دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

مکانیابی دایره در صفحه

دانشجو: **مریم خوش سیمای برگرد**

استاد راهنما:

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور:

دکتر علیرضا ناظمی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

دی ماه ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه به بررسی مسئله مکانیابی دایره در صفحه می‌پردازیم. در فصل اول ابتدا تاریخچه‌ای مختصر از مسائل مکانیابی را بیان نموده، سپس به معرفی مسئله مکانیابی دایره در صفحه پرداخته و تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در فصل ۲، ابتدا به معرفی مجموعه قطبی می‌پردازیم، سپس برخی از خواص نرم های بلوکی را بیان نموده، آن ها را برای نرم های بلوکی خاص از جمله نرم منهتن، چبیشف و یک—بینهایت مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این فصل هم چنین به بیان رابطه بین نرم های بلوکی و بررسی کوتاهترین مسیر می‌پردازیم. در فصل ۳، به تجزیه و تحلیل مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات می‌پردازیم. به عبارت دیگر دایره‌ای را به قسمی می‌یابیم که مجموع مربعات فاصله نقاط داده شده تا محیط دایره کمینه گردد. در این فصل هم چنین به بررسی یک روش تقریبی جهت حل مسئله می‌پردازیم. در انتهای فصل با ذکر یک مثال روش های ارائه شده را با هم مقایسه می‌کنیم. در فصل ۴، به بررسی مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمینه—بیشینه می‌پردازیم. به بیانی دیگر به دنبال دایره‌ای هستیم که بیشترین فاصله نقاط داده شده تا محیط دایره مینیمم شود. در این فصل به بررسی حالتی می‌پردازیم که فواصل در صفحه با نرم بلوکی اندازه گیری می‌شوند و سپس مدل برنامه ریزی معادل با آن را ارائه می‌کنیم. در انتهای فصل چند مثال برای نرم های بلوکی مختلف حل می‌کنیم. در فصل ۵، به مطالعه مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مجموع و نرم اقلیدسی می‌پردازیم. به عبارت دیگر دایره‌ای را به‌گونه‌ای می‌یابیم که مجموع وزنی فاصله بین نقاط داده شده و محیط دایره کمینه شود. در این فصل به بیان لم هایی می‌پردازیم که توسط آن ها مرکز دایره بهینه مشخص می‌شود. سپس الگوریتمی برای به دست آوردن مرکز دایره بهینه ارائه می‌کنیم. در فصل ٦، مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع و نرم بلوکی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش اول نتایجی را که برای هر تابع نرم دلخواه برقرار است، بیان کرده و در بخش دوم بحثمان را به نرم های بلوکی محدود می‌نماییم. در بخش دوم به بیان و بررسی لم هایی می‌پردازیم که توسط آن ها مرکز دیسک بهینه مشخص می‌شود. در بخش سوم این فصل یک مدل برنامه ریزی برای مسئله مکانیابی با نرم های بلوکی و در حالات خاص منهتن و چبیشف ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مکانیابی، بهینه سازی و نرم بلوکی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

[۱] مریم خوش سیمای برگرد، علی جمالیان و جعفر فتحعلی، (۱۳۸۸). "حل مسئله مکانیابی دیسک با کمترین مجموع همراه با نرمهای بلوکی". چهارمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران، دانشگاه سیستان و بلوچستان.

[۲] مریم خوش سیمای برگرد، علی جمالیان و جعفر فتحعلی، (۱۳۸۹). "مکانیابی دیسک در صفحه‌ای با نرم بلوکی و تابع هدف مینیماکس". سومین کنفرانس بین المللی تحقیق در عملیات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[۳] مریم خوش سیمای برگرد و جعفر فتحعلی، (۱۳۸۹). "نرم های بلوکی و کاربردهای آن". چهل و یکمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه ارومیه.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

دراین فصل ما ابتدا خلاصه‌ای از تاریخچه مسائل مکانیابی را بیان می‌کنیم، سپس به بیان تعاریف اولیه مورد نیاز می‌پردازیم.

۱—۱ مقدمه

مسائل مکانیابی[۱] از جمله مسائلی است که توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و امروزه کاربردهای فراوانی دارد. زمان پیدایش مسائل مکانیابی به اوایل قرن هفدهم و مسئله‌ای که توسط فرما[۲] مطرح شد، برمی‌گردد. مسئله‌ای که فرما مطرح کرد به صورت زیر است: فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه داده شده کمینه شود. در سال ۱٦۴۰ توریچلی[۳] مسئله فوق را حل نمود، به این دلیل نقطه بهینه را نقطه توریچلی و مسئله را مسئله فرما می‌نامند [۱۱].

نظریه مکانیابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد، با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر[۴] در سال ۱۹۰۹ با عنوان *Vber den standortder indvstrien* متولد شد [۱۸]. وبر در کتاب خود نتایج تحقیقاتش در مورد صنایع کارخانه‌ای را ارائه نمود. هم چنین او به مطالعه مسئله مکانیابی کمترین مجموع[۵] روی صفحه پرداخت. امروزه مسئله مکانیابی با نرم اقلیدسی[٦] که در آن پیدا کردن مکان یک سرویس دهنده در صفحه به منظور مینیمم کردن مجموع فاصله‌ها از این سرویس دهنده تا یک مجموعه از نقاط مورد نظر است، مسئله وبر نامیده می‌شود. وایزفلد[۷] [۷] در سال ۱۹۳۷ یک روش تکراری برای مسئله وبر پیشنهاد نمود.

ولی مطالعات جدی بر روی مسائل مکانیابی از زمانی شروع شد که حکیمی[۸] [۸] در سال ۱۹٦۴ دو نوع تابع هدف را به صورت کمترین مجموع و کمینه—بیشینه[۹] مطرح کرد. نرم های بلوکی[۱۰] به

[۱] Location problems
[۲] Fermat
[۳] Torricelli
[۴] Alfred Weber
[۵] Minisum
[٦] Euclidean norm
[۷] Weiszfeld
[۸] Hakimi
[۹] Minimax
[۱۰] Block norms

طور گسترده در نظریه مکانیابی به کار رفته است. وارد[۱۱] و وندل[۱۲] [۱۷، ۱۶] اولین کسانی بودند که نرم های بلوکی را برای حل مسائل مکانیابی به کار بردند.

۱—۲ مسائل مکانیابی

ساده ترین مسئله مکانیابی همان مسئله فرما است که ما آن را در بخش ۱—۱ بیان کردیم. تعمیمی از آن به مسئله فرما—وبر معروف است که به صورت زیر می‌باشد.

فرض کنید n نقطه A_i، $i = 1, \cdots, n$ در صفحه موجود باشند و w_i وزن متناظر با نقطه A_i باشد. هدف یافتن نقطه‌ای مانند X به گونه‌ای است که مجموع وزنی فاصله نقطه X تا نقاط موجود در صفحه کمینه شود. یعنی اگر فاصله X تا A را با $d(X, A)$ نمایش دهیم آن گاه مسئله به صورت زیر خواهد بود.

$$\min_{X} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i d(X, A_i).$$

مسئله فوق را مسئله تک وسیله‌ای با کمترین مجموع[۱۳] نیز گویند.

اگر هدف یافتن نقطه X به قسمی باشد که فاصله وزنی X تا دورترین نقطه‌ی موجود در صفحه مینیمم شود آن گاه مسئله به صورت زیر می‌باشد.

$$\min_{X} \quad \max_{i=1,\cdots,n} w_i d(X, A_i).$$

مسئله فوق را مسئله تک وسیله‌ای کمینه—بیشینه[۱۴] می‌نامند.

حال اگر به جای پیداکردن یک نقطه به دنبال یافتن چند نقطه باشیم یعنی چند مکان برای وسایل جدید به گونه‌ای پیدا کنیم که نزدیکترین نقطه را به نزدیکترین وسیله نسبت دهیم و بخواهیم مجموع وزنی فواصل را مینیمم کنیم، مسئله را مسئله چندوسیله‌ای با کمترین مجموع[۱۵] و حالت دیگر آن را مسئله چندوسیله‌ای کمینه—بیشینه[۱۶] گویند.یعنی اگر $X = \{X_1, \cdots, X_n\}$ مجموعه وسایل جدید باشد

[۱۱] Ward
[۱۲] Wendell
[۱۳] Single Facility Mnisum Problem
[۱۴] Single Facility Mnimax Problem
[۱۵] Multi Facility Mnisum Problem
[۱۶] Multi Facility Mnimax Problem

که باید مکانیابی شوند و $d(X,A) = \min\limits_{X_i \in X} \ w_i d(X_i, A)$ آن گاه مسائل فوق به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} w_i d(X, A_i)$$

و

$$\min \quad \max_{i=1,\cdots,n} \ w_i d(X, A_i)$$

قابل ذکر است که حالات مختلف مکانیابی از جمله مکانیابی روی صفحه، شبکه، مکانیابی خط و دایره وجود دارد، که در این پایان نامه به بررسی مکانیابی دایره در صفحه می‌پردازیم.

۱−۲−۱ مکانیابی دایره در صفحه

فرض کنید n نقطه A_i، $i = 1,\cdots,n$ در صفحه موجود باشند و w_i وزن مثبت متناظر با نقطه A_i باشد. هدف پیداکردن دایره‌ای مانند $C(X,r)$ به گونه‌ای است که محیط آن تا حد ممکن به مجموعه نقاط داده شده، نزدیک باشد. برای این منظور سه هدف زیر بررسی می‌شود:

۱) مجموع مربعات فاصله بین نقاط داده شده و محیط دایره مینیمم گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \ \ \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} [d_i(x,y) - r]^2\}.$$

۲) ماکزیمم فاصله نقاط داده شده از محیط دایره مینیمم گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \ \ \{\max_i \ \{|d_i(x,y) - r|\}\}.$$

۳) مجموع فاصله نقاط داده شده از محیط دایره مینیمم گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \ \ \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} |d_i(x,y) - r|\}.$$

که در آن ها $d_i(x,y)$ فاصله بین نقطه A_i و مرکز دایره، یعنی $X = (x,y)$ است.

مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات[۱۷] در حالتی که فاصله ها با نرم اقلیدسی اندازه گیری می‌شوند، توسط درزنر[۱۸] و همکارانش [٦] مورد بررسی قرار گرفت. هم چنین آن ها برای مسئله مکانیابی دایره مینیماکس با نرم اقلیدسی نیز الگوریتم هایی ارائه کردند. بریمبرگ[۱۹] و همکارانش [۲] مسئله مکانیابی دایره کمترین مجموع با نرم اقلیدسی را مورد بررسی قرار دادند. هم چنین آن ها به مطالعه این مسئله برای حالتی که نرم فاصله ها بلوکی هستند، نیز پرداختند.

[۱۷] Least squares
[۱۸] Drezner
[۱۹] Brimberg

۱—۳ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲ : هر تابع حقیقی مقدار که روی یک فضای برداری مانند R^n تعریف شود و در شرایط زیر صدق کند، نرم[۲۰] نامیده می‌شود.

$$
\begin{array}{ll}
1)\ \|X\| \geq 0 & \forall\ X \in R^n \\
2)\ \|X\| = 0 & iff \quad X = \bar{0} \\
3)\ \|X\| = \|-X\| & \forall\ X \in R^n \\
4)\ \|tX\| = |t|\ \|X\| & \forall\ X \in R^n\ ,\ \forall t \in R \\
5)\ \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| & \forall\ X, Y \in R^n
\end{array}
$$

نرم l_p بردار X به ازای $p \geq 1$ در فضای برداری R^n به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$l_p(X) = \|X\|_{l_p} = [\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p]^{\frac{1}{p}}.$$

نرم های منهتن[۲۱]، اقلیدسی و چبیشف[۲۲] حالات خاصی از نرم های l_p هستند که به ترتیب با قراردادن $p = 1$، $p = 2$ و $p \to \infty$ به دست می آیند.

نرم چبیشف بردار X در فضای برداری R^n به صورت زیر است.

$$l_\infty(X) = \|X\|_{l_\infty} = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|.$$

تعریف ۲.۲ : فاصله دو نقطه X و Y در صفحه را با $d(X,Y)$ نشان می‌دهیم، که این فاصله تحت نرم $\|.\|$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d(X,Y) = \|X - Y\|.$$

تعریف ۳.۲ : مجموعه نقاطی که نرم فاصله آن ها از مبدأ کمتر یا مساوی یک است، **دیسک واحد**[۲۳] نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲ : مجموعه نقاطی که نرم فاصله آن ها از مبدأ برابر یک است (مرز دیسک واحد)، **کانتور واحد**[۲۴] نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲ : مجموعه X را در فضای E^n **محدب**[۲۵] نامیم هرگاه اگر $x_1, x_2 \in X$ آن‌گاه به ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$.

---

[۲۰] Norm
[۲۱] Manhattan norm
[۲۲] Tchebycheff norm
[۲۳] Unit disk
[۲۴] Unit contour
[۲۵] Convex set

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ **ترکیب محدب** x_1 و x_2 نامیده می‌شود. اگر $0 < \lambda < 1$ آن گاه این ترکیب را **ترکیب محدب اکید** x_1 و x_2 نامند.

تعریف ٦.٢ : نقطه x یک **نقطه گوشه‌ای**[26] برای مجموعه X نامیده می‌شود، هرگاه نتوان آن را به صورت ترکیب محدب اکید هیچ دو نقطه مجزای X نوشت.

تعریف ٧.٢ : بردارهایی که مرکز دیسک واحد را به نقاط گوشه‌ای کانتور وصل می‌کنند، **بردارهای اصلی**[27] نامیده می‌شوند.

تعریف ٨.٢ : آن دسته از نرم ها که کانتور واحدشان چندوجهی است، **نرم بلوکی** نامیده می‌شوند.

می‌دانیم تعداد نقاط گوشه‌ای هر چندوجهی متناهی است. هم چنین از شرط (۳) در تعریف نرم، نتیجه می‌شود که نرم تابعی متقارن است. بنابراین مجموعه نقاط گوشه‌ای کانتور هر نرم بلوکی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\{b_g \;:\quad g = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm r\}$$

که در آن $b_{-g} = -b_g$.

در زیر نشان می‌دهیم نرم اقلیدسی، نرمی بلوکی نمی‌باشد. زیرا کانتور واحد آن چندوجهی نیست. برای رسم کانتور واحد نرم اقلیدسی در فضای برداری R^2، باید نقاط $X = (x_1, x_2)$ که نرم فاصله آن ها از مبدأ برابر یک می‌باشند، را محاسبه نمود. یعنی

$$l_2(X) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = 1$$

یا

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$$

همان طور که می‌دانیم معادله‌ی فوق، معادله دایره‌ای واحد با مرکز $(0, 0)$ است. پس کانتور واحد نرم اقلیدسی در فضای برداری R^2، چندضلعی نیست. بنابراین نرم اقلیدسی، نرمی بلوکی نیست.

هم چنین می‌توان نشان داد **نرم اقلیدسی وزن دار**[28] بردار X در فضای برداری R^n که به صورت

$$l_2^W(X) = \|X\|_{l_2}^W = [\sum_{i=1}^n w_i |x_i|^2]^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌شود که در آن $w_1, w_2 > 0$، نیز نرم بلوکی نمی‌باشد. زیرا با رسم کانتور واحد آن در فضای برداری R^2، مشاهده می‌کنیم کانتور واحدش بیضی است که مسلماً چندضلعی نیست.

---

[26] Extreme point

[27] Fundamental vectors

[28] Weighted Euclidean norm

فصل ۲

نرم های بلوکی و کاربردهای آن

۲—۱ مقدمه

در این فصل به بررسی نرم های بلوکی و خواص آن ها می پردازیم. نرم های بلوکی خانواده‌ی خاصی از نرم ها می‌باشند. به خاطر چگال بودن مجموعه نرم های بلوکی در مجموعه تمام نرم ها، می‌توان از آن ها به عنوان تقریبی مناسب برای هر نرم دلخواه استفاده نمود. هم چنین از این نرم ها می‌توان برای خطی سازی مسائل مختلف بهینه سازی از جمله مسئله مکانیابی استفاده کرد. اولین کسانی که از نرم های بلوکی در خطی سازی مسائل بهینه سازی استفاده نمودند، وارد و وندل [۱٦، ۱۷] می‌باشند. کلمروت[۱] [۱۰] نیز از این نرم ها در حل مسئله مکانیابی همراه با مانع استفاده کرده است.

۲—۲ مجموعه قطبی

قضیه ۱.۲ ([۱۵]): بین مجموعه نرم ها و خانواده‌ی مجموعه های بسته، کراندار و محدبی که شامل مبدأ هستند و هم چنین نسبت به مبدأ متقارنند، تناظری یک به یک وجود دارد.

مجموعه B را با شرایط قضیه فوق در نظر بگیرید. دراین صورت نرم متناظر با B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|X\| = \inf\{\mu > ۰ \ : \quad X \in \mu B\}$$

که در آن $\mu B = \{X \ : \ \frac{X}{\mu} \in B\}$.

متناظر با هر مجموعه B، یک مجموعه قطبی[۲] مانند B°، به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$B^\circ = \{v^* : \ X \cdot v^* \leq ۱ \qquad \forall\ X \in B\}.$$

اگر B دیسک واحد یک نرم بلوکی باشد، آن گاه مجموعه قطبی متناظر با آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B^\circ = \{v^* : \ b_g \cdot v^* \leq ۱ \qquad \forall\ g = \pm ۱, \pm ۲, \cdots, \pm r\}.$$

در این حالت نیز واضح است که B° چندوجهی است و نقاط گوشه‌ای آن به صورت زیر می‌باشند.

$$\{b_g^\circ \ : \quad g = \pm ۱, \pm ۲, \cdots, \pm r^\circ\}.$$

[۱] Klamroth
[۲] Polar set

در فضای برداری $R^{۲}$، $r^{\circ} = r$ است. ولی در R^n ممکن است این رابطه برقرار نباشد. به عنوان مثال نشان می‌دهیم تعداد نقاط گوشه‌ای کانتور واحد نرم منهتن در فضای برداری $R^{۳}$ برابر تعداد نقاط گوشه‌ای مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم منهتن نیست. برای به دست آوردن نقاط گوشه‌ای کانتور واحد نرم منهتن در فضای برداری $R^{۳}$، باید نقاط $X = (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ که نرم فاصله آن ها از مبدأ $O = (\circ, \circ, \circ)$ برابر یک می‌باشند، را محاسبه نمود. یعنی

$$l_{۱}(X) = |x_{۱}| + |x_{۲}| + |x_{۳}| = ۱$$

حال با درنظرگرفتن حالات مختلف $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ دستگاه زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} = ۱ & x_{۱} \geq \circ \ , \ x_{۲} \geq \circ \ , \ x_{۳} \geq \circ \\ x_{۱} + x_{۲} - x_{۳} = ۱ & x_{۱} \geq \circ \ , \ x_{۲} \geq \circ \ , \ x_{۳} < \circ \\ x_{۱} - x_{۲} + x_{۳} = ۱ & x_{۱} \geq \circ \ , \ x_{۲} < \circ \ , \ x_{۳} \geq \circ \\ -x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} = ۱ & x_{۱} < \circ \ , \ x_{۲} \geq \circ \ , \ x_{۳} \geq \circ \\ x_{۱} - x_{۲} - x_{۳} = ۱ & x_{۱} \geq \circ \ , \ x_{۲} < \circ \ , \ x_{۳} < \circ \\ -x_{۱} + x_{۲} - x_{۳} = ۱ & x_{۱} < \circ \ , \ x_{۲} \geq \circ \ , \ x_{۳} < \circ \\ -x_{۱} - x_{۲} + x_{۳} = ۱ & x_{۱} < \circ \ , \ x_{۲} < \circ \ , \ x_{۳} \geq \circ \\ -x_{۱} - x_{۲} - x_{۳} = ۱ & x_{۱} < \circ \ , \ x_{۲} < \circ \ , \ x_{۳} < \circ \end{cases}$$

چون نقطه گوشه‌ای در فضای برداری $R^{۳}$، نقطه‌ای است که روی سه ابرصفحه مستقل خطی قرار می‌گیرد، لذا با تلاقی دادن هر سه تا از معادلات دستگاه فوق نقاط گوشه‌ای کانتور به دست می آیند. پس از محاسبه نقاط گوشه‌ای زیر را خواهیم داشت:

$$b_{۱} = (۱, \circ, \circ) \qquad b_{۲} = (\circ, ۱, \circ) \qquad b_{۳} = (\circ, \circ, ۱)$$

$$b_{۴} = (-۱, \circ, \circ) \qquad b_{۵} = (\circ, -۱, \circ) \qquad b_{۶} = (\circ, \circ, -۱)$$

فرض کنید B° مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم منهتن باشد، دراین صورت برای به دست آوردن نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری $R^{۳}$، باید دستگاه نامعادلات زیر را رسم نمود.

$$B^{\circ} = \{v^* : \ b_g \cdot v^* \leq ۱ \qquad g = \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳\}.$$

که در آن b_g ها نقاط گوشه‌ای متناظر با دیسک واحد (B) نرم منهتن می‌باشند. بنابراین داریم.

$$\begin{cases} (1,0,0)\cdot(v_1^*,v_2^*,v_3^*) \leq 1 \\ (0,1,0)\cdot(v_1^*,v_2^*,v_3^*) \leq 1 \\ (0,0,1)\cdot(v_1^*,v_2^*,v_3^*) \leq 1 \\ (-1,0,0)\cdot(v_1^*,v_2^*,v_3^*) \leq 1 \\ (0,-1,0)\cdot(v_1^*,v_2^*,v_3^*) \leq 1 \\ (0,0,-1)\cdot(v_1^*,v_2^*,v_3^*) \leq 1 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} v_1^* \leq 1 \\ v_2^* \leq 1 \\ v_3^* \leq 1 \\ v_1^* \geq 1 \\ v_2^* \geq 1 \\ v_3^* \geq 1 \end{cases}$$

با رسم هشت صفحه فوق، شکل کانتور و نقاط گوشه‌ای آن به دست می‌آیند. پس از محاسبه نقاط گوشه‌ای زیر را خواهیم داشت:

$$b_1^\circ = (1,1,1) \qquad b_2^\circ = (1,1,-1) \qquad b_3^\circ = (1,-1,1) \qquad b_4^\circ = (-1,1,1)$$

$$b_5^\circ = (-1,-1,-1) \qquad b_6^\circ = (-1,-1,1) \qquad b_7^\circ = (-1,1,-1) \qquad b_8^\circ = (1,-1,-1)$$

همان طور که دیدیم کانتور واحد نرم منهتن در فضای برداری R^3، دارای شش نقطه گوشه‌ای است، در حالی که مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد آن هشت نقطه گوشه‌ای دارد.

۲—۳ نرم های بلوکی خاص

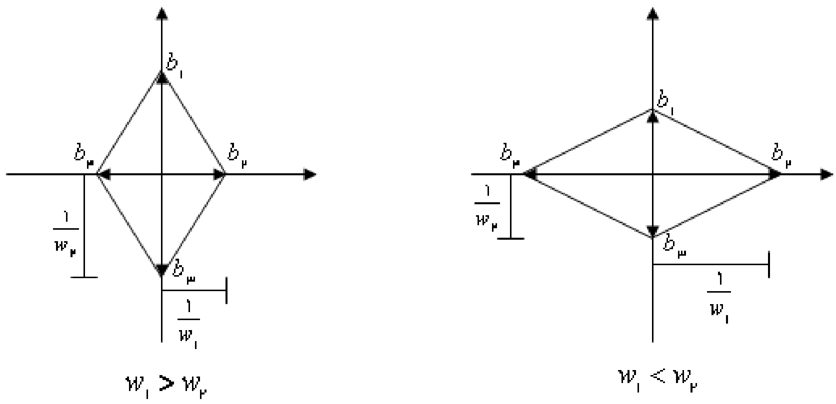
۲—۳—۱ نرم منهتن وزن دار(l_1^W)

نرم منهتن وزن دار[3] بردار X در فضای برداری R^n به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$l_1^W(X) = \|X\|_{l_1}^W = \sum_{i=1}^n w_i|x_i|$$

که در آن $w_1\ ,\ \cdots\ ,\ w_n > 0$.

[3] Weighted Manhattan norm



شکل ۲—۱: کانتور واحد نرم منهتن وزن دار در فضای برداری R^2

برای به دست آوردن شکل کانتور واحد نرم منهتن وزن دار و هم چنین نقاط گوشه‌ای آن در فضای برداری R^n، باید نقاط $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ که نرم فاصله آن ها از مبدأ برابر واحد می‌باشند، را محاسبه نمود.

مثلاً برای به دست آوردن شکل کانتور واحد نرم منهتن وزن دار و نقاط گوشه‌ای آن در فضای برداری R^2، داریم.

$$l_1^W(X) = \sum_{i=1}^{2} w_i|x_i| = w_1|x_1| + w_2|x_2| = 1$$

حال با درنظرگرفتن حالات مختلف x_1 و x_2 دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود که با رسم آن شکل کانتور واحد و نقاط گوشه‌ای محاسبه می‌گردند.

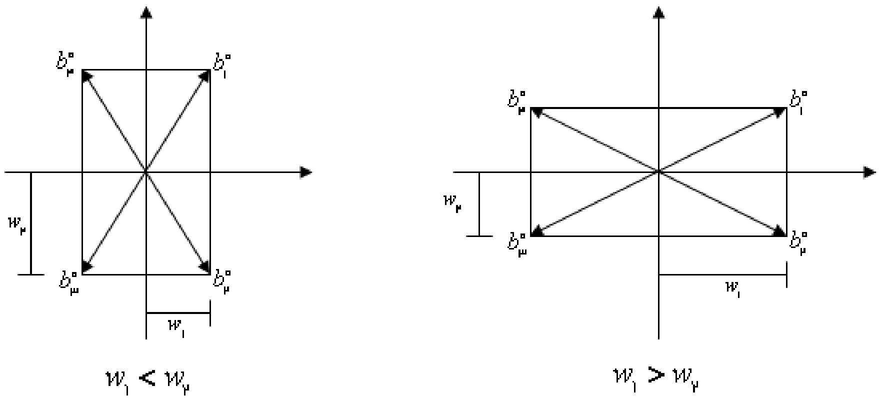
$$\begin{cases} w_1x_1 + w_2x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ w_1x_1 - w_2x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 < 0 \\ -w_1x_1 + w_2x_2 = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ -w_1x_1 - w_2x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 < 0 \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲—۱ مشاهده می‌کنیم نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$b_1 = (0, \tfrac{1}{w_2}) \qquad b_2 = (\tfrac{1}{w_1}, 0) \qquad b_3 = (0, \tfrac{-1}{w_2}) \qquad b_4 = (\tfrac{-1}{w_1}, 0)$$

فرض کنید B° مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم منهتن وزن دار باشد، دراین صورت برای به دست آوردن شکل کانتور واحد و هم چنین نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری R^n، باید دستگاه نامعادلات زیر را رسم نمود.

$$B^\circ = \{v^* : \ b_g \cdot v^* \leq 1 \quad g = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm r\}.$$



شکل ۲—۲: مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم منهتن وزن دار در R^2

که در آن b_g ها نقاط گوشه‌ای متناظر با دیسک واحد (B) نرم منهتن وزن دار می‌باشند.
مثلاً برای به دست آوردن شکل کانتور واحد و نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری R^2، داریم.

$$\begin{cases} b_1 \cdot v^* \leq 1 \\ b_2 \cdot v^* \leq 1 \\ b_3 \cdot v^* \leq 1 \\ b_4 \cdot v^* \leq 1 \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} (0, \frac{1}{w_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\ (\frac{1}{w_1}, 0) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\ (0, \frac{-1}{w_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\ (\frac{-1}{w_1}, 0) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم.

$$\begin{cases} v_2^* \leq w_2 \\ v_1^* \leq w_1 \\ v_2^* \geq -w_2 \\ v_1^* \geq -w_1 \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲—۲ مشاهده می‌کنیم نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$b_1^\circ = (w_1, w_2) \qquad b_2^\circ = (w_1, -w_2) \qquad b_3^\circ = (-w_1, -w_2) \qquad b_4^\circ = (-w_1, w_2)$$

۲—۳—۲ نرم چبیشف وزن دار(l_∞^W)

نرم چبیشف وزن دار[۴] بردار X در فضای برداری R^n به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$l_\infty^W(X) = \|X\|_{l_\infty}^W = \max_{i=۱,\cdots,n} w_i|x_i|$$

که در آن $w_۱ \ , \ \cdots \ , \ w_n > ۰$.

برای به دست آوردن شکل کانتور واحد نرم چبیشف وزن دار و هم چنین نقاط گوشه‌ای آن در فضای برداری R^n، باید نقاط $X = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ که نرم فاصله آن ها از مبدأ برابر واحد می‌باشند، را محاسبه نمود.

مثلاً برای به دست آوردن شکل کانتور واحد نرم چبیشف وزن دار و نقاط گوشه‌ای آن در فضای برداری $R^۲$، داریم.

$$l_\infty^W(X) = \max_{i=۱,۲}\{w_i|x_i|\} = \max\{w_۱|x_۱|, w_۲|x_۲|\} = ۱$$

$$\frac{|w_۱x_۱ + w_۲x_۲| + |w_۱x_۱ - w_۲x_۲|}{۲} = ۱$$

یا

$$|w_۱x_۱ + w_۲x_۲| + |w_۱x_۱ - w_۲x_۲| = ۲$$

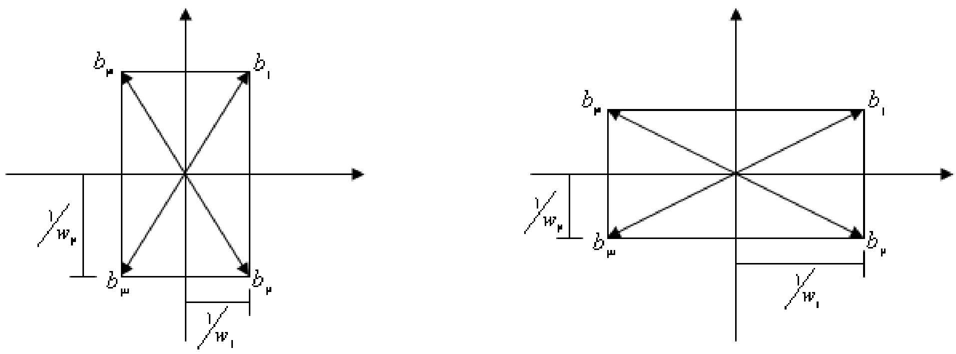
حال با درنظرگرفتن حالات مختلف $x_۱$ و $x_۲$ دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود که با رسم آن شکل کانتور واحد و نقاط گوشه‌ای محاسبه می‌گردند.

$$\begin{cases} w_۱x_۱ + w_۲x_۲ + |w_۱x_۱ - w_۲x_۲| = ۲ & w_۱x_۱ + w_۲x_۲ \geq ۰ \\ -w_۱x_۱ - w_۲x_۲ + |w_۱x_۱ - w_۲x_۲| = ۲ & w_۱x_۱ + w_۲x_۲ < ۰ \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} w_۱x_۱ + w_۲x_۲ + w_۱x_۱ - w_۲x_۲ = ۲ & w_۱x_۱ + w_۲x_۲ \geq ۰ \ , \ w_۱x_۱ - w_۲x_۲ \geq ۰ \\ w_۱x_۱ + w_۲x_۲ - w_۱x_۱ + w_۲x_۲ = ۲ & w_۱x_۱ + w_۲x_۲ \geq ۰ \ , \ w_۱x_۱ - w_۲x_۲ < ۰ \\ -w_۱x_۱ - w_۲x_۲ + w_۱x_۱ - w_۲x_۲ = ۲ & w_۱x_۱ + w_۲x_۲ < ۰ \ , \ w_۱x_۱ - w_۲x_۲ \geq ۰ \\ -w_۱x_۱ - w_۲x_۲ - w_۱x_۱ + w_۲x_۲ = ۲ & w_۱x_۱ + w_۲x_۲ < ۰ \ , \ w_۱x_۱ - w_۲x_۲ < ۰ \end{cases}$$

[۴] Weighted Tchebycheff norm



$w_1 > w_2$ $w_1 < w_2$

شکل ۲—۳: کانتور واحد نرم چبیشف وزن دار در فضای برداری $R^۲$

پس

$$\begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{w_۱} & x_۲ \geq \frac{-w_۱}{w_۲}\, x_۱ \quad , \quad x_۲ \leq \frac{w_۱}{w_۲}\, x_۱ \\ x_۲ = \frac{۱}{w_۲} & x_۲ \geq \frac{-w_۱}{w_۲}\, x_۱ \quad , \quad x_۲ > \frac{w_۱}{w_۲}\, x_۱ \\ x_۲ = \frac{-۱}{w_۲} & x_۲ < \frac{-w_۱}{w_۲}\, x_۱ \quad , \quad x_۲ \leq \frac{w_۱}{w_۲}\, x_۱ \\ x_۱ = \frac{-۱}{w_۱} & x_۲ < \frac{-w_۱}{w_۲}\, x_۱ \quad , \quad x_۲ > \frac{w_۱}{w_۲}\, x_۱ \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲—۳ مشاهده می‌کنیم نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$b_۱ = (\frac{۱}{w_۱}, \frac{۱}{w_۲}) \qquad b_۲ = (\frac{۱}{w_۱}, \frac{-۱}{w_۲}) \qquad b_۳ = (\frac{-۱}{w_۱}, \frac{-۱}{w_۲}) \qquad b_۴ = (\frac{-۱}{w_۱}, \frac{۱}{w_۲})$$

فرض کنید B° مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم چبیشف وزن دار باشد، دراین صورت برای به دست آوردن شکل کانتور واحد و هم چنین نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری R^n، باید دستگاه نامعادلات زیر را رسم نمود.

$$B^\circ = \{v^* :\ b_g \cdot v^* \leq ۱ \qquad g = \pm ۱, \pm ۲, \cdots, \pm r\}.$$

که در آن b_g ها نقاط گوشه‌ای متناظر با دیسک واحد (B) نرم چبیشف وزن دار می‌باشند.

مثلاً برای به دست آوردن شکل کانتور واحد و نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری R^{2}، داریم.

$$\begin{cases} (\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\ (\frac{1}{w_1}, \frac{-1}{w_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\ (\frac{-1}{w_1}, \frac{-1}{w_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\ (\frac{-1}{w_1}, \frac{1}{w_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \end{cases}$$

یا

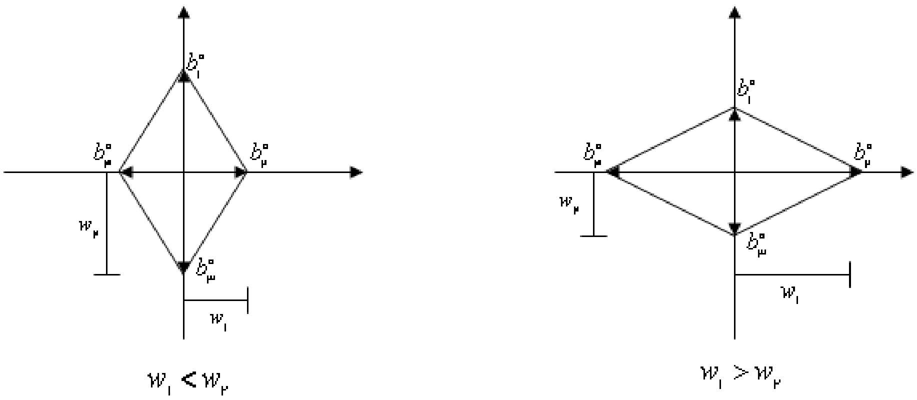
$$\begin{cases} \frac{v_1^*}{w_1} + \frac{v_2^*}{w_2} \leq 1 \\ \frac{v_1^*}{w_1} - \frac{v_2^*}{w_2} \leq 1 \\ -\frac{v_1^*}{w_1} - \frac{v_2^*}{w_2} \leq 1 \\ -\frac{v_1^*}{w_1} + \frac{v_2^*}{w_2} \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم.

$$\begin{cases} v_2^* \leq -\frac{w_2}{w_1} v_1^* + w_2 \\ v_2^* \geq \frac{w_2}{w_1} v_1^* - w_2 \\ v_2^* \geq -\frac{w_2}{w_1} v_1^* - w_2 \\ v_2^* \leq \frac{w_2}{w_1} v_1^* + w_2 \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲—۴ مشاهده می‌کنیم نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$b_1^{\circ} = (0, w_2) \qquad b_2^{\circ} = (w_1, 0) \qquad b_3^{\circ} = (0, -w_2) \qquad b_4^{\circ} = (-w_1, 0)$$



شکل ۲—۴: مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم چبیشف وزن دار در R^2

۲—۳—۳ نرم یک— بینهایت وزن دار ($l_{1,\infty}^{\alpha,\beta}$)

نرم یک—بینهایت وزن دار[5] بردار X در فضای برداری R^n به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$l_{1,\infty}^{\alpha,\ \beta}(X) = \|X\|_{l_{1,\infty}}^{\alpha,\beta} = \|X\|_{l_1}^{\alpha} + \|X\|_{l_\infty}^{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i|x_i| + \max_{i=1,\cdots,n} \beta_i|x_i|$$

که در آن $\alpha_1\ ,\ \cdots\ ,\ \alpha_n > 0$ و $\beta_1\ ,\ \cdots\ ,\ \beta_n > 0$.

برای به دست آوردن شکل کانتور واحد نرم یک— بینهایت وزن دار و هم چنین نقاط گوشه‌ای آن در فضای برداری R^n، باید نقاط $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ که نرم فاصله آن ها از مبدأ برابر واحد می‌باشند، را محاسبه نمود.

مثلاً برای به دست آوردن شکل کانتور واحد نرم یک— بینهایت وزن دار و نقاط گوشه‌ای آن در فضای برداری R^2، داریم.

$$l_{1,\infty}^{\alpha,\beta}(X) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i|x_i| + \max_{i=1,2} \beta_i|x_i|$$

$$= \alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \max\{\beta_1|x_1|, \beta_2|x_2|\}$$

لذا داریم.

$$l_{1,\infty}^{\alpha,\beta}(X) = \alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \frac{|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2| + |\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2|}{2} = 1$$

[5] Weighted One-infinity norm

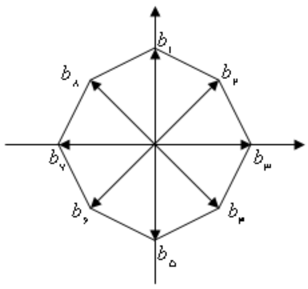
حال با درنظرگرفتن حالات مختلف x_1 و x_2 دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود که با رسم آن شکل کانتور واحد و نقاط گوشه‌ای محاسبه می‌گردند.

