $c \in \mathbb{R}$ داریم:

$$cf(x) = c \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i e^{k_i \bar{x}_i} + b_i e^{-k_i \bar{x}_i}}{e^{k_i \bar{x}_i} + e^{-k_i \bar{x}_i}} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i^* e^{k_i \bar{x}_i} + b_i^* e^{-k_i \bar{x}_i}}{e^{k_i \bar{x}_i} + e^{-k_i \bar{x}_i}} \right). \quad (12.4)$$

که $a_i^* = ca_i$ و $b_i^* = cb_i$ برای $(i = 1, 2, \dots, m)$ بنابراین، $H(\Omega)$ یک جبر است.

هم اکنون نشان می دهیم که $H(\Omega)$ نقطه ای مجزا روی Ω است.

در نظر می گیریم $x^{(o)} \in \Omega$ و $y^{(o)} \in \Omega$ با $x^{(o)} \neq y^{(o)}$ که $x^{(o)} = (x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)})^T$ و $y^{(o)} = (y_1^{(o)}, y_2^{(o)}, \dots, y_n^{(o)})^T$. سپس وجود دارد اندیس l بطوریکه $x_l^{(o)} \neq y_l^{(o)}$. بدون این که به کلیت مساله خللی وارد شود، فرض می کنیم $x_l^{(o)} > y_l^{(o)}$. تعریف می کنیم $m = n$ بنابراین برای هر $x \in \Omega$ ، متغیر متناظر با رابطه (۱۴.۴)، $\bar{x} = x$ می باشد. برای اثبات دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت اول) $x_l^{(o)} \neq -y_l^{(o)}$

تعریف می کنیم

$$k_i = \begin{cases} x_l^{(o)} - y_l^{(o)}, & i = l \\ 1, & i \neq l, \end{cases} \quad (13.4)$$

و

$$\begin{cases} a_i = b_i = 0, & i = 1, 2, \dots, n, i \neq l \\ a_l = e^{-k_l x_l}, b_l = 1. \end{cases}$$

با توجه به رابطه (۲.۴) تابع $f(\cdot) \in H(\Omega)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i e^{k_i \bar{x}_i} + b_i e^{-k_i \bar{x}_i}}{e^{k_i \bar{x}_i} + e^{-k_i \bar{x}_i}} \right) = \frac{1 + e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l}}{e^{(x^{(o)} - y^{(o)})x_l} + e^{-(x^{(o)} - y^{(o)})x_l}}, \quad x \in \Omega. \quad (14.4)$$

بنابراین

$$f(x^{(o)}) - f(y^{(o)}) = \frac{e^{(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}} + e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}} - e^{(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)}} - e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)}}}{(e^{(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)}} + e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)}})(e^{(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}} + e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}})}. \quad (15.4)$$

ما نشان دادیم که $f(x^{(o)}) \neq f(y^{(o)})$. فرض می کنیم که $f(x^{(o)}) = f(y^{(o)})$ بنابراین با توجه به رابطه (۱۵.۴)، داریم:

$$e^{(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)}} + e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)}} = e^{(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}} + e^{-(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}}.$$

لذا

$$\cosh(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})x_l^{(o)} = \cosh(x_l^{(o)} - y_l^{(o)})y_l^{(o)}. \quad (16.4)$$

زیرا $x_l^{(o)} > y_l^{(o)}$ و $x_l^{(o)} \neq -y_l^{(o)}$ ، با توجه به (۱۶.۴) غیر ممکن است، لذا داریم $f(x^{(o)}) \neq f(y^{(o)})$.

$$x_l^{(\circ)} = -y_l^{(\circ)} \text{ (حالت دوم)}$$

انتخاب می‌کنیم $(i = 1, 2, \dots, n)$ و از رابطه (۱۳.۴)، می‌توانیم a_i, b_i بصورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} a_i = b_i = \circ, & i = 1, 2, \dots, n, i \neq l \\ a_l = \circ, b_l = 1, \end{cases}$$

لذا از رابطه (۲.۴)، $f(\cdot) \in H(\Omega)$ را بصورت زیر می‌سازیم:

$$f(x) = \frac{e^{-(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})x_l}}{e^{(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})x_l} + e^{-(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})x_l}}, \quad x \in \Omega. \quad (۱۷.۴)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x^{(\circ)}) - f(y^{(\circ)}) &= \frac{e^{-(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})x_l^{(\circ)}}}{e^{(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})x_l^{(\circ)}} + e^{-(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})x_l^{(\circ)}}} - \frac{e^{-(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})y_l^{(\circ)}}}{e^{(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})y_l^{(\circ)}} + e^{-(x_l^{(\circ)} - y_l^{(\circ)})y_l^{(\circ)}}}, \\ &= \frac{e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2}}{e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2} + e^{-\gamma(x_l^{(\circ)})^2}} - \frac{e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2}}{e^{-\gamma(x_l^{(\circ)})^2} + e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2}}, \\ &= \frac{e^{-\gamma(x_l^{(\circ)})^2}}{e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2} + e^{-\gamma(x_l^{(\circ)})^2}} - \frac{e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2}}{e^{\gamma(x_l^{(\circ)})^2} + e^{-\gamma(x_l^{(\circ)})^2}} = -\tanh(\gamma(x_l^{(\circ)})^2). \end{aligned} \quad (۱۸.۴)$$

زیرا $x_l^{(\circ)} > y_l^{(\circ)}$ و $x_l^{(\circ)} = -y_l^{(\circ)}$ ، بنابراین $x_l^{(\circ)} \neq \circ$ لذا $\tanh(\gamma(x_l^{(\circ)})^2) \neq \circ$ در نتیجه $f(x^{(\circ)}) \neq f(y^{(\circ)})$.

با توجه به نتایج حالت‌های اول و دوم می‌توانیم بگوییم $H(\Omega)$ نقطه‌ای مجزا روی می‌باشد. سرانجام اثبات می‌کنیم که $H(\Omega)$ در هیچ نقطه‌ای به Ω میل نمی‌کند^{۱۳}. فرض می‌کنیم $f \in H(\Omega)$ که $a_i = b_i = k_i = 1$ و $m = n$ یعنی ما داریم:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i e^{k_i \bar{x}_i} + b_i e^{-k_i \bar{x}_i}}{e^{k_i \bar{x}_i} + e^{-k_i \bar{x}_i}} = m \neq \circ, \quad x \in \Omega. \quad (۱۹.۴)$$

از طرف دیگر بواسطه رابطه‌های (۳.۲) و (۴.۲)، $H(\Omega)$ زیر فضایی از Ω است. بنابراین اثبات با توجه به لم (۱.۲.۴) کامل گردید. $\square$

ملاحظه ۱.۲.۴. با توجه به رابطه (۲.۴)، اگر فرض کنیم $b_i = -a_i$ و $d_j = \circ$ برای $i, j = 1, 2, \dots, m$ ، فضای $H(\Omega)$ را بصورت فضایی از توابع می‌توان نوشت:

$$\bar{H}(\Omega) = \{f_n(x, a, k) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{e^{k_i x_i} - e^{-k_i x_i}}{e^{k_i x_i} + e^{-k_i x_i}} \right) : a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (۲۰.۴)$$

همچنین از رابطه (۴.۴) فضایی از HF_s را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\bar{H}(\Omega) = \{f_n(x, q, k) = q \tanh(kx) : q \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (۲۱.۴)$$

^{۱۳} Vanishes

که $q = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ دقت شود در این قسمت $m = n$

ملاحظه ۲.۲.۴. ژانگ و همکارانش^{۱۴} مدل فضای هایپربولیک را تعریف کردند و بر اساس قواعد اگر آنگاه فازی کنترل پایدارکننده برای آن طراحی نمودند، اما ما نشان دادیم که مدل هایپربولیک بدون قواعد فازی می‌تواند بکار گرفته شود.