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 + \frac{1}{2}|\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2| = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \frac{1}{2}|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2| + \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 < 0 \\ -\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \frac{1}{2}|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2| - \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 + \frac{1}{2}|\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2| = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 < 0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 \geq 0 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 < 0 \\ \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 < 0 \ , \ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \geq 0 \\ \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \ , \ x_2 < 0 \ , \ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 < 0 \\ -\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \geq 0 \\ -\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 < 0 \\ -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 + \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 < 0 \ , \ \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 \geq 0 \\ -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 - \frac{\beta_2}{2}x_2 - \frac{\beta_1}{2}x_1 + \frac{\beta_2}{2}x_2 = 1 & x_1 < 0 \ , \ x_2 < 0 \ , \ \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 < 0 \end{cases}$$

پس



شکل ۲–۵: کانتور واحد نرم یک–بینهایت وزن دار در فضای برداری R^2

$$\begin{cases} (\alpha_1+\beta_1)x_1+\alpha_2 x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_2 \leq \frac{\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ \alpha_1 x_1+(\alpha_2+\beta_2)x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_2 > \frac{\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ (\alpha_1+\beta_1)x_1-\alpha_2 x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 < 0 \quad , \quad x_2 \geq \frac{-\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ \alpha_1 x_1-(\alpha_2+\beta_2)x_2 = 1 & x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 < 0 \quad , \quad x_2 < \frac{-\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ -\alpha_1 x_1+(\alpha_2+\beta_2)x_2 = 1 & x_1 < 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq \frac{-\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ -(\alpha_1+\beta_1)x_1+\alpha_2 x_2 = 1 & x_1 < 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_2 < \frac{-\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ -\alpha_1 x_1-(\alpha_2+\beta_2)x_2 = 1 & x_1 < 0 \quad , \quad x_2 < 0 \quad , \quad x_2 \leq \frac{\beta_1}{\beta_2}x_1 \\ -(\alpha_1+\beta_1)x_1-\alpha_2 x_2 = 1 & x_1 < 0 \quad , \quad x_2 < 0 \quad , \quad x_2 > \frac{\beta_1}{\beta_2}x_1 \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲–۵ مشاهده می‌کنیم نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$b_1 = (0,\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_2}) \qquad b_2 = (\frac{1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1})$$

$$b_3 = (\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}\ ,\ 0) \qquad b_4 = (\frac{1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{-1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1})$$

$$b_5 = (0,\ \frac{-1}{\alpha_2+\beta_2}) \qquad b_6 = (\frac{-1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{-1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1})$$

$$b_7 = (\frac{-1}{\alpha_1+\beta_1}\ ,\ 0) \qquad b_8 = (\frac{-1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1})$$

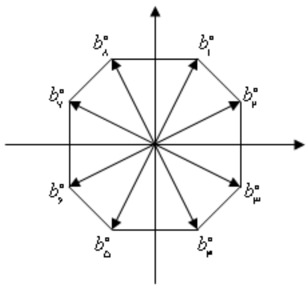
فرض کنید B° مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم یک− بینهایت وزن دار باشد، دراین صورت برای به دست آوردن شکل کانتور واحد و هم چنین نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری R^n، باید دستگاه نامعادلات زیر را رسم نمود.

$$B^\circ = \{v^*:\ b_g \cdot v^* \leq 1 \qquad g = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm r\}.$$

که در آن b_g ها نقاط گوشه‌ای متناظر با دیسک واحد (B) نرم یک− بینهایت وزن دار می‌باشند.

مثلاً برای به دست آوردن شکل کانتور واحد و نقاط گوشه‌ای B° در فضای برداری R^2، داریم.

$$\begin{cases}
(0,\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(\frac{1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}\ , 0) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(\frac{1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{-1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(0,\ \frac{-1}{\alpha_2+\beta_2}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(\frac{-1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{-1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(\frac{-1}{\alpha_1+\beta_1}\ , 0) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1 \\[2ex]
(\frac{-1}{\alpha_1+\beta_1+\frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_2}\ ,\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_2+\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1}) \cdot (v_1^*, v_2^*) \leq 1
\end{cases}$$



شکل ۲−۶: مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم یک−بینهایت وزن دار در $R^۲$

در نتیجه داریم.

$$\begin{cases} v_۲^* \leq \alpha_۲ + \beta_۲ \\ v_۲^* \leq -\frac{\alpha_۲+\beta_۲+\frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱}{\alpha_۱+\beta_۱+\frac{\beta_۱}{\beta_۲}\alpha_۲} v_۱^* + \alpha_۲ + \beta_۲ + \frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱ \\ v_۱^* \leq \alpha_۱ + \beta_۱ \\ v_۲^* \geq \frac{\alpha_۲+\beta_۲+\frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱}{\alpha_۱+\beta_۱+\frac{\beta_۱}{\beta_۲}\alpha_۲} v_۱^* - (\alpha_۲ + \beta_۲ + \frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱) \\ v_۲^* \geq -(\alpha_۲ + \beta_۲) \\ v_۲^* \geq -\frac{\alpha_۲+\beta_۲+\frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱}{\alpha_۱+\beta_۱+\frac{\beta_۱}{\beta_۲}\alpha_۲} v_۱^* - (\alpha_۲ + \beta_۲ + \frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱) \\ v_۱^* \geq -(\alpha_۱ + \beta_۱) \\ v_۲^* \leq \frac{\alpha_۲+\beta_۲+\frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱}{\alpha_۱+\beta_۱+\frac{\beta_۱}{\beta_۲}\alpha_۲} v_۱^* + \alpha_۲ + \beta_۲ + \frac{\beta_۲}{\beta_۱}\alpha_۱ \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲−۶ مشاهده می‌کنیم نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$b_۱^\circ = (\alpha_۱, \alpha_۲ + \beta_۲) \qquad b_۲^\circ = (\alpha_۱ + \beta_۱, \alpha_۲)$$

$$b_۳^\circ = (\alpha_۱ + \beta_۱, -\alpha_۲) \qquad b_۴^\circ = (\alpha_۱, -\alpha_۲ - \beta_۲)$$

$$b_۵^\circ = (-\alpha_۱, -\alpha_۲ - \beta_۲) \qquad b_۶^\circ = (-\alpha_۱ - \beta_۱, -\alpha_۲)$$

$$b_۷^\circ = (-\alpha_۱ - \beta_۱, \alpha_۲) \qquad b_۸^\circ = (-\alpha_۱, \alpha_۲ + \beta_۲)$$

۲—۴ خواص نرم های بلوکی

قضیه ۲.۲ ([۱۷]): هر نرم بلوکی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\|V\| = \min\{\sum_{g=1}^{r} |\beta_g| : \quad V = \sum_{g=1}^{r} \beta_g b_g\}.$$

اثبات: همان طور که قبلاً گفتیم، نرم بلوکی متناظر با مجموعه B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|V\| = \inf\{\mu > 0 \ : \ \frac{V}{\mu} \in B\}.$$

می‌دانیم دیسک واحد هر نرم بلوکی یعنی B، مجموعه‌ای محدب و مجموعه نقاط گوشه‌ای آن ناتهی و تعداد آن ها متناهی است. هم چنین می‌دانیم B کراندار است، لذا B دارای هیچ جهت رأسی[۶] نمی‌باشد. بنابراین می‌توان $\frac{V}{\mu} \in B$ را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{V}{\mu} = \sum_{g=1}^{r} (\tilde{\lambda}_g b_g + \tilde{\lambda}_{-g} b_{-g})$$

که در آن

$$\sum_{g=1}^{r} (\tilde{\lambda}_g + \tilde{\lambda}_{-g}) = 1$$

و

$$\tilde{\lambda}_g \geq 0 \qquad g = 1, \cdots, r$$

بنابراین داریم

$$\|V\| = \inf\{\mu > 0 \ : \ \frac{V}{\mu} = \sum_{g=1}^{r} (\tilde{\lambda}_g b_g + \tilde{\lambda}_{-g} b_{-g}) \, , \, \sum_{g=1}^{r} (\tilde{\lambda}_g + \tilde{\lambda}_{-g}) = 1 \, , \, \tilde{\lambda}_g \geq 0 \quad g = 1, \cdots, r\}$$

حال با درنظرگرفتن $\lambda_g = \mu \tilde{\lambda}_g$ و $b_{-g} = -b_g$ می‌توان نوشت

$$\|V\| = \inf\{\mu > 0 \ : \ V = \sum_{g=1}^{r} (\lambda_g b_g - \lambda_{-g} b_g) \, , \, \sum_{g=1}^{r} (\lambda_g + \lambda_{-g}) = \mu \, , \, \lambda_g \geq 0 \quad for \ all \ g\}$$

چون دیسک واحد هر نرم بلوکی کراندار است، لذا

$$\|V\| = \min\{\mu > 0 \ : \ V = \sum_{g=1}^{r} (\lambda_g b_g - \lambda_{-g} b_g) \, , \, \sum_{g=1}^{r} (\lambda_g + \lambda_{-g}) = \mu \, , \, \lambda_g \geq 0 \quad for \ all \ g\}$$

---

[۶] Extreme direction: فرض کنید X یک مجموعه محدب باشد، بردار غیرصفر d جهت مجموعه X نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x_0 \in X$، شعاع $\{x_0 + \lambda d \ , \ \lambda \geq 0\}$ نیز در X باشد. یک جهت رأسی برای مجموعه X، جهتی مانند $d \in D$ است که نتوان آن را به صورت ترکیب خطی مثبت دو جهت متمایز از D نوشت، که در آن D مجموعه تمام جهت های مجموعه X است. دو جهت d_1 و d_2 را متمایز نامند هرگاه نتوان d_1 را به صورت مضرب مثبتی از d_2 نوشت.

با قراردادن $\beta_g = \lambda_g - \lambda_{-g}$ و $|\beta_g| = \lambda_g + \lambda_{-g}$ داریم

$$\|V\| = \min\{\sum_{g=1}^{r} |\beta_g| : \quad V = \sum_{g=1}^{r} \beta_g b_g\}. \qquad \square$$

قبلاً بیان شد که نرم های معروف منهتن و چبیشف نمونه هایی از نرم های بلوکی اند. می‌توان این نرم ها را به صورت قضیه فوق نوشت. یعنی

۱) می‌دانیم در نرم منهتن $r = 2$ ، $b_1 = (0, 1)$ و $b_2 = (1, 0)$. لذا داریم

$$\begin{aligned} \|V\| &= \min\{|\beta_1| + |\beta_2| : \ (v_1, v_2) = \beta_1(0, 1) + \beta_2(1, 0)\} \\ &= \min\{|\beta_1| + |\beta_2| : \ \beta_2 = v_1 \ , \ \beta_1 = v_2\} \\ &= \min\{|v_2| + |v_1|\} = |v_2| + |v_1|. \end{aligned}$$

پس

$$\|V\| = |v_1| + |v_2| = \|V\|_1$$

۲) می‌دانیم در نرم چبیشف $r = 2$ ، $b_1 = (1, 1)$ و $b_2 = (1, -1)$. لذا داریم.

$$\begin{aligned} \|V\| &= \min\{|\beta_1| + |\beta_2| : \ (v_1, v_2) = \beta_1(1, 1) + \beta_2(1, -1)\} \\ &= \min\{|\beta_1| + |\beta_2| : \ (v_1, v_2) = (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 - \beta_2)\} \\ &= \min\{|\beta_1| + |\beta_2| : \ v_1 + v_2 = 2\beta_1 \ , \ v_1 - v_2 = 2\beta_2\} \\ &= \min\{|\beta_1| + |\beta_2| : \ \beta_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \ , \ \beta_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}\} \\ &= \min\{|\frac{v_1 + v_2}{2}| + |\frac{v_1 - v_2}{2}|\} = \frac{|v_1 + v_2|}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2} \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم

$$\max\{|v_1|, |v_2|\} = \tfrac{|v_1+v_2|}{2} + \tfrac{|v_1-v_2|}{2}$$

پس

$$\|V\| = \max\{|v_1|, |v_2|\} = \|V\|_\infty$$

قضیه ۳.۲ ([۱۷]): هر نرم بلوکی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\|V\| = \max\{|V \cdot b_g^\circ| : \quad g = 1, \cdots, r^\circ\}.$$

برای نرم های منهتن، چبیشف و یک−بینهایت قضیه فوق را در فضای برداری R^2، بررسی می‌کنیم.

۱) می‌دانیم در نرم منهتن $r = r^\circ = ۲$ ، $b_۱^\circ = (۱, ۱)$ و $b_۲^\circ = (۱, -۱)$. لذا

$$\begin{aligned} \|V\| &= \max\{|V \cdot b_g^\circ| : \ g = ۱, ۲\} \\ &= \max\{|V \cdot b_۱^\circ|, |V \cdot b_۲^\circ|\} \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم

$$V \cdot b_۱^\circ = (v_۱, v_۲) \cdot (۱, ۱) = v_۱ + v_۲$$

و

$$V \cdot b_۲^\circ = (v_۱, v_۲) \cdot (۱, -۱) = v_۱ - v_۲$$

پس

$$\|V\| = \max\{|v_۱ + v_۲|, |v_۱ - v_۲|\}$$

یا

$$\|V\| = \frac{|v_۱+v_۲+v_۱-v_۲|+|v_۱+v_۲-v_۱+v_۲|}{۲} = \frac{|۲v_۱|+|۲v_۲|}{۲}$$

بنابراین

$$\|V\| = |v_۱| + |v_۲| = \|V\|_۱$$

۲) می‌دانیم در نرم چبیشف $r = r^\circ = ۲$ ، $b_۱^\circ = (\circ, ۱)$ و $b_۲^\circ = (۱, \circ)$. لذا

$$\begin{aligned} \|V\| &= \max\{|V \cdot b_g^\circ| : \ g = ۱, ۲\} \\ &= \max\{|V \cdot b_۱^\circ|, |V \cdot b_۲^\circ|\} \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم

$$V \cdot b_۱^\circ = (v_۱, v_۲) \cdot (\circ, ۱) = v_۲$$

و

$$V \cdot b_۲^\circ = (v_۱, v_۲) \cdot (۱, \circ) = v_۱$$

پس

$$\|V\| = \max\{|v_۲|, |v_۱|\} = \|V\|_\infty$$

۳) می‌دانیم در نرم یک– بینهایت $r = r^\circ = ۴$ و

$$b_۱^\circ = (\alpha_۱, \alpha_۲ + \beta_۲) \qquad b_۲^\circ = (\alpha_۱ + \beta_۱, \alpha_۲)$$

$$b_۳^\circ = (\alpha_۱ + \beta_۱, -\alpha_۲) \qquad b_۴^\circ = (\alpha_۱, -\alpha_۲ - \beta_۲)$$

بنابراین داریم

$$\|V\| = \max\{|V \cdot b_g^\circ| : \quad g = ۱,۲,۳,۴\}$$

پس

$$\|V\| = \max\{|(v_۱, v_۲) \cdot (\alpha_۱, \alpha_۲ + \beta_۲)| \;,\; |(v_۱, v_۲) \cdot (\alpha_۱ + \beta_۱, \alpha_۲)| \;,$$
$$|(v_۱, v_۲) \cdot (\alpha_۱ + \beta_۱, -\alpha_۲)| \;,\; |(v_۱, v_۲) \cdot (\alpha_۱, -\alpha_۲ - \beta_۲)|\}$$

یا

$$\|V\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$$

که در آن

$$\begin{aligned} a &= \alpha_۱ v_۱ + (\alpha_۲ + \beta_۲) v_۲ \\ b &= (\alpha_۱ + \beta_۱) v_۱ + \alpha_۲ v_۲ \\ c &= (\alpha_۱ + \beta_۱) v_۱ - \alpha_۲ v_۲ \\ d &= \alpha_۱ v_۱ - (\alpha_۲ + \beta_۲) v_۲ \end{aligned}$$

اکنون دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) اگر $v_۱$ و $v_۲$ هم علامت باشند، دراین صورت ماکزیمم یا در a، یا در b اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$\|V\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} = \max\{|a|, |b|\} = \frac{|a+b| + |a-b|}{۲}$$

یا

$$\begin{aligned} \|V\| &= \frac{|۲\alpha_۱ v_۱ + ۲\alpha_۲ v_۲ + \beta_۲ v_۲ + \beta_۱ v_۱| + |\beta_۲ v_۲ - \beta_۱ v_۱|}{۲} \\ &= \frac{|۲(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲) + \beta_۲ v_۲ + \beta_۱ v_۱| + |\beta_۲ v_۲ - \beta_۱ v_۱|}{۲} \end{aligned}$$

چون $v_۱$ و $v_۲$ هم علامت می‌باشند و هم چنین $\alpha_۱$ ، $\alpha_۲$ ، $\beta_۱$ و $\beta_۲$ اعدادی مثبتند، لذا $\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲$ و $\beta_۲ v_۲ + \beta_۱ v_۱$ هم علامتند. در نتیجه

$$|۲(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲) + \beta_۲ v_۲ + \beta_۱ v_۱| = |۲(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲)| + |\beta_۲ v_۲ + \beta_۱ v_۱|$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\|V\| &= \frac{|2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)| + |\beta_2 v_2 + \beta_1 v_1| + |\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1|}{2} \\ &= |\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2| + \frac{|\beta_2 v_2 + \beta_1 v_1| + |\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1|}{2}\end{aligned}$$

چون v_1 و v_2 هم علامتند و هم چنین α_1 و α_2 اعدادی مثبت هستند، لذا $\alpha_1 v_1$ و $\alpha_2 v_2$ هم علامت هستند. بنابراین

$$|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2| = |\alpha_1 v_1| + |\alpha_2 v_2|$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\|V\| &= |\alpha_1 v_1| + |\alpha_2 v_2| + \frac{|\beta_2 v_2 + \beta_1 v_1| + |\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1|}{2} \\ &= |\alpha_1 v_1| + |\alpha_2 v_2| + \max\{|\beta_1 v_1|, |\beta_2 v_2|\}\end{aligned}$$

چون α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 اعدادی مثبت هستند، پس

$$\|V\| = \alpha_1 |v_1| + \alpha_2 |v_2| + \max\{\beta_1 |v_1|, \beta_2 |v_2|\}$$

بنابراین داریم

$$\|V\| = \|V\|^{\alpha}_{l_1} + \|V\|^{\beta}_{l_\infty}.$$

ب) اگر v_1 و $-v_2$ هم علامت باشند، دراین صورت ماکزیمم یا در c، یا در d اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$\|V\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} = \max\{|c|, |d|\} = \frac{|c+d| + |c-d|}{2}$$

یا

$$\begin{aligned}\|V\| &= \frac{|2\alpha_1 v_1 - 2\alpha_2 v_2 + \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2| + |\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2|}{2} \\ &= \frac{|2\alpha_1 v_1 + 2\alpha_2(-v_2) + \beta_1 v_1 + \beta_2(-v_2)| + |\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2|}{2} \\ &= \frac{|2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2(-v_2)) + \beta_1 v_1 + \beta_2(-v_2)| + |\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2|}{2}\end{aligned}$$

چون v_1 و $-v_2$ هم علامت می‌باشند و هم چنین α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 اعدادی مثبتند، لذا $\alpha_1 v_1 + \alpha_2(-v_2)$ و $\beta_1 v_1 + \beta_2(-v_2)$ هم علامت هستند. در نتیجه

$$|2(\alpha_1 v_1+\alpha_2(-v_2))+\beta_1 v_1+\beta_2(-v_2)| = |2(\alpha_1 v_1+\alpha_2(-v_2))|+|\beta_1 v_1+\beta_2(-v_2)|$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\|V\| &= |\alpha_1 v_1+\alpha_2(-v_2)|+\frac{|\beta_1 v_1-\beta_2 v_2|+|\beta_1 v_1+\beta_2 v_2|}{2}\\ &= |\alpha_1 v_1+\alpha_2(-v_2)|+\max\{|\beta_1 v_1|,|\beta_2 v_2|\}\end{aligned}$$

چون v_1 و $-v_2$ هم علامتند و هم چنین α_1 و α_2 اعدادی مثبت هستند، لذا $\alpha_1 v_1$ و $\alpha_2(-v_2)$ هم علامت هستند. بنابراین

$$|\alpha_1 v_1+\alpha_2(-v_2)| = |\alpha_1 v_1|+|\alpha_2(-v_2)|$$

درنتیجه داریم

$$\|V\| = |\alpha_1 v_1|+|\alpha_2(-v_2)|+\max\{|\beta_1 v_1|,|\beta_2 v_2|\}$$

چون α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 اعدادی مثبتند، پس

$$\|V\| = \alpha_1|v_1|+\alpha_2|-v_2|+\max\{\beta_1|v_1|,\beta_2|v_2|\}$$

از طرفی می‌دانیم $|-v_2|=|v_2|$، لذا

$$\|V\| = \alpha_1|v_1|+\alpha_2|v_2|+\max\{\beta_1|v_1|,\beta_2|v_2|\}$$

بنابراین داریم

$$\|V\| = \|V\|^{\alpha}_{l_1}+\|V\|^{\beta}_{l_\infty}.$$

قضیه ۴.۲ ([۱۷]): مجموعه نرم های بلوکی در مجموعه تمام نرم ها چگال است.

اثبات: هر مجموعه فشرده، محدب و نسبت به مبدأ متقارن را می‌توان به وسیله یک چندضلعی که خودش فشرده، محدب و نسبت به مبدأ متقارن است تقریب زد. بنابراین هر نرم یا یک نرم بلوکی است یا به دنباله ای از نرم‌های بلوکی میل می‌کند. در نتیجه مجموعه نرم های بلوکی در مجموعه تمام نرم ها چگال است. □

لم ۱.۲ ([۱۰]): فرض کنید γ یک نرم بلوکی در فضای برداری R^2 باشد. اگر $X \in R^2$ در مخروط اصلی[۷] $C(b_i, b_j)$ قرار داشته باشد و هم چنین $X=\lambda_i b_i+\lambda_j b_j$ نمایش منحصربه فرد X از b_i و b_j باشد، آن گاه $\gamma(X)=\lambda_i+\lambda_j$.

[۷] Cone: اشتراک تعداد متناهی از نیم فضاهایی که ابرصفحه های متناظر با آن ها از مبدأ مختصات می‌گذرند، مخروط چندوجهی نامیده می‌شود. به عبارت دیگر C یک مخروط چندوجهی است، اگر بتوان آن را به صورت $\{x:\ Ax \le 0\}$ نشان داد، که در آن $A_{m\times n}$ به طوری که iامین سطر آن بردار عمود بر ابرصفحه‌ی نظیر با iامین نیم فضاست.

اثبات: فرض کنید Z نقطه تلاقی کانتور نرم γ با خط مستقیمی که از مرکز دیسک و X می‌گذرد، باشد. دیسک واحد هر نرم بلوکی مجموعه‌ای محدب است. چون نقطه $Z \in C(b_i, b_j)$ نقطه‌ای غیرگوشه‌ای متعلق به دیسک واحد است و بین دو نقطه گوشه‌ای b_i و b_j قرار دارد، لذا Z را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط b_i و b_j نوشت. یعنی

$$Z = \alpha b_i + (1 - \alpha) b_j$$

که در آن $\alpha \in [0, 1]$.

چون نقاط Z و X روی یک خط مستقیم قرار دارند، لذا X را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$X = \gamma(X) Z = \gamma(X)(\alpha b_i + (1 - \alpha) b_j)$$

پس

$$X = \gamma(X) \alpha b_i + \gamma(X)(1 - \alpha) b_j \qquad (۲-۱)$$

بنا به فرض قضیه و رابطه (۲-۱) می‌توان X را به دو صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} X = \lambda_i b_i + \lambda_j b_j, \\ X = \gamma(X) \alpha b_i + \gamma(X)(1 - \alpha) b_j. \end{cases}$$

با تلفیق دو معادله دستگاه فوق داریم.

$$\begin{cases} \lambda_i = \gamma(X) \alpha, \\ \lambda_j = \gamma(X)(1 - \alpha). \end{cases}$$

با حل دستگاه اخیر داریم

$$\gamma(X) = \lambda_i + \lambda_j. \qquad \square$$

۲-۵ رابطه نرم های بلوکی و نرم منهتن

در این بخش نرم های بلوکی که دقیقاً دارای چهار بردار اصلی می‌باشند را در فضای برداری R^2 در نظر می‌گیریم و رابطه آن‌ها با نرم منهتن را بیان می‌نماییم. برای تشخیص بردارهای اصلی نرم بلوکی از نرم منهتن، فرض می‌کنیم u^1، u^2، u^3 و u^4 نشانگر بردارهای اصلی نرم بلوکی و v^1، v^2، v^3 و v^4 بیانگر بردارهای اصلی نرم منهتن باشند.

فرض می‌کنیم γ نرم بلوکی با چهار بردار اصلی زیر باشد:

$$u^1=(u_1^1,u_2^1) \quad u^2=(u_1^2,u_2^2) \quad u^3=(u_1^3,u_2^3) \quad u^4=(u_1^4,u_2^4)$$

به طوری که $u^3=-u^1$ و $u^4=-u^2$.

هم چنین می‌دانیم:

$$v^1=(0,1) \quad v^2=(1,0) \quad v^3=(0,-1) \quad v^4=(-1,0)$$

اگر T یک تبدیل خطی باشد به طوری که $T(u^1)=Tu^1=v^1$ و $T(u^2)=Tu^2=v^2$، آن گاه

$$T(u^1)=Tu^1=v^1$$

$$=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و

$$T(u^2)=Tu^2=v^2$$

$$=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} t_{11}u_1^1+t_{12}u_2^1=0 \\ t_{21}u_1^1+t_{22}u_2^1=1 \\ t_{11}u_1^2+t_{12}u_2^2=1 \\ t_{21}u_1^2+t_{22}u_2^2=0 \end{cases}$$

تبدیل خطی زیر به دست می آید.

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\begin{bmatrix} u_2^1 & -u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{bmatrix}$$

تبدیل معکوس T به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$T^{-1}=[\frac{1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\begin{bmatrix} u_2^1 & -u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{bmatrix}]^{-1}=(u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2)\begin{bmatrix} u_2^1 & -u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= (u_2^1 u_1^2 - u_1^1 u_2^2)\ (\frac{1}{u_2^1 u_1^2 - u_1^1 u_2^2}) \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1^1 \\ u_2^2 & u_2^1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1^1 \\ u_2^2 & u_2^1 \end{bmatrix}.$$

لم ۲.۲ ([۱۰]): فرض کنیدγ نرم بلوکی با چهار بردار اصلی u^1، u^2، u^3 و u^4 باشد و T تبدیل خطی به فرم فوق باشد، به طوری که برای هر $X \in R^2$ تعریف می‌کنیم $T(X) = TX$. دراین صورت برای هر $X, Y \in R^2$ داریم $\gamma(X,Y) = l_1(T(X), T(Y))$.

اثبات: ابتدا حالت $Y = \bar{0}$ را بررسی می‌کنیم.

۱) اگر $X = \bar{0}$، آن گاه

$$\gamma(\bar{0}, \bar{0}) = l_1(T(\bar{0}), T(\bar{0})) = l_1(T\bar{0}, T\bar{0})$$

یا

$$\gamma(\bar{0}, \bar{0}) = l_1(\bar{0} - \bar{0}) = l_1(\bar{0}) = 0$$

بنابراین در این حالت قضیه اثبات می‌شود.

۲) اگر $X \neq \bar{0}$ دراین صورت برای $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ فرض می‌کنیم $X \in C(u^i, u^{i+1})$ که $C(u^i, u^{i+1})$ مخروط تولید شده توسط u^i و u^{i+1} است. هم چنین فرض می‌کنیم $X = \lambda_i u^i + \lambda_{i+1} u^{i+1}$ نمایش یکتا X بر حسب u^i و u^{i+1} است. چون نرم γ تنها دارای چهار بردار اصلی است، لذا بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $u^i \in \{u^1, -u^1\}$ و $u^{i+1} \in \{u^2, -u^2\}$.

$$l_1(T(X), \bar{0}) = l_1(T(X) - T(\bar{0})) = l_1(T(X - \bar{0}))$$

یا

$$l_1(T(X), \bar{0}) = l_1(T(X)) = l_1(TX)$$

از طرفی می‌دانیم

$$T=\frac{1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\begin{bmatrix} u_2^1 & -u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$l_1(TX)=l_1\left(\frac{1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\begin{bmatrix} u_2^1 & -u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\left|\frac{1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\right| l_1\left(\begin{bmatrix} u_2^1x_1-u_1^1x_2 \\ u_1^2x_2-u_2^2x_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\left|\frac{1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\right| \left(|u_2^1x_1-u_1^1x_2|+|u_1^2x_2-u_2^2x_1|\right)$$

$$=\left|\frac{u_2^1x_1-u_1^1x_2}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\right|+\left|\frac{u_1^2x_2-u_2^2x_1}{u_2^1u_1^2-u_1^1u_2^2}\right|=\lambda_{i+1}+\lambda_i$$

لذا

$$l_1(T(X),\bar{0})=\gamma(X)=\gamma(X,\bar{0})$$

بنابراین در این حالت نیز قضیه برقرار است.

اکنون حالتی که $X,Y\in R^2$ و $X,Y\neq 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$l_1(T(X),T(Y))=l_1(T(X)-T(Y))=l_1(T(X)-T(Y),\bar{0})$$

چون T تبدیل خطی است، درنتیجه داریم.

$$l_1(T(X),T(Y))=l_1(T(X-Y),\bar{0})=\gamma(X-Y,\bar{0})$$

یا

$$l_1(T(X),T(Y))=\gamma(X-Y)=\gamma(X,Y) \qquad \square$$

به عنوان مثال در زیر به رابطه نرم چبیشف (نرم بلوکی) و نرم منهتن می پردازیم.

می‌دانیم بردارهای اصلی نرم چبیشف عبارتند از:

$$u^1=(1,1) \qquad u^2=(1,-1) \qquad u^3=(-1,-1) \qquad u^4=(-1,1)$$

و بردارهای اصلی نرم منهتن نیز عبارتند از:

$$v^{1}=(0,1) \qquad v^{2}=(1,0) \qquad v^{3}=(0,-1) \qquad v^{4}=(-1,0)$$

دراین صورت داریم.

$$T(u^{1})=Tu^{1}=v^{1}$$

$$=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و

$$T(u^{2})=Tu^{2}=v^{2}$$

$$=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} t_{11}+t_{12}=0 \\ t_{21}+t_{22}=1 \\ t_{11}-t_{12}=1 \\ t_{21}-t_{22}=0 \end{cases}$$

تبدیل خطی زیر به دست می‌آید.

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

۲–۶ کوتاهترین مسیر در نرم های بلوکی

در مسائل مکانیابی هر بردار $\vec{v}$، به عنوان یک مسیر تلقی می‌شود. به طوری که ابتدای بردار $\vec{v}$ مبدأ مسیر و انتهای بردار $\vec{v}$، مقصد مسیر $\vec{v}$ است. فرض کنید $\vec{r}$ و $\vec{d}$ دو زیرمسیر باشند به طوری که $\vec{v}=\vec{r}+\vec{d}$. به علاوه فرض کنید زیرمسیرهای $\vec{r}$ و $\vec{d}$ به ترتیب در جهت بردارهای اصلی نرم منهتن و چبیشف باشند. یعنی زیرمسیر $\vec{r}$ دارای طولی برابر $\|\vec{r}\|_{l_1}$ و زیرمسیر $\vec{d}$ دارای طولی برابر $\|\vec{d}\|_{l_\infty}$ است.
با فرضیات فوق، طول مسیر $\vec{v}$ با استفاده از زیرمسیرهای $\vec{r}$ و $\vec{d}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{r}\|_{l_1} + \|\vec{d}\|_{l_\infty}$$

اکنون هدف یافتن زیرمسیرهایی است که طول مسیر $\vec{v}$ کمینه شود. برای این منظور باید مسئله زیر را حل نمود.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\vec{r},\vec{d}) = \|\vec{v}\| = \|\vec{r}\|_{l_1} + \|\vec{d}\|_{l_\infty} \\ s.t. \quad & \\ & \vec{r}+\vec{d}=\vec{v} \end{aligned} \tag{۲−۲}$$

نشان می‌دهیم در حالت کلی

$$\vec{d} = \min\{|v_1|,|v_2|\}(sgn\ v_1, sgn\ v_2)$$

و

$$\vec{r} = \vec{v} - \vec{d}$$

جواب بهینه مسئله (۲−۲) است.

با استفاده از تعاریف نرم منهتن و چبیشف در فضای برداری R^2، مسئله (۲−۲) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\vec{r},\vec{d}) = |r_1| + |r_2| + max\{|d_1|,|d_2|\} \\ s.t. \quad & \\ & \vec{v}=\vec{r}+\vec{d} \end{aligned}$$

با جایگذاری $r_1 = v_1 - d_1$ و $r_2 = v_2 - d_2$ تابع دو متغیره $F(\vec{r},\vec{d})$ به تابع یک متغیره $F(\vec{d})$ و مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min \quad F(\vec{d}) = |v_1 - d_1| + |v_2 - d_2| + max\{|d_1|,|d_2|\} \tag{۳−۲}$$

برای حل مسئله فوق باید چهار حالت زیر بررسی شود:

۱) اگر $v_1 \geq 0$ و $v_2 \geq 0$، آن گاه $0 \leq d_1 \leq v_1$ و $0 \leq d_2 \leq v_2$. بنابراین مسئله (۲−۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\vec{d}) = v_1 - d_1 + v_2 - d_2 + \max\{|d_1|,|d_2|\} \\ s.t. \quad & \\ & 0 \leq d_1 \leq v_1 \\ & 0 \leq d_2 \leq v_2 \end{aligned}$$

چون بردار $\vec{d}$ در جهت بردارهای اصلی نرم چبیشف است، لذا $d_1 = d_2$. بنابراین مسئله فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\vec{d}) = v_1 - d_2 + v_2 - d_2 + |d_2| \\ s.t. \quad & \\ & 0 \le d_2 \le v_1 \\ & 0 \le d_2 \le v_2 \end{aligned}$$

چون $d_2 \ge 0$، لذا مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\vec{d}) = v_1 + v_2 - d_2 \\ s.t. \quad & \\ & 0 \le d_2 \le \min\{v_1, v_2\} \end{aligned}$$

چون v_1 و v_2 هر دو مثبت هستند، لذا عبارت $v_1 + v_2 - d_2$ زمانی کمینه می‌شود که d_2 بیشترین مقدار خود را بگیرد. یعنی

$$d_2 = \min\{v_1, v_2\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_2$$

که sgn تابع علامت[8] است. یعنی

$$sgn(v) = \begin{cases} 1 & v > 0, \\ 0 & v = 0, \\ -1 & v < 0. \end{cases}$$

از طرفی چون $d_1 = d_2$، بنابراین

$$d_1 = \min\{v_1, v_2\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_1$$

در نتیجه داریم

$$\vec{d} = \min\{|v_1|, |v_2|\}(sgn\ v_1, sgn\ v_2).$$

۲) اگر $v_1 \le 0$ و $v_2 \ge 0$، آن گاه $v_1 \le d_1 \le 0$ و $0 \le d_2 \le v_2$. بنابراین مسئله (۲—۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & -v_1 + d_1 + v_2 - d_2 + max\{|d_1|, |d_2|\} \\ s.t. \quad & \\ & v_1 \le d_1 \le 0 \\ & 0 \le d_2 \le v_2 \end{aligned}$$

[8] Signum function

چون بردار $\vec{d}$ در جهت بردارهای اصلی نرم چبیشف است، لذا $d_1 = -d_2$. بنابراین مسئله فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\min \quad & -v_1 - d_2 + v_2 - d_2 + |d_2| \\
s.t. \quad & \\
& v_1 \leq -d_2 \leq 0 \\
& 0 \leq d_2 \leq v_2
\end{aligned}$$

چون $d_2 \geq 0$، لذا مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\min \quad & -v_1 + v_2 - 2d_2 + d_2 \\
s.t. \quad & \\
& 0 \leq d_2 \leq -v_1 \\
& 0 \leq d_2 \leq v_2
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
\min \quad & -v_1 + v_2 - d_2 \\
s.t. \quad & \\
& 0 \leq d_2 \leq \min\{-v_1, v_2\}
\end{aligned}$$

چون $v_1 \leq 0$ و $v_2 \geq 0$، لذا عبارت $-v_1 + v_2$ عبارتی مثبت است. پس عبارت $-v_1 + v_2 - d_2$ زمانی کمینه است که d_2 بیشترین مقدار خود را بگیرد. یعنی

$$d_2 = \min\{-v_1, v_2\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_2$$

از طرفی چون $d_1 = -d_2$، بنابراین

$$d_1 = -\min\{-v_1, v_2\} = -\min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_1$$

در نتیجه داریم

$$\vec{d} = \min\{|v_1|, |v_2|\}(sgn\ v_1, sgn\ v_2).$$

۳) اگر $v_1 \leq 0$ و $v_2 \leq 0$، آن گاه $v_1 \leq d_1 \leq 0$ و $v_2 \leq d_2 \leq 0$. بنابراین مسئله (۲—۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\min \quad & -v_1 + d_1 - v_2 + d_2 + \max\{|d_1|, |d_2|\} \\
s.t. \quad & \\
& v_1 \leq d_1 \leq 0 \\
& v_2 \leq d_2 \leq 0
\end{aligned}$$

چون بردار $\vec{d}$ در جهت بردارهای اصلی نرم چبیشف است، لذا $d_1 = d_2$. بنابراین مسئله فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{ll} \min & -v_1 + d_2 - v_2 + d_2 + |d_2| \\ s.t. & \\ & v_1 \leq d_2 \leq 0 \\ & v_2 \leq d_2 \leq 0 \end{array}$$

چون $d_2 \leq 0$، لذا مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{ll} \min & -v_1 - v_2 + d_2 \\ s.t. & \\ & \max\{v_1, v_2\} \leq d_2 \leq 0 \end{array}$$

چون $v_1 \leq 0$ و $v_2 \leq 0$، لذا عبارت $-v_1 - v_2$ عبارتی مثبت است. پس عبارت $-v_1 - v_2 + d_2$ زمانی کمینه است که d_2 کمترین مقدار خود را بگیرد. یعنی

$$d_2 = \max\{v_1, v_2\}$$

از طرفی می‌دانیم

$$\max\{v_1, v_2\} = -\min\{-v_1, -v_2\}$$

چون $v_1 \leq 0$ و $v_2 \leq 0$، لذا داریم

$$\max\{v_1, v_2\} = -\min\{|v_1|, |v_2|\}$$

پس

$$d_2 = -\min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_2$$

از طرفی چون $d_1 = d_2$، بنابراین

$$d_1 = -\min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_1$$

در نتیجه داریم

$$\vec{d} = \min\{|v_1|, |v_2|\}(sgn\ v_1, sgn\ v_2).$$

۴) اگر $v_1 \geq 0$ و $v_2 \leq 0$، آن گاه $0 \leq d_1 \leq v_1$ و $v_2 \leq d_2 \leq 0$. بنابراین مسئله (۲−۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{ll} \min & F(\vec{d}) = v_1 - d_1 - v_2 + d_2 + max\{|d_1|, |d_2|\} \\ s.t. & \\ & 0 \leq d_1 \leq v_1 \\ & v_2 \leq d_2 \leq 0 \end{array}$$

چون بردار $\vec{d}$ در جهت بردارهای اصلی نرم چبیشف است، لذا $d_1 = -d_2$. بنابراین مسئله به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \min \quad & v_1 + d_2 - v_2 + d_2 + |d_2| \\ s.t. \quad & \\ & 0 \leq -d_2 \leq v_1 \\ & v_2 \leq d_2 \leq 0 \end{aligned}$$

چون $d_2 \leq 0$، لذا مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & v_1 - v_2 + d_2 \\ s.t. \quad & \\ & -v_1 \leq d_2 \leq 0 \\ & v_2 \leq d_2 \leq 0 \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} \min \quad & v_1 - v_2 + d_2 \\ s.t. \quad & \\ & \max\{-v_1, v_2\} \leq d_2 \leq 0 \end{aligned}$$

چون $v_1 \geq 0$ و $v_2 \leq 0$، لذا عبارت $v_1 - v_2$ مثبت است. پس عبارت $v_1 - v_2 + d_2$ زمانی کمینه می‌شود که d_2 کمترین مقدار خود را بگیرد. یعنی

$$d_2 = \max\{-v_1, v_2\}$$

از طرفی می‌دانیم

$$\max\{-v_1, v_2\} = -\min\{v_1, -v_2\}$$

چون $v_1 \geq 0$ و $v_2 \leq 0$، لذا داریم

$$\max\{-v_1, v_2\} = -\min\{|v_1|, |v_2|\}$$

پس

$$d_2 = -\min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_2$$

از طرفی چون $d_1 = -d_2$، بنابراین

$$d_1 = \min\{|v_1|, |v_2|\} = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_1$$

در نتیجه داریم

$$\vec{d} = \min\{|v_1|, |v_2|\}(sgn\ v_1, sgn\ v_2).$$

طول بردار $\vec{d}$ که با $D(\vec{v})$ نشان می‌دهیم برابر است با

$$D(\vec{v}) \equiv \|\vec{d}\|_\infty = \max\{|d_1|, |d_2|\}$$

ولی چون بردار $\vec{d}$ در جهت بردارهای اصلی نرم چبیشف است، لذا $|d_1| = |d_2|$. بنابراین

$$D(\vec{v}) = \max\{|d_1|, |d_1|\} = |d_1|$$

از طرفی داریم

$$d_1 = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_1$$

و

$$d_2 = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_2$$

بنابراین

$$|d_1| = |d_2| = \min\{|v_1|, |v_2|\}$$

پس

$$D(\vec{v}) = \min\{|v_1|, |v_2|\}.$$

هم چنین طول بردار $\vec{r}$ که با $R(\vec{v})$ نشان می‌دهیم برابر است با

$$R(\vec{v}) \equiv \|\vec{r}\|_1 = \|\vec{v} - \vec{d}\|_1 = |v_1 - d_1| + |v_2 - d_2|$$

چون

$$d_1 = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_1$$

و

$$d_2 = \min\{|v_1|, |v_2|\} sgn\ v_2$$

بنابراین داریم

$$R(\vec{v}) = |v_1 - \min\{|v_1|, |v_2|\}(sgn\ v_1)| + |v_2 - \min\{|v_1|, |v_2|\}(sgn\ v_2)| \qquad (۲-۴)$$

اکنون دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) $|v_1| \geq |v_2|$:

دراین صورت رابطه (۲-۴) به صورت زیر خواهد بود.

$$R(\vec{v}) = |v_1 - |v_2|.(sgn\ v_1)| + |v_2 - |v_2|.(sgn\ v_2)| = |v_1 - |v_2|.sgn\ v_1|$$

اگر $v_2 \geq 0$، آن گاه

$$R(\vec{v}) = |v_1 - v_2.sgn\ v_1|$$

دراین صورت دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

الف) اگر $v_1 > 0$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_1 - v_2.sgn\ v_1| = |v_1 - v_2| \\ &= \frac{|v_1 - v_2|}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_1+v_2|}{2}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_1 + v_2|}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2} - \frac{|v_1 + v_2|}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_1|, |v_2|\} - \min\{|v_1|, |v_2|\}$$

ب) اگر $v_1 < 0$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_1 - v_2.sgn\ v_1| = |v_1 + v_2| \\ &= \frac{|v_1 + v_2|}{2} + \frac{|v_1 + v_2|}{2} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_1-v_2|}{2}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_1 + v_2|}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2} + \frac{|v_1 + v_2|}{2} - \frac{|v_1 - v_2|}{2}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_1|, |v_2|\} - \min\{|v_1|, |v_2|\}$$

اگر $v_2 \leq 0$، آن گاه

$$R(\vec{v}) = |v_1 + v_2.sgn\ v_1|$$

دراین صورت نیز یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

الف) اگر $v_1 > 0$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_1 + v_2.sgn\ v_1| = |v_1 + v_2| \\ &= \frac{|v_1 + v_2|}{2} + \frac{|v_1 + v_2|}{2} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_1-v_2|}{2}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_1+v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2} + \frac{|v_1+v_2|}{2} - \frac{|v_1-v_2|}{2}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_1|, |v_2|\} - \min\{|v_1|, |v_2|\}$$

ب) اگر $v_1 < 0$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_1 + v_2.sgn\ v_1| = |v_1 - v_2| \\ &= \frac{|v_1-v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_1+v_2|}{2}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_1+v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2} - \frac{|v_1+v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_1|, |v_2|\} - \min\{|v_1|, |v_2|\}$$

۲) $|v_1| \leq |v_2|$:

دراین صورت رابطه (۲–۴) به صورت زیر خواهد بود.

$$R(\vec{v}) = |v_1 - |v_1|.(sgn\ v_1)| + |v_2 - |v_1|.(sgn\ v_2)| = |v_2 - |v_1|.sgn\ v_2|$$

اگر $v_1 \geq 0$، آن گاه

$$R(\vec{v}) = |v_2 - v_1.sgn\ v_2|$$

دراین صورت دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

الف) اگر $v_2 > 0$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_2 - v_1.sgn\ v_2| = |v_2 - v_1| \\ &= \frac{|v_2-v_1|}{2} + \frac{|v_2-v_1|}{2} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_2+v_1|}{2}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_2+v_1|}{2} + \frac{|v_2-v_1|}{2} - \frac{|v_2+v_1|}{2} + \frac{|v_2-v_1|}{2}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_۱|, |v_۲|\} - \min\{|v_۱|, |v_۲|\}$$

ب) اگر $v_۲ < ۰$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_۲ - v_۱.sgn\ v_۲| = |v_۲ + v_۱| \\ &= \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_۲ - v_۱|}{۲}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} - \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_۱|, |v_۲|\} - \min\{|v_۱|, |v_۲|\}$$

اگر $v_۱ \leq ۰$، آن گاه

$$R(\vec{v}) = |v_۲ + v_۱.sgn\ v_۲|$$

دراین صورت نیز یکی از دو حالت زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:

الف) اگر $v_۲ > ۰$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_۲ + v_۱.sgn\ v_۲| = |v_۲ + v_۱| \\ &= \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_۲ - v_۱|}{۲}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} - \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_۱|, |v_۲|\} - \min\{|v_۱|, |v_۲|\}$$

ب) اگر $v_۲ < ۰$، آن گاه

$$\begin{aligned} R(\vec{v}) &= |v_۲ + v_۱ .sgn\ v_۲| = |v_۲ - v_۱| \\ &= \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_۲+v_۱|}{۲}$ داریم.

$$R(\vec{v}) = \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲} - \frac{|v_۲ + v_۱|}{۲} + \frac{|v_۲ - v_۱|}{۲}$$

بنابراین

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_۱|, |v_۲|\} - \min\{|v_۱|, |v_۲|\}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$R(\vec{v}) = \max\{|v_۱|, |v_۲|\} - \min\{|v_۱|, |v_۲|\}.$$

حال نشان می‌دهیم $\|\vec{v}\|^{\alpha,\beta}_{l_۱,l_\infty} = \tau_۱ R(\vec{v}) + \tau_۲ D(\vec{v})$ که در آن $\tau_۱ = \alpha + \beta$ و $\tau_۲ = ۲\alpha + \beta$.

می‌دانیم

$$\|\vec{v}\|^{\alpha,\beta}_{l_۱,l_\infty} = \alpha\|\vec{v}\|_{l_۱} + \beta\|\vec{v}\|_{l_\infty} = \alpha(|v_۱| + |v_۲|) + \beta \max\{|v_۱|, |v_۲|\}. \qquad (۵-۲)$$

اکنون دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $v_۱$ و $v_۲$ هم علامت باشند، آن گاه

$$|v_۱| + |v_۲| = |v_۱ + v_۲| = \frac{|v_۱ + v_۲|}{۲} + \frac{|v_۱ + v_۲|}{۲}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_۱-v_۲|}{۲}$ داریم.

$$|v_۱| + |v_۲| = \frac{|v_۱ + v_۲|}{۲} + \frac{|v_۱ - v_۲|}{۲} + \frac{|v_۱ + v_۲|}{۲} - \frac{|v_۱ - v_۲|}{۲}$$

بنابراین

$$|v_۱| + |v_۲| = \max\{|v_۱|, |v_۲|\} + \min\{|v_۱|, |v_۲|\}$$

در نتیجه رابطه (۲—۵) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^{\alpha,\beta}_{l_۱,l_\infty} &= \alpha(\max\{|v_۱|, |v_۲|\} + \min\{|v_۱|, |v_۲|\}) + \beta \max\{|v_۱|, |v_۲|\} \\ &= (\alpha + \beta) \max\{|v_۱|, |v_۲|\} + \alpha \min\{|v_۱|, |v_۲|\} \end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $(\alpha+\beta)\min\{|v_1|,|v_2|\}$ به عبارت فوق داریم.

$$\|\vec{v}\|_{l_1,l_\infty}^{\alpha,\beta} = (\alpha+\beta)(\max\{|v_1|,|v_2|\} - \min\{|v_1|,|v_2|\}) + (2\alpha+\beta)\min\{|v_1|,|v_2|\}$$

پس

$$\|\vec{v}\|_{l_1,l_\infty}^{\alpha,\beta} = (\alpha+\beta)R(\vec{v}) + (2\alpha+\beta)D(\vec{v}).$$

۲) اگر v_1 و v_2 هم علامت نباشند، آن گاه

$$|v_1|+|v_2| = |v_1-v_2| = \frac{|v_1-v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\frac{|v_1+v_2|}{2}$ داریم

$$|v_1|+|v_2| = \frac{|v_1+v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2} - \frac{|v_1+v_2|}{2} + \frac{|v_1-v_2|}{2}$$

بنابراین

$$|v_1|+|v_2| = \max\{|v_1|,|v_2|\} + \min\{|v_1|,|v_2|\}$$

در نتیجه رابطه (۲—۵) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|_{l_1,l_\infty}^{\alpha,\beta} &= \alpha(\max\{|v_1|,|v_2|\} + \min\{|v_1|,|v_2|\}) + \beta\max\{|v_1|,|v_2|\} \\ &= (\alpha+\beta)\max\{|v_1|,|v_2|\} + \alpha\min\{|v_1|,|v_2|\}\end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت $(\alpha+\beta)\min\{|v_1|,|v_2|\}$ به عبارت فوق داریم.

$$\|\vec{v}\|_{l_1,l_\infty}^{\alpha,\beta} = (\alpha+\beta)(\max\{|v_1|,|v_2|\} - \min\{|v_1|,|v_2|\}) + (2\alpha+\beta)\min\{|v_1|,|v_2|\}$$

پس

$$\|\vec{v}\|_{l_1,l_\infty}^{\alpha,\beta} = (\alpha+\beta)R(\vec{v}) + (2\alpha+\beta)D(\vec{v}).$$

فصل ۳

مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات

در این فصل به بررسی مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات می‌پردازیم. مطالب این فصل با توجه به [٦] گردآوری شده است.

۳−۱ مسئله مکانیابی دایره کمترین مربعات

فرض کنید n نقطه $A_i = (x_i, y_i)$، $i = ۱, \cdots, n$ در صفحه داده شده است. در مسئله مکانیابی دایره کمترین مربعات، هدف پیداکردن مکان یک دایره مانند C به گونه‌ای است که مجموع مربعات فاصله بین محیط دایره و نقاط موجود در صفحه، کمینه گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \quad F(C) = \sum_{i=۱}^{n} [d_i(C)]^{۲}. \qquad (۳−۱)$$

که در آن $C(X, r)$ دایره‌ای به مرکز $X = (x, y)$ و شعاع r است و $d_i(C)$ کوتاهترین فاصله بین نقطه A_i و محیط دایره C می‌باشد.

اگر A_i نقطه‌ای داخل دایره C باشد آن گاه $d_i(C) = r - d(X, A_i)$، اگر نقطه A_i خارج دایره C باشد آن گاه $d_i(C) = d(X, A_i) - r$ و اگر A_i نقطه‌ای روی دایره C باشد آن گاه $d_i(C) = ۰$. که $d(X, A_i)$ بیانگر فاصله نقطه A_i تا مرکز دایره C، یعنی $X = (x, y)$ است. پس می‌توان نوشت.

$$d_i(C) = |d(X, A_i) - r| \qquad i = ۱, \cdots, n.$$

بنابراین مسئله (۳−۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\min_{x,y,r} \quad F(X, r) = \sum_{i=۱}^{n} [|d(X, A_i) - r|]^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} [d(X, A_i) - r]^{۲}.$$

با تعریف

$$d_i(x, y) = d(X, A_i)$$

مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{x,y,r} \quad F(x, y, r) = \sum_{i=۱}^{n} [d_i(x, y) - r]^{۲}. \qquad (۳−۲)$$

در این فصل تابع فاصله را اقلیدسی در نظر می‌گیریم.

لم ۳.۱ ([٦]): شعاع جواب بهینه مسئله (۳−۱) برابر میانگین فاصله تمام نقاط موجود در صفحه تا مرکز دایره می‌باشد.

اثبات: با ثابت درنظرگرفتن مرکز دایره C، یعنی $X=(x,y)$ تابع هدف سه متغیره $F(x,y,r)$ به تابع هدف تک متغیره $F(r)$ و مسئله (۳$-$۲) به مسئله زیر تبدیل می‌گردد.

$$\min_r \quad F(r)=\sum_{i=1}^{n}[d_i(x,y)-r]^2$$

برای مینیمم کردن تابع یک متغیره $F(r)$ باید ابتدا نسبت به r از آن مشتق گرفت و سپس آن را برابر صفر قرار داد. بنابراین داریم.

$$F'(r)=\sum_{i=1}^{n}2(-1)[d_i(x,y)-r]$$

پس

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}(-2)[d_i(x,y)-r] \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)+2nr \end{aligned}$$

بنابراین

$$-2nr=-2\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)$$

درنتیجه داریم.

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y).$$

برای این که r به دست آمده تابع $F(r)$ را مینیمم کند، باید مشتق دوم تابع $F(r)$ به ازای آن مثبت باشد. بنابراین باید مشتق دوم تابع F را محاسبه و آن را به ازای r به دست آمده تعیین علامت کنیم.

$$F''(r)=-2\sum_{i=1}^{n}(-1)=2n$$

چون n تعداد نقاط موجود در صفحه است، پس $n>0$. بنابراین $F''(r)>0$. در نتیجه r به دست آمده تابع $F(r)$ را مینیمم می‌کند. □

لم ۲.۳ ([۶]): مرکز جواب بهینه مسئله (۳$-$۱) نقطه‌ای است که واریانس فاصله نقاط موجود در صفحه تا آن نقطه مینیمم شود.

اثبات: پس از ساده سازی تابع $F(x,y,r)$، مسئله (۳$-$۲) به صورت زیر خواهد شد.

$$\min_{x,y,r} \quad F(x,y,r)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2(x,y)-2r\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)+nr^2$$

با جایگذاری $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)$ تابع هدف سه متغیره $F(x,y,r)$ به تابع هدف دو متغیره $F(x,y)$ و مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{x,y} \quad F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2(x,y)-2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\right)\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)+n\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\right]^2$$

یا

$$\min_{x,y} \quad F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y) - \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2$$

از طرفی می‌دانیم

$$\begin{aligned} Var(d_i(x,y)) &= \overline{d_i^2(x,y)} - [\overline{d_i(x,y)}]^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x.y)}{n} - [\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i(x.y)}{n}]^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y) - \frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2 \end{aligned}$$

چون نقاطی که مینیمم در آن ها رخ می‌دهد، برای هر دو تابع

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y) - \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2$$

و

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y) - \frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2$$

یکسان است. لذا مرکز دایره بهینه نقطه‌ای است که واریانس فاصله نقاط تا آن نقطه مینیمم شود. □

با استفاده از دو لم فوق می‌توان نتیجه گرفت، مسئله (۳—۲) با مسئله

$$\min_{x,y} \quad F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y) - \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2 \tag{۳—۳}$$

معادل است. یعنی

$$\min_{x,y,r} \quad \sum_{i=1}^{n}[d_i(x,y) - r]^2 \equiv \min_{x,y} \quad \{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y) - \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2\}. \tag{۴—۳}$$

۳—۲ تحلیل مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات

همان طور که قبلاً گفته شد، در مسئله مکانیابی دایره کمترین مربعات، هدف یافتن مکان دایره‌ای است به قسمی که مجموع مربعات فاصله نقاط موجود در صفحه تا محیط دایره مینیمم شود. یعنی

$$\min_{x,y,r} \quad F(x,y,r) = \sum_{i=1}^{n}[d_i(x,y) - r]^2.$$

با توجه به رابطه (۳—۴) به جای مینیمم کردن تابع هدف سه متغیره $F(x,y,r)$، تابع هدف دو متغیره زیر را مینیمم می‌کنیم.

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y)-\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)]^2.$$

چون تابع فاصله اقلیدسی است، لذا

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]-\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\,]^2$$

برای مینیمم کردن تابع دو متغیره $F(x,y)$ باید ابتدا نقاط بحرانی[1] تابع F را به دست آورده و سپس عبارت $F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y)-F_{xy}(x,y)F_{yx}(x,y)$ را در این نقاط تعیین علامت کنیم.

همان طور که می‌دانیم نقطه $C\in D_F$ نقطه بحرانی تابع $F(x,y)$ است، اگر داشته باشیم $F_x(C)=0$ و $F_y(C)=0$ یا به طورمعادل $\nabla F(C)=0$. هم چنین اگر $F_x(C)$ یا $F_y(C)$ و یا هر دو موجود نباشند، C نقطه بحرانی تابع $F(x,y)$ خواهد بود. چون $F(x,y)$ تابعی دو متغیره است، لذا برای به دست آوردن نقاط بحرانی آن باید توابع $F_x(x,y)$ و $F_y(x,y)$ را محاسبه نمود.

مشتق تابع $F(x,y)$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}F_x(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}2(x-x_i)-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2(x-x_i)}{2\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\\ &= 2[\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\,]\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)[1-(\frac{1}{n})\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{d_i(x,y)}]]\end{aligned}$$

بنابراین داریم.

$$F_x(x,y)=2\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}]].$$

مشتق تابع $F(x,y)$ نسبت به y به طور مشابه به دست آمده و به صورت زیر است.

$$F_y(x,y)=2\sum_{i=1}^{n}[(y-y_i)[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}]].$$

حال برای این که نقاط بحرانی تابع $F(x,y)$ را به دست آوریم باید اولاً نقاطی را بیابیم که به ازای آن ها $F_x(x,y)$ یا $F_y(x,y)$ و یا هر دو موجود نباشند، ثانیاً نقاطی را پیدا کنیم که به ازای آن ها $F_x(x,y)$ و $F_y(x,y)$ هر دو صفر گردند.

توابع $F_x(x,y)$ و $F_y(x,y)$ به ازای نقاطی تعریف نشده‌اند، که به ازای آن نقاط $d_i(x,y)=0$. و این زمانی اتفاق می‌افتد که مرکز دایره C، یعنی $X=(x,y)$ منطبق بر یکی از نقاط موجود در صفحه باشد.

[1] Critical points

اکنون باید نقاطی را بیابیم که به ازای آن نقاط، $F_x(x,y)$ و $F_y(x,y)$ هر دو تعریف شده و برابر صفر گردند. برای این منظور باید دستگاه زیر را حل نمود.

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 2\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}]] = 0 \\ \\ F_y(x,y) = 2\sum_{i=1}^{n}[(y-y_i)[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}]] = 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

شاید به نظر رسد مسئله (۳−۲) به روش تکراری زیر حل شود. که این روش برای حل مسئله وبر توسط وایزفلد استفاده شده است.

از معادله اول دستگاه (۳−۵) داریم.

$$\sum_{i=1}^{n}[x(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}) - x_i(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)})] = 0$$

یا

$$x\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)})$$

در نتیجه داریم.

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)})}{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)})}.$$

به طور مشابه از معادله دوم دستگاه (۳−۵) داریم.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)})}{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)})}.$$

الگوریتم با نقطه اولیه $(x^{(0)}, y^{(0)})$ آغاز می‌شود و روند تکراری زیر را دنبال می‌کند.

$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(k)},y^{(k)})}{nd_i(x^{(k)},y^{(k)})})}{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(k)},y^{(k)})}{nd_i(x^{(k)},y^{(k)})})}.$$

و

$$y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(k)},y^{(k)})}{nd_i(x^{(k)},y^{(k)})})}{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(k)},y^{(k)})}{nd_i(x^{(k)},y^{(k)})})}.$$

اما تابع

$$G(x,y,r) = [\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} - r]^2$$

تابعی محدب نیست.

برای اثبات محدب نبودن تابع G، نیازمند معرفی ماتریس هسین[۲] G و ماتریس نیمه معین مثبت[۳] هستیم.

تعریف ۳–۱ : ماتریس $D(X)_{n\times n}$ مرکب از مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع G، **ماتریس هسین** G نامیده می‌شود.

تعریف ۳–۲ : ماتریس $A(X)_{n\times n}$ که عناصر آن یعنی a_{ij}، به ازای $i = ۱,\cdots,n$ و $j = ۱,\cdots,n$ توابعی روی مجموعه $E \subset R^n$ هستند، **نیمه معین مثبت** روی E نامیده می‌شود اگر

$$\forall\, V \in R^n\ ,\ V \neq ۰\ ,\ X \in E\ ,\ V^T A(X) V \geq ۰,$$

ماتریس $A(X)_{n\times n}$ نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر کهادهای اصلی پیشرو آن همگی مثبت باشند. n کهاد اصلی پیشرو برای ماتریس $A(X)_{n\times n}$ وجود دارد. i امین کهاد اصلی پیشرو، دترمینان زیر ماتریسی از $A(X)$ است که از i سطر و i ستون اول تشکیل می‌شود.

لم ۳.۳ ([۱۳]): فرض کنید $G \in C^۲$. دراین صورت تابع G روی مجموعه محدب Ω مشتمل بر نقطه‌ای درونی، محدب است اگر و تنها اگر ماتریس هسین تابع G در سراسر Ω نیمه معین مثبت باشد.

اکنون نشان می‌دهیم تابع

$$G(x,y,r) = [\sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲} - r]^۲$$

محدب نمی‌باشد. با توجه به لم ۳.۳ محدب نبودن تابع $G(x,y,r)$، معادل برقرار نبودن یکی از شرایط زیر است.

$$\frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} > ۰ \qquad , \qquad |H(x,y,r)| > ۰ \qquad , \qquad |D(x,y,r)| > ۰$$

که در آن

$$H(x,y,r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} & \frac{\partial^۲ G}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^۲ G}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^۲ G}{\partial y^۲} \end{bmatrix}$$

و

$$D(x,y,r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} & \frac{\partial^۲ G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^۲ G}{\partial x \partial r} \\ \frac{\partial^۲ G}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^۲ G}{\partial y^۲} & \frac{\partial^۲ G}{\partial y \partial r} \\ \frac{\partial^۲ G}{\partial r \partial x} & \frac{\partial^۲ G}{\partial r \partial y} & \frac{\partial^۲ G}{\partial r^۲} \end{bmatrix}.$$

[۲] Hessian matrix

[۳] Positive semidefinite matrix

بنابراین نیازمند محاسبه مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع G هستیم، که در زیر به محاسبه آن ها می‌پردازیم.

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2(x-x_i) - 2r\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2(y-y_i) - 2r\frac{y-y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 2r - 2\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 2 - 2r\frac{(y-y_i)^2}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x} = 2r\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r\partial x} = -2\frac{(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} = 2r\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 2 - 2r\frac{(x-x_i)^2}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r\partial y} = -2\frac{(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial r} = -2\frac{(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial r} = -2\frac{(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}$$

$$\frac{\partial^۲ G}{\partial r^۲} = ۲$$

حال به بررسی شرط اول یعنی

$$\frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} = ۲ - ۲[\frac{r}{\sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲}}][\frac{(y-y_i)^۲}{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲}]$$

می‌پردازیم. باید سه حالت زیر را بررسی کنیم:

۱) اگر A_i نقطه‌ای داخل دایره C باشد، آن گاه

$$r > \sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲} \qquad , \qquad (y-y_i)^۲ \leq (x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲$$

بنابراین $\frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} > ۰$.

۲) اگر نقطه A_i خارج دایره C باشد، آن گاه

$$r < \sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲} \qquad , \qquad (y-y_i)^۲ < (x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲$$

بنابراین $\frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} > ۰$.

۳) اگر A_i نقطه‌ای روی دایره C باشد، آن گاه

$$r = \sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲} \qquad , \qquad (y-y_i)^۲ \leq (x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲$$

بنابراین $\frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} > ۰$.

با توجه به سه حالت فوق نتیجه می‌گیریم که شرط اول به ازای تمام نقاط برقرار است.

حال باید شرط دوم را بررسی کنیم. برای این منظور نیاز به محاسبه $|H(x,y,r)|$ داریم.

$$|H(x,y,r)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} & \frac{\partial^۲ G}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^۲ G}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^۲ G}{\partial y^۲} \end{vmatrix} = ۴ - ۴\frac{r}{\sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲}}$$

اکنون سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر A_i نقطه‌ای داخل دایره C باشد، آن گاه

$$r > \sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲}$$

بنابراین $|H(x,y,r)| < ۰$.

۲) اگر نقطه A_i خارج دایره C باشد، آن گاه

$$r < \sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲}$$

بنابراین $|H(x,y,r)| > ۰$.

۳) اگر A_i نقطه‌ای روی دایره C باشد، آن گاه

$$r = \sqrt{(x-x_i)^۲ + (y-y_i)^۲}$$

بنابراین $|H(x,y,r)| = ۰$.

با توجه به سه حالت فوق درمی‌یابیم که به ازای تمام نقاط $|H(x,y,r)| \not> ۰$. بنابراین تابع $G(x,y,r)$ تابعی محدب نیست. از محدب نبودن تابع $G(x,y,r)$، محدب نبودن تابع

$$F(x,y,r) = \sum_{i=۱}^{n}[d_i(x,y) - r]^۲ = \sum_{i=۱}^{n} G_i(x,y,r)$$

نتیجه می‌شود.

چون $F(x,y,r)$ تابعی محدب نیست، لذا روش تکراری وایزفلد ممکن است واگرا شود.(مثال ۱.۳ را ببینید.) هم چنین ممکن است جواب به دست آمده از روش وایزفلد، لزوماً مینیمم موضعی نباشد. (مثال ۲.۳ را ببینید.)

مثال ۱.۳ نقاط $A_۱ = (-۱,۱)$، $A_۲ = (۰,۱)$ و $A_۳ = (۱,۳)$ را در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دایره‌ای است که مجموع مربعات فواصل نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل.

جدول ۳—۱: نتایج حاصل از روش وایزفلد با نقطه شروع $(۰,۰)$

شماره تکرار	x	y
اول	۰	۰
دوم	۰/۹۵۴۷−	۰/۰۸۳۲−
سوم	۱/۵۰۰۲−	۰/۰۲۰۹
چهارم	۱/۶۴۱۵−	۰/۰۶۷۳
⋮	⋮	⋮
پانصدم	۱۰/۸۹۰۱−	۱۰/۹۳۵۷−
پانصدویکم	۱۰/۹۰۷۰−	۱۰/۹۵۵۷−
⋮	⋮	⋮
هفتصدم	۱۴/۲۳۷۱−	۱۴/۸۹۰۱−
هفتصدویکم	۱۴/۲۵۳۶−	۱۴/۹۰۹۷−
⋮	⋮	⋮
هزارم	۱۹/۱۴۷۲−	۲۰/۶۸۹۲−
هزارویکم	۱۹/۱۶۳۵−	۲۰/۷۰۸۳−

از جدول (۳—۱) در می‌یابیم که روش وایزفلد برای این مثال واگراست.

دستگاه (۳–۵) دستگاهی با معادلات غیرخطی است. بنابراین برای حل آن از روش نیوتن رافسون[۴] که روشی تکراری است، استفاده می‌شود.

فرض می‌کنیم $X = (x, y)$ جواب دقیق دستگاه (۳–۵) و $X_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ تقریبی از آن باشد. دراین صورت می‌توان نوشت.

$$x = x_\circ + h_\circ \qquad , \qquad y = y_\circ + k_\circ$$

بنابراین اگر بتوانیم $h_\circ$ و $k_\circ$ را محاسبه کنیم آن گاه با اضافه کردن آن ها به ترتیب، به $x_\circ$ و $y_\circ$ به جواب مطلوب می‌رسیم. اکنون سعی می‌کنیم تقریب هایی از $h_\circ$ و $k_\circ$ را حساب کنیم. برای این منظور به جای توابع $F_x(x, y)$ و $F_y(x, y)$ از بسط تیلور آن ها استفاده می‌کنیم. برای این منظور نیازمند محاسبه $F_{xx}(x, y)$ ، $F_{xy}(x, y)$ ، $F_{yx}(x, y)$ و $F_{yy}(x, y)$ هستیم.

مشتق تابع $F_x(x, y)$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_{xx}(x, y) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}[[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)}]-(x-x_i)[\frac{nd_i(x,y)\sum_{j=1}^{n}\frac{2(x-x_j)}{2d_j(x,y)} - n(\frac{2(x-x_i)}{2d_i(x,y)})\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{n^2 d_i^2(x,y)}]]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i(x,y)} - (x-x_i)\frac{d_i(x,y)\sum_{j=1}^{n}\frac{x-x_j}{d_j(x,y)} - \frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)}{nd_i^2(x,y)}]$$

$$= n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=1}^{n}\frac{x-x_j}{d_j(x,y)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)^2}{d_i^3(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)$$

$$= \frac{1}{n}[n^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y) - \sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=1}^{n}\frac{x-x_j}{d_j(x,y)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)^2}{d_i^3(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y)]$$

از طرفی داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y) = [d_1(x,y) + \cdots + d_n(x,y)][\frac{1}{d_1(x,y)} + \cdots + \frac{1}{d_n(x,y)}]$$

و

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)^2}{d_i^3(x,y)}\sum_{j=1}^{n} d_j(x,y) = [d_1(x,y) + \cdots + d_n(x,y)][\frac{(x-x_1)^2}{d_1^3(x,y)} + \cdots + \frac{(x-x_n)^2}{d_n^3(x,y)}]$$

[۴] Newton-Raphson

و

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}\frac{x-x_j}{d_j(x,y)}=[\frac{x-x_۱}{d_۱(x,y)}+\cdots+\frac{x-x_n}{d_n(x,y)}][\frac{x-x_۱}{d_۱(x,y)}+\cdots+\frac{x-x_n}{d_n(x,y)}]=[\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^۲$$

لذا

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x-x_i)^۲}{d_i^۳(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)-\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{d_i(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)=$$

$$[d_۱(x,y)+\cdots+d_n(x,y)][\frac{(x-x_۱)^۲-d_۱^۲(x,y)}{d_۱^۳(x,y)}+\cdots+\frac{(x-x_n)^۲-d_n^۲(x,y)}{d_n^۳(x,y)}]$$

$$=[d_۱(x,y)+\cdots+d_n(x,y)][-\frac{(y-y_۱)^۲}{d_۱^۳(x,y)}-\cdots-\frac{(y-y_n)^۲}{d_n^۳(x,y)}]$$

بنابراین

$$F_{xx}(x,y)=\frac{۱}{n}[n^۲-\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{d_i(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)-\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}\frac{x-x_j}{d_j(x,y)}+\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x-x_i)^۲}{d_i^۳(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)]$$

در نتیجه داریم.

$$F_{xx}(x,y)=\frac{۱}{n}[n^۲-\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(y-y_i)^۲}{d_i^۳(x,y)}-[\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^۲].$$

مشتق تابع $F_x(x,y)$ نسبت به y به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_{xy}(x,y)=\sum_{i=۱}^{n}[(x-x_i)[-\frac{nd_i(x,y)\sum_{j=۱}^{n}\frac{۲(y-y_j)}{۲d_j(x,y)}-n(\frac{۲(y-y_i)}{۲d_i(x,y)})\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)}{n^۲d_i^۲(x,y)}]]$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}[(x-x_i)[-\frac{d_i(x,y)\sum_{j=۱}^{n}\frac{y-y_j}{d_j(x,y)}-\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)}{nd_i^۲(x,y)}]]$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}[(x-x_i)[-\frac{\sum_{j=۱}^{n}\frac{y-y_j}{d_j(x,y)}}{nd_i(x,y)}+\frac{y-y_i}{nd_i^۳(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)]]$$

$$=\frac{۱}{n}[-\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}\frac{y-y_j}{d_j(x,y)}+\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{d_i^۳(x,y)}\sum_{j=۱}^{n}d_j(x,y)]$$

از طرفی داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{d_i^3(x,y)}\sum_{j=1}^{n}d_j(x,y)=$$

$$[d_1(x,y)+\cdots+d_n(x,y)][\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{d_1^3(x,y)}+\cdots+\frac{(x-x_n)(y-y_n)}{d_n^3(x,y)}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{d_i^3(x,y)}$$

در نتیجه داریم.

$$F_{xy}(x,y)=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{d_i^3(x,y)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}].$$

مشتق تابع $F_y(x,y)$ نسبت به x و y به طور مشابه به دست آمده و به صورت زیر است.

$$F_{yx}(x,y)=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{(y-y_i)(x-x_i)}{d_i^3(x,y)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}].$$

و

$$F_{yy}(x,y)=\frac{1}{n}[n^2-\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_i)^2}{d_i^3(x,y)}-[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}]^2].$$

بسط تیلور توابع $F_x(x,y)$ و $F_y(x,y)$ حول نقطه $X_0=(x_0,y_0)$ به صورت زیر است.

$$F_x(x,y)=F_x(x_0+h_0,y_0+k_0)=F_x(x_0,y_0)+h_0F_{xx}(x_0,y_0)+k_0F_{xy}(x_0,y_0)+o(\varepsilon^2)$$

و

$$F_y(x,y)=F_y(x_0+h_0,y_0+k_0)=F_y(x_0,y_0)+h_0F_{yx}(x_0,y_0)+k_0F_{yy}(x_0,y_0)+o(\varepsilon^2)$$

که در آن ها ε بر حسب h_0 و k_0 است.

با صرف نظر از جمله $o(\varepsilon^2)$ داریم.

$$F_x(x,y)\approx F_x(x_0,y_0)+h_0F_{xx}(x_0,y_0)+k_0F_{xy}(x_0,y_0)$$

و

$$F_y(x,y)\approx F_y(x_0,y_0)+h_0F_{yx}(x_0,y_0)+k_0F_{yy}(x_0,y_0)$$

چون $X=(x,y)$ جواب دستگاه (۳—۵) است. لذا داریم.

$$\begin{cases} h_0F_{xx}(x_0,y_0)+k_0F_{xy}(x_0,y_0)\approx -F_x(x_0,y_0),\\ \\ h_0F_{yx}(x_0,y_0)+k_0F_{yy}(x_0,y_0)\approx -F_y(x_0,y_0).\end{cases} \qquad (۳—۶)$$

برای پیداکردن تقریب هایی از $h_\circ$ و $k_\circ$، باید دستگاه (۳—۶) را حل نماییم. دستگاه فوق در صورتی دارای جواب است که دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد. یعنی

$$F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-F_{xy}(x_\circ,y_\circ)F_{yx}(x_\circ,y_\circ)\neq \circ$$

از معادله اول دستگاه (۳—۶) داریم.

$$k_\circ \approx \frac{-F_x(x_\circ,y_\circ)-h_\circ\ F_{xx}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xy}(x_\circ,y_\circ)} \qquad (۳—۷)$$

با قراردادن $k_\circ$ به دست آمده از رابطه (۳—۷) در معادله دوم دستگاه (۳—۶) داریم.

$$F_y(x_\circ,y_\circ)+h_\circ\ F_{yx}(x_\circ,y_\circ)+\frac{-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-h_\circ\ F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xy}(x_\circ,y_\circ)}\approx \circ$$

با فرض پیوسته بودن توابع $F_{xy}(x,y)$ و $F_{yx}(x,y)$ در یک همسایگی از نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ داریم.

$$F_{yx}(x_\circ,y_\circ)=F_{xy}(x_\circ,y_\circ)$$

لذا

$$\frac{F_y(x_\circ,y_\circ)F_{xy}(x_\circ,y_\circ)+h_\circ F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-h_\circ F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xy}(x_\circ,y_\circ)}\approx \circ$$

پس

$$F_y(x_\circ,y_\circ)F_{xy}(x_\circ,y_\circ)+h_\circ F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-h_\circ F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)\approx \circ$$

بنابراین داریم.

$$h_\circ \approx \frac{F_y(x_\circ,y_\circ)F_{xy}(x_\circ,y_\circ)-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)} \qquad (۳—۸)$$

با قراردادن مقدار $h_\circ$ به دست آمده از رابطه (۳—۸) در معادله (۳—۷) داریم.

$$k_\circ \approx \frac{-۱}{F_{xy}(x_\circ,y_\circ)}\left[F_x(x_\circ,y_\circ)+F_{xx}(x_\circ,y_\circ)\frac{F_y(x_\circ,y_\circ)F_{xy}(x_\circ,y_\circ)-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)}\right]$$

یا

$$k_\circ \approx \frac{-۱}{F_{xy}(x_\circ,y_\circ)}\left[\frac{F_x(x_\circ,y_\circ)F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)}+\right.$$

$$\left.\frac{F_y(x_\circ,y_\circ)F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{xy}(x_\circ,y_\circ)-F_x(x_\circ,y_\circ)F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)}{F_{xx}(x_\circ,y_\circ)F_{yy}(x_\circ,y_\circ)-F_{xy}^{۲}(x_\circ,y_\circ)}\right]$$

یا

$$k_{\circ} \approx \frac{-1}{F_{xy}(x_{\circ},y_{\circ})}\left[\frac{-F_x(x_{\circ},y_{\circ})F_{xy}^{2}(x_{\circ},y_{\circ})+F_y(x_{\circ},y_{\circ})F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})F_{xy}(x_{\circ},y_{\circ})}{F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})F_{yy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_{xy}^{2}(x_{\circ},y_{\circ})}\right]$$

بنابراین

$$k_{\circ} \approx \frac{F_x(x_{\circ},y_{\circ})F_{xy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_y(x_{\circ},y_{\circ})F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})}{F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})F_{yy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_{xy}^{2}(x_{\circ},y_{\circ})} \qquad (۳-۹)$$

در نتیجه داریم.

$$\begin{cases} h_{\circ} \approx \frac{F_y(x_{\circ},y_{\circ})F_{xy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_x(x_{\circ},y_{\circ})F_{yy}(x_{\circ},y_{\circ})}{F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})F_{yy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_{xy}^{2}(x_{\circ},y_{\circ})} \\ \\ k_{\circ} \approx \frac{F_x(x_{\circ},y_{\circ})F_{xy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_y(x_{\circ},y_{\circ})F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})}{F_{xx}(x_{\circ},y_{\circ})F_{yy}(x_{\circ},y_{\circ})-F_{xy}^{2}(x_{\circ},y_{\circ})} \end{cases} \qquad (۳-۱۰)$$

چون جواب به دست آمده از روابط (۳-۱۰) تقریبی از $h_{\circ}$ و $k_{\circ}$ است، لذا $x_{\circ}+h_{\circ}$ تقریبی بهتر از $x_{\circ}$ برای x و $y_{\circ}+k_{\circ}$ تقریبی بهتر از $y_{\circ}$ برای y خواهد بود. در نتیجه قرار می‌دهیم.

$$x_1 = x_{\circ}+h_{\circ} \qquad , \qquad y_1 = y_{\circ}+k_{\circ}$$

سپس روش را برای $X_1=(x_1,y_1)$ ادامه می دهیم. به طور مشابه اگر $X_n=(x_n,y_n)$ حساب شده باشد با حل دستگاه

$$\begin{cases} h_nF_{xx}(x_n,y_n)+k_nF_{xy}(x_n,y_n) \approx -F_x(x_n,y_n), \\ \\ h_nF_{yx}(x_n,y_n)+k_nF_{yy}(x_n,y_n) \approx -F_y(x_n,y_n). \end{cases}$$

به روشی مشابه داریم.

$$h_n \approx \frac{F_y(x_n,y_n)F_{xy}(x_n,y_n)-F_x(x_n,y_n)F_{yy}(x_n,y_n)}{F_{xx}(x_n,y_n)F_{yy}(x_n,y_n)-F_{xy}^{2}(x_n,y_n)}.$$

$$k_n \approx \frac{F_x(x_n,y_n)F_{xy}(x_n,y_n)-F_y(x_n,y_n)F_{xx}(x_n,y_n)}{F_{xx}(x_n,y_n)F_{yy}(x_n,y_n)-F_{xy}^{2}(x_n,y_n)}.$$

حال قرار می‌دهیم.

$$x_{n+1}=x_n+h_n \qquad , \qquad y_{n+1}=y_n+k_n$$

این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon_1$ و $|y_{n+1}-y_n|<\varepsilon_2$. که ε_1 و ε_2 اعداد بسیار کوچکی هستند که شرط توقف را تعیین می‌کنند.

اکنون باید عبارت $F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y)-(F_{xy}(x,y))^{۲}$ را به ازای نقاط بحرانی به دست آمده، تعیین علامت کنیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر C نقطه بحرانی تابع $F(x,y)$ باشد و توابع $F_{xx}(C)$ ، $F_{xy}(C)$ و $F_{yy}(C)$ موجود باشند، دراین صورت

۱) اگر $F_{xx}(C)F_{yy}(C)-(F_{xy}(C))^{۲}>۰$ و $F_{xx}(C)>۰$، آن گاه نقطه C یک نقطه مینیمم نسبی است.

۲) اگر $F_{xx}(C)F_{yy}(C)-(F_{xy}(C))^{۲}>۰$ و $F_{xx}(C)<۰$، آن گاه نقطه C یک نقطه ماکزیمم نسبی است.

۳) اگر $F_{xx}(C)F_{yy}(C)-(F_{xy}(C))^{۲}<۰$، آن گاه نقطه C یک نقطه زینی است.

۳—۳ روش تقریبی برای حل مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات

اکنون یک روش تقریبی را برای حل مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا به محاسبه $F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)$ می‌پردازیم.