۳.۴ شکل هایپربولیک سیستم‌های کنترل غیرخطی

سیستم کنترل غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t)), t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (22.4)$$

که $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_p(\cdot)) \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m, f(\cdot, \cdot) = 0$ و $f_i(\cdot, \cdot)$ ، برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، توابعی پیوسته هستند. با توجه به قضیه (۵.۴)، می‌توانیم سمت راست رابطه (۲۲.۴) را بصورت زیر تقریب بزنیم:

$$f_i(x, u) \simeq p_i + \sum_{j=1}^{m_1} q_{ij} \tanh(k_i \bar{x}_i) + \sum_{l=1}^{m_2} q_{i,l+m_1} \tanh(k_{l+m_1} \bar{u}_l), \quad (23.4)$$

که $k_i \geq 0, p_j \in \mathbb{R}, k_{l+m_1} \geq 0, q_{ij} \geq 0$ و پارامترهای ناشناخته هستند. بعلاوه، m_1 و m_2 باید بقدر کافی بزرگ انتخاب شود. برای مقدار کوچک، متغیر کنترل از تقریب زیر استفاده می‌کنیم: $q_{i,l+m_1} \tanh(k_{l+m_1} \bar{u}_l) \simeq q'_{i,l+m_1} \bar{u}_l$ که $q'_{i,l+m_1} = q_{i,l+m_1} k_{l+m_1}$. بنابراین سیستم زیر، رفتار سیستم اصلی (۲۲.۴) را در همسایگی صفر^{۱۵} تقریب می‌کند.

$$\dot{x}_i(t) = p_i + \sum_{j=1}^{m_1} q_{ij} \tanh(k_i \bar{x}_i) + \sum_{l=1}^{m_2} q'_{i,l+m_1} \bar{u}_l, \quad (24.4)$$

بنابراین، $\bar{x}_i$ و $\bar{u}_l$ متغیرهای تعمیم‌یافته^{۱۶} متناظر با متغیرهای کنترل^{۱۷} هستند، که با رابطه (۱.۴) تعریف شده‌اند. با توجه به (۶.۴)، سیستم هایپربولیک (۲۴.۴) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n q_{ij} \tanh(k_i x_i) + \sum_{l=1}^p q'_{il} u_l, \quad (25.4)$$

که $p = m_2$ و $n = m_1$ علاوه بر این سیستم (۲۵.۴) به شکل ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = A \tanh(kx) + Bu, \quad (26.4)$$

که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, u = (u_1, u_2, \dots, u_p)^T, k = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T, A = (q_{ij})_{n \times n}$ و $B = (q'_{il})_{n \times p}$ با رابطه (۵.۴) تعریف می‌شود.

^{۱۴}Zhang et.al

^{۱۵}Neighborhood zero

^{۱۶}Generalized variables

^{۱۷}Control variables

ملاحظه ۱.۳.۴. در بخش ۶ ما خواهیم دید که کنترل کننده طراحی شده بر اساس مدل هایپربولیک (۲۶.۴) می‌تواند سیستم کنترل غیرخطی اصلی (۲۲.۴) را با عملکرد خوب پایدار کند و می‌تواند سیستم اصلی را با هر دقتی در نزدیکی نقطه تعادل تقریب بزند. در بخش بعد، ما یک شیوه برای به دست آوردن ماتریس k و ماتریس‌های A و B برای سیستم (۲۶.۴) ارائه می‌دهیم.

۴.۴ محاسبه پارامترهای نامشخص سیستم هایپربولیک

در این بخش ما نشان می‌دهیم که پارامترهای سیستم هایپربولیک (۲۴.۴) را با حل یک برنامه NLP می‌توانیم بدست آوریم. برای تسهیل ما $m = 1$ و $n = 2$ در نظر می‌گیریم بنابراین سیستم (۲۲.۴) بشرح ذیل است:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u), \end{cases} \quad (27.4)$$

همچنین سیستم (۲۵.۴) می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = q_{11} \tanh(k_1 x_1) + q_{12} \tanh(k_2 x_2) + q'_{11} u, \\ \dot{x}_2(t) = q_{21} \tanh(k_1 x_1) + q_{22} \tanh(k_2 x_2) + q'_{21} u. \end{cases} \quad (28.4)$$

سیستم هایپربولیک (۲۸.۴) یک تقریب برای سیستم های غیر خطی (۲۷.۴) در همسایگی صفر است، یعنی نقطه تعادل سیستم (۲۷.۴). بنابراین ما مساله بهینه سازی زیر را پیشنهاد می‌کنیم برای بدست آوردن پارامترها $k_1, q'_{11}, q'_{21}, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, k_2$:

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(q_{j1} \tanh(k_1 x_1) + q_{j2} \tanh(k_2 x_2) + q'_{j1} u - f_j(x_1, x_2, u) \right)^2 dx_1 dx_2 du. \quad (29.4)$$

متغیر تصمیم مساله (۲۹.۴) $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, q'_{11}, q'_{21}, k_1$ و k_2 هستند. ما فرض می‌کنیم که x_1, x_2 و u در $\Omega = [-\delta, \delta]$ هستند. که $\delta > 0$ بقدر کافی عددی کوچک است. هم‌اکنون ما مساله (۲۹.۴) را تبدیل به مساله NLP می‌کنیم. برای این هدف ما مجموعه Ω را به $\Omega_i = [-\delta + \frac{2(i-1)\delta}{N}, -\delta + \frac{2i\delta}{N}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. تقسیم می‌کنیم که N عددی بقدر کافی بزرگ می‌باشد. برنامه بهینه‌سازی (۲۹.۴) تقریبی از مساله NLP ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{q_{ji}, q'_{jl}, k_{jl}} \sum_{j=1}^2 \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=0}^N \sum_{i_3=0}^N w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3} & (q_{j1} \tanh(k_1 x_{1,i_1}) + (q_{j2}) \tanh(k_2 x_{2,i_2}) + q'_{j1} u_{i_3} \\ & - f_j(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, u_{i_3}))^2, \end{aligned} \quad (30.4)$$

که w_{i_1}, w_{i_2} و w_{i_3} وزن‌هایی^{۱۸} از تقریب اینتگرال هستند و داریم:

$$x_{1,i_1} = -\delta + \frac{2i_1\delta}{N}, x_{2,i_2} = -\delta + \frac{2i_2\delta}{N}, u_{i_3} = -\delta + \frac{2i_3\delta}{N}, \text{ for } i = 0, 1, \dots, N.$$

^{۱۸}Weights

پس از حل مساله (۳۰.۴)، ما جواب‌های بهینه $k_1^*, q_{11}^*, q_{12}^*, q_{21}^*, q_{22}^*, q_{11}^*, q_{12}^*, k_1^*$ را بدست می‌آوریم لذا داریم: $A = \begin{bmatrix} q_{11}^* & q_{12}^* \\ q_{21}^* & q_{22}^* \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} q_{11}^* \\ q_{12}^* \end{bmatrix}$ و $k = \begin{bmatrix} k_1^* \\ k_2^* \end{bmatrix}$.

۵.۴ طراحی کنترل پایدارکننده

در این بخش ما علاقه مند به طراحی یک کنترل کننده برای سیستم هایپربولیک (۲۶.۴) بفرم زیر هستیم:

$$u = H \tanh(kx), \quad (۳۱.۴)$$

که H ماتریس ثابت نامشخص می‌باشد. این کنترل کننده دو خاصیت مهم دارد:

- (۱) به ازای همه x ها کران دار^{۱۹} می‌باشد.
- (۲) u ترکیب خطی^{۲۰} از $(\tanh(k_1 x_1), \tanh(k_2 x_2), \dots, \tanh(k_n x_n))$ می‌باشد.

با تعویض تابع کنترل (۳۱.۴) در سیستم (۲۶.۴) بدست می‌آوریم:

$$\dot{x} = (A + BH) \tanh(kx), \quad (۳۲.۴)$$

تعریف ۱.۵.۴. سیستم معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x), \\ x(\circ) = \alpha, \quad t \geq \circ. \end{cases} \quad (۳۳.۴)$$

این سیستم پایدار مجانی نامیده می‌شود اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، وضعیت سیستم (۳۳.۴) در رابطه $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \circ$ صدق کند.

قضیه ۱.۵.۴. فرض می‌کنیم $x = \circ$ نقطه تعادل سیستم (۳۳.۴) باشد و $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع دیفرانسیل پیوسته، بشرطی که:

$$\begin{cases} V(\circ) = \circ \text{ and } V(x) > \circ, \quad \forall x \neq \circ, \\ \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty, \\ \dot{V}(x) < \circ, \quad \forall x \neq \circ. \end{cases} \quad (۳۴.۴)$$

آنگاه مبدا پایدار مجانی سرتاسری می‌باشد.

هم اکنون شرطی را برای تضمین پایداری مجانی سرتاسری سیستم (۳۲.۴) ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۵.۴. سیستم (۳۲.۴) در نظر می‌گیریم. اگر وجود داشته باشد ماتریس معین قطری مثبت $P > \circ, (p \times n)$ به شرطی که

$$P(A + BH) + (A + BH)^T P + I = \circ \quad (۳۵.۴)$$

آنگاه سیستم پایدار مجانب سراسری است.

^{۱۹}Bounded

^{۲۰}Linear combination

برهان. فرض می‌کنیم $p = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ سپس تابع لیاپانوف زیر را تعریف می‌کنیم:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{k_i} \ln(\cosh(k_i x_i)).$$

با محاسبه $\dot{V}$ و استفاده از رابطه (۳۴.۴) بدست می‌آوریم:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x) = \dot{x}^T \frac{dV}{dx} = \tanh^T(kx)(A + BH)^T (\sum p_i \tanh(kx)) \quad (36.4)$$

لذا داریم:

$$\dot{V}^T(x) = \left(\frac{dV}{dx}\right)^T \dot{x} = \sum \tanh^T(kx) P(A + BH) \tanh(kx). \quad (37.4)$$

زیرا $\dot{V}(x) \in \mathbb{R}$ بنابراین $\dot{V}^T(x) = V(x)$ از این رو

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2} (\dot{V}(x) + \dot{V}^T(x)) = \tanh(kx) (P(A + BH) + (A + BH)^T P) \tanh(kx) \\ &= -\tanh^T(kx) I \tanh(kx) \\ &= -\tanh^T(kx)^2 \end{aligned} \quad (38.4)$$

بنابراین تابع لیاپانوف در رابطه (۳۴.۴) صدق می‌کند. در نتیجه سیستم (۳۲.۴) پایدار مجانی سرتاسری است.