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)=\frac{۱}{n}[n^{۲}-\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(y-y_i)^{۲}}{d_i^{۳}(x,y)}-[\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^{۲}]+$$

$$\frac{۱}{n}[n^{۲}-\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x-x_i)^{۲}}{d_i^{۳}(x,y)}-[\sum_{i=۱}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}]^{۲}]$$

یا

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)=\frac{۱}{n}[۲n^{۲}-\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(y-y_i)^{۲}}{d_i^{۳}(x,y)}-\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x-x_i)^{۲}}{d_i^{۳}(x,y)}$$

$$-[\sum_{i=۱}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^{۲}-[\sum_{i=۱}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}]^{۲}]$$

پس

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)=۲n-\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(y-y_i)^{۲}}{d_i^{۳}(x,y)}-\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x-x_i)^{۲}}{d_i^{۳}(x,y)}$$

$$-\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2-\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}]^2$$

یا

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)=$$

$$2n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{(y-y_i)^2+(x-x_i)^2}{d_i^3(x,y)}\ -\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2]$$

$$=2n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i^2(x,y)}{d_i^3(x,y)}\ -\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2]$$

$$=2n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(x,y)}\ -\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2]$$

با فرض این که تمام $d_i(x,y)$ ها به ازای $i=1,\cdots,n$ تقریباً یکسان و برابر مقدار d باشند، داریم.

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)\approx 2n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d}\ -\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2]$$

$$=2n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(\frac{n}{d})-\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2]$$

$$=2n-\frac{1}{n}(n^2)-\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2]$$

پس

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)\approx n-\frac{1}{n}[[\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i(x,y)}]^2+[\sum_{i=1}^{n}\frac{y-y_i}{d_i(x,y)}\ ]^2].$$

جمله آخر عبارت فوق در مقایسه با n بسیار کوچک است، زیرا عبارات $x-x_i$ و $y-y_i$ می‌توانند هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی داشته باشند. لذا این جملات مثبت و منفی همدیگر را خنثی می‌کنند. در نتیجه هر دو مجموع به عدد صفر میل می‌کنند. بنابراین می‌توان از این عبارت صرف نظر نمود. پس داریم.

$$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)\approx n$$

با فرض

$$F_{xx}(x,y) \approx F_{yy}(x,y) \approx \frac{n}{2}$$

و

$$F_{xy}(x,y) = 0$$

عبارات $F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y) - F_{xy}^{2}(x,y)$ و $F_{xx}(x,y)$ به ازای هر نقطه‌ی دلخواه از جمله نقاط بحرانی عباراتی مثبتند. در نتیجه تمام نقاط بحرانی تابع $F(x,y)$، نقاط مینیمم نسبی هستند.

با فرضیات فوق دستگاه (۳—۶) به دستگاه

$$\begin{cases} h_0 \approx \frac{-2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_0,y_0)}{nd_i(x_0,y_0)}], \\ \\ k_0 \approx \frac{-2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_0 - y_i)[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_0,y_0)}{nd_i(x_0,y_0)}]. \end{cases} \qquad (۳—۱۱)$$

تبدیل می‌شود.

از معادله اول دستگاه (۳—۱۱) داریم.

$$h_0 \approx \frac{-2}{n}[(x_0 - x_1)[1 - \frac{d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)}{nd_1(x_0,y_0)}] + \cdots + (x_0 - x_n)[1 - \frac{d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)}{nd_n(x_0,y_0)}]]$$

یا

$$h_0 \approx \frac{-2}{n}[(x_0 - x_1) - (x_0 - x_1)\frac{d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)}{nd_1(x_0,y_0)} + \cdots + (x_0 - x_n) - (x_0 - x_n)\frac{d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)}{nd_n(x_0,y_0)}]$$

بنابراین

$$h_0 \approx \frac{-2}{n}[(x_0 - x_1 + \cdots + x_0 - x_n) + [d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)][-\frac{x_0 - x_1}{nd_1(x_0,y_0)} - \cdots - \frac{x_0 - x_n}{nd_n(x_0,y_0)}]]$$

یا

$$h_0 \approx -\frac{2}{n}[nx_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}[d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)][\frac{x_0 - x_1}{d_1(x_0,y_0)} + \cdots + \frac{x_0 - x_n}{d_n(x_0,y_0)}]]$$

پس

$$h_0 \approx -2x_0 + 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{2}{n^2}[d_1(x_0,y_0) + \cdots + d_n(x_0,y_0)][\frac{x_0 - x_1}{d_1(x_0,y_0)} + \cdots + \frac{x_0 - x_n}{d_n(x_0,y_0)}]]$$

از طرفی می‌دانیم $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$. پس

$$h_\circ \approx -2x_\circ + 2\bar{x} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_\circ,y_\circ)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_\circ - x_i}{d_i(x_\circ,y_\circ)}$$

به طور مشابه از معادله دوم دستگاه (۳−۱۱) داریم.

$$k_\circ \approx -2y_\circ + 2\bar{y} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_\circ,y_\circ)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_\circ - y_i}{d_i(x_\circ,y_\circ)}$$

که در آن $\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$. بنابراین داریم.

$$\begin{cases} h_\circ \approx -2x_\circ + 2\bar{x} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_\circ,y_\circ)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_\circ - x_i}{d_i(x_\circ,y_\circ)}, \\ \\ k_\circ \approx -2y_\circ + 2\bar{y} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_\circ,y_\circ)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_\circ - y_i}{d_i(x_\circ,y_\circ)}. \end{cases} \qquad (۱۲-۳)$$

چون جواب به دست آمده از روابط (۳−۱۲) تقریبی از $h_\circ$ و $k_\circ$ است، لذا $x_\circ + h_\circ$ تقریبی بهتر از $x_\circ$ برای x و $y_\circ + k_\circ$ تقریبی بهتر از $y_\circ$ برای y خواهد بود. در نتیجه قرار می‌دهیم.

$$x_1 = x_\circ + h_\circ \qquad , \qquad y_1 = y_\circ + k_\circ$$

سپس روش را برای $X_1=(x_1,y_1)$ ادامه می‌دهیم. به طور مشابه اگر $X_n=(x_n,y_n)$ حساب شده باشد با حل دستگاه

$$\begin{cases} h_n \approx \frac{-2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_n - x_i)[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_n,y_n)}{n d_i(x_n,y_n)}], \\ \\ k_n \approx \frac{-2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_n - y_i)[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_n,y_n)}{n d_i(x_n,y_n)}]. \end{cases}$$

به روشی مشابه داریم.

$$h_n \approx -2x_n + 2\bar{x} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_n,y_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_n - x_i}{d_i(x_n,y_n)}.$$
$$k_n \approx -2y_n + 2\bar{y} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_n,y_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_n - y_i}{d_i(x_n,y_n)}.$$

حال قرار می‌دهیم.

$$x_{n+1} = x_n + h_n \qquad , \qquad y_{n+1} = y_n + k_n$$

این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon_1$ و $|y_{n+1}-y_n| < \varepsilon_2$. که ε_1 و ε_2 اعداد بسیار کوچکی هستند که شرط توقف را تعیین می‌کنند.

مزایای روش تقریبی نسبت به روش نیوتن رافسون:

۱) در روش تقریبی بر خلاف روش نیوتن رافسون، احتیاج به محاسبه مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $F(x,y)$ یعنی $F_{xx}(x,y)$ ، $F_{xy}(x,y)$ و $F_{yy}(x,y)$ نداریم.

۲) در روش تقریبی لازم نیست همانند روش نیوتن رافسون نقاط بحرانی به دست آمده را تعیین علامت کنیم. زیرا نقاط بحرانی به دست آمده حتماً مینیمم موضعی هستند.

درزنر و همکارانش [۶] فرمول های زیر را به عنوان تقریبی مناسب برای مسئله (۳–۳) پیشنهاد کردند.

$$\begin{aligned} x &\approx \bar{x} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(\bar{x},\bar{y}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}-x_i}{d_i(\bar{x},\bar{y})} \\ y &\approx \bar{y} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i(\bar{x},\bar{y}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{y}-y_i}{d_i(\bar{x},\bar{y})} \end{aligned}$$

که در آن ها $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ و $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

مثال ۲.۳ نقاط زیر را در نظر بگیرید.

$$A_1 = (-9, 2) \qquad A_2 = (-11, -1) \qquad A_3 = (2, 10) \qquad A_4 = (-1, -10)$$
$$A_5 = (4, 9) \qquad A_6 = (9, -5) \qquad A_7 = (7, 7) \qquad A_8 = (7, -7) \qquad A_9 = (10, 1)$$

هدف یافتن مکان دایره‌ای است که مجموع مربعات فواصل نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل.

۱) حل با استفاده از روش تکراری وایزفلد:

جدول ۳–۲: نتایج حاصل از به کارگیری روش وایزفلد با نقطه شروع $(0, 0)$

شماره تکرار	x	y	مقدار تابع هدف
۱	۰	۰	۱/۸۴۸۱
۲	۱۳/۴۶۱۹	۲۳/۹۵۵۰	۴۶۶/۲۶۰۹
۳	۱۳/۸۰۰۱	۲۳/۰۹۵۰	۴۶۷/۳۹۷۳
⋮	⋮	⋮	⋮
۱۶۴	۷/۴۰۷۶	۱۴/۲۳۵۰	۴۷۵/۲۲۰۲
۱۶۵	۷/۴۰۷۵	۱۴/۲۳۴۹	۴۷۵/۲۲۰۲
۱۶۶	۷/۴۰۷۵	۱۴/۲۳۴۹	۴۷۵/۲۲۰۲

همان طور که در جدول (۳–۲) مشاهده می‌کنیم نقطه به دست آمده در تکرار ۱۶۶ ام دقیقاً برابر نقطه به دست آمده در تکرار ۱۶۵ام است، لذا عملیات را متوقف می‌کنیم. ولی نقطه $X = (7/4075, 14/2349)$، نقطه مینیمم نسبی نیست، بلکه ماکزیمم نسبی است. زیرا:

$$F_{xx}(7/4075, 14/2349) = -0/7596$$

$$F_{xy}(۷/۴۰۷۵, ۱۴/۲۳۴۹) = ۰/۴۸۸۴$$
$$F_{yy}(۷/۴۰۷۵, ۱۴/۲۳۴۹) = -۰/۶۷۵۱$$

بنابراین داریم:

$$F_{xx}(۷/۴۰۷۵, ۱۴/۲۳۴۹)F_{yy}(۷/۴۰۷۵, ۱۴/۲۳۴۹)-F_{xy}^{۲}(۷/۴۰۷۵, ۱۴/۲۳۴۹) = ۰/۲۷۴۳$$

۲) حل با استفاده از روش تکراری نیوتن رافسون:

جدول ۳–۳: نتایج حاصل از به کارگیری روش نیوتن با نقطه شروع $(۰, ۰)$

شماره تکرار	x	y	مقدار تابع هدف
اول	۰	۰	۱/۸۴۸۱
دوم	−۰/۰۵۱۹	−۰/۱۰۵۹	۱/۷۸۹۵
سوم	−۰/۰۵۲۲	−۰/۱۰۶۴	۱/۷۸۹۵
چهارم	−۰/۰۵۲۲	−۰/۱۰۶۴	۱/۷۸۹۵

از جدول (۳–۳) درمی‌یابیم نقطه به دست آمده در تکرار چهارم دقیقاً برابر نقطه به دست آمده در تکرار سوم است، لذا عملیات را متوقف می‌کنیم. بنابراین نقطه $X = (-۰/۰۵۲۲, -۰/۱۰۶۴)$ مرکز دایره بهینه است. شعاع دایره بهینه بنا به لم ۳.۱ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$r = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} d_i(x,y) = \frac{۱}{۹}\sum_{i=۱}^{۹} d_i(-۰/۰۵۲۲, -۰/۱۰۶۴) = ۱۰/۰۷۴۷$$

بنابراین $C((-۰/۰۵۲۲, -۰/۱۰۶۴), ۱۰/۰۷۴۷)$، دایره بهینه است. در این حالت مقدار تابع هدف $F(-۰/۰۵۲۲, -۰/۱۰۶۴) = ۱/۷۸۹۵$ می‌باشد.

۳) حل با استفاده از روش تقریبی

جدول ۳–۴: نتایج حاصل از به کارگیری روش تقریبی با نقطه شروع $(۰, ۰)$

شماره تکرار	x	y	مقدار تابع هدف
اول	۰	۰	۱/۸۴۸۱
دوم	−۰/۰۵۴۰	−۰/۰۹۶۰	۱/۷۸۹۹
سوم	−۰/۰۵۲۳	−۰/۱۰۵۳	۱/۷۸۹۵
چهارم	−۰/۰۵۲۲	−۰/۱۰۶۳	۱/۷۸۹۵
پنجم	−۰/۰۵۲۲	−۰/۱۰۶۴	۱/۷۸۹۵
ششم	−۰/۰۵۲۲	−۰/۱۰۶۴	۱/۷۸۹۵

همان طور که در جدول (۳–۴) مشاهده می‌کنیم نقطه به دست آمده در تکرار ششم دقیقاً برابر نقطه به دست آمده در تکرار پنجم است، لذا عملیات را متوقف می‌کنیم. بنابراین نقطه

$X = (-۰/۰۵۲۲, -۰/۱۰۶۴)$ مرکز دایره بهینه است. شعاع در این روش همانند روش نیوتن محاسبه می‌شود.

۴) روش پیشنهادی درزنر:

$$\bar{x} = \frac{-۹-۱۱+۲-۱+۴+۹+۷+۷+۱۰}{۹} = ۲$$

و

$$\bar{y} = \frac{۲-۱+۱۰-۱۰+۹-۵+۷-۷+۱}{۹} = ۰/۶۶۶۷$$

بنابراین داریم.

$$x \approx \bar{x} + \frac{۲}{۸۱}\sum_{i=۱}^{۹}\bar{d}_i\sum_{i=۱}^{۹}\frac{\bar{x}-x_i}{d_i} \approx ۲ + \frac{۲}{۸۱}(۸۷/۴۰۶۰)(-۰/۹۲۰۳) \approx ۰/۰۱۳۸$$

و

$$y \approx \bar{y} + \frac{۲}{۸۱}\sum_{i=۱}^{۹}\bar{d}_i\sum_{i=۱}^{۹}\frac{\bar{y}-y_i}{d_i} \approx ۰/۶۶۶۷ + \frac{۲}{۸۱}(۸۷/۴۰۶۰)(-۰/۳۶۲۶) \approx -۰/۱۱۵۹$$

پس نقطه $X = (۰/۰۱۳۸, -۰/۱۱۵۹)$ مرکز دایره بهینه است. شعاع دایره بهینه طبق لم ۱.۳ به صورت زیر به دست می آید.

$$r = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} d_i(x,y) = \frac{۱}{۹}\sum_{i=۱}^{۹} d_i(۰/۰۱۳۸, -۰/۱۱۵۹) = ۱۰/۰۶۲۱$$

بنابراین با استفاده از این روش $C((۰/۰۱۳۸, -۰/۱۱۵۹), ۱۰/۰۶۲۱)$، دایره بهینه است. در این حالت مقدار تابع هدف $F(۰/۰۱۳۸, -۰/۱۱۵۹) = ۱/۸۰۹۶$ می‌باشد.

جدول زیر مقدار تابع هدف به ازای نقاط موجود را نشان می‌دهد.

جدول ۳–۵: مقدار تابع هدف به ازای نقاط موجود در صفحه

اندیس نقاط موجود	x	y	r	مقدار تابع هدف
اول	−۹	۲	۱۳/۳۱۷۱	۳۸۰/۸۸۶۴
دوم	−۱۱	−۱	۱۴/۶۹۷۶	۴۷۳/۸۱۳۲
سوم	۲	۱۰	۱۱/۶۹۲۹	۴۲۵/۴۸۲۲
چهارم	−۱	−۱۰	۱۳/۵۳۵۰	۳۲۸/۲۲۱۹
پنجم	۴	۹	۱۱/۰۴۷۳	۴۳۴/۶۰۸۵
ششم	۹	−۵	۱۱/۴۸۷۳	۴۱۴/۳۸۵۴
هفتم	۷	۷	۱۰/۸۳۹۹	۴۰۰/۴۶۴۸
هشتم	۷	−۷	۱۱/۶۹۴۱	۳۹۵/۲۴۱۰
نهم	۱۰	۱	۱۱/۰۰۶۰	۳۵۸/۸۰۶۵

با مقایسه مقدار تابع هدف های به دست آمده در جدول (۳–۵) با مقدار تابع هدف روش های قبلی در می‌یابیم که مرکز بهینه نمی‌تواند یکی از نقاط موجود در صفحه باشد.

فصل ۴

مکانیابی دایره با تابع هدف مینیماکس

در این فصل به بررسی مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمینه—بیشینه می پردازیم. مطالب این فصل تماماً جدید بوده و در جمع‌آوری آن از هیچ مرجعی استفاده نشده است.

۴—۱ مسئله مکانیابی دایره مینیماکس

فرض کنید n نقطه $A_i = (a_i, b_i)$، $i = 1, \cdots, n$ در صفحه داده شده است. در مسئله مکانیابی دایره مینیماکس، هدف پیداکردن مکان دایره‌ای مانند C است به قسمی که بیشترین فاصله بین محیط دایره و نقاط موجود در صفحه، کمینه گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=1,\cdots,n} \{d_i(C)\}. \qquad (۴—۱)$$

که در آن $C(X, r)$ دایره‌ای به مرکز $X = (x, y)$ و شعاع r است و $d_i(C)$ کوتاهترین فاصله بین نقطه A_i و محیط دایره C می‌باشد. اگر $d(X, A_i)$ بیانگر فاصله نقطه A_i تا مرکز دایره C، یعنی X باشد، آن گاه

$$d_i(C) = |d(X, A_i) - r| \qquad i = 1, \cdots, n.$$

بنابراین مسئله (۴—۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=1,\cdots,n} \{|d(X, A_i) - r|\}. \qquad (۴—۲)$$

با تعریف

$$d_i(x, y) = d(X, A_i)$$

مسئله (۴—۲) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=1,\cdots,n} \{|d_i(x, y) - r|\}. \qquad (۴—۳)$$

۴—۲ مدل برنامه ریزی برای مکانیابی دیسک مینیماکس

می‌دانیم مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف مینیماکس و نرم بلوکی به صورت زیر مدل می‌شود.

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=1,\cdots,n} \{w_i \; d_i(C)\} = \max_{i=1,\cdots,n} \{w_i \; |k(X - A_i) - r|\}$$

که در آن k یک نرم بلوکی و w_i وزن مثبت متناظر با نقطه A_i است.

در این بخش به مدل سازی مسئله مکانیابی دیسک مینیماکس با نرم های بلوکی و در حالات خاص منهتن و چبیشف می پردازیم. سپس مدل برنامه ریزی معادل با آن را ارائه می‌کنیم.

۴–۲–۱ نرم منهتن

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف مینیماکس همراه با نرم منهتن به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \max_{i=1,\cdots,n} \{w_i \mid \|X - A_i\|_1 - r \mid\},$$

یا

$$\min_{x,y,r} \max_{i=1,\cdots,n} \{w_i \,||x - a_i| + |y - b_i| - r|\}. \qquad (۴–۴)$$

با تعریف

$$u_i^+ = \begin{cases} x - a_i & x \geq a_i, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$u_i^- = \begin{cases} a_i - x & x < a_i, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$v_i^+ = \begin{cases} y - b_i & y \geq b_i, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$v_i^- = \begin{cases} b_i - y & y < b_i, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$x - a_i = u_i^+ - u_i^- \qquad , \qquad y - b_i = v_i^+ - v_i^-$$

و

$$|x - a_i| = u_i^+ + u_i^- \qquad , \qquad |y - b_i| = v_i^+ + v_i^-.$$

با استفاده از تعاریف فوق مسئله (۴−۴) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll}
\min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\,|u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - r|\} & \\
s.t. & & \\
& x - u_i^+ + u_i^- = a_i & i = 1, \cdots, n, \\
& y - v_i^+ + v_i^- = b_i & i = 1, \cdots, n, \\
& u_i^+ u_i^- = 0 & i = 1, \cdots, n, \\
& v_i^+ v_i^- = 0 & i = 1, \cdots, n, \\
& u_i^+ ,\ u_i^- ,\ v_i^+ ,\ v_i^- ,r \geq 0 & i = 1, \cdots, n.
\end{array}$$

هم چنین با تعریف

$$z_i^+ = \begin{cases} u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - r & u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_i^- = \begin{cases} r - u_i^+ - u_i^- - v_i^+ - v_i^- & u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - r = z_i^+ - z_i^- \qquad , \qquad |u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - r| = z_i^+ + z_i^-.$$

پس مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll}
\min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i(z_i^+ + z_i^-)\} & \\
s.t. & & \\
& x - u_i^+ + u_i^- = a_i & i = 1, \cdots, n, \\
& y - v_i^+ + v_i^- = b_i & i = 1, \cdots, n, \\
& u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - z_i^+ + z_i^- - r = 0 & i = 1, \cdots, n, \\
& u_i^+ u_i^- = 0 & i = 1, \cdots, n, \\
& v_i^+ v_i^- = 0 & i = 1, \cdots, n, \\
& z_i^+ z_i^- = 0 & i = 1, \cdots, n, \\
& u_i^+ ,\ u_i^- ,\ v_i^+ ,\ v_i^- ,\ z_i^+ ,\ z_i^-,\ r \geq 0 & i = 1, \cdots, n.
\end{array}$$

حال با تعریف

$$p = \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i(z_i^+ + z_i^-)\}$$

داریم

$$\begin{array}{lll}
\min & p & \\
s.t. & & \\
 & x - u_i^+ + u_i^- = a_i & i = ۱, \cdots, n, \\
 & y - v_i^+ + v_i^- = b_i & i = ۱, \cdots, n, \\
 & u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - z_i^+ + z_i^- - r = ۰ & i = ۱, \cdots, n, \\
 & u_i^+ u_i^- = ۰ & i = ۱, \cdots, n, \\
 & v_i^+ v_i^- = ۰ & i = ۱, \cdots, n, \\
 & z_i^+ z_i^- = ۰ & i = ۱, \cdots, n, \\
 & p \geq w_i(z_i^+ + z_i^-) & i = ۱, \cdots, n, \\
 & u_i^+ \ , \ u_i^- \ , \ v_i^+ \ , \ v_i^- \ , \ z_i^+ \ , \ z_i^-, \ r \ , \ p \geq ۰ & i = ۱, \cdots, n.
\end{array}$$

۴—۲—۲ نرم چبیشف

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف مینیماکس همراه با نرم چبیشف به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=۱,\cdots,n} \{w_i \mid \|X - A_i\|_\infty - r \mid\},$$

یا

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=۱,\cdots,n} \{w_i \mid \max\{|x - a_i|, |y - b_i|\} - r|\}. \qquad (۵—۴)$$

با تعریف

$$t_i = \max\{|x - a_i|, |y - b_i|\}$$

مدل مسئله (۴—۵) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{array}{lll}
\min & \max_{i=۱,\cdots,n}\{w_i \ |t_i - r|\} & \\
s.t. & & \\
 & t_i \geq |x - a_i| & i = ۱, \cdots, n, \\
 & t_i \geq |y - b_i| & i = ۱, \cdots, n, \\
 & t_i \ , \ r \geq ۰ & i = ۱, \cdots, n.
\end{array}$$

یا

$$\begin{array}{lll}
\min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ |t_i - r|\} & \\
s.t. & & \\
& t_i \geq x - a_i & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i \geq y - b_i & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i \geq a_i - x & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i \geq b_i - y & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i\ ,\ r \geq 0 & i = 1,\ \cdots\ ,n.
\end{array} \qquad (۴-۶)$$

هم چنین با تعریف

$$z_i^+ = \begin{cases} t_i - r & t_i \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_i^- = \begin{cases} r - t_i & t_i < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$t_i - r = z_i^+ - z_i^- \qquad , \qquad |t_i - r| = z_i^+ + z_i^-.$$

با استفاده از تعاریف فوق مدل مسئله (۴-۶) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll}
\min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i(z_i^+ + z_i^-)\} & \\
s.t. & & \\
& t_i \geq x - a_i & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i \geq y - b_i & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i \geq a_i - x & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i \geq b_i - y & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& t_i - z_i^+ + z_i^- - r = 0 & i = 1,\ \cdots\ ,n, \\
& z_i^+\ ,\ z_i^-\ ,\ t_i\ ,\ r \geq 0 & i = 1,\ \cdots\ ,n.
\end{array}$$

حال با تعریف

$$p = \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i(z_i^+ + z_i^-)\}$$

داریم

$$\begin{array}{lll}\min & p & \\ s.t. & & \\ & t_i \geq x - a_i & i = 1, \cdots, n, \\ & t_i \geq y - b_i & i = 1, \cdots, n, \\ & t_i \geq a_i - x & i = 1, \cdots, n, \\ & t_i \geq b_i - y & i = 1, \cdots, n, \\ & t_i - z_i^+ + z_i^- - r = 0 & i = 1, \cdots, n, \\ & p \geq w_i(z_i^+ + z_i^-) & i = 1, \cdots, n, \\ & z_i^+ \ , \ z_i^- \ , \ t_i \ , \ r \ , \ p \geq 0 & i = 1, \cdots, n.\end{array}$$

۴–۲–۳ نرم بلوکی

می‌دانیم نرم بلوکی بردار $X = (x_1, \cdots, x_m)$ به دو صورت زیر تعریف می‌گردد:

(۱) $$\|X\|_B = \min \{\textstyle\sum_{g=1}^{r} |\beta_g| : \quad X = \sum_{g=1}^{r} \beta_g b_g\}$$

که در آن b_g ها نقاط گوشه‌ای کانتور واحد نرم مذکور(B) هستند.

(۲) $$\|X\|_B = \max \{|X \cdot b_g^\circ| \ : \quad g = 1, \cdots, r^\circ\}$$

که در آن b_g° ها نقاط گوشه‌ای مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم مذکور هستند.

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف مینیماکس همراه با نرم بلوکی از نوع (۱) به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \quad \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i \mid \|X - A_i\|_B - r \mid\}.$$

اگر به ازای هر i داشته باشیم

$$X - A_i = \textstyle\sum_{g=1}^{r} \beta_{gi} b_g$$

آن گاه

$$\|X - A_i\|_B = \min \{\textstyle\sum_{g=1}^{r} |\beta_{gi}|\}.$$

بنابراین مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{array}{lll}\min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i \mid \min \{\sum_{g=1}^{r} |\beta_{gi}|\} - r\mid\} & \\ s.t. & & \\ & X - A_i = \sum_{g=1}^{r} \beta_{gi} b_g & i = 1, \cdots, n, \\ & r \geq 0 & \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{ll} \min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i \mid \sum_{g=1}^{r} |\beta_{gi}| - r|\} \\ s.t. & \\ & X - A_i = \sum_{g=1}^{r} \beta_{gi} b_g \qquad\qquad i = 1, \cdots, n, \\ & r \geq 0 \end{array}$$

با تعریف

$$\beta_{gi}^{+} = \begin{cases} \beta_{gi} & \beta_{gi} \geq 0, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$\beta_{gi}^{-} = \begin{cases} -\beta_{gi} & \beta_{gi} < 0, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$\beta_{gi} = \beta_{gi}^{+} - \beta_{gi}^{-} \qquad , \qquad |\beta_{gi}| = \beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}.$$

با استفاده از تعاریف فوق مدل مسئله به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{array}{lll} \min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i \mid \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) - r|\} & \\ s.t. & & \\ & X - A_i = \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} - \beta_{gi}^{-}) b_g & i = 1, \cdots, n, \\ & \beta_{gi}^{+},\ \beta_{gi}^{-},\ r \geq 0 & i = 1, \cdots, n \ , \ g = 1, \cdots, r. \end{array}$$

هم چنین با تعریف

$$z_i^{+} = \begin{cases} \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) - r & \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_i^{-} = \begin{cases} r - \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) & \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$\sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) - r = z_i^{+} - z_i^{-} \qquad , \qquad |\sum_{g=1}^{r} (\beta_{gi}^{+} + \beta_{gi}^{-}) - r| = z_i^{+} + z_i^{-}.$$

با تعاریف فوق، مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ (z_i^+ + z_i^-)\} \\
s.t. \quad & \\
& X - A_i = \textstyle\sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ - \beta_{gi}^-)b_g && i=1,\cdots,n, \\
& \textstyle\sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) - z_i^+ + z_i^- - r = 0 && i=1,\cdots,n, \\
& \beta_{gi}^+\ ,\ \beta_{gi}^-\ ,\ z_i^+\ ,\ z_i^-\ ,\ r \geq 0 && i=1,\cdots,n\ ,\ g=1,\cdots,r.
\end{aligned}$$

حال با تعریف

$$p = \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ (z_i^+ + z_i^-)\}$$

داریم

$$\begin{aligned}
\min \quad & p \\
s.t. \quad & \\
& X - A_i = \textstyle\sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ - \beta_{gi}^-)b_g && i=1,\cdots,n, \\
& \textstyle\sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) - z_i^+ + z_i^- - r = 0 && i=1,\cdots,n, \\
& p \geq w_i\ (z_i^+ + z_i^-) && i=1,\cdots,n, \\
& \beta_{gi}^+\ ,\ \beta_{gi}^-\ ,\ z_i^+\ ,\ z_i^-\ ,\ r\ ,\ p \geq 0 && i=1,\cdots,n\ ,\ g=1,\cdots,r.
\end{aligned}$$

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف مینیماکس همراه با نرم بلوکی از نوع (۲) به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r}\ \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ |\ \|X - A_i\|_B - r\ |\},$$

یا

$$\min_{x,y,r}\ \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ |\max_{g=1,\cdots,r^\circ}\{|(X - A_i)b_g^\circ|\} - r\ |\}. \tag{۷-۴}$$

با تعریف

$$t_i = \max_{g=1,\cdots,r^\circ}\{|(X - A_i)b_g^\circ|\}$$

مدل مسئله (۴-۷) به صورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ |t_i - r|\} \\
s.t. \quad & \\
& t_i \geq |(X - A_i)b_g^\circ| && i=1,\cdots,n\ ,\ g=1,\cdots,r^\circ, \\
& t_i\ ,\ r \geq 0 && i=1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{array}{lll} \min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ |t_i-r|\} & \\ s.t. & & \\ & t_i \geq (X-A_i)b_g^{\circ} & i=1,\cdots,n \quad , \quad g=1,\cdots,r^{\circ}, \\ & t_i \geq -(X-A_i)b_g^{\circ} & i=1,\cdots,n \quad , \quad g=1,\cdots,r^{\circ}, \\ & t_i\ ,\ r \geq 0 & i=1,\cdots,n. \end{array}$$

هم چنین با تعریف

$$z_i^+ = \begin{cases} t_i - r & t_i \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_i^- = \begin{cases} r - t_i & t_i < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$t_i - r = z_i^+ - z_i^- \qquad , \qquad |t_i - r| = z_i^+ + z_i^-.$$

با استفاده از تعاریف فوق مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll} \min & \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ (z_i^+ + z_i^-)\} & \\ s.t. & & \\ & t_i \geq (X-A_i)b_g^{\circ} & i=1,\cdots,n \quad , \quad g=1,\cdots,r^{\circ}, \\ & t_i \geq -(X-A_i)b_g^{\circ} & i=1,\cdots,n \quad , \quad g=1,\cdots,r^{\circ}, \\ & t_i - z_i^+ + z_i^- - r = 0 & i=1,\cdots,n, \\ & z_i^+\ ,\ z_i^-\ ,\ t_i\ ,\ r \geq 0 & i=1,\cdots,n. \end{array}$$

حال با تعریف

$$p = \max_{i=1,\cdots,n}\{w_i\ (z_i^+ + z_i^-)\}$$

داریم

$$\begin{array}{lll} \min & p & \\ s.t. & & \\ & t_i \geq (X-A_i)b_g^{\circ} & i=1,\cdots,n \quad , \quad g=1,\cdots,r^{\circ}, \\ & t_i \geq -(X-A_i)b_g^{\circ} & i=1,\cdots,n \quad , \quad g=1,\cdots,r^{\circ}, \\ & t_i - z_i^+ + z_i^- - r = 0 & i=1,\cdots,n, \\ & p \geq w_i\ (z_i^+ + z_i^-) & i=1,\cdots,n, \\ & z_i^+\ ,\ z_i^-\ ,\ t_i\ ,\ r\ ,\ p \geq 0 & i=1,\cdots,n. \end{array}$$

مثال ۱.۴ نقاط $A_۱ = (۰, ۰)$، $A_۲ = (۰, ۱)$، $A_۳ = (۱, ۰)$ و $A_۴ = (۱, ۱)$ را در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دایره‌ای است که بیشترین فاصله نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل.

۱) فرض کنید فواصل با نرم منهتن اندازه گیری شوند، در این صورت مدل برنامه ریزی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$
\begin{array}{lll}
\min & p & \\
s.t. & & \\
& x - u_i^+ + u_i^- = a_i & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& y - v_i^+ + v_i^- = b_i & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& u_i^+ + u_i^- + v_i^+ + v_i^- - z_i^+ + z_i^- - r = ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& u_i^+ u_i^- = ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& v_i^+ v_i^- = ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& z_i^+ z_i^- = ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& p \geq w_i(z_i^+ + z_i^-) & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& u_i^+ \ , \ u_i^- \ , \ v_i^+ \ , \ v_i^- \ , \ z_i^+ \ , \ z_i^-, \ r \ , \ p \geq ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴
\end{array}
$$

پس از حل مدل به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$U^+ = (۰/۵, ۰/۵, ۰, ۰) \quad , \quad V^+ = (۰/۵, ۰, ۰/۵, ۰) \quad , \quad Z^+ = (۰, ۰, ۰, ۰)$$

$$U^- = (۰, ۰, ۰/۵, ۰/۵) \quad , \quad V^- = (۰, ۰/۵, ۰, ۰/۵) \quad , \quad Z^- = (۰, ۰, ۰, ۰)$$

$$X = (۰/۵, ۰/۵) \quad , \quad r = ۱ \quad , \quad p = ۰$$

با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X, r) = ۰$.

۲) فرض کنید فواصل با نرم چبیشف اندازه گیری شوند، در این صورت مدل برنامه ریزی خطی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$
\begin{array}{lll}
\min & p & \\
s.t. & & \\
& t_i - z_i^+ + z_i^- - r = ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& t_i \geq x - a_i & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& t_i \geq y - b_i & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& t_i \geq a_i - x & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& t_i \geq b_i - y & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& p \geq w_i(z_i^+ + z_i^-) & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& t_i \ , \ z_i^+ \ , \ z_i^-, \ r \ , \ p \geq ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴
\end{array}
$$

پس از حل مدل به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$Z^+ = (۰, ۰, ۰, ۰) \quad , \quad Z^- = (۰, ۰, ۰, ۰) \quad , \quad T = (۰/۵, ۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)$$

$$X = (۰/۵, ۰/۵) \quad , \quad r = ۰/۵ \quad , \quad p = ۰$$

با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X, r) = ۰$.

۳) فرض کنید فواصل با نرم بلوکی که نقاط گوشه‌ای دیسک واحد آن عبارتند از

$$b_۱ = (۰, ۱) \quad , \quad b_۲ = (\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{۱}{۲}) \quad , \quad b_۳ = (۱, ۰) \quad , \quad b_۴ = (\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{-۱}{۲})$$

$$b_{-۱} = (۰, -۱) \quad , \quad b_{-۲} = (\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{-۱}{۲}) \quad , \quad b_{-۳} = (-۱, ۰) \quad , \quad b_{-۴} = (\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{۱}{۲})$$

اندازه گیری شوند، در این صورت مدل برنامه ریزی خطی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{lll}
\min & p & \\
s.t. & & \\
& X - A_i = \sum_{g=۱}^{۴} (\beta_{gi}^+ - \beta_{gi}^-) b_g & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& \sum_{g=۱}^{۴} (\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) - z_i^+ + z_i^- - r = ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& p \geq w_i \, (z_i^+ + z_i^-) & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\
& \beta_{gi}^+ \, , \, \beta_{gi}^- \, , \, z_i^+ \, , \, z_i^- \, , \, r \, , \, p \geq ۰ & i = ۱, ۲, ۳, ۴ \ , \ g = ۱, ۲, ۳, ۴
\end{array}$$

پس از حل مدل برنامه ریزی خطی فوق به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\beta_{۱۱}^+ = ۰/۲۱ \quad , \quad \beta_{۲۱}^+ = ۰/۵۸ \quad , \quad \beta_{۴۲}^+ = ۰/۵۸ \quad , \quad \beta_{۱۳}^+ = ۰/۲۱$$

$$\beta_{۱۲}^- = ۰/۲۱ \quad , \quad \beta_{۴۳}^- = ۰/۵۸ \quad , \quad \beta_{۱۴}^- = ۰/۲۱ \quad , \quad \beta_{۲۴}^- = ۰/۵۸$$

$$X = (۰/۵, ۰/۵) \quad , \quad r = ۰/۷۹ \quad , \quad p = ۰$$

سایر مقادیر مقدار صفر دارند. با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X, r) = ۰$.

فصل ۵

مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مجموع

در این فصل به مطالعه مسئله مکانیابی دایره با تابع هدف کمترین مجموع می‌پردازیم. مطالب این فصل با توجه به [۲] گردآوری شده است.

۵—۱ مقدمه

فرض کنید n نقطه $A_j = (x_j, y_j)$، $j = ۱, \cdots, n$ در صفحه موجود باشند و w_j وزن مثبت متناظر با نقطه A_j باشد. نقاط موجود در صفحه، نقاط ثابت نیز نامیده می‌شوند. در مسئله مکانیابی دایره کمترین مجموع، هدف یافتن مکان یک دایره مانند C است به قسمی که مجموع وزنی فاصله بین محیط دایره و نقاط موجود در صفحه کمینه گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \quad F(C) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \; d_j(C). \tag{۵—۱}$$

که در آن $C(X, r)$ دایره‌ای به مرکز $X = (x, y)$ و شعاع r می‌باشد و $d_j(C)$ کوتاهترین فاصله بین نقطه A_j و محیط دایره C است. اگر $d(X, A_j)$ بیانگر فاصله نقطه A_j تا مرکز دایره C، یعنی X باشد آن گاه

$$d_j(C) = |d(X, A_j) - r| \qquad j = ۱, \cdots, n.$$

بنابراین مسئله (۵—۱) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{x,y,r} \quad F(X, r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \; |d(X, A_j) - r|. \tag{۵—۲}$$

با تعریف

$$\begin{aligned} J_+(C) &= \{j : \; d(X, A_j) > r\} \\ J_\circ(C) &= \{j : \; d(X, A_j) = r\} \\ J_-(C) &= \{j : \; d(X, A_j) < r\} \end{aligned}$$

تابع $|d(X, A_j) - r|$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$|d(X, A_j) - r| = \begin{cases} d(X, A_j) - r & j \in J_+(C) \cup J_\circ(C), \\ r - d(X, A_j) & j \in J_-(C). \end{cases}$$

بنابراین مسئله (۵—۲) به صورت زیر خواهد شد.

$$\min_{x,y,r} \quad F(X,r) = \sum_{j\in J_-} w_j(r - d(X,A_j)) + \sum_{j\in J_+} w_j(d(X,A_j) - r).$$

قابل ذکر است که مجموعه های $J_+(C)$ ، $J_\circ(C)$ و $J_-(C)$ به مرکز و شعاع دایره C، یعنی $X=(x,y)$ و r وابسته‌اند.

در این فصل تابع فاصله را اقلیدسی در نظر می‌گیریم، بنابراین

$$d(X,A_j) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$$

جواب بهینه مسئله (۵—۱) یا دایره‌ای با شعاع متناهی و یا دایره‌ای با شعاع نامتناهی یعنی خطی مستقیم است.

۵—۲ حل مسئله مکانیابی دایره کمترین مجموع

اگر $n=1$ دراین صورت تنها یک نقطه مانند A در صفحه موجود است، لذا دایره $C(A,0)$ و هر دایره‌ای که از نقطه A عبور کند، جواب بهینه مسئله (۵—۱) می‌باشد. البته ممکن است این دایره دارای شعاع متناهی و یا نامتناهی باشد، که در هر صورت مقدار تابع هدف برابر صفر است.

اگر $n=2$ دراین صورت دو نقطه در صفحه موجود است. از طرفی می‌دانیم از هر دو نقطه در صفحه، بینهایت دایره می‌گذرد. بنابراین هر دایره‌ای که از این دو نقطه بگذرد، جواب بهینه مسئله (۵—۱) است. البته ممکن است این دایره دارای شعاع متناهی و یا نامتناهی باشد، که در هر صورت مقدار تابع هدف صفر است.

اگر $n=3$ دراین صورت یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) سه نقطه موجود در صفحه در یک راستا نباشند، دراین صورت چون از هر سه نقطه غیرهمخط در صفحه تنها یک دایره می‌گذرد. بنابراین جواب بهینه مسئله (۵—۱) دایره‌ای است که از هر سه نقطه موجود می‌گذرد. در این حالت مقدار تابع هدف برابر صفر است.

۲) سه نقطه موجود در صفحه در یک راستا باشند، دراین صورت جواب بهینه مسئله (۵—۱) دایره‌ای با شعاع نامتناهی است. به عبارت دیگر جواب بهینه مسئله، خط مستقیمی است که از هر سه نقطه موجود در صفحه می‌گذرد. در این حالت نیز مقدار تابع هدف برابر صفر است.

در ادامه فصل فرض می‌کنیم $n \geq 4$.

لم ۱.۵ ([۲]): جواب بهینه مسئله (۵—۱) باید شعاع مثبت داشته باشد.

اثبات: فرض کنید جواب بهینه مسئله (۵—۱) دایره‌ای با شعاع صفر مانند $C_\circ(X_\circ, \circ)$ باشد. تابع هدف به ازای دایره $C_\circ$ برابر است با

$$F(X_\circ, \circ) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ |d(X_\circ, A_j)| = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ d(X_\circ, A_j) > \circ$$

حال دایره $C_۱$ را با شعاع مثبت به گونه‌ای در نظر بگیرید که از نقطه $X_\circ$ بگذرد. چون $X_\circ$ نقطه‌ای روی دایره $C_۱$ است، لذا کوتاهترین فاصله اقلیدسی نقطه A_j تا محیط دایره $C_۱$ یعنی $d_j(C_۱)$، یا برابر فاصله نقطه A_j تا $X_\circ$ یعنی $d_j(C_\circ)$ است و یا از آن کمتر است. به عبارت دیگر برای هر $j = ۱, \cdots, n$ داریم $d_j(C_۱) \leq d_j(C_\circ)$.

اکنون یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) اگر A_j ها در یک راستا نباشند، دراین صورت به ازای حداقل یک نقطه از نقاط موجود داریم $d_j(C_۱) < d_j(C_\circ)$. پس

$$F(C_۱) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ d_j(C_۱) < \sum_{j=۱}^{n} w_j \ d_j(C_\circ) = F(C_\circ).$$

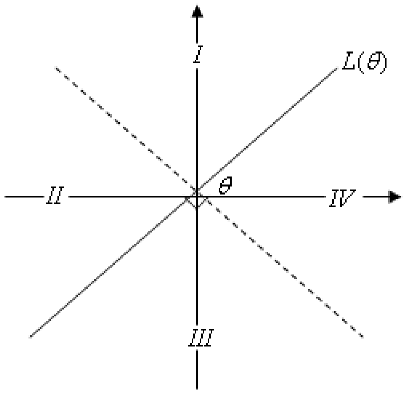
۲) اگر A_j ها در یک راستا باشند، دراین صورت خط مستقیمی که از تمام A_j ها می‌گذرد، جواب بهینه مسئله است. در این حالت مقدار تابع هدف برابر صفر است. در نتیجه $F(C_۱) < F(C_\circ)$.

پس در هر دو حالت $F(C_۱) < F(C_\circ)$. لذا $C_\circ$ نمی‌تواند جواب بهینه مسئله (۵—۱) باشد. □

از لم فوق نتیجه می‌گیریم که جواب بهینه مسئله (۵—۱) نمی‌تواند دایره‌ای با شعاع صفر باشد. از طرفی مثال زیر نشان می‌دهد که دایره‌ای با شعاع نامتناهی یعنی خط مستقیم، می‌تواند جواب بهینه مسئله (۵—۱) باشد.

مثال ۱.۵ نقاط $A_۱ = (\circ, \circ)$، $A_۲ = (۱, ۱\circ)$، $A_۳ = (۱, \circ)$ و $A_۴ = (۱, -۱\circ)$ را با وزن های $w_۱ = ۱$ و $w_۲ = w_۳ = w_۴ = ۱\circ\circ$ در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دایره‌ای است که مجموع وزنی فاصله نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل. چون نقاط $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ بیشترین مقدار وزن را نسبت به نقطه $A_۱$ دارند، لذا دایره‌ای که حداقل از سه نقطه مذکور می‌گذرد جواب بهینه مسئله است. از طرفی چون سه نقطه $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ در یک راستا هستند، بنابراین جواب بهینه خط مستقیمی است که از هر سه نقطه نامبرده عبور کند. در این صورت مقدار تابع هدف برابر یک خواهد بود.



شکل ۵—۱: نواحی نقاط ثابت مشخص شده توسط $L(\theta)$

مثال ۲.۵ نقاط $A_۱ = (۰, ۰)$، $A_۲ = (۱, ۱۰)$، $A_۳ = (۱, ۰)$ و $A_۴ = (۱, -۱۰)$ را با وزن های $w_۱ = ۲۰۰$ و $w_۲ = w_۳ = w_۴ = ۱$ در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دایره‌ای است که مجموع وزنی فاصله نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل. چون نقطه $A_۱$ بیشترین مقدار وزن را نسبت به سایر نقاط داراست، لذا دایره‌ای که حداقل از نقطه $A_۱$ بگذرد، جواب بهینه مسئله است. بنابراین مرکز دایره بهینه باید یا روی یکی از عمودمنصف های $B_{۱۲}$، $B_{۱۳}$ و $B_{۱۴}$ قرار گیرد و یا محل برخورد دو عمودمنصف از عمودمنصف های نامبرده باشد. که در حالت اول دو نقطه از نقاط موجود روی دایره بهینه قرار می‌گیرند، در صورتی که در حالت دوم سه نقطه از نقاط موجود روی دایره بهینه قرار می‌گیرند. دوایر $C_۱((۰/۵, ۰), ۰/۵))$، $C_۲((۰/۵, ۵), ۵/۰۲)$، $C_۳((۵۰/۵, ۰), ۵۰/۵)$ و $C_۴((۰/۵, -۵), ۵/۰۲)$ کاندیدهایی برای دایره بهینه هستند. با مقایسه مقدار تابع هدف به ازای آن ها درمی‌یابیم که دایره $C_۳$، دایره بهینه است.

لم ۲.۵ ([۱۴]): اگر جواب بهینه مسئله (۵—۱) خطی مستقیم باشد، آن گاه حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه می گذرد.

اثبات: فرض کنید جواب بهینه مسئله (۵—۱) خط مستقیمی مانند $L(\theta)$ باشد به طوری که از هیچ یک از نقاط موجود در صفحه نمی‌گذرد. (شکل ۵—۱ را ببینید.) بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $(x_۰, y_۰) = (۰, ۰)$. هم چنین فرض کنید θ_j، $۰ \le \theta_j \le ۲\pi$، زاویه‌ای باشد که خط گذرنده از $(۰, ۰)$ و A_j با محور xها می‌سازد.

تعریف می‌کنیم

$$I = \{j :\ \theta < \theta_j < \tfrac{\pi}{۲} + \theta\}$$

$$II = \{j:\ \frac{\pi}{2} + \theta \leq \theta_j < \pi + \theta\}$$
$$III = \{j:\ \pi + \theta \leq \theta_j < \frac{3\pi}{2} + \theta\}$$
$$IV = \{j:\ \frac{3\pi}{2} + \theta \leq \theta_j < 2\pi \quad or \quad 0 \leq \theta_j \leq \theta\}$$
$$\alpha_j = w_j(x_j^2 + y_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

فرض کنید θ_i و θ_k به گونه‌ای باشند که برای هر θ، $\theta_i < \theta < \theta_k$ هیچ نقطه ثابتی روی خط $L(\theta)$ قرار نگیرد ولی نقاط ثابت A_i و A_k به ترتیب روی خط های $L(\theta_i)$ و $L(\theta_k)$ قرار گیرند. دراین صورت برای هر $\theta \in (\theta_i, \theta_k)$ داریم

$$F(L(\theta)) = \sum_{j\in I} \alpha_j \sin(\theta_j - \theta) + \sum_{j\in II} \alpha_j \sin(\pi + \theta - \theta_j) +$$

$$\sum_{j\in III} \alpha_j \sin(\theta_j - \pi - \theta) + \sum_{j\in IV} \alpha_j \sin(\theta + 2\pi - \theta_j)$$

بنابراین

$$\frac{d^2 F(L(\theta))}{d\theta^2} = -F(L(\theta))$$

از طرفی می‌دانیم $F(L(\theta)) > 0$. بنابراین $\frac{d^2 F(L(\theta))}{d\theta^2} < 0$ و این یعنی تابع $F(L(\theta))$ روی (θ_i, θ_k) اکیداً مقعر است. در حالی که تابع $F(L(\theta))$، نه تابعی محدب است و نه مقعر، لذا خط $L(\theta)$ حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد. □

لم ۳.۵ ([۱۴]): اگر جواب بهینه مسئله (۵—۱) خطی مستقیم باشد، آن گاه حداقل از دو نقطه از نقاط موجود در صفحه عبور می کند.

اثبات: فرض کنید جواب بهینه مسئله (۵—۱) خطی مانند L باشد. بنا به لم ۲.۵ خط L حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید نقطه $A_1 = (x_1, y_1)$ روی خط L قرار دارد. هم چنین دستگاه مختصات را به گونه‌ای درنظربگیرید که $x_1 = y_1 = 0$. به عبارت دیگر می‌توان مسئله (۵—۱) را به صورت پیدا کردن یک خط راست به شکل $L: ax + by = 0$ درنظرگرفت به طوری که مجموع وزنی فواصل نقاط موجود در صفحه تا خط کمینه گردد. یعنی

$$\min_{a,b} \quad F(L) = \sum_{j=1}^{n} w_j d_j(L)$$

می‌دانیم فاصله بین نقطه $A_j = (x_j, y_j)$ و خط $L : ax + by = 0$ برابر است با

$$d_j(L) = \frac{|ax_j + by_j|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

که در آن $a^2 + b^2 \neq 0$.

بنابراین مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{a,b} \quad F(a,b) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{|ax_j + by_j|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

چون نقطه A_1 روی خط L قرار دارد، لذا مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{a,b} \quad F(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sum_{j=2}^{n} w_j |ax_j + by_j|$$

بنابراین می‌خواهیم تابع $F(a,b) = \sum_{j=2}^{n} w_j |ax_j + by_j|$ را با توجه به محدودیت $a^2 + b^2 = 1$ مینیمم کنیم. یعنی

$$\begin{array}{ll} \min & F(a,b) = \sum_{j=2}^{n} w_j |ax_j + by_j| \\ s.t. & \\ & a^2 + b^2 = 1 \end{array}$$

با فرض

$$J_-(L) = \{j : \ 2 \leq j \leq n \ \ , \ \ ax_j + by_j \leq 0\}$$

و

$$J_+(L) = \{j : \ 2 \leq j \leq n \ \ , \ \ ax_j + by_j \geq 0\}$$

مسئله فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{ll} \min & F(a,b) = \sum_{j \in J_+} w_j (ax_j + by_j) - \sum_{j \in J_-} w_j (ax_j + by_j) \\ s.t. & \\ & a^2 + b^2 = 1 \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{ll} \min & F(a,b) = (\sum_{j \in J_+} w_j x_j - \sum_{j \in J_-} w_j x_j) a + (\sum_{j \in J_+} w_j y_j - \sum_{j \in J_-} w_j y_j) b \\ s.t. & \\ & a^2 + b^2 = 1 \end{array}$$

با فرض

$$\alpha = \sum_{j \in J_+} w_j x_j - \sum_{j \in J_-} w_j x_j$$

و

$$\beta = \sum_{j \in J_+} w_j y_j - \sum_{j \in J_-} w_j y_j$$

مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(a,b) = \alpha a + \beta b \\ s.t. \quad & \\ & a^۲ + b^۲ = ۱ \end{aligned} \tag{۳−۵}$$

فرض می‌کنیم (a^*, b^*) یک جواب بهینه برای مسئله فوق باشد، لذا

$$F(a^*, b^*) = \alpha a^* + \beta b^*$$

شرط لازم برای این که (a^*, b^*) تابع $F(a,b)$ را با شرط $a^۲ + b^۲ = ۱$ مینیمم کند این است که آن باید جواب مسئله بهینه سازی زیر نیز باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(a,b) = \alpha a + \beta b \\ s.t. \quad & \\ & ax_j + by_j \geq ۰ \qquad j \in J_+ \\ & ax_j + by_j \leq ۰ \qquad j \in J_- \\ & a^۲ + b^۲ = ۱ \end{aligned} \tag{۴−۵}$$

اگر حداقل برای یک j داشته باشیم $a^*x_j + b^*y_j = ۰$ آن گاه لم برقرار است، زیرا خط $a^*x + b^*y = ۰$ از نقاط $A_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $A_j = (x_j, y_j)$ می‌گذرد. اکنون حالتی که برای تمام jها داشته باشیم $a^*x_j + b^*y_j \neq ۰$ را بررسی می‌کنیم. دراین حالت محدودیت های اول و دوم مسئله (۵−۴) در (a^*, b^*) فعال نیستند. این ایجاب می‌کند که (a^*, b^*) در واقع یک جواب بهینه برای مسئله زیر باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(a,b) = \alpha a + \beta b \\ s.t. \quad & \\ & a^۲ + b^۲ = ۱ \end{aligned}$$

تحت فرضیات موجود $\alpha^۲ + \beta^۲ \neq ۰$، زیرا درغیراین صورت تمام نقاط موجود در یک راستا قرار دارند و این همراستا بودن $a^*x_j + b^*y_j = ۰$ را برای تمام j ها ایجاب می‌کند. مسئله بهینه سازی اخیر را به روش ضرایب لاگرانژ به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$F(a,b) = \alpha a + \beta b - \lambda(a^۲ + b^۲ - ۱)$$

$$\begin{cases} F_a = \alpha - ۲\lambda a = ۰ \\ F_b = \beta - ۲\lambda b = ۰ \\ F_\lambda = -(a^۲ + b^۲ - ۱) = ۰ \end{cases}$$

از معادله اول و دوم دستگاه فوق داریم.

$$a = \frac{\alpha}{۲\lambda} \qquad , \qquad b = \frac{\beta}{۲\lambda}$$

با قرار دادن مقادیر a و b به دست آمده در معادله سوم دستگاه داریم.

$$\frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{۴\lambda^۲} = ۱$$

پس

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}}{۲} \qquad , \qquad a = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}} \qquad , \qquad b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}}$$

جواب $\lambda = \frac{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}{۲}$ قابل قبول نیست، زیرا درغیراین صورت $F_{aa} < ۰$ و در نتیجه جواب به دست آمده مینیمم نسبی نخواهد بود.

بنابراین مسئله فوق دارای یک مینیمم نسبی مانند $(a', b') = (\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}}, \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲}})$ است. مقدار تابع هدف متناظر برابر $F(a', b') = -\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲}$ است.

از طرفی چون (a^*, b^*) و (a', b') هر دو جواب بهینه مسئله (۵−۳) هستند، پس باید مقدار تابع هدف به ازای هر دو نقطه (a^*, b^*) و (a', b') یکسان باشد. یعنی

$$F(a^*, b^*) = F(a', b')$$

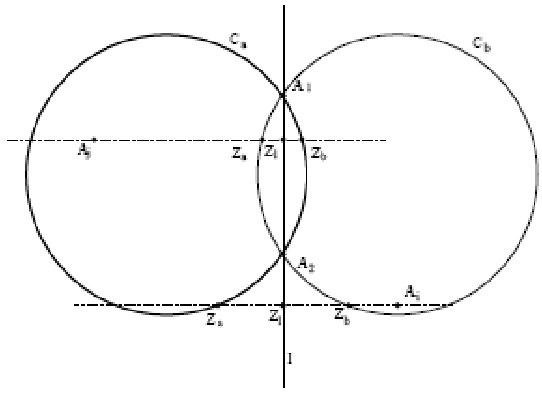
یا

$$\alpha a^* + \beta b^* = -\sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲} < ۰$$

که با $\alpha a^* + \beta b^* = \sum_{j=۲}^{n} w_j |a^* x_j + b^* y_j| \geq ۰$ متناقض است. بنابراین باید حداقل یک نقطه از نقاط موجود روی خط L قرار می‌گیرد. $\square$

لم ۴.۵ ([۲]): فرض کنید $n \geq ۵$ و هیچ سه نقطه از نقاط موجود در صفحه در یک راستا نباشند. دراین صورت جواب بهینه مسئله (۵−۱) دایره‌ای با شعاع متناهی است.

اثبات: فرض کنید جواب بهینه مسئله (۵−۱) دایره‌ای با شعاع نامتناهی یعنی خطی مستقیم مانند l باشد. آن گاه بنا به لم ۳.۵ خط l حداقل از دو نقطه از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد. با توجه به فرضیات لم چون هیچ سه نقطه از نقاط ثابت در یک راستا قرار ندارند، لذا خط l دقیقاً از دو نقطه از نقاط موجود عبور می‌کند. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید l خط گذرنده از نقاط $A_۱$ و $A_۲$



شکل ۵−۲: نمایشی از مجموعه‌های C_a^- و C_b^+ برای ناحیه محصور شده توسط دوایره C_a و C_b

باشد. هم چنین فرض کنید $J_۱$ و $J_۲$ به ترتیب اندیس آن دسته از نقاط ثابت باشند که در سمت راست و چپ خط l قرار دارند. بنابراین داریم: $\{۱,\cdots,n\} = \{۱,۲\} \cup J_۱ \cup J_۲$.

دوایر $C_a = (X_a, r)$ و $C_b = (X_b, r)$ را با شعاع یکسان r به گونه‌ای در نظر بگیرید که مرکز آن ها یعنی X_a و X_b روی عمودمنصف نقاط $A_۱$ و $A_۲$ و در دو طرف خط l قرار گیرند و تنها از نقاط $A_۱$ و $A_۲$ بگذرند، یعنی $J_\circ(C_a) = J_\circ(C_b) = \{A_۱, A_۲\}$. هم چنین r را به اندازه‌ای بزرگ در نظر بگیرید که $J_+(C_a) = J_۱$ و $J_-(C_a) = J_۲$ و به طور مشابه $J_-(C_b) = J_۱$ و $J_+(C_b) = J_۲$. حال یک نقطه از نقاط موجود در صفحه مانند A_j، که $A_j \notin \{A_۱, A_۲\}$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید l^{per} خط گذرنده از نقطه A_j و عمود بر خط l باشد و نقاط Z_a ، Z_l و Z_b به ترتیب نقاطی از محل برخورد خط l^{per} با C_a، l و C_b باشند که به خط l نزدیکتر هستند. (شکل ۵−۲ را ببینید.) به دلیل متقارن بودن دوایر C_a و C_b نسبت به خط l داریم $d(Z_a, Z_l) = d(Z_b, Z_l)$. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\delta_j &= d(Z_a, Z_l) = d(Z_b, Z_l) \\
C_a^- &= \{X : \ d(X, Z_a) \le d(X, l)\} \\
C_a^+ &= \{X : \ d(X, Z_a) > d(X, l)\} \\
C_b^- &= \{X : \ d(X, Z_b) < d(X, l)\} \\
C_b^+ &= \{X : \ d(X, Z_b) \ge d(X, l)\}
\end{aligned}$$

می دانیم: $C_a^+ = C_b^-$ و $C_a^- = C_b^+$.

هم چنین تعریف می‌کنیم

$$\epsilon_j = \begin{cases} \delta_j & j \in C_a^+, \\ -\delta_j & j \in C_b^+. \end{cases}$$

بنابراین برای هر $j = ۱, \dots, n$ داریم

$$d(A_j, C_a) \leq d(A_j, l) + \epsilon_j$$

و

$$d(A_j, C_b) \leq d(A_j, l) - \epsilon_j$$

چون $n \geq ۵$، بنابراین حداقل برای یک نقطه از نقاط موجود در صفحه دو نامساوی فوق اکیداً برقرار است.

چون خط l جواب بهینه مسئله (۵—۱) است، بنابراین داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} d(A_j, l) \leq \sum_{j=۱}^{n} d(A_j, C_a) < \sum_{j=۱}^{n} d(A_j, l) + \sum_{j=۱}^{n} \epsilon_j$$

و

$$\sum_{j=۱}^{n} d(A_j, l) \leq \sum_{j=۱}^{n} d(A_j, C_b) < \sum_{j=۱}^{n} d(A_j, l) - \sum_{j=۱}^{n} \epsilon_j$$

روابط فوق نمی‌تواند همزمان برقرار باشد، لذا خط l نمی‌تواند جواب بهینه مسئله (۵—۱) باشد. □

لم ۵.۵ ([۲]): یک جواب بهینه برای مسئله (۵—۱) وجود دارد که حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد.

اثبات: بنا به لم ۱.۵، $r > ۰$. اگر جواب بهینه مسئله (۵—۱) دایره‌ای با شعاع نامتناهی یعنی خطی مستقیم باشد، آن گاه بنا به لم ۳.۵ حداقل از دو نقطه از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد. بنابراین کافی است تنها حالتی را بررسی کنیم که جواب بهینه مسئله (۵—۱) دایره‌ای با شعاع متناهی باشد، یعنی $۰ < r < \infty$. فرض کنید دایره $C(X, r)$ که از هیچ یک از نقاط موجود در صفحه عبور نمی‌کند، جواب بهینه مسئله (۵—۱) باشد. با ثابت در نظر گرفتن مرکز دایره C یعنی $X = (x, y)$، مسئله سه متغیره (۵—۲) به مسئله تک متغیره زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{r} \quad F(r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ |d(A_j, X) - r|$$

حال شعاع دایره C را به گونه‌ای تغییر دهید که دایره تغییر یافته C^*، حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه مانند A_{j^*} بگذرد. دراین صورت $F(C^*) < F(C)$. پس دایره C نمی‌تواند جواب بهینه مسئله (۵–۱) باشد. □

اکنون نشان می‌دهیم تابع

$$F(r) = \sum_{j=1}^{n} w_j \ |d(A_j, X) - r|$$

تابعی محدب بر حسب r است. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم تابع $h_j(r) = |d(A_j, X) - r|$ تابعی محدب بر حسب r است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم.

$$h_j(\lambda r_1 + (1 - \lambda) r_2) \leq \lambda h_j(r_1) + (1 - \lambda) h_j(r_2)$$

یا

$$|d(A_j, X) - (\lambda r_1 + (1 - \lambda) r_2)| \leq \lambda |d(A_j, X) - r_1| + (1 - \lambda) |d(A_j, X) - r_2|$$

که در آن ها $\lambda \in [0, 1]$.

با نوشتن $d(A_j, X)$ به صورت

$$d(A_j, X) = \lambda d(A_j, X) + (1 - \lambda) d(A_j, X)$$

داریم.

$$\begin{aligned} |d(A_j, X) - (\lambda r_1 + (1 - \lambda) r_2)| &= |\lambda d(A_j, X) + (1 - \lambda) d(A_j, X) - (\lambda r_1 + (1 - \lambda) r_2)| \\ &= |\lambda d(A_j, X) - \lambda r_1 + (1 - \lambda) d(A_j, X) - (1 - \lambda) r_2| \end{aligned}$$

چون

$$|\lambda(d(A_j, X) - r_1) + (1 - \lambda)(d(A_j, X) - r_2)| \leq |\lambda(d(A_j, X) - r_1)| + |(1 - \lambda)(d(A_j, X) - r_2)|$$

و با توجه به مثبت بودن λ و $1 - \lambda$ داریم.

$$|d(A_j, X) - (\lambda r_1 + (1 - \lambda) r_2)| \leq \lambda |d(A_j, X) - r_1| + (1 - \lambda) |d(A_j, X) - r_2|$$

پس تابع $h_j(r)$ محدب است. چون w_j ها به ازای $j = 1, \cdots, n$، مثبت هستند، لذا تابع $g_j(r) = w_j |d(A_j, X) - r|$ نیز تابعی محدب بر حسب r است.

حال ثابت می‌کنیم تابع

$$F(r) = \sum_{j=1}^{n} w_j \ |d(A_j, X) - r| = \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$$

تابعی محدب بر حسب r است. می‌دانیم $g_1(r)$، $\cdots$ و $g_n(r)$ توابعی محدب بر حسب r هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $F(r) = \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$ نیز تابعی محدب است. برای اثبات این مطلب از استقرا

روی تعداد توابع محدب یعنی m استفاده می‌کنیم.

پایه استقرا: اگر $m = ۲$. فرض کنید توابع $g_۱(r)$ و $g_۲(r)$ محدب باشند. ثابت می‌کنیم تابع $g_۱ + g_۲(r)$ نیز محدب است. یعنی باید نشان دهیم.

$$g_۱ + g_۲(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) \leq \lambda(g_۱ + g_۲(r_۱)) + (۱ - \lambda)(g_۱ + g_۲(r_۲))$$

که در آن $\lambda \in [۰, ۱]$.

از محدب بودن $g_۱(r)$ و $g_۲(r)$ داریم.

$$g_۱(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) \leq \lambda g_۱(r_۱) + (۱ - \lambda)g_۱(r_۲)$$

و

$$g_۲(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) \leq \lambda g_۲(r_۱) + (۱ - \lambda)g_۲(r_۲)$$

با جمع دو رابطه فوق داریم.

$$g_۱(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) + g_۲(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) \leq \lambda(g_۱(r_۱) + g_۲(r_۱)) + (۱ - \lambda)(g_۱(r_۲) + g_۲(r_۲))$$

چون

$$g_۱(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) + g_۲(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) = g_۱ + g_۲(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲)$$

لذا

$$g_۱ + g_۲(\lambda r_۱ + (۱ - \lambda)r_۲) \leq \lambda(g_۱ + g_۲(r_۱)) + (۱ - \lambda)(g_۱ + g_۲(r_۲))$$

بنابراین تابع $g_۱ + g_۲(r)$ محدب است.

فرض استقرا: فرض می‌کنیم گزاره برای $m = n - ۱$ برقرار باشد.

حکم استقرا: ثابت می‌کنیم گزاره برای $m = n$ نیز برقرار است. فرض کنید $g_۱(r)$، $\cdots$ و $g_n(r)$ توابعی محدب باشند، در این صورت می‌توان نوشت.

$$F(r) = \sum_{j=۱}^{n} g_j(r) = \sum_{j=۱}^{n-۱} g_j(r) + g_n(r)$$

با توجه به فرض استقرا تابع $\sum_{j=۱}^{n-۱} g_j(r)$ تابعی محدب است، لذا $\sum_{j=۱}^{n} g_j(r)$ نیز تابعی محدب است.

بنابراین تابع $F(r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ |d(A_j, X) - r|$ تابعی محدب بر حسب r است.

حال ثابت می‌کنیم تابع

$$F(r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ |d(A_j, X) - r|$$

تابعی قطعه‌ای خطی است. برای اثبات این مطلب تابع $|d(A_j, X) - r|$ را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$|d(A_j, X) - r| = \begin{cases} d(A_j, X) - r & d(A_j, X) \geq r, \\ r - d(A_j, X) & d(A_j, X) < r. \end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن w_j ها به ازای $j = ۱, \ldots, n$ داریم.

$$w_j|d(A_j, X) - r| = \begin{cases} w_j(d(A_j, X) - r) & d(A_j, X) \geq r, \\ w_j(r - d(A_j, X)) & d(A_j, X) < r. \end{cases}$$

چون F تابعی بر حسب r است، لذا $d(A_j, X)$ مقدار ثابتی است. بنابراین $w_j(d(A_j, X) - r)$ و $w_j(r - d(A_j, X))$ توابعی خطی برحسب r هستند. در نتیجه تابع $F(r)$ تابعی قطعه‌ای خطی است.

برای حل مسئله

$$\min_r \quad F(r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \; |d(A_j, X) - r|$$

چون F تابعی یک متغیره بر حسب r است، لذا کافی است ابتدا نقاط بحرانی F را بیابیم، سپس مشتق دوم تابع F را به ازای نقاط به دست آمده تعیین علامت کنیم.

با توجه به مجموعه های $J_-(C)$، $J_\circ(C)$ و $J_+(C)$ می‌توان $F(r)$ را به صورت زیر نوشت.

$$F(r) = \sum_{j \in J_-} w_j(r - d(A_j, X)) + \sum_{j \in J_+} w_j(d(A_j, X) - r)$$

بنابراین

$$F'(r) = \sum_{j \in J_-} w_j - \sum_{j \in J_+} w_j$$

پس

$$\circ = \sum_{j \in J_-} w_j - \sum_{j \in J_+} w_j$$

در نتیجه

$$\sum_{j \in J_-} w_j = \sum_{j \in J_+} w_j$$

بنابراین شعاع بهینه در خاصیت میانه صدق می‌کند. به عبارت دیگر شعاع بهینه باید به گونه‌ای باشد که مجموع وزن نقاط خارج دایره اختلاف چندانی با مجموع وزن نقاط داخل دایره نداشته باشد، و لم زیر را داریم.

لم ۶.۵ ([۲]): اگر $C(X, r)$ جواب بهینه مسئله (۵—۱) باشد، آن گاه داریم:

$$\sum_{j \in J_- \cup J_\circ} w_j \geq \sum_{j \in J_+} w_j$$

و

$$\sum_{j\in J_+\cup J_\circ} w_j \geq \sum_{j\in J_-} w_j$$

یا به طور معادل

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j.$$

از لم ۵.۵ نتیجه می‌گیریم که جواب بهینه‌ای برای مسئله (۵−۱) وجود دارد که از یکی از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد. مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی لازم نیست جواب بهینه مسئله (۵−۱) از سه نقطه از نقاط موجود عبور کند.

مثال ۳.۵ نقاط $A_۱ = (\circ, ٦)$، $A_۲ = (\circ, -٦)$، $A_۳ = (۵, \circ)$ و $A_۴ = (-۵, \circ)$ را با وزن های $w_۱ = w_۲ = ۱\circ\circ$ و $w_۳ = w_۴ = ۱$ در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دایره‌ای است که مجموع وزنی فاصله نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل. چون نقاط $A_۱$ و $A_۲$ بیشترین مقدار وزن را نسبت به سایر نقاط موجود دارند، لذا دایره بهینه دایره‌ای است که حداقل از دو نقطه $A_۱$ و $A_۲$ عبور کند. دایره‌ای که تنها از دو نقطه $A_۱$ و $A_۲$ می‌گذرد یعنی $C_۱((\circ, \circ), ٦)$ نسبت به دایره‌ای که از نقاط $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ می‌گذرد یعنی $C_۲((-۱/۱, \circ), ٦/۱)$ و هم چنین نسبت به دایره‌ای که از نقاط $A_۱$، $A_۲$ و $A_۴$ می‌گذرد یعنی $C_۳((۱/۱, \circ), ٦/۱)$ بهتر است. زیرا

$$F(C_۱) = w_۳d_۳(C_۱) + w_۴d_۴(C_۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

و

$$F(C_۲) = w_۴d_۴(C_۲) = ۲/۲$$

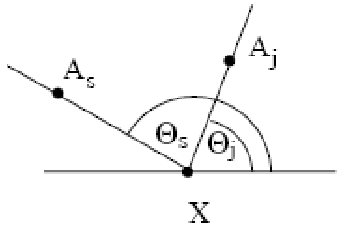
و

$$F(C_۳) = w_۳d_۳(C_۳) = ۲/۲$$

با مقایسه مقدار تابع هدف به ازای دوایر $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ در می‌یابیم که جواب بهینه مسئله دایره $C_۱((\circ, \circ), ٦)$ است.

با توجه به لم ۵.۵ و مثال فوق این سوال مطرح می‌شود که آیا جواب بهینه‌ای برای مسئله (۵−۱) وجود دارد که از دو نقطه از نقاط موجود در صفحه بگذرد؟ قضیه زیر به سوال فوق پاسخ مثبت می‌دهد.

قضیه ۱.۵ ([۲]): جواب بهینه مسئله (۵−۱) حداقل از دو نقطه از نقاط موجود عبور می‌کند.



شکل ۵—۳: تعریف زوایا در فرمول های مشتق

اثبات: با توجه به لم ۱.۵ و لم ۳.۵ تنها باید حالت $\circ < r < \infty$ را بررسی نماییم. فرض کنید $C'(X,r')$ جواب بهینه مسئله (۵—۱) باشد. بنا به لم ۵.۵ یک دایره مانند $C(X,r)$ که $\circ < r < \infty$ وجود دارد حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه می‌گذرد و مقدار تابع هدف به ازای آن با مقدار تابع هدف به ازای C' برابر است. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم دایره C از نقطه A_s عبور می‌کند. دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) X یکی از نقاط موجود در صفحه نباشد، یعنی $X \neq A_t$، $t \in \{۱,\cdots,n\}$. فرض کنید دایره $C'(X,r')$ تنها از یکی از نقاط ثابت مانند $A_s = (x_s,y_s)$ عبور کند. حال مرکز دایره C'، یعنی X را به گونه‌ای جابه جا کنید که دایره تغییریافته همچنان فقط از نقطه A_s بگذرد. در یک همسایگی از نقطه $X = (x,y)$ تابع هدف مشتق پذیر است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$f(X) = \sum_{j\in J_-} w_j\ (d_s(X) - d_j(X)) + \sum_{j\in J_+} w_j\ (d_j(X) - d_s(X)) \qquad (۵—۵)$$

یا

$$\begin{aligned} f(X) = \sum_{j\in J_-} w_j[\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲} - \sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}]\ + \\ \sum_{j\in J_+} w_j[\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲} - \sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}] \end{aligned}$$

با توجه به شکل ۵—۳ داریم:

$$\sin\theta_j = \frac{y_j - y}{d_j(X)} \qquad (۶—۵)$$

و

$$\cos\theta_j = \frac{x_j - x}{d_j(X)} \qquad (۷—۵)$$

از طرفی می‌دانیم

$$d_j(X) = \sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲}$$

مشتق تابع $d_j(X)$ نسبت به y به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial d_j(X)}{\partial y} = \frac{۲(y-y_j)}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲}} = \frac{y-y_j}{d_j(X)}$$

با استفاده از رابطه (۵—۶) داریم.

$$\frac{\partial d_j(X)}{\partial y} = -\sin\theta_j$$

مشتق تابع $\frac{\partial d_j(X)}{\partial y}$ نسبت به y به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial y^۲} = \frac{\sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲} - \frac{۲(y-y_j)^۲}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}}{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲}$$

یا

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial y^۲} = \frac{\frac{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲-(y-y_j)^۲}{\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}}{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲} = \frac{(x-x_j)^۲}{((x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲)\sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲}}$$

با استفاده از رابطه (۵—۷) داریم.

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial y^۲} = \cos^۲\theta_j.\frac{۱}{d_j(X)}$$

مشتق تابع $d_j(X)$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial d_j(X)}{\partial x} = \frac{۲(x-x_j)}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲}} = \frac{x-x_j}{d_j(X)}$$

با استفاده از رابطه (۵—۷) داریم.

$$\frac{\partial d_j(X)}{\partial x} = -\cos\theta_j$$

مشتق تابع $\frac{\partial d_j(X)}{\partial x}$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial x^۲} = \frac{\sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲} - \frac{۲(x-x_j)^۲}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}}{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲}$$

یا

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial x^۲}=\frac{\frac{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲-(x-x_j)^۲}{\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}}{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}=\frac{(y-y_j)^۲}{((x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲)\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}$$

پس

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial y^۲}=\frac{(y-y_j)^۲}{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}\ \frac{۱}{\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}$$

با استفاده از رابطه (۵—۶) داریم.

$$\frac{\partial^۲ d_j}{\partial y^۲}=\sin^۲\theta_j.\frac{۱}{d_j(X)}$$

مشتق تابع $f(X)$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{۲(x-x_s)}{۲\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}-\frac{۲(x-x_j)}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}]+$$

$$\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{۲(x-x_j)}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}-\frac{۲(x-x_s)}{۲\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}]$$

مشتق تابع $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}-\frac{۲(x-x_s)^۲}{۲\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}}{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}-$$

$$\frac{\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}-\frac{۲(x-x_j)^۲}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}}{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}]+$$

$$\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}-\frac{۲(x-x_j)^۲}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}}{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}-$$

$$\frac{\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}-\frac{۲(x-x_s)^۲}{۲\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}}{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}]$$

یا

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{(y-y_s)^۲}{((x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲)\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}-$$

$$\frac{(y-y_j)^۲}{((x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲)\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}]+$$

$$\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{(y-y_j)^۲}{((x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲)\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}-$$

$$\frac{(y-y_s)^۲}{((x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲)\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}]$$

پس

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{(y-y_s)^۲}{d_s^۲(X).d_s(X)}-\frac{(y-y_j)^۲}{d_j^۲(X).d_j(X)}]+\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{(y-y_j)^۲}{d_j^۲(X).d_j(X)}-\frac{(y-y_s)^۲}{d_s^۲(X).d_s(X)}]$$

یا

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{\sin^۲\theta_s}{d_s(X)}-\frac{\sin^۲\theta_j}{d_j(X)}]+\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{\sin^۲\theta_j}{d_j(X)}-\frac{\sin^۲\theta_s}{d_s(X)}]$$

مشتق تابع $f(X)$ نسبت به y به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{۲(y-y_s)}{۲\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}-\frac{۲(y-y_j)}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}]+$$

$$\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{۲(y-y_j)}{۲\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲}}-\frac{۲(y-y_s)}{۲\sqrt{(x-x_s)^۲+(y-y_s)^۲}}]$$

مشتق تابع $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$ نسبت به y به طور مشابه به دست آمده و به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{\cos^۲\theta_s}{d_s(X)}-\frac{\cos^۲\theta_j}{d_j(X)}]+\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{\cos^۲\theta_j}{d_j(X)}-\frac{\cos^۲\theta_s}{d_s(X)}]$$

حال به محاسبه عبارت $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$ می‌پردازیم.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{\sin^۲\theta_s}{d_s(X)}-\frac{\sin^۲\theta_j}{d_j(X)}]+\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{\sin^۲\theta_j}{d_j(X)}-\frac{\sin^۲\theta_s}{d_s(X)}]+$$

$$\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{\cos^۲\theta_s}{d_s(X)}-\frac{\cos^۲\theta_j}{d_j(X)}]+\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{\cos^۲\theta_j}{d_j(X)}-\frac{\cos^۲\theta_s}{d_s(X)}]$$

$$= \sum_{j\in J_-} w_j[\frac{\sin^۲\theta_s}{d_s(X)} - \frac{\sin^۲\theta_j}{d_j(X)} + \frac{\cos^۲\theta_s}{d_s(X)} - \frac{\cos^۲\theta_j}{d_j(X)}]+$$

$$\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{\sin^۲\theta_j}{d_j(X)} - \frac{\sin^۲\theta_s}{d_s(X)} + \frac{\cos^۲\theta_j}{d_j(X)} - \frac{\cos^۲\theta_s}{d_s(X)}]$$

چون $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$، لذا

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = \sum_{j\in J_-} w_j[\frac{۱}{d_s(X)} - \frac{۱}{d_j(X)}] + \sum_{j\in J_+} w_j[\frac{۱}{d_j(X)} - \frac{۱}{d_s(X)}] \qquad (۸-۵)$$

مجموع اول رابطه (۵—۸) منفی است، زیرا برای تمام $j \in J_-$ داریم

$$d_s(X) > d_j(X)$$

پس

$$\frac{۱}{d_s(X)} < \frac{۱}{d_j(X)}$$

لذا

$$\frac{۱}{d_s(X)} - \frac{۱}{d_j(X)} < ۰$$

چون به ازای هر $j = ۱,\cdots,n$ داریم $w_j > ۰$، پس

$$w_j[\frac{۱}{d_s(X)} - \frac{۱}{d_j(X)}] < ۰$$

لذا

$$\sum_{j\in J_-} w_j[\frac{۱}{d_s(X)} - \frac{۱}{d_j(X)}] < ۰ \qquad (۹-۵)$$

مجموع دوم رابطه (۵—۸) نیز منفی است، زیرا برای تمام $j \in J_+$ داریم

$$d_j(X) > d_s(X)$$

پس

$$\frac{۱}{d_j(X)} - \frac{۱}{d_s(X)} < ۰$$

و چون به ازای هر $j = ۱,\cdots,n$ داریم $w_j > ۰$، پس

$$w_j[\frac{۱}{d_j(X)} - \frac{۱}{d_s(X)}] < ۰$$

لذا

$$\sum_{j\in J_+} w_j[\frac{۱}{d_j(X)} - \frac{۱}{d_s(X)}] < ۰ \qquad (۱۰-۵)$$

با توجه به روابط (۵–۹) و (۵–۱۰) داریم.