ملاحظه ۱.۵.۴. پس از بدست آوردن A ، B و K با استفاده از تکنیک پیشنهاد شده در بخش ۴، با توجه به P و K بدست آمده، ما باید سیستم (۳۲.۴) را حل کنیم. برای غلبه بر این مشکل از تغییر متغیر^{۲۱} زیر استفاده می‌کنیم:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + x_2, \dots, \quad y_n = x_1 + \dots + x_n$$

با استفاده از این تبدیل و حل سیستم (۳۵.۴)، ما می‌توانیم یک ماتریس مثبت P بدست آوریم. برای واضح شدن یادداشت (۱.۵.۴)، یک سیستم دینامیکی مرتبه دوم^{۲۲} $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, u)$ را انتخاب می‌کنیم. این مدل می‌تواند به سیستم مرتبه اول^{۲۳} معادل زیر تبدیل شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2, u). \end{cases}$$

در مرحله بعد، ما باید مدل هایپربولیک زیر را بدست آوریم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} \tanh(x_1) + a_{12} \tanh(x_2) + b_1 u, \\ \dot{x}_2 = a_{21} \tanh(x_1) + a_{22} \tanh(x_2) + b_2 u. \end{cases}$$

با این حال در عمل ما برخی از صفرها را در ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} q'_{11} \\ q'_{21} \end{bmatrix}$ می

بینیم به این ترتیب، با حل سیستم (۳۵.۴) و با توجه به $P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$ و $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ ما $p_1 = 0$ را بدست می‌آوریم. بنابراین ماتریس p قطعی مثبت نیست. برای جلوگیری از این اتفاق می

^{۲۱} Change of the variable

^{۲۲} Second order

^{۲۳} First order

توان از تبدیل مختصات $y_1 = x_1$ و $y_2 = x_1 + x_2$ استفاده کرد. با این کار، سیستم فوق می‌تواند به سیستم زیر تبدیل شود:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - y_1, \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_1 + f(t, y_1, y_2 - y_1, u). \end{cases}$$

پس از به دست آوردن ماتریس A و B ما می‌توانیم ماتریس مثبت P را از (۳۵.۴) بدست آوریم.

۶.۴ شبه‌سازی مثال‌ها

در این بخش، روش ارائه شده برای طراحی یک کنترل پایدار کننده برای برخی از سیستم‌های کنترل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مثال‌ها، برای حل مسئله NLP متناظر (۳۰.۴) فرض می‌کنیم که:

$$\Omega = [-\circ/1, \circ/1], N = 2^\circ, w_\circ = w_N = \frac{\circ/1}{N}, w_k = \frac{\circ/2}{N}, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

ما از نرم‌افزار متلب^{۲۴} برای شبه‌سازی جواب‌ها^{۲۵} استفاده می‌کنیم. زمان لازم برای اجرای برنامه‌های مرتبط با هر یک از نمونه‌های زیر کمتر از نیم دقیقه است.

مثال ۱.۶.۴. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\circ/3 x_1(1 + x_1^2) - 3/9 x_2(1 + x_2^2) + u, \\ x_1(\circ) = \alpha_1, x_2(\circ) = \alpha_2. \end{cases} \quad (39.4)$$

با توجه به (۲.۲.۴)، ابتدا باید سیستم (۳۹.۴) را به سیستم زیر تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - y_1, \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_1 - \circ/3 y_1(1 + y_1^2) - 3/9(y_2 - y_1)(1 + (y_2 - y_1)^2) + u, \\ y_1(\circ) = \alpha_1, y_2(\circ) = \alpha_1 + \alpha_2. \end{cases} \quad (40.4)$$

که $y_1 = x_1$ و $y_2 = x_1 + x_2$. با حل مساله NLP متناظر (۳۰.۴)، ما به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} -\circ/6542 & \circ/6671 \\ 1/7009 & -1/9346 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \circ \\ 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1/5364 \\ 1/5064 \end{bmatrix},$$

لذا سیستم هاینرولیک متناظر (۲۸.۴) بفرم زیر می‌باشد:

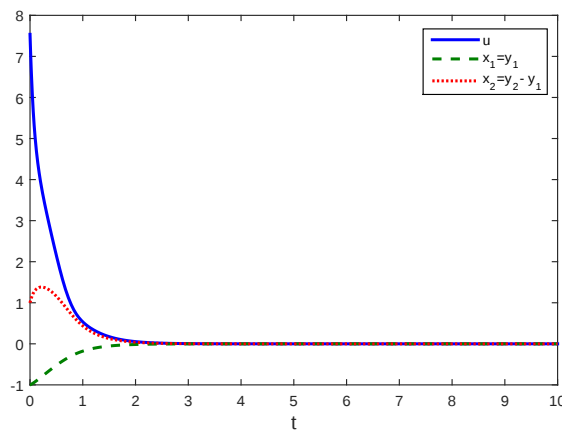
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\circ/6542 \tanh(1/5364 y_1) + \circ/6671 \tanh(1/5064 y_2), \\ \dot{y}_2 = 1/7009 \tanh(1/5364 y_1) - 1/9346 \tanh(1/5064 y_2) + u. \end{cases} \quad (41.4)$$

هم اکنون فرض می‌کنیم:

$$u = h_1 \tanh(k_1 x_1) + h_2 \tanh(k_2 x_2), P = \text{diag}(p_1^2, p_2^2) \text{ و } H = [h_1, h_2]^T.$$

^{۲۴}Matlab software

^{۲۵}Simulation results



شکل ۱.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم هایپربولیک مثال (۱.۶.۴).

با حل سیستم متناظر (۳۵.۴)، بدست می‌آوریم:

$$p_1 = 0.1742, p_2 = 0.2786, h_1 = -8.2694, h_2 = -4.5068.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} u &= -8.2694 \tanh(1/5364 y_1) - 4.5068 \tanh(1/5064 y_2) \\ &= -8.2694 \tanh(1/5364 x_1) - 4.5068 \tanh(1/5064 (x_1 + x_2)). \end{aligned}$$

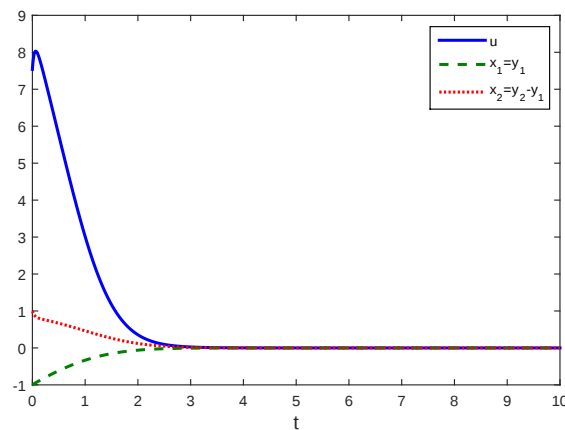
کنترل پایدارکننده $u(\cdot)$ و متغیرهای حالت $x_1(\cdot)$ و $x_2(\cdot)$ از سیستم هایپربولیک و سیستم اصلی برای $(x_1(0), x_2(0)) = (\alpha_1, \alpha_2) = (-1, 1)$ در شکل‌های (۱.۴) و (۲.۴)، نشان داده شده است. تفاوت‌هایی بین دو شکل (۱.۴) و (۲.۴) وجود دارد. در شکل (۱.۴)، حداکثر مقدار متغیر حالت $x_1(\cdot)$ در حدود $1/4$ است، در حالی که در شکل (۲.۴) حداکثر مقدار متغیر حالت $x_1(\cdot)$ دقیقاً ۱ است. در شکل (۱.۴)، بعد از حدود $2/5s$ متغیرهای حالت $x_1(\cdot)$ و $x_2(\cdot)$ به نقطه تعادل می‌رسند، در حالی که در شکل (۲.۴)، در حدود $3/5s$ طول می‌کشد. ما یادآوری می‌کنیم هدف ما طراحی یک کنترل پایدارکننده برای سیستم‌های هایپربولیک و اصلی است و نتایج در شکل (۱.۴) و (۲.۴) نشان می‌دهد که ما این هدف را به دست آورده ایم. علاوه بر این، ما باید توجه داشته باشیم که مدل هذلولی می‌تواند تقریبی برای سیستم اصلی در همسایگی از مبدا باشد.

مثال ۲.۶.۴. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -0.01x_1 - 0.1x_1^3 + (1/4387 - 0.13x_2^2)u, \\ x_1(0) = \alpha_1, x_2(0) = \alpha_2. \end{cases} \quad (42.4)$$

با توجه به (۲.۲.۴)، ابتدا باید سیستم (۴.۴) را به سیستم زیر تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - y_1, \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_1 - 0.01y_1 - 0.1y_1^3 + (1/4387 - 0.13(y_2 - y_1)^2)u, \\ y_1(0) = \alpha_1, y_2(0) = \alpha_1 + \alpha_2. \end{cases} \quad (43.4)$$



شکل ۲.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم اصلی مثال (۱.۶.۴).

از حل مساله NLP متناظر (۳۰.۴)، ما به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} -91/9269 & 2/9037 \\ -0/9798 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4377 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0/0109 \\ 0/3445 \end{bmatrix}.$$

لذا سیستم هاپربولیک متناظر (۳۲.۴) بفرم زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -91/9269 \tanh(0/0109 y_1) + 2/9037 \tanh(1/5064 y_2), \\ \dot{y}_2 = -0/9798 \tanh(0/3445 y_1) - 0 \tanh(0/3445 y_2) + u. \end{cases} \quad (44.4)$$

هم اکنون فرض می‌کنیم:

$$u = h_1 \tanh(k_1 x_1) + h_2 \tanh(k_2 x_2), P = \text{diag}(p_1^2, p_2^2) \text{ و } H = [h_1, h_2]^T.$$

با حل سیستم متناظر (۳۵.۴)، بدست می‌آوریم:

$$p_1 = 0/0738, p_2 = -0/4809, h_1 = 0/6340, h_2 = -1/5038.$$

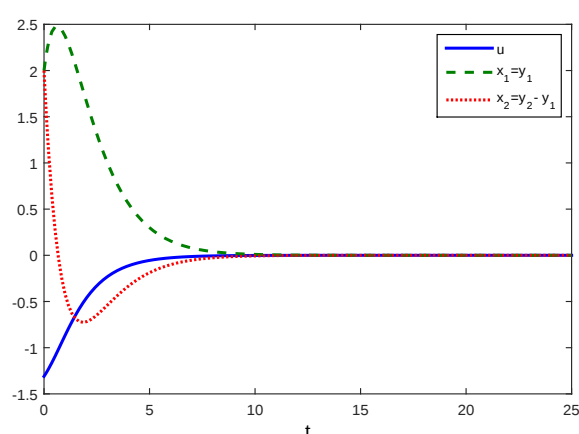
کنترل پایدارکننده $u(\cdot)$ و متغیرهای وضعیت $x_1(\cdot)$ و $x_2(\cdot)$ برای سیستم هاپربولیک (۴۴.۴) و سیستم اصلی (۴۲.۴)، بترتیب در شکل‌های (۳.۴) و (۴.۴) نشان داده شده است، که $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_2 = 2$ می‌باشد.

مثال ۳.۶.۴. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

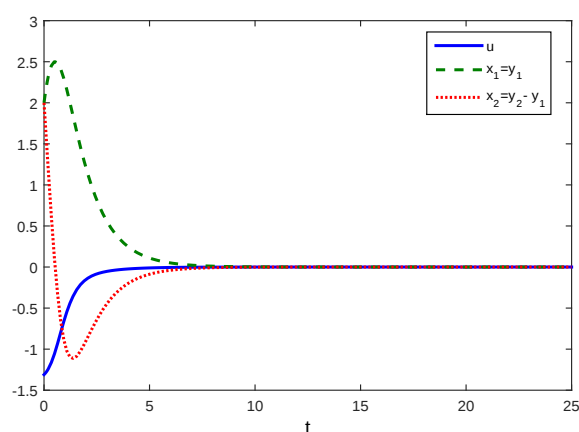
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_1 x_2 + \frac{u}{3} + 0/2(1 + x_2^2)u, \\ x_1(0) = \alpha_1, x_2(0) = \alpha_2. \end{cases} \quad (45.4)$$

توجه به (۲.۲.۴)، ابتدا باید سیستم (۴.۴) را به سیستم زیر تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - y_1, \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_1 - y_1^3 + y_1(y_2 - y_1) + \frac{u}{3} + 0/2(1 + (y_2 - y_1)^2)u, \\ \dot{y}_1(0) = \alpha, \dot{y}_2(0) = \alpha + \beta. \end{cases} \quad (46.4)$$



شکل ۳.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم هایپربولیک مثال ۲.۶.۴.



شکل ۴.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم اصلی مثال ۲.۶.۴.

از حل مساله NLP متناظر (۳۰.۴)، ما به دست می آوریم.

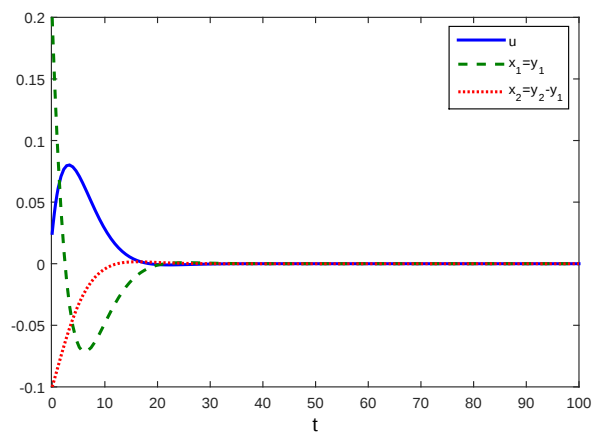
$$A = \begin{bmatrix} 0/8408 & 0/9882 \\ 0/8353 & 0/9882 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/2374 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -1/1930 \\ 1/0142 \end{bmatrix}.$$

با حل سیستم متناظر (۳۵.۴)، بدست می آوریم:

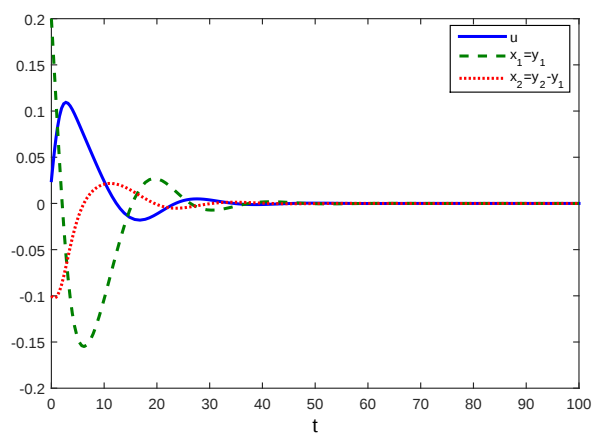
$$p_1 = -0/6516, p_2 = -0/5451, h_1 = -0/6268, h_2 = -1/2079.$$

کنترل پایدارکننده $u(\cdot)$ و متغیرهای وضعیت $x_1(\cdot)$ و $x_2(\cdot)$ برای سیستم هایپربولیک و سیستم اصلی (۴۵.۴)، بترتیب در شکل‌های (۵.۴) و (۶.۴) نشان داده شده است، که $\alpha_1 = 0/2$ و $\alpha_2 = -0/1$ می باشد.

مثال ۴.۶.۴. سیستم دینامیکی پاندول معکوس متناظر شکل (۷.۴) با معادلات زیر معرفی



شکل ۵.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم هایپربولیک مثال ۳.۶.۴.



شکل ۶.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم اصلی مثال ۳.۶.۴.

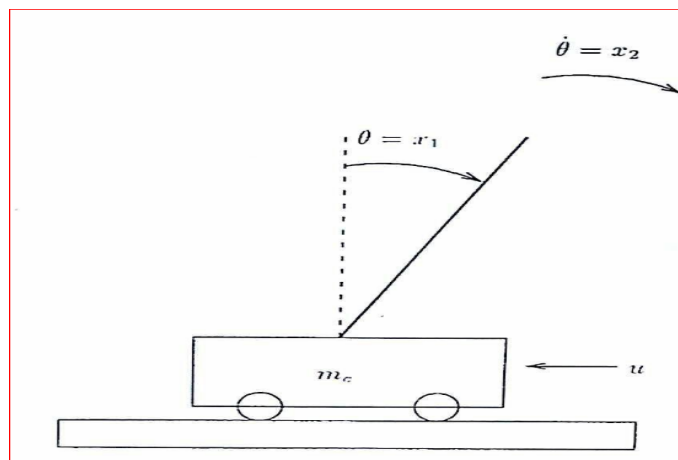
می‌شود:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = F(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta, \dot{\theta})u \\ \theta(0) = \alpha_1, \dot{\theta}(0) = \alpha_2 \end{cases} \quad (47.4)$$

که

$$F(\theta, \dot{\theta}) = \frac{g \sin \theta - \left(\frac{m l \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}{M+m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta}{M+m} \right)}, \quad G(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\left(\frac{\cos \theta}{M+m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta}{M+m} \right)}.$$

که در آن θ زاویه پاندول، $\dot{\theta}$ زاویه سرعت اولیه، $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ شتاب گرانشی جاذبه زمین، m_c جرم ارابه، m جرم میله، $2L$ طول میله و u نیروی اعمال شده (یا متغیر کنترل) به ارابه، می‌باشند.