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} < ۰$$

بنابراین حداقل یکی از مشتقات $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$ منفی است.

الف) اگر $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} < ۰$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$، دراین صورت چون $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} < ۰$ پس تابع $f(X)$ نمی‌تواند مینیمم نسبی داشته باشد.

ب) اگر $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} < ۰$ یا $\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}$، دراین صورت $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}.\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} - (\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y})^۲ < ۰$. پس در این حالت نیز تابع $f(X)$ نمی‌تواند مینیمم نسبی داشته باشد.

بنابراین دایره‌ای مانند C^* که اکیداً بهتر از دایره $C(X, r)$ باشد، وجود ندارد.

۲) X یکی از نقاط موجود باشد، یعنی $X = A_t$ به طوری که $t \in \{۱, \cdots, n\} - \{s\}$. در این حالت تابع هدف مشتق پذیر نمی‌باشد، بنابراین می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$f(X) = w_t(d_s(X) - d_t(X)) + \sum_{j \in J_- - \ \{t\}} w_j(d_s(X) - d_j(X)) + \sum_{j \in J_+} w_j(d_j(X) - d_s(X))$$

عبارت $\sum_{j \in J_- - \ \{t\}} w_j(d_s(X) - d_j(X)) + \sum_{j \in J_+} w_j(d_j(X) - d_s(X))$ همان مسئله مکانیابی دایره بدون نقطه A_t است. با توجه به حالت اول می‌دانیم $X = A_t$ نمی‌تواند جواب بهینه برای مسئله باشد.

چون نامساوی مثلث برای تابع فاصله برقرار است، لذا

$$d(A_s, X) \leq d(A_s, A_t) + d(A_t, X)$$

یا

$$d(A_s, X) - d(A_t, X) \leq d(A_s, A_t)$$

چون $d(A_t, A_t) = ۰$، بنابراین داریم.

$$d(A_s, X) - d(A_t, X) \leq d(A_s, A_t) - d(A_t, A_t)$$

یا

$$d_s(X) - d_t(X) \leq d_s(A_t) - d_t(A_t)$$

چون $w_t > ۰$، لذا

$$w_t(d_s(X) - d_t(X)) \leq w_t(d_s(A_t) - d_t(A_t))$$

بنابراین اگر $X = A_t$ آن گاه $w_t(d_s(X) - d_t(X))$ ماکزیمم نسبی می‌دهد. پس $X = A_t$ نمی‌تواند جواب بهینه باشد. □

۵–۳ الگوریتمی برای پیدا کردن جواب بهینه

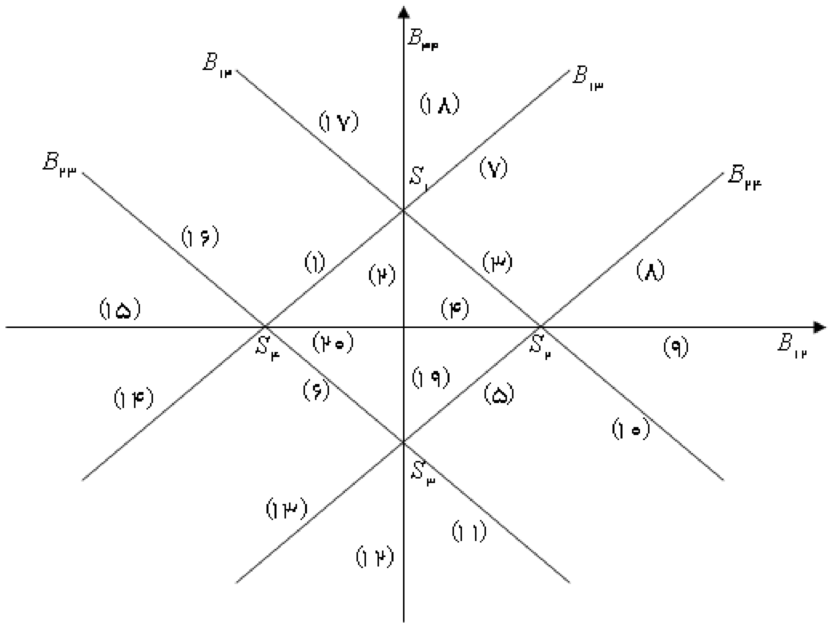
با توجه به قضایای قبل می‌توان به صورت زیر جواب بهینه مسئله مکانیابی را پیدا کرد.
گام ۱) معادله عمودمنصف هر جفت از نقاط موجود در صفحه را بیابید.
گام ۲) نقاط تلاقی هر سه تا از عمودمنصف ها را به دست آورید و آن ها را در مجموعه‌ای مانند S قرار دهید.
گام ۳) هر یک از نقاط مجموعه S را به عنوان مرکز دایره در نظر گرفته، شرط $|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$ را به ازای آن ها چک کنید. نقاطی که در شرط فوق صدق می‌کنند را در مجموعه‌ای مانند K و بقیه نقاط را در مجموعه‌ای مانند M قرار دهید.
گام ۴) اگر شرط $|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$ به ازای نقطه‌ای دلخواه از هر یک از پاره خط های $[A_i, A_j]$ که $i, j \in K$ و $[A_i, A_j]$ که $i \in K$ و $j \in M$ و نیم خط هایی که نقاط ابتدایی آن ها متعلق به مجموعه K هستند برقرار باشد، آن گاه شرط در تمام طول آن پاره خط یا نیم خط نیز برقرار است. نقطه بهینه را در هر کدام که در شرط صدق می‌کند، به دست آورید. مجموعه نقاط بهینه به دست آمده را N بنامید. به عبارت دیگر پاره خط های $[A_i, A_j]$ که $i, j \in M$ و نیم خط هایی که نقاط ابتدایی آن ها متعلق به مجموعه M هستند، نمی‌توانند شامل نقطه‌ای به عنوان مرکز دایره بهینه باشند.
گام ۵) با مقایسه مقدار تابع هدف به ازای نقاطی که به عنوان کاندیدا برای مرکز پذیرفته شدند، یعنی نقاط مجموعه K و N، مرکز بهینه را بیابید.

مثال ۴.۵ نقاط $A_۱ = (\circ, ٦)$، $A_۲ = (\circ, -٦)$، $A_۳ = (۵, \circ)$ و $A_۴ = (-۵, \circ)$ را به ترتیب با وزن های $w_۱ = w_۲ = ۱\circ\circ$ و $w_۳ = w_۴ = ۱$ در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دایره‌ای است که مجموع وزنی فاصله نقاط موجود تا محیط دایره کمینه گردد.

حل. ابتدا باید معادله عمودمنصف های هر جفت از نقاط فوق را محاسبه نمود. این کار به $\binom{۴}{۲} = ٦$ طریق صورت می‌گیرد که در زیر به محاسبه آن ها می‌پردازیم.

۱) عمودمنصف $A_۱ = (\circ, ٦)$ و $A_۲ = (\circ, -٦)$:

برای نوشتن معادله عمودمنصف $B_{۱۲}$ ابتدا باید نقطه وسط پاره خط $[A_۱, A_۲]$ را پیدا نمود، سپس معادله خطی که از آن نقطه می‌گذرد و بر $[A_۱, A_۲]$ نیز عمود است را نوشت.



شکل ۵—۴: عمودمنصف نقاط موجود مثال ۴.۵

نقطه وسط پاره خط $[A_1, A_2]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C = (c_1, c_2) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}) = (\frac{0 + 0}{2}, \frac{6 + (-6)}{2}) = (0, 0)$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط $[A_1, A_2]$، یعنی B_{12} به فرم زیر است.

$$y - c_2 = -\frac{1}{m}(x - c_1)$$

که در آن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب پاره خط $[A_1, A_2]$ است.

بنابراین

$$y - 0 = -\frac{0 - 0}{6 + 6}(x - 0)$$

در نتیجه معادله عمودمنصف پاره خط $[A_1, A_2]$ عبارت است از

$$y = 0$$

۲) عمودمنصف $A_1 = (0, 6)$ و $A_3 = (5, 0)$:

نقطه وسط پاره خط $[A_1, A_3]$ عبارت است از

$$C = (\frac{0 + 5}{2}, \frac{6 + 0}{2}) = (\frac{5}{2}, 3)$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط $[A_۱, A_۳]$ به فرم زیر است.

$$y = \frac{۵}{٦}\, x + \frac{۱۱}{۱۲}$$

۳) عمودمنصف $A_۱ = (۰, ٦)$ و $A_۴ = (-۵, ۰)$:

نقطه وسط پاره خط $[A_۱, A_۴]$ عبارت است از

$$C = (\frac{۰ - ۵}{۲}, \frac{٦ + ۰}{۲}) = (\frac{-۵}{۲}, ۳)$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط $[A_۱, A_۴]$ به فرم زیر است.

$$y = -\, \frac{۵}{٦}\, x + \frac{۱۱}{۱۲}$$

۴) عمودمنصف $A_۲ = (۰, -٦)$ و $A_۳ = (۵, ۰)$:

نقطه وسط پاره خط $[A_۲, A_۳]$ عبارت است از

$$C = (\frac{۰ + ۵}{۲}, \frac{-٦ + ۰}{۲}) = (\frac{۵}{۲}, -۳)$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط $[A_۲, A_۳]$ به فرم زیر است.

$$y = -\, \frac{۵}{٦}\, x - \frac{۱۱}{۱۲}$$

۵) عمودمنصف $A_۲ = (۰, -٦)$ و $A_۴ = (-۵, ۰)$:

نقطه وسط پاره خط $[A_۲, A_۴]$ عبارت است از

$$C = (\frac{۰ - ۵}{۲}, \frac{-٦ + ۰}{۲}) = (-\, \frac{۵}{۲}, -۳)$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط $[A_۲, A_۴]$ به فرم زیر است.

$$y = \frac{۵}{٦}\, x - \frac{۱۱}{۱۲}$$

٦) عمودمنصف $A_۳ = (۵, ۰)$ و $A_۴ = (-۵, ۰)$:

نقطه وسط پاره خط $[A_۳, A_۴]$ عبارت است از

$$C = (\frac{۵ - ۵}{۲}, \frac{۰ + ۰}{۲}) = (۰, ۰)$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره خط $[A_۳, A_۴]$ به فرم زیر است.

$$x = ۰$$

اکنون باید نقاط تلاقی هر سه تا از عمودمنصف ها را به دست آوریم.

الف) با حل دستگاه

$$\begin{cases} y = \frac{۵}{۶}\, x + \frac{۱۱}{۱۲} \\ y = -\,\frac{۵}{۶}\, x + \frac{۱۱}{۱۲} \\ x = ۰ \end{cases}$$

نقطه تلاقی $B_{۱۳}$، $B_{۱۴}$ و $B_{۳۴}$ به دست می آید که برابر $S_۱ = (۰, \frac{۱۱}{۱۲})$ است. اگر نقطه $S_۱$ مرکز دایره باشد آن گاه نقاط $A_۱$، $A_۳$ و $A_۴$ روی دایره قرار می‌گیرند، زیرا نقطه $S_۱$ محل تلاقی عمودمنصف های $B_{۱۳}$، $B_{۱۴}$ و $B_{۳۴}$ می باشد. دراین صورت شعاع دایره برابر فاصله نقطه $S_۱$ تا یکی از نقاط روی دایره یعنی $A_۱$، $A_۳$ یا $A_۴$ است. بنابراین فاصله نقطه $S_۱$ تا نقطه $A_۱$ برابر شعاع دایره می‌باشد، که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$r = \sqrt{(۰ - ۰)^۲ + (۶ - \frac{۱۱}{۱۲})^۲} = \frac{۶۱}{۱۲} \approx ۵/۰۸$$

اکنون فاصله بین نقطه $S_۱$ و $A_۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$d(S_۱, A_۲) = \sqrt{(۰ - ۰)^۲ + (-۶ - \frac{۱۱}{۱۲})^۲} = \frac{۸۳}{۱۲} \approx ۶/۹۲$$

چون $d(S_۱, A_۲) > r$، پس نقطه $A_۲$ خارج دایره $C((۰, \frac{۱۱}{۱۲}), ۵/۰۸)$ قرار دارد. از طرفی چون $۱۰۲ > |۱۰۰ -|$ لذا شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$$

برای دایره $C((۰, \frac{۱۱}{۱۲}), ۵/۰۸)$ برقرار است. مقدار تابع هدف به ازای دایره $C((۰, \frac{۱۱}{۱۲}), ۵/۰۸)$ برابراست با

$$F(C) = \sum_{j\in J_-} w_j(r - d(S_۱, A_j)) + \sum_{j\in J_+} w_j(d(S_۱, A_j) - r) = ۱۰۰(۶/۹۲ - ۵/۰۸) = ۱۸۴$$

ب) با حل دستگاه

$$\begin{cases} y = ۰ \\ y = -\,\frac{۵}{۶}\, x + \frac{۱۱}{۱۲} \\ y = \frac{۵}{۶}\, x - \frac{۱۱}{۱۲} \end{cases}$$

نقطه تلاقی $B_{۱۲}$ ، $B_{۱۴}$ و $B_{۲۴}$ به دست می‌آید که برابر $S_۲ = (\frac{۱۱}{۱۰}, ۰)$ است. اگر نقطه $S_۲$ مرکز دایره باشد آن گاه نقاط $A_۱$، $A_۲$ و $A_۴$ روی دایره قرار می‌گیرند. دراین صورت شعاع دایره برابر فاصله نقطه $S_۲$ تا یکی از نقاط روی دایره، یعنی $A_۱$، $A_۲$ یا $A_۴$ است. بنابراین فاصله نقطه $S_۲$ تا نقطه $A_۱$ برابر شعاع دایره می‌باشد، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \sqrt{(\frac{۱۱}{۱۰} - ۰)^۲ + (۰ - ٦)^۲} \approx ٦/۱$$

اکنون فاصله بین نقطه $S_۲$ و $A_۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$d(S_۲, A_۳) = \sqrt{(\frac{۱۱}{۱۰} - ۵)^۲ + (۰ - ۰)^۲} = \frac{۳۹}{۱۰} = ۳/۹$$

چون $d(S_۲, A_۳) < r$، پس نقطه $A_۳$ داخل دایره $C((\frac{۱۱}{۱۰}, ۰), ٦/۱)$ قرار دارد. از طرفی چون $|۱| < ۲۰۱$ لذا شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$$

برای دایره $C((\frac{۱۱}{۱۰}, ۰), ٦/۱)$ برقرار است. مقدار تابع هدف به ازای دایره $C((\frac{۱۱}{۱۰}, ۰), ٦/۱)$ برابراست با

$$F(C) = \sum_{j\in J_-} w_j(r - d(S_۲, A_j)) + \sum_{j\in J_+} w_j(d(S_۲, A_j) - r) = ۱(٦/۱ - ۳/۹) = ۲/۲$$

ج) با حل دستگاه

$$\begin{cases} y = -\frac{۵}{٦}x - \frac{۱۱}{۱۲} \\ y = \frac{۵}{٦}x - \frac{۱۱}{۱۲} \\ x = ۰ \end{cases}$$

نقطه تلاقی $B_{۲۳}$ ، $B_{۲۴}$ و $B_{۳۴}$ به دست می‌آید که برابر $S_۳ = (۰, -\frac{۱۱}{۱۲})$ است. اگر نقطه $S_۳$ مرکز دایره باشد، آن گاه نقاط $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ روی دایره قرار می‌گیرند. دراین صورت شعاع دایره برابر فاصله نقطه $S_۳$ تا یکی از نقاط روی دایره، یعنی $A_۲$، $A_۳$ یا $A_۴$ است. بنابراین فاصله نقطه $S_۳$ تا نقطه $A_۲$ برابر شعاع دایره می‌باشد، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \sqrt{(۰ - ۰)^۲ + (-\frac{۱۱}{۱۲} + ٦)^۲} = \frac{٦۱}{۱۲} \approx ۵/۰۸$$

اکنون فاصله بین نقطه $S_۳$ و $A_۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$d(S_۳, A_۱) = \sqrt{(۰ - ۰)^۲ + (-\frac{۱۱}{۱۲} - ٦)^۲} = \frac{۸۳}{۱۲} \approx ٦/۹۲$$

چون $d(S_۳, A_۱) > r$، پس نقطه $A_۱$ خارج دایره $C((۰, -\frac{۱۱}{۱۲}), ۵/۰۸)$ قرار دارد. از طرفی چون $۱۰۲ > |۱۰۰ - |$ لذا شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_۰} w_j$$

برای دایره $C((۰, -\frac{۱۱}{۱۲}), ۵/۰۸)$ برقرار است. مقدار تابع هدف به ازای دایره $C((۰, -\frac{۱۱}{۱۲}), ۵/۰۸)$ برابراست با

$$F(C) = \sum_{j\in J_-} w_j(r - d(S_۳, A_j)) + \sum_{j\in J_+} w_j(d(S_۳, A_j) - r) = ۱۰۰(۶/۹۲ - ۵/۰۸) = ۱۸۴$$

د) با حل دستگاه

$$\begin{cases} y = ۰ \\ y = \frac{۵}{۹}\,x + \frac{۱۱}{۱۲} \\ y = -\,\frac{۵}{۹}\,x - \frac{۱۱}{۱۲} \end{cases}$$

نقطه تلاقی $B_{۱۲}$، $B_{۱۳}$ و $B_{۲۳}$ به دست می‌آید و برابر $S_۴ = (-\frac{۱۱}{۱۰}, ۰)$ است. اگر نقطه $S_۴$ مرکز دایره باشد، آن گاه نقاط $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ روی دایره قرار می‌گیرند. دراین صورت شعاع دایره برابر فاصله نقطه $S_۴$ تا یکی از نقاط روی دایره، یعنی $A_۱$، $A_۲$ یا $A_۳$ است. بنابراین فاصله نقطه $S_۴$ تا نقطه $A_۱$ برابر شعاع دایره می‌باشد، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \sqrt{(۰ + \frac{۱۱}{۱۰})^۲ + (۶ - ۰)^۲} \approx ۶/۱$$

اکنون فاصله بین نقطه $S_۴$ و $A_۴$ را محاسبه می‌کنیم:

$$d(S_۴, A_۴) = \sqrt{(-\frac{۱۱}{۱۰} + ۵)^۲ + (۰ - ۰)^۲} = \frac{۳۹}{۱۰} = ۳/۹$$

چون $d(S_۴, A_۴) < r$، بنابراین نقطه $A_۴$ داخل دایره $C((-\frac{۱۱}{۱۰}, ۰), ۶/۱)$ قرار دارد. از طرفی چون $۲۰۱ > |۱|$، لذا شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_۰} w_j$$

برای دایره $C((-\frac{۱۱}{۱۰}, ۰), ۶/۱)$ برقرار است. مقدار تابع هدف به ازای دایره $C((-\frac{۱۱}{۱۰}, ۰), ۶/۱)$ برابراست با

$$F(C) = \sum_{j\in J_-} w_j(r - d(S_۴, A_j)) + \sum_{j\in J_+} w_j(d(S_۴, A_j) - r) = ۱(۶/۱ - ۳/۹) = ۲/۲$$

شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$$

برای کلیه نقاطی که محل تلاقی سه عمودمنصفند، برقرار است. حال باید شرط مذکور را برای تمام نقاط روی عمودمنصف ها چک کنیم. برای این کار کافی است شرط را فقط برای یک نقطه از خط امتحان کنیم اگر شرط برای این نقطه برقرار باشد آن گاه شرط برای کل نقاط خط برقرار است.

I) شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$$

را برای پاره خط $[S_۱, S_۴]$ که آن را با پاره خط شماره (۱) در شکل (۵—۴) نمایش دادیم، چک می‌کنیم. می‌دانیم نقاط ابتدایی و انتهایی پاره خط (۱) عبارتند از:

$$(\circ, \frac{۱۱}{۱۲}) \qquad\qquad (-\frac{۱۱}{۱\circ}, \circ)$$

چون پاره خط (۱) بخشی از عمود منصف $B_{۱۳}$ می‌باشد. بنابراین اگر مرکز دایره یکی از نقاط پاره خط (۱) باشد آن گاه نقاط $A_۱$ و $A_۳$ روی دایره قرار می‌گیرند. نقطه‌ای دلخواه از پاره خط (۱) مثلاً $A = (-۱, \frac{۱}{۱۲})$ را به عنوان مرکز دایره انتخاب می‌کنیم. حال با داشتن مرکز دایره و دو نقطه روی آن می‌توان شعاع دایره را محاسبه نمود. فاصله مرکز تا $A_۱$ برابر فاصله مرکز تا $A_۳$ و برابر شعاع است. بنابراین داریم:

$$r = d(A, A_۱) = \sqrt{(-۱ - \circ)^۲ + (\frac{۱}{۱۲} - ٦)^۲} \approx ٦$$

برای دانستن این که نقاط باقی مانده داخل یا خارج دایره $C((-۱, \frac{۱}{۱۲}), ٦)$ قرار دارند کافی است فاصله این نقاط را تا مرکز محاسبه کنیم.

فاصله نقطه $A_۲$ از مرکز یعنی $A = (-۱, \frac{۱}{۱۲})$ برابر است با:

$$d(A, A_۲) = \sqrt{(-۱ - \circ)^۲ + (\frac{۱}{۱۲} + ٦)^۲} \approx ٦/۱٦$$

چون این فاصله بیشتر از شعاع می‌باشد، بنابراین نقطه $A_۲$ خارج دایره قرار می‌گیرد.

هم چنین فاصله نقطه $A_۴$ از مرکز برابر است با:

$$d(A, A_۴) = \sqrt{(-۱ - (-۵))^۲ + (\frac{۱}{۱۲} - ۰)^۲} \approx ۴$$

چون این فاصله کمتر از شعاع می‌باشد، بنابراین نقطه $A_۴$ داخل دایره قرار دارد. حال شرط

$$|\sum_{j \in J_-} w_j - \sum_{j \in J_+} w_j| \leq \sum_{j \in J_۰} w_j$$

را برای دایره $C((-۱, \frac{۱}{۱۲}), ٦)$ چک می‌کنیم. چون $|-۹۹| \leq ۱۰۱$ لذا شرط مذکور برای دایره نامبرده برقرار است. بنابراین نقاط پاره خط (۱) می‌توانند کاندیدایی برای مرکز بهینه باشند.

با مشخص شدن نقاط داخل و خارج دایره $C((-۱, \frac{۱}{۱۲}), ٦)$ می‌توان مدل برنامه ریزی غیرخطی زیر را حل نمود.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = [۱۰۰(\sqrt{(x)^۲ + (y + ٦)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y - ٦)^۲}) - \\
& (\sqrt{(x + ۵)^۲ + (y)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y - ٦)^۲})] \\
s.t. & \\
& x = \lambda(۰) + (۱ - \lambda)(-\tfrac{۱۱}{۱۰}) \\
& y = \lambda(\tfrac{۱۱}{۱۲}) + (۱ - \lambda)(۰) \\
& ۰ \leq \lambda \leq ۱
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = [۱۰۰(\sqrt{(x)^۲ + (y + ٦)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y - ٦)^۲}) - \\
& (\sqrt{(x + ۵)^۲ + (y)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y - ٦)^۲})] \\
s.t. & \\
& x = -\tfrac{۱۱}{۱۰} + \tfrac{۱۱}{۱۰}\lambda \\
& y = \tfrac{۱۱}{۱۲}\lambda \\
& ۰ \leq \lambda \leq ۱
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = [۱۰۰(\sqrt{(-\tfrac{۱۱}{۱۰} + \tfrac{۱۱}{۱۰}\lambda)^۲ + (\tfrac{۱۱}{۱۲}\lambda + ٦)^۲} - \sqrt{(-\tfrac{۱۱}{۱۰} + \tfrac{۱۱}{۱۰}\lambda)^۲ + (\tfrac{۱۱}{۱۲}\lambda - ٦)^۲}) - \\
& (\sqrt{(-\tfrac{۱۱}{۱۰} + \tfrac{۱۱}{۱۰}\lambda + ۵)^۲ + (\tfrac{۱۱}{۱۲}\lambda)^۲} - \sqrt{(-\tfrac{۱۱}{۱۰} + \tfrac{۱۱}{۱۰}\lambda)^۲ + (\tfrac{۱۱}{۱۲}\lambda - ٦)^۲})] \\
s.t. & \\
& ۰ \leq \lambda \leq ۱
\end{aligned}$$

با حل مدل برنامه ریزی غیرخطی فوق با نرم افزار $LINGO$ داریم:

$$\lambda = ۰ \qquad x = -\frac{۱۱}{۱۰} \qquad y = ۰ \qquad r = ۵/۰۸ \qquad F(C) \approx ۲/۲$$

به روشی مشابه می‌توان نقطه بهینه هر یک از پاره خط های شکل ۵—۴ را به دست آورد. نتایج را در جدول (۵—۱) مشاهده می‌کنید.

جدول ۵—۱: نقطه بهینه هر پاره خط و مقدار تابع هدف به ازای آن

شماره پاره خط	λ	x	y	r	مقدار تابع هدف
۲	۱	۰	$\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳
۳	۰	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۴	۱	۰	۰	۶	۲
۵	۱	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۶	۰	$-\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۱۹	۰	۰	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳
۲۰	۱	۰	۰	۶	۲

II) شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_۰} w_j$$

را برای نیم خطی از عمودمنصف $B_{۱۳}$ که نقطه ابتدایی آن $S_۱$ است و آن را با نیم خط شماره (۷) در شکل (۵—۴) نمایش دادیم، چک می‌کنیم. می‌دانیم نقطه شروع نیم خط (۷) برابر $S_۱ = (۰, \frac{۱۱}{۱۲})$ است. چون نیم خط (۷) بخشی از عمود منصف $B_{۱۳}$ می‌باشد. بنابراین اگر مرکز دایره یکی از نقاط نیم خط (۷) باشد، آن گاه نقاط $A_۱$ و $A_۳$ روی دایره قرار می‌گیرند. نقطه‌ای دلخواه از نیم خط (۷) مثلاً $A = (۱, \frac{۷}{۴})$ را به عنوان مرکز دایره انتخاب می‌کنیم. حال با داشتن مرکز دایره و دو نقطه روی آن می‌توان شعاع دایره را محاسبه نمود. فاصله مرکز تا $A_۱$ برابر فاصله مرکز تا $A_۳$ و برابر شعاع است. بنابراین داریم:

$$r = d(A, A_۱) = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (\frac{۷}{۴} - ۶)^۲} \approx ۴/۴$$

برای دانستن این که نقاط باقی مانده داخل یا خارج دایره قرار دارند کافی است فاصله این نقاط را تا مرکز محاسبه کنیم.

فاصله نقطه $A_۲$ از مرکز یعنی $A = (۱, \frac{۷}{۴})$ برابر است با:

$$d(A, A_۲) = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (\frac{۷}{۴} + ۶)^۲} \approx ۷/۸$$

چون این فاصله بیشتر از شعاع می‌باشد بنابراین نقطه $A_۲$ خارج دایره قرار می‌گیرد.
هم چنین فاصله نقطه $A_۴$ ازمرکز برابر است با:

$$d(A, A_۴) = \sqrt{(۱ - (-۵))^۲ + (\frac{۷}{۴} - ۰)^۲} \approx ۶/۲۵$$

چون این فاصله نیز بیشتر از شعاع می‌باشد بنابراین نقطه $A_۴$ هم خارج دایره قرار دارد.
حال شرط

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$$

را برای دایره $C((۱, \frac{۷}{۴}), ۴/۴)$ چک می‌کنیم. چون $۱۰۱ \leq |۱۰۱ - |$ لذا شرط مذکور برای دایره نامبرده برقرار است. بنابراین نقاط نیم خط (۷) می‌توانند کاندیدایی برای مرکز بهینه باشند.
با مشخص شدن نقاط داخل و خارج دایره $C((۱, \frac{۷}{۴}), ۴/۴)$ می‌توان مدل برنامه ریزی غیرخطی زیر را حل نمود.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = [۱۰۰(\sqrt{(x)^۲ + (y+۶)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y-۶)^۲}) + \\
& (\sqrt{(x+۵)^۲ + (y)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y-۶)^۲})] \\
s.t. & \\
& x = \lambda(۱) + (۱-\lambda)(۰) \\
& y = \lambda(\tfrac{۷}{۴}) + (۱-\lambda)(\tfrac{۱۱}{۱۲}) \\
& ۰ \leq \lambda \leq ۱
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = [۱۰۰(\sqrt{(x)^۲ + (y+۶)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y-۶)^۲}) + \\
& (\sqrt{(x+۵)^۲ + (y)^۲} - \sqrt{(x)^۲ + (y-۶)^۲})] \\
s.t. & \\
& x = \lambda \\
& y = \tfrac{۱۱}{۱۲} + \tfrac{۵}{۶}\lambda \\
& ۰ \leq \lambda \leq ۱
\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\min \quad z=[۱۰۰(\sqrt{(\lambda)^۲+(\tfrac{۱۱}{۱۲}+\tfrac{۵}{۶}\lambda+۶)^۲}-\sqrt{(\lambda)^۲+(\tfrac{۱۱}{۱۲}+\tfrac{۵}{۶}\lambda-۶)^۲})+$$

$$(\sqrt{(\lambda+۵)^۲+(\tfrac{۱۱}{۱۲}+\tfrac{۵}{۶}\lambda)^۲}-\sqrt{(\lambda)^۲+(\tfrac{۱۱}{۱۲}+\tfrac{۵}{۶}\lambda-۶)^۲})]$$

$s.t.$

$$۰\leq\lambda\leq ۱$$

با حل مدل برنامه ریزی غیرخطی فوق با نرم افزار $LINGO$ داریم:

$$\lambda=۰ \qquad x=۰ \qquad y=\tfrac{۱۱}{۱۲} \qquad r=۵/۰۸ \qquad F(C)\approx ۱۸۳/۳۳$$

به روشی مشابه می‌توان نقطه بهینه هر یک از نیم خط های شکل ۵—۴ را به دست آورد. نتایج را در جدول (۵—۲) مشاهده می‌کنید.

جدول ۵—۲: نقطه بهینه هر نیم خط و مقدار تابع هدف به ازای آن

شماره نیم خط	λ	x	y	r	مقدار تابع هدف
۸	۰	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۹	۰	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۱۰	۰	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۱۱	۰	۰	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳
۱۲	۰	۰	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳
۱۳	۰	۰	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳
۱۴	۰	$-\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۱۳
۱۵	۰	$-\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۱۶	۰	$-\frac{۱۱}{۱۰}$	۰	۶/۱	۲/۲
۱۷	۰	۰	$\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳
۱۸	۰	۰	$\frac{۱۱}{۱۲}$	۵/۰۸	۱۸۳/۳۳

با مقایسه مقادیر تابع هدف در دو جدول اخیر درمی‌یابیم که دایره $C((۰,۰),۶)$، دایره بهینه است.

فصل ٦

مکانیابی دیسک کمترین مجموع همراه با نرم بلوکی

در این فصل به مطالعه مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع می‌پردازیم. مطالب بخش های ٦−١ و ٦−٢ با توجه به [٣] گردآوری شده است. مطالب بخش ٦−٣ تماماً جدید بوده و در جمع‌آوری آن از هیچ مرجعی استفاده نشده است.

٦−١ مقدمه

فرض کنید $n \geq ۲$ نقطه $A_j = (a_j, b_j)$، $j = ۱, \cdots, n$ در صفحه موجود باشند و w_j وزن مثبت متناظر با نقطه A_j باشد. نقاط موجود در صفحه، نقاط ثابت نیز نامیده می‌شوند. در مسئله مکانیابی دیسک کمترین مجموع، هدف یافتن مکان یک دیسک مانند C است به قسمی که مجموع وزنی فاصله بین محیط دیسک و نقاط موجود در صفحه کمینه گردد. یعنی

$$\min_{x,y,r} \quad F(C) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ d_j(C). \qquad (۱−٦)$$

که در آن $C(X,r)$ دیسکی به مرکز $X = (x,y)$ و شعاع r می‌باشد. این دیسک، تغییریافته دیسک واحد متناظر با نرم k است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(X,r) = \{Y \in R^{۲} : \quad k(Y - X) = r\}.$$

هم چنین $d_j(C)$ کوتاهترین فاصله نقطه A_j تا محیط دیسک C است. یعنی

$$d_j(C) = d(C, A_j) = \min_{Y \in \ C} k(A_j - Y).$$

بنابراین مسئله (٦−١) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\min_{x,y,r} \quad F(X,r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j d(C, A_j). \qquad (۲−٦)$$

فاصله بین دیسک $C(X,r)$ و نقطه A_j به صورت زیر نیز تعریف می‌شود.

$$d(C, A_j) = |k(X - A_j) - r|.$$

لذا مسئله (٦−١) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

$$\min_{x,y,r} \quad F(X,r) = \sum_{j=۱}^{n} w_j |k(X - A_j) - r|. \qquad (۳−٦)$$

از طرفی می‌دانیم

$$|k(X-A_j)-r| = \begin{cases} k(X-A_j)-r & k(X-A_j) \geq r, \\ r-k(X-A_j) & k(X-A_j) < r. \end{cases}$$

با استفاده از تعاریف

$$\begin{aligned} J_+(C) &= \{j: \ k(X-A_j) > r\} \\ J_\circ(C) &= \{j: \ k(X-A_j) = r\} \\ J_-(C) &= \{j: \ k(X-A_j) < r\} \end{aligned}$$

مسئله (۶—۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\min_{x,y,r} \quad F(X,r) = \sum_{j\in J_+} w_j(k(X-A_j)-r) + \sum_{j\in J_-} w_j(r-k(X-A_j)).$$

لم ۱.۶ ([۳]): جواب بهینه مسئله (۶—۱) باید شعاع مثبت داشته باشد.

اثبات: فرض کنید جواب بهینه مسئله (۶—۱) دیسکی با شعاع صفر مانند $C_\circ(X_\circ,\circ)$ باشد. چون $n \geq ۲$، پس یک نقطه ثابت مانند $A_۱$ وجود دارد به طوری که $X_\circ \neq A_۱$. لذا $d_۱(C_\circ) = k(X_\circ - A_۱) > \circ$. در نتیجه مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C_\circ$ برابر است با

$$F(C_\circ) = \sum_{j=۱}^{n} w_j d_j(C_\circ) = \sum_{j=۱}^{n} w_j \ k(X-A_j) > \circ$$

حال دیسک $C_۱(X,r)$ را به گونه‌ای درنظربگیرید که از هر دو نقطه $X_\circ$ و $A_۱$ بگذرد. با تعریف

$$X = \tfrac{۱}{۲}(X_\circ + A_۱) \qquad , \qquad r = \tfrac{۱}{۲}\ k(X_\circ - A_۱)$$

داریم

$$k(X-A_۱) = k(\tfrac{X_\circ + A_۱}{۲} - A_۱) = k(\tfrac{X_\circ - A_۱}{۲}) = r$$

و

$$k(X-X_\circ) = k(\tfrac{X_\circ + A_۱}{۲} - X_\circ) = k(\tfrac{A_۱ - X_\circ}{۲}) = r$$

بنابراین نقاط $X_\circ$ و $A_۱$ روی دیسک $C_۱$ قرار دارند. چون نقطه $X_\circ$ روی دیسک $C_۱$ است، لذا کوتاهترین فاصله بین نقطه A_j و دیسک $C_۱$ یعنی $d_j(C_۱)$، یا برابر فاصله نقطه A_j تا $X_\circ$ یعنی

$d_j(C_\circ)$ است و یا از آن کمتر است. به عبارت دیگر

$$d_j(C_\text{۱}) \leq d_j(C_\circ) \qquad j = \text{۱}, \cdots, n.$$

از طرفی برای نقطه $A_\text{۱}$ داریم

$$d_\text{۱}(C_\circ) = k(X_\circ - A_\text{۱}) > \circ \qquad , \qquad d_\text{۱}(C_\text{۱}) = \circ$$

لذا

$$d_\text{۱}(C_\text{۱}) < d_\text{۱}(C_\circ)$$

با توجه به مثبت بودن w_j ها به ازای تمام j ها داریم

$$F(C_\text{۱}) = \sum_{j=\text{۱}}^{n} w_j d_j(C_\text{۱}) < \sum_{j=\text{۱}}^{n} w_j d_j(C_\circ) = F(C_\circ)$$

پس دیسک $C_\circ$ نمی‌تواند جواب بهینه مسئله (٦—۱) باشد. □

لم ٦.٢ ([۳]): فرض کنید دو نقطه A و X در صفحه داده شده باشند. دراین صورت تابع $d(C, A) = |k(X - A) - r|$ تابعی محدب و قطعه‌ای خطی بر حسب r است.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم $d(C, A) = |k(X - A) - r|$ تابعی محدب بر حسب r است. برای این منظور باید ثابت کنیم.

$$|k(X - A) - (\lambda r_\text{۱} + (\text{۱} - \lambda) r_\text{۲})| \leq \lambda |k(X - A) - r_\text{۱}| + (\text{۱} - \lambda)|k(X - A) - r_\text{۲}|$$

که در آن $\lambda \in [\circ, \text{۱}]$.

چون $k(X - A)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$k(X - A) = \lambda k(X - A) + (\text{۱} - \lambda) k(X - A)$$

پس

$$|k(X - A) - \lambda r_\text{۱} - (\text{۱} - \lambda) r_\text{۲}| = |\lambda k(X - A) + (\text{۱} - \lambda) k(X - A) - \lambda r_\text{۱} - (\text{۱} - \lambda) r_\text{۲}|$$

یا

$$|k(X - A) - \lambda r_\text{۱} - (\text{۱} - \lambda) r_\text{۲}| = |\lambda (k(X - A) - r_\text{۱}) + (\text{۱} - \lambda)(k(X - A) - r_\text{۲})|$$

چون

$$|\lambda(k(X - A) - r_\text{۱}) + (\text{۱} - \lambda)(k(X - A) - r_\text{۲})| \leq |\lambda(k(X - A) - r_\text{۱})| + |(\text{۱} - \lambda)(k(X - A) - r_\text{۲})|$$

با توجه به مثبت بودن λ و $\lambda - ۱$ داریم

$$|k(X-A) - \lambda r_۱ - (۱-\lambda) r_۲| \leq \lambda |k(X-A) - r_۱| + (۱-\lambda)|k(X-A) - r_۲|$$

در نتیجه تابع $d(C,A) = |k(X-A) - r|$ تابعی محدب برحسب r است.

اکنون نشان می‌دهیم تابع $d(C,A) = |k(X-A) - r|$ تابعی قطعه‌ای خطی بر حسب r است. همان طور که می‌دانیم تابع $d(C,A)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$d(C,A) = \begin{cases} k(X-A) - r & k(X-A) \geq r, \\ r - k(X-A) & k(X-A) < r. \end{cases}$$

چون X و A اعداد ثابتی هستند، لذا $k(X-A)$ نیز مقدار ثابتی است. در نتیجه $k(X-A) - r$ و $r - k(X-A)$ توابعی خطی بر حسب r هستند. بنابراین $d(C,A)$ تابعی قطعه‌ای خطی بر حسب r است. □

لم ۳.۶ ([۳]): اگر نقطه A خارج دیسک C باشد، آن گاه $d(C,A) = |k(X-A) - r|$ تابعی موضعاً محدب بر حسب X است. اگر نقطه A داخل دیسک C باشد، آن گاه تابع $d(C,A) = |k(X-A) - r|$ تابعی موضعاً مقعر بر حسب X است.

اثبات: با نوشتن تابع $d(C,A) = |k(X-A) - r|$ به صورت

$$d(C,A) = \begin{cases} k(X-A) - r & k(X-A) \geq r, \\ r - k(X-A) & k(X-A) < r. \end{cases}$$

برای اثبات لم، تنها کافی است ثابت کنیم $k(X-A)$ تابعی موضعاً محدب برحسب X است. برای این منظور باید نشان دهیم.

$$k((\lambda X_۱ + (۱-\lambda)X_۲) - A) \leq \lambda k(X_۱ - A) + (۱-\lambda) k(X_۲ - A)$$

که در آن $\lambda \in [۰, ۱]$.