شکل ۷.۴: سیستم پاندول معکوس

ابتدا باید تغییر متغیر $y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2$ را اعمال کنیم، سپس سیستم (۴۷.۴) را بفرم زیر تبدیل کنیم

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - y_1, \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_1 + F(y_1, y_2 - y_1) + G(y_1, y_2 - y_1)u, \\ y_1(0) = \alpha_1, y_2(0) = \alpha_1 + \alpha_2. \end{cases} \quad (48.4)$$

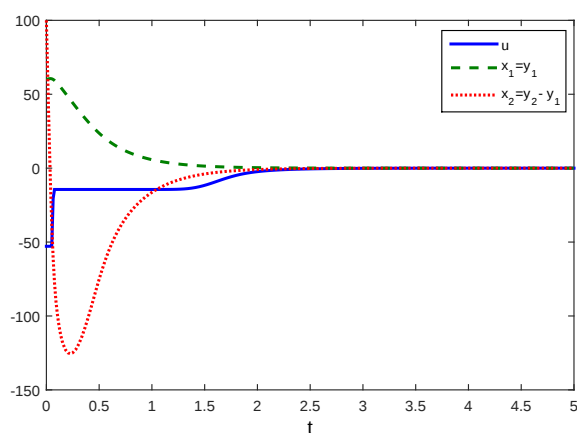
ما فرض می‌کنیم، $m_c = 1, m = 0.2$ و $l = 0.5$. ما حال سیستم متناظر (۳۰.۴)، بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} -0.9349 & 1/1841 \\ 14/4885 & 1/1843 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4252 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1/0.723 \\ 0/8458 \end{bmatrix}.$$

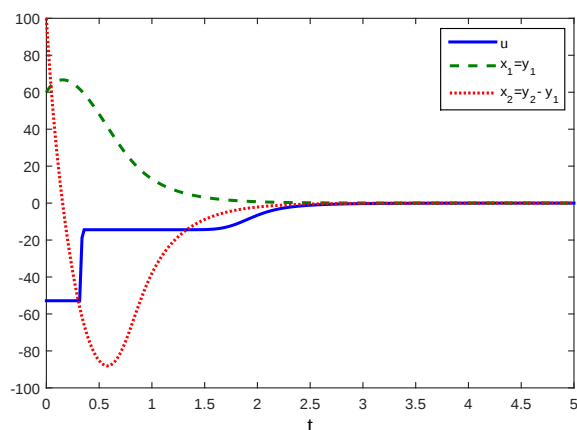
ما تعریف می‌کنیم: $P = \text{diag}(p_1^2, p_2^2), H = [h_1, h_2]^T$ و سیستم متناظر (۳۵.۴) را حل می‌کنیم بدست می‌آوریم:

$$p_1 = 0.7135, p_2 = 1/1385, h_1 = -31/2898, h_2 = -18/6460.$$

کنترل پایدارکننده $u(\cdot)$ و متغیرهای وضعیت $x_1(\cdot)$ و $x_2(\cdot)$ برای سیستم هایدربولیک (۴۸.۴) و سیستم اصلی (۴۷.۴)، بترتیب در شکل‌های (۸.۴) و (۹.۴) نشان داده شده است، که



شکل ۸.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم هایپربولیک ۴.۶.۴.



شکل ۹.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم اصلی ۴.۶.۴.

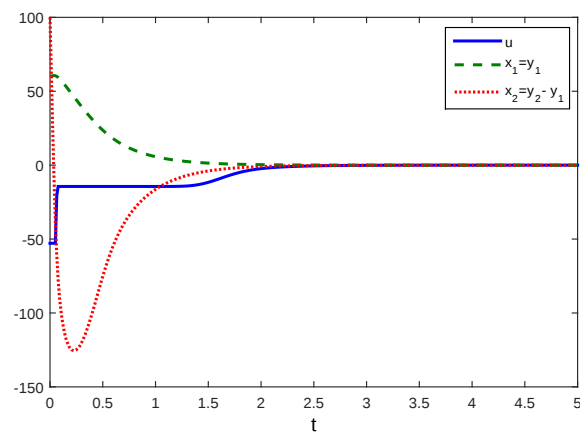
می‌کنیم: $\alpha_1 = 60^\circ$ و $\alpha_2 = 100^\circ$ می‌باشد. هم اکنون پارامترهای سیستم (۴۷.۴) را بصورت زیر عوض

$$m = 3kg, m_c = 5kg, l = 1m. \quad (۴۹.۴)$$

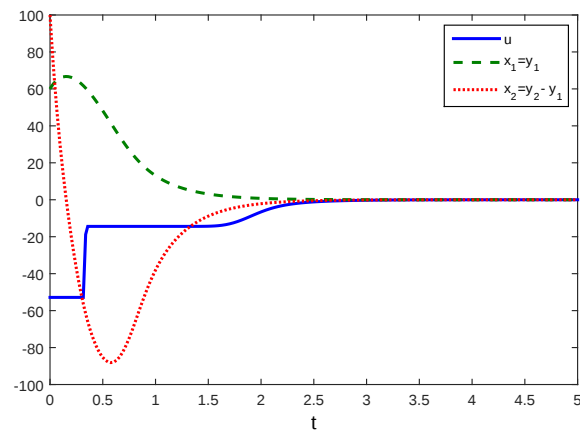
و

$$m = 7kg, m_c = 25kg, l = 75m. \quad (۵۰.۴)$$

به ترتیب شکل‌های (۱۰.۴) و (۱۱.۴) رفتار سیستم اصلی (۴۷.۴) را بعد از اعمال کنترل های طراحی شده نشان می‌دهد. ما می‌بینیم که وقتی پارامترهای سیستم تغییر می‌کند، کنترل طراحی شده هنوز هم پایدارکننده و قوی است. در حال حاضر رویکرد ارائه شده و رویکرد مدل سازی فازی (صفحه ۲۵۴ [۴۶] را ببینید) را برای شرایط اولیه به کار می‌بریم: $(x_1(0), x_2(0)) = (\alpha_1, \alpha_2) = (15^\circ, 0), (30^\circ, 0), (45^\circ, 0), (60^\circ, 0), (75^\circ, 0)$. شکل ۱۲.۴-۱۵.۴، دیده می‌شود، پس از استفاده از کنترل کننده ما، زاویه پدال $x_1(\cdot)$ برای تمام این شرایط تمایل به صفر است، در حالی که پس از استفاده از کنترل کننده فازی، تنها برای شرایط اولیه $(45^\circ, 0)$ و $(60^\circ, 0)$ همگرا می‌شود، بنابراین شکل‌های ۱۴.۴ و ۱۵.۴ نشان

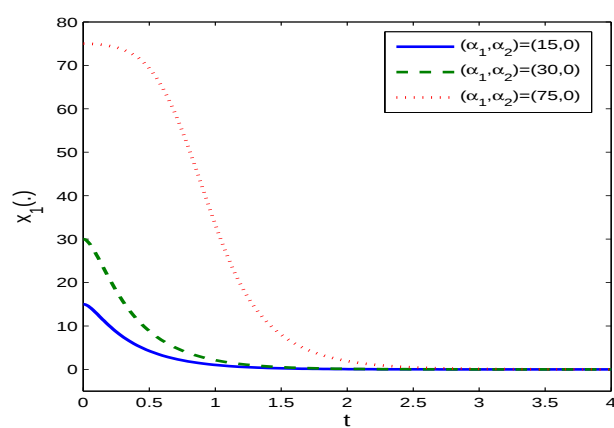


شکل ۱۰.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم اصلی ۴.۶.۴ با فرض ۴۹.۴

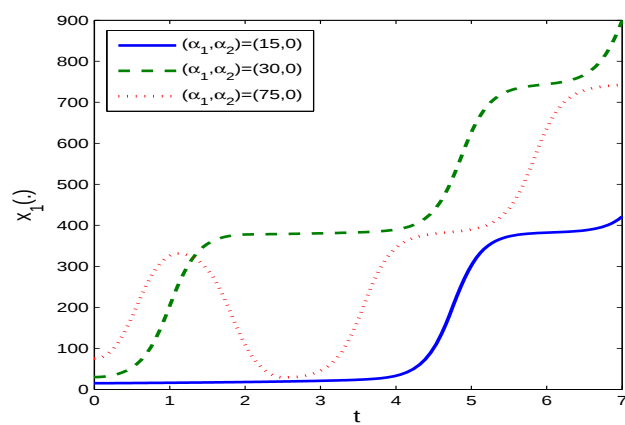


شکل ۱۱.۴: کنترل و متغیرهای وضعیت در سیستم اصلی ۴.۶.۴ با فرض ۵۰.۴

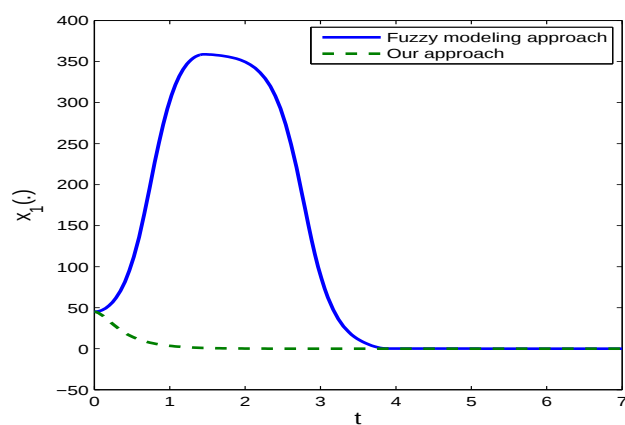
می دهد که نرخ همگرایی رویکرد ما سریعتر از کنترل کننده فازی است. این نتایج برتری کنترل پیشنهاد شده برای این مثال عملی را نشان می دهد.



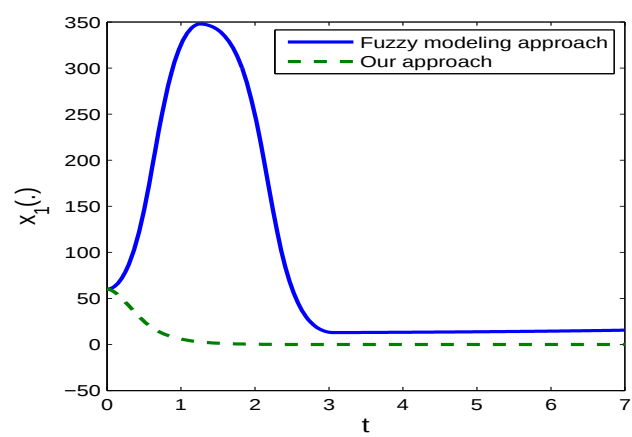
شکل ۱۲.۴: متغیر وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از اعمال کنترل پیشنهادی



شکل ۱۳.۴: متغیر وضعیت $x_1(\cdot)$ بعد از اعمال کنترل گرافازی



شکل ۱۴.۴: متغیر وضعیت $x_1(\cdot)$ برای $(x_1(0), x_2(0)) = (45^\circ, 0)$



شکل ۱۵.۴: متغیر وضعیت $x_1(\cdot)$ برای $(\phi^{\circ\circ}, \circ) = (x_1(\circ), x_2(\circ))$.

۷.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱.۷.۴ نتیجه‌گیری

بسیاری از سیستم‌های کاربردی در جهان واقعی سیستم‌هایی غیرخطی می‌باشند و طراحی کنترل برای این گونه سیستم‌های پیوسته زمانی معمولاً کاری پیچیده است. استفاده از کنترل فازی یکی از روش‌های مرسوم برای بررسی پایداری این گونه سیستم‌ها می‌باشد. وانگ و مندل یک مدل فازی را بر پایه تابع تقریب معرفی کردند که ایده اصلی آن، ساختن یک سیستم فازی است. این نوع سیستم فازی می‌تواند به صورت تابعی از فضای ورودی به فضای خروجی نشان داده شود. یک مدل فازی دیگر توسط تاناکا و سوگینو توصیف شده است. ایده اصلی آن ساختن یک مجموعه از معادلات خطی است که نشان دهنده قواعد موضعی، روی یک دامنه موضعی است. در این روش مجموعه معادلات خطی موضعی با توجه به تابع عضویت به فرم تابع تقریب سراسری بیان می‌شود. همچنین یک مدل دینامیکی فازی توسط کائو و همکارانش ارائه شده است. مدل‌های فازی فوق در بحث کنترل و پایداری سیستم‌های غیرخطی اغلب با شکست مواجه می‌شوند و یا رفتار سیستم اصلی را نمی‌توانند درست توصیف کنند و تقریب مناسبی از سیستم اصلی ارائه دهند. در این مقاله یک مدل فضای وضعیت غیرخطی ارائه می‌شود که آن را مدل هایپربولیک فازی می‌نامیم این مدل برای طراحی کنترل و پایداری سیستم‌های غیرخطی مناسب است. در ادامه ما یک رویکرد جدید برای مدل‌سازی فازی و کنترل سیستم‌های گسسته زمان، بر پایه مدل فضای وضعیت ارائه دادیم که به آن مدل هایپربولیک می‌گوییم. در حالتی که $S = I$ مدل هایپربولیک حالت خاصی از سیستم‌های تکرار اسکالر غیرخطی ($SRSN$) است. بنابراین سیستم‌های حقیقی را به مدل‌های $SRSN$ که از اطلاعات زبانی استفاده می‌شود توسعه می‌دهیم. این مدل جدید ترکیبی از قضیه سیستم فازی و مدل کلاسیک است، از طرف دیگر مدل با مجموعه قواعد فازی معادل است لذا از اطلاعات زبانی سیستم براحتی بدست می‌آید. همچنین از نظریه کلاسیک برای طراحی کنترل‌کننده‌هایی برای مدل هایپربولیک استفاده می‌شود. در نتیجه کنترل‌کننده‌ها نه تنها خواصی مانند پایداری مجانی و مقاوم‌پذیری را تضمین می‌کند، بلکه خودشان کنترل‌گر فازی نیز هستند. در ادامه ما نشان دادیم که فضای توابع هایپربولیک (HFs) می‌تواند برای طراحی یک کنترل‌کننده پایداری برای سیستم‌های پیچیده غیرخطی استفاده شود. مدل هایپربولیک پیشنهاد شده می‌تواند به عنوان یک مدل فضای حالت برای سیستم‌های کنترل غیرخطی طراحی شده باشد. همچنین پایداری نسبی مدل هایپربولیک بر اساس نظریه‌ی پایداری لیاپانوف مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. کنترل‌کننده طراحی شده بر اساس این مدل محدود است. نمونه‌های عددی تایید کرده‌اند که این کنترل‌کننده می‌تواند سیستم غیرخطی اصلی را با عملکرد خوب پایدار کند و مدل هایپربولیک می‌تواند با هر دقتی در نزدیکی سیستم تعادل به سیستم اصلی نزدیک شود. رویکرد ارائه شده دارای مزایای متعددی در مقایسه با سایر روش‌ها است. به عنوان مثال، رویکرد پیشنهادی نیازی به دانش پیشین سیستم و قواعد فازی مربوط به سیستم اصلی ندارد. علاوه بر این، با حل یک مساله برنامه نویسی غیر خطی (NLP) پارامترهای مدل می‌توانند به آسانی به دست آیند.

۲.۷.۴ پیشنهادات

- (۱) روش پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک مدل فضای حالت طراحی شود.
- (۲) این مدل را می‌توان برای سیستم‌های کنترل غیرخطی پیچیده استفاده کرد.
- (۳) روش پیشنهادی نیازی به دانش قبلی درباره سیستم اصلی ندارد.
- (۴) رویکرد پیشنهادی نیازی به سیستم‌های پایه قاعده فازی مربوط به سیستم اصلی ندارد.
- (۵) پارامترهای مدل را می‌توان به راحتی با حل یک مساله برنامه نویسی غیر خطی^{۲۶} (NLP) به دست آورد.

^{۲۶}Non-Linear Programming

مراجع

- [۱] همایی فصیح آ، (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: "کاربردهایی از منطق فازی در سرطان پستان"، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۲] زاهدی م، (۱۳۷۸)، "تئوری مجموعه های فازی و کاربردهای آن"، چاپ اول، نشر کتاب دانشگاهی.
- [۳] طاهری س م، (۱۳۷۸)، "آشنایی با نظریه مجموعه های فازی"، چاپ دوم، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۴] کازوتاناکا، (۱۳۷۸)، "مقدمه ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی"، ترجمه: وحیدیان کامیاد ع، طارقیان ح.ر، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۵] کلر ج، بویوان س ک، (۱۳۸۹)، "تئوری مجموعه های فازی اصول و کارکردها"، ترجمه: فاضل زرنندی م ح، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران.
- [۶] وانگ ل، (۱۳۸۸)، "سیستم های فازی و کنترل فازی"، ترجمه: تشنه لب م، صفاریور ن، افیونی د، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه خواجه نصیر طوسی تهران.
- [7] C.I. Byrnes and A. Isidori, Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 36 (1991) 112-117.
- [8] S.G. Cao, N.W. Rees and G. Feng, Analysis and design for a class of complex control systems-Part II: Fuzzy controller design, Automatica, 33 (1997) 1029-1039.
- [9] V. Chellaboina and W.M. Haddad, A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems, Control Syst. Mag., 22(6) (2002) 66-75.
- [10] H. Chen and F. Allgower, Nonlinear model predictive control schemes with guaranteed stability, In: R. Berber, editor, Nonlinear Model Based Process Control, Kluwer, 1998, pp. 465-494.
- [11] Y.C.Chu and K.Glover, "Bounds of the induced norm and model reduction errors for systems with repeated scalar nonlinearities," IEEE Trans. Automat. Contr., 44 (1999) 471- 483.