با نوشتن A به صورت

$$A = \lambda A + (۱-\lambda) A$$

داریم

$$k((\lambda X_۱ + (۱-\lambda)X_۲) - (\lambda A + (۱-\lambda)A)) = k(\lambda(X_۱ - A) + (۱-\lambda)(X_۲ - A))$$

با توجه به برقراری نامساوی مثلث برای توابع نرم و مثبت بودن λ و $(\lambda - ۱)$ داریم

$$k(\lambda(X_1 - A) + (1-\lambda)(X_2 - A)) \leq \lambda k(X_1 - A) + (1-\lambda)k(X_2 - A)$$

بنابراین

$$k((\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) - A) \leq \lambda k(X_1 - A) + (1-\lambda)k(X_2 - A)$$

پس $k(X-A)$ تابعی موضعاً محدب برحسب X است.

با توجه به موضعاً محدب بودن تابع $k(X-A)$ نتیجه می‌گیریم $k(X-A)-r$ تابعی موضعاً محدب و $r-k(X-A)$ تابعی موضعاً مقعر است. بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

لم ۶.۴ ([۳]): یک جواب بهینه برای مسئله (۶—۱) وجود دارد به طوری که حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه عبور می‌کند.

اثبات: فرض کنید جواب بهینه مسئله (۶—۱) دیسکی مانند $C(X,r)$ باشد که از هیچ یک از نقاط موجود در صفحه نمی‌گذرد. با ثابت درنظرگرفتن مرکز دیسک C یعنی X، مسئله سه متغیره (۶—۳) به مسئله تک متغیره زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_r \quad F(r) = \sum_{j=1}^{n} w_j |k(X - A_j) - r|$$

حال شعاع دیسک C را به گونه‌ای تغییر دهید که دیسک تغییریافته C^*، حداقل از یکی از نقاط موجود در صفحه مانند A_{j^*} بگذرد. دراین صورت $F(C^*) < F(C)$. پس دیسک C نمی‌تواند جواب بهینه مسئله (۶—۱) باشد. □

اکنون نشان می‌دهیم شعاع بهینه در خاصیت میانه صدق می‌کند. برای به دست آوردن شعاع بهینه باید مرکز دیسک را ثابت درنظربگیریم. یعنی باید مسئله زیر را حل کنیم.

$$\min_r \quad F(r) = \sum_{j\in J_-} w_j(r - k(X - A_j)) + \sum_{j \in J_+} w_j(k(X - A_j) - r)$$

چون تابع $F(r)$ یک متغیره است، لذا برای حل مسئله فوق کافی است ابتدا نقاط بحرانی F را پیدا کرده، سپس مشتق دوم آن را به ازای نقاط به دست آمده تعیین علامت نماییم. یعنی

$$F'(r) = \textstyle\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j$$

پس

$$0 = \textstyle\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j$$

در نتیجه

$$\sum_{j\in J_-} w_j = \sum_{j\in J_+} w_j$$

بنابراین شعاع بهینه در خاصیت میانه صدق می‌کند. به عبارت دیگر شعاع بهینه باید به گونه‌ای باشد که مجموع وزن نقاط خارج دیسک اختلاف چندانی با مجموع وزن نقاط در داخل دیسک نداشته باشد. یعنی لم زیر را داریم.

لم ۵.۶ ([۳]): فرض کنید دیسک C جواب بهینه مسئله (۶—۱) باشد و $J_+(C)$ و $J_\circ(C)$، $J_-(C)$ مجموعه اندیس های متناظر با دیسک C باشند. دراین صورت داریم.

$$\sum_{j\in J_\circ\cup J_-} w_j \geq \sum_{j\in J_+} w_j$$

و

$$\sum_{j\in J_\circ\cup J_+} w_j \geq \sum_{j\in J_-} w_j$$

یا به طور معادل

$$|\sum_{j\in J_-} w_j - \sum_{j\in J_+} w_j| \leq \sum_{j\in J_\circ} w_j$$

۶—۲ حل مسئله مکانیابی دیسک کمترین مجموع همراه با نرم بلوکی

در این بخش فرض می‌کنیم k یک نرم بلوکی است. یعنی

$$k(X) = \min\ \{\sum_{g=۱}^{r} |\beta_g| : \quad X = \sum_{g=۱}^{r} \beta_g b_g\}$$

که در آن b_g ها، به ازای $g = ۱,\cdots,r$ جهت های اصلی نرم بلوکی k هستند.

توجه کنید $k(A-X)$ که A یک نقطه ثابت است، روی مخروط تشکیل شده توسط نقطه A و دو جهت اصلی مجاور، خطی است.

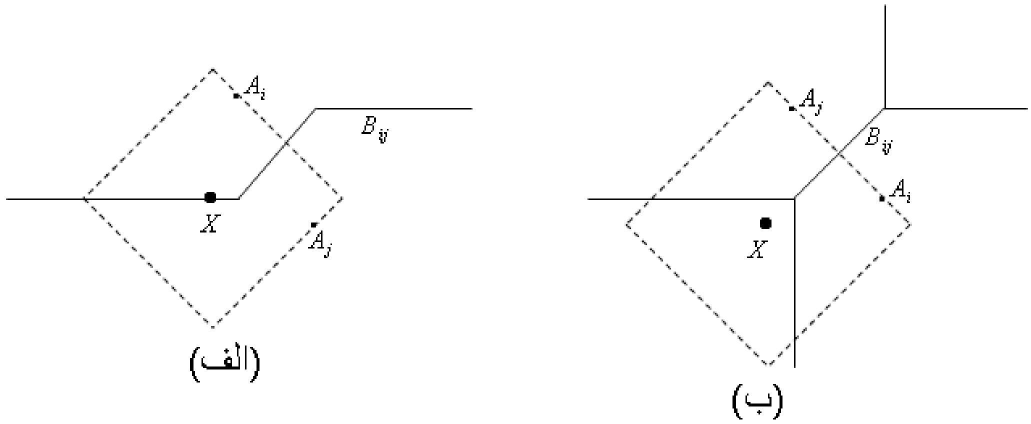
تعریف ۱.۶ : مجموعه نقاطی که فاصله آن ها از یک جفت از نقاط ثابت مانند A_i و A_j یکسان است را **عمودمنصف**[۱] گویند که به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$B_{ij} = \{X : \quad k(X-A_i) = k(X-A_j)\}.$$

عمودمنصف ها را می‌توان به دو دسته زیر تقسیم کرد:

۱) اگر پاره خطی که دو نقطه A_i و A_j را به هم متصل می‌کند یعنی $[A_i, A_j]$، موازی یکی از یال های دیسک واحد نرم k نباشد، آن گاه B_{ij} منحنی قطعه‌ای خطی است.

---
[۱] Bisector



شکل ٦—۱: عمودمنصف های نرم منهتن

۲) اگر پاره خطی که دو نقطه A_i و A_j را به هم متصل می‌کند یعنی $[A_i, A_j]$، موازی یکی از یال های دیسک واحد نرم k باشد، آن گاه B_{ij} منحنی قطعه‌ای خطی است که دو زیرناحیه متقارن تشکیل شده توسط جهت های اصلی مجاور نرم k را به هم وصل می‌کند.

شکل (٦—۱) نمونه هایی از عمودمنصف های نرم منهتن را نشان می‌دهد. در شکل (الف) $[A_i, A_j]$ موازی یکی از یال های دیسک واحد نرم منهتن نیست، در حالی که در شکل (ب) $[A_i, A_j]$ موازی یکی از یال های دیسک واحد نرم منهتن است.

تعریف ۲.٦ : شکل حاصل از رسم تمام جهت های اصلی به ازای همه نقاط موجود در صفحه و تمام عمودمنصف هایی مانند B_{ij} به ازای $i = ۱, \cdots, n - ۱$ و $j = i + ۱, \cdots, n$، **شبکه**[۲] نامیده می‌شود. نواحی کوچک تشکیل شده توسط خطوط شبکه را **سلول**[۳] گویند و با Q نمایش می‌دهند. نقاط داخل سلول Q را با $int(Q)$ نمایش می‌دهند.

لم ٦.٦ ([۳]): فرض کنید $C(X, r^*(X))$ جواب بهینه مسئله (٦—۱) باشد. اگر $X \in int(Q)$ آن گاه دیسک C از نقطه ثابت منحصربه‌فردی مانند A_{j^*} می گذرد.

اثبات: فرض کنید $C(X, r^*(X))$ که $X \in int(Q)$ جواب بهینه مسئله (٦—۱) باشد. X یک نقطه داخل سلول Q است و عبور عمودمنصف از داخل یک سلول طبق تعریف سلول غیرممکن است، لذا X روی هیچ عمودمنصفی قرار ندارد. بنابراین دیسک $C(X, r^*(X))$ نمی‌تواند از دو نقطه از نقاط موجود

[۲] Grid
[۳] Cell

در صفحه بگذرد. در نتیجه دیسک $C(X, r^*(X))$ حداکثر از یکی از نقاط ثابت می‌گذرد. بنابراین دیسک مذکور از نقطه ثابت منحصربه‌فردی مانند A_{j^*} می‌گذرد. $\square$

لم ۷.٦ ([۳]): تابع هدف $F(X, r^*)$ برای هر $X \in Q$ تابعی خطی بر حسب X است.

اثبات: فرض کنید دیسک $C(X, r^*(X))$ که $X \in int(Q)$ جواب بهینه مسئله (٦−۱) باشد. دراین‌صورت طبق لم ٦.٦ دیسک C تنها از یکی از نقاط موجود در صفحه مانند A_{j^*} می‌گذرد. بنابراین

$$r^*(X) = k(X - A_{j^*})$$

پس تابع هدف به ازای C را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$F(X, r^*) = \sum_{j \in J_-} w_j(k(X - A_{j^*}) - k(X - A_j)) + \sum_{j \in J_+} w_j(k(X - A_j) - k(X - A_{j^*}))$$

چون عبور جهت اصلی از داخل یک سلول طبق تعریف سلول غیرممکن است، لذا هر جمله در مجموع های بالا خطی بر حسب X است. در نتیجه $F(X, r^*)$ مجموع جملات خطی است، بنابراین $F(X, r^*)$ برای هر $X \in int(Q)$ تابعی خطی است.

چون تابع $F(X, r^*)$ برای هر $X \in int(Q)$ تابعی خطی بر حسب X است، لذا داریم

$$\forall\ X, Y \in int(Q) \qquad F(\alpha X + Y, r^*) = \alpha F(X, r^*) + F(Y, r^*)$$

اکنون ثابت می‌کنیم تابع $F(X, r^*)$ برای هر $X \in \overline{int(Q)}$ تابعی خطی بر حسب X است. که $\overline{int(Q)}$ بستار[۴] $int(Q)$ می‌باشد. فرض کنید $X, Y \in \overline{int(Q)}$ دراین صورت دنباله هایی مانند $X_n, Y_n \in int(Q)$ وجود دارند به طوری که

$$X_n \to X \qquad , \qquad Y_n \to Y$$

چون تابع $F(X, r^*)$ برای هر $X \in int(Q)$ تابعی خطی بر حسب X است، لذا

$$F(\alpha X_n + Y_n, r^*) = \alpha F(X_n, r^*) + F(Y_n, r^*)$$

پس

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F(\alpha X_n + Y_n, r^*) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha F(X_n, r^*) + \lim_{n \longrightarrow \infty} F(Y_n, r^*)$$

در نتیجه

[۴] Closure: بستار مجموعه‌ای مانند A برابر اجتماع مجموعه A با مجموعه نقاط حدی A است. مجموعه $A \subseteq M$ را در نظر بگیرید. نقطه $p \in M$ را یک نقطه‌ی حدی A گویند در صورتی که هر گوی باز به مرکز p، شامل نقطه‌ای غیر از p، از مجموعه A باشد.

$$F(\alpha X+Y,r^*)=\alpha F(X,r^*)+F(Y,r^*)$$

بنابراین تابع $F(X,r^*)$ برای هر $X\in int(Q)$ و هر $X\in\overline{int(Q)}$ تابعی خطی بر حسب X است. در نتیجه $F(X,r^*)$ برای هر $X\in Q$ تابعی خطی بر حسب X است. □

قضیه ۱.٦ ([۳]): یک جواب بهینه برای مسئله (٦—۱) وجود دارد که مرکز آن نقطه گوشه‌ای یک سلول مانند Q است.

نقاط گوشه‌ای یک شبکه با توجه به طرز به وجود آمدن، به چهار دسته زیر طبقه بندی می‌شوند:

نوع اول: محل تلاقی دو جهت اصلی.

نوع دوم: محل تلاقی یک جهت اصلی و یک عمودمنصف مانند B_{ij}.

نوع سوم: محل تلاقی سه عمود منصف مانند B_{ij} ، B_{ik} و B_{jk}.

نوع چهارم: محل تلاقی دو عمود منصف مانند B_{ij} و B_{kl}

حال به بررسی بیشتر نقاط گوشه‌ای شبکه می‌پردازیم. برای این منظور فرض می‌کنیم نقاط موجود در موقعیت های کلی قرار دارند به طوری که شرایط زیر برقرار است:

۱) جهت های اصلی گذرنده از نقاط ثابت تنها خطوطی از شبکه هستند که از نقاط موجود می‌گذرند.

۲) نقاط گوشه‌ای از نوع اول، دوم و چهارم دقیقاً محل تلاقی دو خط از شبکه هستند.

۳) هر نقطه گوشه‌ای از نوع سوم دقیقاً محل تلاقی سه خط از شبکه است.

تحت شرایط فوق نقاط موجود در صفحه جزء نوع اول محسوب می‌شوند و دایره های کاندید با مرکزیت یکی از نقاط گوشه‌ای شبکه، دقیقاً از ۱، ۲ یا سه نقطه موجود می‌گذرد.

لم های زیر این امکان را به ما می‌دهند که کاندیداهای دیسک بهینه را تعیین کنیم.

لم ۸.٦ ([۳]): دیسک $C(A_s,r^*)$ که A_s یکی از نقاط موجود در صفحه است، نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اثبات: شبکه حاصل از حذف جهت های اصلی گذرنده از نقطه A_s را درنظربگیرید. دراین صورت نقطه A_s نقطه‌ای درونی برای یک سلول مانند Q است، یعنی $A_s\in int(Q)$. بنابراین تابع هدف به ازای دیسک $C(X,r^*)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$F(X,r^*)=w_sd_s(X,r^*)+\sum_{j\neq s}w_jd_j(X,r^*)$$

با تعریف

$$F_s(X,r^*)=\sum_{j\neq s} w_j d_j(X,r^*)$$

داریم

$$F(X,r^*)=w_s d_s(X,r^*)+F_s(X,r^*).$$

تابع $F_s(X,r^*)$ در داخل یک $\delta-$همسایگی از A_s خطی است، شعاع δ باید به اندازه کافی کوچک باشد که همسایگی مذکور کاملاً داخل سلول Q قرار گیرد. تابع $d_s(X,r^*)$ در همسایگی A_s اکیداً مقعر است. در نتیجه تابع $F(X,r^*)$ نیز در همسایگی A_s اکیداً مقعر است. بنابراین طبق لم ۷.۶ $C(A_s,r^*)$ نمی‌تواند جواب بهینه باشد. □

لم ۹.۶ ([۳]): فرض کنید X_c نقطه گوشه‌ای از نوع اول باشد و به علاوه X_c نقطه‌ی ثابت نباشد. اگر حداقل یکی از نقاط متناظر با جهت های اصلی متقاطع در نقطه X_c، داخل دیسک $C(X_c,r^*)$ قرار گیرد، آن گاه دیسک $C(X_c,r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اثبات: بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید A_1 و A_2 نقاط ثابت متناظر با دو جهت اصلی باشند که در نقطه X_c متقاطعند. جهت اصلی گذرنده از نقاط A_1 و A_2 را به ترتیب با l_1 و l_2 نمایش می‌دهیم. فرض کنید نقطه A_1 داخل دیسک $C(X_c,r^*)$ قرار داشته باشد. نشان می‌دهیم دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. با حذف جهت اصلی l_1، نقطه X_c دیگر نقطه گوشه‌ای یک سلول نیست، بلکه نقطه‌ای است که روی یال یک سلول مانند Q قرار دارد. یعنی X_c نقطه‌ای روی جهت اصلی گذرنده از نقطه A_2 و بین دو نقطه گوشه‌ای سلول Q است. تابع هدف به ازای دیسک C را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$F(X_c,r^*)=w_1 d_1(X_c,r^*)+\sum_{j\neq 1} w_j d_j(X_c,r^*)$$

با تعریف

$$F_1(X_c,r^*)=\sum_{j\neq 1} w_j d_j(X_c,r^*)$$

داریم

$$F(X_c,r^*)=w_1 d_1(X_c,r^*)+F_1(X_c,r^*).$$

چون نقطه A_1 داخل دیسک C قرار دارد و نقاط A_1 و X_c در طول خط l_2 همراستا نیستند، بنا به لم ۳.۶ تابع $d_1(X_c,r^*)$ در طول خط l_2 تابعی اکیداً مقعر است. با توجه به مثبت بودن w_1 تابع $w_1 d_1(X_c,r^*)$ نیز در طول خط l_2 اکیداً مقعر است. از طرفی چون $X_c\in Q$ لذا بنا به لم ۷.۶

$F_1(X_c, r^*)$ تابعی خطی است. در نتیجه تابع $F(X_c, r^*)$ روی آن یالی از سلول Q که X_c روی آن قرار دارد، تابعی اکیداً مقعر است. درصورتی که چون $X_c \in Q$ طبق لم ۷.٦ $F(X_c, r^*)$ باید تابعی خطی باشد. بنابراین دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. □

لم ۱۰.٦ ([۳]): اگر X_c نقطه گوشه‌ای از نوع دوم باشد و دیسک $C(X_c, r^*)$ از نقاط A_i و A_j عبور نکند یا X_c نقطه گوشه‌ای از نوع سوم باشد و دیسک $C(X_c, r^*)$ از نقاط A_i ، A_j و A_k نگذرد، آن گاه دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اثبات: بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم X_c محل تلاقی عمودمنصف B_{ij} با جهت اصلی l باشد. فرض کنید دیسک $C(X_c, r^*)$ از هیچ یک از نقاط A_i و A_j عبور نکند، نشان می‌دهیم دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. چون مرکز دیسک C یعنی X_c، روی عمودمنصف B_{ij} قرار دارد، لذا بنا به تعریف B_{ij} فاصله X_c از نقاط A_i و A_j یکسان است. بنابراین نقاط A_i و A_j یا داخل دیسک C و یا خارج آن قرار می‌گیرند. تابع هدف به ازای دیسک C را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(X_c, r^*) = w_i d_i(X_c, r^*) + w_j d_j(X_c, r^*) + \sum_{k \neq i,j} w_k d_k(X_c, r^*)$$

فرض کنید نقاط A_i و A_j در داخل دیسک C قرار داشته باشند و جهت اصلی l متناظر با یکی از نقاط A_i یا A_j باشد. چون نقاط A_i و A_j در داخل دیسک C قرار دارند و با توجه به این که نقاط A_j و X_c یا نقاط A_i و X_c در طول l در یک راستا نیستند، بنا به لم ۳.٦ تابع $d_j(X_c, r^*)$ یا $d_i(X_c, r^*)$ در طول l اکیداً مقعر است. با توجه به مثبت بودن w_j و w_i تابع $w_j d_j(X_c, r^*)$ یا $w_i d_i(X_c, r^*)$ نیز در طول l اکیداً مقعر است. از طرفی چون $X_c \in Q$ لذا بنا به لم ۷.٦ تابع $\sum_{k \neq i,j} w_k d_k(X_c, r^*)$ خطی است. در نتیجه $F(X_c, r^*)$ در طول l تابعی اکیداً مقعر است. ولی چون $X_c \in Q$ طبق لم ۷.٦ تابع هدف $F(X_c, r^*)$ باید خطی باشد. در نتیجه در این حالت دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اگر نقاط A_i و A_j در داخل دیسک C قرار داشته باشند و جهت اصلی l متناظر با یکی از نقاط A_i یا A_j نباشد، دراین صورت چون نقاط A_i و A_j در داخل دیسک C قرار دارند و با توجه به این که نقاط A_i و X_c و نقاط A_j و X_c در طول l در یک راستا نیستند، بنا به لم ۳.٦ توابع $d_i(X_c, r^*)$ و $d_j(X_c, r^*)$ در طول l اکیداً مقعر هستند. با توجه به مثبت بودن w_i و w_j توابع $w_i d_i(X_c, r^*)$ و $w_j d_j(X_c, r^*)$ نیز در طول l اکیداً مقعرند. از طرفی چون $X_c \in Q$ لذا بنا به لم ۷.٦ تابع $\sum_{k \neq i,j} w_k d_k(X_c, r^*)$ خطی

است. در نتیجه $F(X_c, r^*)$ در طول l تابعی اکیداً مقعر است. ولی چون $X_c \in Q$ طبق لم ۷.۶ تابع هدف $F(X_c, r^*)$ باید خطی باشد. در نتیجه در این حالت دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

فرض کنید نقاط A_i و A_j خارج دیسک C قرار داشته باشند و جهت اصلی l متناظر با یکی از نقاط A_i یا A_j باشد. چون نقاط A_i و A_j خارج دیسک C قرار دارند و با توجه به این که نقاط A_j و X_c یا نقاط A_i و X_c در طول l در یک راستا نیستند، بنا به لم ۳.۶ تابع $d_j(X_c, r^*)$ یا $d_i(X_c, r^*)$ در طول l اکیداً محدب است. با توجه به مثبت بودن w_j و w_i تابع $w_jd_j(X_c, r^*)$ یا $w_id_i(X_c, r^*)$ نیز در طول l اکیداً محدب است. از طرفی چون $X_c \in Q$ لذا بنا به لم ۷.۶ تابع $\sum_{k\neq i,j} w_kd_k(X_c, r^*)$ خطی است. در نتیجه $F(X_c, r^*)$ در طول l تابعی اکیداً محدب است. ولی چون $X_c \in Q$ طبق لم ۷.۶ تابع هدف $F(X_c, r^*)$ باید خطی باشد. در نتیجه در این حالت دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اگر نقاط A_i و A_j خارج دیسک C قرار داشته باشند و جهت اصلی l متناظر با یکی از نقاط A_i یا A_j نباشد، دراین صورت چون نقاط A_i و A_j خارج دیسک C قرار دارند و با توجه به این که نقاط A_i و X_c و نقاط A_j و X_c در طول l در یک راستا نیستند، بنا به لم ۳.۶ توابع $d_i(X_c, r^*)$ و $d_j(X_c, r^*)$ در طول l اکیداً محدب هستند. با توجه به مثبت بودن w_i و w_j توابع $w_id_i(X_c, r^*)$ و $w_jd_j(X_c, r^*)$ نیز در طول l اکیداً محدبند. از طرفی چون $X_c \in Q$ لذا بنا به لم ۷.۶ تابع $\sum_{k\neq i,j} w_kd_k(X_c, r^*)$ خطی است. در نتیجه $F(X_c, r^*)$ در طول l تابعی اکیداً محدب است. ولی چون $X_c \in Q$ طبق لم ۷.۶ تابع هدف $F(X_c, r^*)$ باید خطی باشد. در نتیجه در این حالت دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

به روشی مشابه می‌توان ثابت کرد اگر X_c نقطه گوشه‌ای از نوع سوم باشد و دیسک $C(X_c, r^*)$ از نقاط A_i ، A_j و A_k نگذرد، آن گاه دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. □

لم ۱۱.۶ ([۳]): اگر X_c نقطه گوشه‌ای از نوع دوم باشد و نقطه ثابت متناظر با تنها جهت اصلی که از X_c می‌گذرد داخل دیسک $C(X_c, r^*)$ قرار گیرد، آن گاه دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اثبات: فرض کنید X_c نقطه گوشه‌ای از نوع دوم باشد. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم X_c محل تلاقی عمودمنصف B_{ij} با جهت اصلی l باشد. فرض کنید جهت اصلی l متناظر با یکی از

نقاط A_i یا A_j باشد، دراین صورت بنا به لم ۱۰.۶ اگر دیسک $C(X_c, r^*)$ از نقاط A_i و A_j عبور نکند آن گاه دیسک C نمی‌تواند کاندیدی برای دیسک بهینه باشد. پس اگر نقطه متناظر با جهت اصلی l یعنی A_i یا A_j داخل دیسک C قرار گیرد آن گاه دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدی برای دیسک بهینه باشد. حال بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم A_1 که $A_1 \notin \{A_i, A_j\}$، نقطه ثابت متناظر با جهت اصلی l باشد. دراین صورت X_c نقطه شکست عمودمنصف B_{ij} نیست زیرا درغیراین‌صورت بیش از دو خط از نقطه X_c می‌گذرد، در صورتی که طبق فرض X_c نقطه گوشه‌ای از نوع دوم است، لذا بیش از دو خط شبکه نمی‌تواند از آن بگذرد. فرض کنید نقطه A_1 داخل دیسک $C(X_c, r^*)$ قرار داشته باشد. نشان می‌دهیم دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. تابع هدف به ازای دیسک C را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$F(X_c, r^*) = w_1 d_1(X_c, r^*) + \sum_{j\neq 1} w_j d_j(X_c, r^*)$$

با تعریف

$$F_1(X_c, r^*) = \sum_{j\neq 1} w_j d_j(X_c, r^*)$$

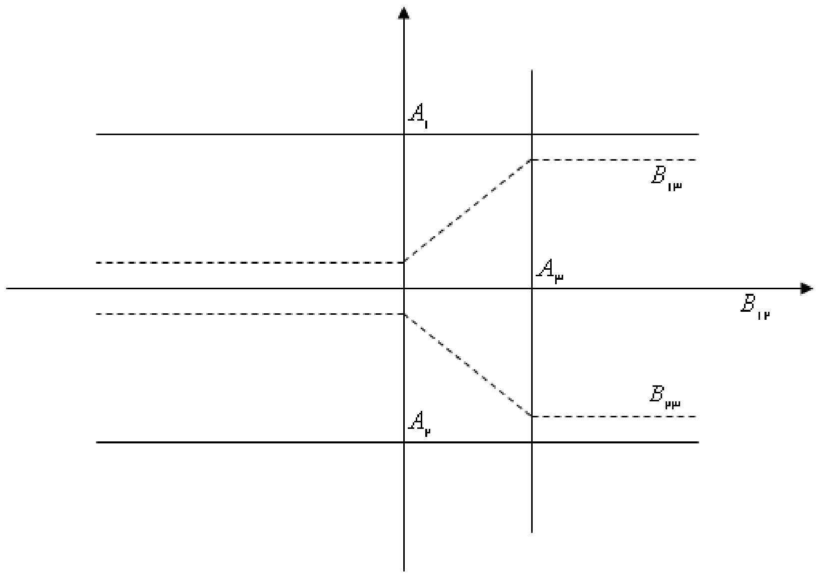
داریم

$$F(X_c, r^*) = w_1 d_1(X_c, r^*) + F_1(X_c, r^*).$$

چون A_1 نقطه‌ای در داخل دیسک C است و با توجه به این که نقاط A_1 و X_c در طول B_{ij} در یک راستا قرار ندارند، بنا به لم ۳.۶ تابع $d_1(X_c, r^*)$ در طول B_{ij} اکیداً مقعر است. با توجه به مثبت بودن w_1، تابع $w_1 d_1(X_c, r^*)$ نیز در طول B_{ij} تابعی اکیداً مقعر است. از طرفی چون $X_c \in Q$ بنا به لم ۷.۶ تابع $F_1(X_c, r^*)$ خطی است. در نتیجه تابع $F(X_c, r^*)$ در طول B_{ij} اکیداً مقعر است. درصورتی که چون $X_c \in Q$ طبق لم ۷.۶ تابع $F(X_c, r^*)$ باید تابعی خطی باشد. بنابراین دیسک C نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. □

لم ۱۲.۶ ([۳]): اگر X_c نقطه گوشه‌ای از نوع چهارم باشد، آن گاه دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

اثبات: فرض کنید دیسک $C(X_c, r^*)$ که X_c نقطه گوشه‌ای از نوع چهارم است، جواب بهینه مسئله (۱−۶) باشد. چون نقطه X_c، محل تلاقی عمودمنصف های B_{ij} و B_{kl} است، لذا هیچ خط دیگری از نقطه X_c نمی‌گذرد، زیرا درغیراین صورت X_c دیگر نقطه گوشه ای از نوع چهارم نمی‌باشد. بنابراین دیسک $C(X_c, r^*)$ حداکثر یا شامل (A_i, A_j) و یا شامل (A_k, A_l) است، زیرا اگر دیسک مذکور بخواهد



شکل ٦—۲: شبکه مثال ۱.٦

از سه نقطه بگذرد آن گاه X_c باید محل تلاقی سه عمودمنصف باشد و چون هیچ خط دیگری از نقطه X_c نمی‌گذرد، لذا دیسک $C(X_c, r^*)$ حداکثر از دو نقطه می‌گذرد. بنابراین تابع $F(X_c, r^*)$ حداکثر روی یکی از عمودمنصف های B_{ij} یا B_{kl} خطی است. در نتیجه دیسک $C(X_c, r^*)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. □

مثال ۱.٦ نقاط $A_{۱} = (۰, ٦)$ ، $A_{۲} = (۰, -٦)$ و $A_{۳} = (۵, ۰)$ را با وزن های $w_{۱} = ۱۰۰$، $w_{۲} = ۱۰۰$ و $w_{۳} = ۱$ در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دیسکی است که مجموع فواصل منهتن نقاط موجود تا محیط دیسک کمینه گردد.

حل. چون نقاط $A_{۱}$ و $A_{۲}$ بیشترین مقدار وزن را نسبت به نقطه $A_{۳}$ دارند، لذا دیسک بهینه دیسکی است که حداقل از نقاط $A_{۱}$ و $A_{۲}$ عبور کند. یعنی یا از هر سه نقطه موجود بگذرد یا از هر دو نقطه $A_{۱}$ و $A_{۲}$ عبور کند. پس علاوه بر رسم جهت های اصلی نرم منهتن برای هر یک از نقاط داده شده، باید عمودمنصف های $B_{۱۲}$، $B_{۱۳}$ و $B_{۲۳}$ را رسم نمود (شکل ٦—۲ را ببینید). برای به دست آوردن عمودمنصف ها مثلاً $B_{۱۳}$ ابتدا باید کانتور واحد نرم منهتن به مراکز $A_{۱}$ و $A_{۳}$ را رسم نمود، سپس با بزرگ کردن هر دو کانتور به یک اندازه، قسمت منطبق بر هم را به عنوان عمودمنصف درنظرگرفت.

۱) اگر دیسک بخواهد از هر سه نقطه $A_{۱}$ ، $A_{۲}$ و $A_{۳}$ بگذرد، آن گاه باید مرکزش محل تلاقی سه عمودمنصف $B_{۱۲}$ ، $B_{۱۳}$ و $B_{۲۳}$ باشد. ولی همان طور که در شکل ٦—۲ مشاهده می‌کنید سه

عمودمنصف نامبرده هیچ نقطه تلاقی ندارند.

۲) اگر دیسک بخواهد از نقاط $A_۱$ و $A_۲$ عبور کند، آن گاه باید مرکزش محل تلاقی یک جهت اصلی با عمودمنصف $B_{۱۲}$ باشد. دراین صورت دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

الف) اگر مرکز دیسک $X = (۵, ۰)$ باشد، آن گاه طبق لم ۸.۶ دیسک $C((۵, ۰), r)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ب) اگر مرکز دیسک $X = (۰, ۰)$ باشد، دراین صورت چون مرکز روی عمودمنصف $B_{۱۲}$ واقع است، لذا فاصله آن تا نقاط $A_۱$ و $A_۲$ یکسان و برابر شعاع است. بنابراین شعاع دیسک را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰, -۶) = |۰| + |-۶| = ۶$$

اکنون فاصله نقطه $A_۲$ را از مرکز به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰, ۶) = |۰| + |۶| = ۶$$

چون دو نقطه $A_۱$ و $A_۲$ روی دیسک $C((۰, ۰), ۶)$ قرار دارند، هم چنین به خاطر این که جهت اصلی، متناظر با نقطه $A_۱$ یا $A_۲$ است و این نقاط داخل دیسک مذکور قرار ندارند، لذا دیسک نامبرده تنها کاندیدا برای دیسک بهینه است.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقطه $A_۳$ نیز می‌باشیم. بنابراین

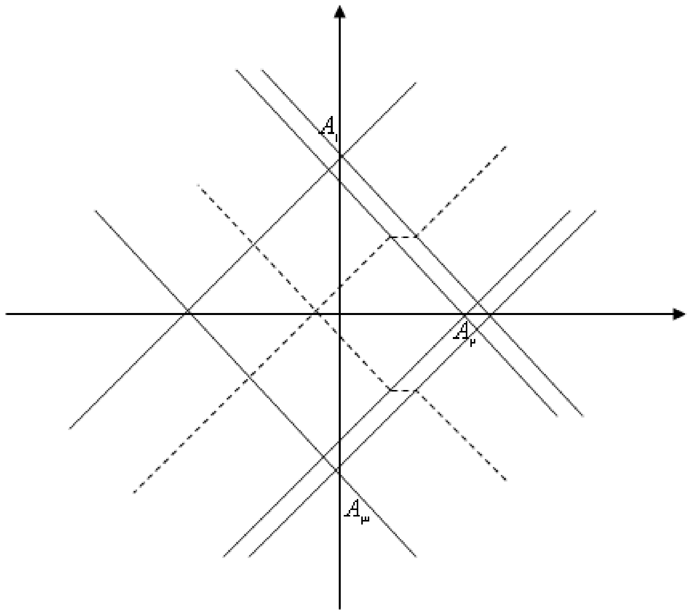
$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۵, ۰) = |-۵| + |۰| = ۵$$

در نتیجه مقدار تابع هدف به ازای این دیسک بهینه برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۳} w_i |l_۱(X - A_i) - r| = ۱|۵ - ۶| = ۱$$

مثال ۲.۶ نقاط $A_۱ = (۰, ۶)$ ، $A_۲ = (۰, -۶)$ و $A_۳ = (۵, ۰)$ را با وزن های $w_۱ = ۱۰۰$، $w_۲ = ۱۰۰$ و $w_۳ = ۱$ در نظر بگیرید. هدف یافتن مکان دیسکی است که مجموع فواصل چبیشف نقاط موجود تا محیط دیسک کمینه گردد.

حل. چون نقاط $A_۱$ و $A_۲$ بیشترین مقدار وزن را نسبت به نقطه $A_۳$ دارند، لذا دیسک بهینه دیسکی است که حداقل از نقاط $A_۱$ و $A_۲$ عبور کند. پس علاوه بر رسم جهت های اصلی نرم چبیشف برای هر یک از نقاط داده شده، کافی است تنها عمودمنصف های $B_{۱۲}$، $B_{۱۳}$ و $B_{۲۳}$ را رسم نمود (شکل ۶—۳ را ببینید).



شکل ۶—۳: شبکه مثال ۲.۶

۱) اگر دیسک بخواهد از هر سه نقطه A_1 ، A_2 و A_3 بگذرد، آن گاه باید مرکزش محل تلاقی سه عمودمنصف B_{12} ، B_{13} و B_{23} یعنی $X = (-1, 0)$ باشد. چون X نقطه تلاقی سه عمودمنصف B_{12} ، B_{13} و B_{23} است، لذا فاصله آن از هر سه نقطه A_1 ، A_2 و A_3 یکسان و برابر شعاع می‌باشد. در نتیجه شعاع دیسک را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$r = l_\infty(X, A_1) = l_\infty(X - A_1) = l_\infty(-1, -6) = \max\{|-1|, |-6|\} = 6$$

اکنون فاصله مرکز از نقاط A_2 و A_3 را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$l_\infty(X, A_2) = l_\infty(X - A_2) = l_\infty(-1, 6) = \max\{|-1|, |6|\} = 6$$

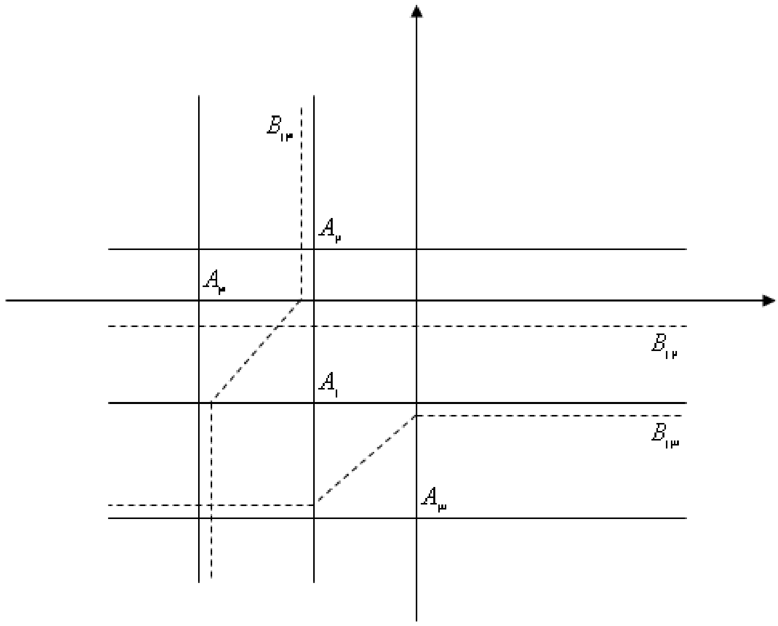
و

$$l_\infty(X, A_3) = l_\infty(X - A_3) = l_\infty(-6, 0) = \max\{|-6|, |0|\} = 6$$

چون هر سه نقطه A_1، A_2 و A_3 روی دیسک $C((-1, 0), 6)$ قرار دارد، لذا دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد. مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-1, 0), 6)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F(C) = \sum_{i=1}^{3} w_i |l_1(X - A_i) - r| = 0$$

۲) اگر دیسک بخواهد از دو نقطه A_1 و A_2 بگذرد، آن گاه باید مرکزش محل تلاقی یک جهت اصلی



شکل ٦—۴: شبکه مثال ۳.٦

با عمودمنصف B_{12} باشد. ولی همان طور که در شکل ٦—۳ مشاهده می‌کنید چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

بنابراین دیسک $C((-۱,۰),٦)$، دیسک بهینه است.

مثال ۳.٦ نقاط زیر را با وزن های $w_1 = ۱۰$، $w_2 = ۰/۵$، $w_3 = ۱$ و $w_4 = ۱$ در نظر بگیرید.

$A_1 = (-۰/۵, -۰/۵) \qquad A_2 = (-۰/۵, ۰/۲۵) \qquad A_3 = (۰, -۱/۱) \qquad A_4 = (-۱/۱, ۰)$

هدف یافتن مکان دیسکی است که مجموع فواصل منهتن نقاط موجود تا محیط دیسک کمینه گردد.

حل. چون نقطه A_1 بیشترین مقدار وزن را نسبت به سایر نقاط دارد، لذا دیسک بهینه دیسکی است که حداقل از نقطه A_1 عبور کند. پس علاوه بر رسم جهت های اصلی نرم منهتن برای هر یک از نقاط داده شده، کافی است فقط عمودمنصف های B_{12}، B_{13} و B_{14} را رسم نمود (شکل ٦—۴ را ببینید).