- [12] Y. Cui, H.G. Zhang, Y. Wang, W. Gao, Adaptive control for a class of uncertain strict-feedback nonlinear systems based on a generalized fuzzy hyperbolic model, *Fuzzy Sets and Systems*, 302 (2016) 52-64.
- [13] F.A.C.C. Fontes, A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers, *Systems & Control Letters*, 42(2) (2001) 127-143.
- [14] R. Freeman and P. Kokotovic, *Robust Nonlinear Control Design*, Birkhauser, Boston (1996).
- [15] H. Hermes, Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls, In: *Differential Equations: Stability and Control*, S. Elaydi, Ed. New York: Marcel Dekker, 1991, pp. 249-260.
- [16] H. Hermes, Nilpotent and high-order approximations of vector field systems, *SIAM Rev.*, 33 (1991) 238-264.
- [17] D. Hochlenert, Nonlinear stability analysis of a disk brake model, *Nonlinear Dyn.*, 58(1-2) (2009) 63-73.
- [18] Man, Cybern. A "Hyperbolic optimal control and fuzzy control," *IEEE Trans. Syst.*, 29(1999) 1-10.
- [19] C.A. Ibanez and O.G. Frias and M.S. Castanon, Lyapunov based controller for the inverted pendulum cart system, *Nonlinear Dyn.*, 40(4) (2005) 367-374.
- [20] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems II*, New York: Springer-Verlag, (1999).
- [21] L. Jin, P.N. Nikiforuk and M.M. Gupta, "Approximation of discrete time state space trajectories using dynamic recurrent neural networks," *IEEE Trans. Automat. Contrl.*, 40 (1995) 266-1270.
- [22] I. Karafyllis and Z.P. Jiang, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, Springer, Berlin (2011).
- [23] E. Kaszkurewicz and A. Bhaya, Robust stability and diagonal Liapunov functions, *SIAM J. Matrix Anal. & Appl.*, 14(2)(1993) 508-520.
- [24] M. Kawski, Homogeneous stabilizing feedback laws, *Control Theory Adv. Technol.*, 6 (1990) 497-516.
- [25] I.D. Landau, R. Lozano, and M.M. Saad, *Adaptive Control*. New York: Springer Verlag, 1998.
- [26] M. Kawski, Stabilization of nonlinear systems in the plane, *Systems & Control Letters*, 12 (1989) 169-175.
- [27] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ (1996).

- [28] V. Lakshmikantham, S. Matrosov and S. Sivasundaram, Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands (1991).
- [29] X. Liao and P. Yu, Absolute Stability Systems of Nonlinear Control, Springer, Berlin (2008).
- [30] S. Liu, Z. Guo, H.G. Zhang, Fuzzy hyperbolic neural network model and its application in H_∞ filter design, In: Proceedings of the 5th international symposium on Neural Networks: Advances in Neural Networks, F. Sun et al. (Eds.): ISSN 2008, Part I, LNCS 5263, pp. 222-230, 2008, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).
- [31] X.H. Long and B. Balachandran, Stability analysis for milling process, Nonlinear Dyn., 49(3) (2007) 349-359.
- [32] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao and P.O.M, Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality, Automatica, 36 (2000) 798-814.
- [33] S.G. Nersesov and W.M. Haddad, On the stability and control of nonlinear dynamical systems via vector Lyapunov functions, IEEE Trans. Autom. Control, 51(2) (2006) 203-215.
- [34] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, New York: Springer-Verlag, (1990).
- [35] M.H. Noori Skandari, On the stability of a class of nonlinear control systems, Nonlinear Dynamics, 80(3) (2015) 1245-1256.
- [36] J.A. Primbs, V. Nevistic and J.C. Doyle, Nonlinear optimal control: a Lyapunov function and receding horizon perspective, Asian J. Control, 1(1) (1999) 14-24.
- [37] C. Qian and W. Lin, A Continuous Feedback Approach to Global Strong Stabilization of Nonlinear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 46(7) (2001) 1061-1079.
- [38] J. Qiu, H. Tian, Q. Lu and H. Gao, Nonsynchronized robust filtering design for continuous-time T-S fuzzy affine dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions, IEEE Transactions on Cybernetics, 46(6) (2013) 1755-1766.
- [39] J. Qiu, Y. Wei, H.R. Karimi and H. Gao, Reliable control of discrete-time piecewise-affine time-delay systems via output feedback, IEEE Transactions on Reliability, 67(1) (2018) 79-91.
- [40] J. Qiu, Y. Wei, L. Wu, A novel approach to reliable control of piecewise affine systems with actuator faults, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 64(8) (2017) 957-961.
- [41] J. Qiu, T. Wang, S. Yin, H. Gao, Data-based optimal control for networked double-layer industrial processes, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 64(5) (2017) 4179-4186.

- [42] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, New York, McGraw-Hill, Inc. (1976).
- [43] J.J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [44] Z. Sun and S. Sam Ge, Stability Theory of Switched Dynamical Systems, Springer, Berlin (2011).
- [45] K. Tanaka and M. Sugeno, Stability analysis and design of fuzzy control systems, Fuzzy Sets and Systems, 45 (1992) 135-156.
- [46] L.X. Wang, A Course in Fuzzy Systems and Control, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA (1997).
- [47] L.X. Wang and J.M. Mendel, Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-squares learning, IEEE Trans. Neural Networks, 3 (1992) 807-814.
- [48] H.G. Zhang and Q. Yongbing, Modeling, identification, and control of a class of nonlinear systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 9(2) (2001) 349-354.
- [49] H.G. Zhang and Z. Wang, D. Liu, Chaotifying fuzzy hyperbolic model using adaptive inverse optimal control approach, Int. J. Bifurcation And Chaos, 12 (2003) 32-43.
- [50] H.G. Zhang, Z. Wang, D. Liu, Chaotifying fuzzy hyperbolic model using impulsive and nonlinear feedback control approaches, International Journal of Bifurcation and Chaos, 15(8) (2005) 2603-2610.
- [51] H.G. Zhang, Z.L. Wang, M. Li, B. Quan, M.G. Zhang, Generalized Fuzzy Hyperbolic Model: A Universal Approximator, Acta Automatica Sinica, 30(3) (2004) 416-422.
- [52] M. Zhang, H. Zhang and D. Liu, A generalized fuzzy hyperbolic modeling and control scheme, 2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, (2005).
- [53] M. Zhang, H. Zhang, Robust adaptive fuzzy control scheme for nonlinear system with uncertainty, Journal of Control Theory and Applications, 4(2) (2006) 209-216.
- [54] J.L. Zhang, H.G. Zhang, Y.H. Luo, H.J. Liang, Nearly optimal control scheme using adaptive dynamic programming based on generalized fuzzy hyperbolic model, Acta Automatica Sinica, 39(2) (2013) 142-148.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Continuum	استمرار
Inference	استنتاج
Orbitally	اوربیتالی
Barbashin krasovskii	بارباشین کراسوسکی
Feedback	بازخورد
Output vector	بردار خروجی
Non-Linear Programming	برنامه‌نویسی غیرخطی
Uniformity Closure	بستار یکنواختی
Diagonally optimal	بهینه قطری
Radially unbounded	بیکران شعاعی
Unknown parameters	پارامترهای نامشخص
Singleton fuzzifire	پایدارکننده منفرد
Stable	پایدار
Asymptotically stability	پایدار مجانی
Fuzzy rule base	پایگاه قواعد فازی
Complex	پیچیده
Complexity	پیچیدگی
Priori prediction	پیش‌بینی اولیه
Principle minors	پیشرو اصلی
Scalar function	تابع اسکالر
Gaussian membership function	تابع عضویت گوسین
Lyapunov function	تابع لیاپانوف
Quadratic cost functional	تابع هزینه درجه دوم
Cost function	تابع هزینه
Takagi Sugeno	تاگاجی سوگینو

Estimat	تخمین
Change of the variable	تغییر متغیر
Appropriate	تقریب ابتدایی
Universal approximator	تقریب عمومی
Support	تکیه‌گاه
Linear combination	ترکیب خطی
Algebra	جبر
Mass of the cart	جرم ارابه
Mass of the pole	جرم میله
State	حالت
Autonomous	خودگردان
Angular velocity	سرعت زاویه‌ای
Closed loop system	سیستم حلقه بسته
Systems with repeted scaler nonlinear	سیستم‌های اسکالر غیرخطی
Simulation results	شبیه‌سازی جواب‌ها
Acceleration due to gravity	شتاب گرانشی
Dense	چگال
Chu	چو
Quadratic	درجه دوم
Recursive Least Squares	روش بازگشتی حداقل مربعات
Membership method	روش عضویت
List method	روش فهرست
Rule method	روش قاعده
Level surface	رویه سطح
Lyapunov surface	رویه لیاپانوف
Pandulum angle	زاویه پاندول
Discrete time	زمانی گسسته
Zhukovsky	ژاکوفسکی
Left hand side	طرف چپ
Right hand side	طرف راست
Pole length	طول میله
Cartesian product	ضرب کارتزین

Membership	عضویت
Admissible	قابل قبول
Crisp	قطعی
Forgetting factor	فاکتور فراموش نشدنی
Fuzzifier	فازی کننده
Compact	فشرده
Space of Hyperbunker Functions	فضای توابع هایپربولیک
Rule	قاعده
Fuzzy hyperbolic modeling	قواعد پایه فازی هایپربولیک
Stone-Weierstrass Theorem	قضیه استون وایراشتراس
The linear quadratic optimal control theory	قضیه کنترل بهینه خطی درجه دوم
Candidates	کاندیدهای
Bounded	کران دار
Minimal	کمترین
Control Value Lyapunov	کنترل مقدار لیاپانوف
Bang bang controller	کنترل گر بنگ بنگ
Global optimal controller	کنترل گر بهینه سرتاسری
Feedback control	کنترل بازخورد
Stable controller	کنترل گر پایدار کننده
Glover	گلاور
Lyapunov	لیاپانوف
Time varying	متغیر با زمان
Generalized variables	متغیرهای تعمیم یافته
Control variables	متغیرهای کنترل
Input variables	متغیرهای ورودی
Positive Diagonally Dominant	مثبت قطری غالب
Asymptotically	مجانسی
Universal set	مجموعه جهانی
State model	مدل حالت
Neural network model	مدل شبکه عصبی
Fuzzy Takagi Sugeno modeling	مدل فازی تاکاچی سوگینو
State space model	مدل فضای حالت

Fuzzy hyperbolic rule base	مدل هایپربولیک فازی
First order	مرتبه اول
Second order	مرتبه دوم
State equation	معادله حالت
Output equation	معادله خروجی
N-dimensional first order differential eqyation	معادله دیفرانسیل مرتبه اول N بعدی
Positive definite	معین مثبت
Negative definite	معین منفی
Robustness	مقاوم پذیری
Isolated	منفرد
Fuzzy singleton	منفرد فازی
Mamdani	ممدانی
Linear Matrix Inequality	نابرابری ماتریس خطی
Nonautonomous	ناخودگردان
Defuzzifier	نافازی‌ساز
Maximum defuzzifier	نافازی‌ساز ماکزیمم
Equilibrium point	نقطه تعادل
Center of gravity defuzzifier	نافازی‌ساز مرکز ثقل
Center average defuzzifier	نافازی‌ساز میانگین ثقل
Indefinite	نامعین
Matlab software	نرم‌افزار متلب
Distinct point	نقطه مجزا
Applied force	نیروی اعمال شده
Positive semi definite	نیمه معین مثبت
Negative semi definite	نیمه معین منفی
Input	ورودی
Neighborhood zero	همسایگی صفر
Converge to zero	همگرا به صفر

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Admissible	قابل قبول
Algebra	جبر
Applied force	نیروی اعمال شده
Appropriate	تقریب ابتدایی
Asymptotically	مجانمی
Asymptotically stability	پایدار مجانمی
Acceleration due to gravity	شتاب گرانشی
Angular velocity	سرعت زاویه‌ای
Autonomous	خودگردان
Bang bang controller	کنترل گر بنگ بنگ
Barbashin krasovskii	بارباشین کراسوسکی
Bounded	کران‌دار
Candidates	کاندیدهایی
Cartesian product	ضرب کارتزین
Center average defuzzifier	نافازی‌ساز میانگین ثقل
Center of gravity defuzzifier	نافازی‌ساز مرکز ثقل
Change of the variable	تغییر متغیر
Chu	چو
Closed loop system	سیستم حلقه بسته
Compact	فشرده
Complex	پیچیده
Complexity	پیچیدگی
Continuum	استمرار
Control Value Lyapunov	کنترل مقدار لیاپانوف
Control variables	متغیرهای کنترل

Converge to zero	همگرا به صفر
Cost function	تابع هزینه
Crisp	قطعی
Defuzzifier	نافازی‌ساز
Dense	چگال
Diagonally optimal	بهینه قطری
Discrete time	زمانی گسسته
Distinct point	نقطه مجزا
Estimat	تخمین
Equilibrium point	نقطه تعادل
Feedback	بازخورد
Feedback control	کنترل بازخورد
Forgetting factor	فاکتور فراموش‌نشدنی
Fuzzifier	فازی‌کننده
Fuzzy hyperbolic modeling	قواعد پایه فازی هایپربولیک
Fuzzy hyperbolic rule base	مدل هایپربولیک فازی
Fuzzy singleton	منفرد فازی
Fuzzy rule base	پایگاه قواعد فازی
Fuzzy Takagi Sugeno modeling	مدل فازی تاکاچی سوگینو
Gaussian membership function	تابع عضویت گوسین
Generalized variables	متغیرهای تعمیم‌یافته
Global optimal controller	کنترل‌گر بهینه سرتاسری
Glover	گلاور
Indefinite	نامعین
Inference	استنتاج
Input	ورودی
Input variables	متغیرهای ورودی
Isolated	منفرد
Left hand side	طرف چپ
Level surface	رویه سطح
Linear combination	ترکیب خطی
Linear Matrix Inequality	نابرابری ماتریس خطی

List method	روش فهرست
Lyapunov	لیاپانوف
Lyapunov function	تابع لیاپانوف
Lyapunov surface	رویه لیاپانوف
Mamdani	ممدانی
Mass of the cart	جرم ارابه
Mass of the pole	جرم میله
Matlab software	نرم‌افزار متلب
Maximum defuzzifier	نافازی‌ساز ماکزیمم
Membership	عضویت
Membership method	روش عضویت
Minimal	کمترین
N-dimensional first order differential equation	معادله دیفرانسیل مرتبه اول N بعدی
Negative definite	معین منفی
Negative semi definite	نیمه معین منفی
Neighborhood zero	همسایگی صفر
Neural network model	مدل شبکه عصبی
Non-Linear Programming	برنامه‌نویسی غیرخطی
Nonautonomous	ناخودگردان
Orbitally	اوربیتالی
Output equation	معادله خروجی
Output vector	بردار خروجی
Pandulum angle	زاویه پاندول
Pole length	طول میله
Positive definite	معین مثبت
Positive Diagonally Dominant	مثبت قطری غالب
Positive semi definite	نیمه معین مثبت
Principle minors	پیشرو اصلی
Priori prediction	پیش‌بینی اولیه
Quadratic	درجه دوم
Quadratic cost functional	تابع هزینه درجه دوم
Radially unbounded	بیکران شعاعی

Recursive Least Squares	روش بازگشتی حداقل مربعات
Right hand side	طرف راست
Robustness	مقاوم پذیری
Rule	قاعده
Rule method	روش قاعده
Scalar function	تابع اسکالر
First order	مرتبه اول
Second order	مرتبه دوم
Simulation results	شیه‌سازی جواب‌ها
Singleton fuzzifire	پایدارکننده منفرد
Space of Hyperbunker Functions	فضای توابع هایپربولیک
Stable	پایدار
Stable controller	کنترل‌گر پایدار کننده
State	حالت
State equation	معادله حالت
State model	مدل حالت
State space model	مدل فضای حالت
Stone-Weierstrass Theorem	قضیه استون و ایراشتراس
Support	تکیه‌گاه
Systems with repeted scalar nonlinear	سیستم‌های اسکالر غیرخطی
Takagi Sugeno	تاگاجی سوگینو
The linear quadratic optimal control theory	قضیه کنترل بهینه خطی درجه دوم
Time varying	متغیر با زمان
Uniformity Closure	بستار یکنواختی
Universal approximator	تقریب عمومی
Universal set	مجموعه جهانی
Unknown parameters	پارامترهای نامشخص
Zhukovsky	ژاکوفسکی

Aabstract

In this endeavor first, we outline the definitions and basic concepts of fuzzy theory of stability, then for the composition of the rules if then, the fuzzy two of the known derivative engines, namely Mamedani and Takagi-Sugeno, or briefly We will use Sogeno for the deduction process to accept fuzzy inputs based on the fuzzy rule base to create the appropriate fuzzy output, and then describe the two above-mentioned fuzzy models.

Next, fuzzy hyperbolic models are used to design the controller of the continuous systems Time and discrete time. These models are based on rules if they are then made fuzzy. Also, two methods for controlling the design process and determining the matrix H , such that the total asymmetrical stability and resilience Provide a closed loop system.

In the next chapter, we derive hyperbolic systems without using fuzzy concepts, so we define the space of hyperbolic functions and prove that they are contiguous in the space of continuous functions, and then from this space to convert the control systems into hyperbolic forms We use. We also find stabilization control for the hyperbolic system and show that these models are able to approximate the main dynamic system within the range of the equilibrium point with high precision and model parameters by solving a nonlinear programming problem We get numerical examples to simulate their results and analyze them.

keywords:Time-dependent systems; time-discrete systems; fuzzy hyperbolic models; controller design; non-linear programming



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operation Research

Control design for nonlinear systems based on hyperbolic models

By: Mohammad Abedian

Supervisors

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Dr. Mohammad Hadi Noori Skandari

June 2018