مرکز دیسک بهینه می‌تواند یکی از نقاط زیر باشد:

۱) محل تلاقی دو جهت اصلی

الف) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه A_3 با جهت افقی بر نقطه A_2، یعنی $X = (۰, ۰/۲۵)$ باشد. چون نقطه A_1 باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه A_1 است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰/۵, ۰/۷۵) = |۰/۵| + |۰/۷۵| = ۱/۲۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۳$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰/۵, ۰) = |۰/۵| + |۰| = ۰/۵$$

و

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(۰, ۱/۳۵) = |۰| + |۱/۳۵| = ۱/۳۵$$

چون $l_۱(X, A_۲) < r$، پس نقطه $A_۲$ داخل دیسک $C((۰, ۰/۲۵), ۱/۲۵)$ قرار می‌گیرد. بنابراین طبق لم ۹.٦ دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ب) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۳$ با جهت افقی بر نقطه $A_۴$، یعنی $X = (۰, ۰)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰/۵, ۰/۵) = |۰/۵| + |۰/۵| = ۱$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۳$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(۰, ۱/۱) = |۰| + |۱/۱| = ۱/۱$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۱/۱, ۰) = |۱/۱| + |۰| = ۱/۱$$

چون $l_۱(X, A_۳) > r$ و $l_۱(X, A_۴) > r$، پس نقاط $A_۳$ و $A_۴$ هر دو خارج دیسک $C((۰, ۰), ۱)$ قرار می‌گیرند. بنابراین دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقطه $A_۲$ نیز می‌باشیم، لذا داریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰/۵, -۰/۲۵) = |۰/۵| + |-۰/۲۵| = ۰/۷۵$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((۰, ۰), ۱)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i |l_۱(X - A_i) - r| = ۰/۵|۰/۷۵ - ۱| + ۱|۱/۱ - ۱| + ۱|۱/۱ - ۱| = ۰/۳۲۵$$

ج) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۳$ با جهت افقی بر نقطه $A_۱$، یعنی $X = (۰, -۰/۵)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰/۵, ۰) = |۰/۵| + |۰| = ۰/۵$$

حال فاصله مرکز از نقطه $A_۳$ را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(۰, ۰/٦) = |۰| + |۰/٦| = ۰/٦$$

چون $l_۱(X, A_۱) = r$ و $l_۱(X, A_۳) > r$، پس نقطه $A_۱$ روی دیسک و نقطه $A_۳$ خارج دیسک قرار می‌گیرند. در نتیجه دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه $C((۰, -۰/۵), ۰/۵)$ باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۴$ نیز می‌باشیم، لذا داریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰/۵, -۰/۷۵) = |-۰/۵| + |-۰/۷۵| = ۱/۲۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۱/۱, -۰/۵) = |۱/۱| + |-۰/۵| = ۱/٦$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((۰, -۰/۵), ۰/۵)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i |l_۱(X - A_i) - r| = ۰/۵|۱/۲۵ - ۰/۵| + ۱|۰/٦ - ۰/۵| + ۱|۱/٦ - ۰/۵| = ۱/۵۷۵$$

د) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۲$ با جهت افقی بر نقطه $A_۴$، یعنی $X = (-۰/۵, ۰)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰, ۰/۵) = |۰| + |۰/۵| = ۰/۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰, -۰/۲۵) = |۰| + |-۰/۲۵| = ۰/۲۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/٦, ۰) = |۰/٦| + |۰| = ۰/٦$$

چون $l_۱(X, A_۲) < r$ و $l_۱(X, A_۴) > r$، پس نقطه $A_۲$ داخل دیسک C قرار می‌گیرد. بنابراین طبق لم ۹.٦ دیسک $C((-۰/۵, ۰), ۰/۵)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ه) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۲$ با جهت افقی بر نقطه $A_۳$، یعنی $X = (-۰/۵, -۱/۱)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰, -۰/٦) = |۰| + |-۰/٦| = ۰/٦$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۳$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰, -۱/۳۵) = |۰| + |-۱/۳۵| = ۱/۳۵$$

و

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۰/۵, ۰) = |-۰/۵| + |۰| = ۰/۵$$

چون $l_۱(X, A_۲) > r$ و $l_۱(X, A_۳) < r$، پس نقطه $A_۳$ داخل دیسک C قرار می‌گیرد. بنابراین طبق لم ۹.۶ دیسک $C((-۰/۵, -۱/۱), ۰/۶)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

و) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۴$ با جهت افقی بر نقطه $A_۲$، یعنی $X = (-۱/۱, ۰/۲۵)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۶, ۰/۷۵) = |-۰/۶| + |۰/۷۵| = ۱/۳۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(-۰/۶, ۰) = |-۰/۶| + |۰| = ۰/۶$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰, ۰/۲۵) = |۰| + |۰/۲۵| = ۰/۲۵$$

چون $l_۱(X, A_۲) < r$ و $l_۱(X, A_۴) < r$، پس هر دو نقطه $A_۲$ و $A_۴$ داخل دیسک $C((-۱/۱, ۰/۲۵), ۱/۳۵)$ قرار می‌گیرند. بنابراین طبق لم ۹.۶ دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ز) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۴$ با جهت افقی بر نقطه $A_۱$، یعنی $X = (-۱/۱, -۰/۵)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۶, ۰) = |-۰/۶| + |۰| = ۰/۶$$

حال فاصله مرکز از نقطه $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰, -۰/۵) = |۰| + |-۰/۵| = ۰/۵$$

چون $l_۱(X, A_۱) = r$ و $l_۱(X, A_۴) < r$، پس نقطه $A_۱$ روی دیسک و نقطه $A_۴$ داخل دیسک $C((-۱/۱, -۰/۵), ۰/۶)$ قرار می‌گیرند. بنابراین طبق لم ۹.۶ دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ح) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۴$ با جهت افقی بر نقطه $A_۳$، یعنی $X = (-۱/۱, -۱/۱)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۶, -۰/۶) = |-۰/۶| + |-۰/۶| = ۱/۲$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۳$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۱/۱, ۰) = |-۱/۱| + |۰| = ۱/۱$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰, -۱/۱) = |۰| + |-۱/۱| = ۱/۱$$

چون $l_۱(X, A_۳) < r$ و $l_۱(X, A_۴) < r$، پس هر دو نقطه $A_۳$ و $A_۴$ داخل دیسک $C((-۱/۱, -۱/۱), ۱/۲)$ قرار می‌گیرند. بنابراین طبق لم ۹.۶ دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ت) اگر X یکی از نقاط زیر باشد، دراین صورت طبق لم ۸.۶ دیسک C با مرکز X، نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

i) محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۱$ با جهت افقی بر نقطه $A_۱$.

ii) محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۲$ با جهت افقی بر نقطه $A_۲$.

iii) محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۳$ با جهت افقی بر نقطه $A_۳$.

iv) محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۴$ با جهت افقی بر نقطه $A_۴$.

۲) محل تلاقی یک جهت اصلی با یک عمودمنصف

الف) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۳$ با عمودمنصف $B_{۱۲}$، یعنی $X = (۰, -۰/۱۲۵)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(۰/۵, ۰/۳۷۵) = |۰/۵| + |۰/۳۷۵| = ۰/۸۷۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۳$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(۰/۵, -۰/۳۷۵) = |۰/۵| + |-۰/۳۷۵| = ۰/۸۷۵$$

و

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(۰, ۰/۹۷۵) = |۰| + |۰/۹۷۵| = ۰/۹۷۵$$

چون $l_1(X,A_1)=r$، $l_1(X,A_2)=r$ و $l_1(X,A_3)>r$ پس هر دو نقطه A_1 و A_2 روی دیسک و نقطه A_3 خارج دیسک $C((0,-0/125),0/875)$ قرار می‌گیرند. در نتیجه دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقطه A_4 نیز می‌باشیم، لذا

$$l_1(X,A_4)=l_1(X-A_4)=l_1(1/1,-0/125)=|1/1|+|-0/125|=1/225$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((0,-0/125),0/875)$ برابر است با

$$F(C)=\sum_{i=1}^{4}w_i|l_1(X-A_i)-r|=1|0/975-0/875|+1|1/225-0/875|=0/45$$

ب) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه A_3 با عمودمنصف B_{13}، یعنی $X=(0,-0/55)$ باشد. چون A_1 باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه A_1 است. یعنی

$$r=l_1(X,A_1)=l_1(X-A_1)=l_1(0/5,-0/05)=|0/5|+|-0/05|=0/55$$

حال فاصله مرکز از نقطه A_3 را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$l_1(X,A_3)=l_1(X-A_3)=l_1(0,0/55)=|0|+|0/55|=0/55$$

چون $l_1(X,A_3)=r$، پس نقطه A_3 روی دیسک $C((0,-0/55),0/55)$ قرار می‌گیرد و داخل آن نمی‌باشد. بنابراین دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقاط A_2 و A_4 نیز می‌باشیم، لذا داریم.

$$l_1(X,A_2)=l_1(X-A_2)=l_1(0/5,-0/8)=|0/5|+|-0/8|=1/3$$

و

$$l_1(X,A_4)=l_1(X-A_4)=l_1(1/1,-0/55)=|1/1|+|-0/55|=1/65$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((0,-0/55),0/55)$ برابر است با

$$F(C)=\sum_{i=1}^{4}w_i|l_1(X-A_i)-r|=0/5|1/3-0/55|+1|1/65-0/55|=1/475$$

ج) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه A_2 با عمودمنصف B_{12}، یعنی $X=(-0/5,-0/125)$ باشد. چون A_1 باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه A_1 است. یعنی

$$r = l_{۱}(X, A_{۱}) = l_{۱}(X - A_{۱}) = l_{۱}(۰, ۰/۳۷۵) = |۰| + |۰/۳۷۵| = ۰/۳۷۵$$

حال فاصله مرکز از نقطه $A_{۲}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_{۱}(X, A_{۲}) = l_{۱}(X - A_{۲}) = l_{۱}(۰, -۰/۳۷۵) = |۰| + |-۰/۳۷۵| = ۰/۳۷۵$$

چون $l_{۱}(X, A_{۲}) = r$، پس $A_{۲}$ روی دیسک $C((-۰/۵, -۰/۱۲۵), ۰/۳۷۵)$ قرار می‌گیرد و داخل آن نمی‌باشد، بنابراین دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقاط $A_{۳}$ و $A_{۴}$ نیز می‌باشیم. بنابراین

$$l_{۱}(X, A_{۳}) = l_{۱}(X - A_{۳}) = l_{۱}(-۰/۵, ۰/۹۷۵) = |-۰/۵| + |۰/۹۷۵| = ۱/۴۷۵$$

و

$$l_{۱}(X, A_{۴}) = l_{۱}(X - A_{۴}) = l_{۱}(۰/٦, -۰/۱۲۵) = |۰/٦| + |-۰/۱۲۵| = ۰/۷۲۵$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-۰/۵, -۰/۱۲۵), ۰/۳۷۵)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i |l_{۱}(X - A_i) - r| = ۱|۱/۴۷۵ - ۰/۳۷۵| + ۱|۰/۷۲۵ - ۰/۳۷۵| = ۱/۴۵$$

د) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_{۲}$ با عمودمنصف $B_{۱۳}$، یعنی $X = (-۰/۵, -۱/۰۵)$ باشد. چون نقطه $A_{۱}$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_{۱}$ است. یعنی

$$r = l_{۱}(X, A_{۱}) = l_{۱}(X - A_{۱}) = l_{۱}(۰, -۰/۵۵) = |۰| + |-۰/۵۵| = ۰/۵۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_{۲}$ و $A_{۳}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_{۱}(X, A_{۲}) = l_{۱}(X - A_{۲}) = l_{۱}(۰, -۱/۳) = |۰| + |-۱/۳| = ۱/۳$$

و

$$l_{۱}(X, A_{۳}) = l_{۱}(X - A_{۳}) = l_{۱}(-۰/۵, ۰/۰۵) = |-۰/۵| + |۰/۰۵| = ۰/۵۵$$

چون $l_{۱}(X, A_{۳}) = r$ و $l_{۱}(X, A_{۲}) > r$ لذا نقاط $A_{۳}$ و $A_{۲}$ به ترتیب رو و خارج دیسک $C((-۰/۵, -۱/۰۵), ۰/۵۵)$ قرار می‌گیرند. بنابراین دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقطه $A_{۴}$ نیز می‌باشیم، لذا

$$l_{۱}(X, A_{۴}) = l_{۱}(X - A_{۴}) = l_{۱}(۰/٦, -۱/۰۵) = |۰/٦| + |-۱/۰۵| = ۱/٦۵$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-۰/۵, -۱/۰۵), ۰/۵۵)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i|l_۱(X - A_i) - r| = ۰/۵|۱/۳ - ۰/۵۵| + ۱|۱/٦۵ - ۰/۵۵| = ۱/۴۷۵$$

ه) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۴$ با عمودمنصف $B_{۱۲}$، یعنی $X = (-۱/۱, -۰/۱۲۵)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/٦, ۰/۳۷۵) = |-۰/٦| + |۰/۳۷۵| = ۰/۹۷۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(-۰/٦, -۰/۳۷۵) = |-۰/٦| + |-۰/۳۷۵| = ۰/۹۷۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰, -۰/۱۲۵) = |۰| + |-۰/۱۲۵| = ۰/۱۲۵$$

چون $l_۱(X, A_۴) < r$، پس نقطه $A_۴$ داخل دیسک C قرار می‌گیرد. بنابراین طبق لم ۱۱.٦ دیسک $C((-۱/۱, -۰/۱۲۵), ۰/۹۷۵)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

و) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت عمود بر نقطه $A_۴$ با عمودمنصف $B_{۱۳}$، یعنی $X = (-۱/۱, -۱/۰۵)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/٦, -۰/۵۵) = |-۰/٦| + |-۰/۵۵| = ۱/۱۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۳$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۱/۱, ۰/۰۵) = |-۱/۱| + |۰/۰۵| = ۱/۱۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰, -۱/۰۵) = |۰| + |-۱/۰۵| = ۱/۰۵$$

چون $l_۱(X, A_۴) < r$، پس نقطه $A_۴$ داخل دیسک C قرار می‌گیرد. در نتیجه طبق لم ۱۱.٦ دیسک $C((-۱/۱, -۱/۰۵), ۱/۱۵)$ نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ز) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت افقی بر نقطه $A_۲$ با عمودمنصف $B_{۱۴}$، یعنی $X = (-۰/۵۵, ۰/۲۵)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۰۵, ۰/۷۵) = |-۰/۰۵| + |۰/۷۵| = ۰/۸$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(-۰/۰۵, ۰) = |-۰/۰۵| + |۰| = ۰/۰۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/۵۵, ۰/۲۵) = |۰/۵۵| + |۰/۲۵| = ۰/۸$$

چون $l_۱(X, A_۴) = r$ و $l_۱(X, A_۲) < r$ پس نقاط $A_۴$ و $A_۲$ به ترتیب رو و داخل دیسک $C((-۰/۵۵, ۰/۲۵), ۰/۸)$ قرار می‌گیرند. بنابراین بنا به لم ۱۱.۶ دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

ح) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت افقی بر نقطه $A_۴$ با عمودمنصف $B_{۱۴}$، یعنی $X = (-۰/۵۵, ۰)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۰۵, ۰/۵) = |-۰/۰۵| + |۰/۵| = ۰/۵۵$$

حال فاصله مرکز از نقطه $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/۵۵, ۰) = |۰/۵۵| + |۰| = ۰/۵۵$$

چون $l_۱(X, A_۴) = r$، پس نقطه $A_۴$ روی دیسک $C((-۰/۵۵, ۰), ۰/۵۵)$ قرار می‌گیرد و داخل آن نمی‌باشد، لذا دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ $A_۳$ نیز می‌باشیم. بنابراین

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(-۰/۰۵, -۰/۲۵) = |-۰/۰۵| + |-۰/۲۵| = ۰/۳$$

و

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۰/۵۵, ۱/۱) = |-۰/۵۵| + |۱/۱| = ۱/۶۵$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-۰/۵۵, ۰), ۰/۵۵)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i|l_۱(X - A_i) - r| = ۰/۵|۰/۳ - ۰/۵۵| + ۱|۱/۶۵ - ۰/۵۵| = ۱/۲۲۵$$

ت) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت افقی بر نقطه $A_۱$ با عمودمنصف $B_{۱۴}$، یعنی $X = (-۱/۰۵, -۰/۵)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۵۵, ۰) = |-۰/۵۵| + |۰| = ۰/۵۵$$

حال فاصله مرکز از نقطه $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/۰۵, -۰/۵) = |۰/۰۵| + |-۰/۵| = ۰/۵۵$$

چون $l_۱(X, A_۱) = l_۱(X, A_۴) = r$ پس نقاط $A_۱$ و $A_۴$ روی دیسک C قرار می‌گیرند. بنابراین $A_۱$ داخل دیسک $C((-۱/۰۵, -۰/۵), ۰/۵۵)$ نمی‌باشد، لذا دیسک C می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ $A_۳$ نیز می‌باشیم. بنابراین

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(-۰/۵۵, -۰/۷۵) = |-۰/۵۵| + |-۰/۷۵| = ۱/۳$$

و

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۱/۰۵, ۰/۶) = |-۱/۰۵| + |۰/۶| = ۱/۶۵$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-۱/۰۵, -۰/۵), ۰/۵۵)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i |l_۱(X - A_i) - r| = ۰/۵|۱/۳ - ۰/۵۵| + ۱|۱/۶۵ - ۰/۵۵| = ۱/۴۷۵$$

ی) اگر مرکز دیسک محل تلاقی جهت افقی بر نقطه $A_۳$ با عمودمنصف $B_{۱۴}$، یعنی $X = (-۱/۰۵, -۱/۱)$ باشد. چون نقطه $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد. لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۵۵, -۰/۶) = |-۰/۵۵| + |-۰/۶| = ۱/۱۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۳$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۱/۰۵, ۰) = |-۱/۰۵| + |۰| = ۱/۰۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/۰۵, -۱/۱) = |۰/۰۵| + |-۱/۱| = ۱/۱۵$$

چون $l_۱(X, A_۳) < r$، پس $A_۳$ داخل دیسک $C((-۱/۰۵, -۱/۱), ۱/۱۵)$ قرار می‌گیرد، لذا طبق لم ۱۱.۶ دیسک مذکور نمی‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

۳) محل تلاقی دو عمودمنصف مانند B_{ij} و B_{ik}

الف) اگر مرکز دیسک محل تلاقی دو عمودمنصف $B_{۱۲}$ و $B_{۱۴}$، یعنی $X = (-۰/۶۷۵, -۰/۱۲۵)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد،

لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۱۷۵, ۰/۳۷۵) = |-۰/۱۷۵| + |۰/۳۷۵| = ۰/۵۵$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۲$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۲) = l_۱(X - A_۲) = l_۱(-۰/۱۷۵, -۰/۳۷۵) = |-۰/۱۷۵| + |-۰/۳۷۵| = ۰/۵۵$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/۴۲۵, -۰/۱۲۵) = |۰/۴۲۵| + |-۰/۱۲۵| = ۰/۵۵$$

چون $l_۱(X, A_۱) = l_۱(X, A_۲) = l_۱(X, A_۴) = r$ پس هر سه نقطه $A_۱$، $A_۲$ و $A_۴$ روی دیسک $C((-۰/۶۷۵, -۰/۱۲۵), ۰/۵۵)$ قرار می‌گیرند. در نتیجه دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقطه $A_۳$ نیز می‌باشیم. بنابراین

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۰/۶۷۵, ۰/۹۷۵) = |-۰/۶۷۵| + |۰/۹۷۵| = ۱/۶۵$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-۰/۶۷۵, -۰/۱۲۵), ۰/۵۵)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=۱}^{۴} w_i |l_۱(X - A_i) - r| = ۱\ |۱/۶۵ - ۰/۵۵| = ۱/۱$$

ب) اگر مرکز دیسک محل تلاقی دو عمودمنصف $B_{۱۳}$ و $B_{۱۴}$، یعنی $X = (-۱/۰۵, -۱/۰۵)$ باشد. چون $A_۱$ باید روی دیسک بهینه قرار داشته باشد، لذا شعاع دیسک برابر فاصله مرکز از نقطه $A_۱$ است. یعنی

$$r = l_۱(X, A_۱) = l_۱(X - A_۱) = l_۱(-۰/۵۵, -۰/۵۵) = |-۰/۵۵| + |-۰/۵۵| = ۱/۱$$

حال فاصله مرکز از نقاط $A_۳$ و $A_۴$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l_۱(X, A_۳) = l_۱(X - A_۳) = l_۱(-۱/۰۵, ۰/۰۵) = |-۱/۰۵| + |۰/۰۵| = ۱/۱$$

و

$$l_۱(X, A_۴) = l_۱(X - A_۴) = l_۱(۰/۰۵, -۱/۰۵) = |۰/۰۵| + |-۱/۰۵| = ۱/۱$$

چون $l_۱(X, A_۱) = l_۱(X, A_۳) = l_۱(X, A_۴) = r$ پس هر سه نقطه $A_۱$، $A_۳$ و $A_۴$ روی دیسک $C((-۱/۰۵, -۱/۰۵), ۱/۱)$ قرار می‌گیرند. در نتیجه دیسک مذکور می‌تواند کاندیدایی برای دیسک بهینه باشد.

برای به دست آوردن مقدار تابع هدف، نیازمند محاسبه فاصله مرکز از نقطه A_2 نیز می‌باشیم. بنابراین

$$l_1(X, A_2) = l_1(X - A_2) = l_1(-0/55, -1/3) = |-0/55| + |-1/3| = 1/85$$

مقدار تابع هدف به ازای دیسک $C((-1/05, -1/05), 1/1)$ برابر است با

$$F(C) = \sum_{i=1}^{4} w_i |l_1(X - A_i) - r| = 0/5\ |1/85 - 1/1| = 0/375$$

با مقایسه مقدار تابع هدف های به دست آمده، مشاهده می‌کنیم که دیسک $C((0, 0), 1)$ دیسک بهینه می‌باشد.

٦—۳ مدل برنامه ریزی برای مکانیابی دیسک کمترین مجموع

می‌دانیم مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع و نرم بلوکی به صورت زیر مدل می‌شود.

$$\min_{x,y,r} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j d_j(C) = \sum_{j=1}^{n} w_j\ |k(X - A_j) - r|$$

که در آن k یک نرم بلوکی است.

در این بخش یک مدل برنامه ریزی برای مسئله مکانیابی دیسک کمترین مجموع برای نرم های بلوکی و در حالات خاص منهتن و چبیشف ارائه می‌کنیم.

٦—۳—۱ نرم منهتن

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع همراه با نرم منهتن به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j\ |\ \|X - A_j\|_1 - r\ | = \sum_{j=1}^{n} w_j\ ||x - a_j| + |y - b_j| - r|.$$

با تعریف

$$u_j^+ = \begin{cases} x - a_j & x \geq a_j, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$u_j^- = \begin{cases} a_j - x & x < a_j, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$v_j^+ = \begin{cases} y - b_j & y \geq b_j, \\ \circ & o.w. \end{cases}$$

و

$$v_j^- = \begin{cases} b_j - y & y < b_j, \\ \circ & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$x - a_j = u_j^+ - u_j^- \qquad , \qquad y - b_j = v_j^+ - v_j^-$$

و

$$|x - a_j| = u_j^+ + u_j^- \qquad , \qquad |y - b_j| = v_j^+ + v_j^-.$$

با استفاده از تعاریف فوق مدل مسئله به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=۱}^{n} w_j |u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - r| & \\ s.t. & & \\ & x - u_j^+ + u_j^- = a_j & j = ۱, \cdots, n, \\ & y - v_j^+ + v_j^- = b_j & j = ۱, \cdots, n, \\ & u_j^+ u_j^- = \circ & j = ۱, \cdots, n, \\ & v_j^+ v_j^- = \circ & j = ۱, \cdots, n, \\ & u_j^+ \ , \ u_j^- \ , \ v_j^+ \ , \ v_j^- \ , r \geq \circ & j = ۱, \cdots, n. \end{array}$$

هم چنین با تعریف

$$z_j^+ = \begin{cases} u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - r & u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- \geq r, \\ \circ & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_j^- = \begin{cases} r - u_j^+ - u_j^- - v_j^+ - v_j^- & u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- < r, \\ \circ & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - r = z_j^+ - z_j^- \qquad , \qquad |u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - r| = z_j^+ + z_j^-.$$

پس مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} w_j(z_j^+ + z_j^-) & \\
s.t. & & \\
& x - u_j^+ + u_j^- = a_j & j = 1, \cdots, n, \\
& y - v_j^+ + v_j^- = b_j & j = 1, \cdots, n, \\
& u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - z_j^+ + z_j^- - r = 0 & j = 1, \cdots, n, \\
& u_j^+ u_j^- = 0 & j = 1, \cdots, n, \\
& v_j^+ v_j^- = 0 & j = 1, \cdots, n, \\
& z_j^+ z_j^- = 0 & j = 1, \cdots, n, \\
& u_j^+ \ , \ u_j^- \ , \ v_j^+ \ , \ v_j^- \ , \ z_j^+ \ , \ z_j^-, \ r \geq 0 & j = 1, \cdots, n.
\end{array}$$

۶–۳–۲ نرم چبیشف

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع همراه با نرم چبیشف به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j| \ \|X - A_j\|_\infty - r \ | = \sum_{j=1}^{n} w_j| \max_{j=1,\cdots,n}\{|x - a_j|, |y - b_j|\} - r|.$$

با تعریف

$$t_j = \max_{j=1,\cdots,n}\{|x - a_j|, |y - b_j|\}$$

مدل مسئله به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} w_j \ |t_j - r| & \\
s.t. & & \\
& t_j \geq |x - a_j| & j = 1, \cdots, n, \\
& t_j \geq |y - b_j| & j = 1, \cdots, n, \\
& t_j \ , \ r \geq 0 & j = 1, \cdots, n.
\end{array}$$

یا

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} w_j \ |t_j - r| & \\
s.t. & & \\
& t_j \geq x - a_j & j = 1, \cdots, n, \\
& t_j \geq y - b_j & j = 1, \cdots, n, \\
& t_j \geq a_j - x & j = 1, \cdots, n, \\
& t_j \geq b_j - y & j = 1, \cdots, n, \\
& t_j \ , \ r \geq 0 & j = 1, \cdots, n.
\end{array}$$

حال با تعریف

$$z_j^+ = \begin{cases} t_j - r & t_j \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_j^- = \begin{cases} r - t_j & t_j < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$t_j - r = z_j^+ - z_j^- \qquad , \qquad |t_j - r| = z_j^+ + z_j^-.$$

پس با تعاریف فوق مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j(z_j^+ + z_j^-) & \\ s.t. & & \\ & t_j \geq x - a_j & j = 1, \cdots, n, \\ & t_j \geq y - b_j & j = 1, \cdots, n, \\ & t_j \geq a_j - x & j = 1, \cdots, n, \\ & t_j \geq b_j - y & j = 1, \cdots, n, \\ & t_j - z_j^+ + z_j^- - r = 0 & j = 1, \cdots, n, \\ & z_j^+ \ , \ z_j^- \ , \ t_j \ , \ r \geq 0 & j = 1, \cdots, n. \end{array}$$

۶—۳—۳ نرم بلوکی

می‌دانیم نرم بلوکی بردار $X = (x_1, \cdots, x_m)$ به دو صورت زیر تعریف می‌گردد:

(۱) $$\|X\|_B = \min \{\textstyle\sum_{g=1}^{r} |\beta_g| : \quad X = \sum_{g=1}^{r} \beta_g b_g\}$$

که در آن b_g ها نقاط گوشه‌ای کانتور واحد نرم مذکور(B) هستند.

(۲) $$\|X\|_B = \max \{|X \cdot b_g^\circ| \ : \quad g = 1, \cdots, r^\circ\}$$

که در آن b_g° ها نقاط گوشه‌ای مجموعه قطبی متناظر با دیسک واحد نرم مذکور هستند.

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع همراه با نرم بلوکی از نوع (۱) به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j|\ \|X-A_j\|_B - r\ |.$$

اگر به ازای هر j داشته باشیم

$$X - A_j = \sum_{g=1}^{r} \beta_{gj} b_g$$

آن گاه

$$\|X - A_j\|_B = \min\ \{\sum_{g=1}^{r} |\beta_{gj}|\}.$$

بنابراین مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j|\min\ \{\sum_{g=1}^{r} |\beta_{gj}|\} - r| \\ s.t. & \\ & X - A_j = \sum_{g=1}^{r} \beta_{gj} b_g \qquad j = 1, \cdots, n, \\ & r \geq 0 \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j|\sum_{g=1}^{r} |\beta_{gj}| - r| \\ s.t. & \\ & X - A_j = \sum_{g=1}^{r} \beta_{gj} b_g \qquad j = 1, \cdots, n, \\ & r \geq 0 \end{array}$$

با تعریف

$$\beta_{gj}^{+} = \begin{cases} \beta_{gj} & \beta_{gj} \geq 0, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$\beta_{gj}^{-} = \begin{cases} -\beta_{gj} & \beta_{gj} < 0, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$\beta_{gj} = \beta_{gj}^{+} - \beta_{gj}^{-} \qquad , \qquad |\beta_{gj}| = \beta_{gj}^{+} + \beta_{gj}^{-}.$$

با استفاده از تعاریف فوق مدل مسئله به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j|\sum_{g=1}^{r} (\beta_{gj}^{+} + \beta_{gj}^{-}) - r| \\ s.t. & \\ & X - A_j = \sum_{g=1}^{r} (\beta_{gj}^{+} - \beta_{gj}^{-}) b_g \qquad j = 1, \cdots, n, \\ & \beta_{gj}^{+}\ ,\ \beta_{gj}^{-}\ ,\ r \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n\ \ ,\ \ g = 1, \cdots, r. \end{array}$$

هم چنین با تعریف

$$z_i^+ = \begin{cases} \sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) - r & \sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_i^- = \begin{cases} r - \sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) & \sum_{g=1}^{r}(\beta_{gi}^+ + \beta_{gi}^-) < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$\sum_{g=1}^{r}(\beta_{gj}^+ + \beta_{gj}^-) - r = z_j^+ - z_j^- \quad , \quad |\sum_{g=1}^{r}(\beta_{gj}^+ + \beta_{gj}^-) - r| = z_j^+ + z_j^-$$

با تعاریف فوق، مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j(z_j^+ + z_j^-) & \\ s.t. & & \\ & X - A_j = \sum_{g=1}^{r}(\beta_{gj}^+ - \beta_{gj}^-)b_g & j = 1, \cdots, n, \\ & \sum_{g=1}^{r}(\beta_{gj}^+ + \beta_{gj}^-) - z_j^+ + z_j^- - r = 0 & j = 1, \cdots, n, \\ & \beta_{gj}^+ \, , \, \beta_{gj}^- \, , \, z_j^+ \, , \, z_j^- \, , \, r \geq 0 & j = 1, \cdots, n \ , \ g = 1, \cdots, r. \end{array}$$

مدل مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع همراه با نرم بلوکی از نوع (۲) به قرار زیر است.

$$\min_{x,y,r} \sum_{j=1}^{n} w_j| \, \|X - A_j\|_B - r \, | = \sum_{j=1}^{n} w_j \, | \max_{g=1,\cdots,r^0} \{|(X - A_j)b_g^0|\} - r \, |.$$

با تعریف

$$t_j = \max_{g=1,\cdots,r^0} \{|(X - A_j)b_g^0|\}$$

مدل فوق به صورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j \, |t_j - r| & \\ s.t. & & \\ & t_j \geq |(X - A_j)b_g^0| & j = 1, \cdots, n \ , \ g = 1, \cdots, r^0, \\ & t_j \, , \, r \geq 0 & j = 1, \cdots, n. \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j \, |t_j - r| \\ s.t. & \\ & t_j \geq (X - A_j)b_g^\circ \qquad j = 1, \cdots, n \;\; , \;\; g = 1, \cdots, r^\circ, \\ & t_j \geq -(X - A_j)b_g^\circ \qquad j = 1, \cdots, n \;\; , \;\; g = 1, \cdots, r^\circ, \\ & t_j \; , \; r \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n. \end{array}$$

با تعریف

$$z_j^+ = \begin{cases} t_j - r & t_j \geq r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

و

$$z_j^- = \begin{cases} r - t_j & t_j < r, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

داریم

$$t_j - r = z_j^+ - z_j^- \qquad , \qquad |t_j - r| = z_j^+ + z_j^-.$$

با استفاده از تعاریف فوق مدل مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} w_j (z_j^+ + z_j^-) \\ s.t. & \\ & t_j \geq (X - A_j)b_g^\circ \qquad j = 1, \cdots, n \;\; , \;\; g = 1, \cdots, r^\circ, \\ & t_j \geq -(X - A_j)b_g^\circ \qquad j = 1, \cdots, n \;\; , \;\; g = 1, \cdots, r^\circ, \\ & t_j - z_j^+ + z_j^- - r = 0 \qquad j = 1, \cdots, n, \\ & z_j^+ \; , \; z_j^- \; , \; t_j \; , \; r \geq 0 \qquad j = 1, \cdots, n. \end{array}$$

مثال ۴.۶ با استفاده از مدل های برنامه ریزی ارائه شده در این بخش مثال ۶–۳ را حل می‌کنیم.

حل.

$$\begin{array}{ll}
\min & f=\sum_{j=1}^{4} w_j(z_j^+ + z_j^-) \\
s.t. & \\
& x-u_j^+ + u_j^- = a_j \qquad j=1,\cdots,4 \\
& y-v_j^+ + v_j^- = b_j \qquad j=1,\cdots,4 \\
& u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - z_j^+ + z_j^- - r = 0 \qquad j=1,\cdots,4 \\
& u_j^+ u_j^- = 0 \qquad j=1,\cdots,4 \\
& v_j^+ v_j^- = 0 \qquad j=1,\cdots,4 \\
& z_j^+ z_j^- = 0 \qquad j=1,\cdots,4 \\
& u_j^+ \,,\, u_j^- \,,\, v_j^+ \,,\, v_j^- \,,\, z_j^+ \,,\, z_j^-,\, r \ge 0 \qquad j=1,\cdots,4
\end{array}$$

پس از حل مدل به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$U^+=(0/5, 0/5, 0, 1/1) \quad , \quad V^+=(0/5, 0, 1/1, 0) \quad , \quad Z^+=(0, 0, 0/1, 0/1)$$

$$U^-=(0, 0, 0, 0) \quad , \quad V^-=(0, 0/25, 0, 0) \quad , \quad Z^-=(0, 0/25, 0, 0)$$

$$X=(0, 0) \quad , \quad r=1 \quad , \quad f=0/325$$

با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X,r)=0/325$.

مثال ٦.٥ با استفاده از مدل های برنامه ریزی ارائه شده در این بخش مثال های ٦–١ و ٦–٢ حل می‌کنیم.

حل.

۱) فرض کنید فواصل با نرم منهتن اندازه گیری شوند، در این صورت مدل برنامه ریزی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{ll}
\min & f=\sum_{j=1}^{3} w_j(z_j^+ + z_j^-) \\
s.t. & \\
& x-u_j^+ + u_j^- = a_j \qquad j=1,2,3 \\
& y-v_j^+ + v_j^- = b_j \qquad j=1,2,3 \\
& u_j^+ + u_j^- + v_j^+ + v_j^- - z_j^+ + z_j^- - r = 0 \qquad j=1,2,3 \\
& u_j^+ u_j^- = 0 \qquad j=1,2,3 \\
& v_j^+ v_j^- = 0 \qquad j=1,2,3 \\
& z_j^+ z_j^- = 0 \qquad j=1,2,3 \\
& u_j^+ \,,\, u_j^- \,,\, v_j^+ \,,\, v_j^- \,,\, z_j^+ \,,\, z_j^-,\, r \ge 0 \qquad j=1,2,3
\end{array}$$

پس از حل مدل به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$U^+=(0, 0, 0) \quad , \quad V^+=(0, 6, 0) \quad , \quad Z^+=(0, 0, 0)$$

$$U^- = (\circ, \circ, ۵) \quad , \quad V^- = (۶, \circ, \circ) \quad , \quad Z^- = (\circ, \circ, ۱)$$

$$X = (\circ, \circ) \quad , \quad r = ۶ \quad , \quad f = ۱$$

با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X, r) = ۱$.

۲) فرض کنید فواصل با نرم چبیشف اندازه گیری شوند، در این صورت مدل برنامه ریزی خطی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{lll}
\min & f = \sum_{j=۱}^{۳} w_j (z_j^+ + z_j^-) & \\
s.t. & & \\
& t_j \geq x - a_j & j = ۱, ۲, ۳ \\
& t_j \geq y - b_j & j = ۱, ۲, ۳ \\
& t_j \geq a_j - x & j = ۱, ۲, ۳ \\
& t_j \geq b_j - y & j = ۱, ۲, ۳ \\
& t_j - z_j^+ + z_j^- - r = \circ & j = ۱, ۲, ۳ \\
& z_j^+ \ , \ z_j^-, \ t_j \ , \ r \geq \circ & j = ۱, ۲, ۳
\end{array}$$

پس از حل مدل به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$Z^+ = (\circ, \circ, \circ) \quad , \quad Z^- = (\circ, \circ, \circ) \quad , \quad T = (۶, ۶, ۶)$$

$$X = (-۱, \circ) \quad , \quad r = ۶ \quad , \quad f = \circ$$

با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X, r) = \circ$.

۳) فرض کنید فواصل با نرم بلوکی که نقاط گوشه‌ای دیسک واحد آن عبارتند از:

$$b_۱ = (\circ, ۱) \quad , \quad b_۲ = (\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{۱}{۲}) \quad , \quad b_۳ = (۱, \circ) \quad , \quad b_۴ = (\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{-۱}{۲})$$

$$b_{-۱} = (\circ, -۱) \quad , \quad b_{-۲} = (\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{-۱}{۲}) \quad , \quad b_{-۳} = (-۱, \circ) \quad , \quad b_{-۴} = (\tfrac{-\sqrt{۳}}{۲}, \tfrac{۱}{۲})$$

اندازه گیری شوند، در این صورت مدل برنامه ریزی خطی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{lll}
\min & f = \sum_{j=۱}^{۳} w_j (z_j^+ + z_j^-) & \\
s.t. & & \\
& X - A_j = \sum_{g=۱}^{۴} (\beta_{gj}^+ - \beta_{gj}^-) b_g & j = ۱, ۲, ۳ \\
& \sum_{g=۱}^{۴} (\beta_{gj}^+ + \beta_{gj}^-) - z_j^+ + z_j^- - r = \circ & j = ۱, ۲, ۳ \\
& \beta_{gj}^+ \ , \ \beta_{gj}^- \ , \ z_j^+ \ , \ z_j^- \ , \ r \geq \circ & j = ۱, ۲, ۳ \ , \ g = ۱, ۲, ۳, ۴
\end{array}$$

پس از حل مدل به کمک نرم افزار $LINGO$ نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\beta_{۱۱}^+ = ۶ \quad , \quad \beta_{۱۳}^- = \circ/۲۱ \quad , \quad \beta_{۲۳}^+ = \circ/۴۲ \quad , \quad \beta_{۱۲}^+ = ۶ \quad , \quad \beta_{۳۳}^- = ۵/۳۷$$

$$z^+ = (0,0,0) \quad , \quad z^- = (0,0,0) \quad , \quad X = (0,0) \quad , \quad r = 6 \quad , \quad f = 0$$

سایر مقادیر مقدار صفر دارند. با قرار دادن این جواب در مسئله اصلی خواهیم داشت $F(X,r) = 0$.

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه به بررسی مسئله مکانیابی دایره در صفحه پرداخته و سه تابع هدف کمترین مربعات، کمترین مجموع و مینیماکس مورد بررسی قرار گرفت. هم چنین به بررسی مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف کمترین مجموع در حالتی که فاصله ها در صفحه با نرم های بلوکی اندازه گیری می‌شوند، پرداخته و نشان دادیم این مسئله را می‌توان به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی نوشت. مثال هایی نیز برای نرم های بلوکی مختلف برای این مدل ارائه نمودیم. هم چنین مسئله مکانیابی دیسک با تابع هدف مینیماکس که نرم فاصله ها بلوکی هستند را مورد مطالعه قرار دادیم و یک مدل برنامه ریزی خطی معادل با آن ارائه کردیم. یکی از مزایای استفاده از نرم های بلوکی برای این گونه مسائل این است که با مطالعه آن ها یک رده از مسائل مکانیابی دیسک با نرم فاصله های مختلف که دارای کانتور چندوجهی هستند مورد مطالعه قرار می‌گیرند. هم چنین می‌توان برای آن ها نیز مدل برنامه ریزی خطی مذکور را به کار برد. از مزایای دیگر آن این است که می‌توان نرم های متفاوتی که مجموعه نرم های بلوکی در آن ها چگال است، را با دقت دلخواه توسط نرم های بلوکی تقریب زد و پیچیدگی محاسباتی برنامه ریزی غیرخطی را تخفیف داد.

از جمله تحقیقات دیگری که در ادامه می‌توان انجام داد عبارتند از:

۱) بررسی مسئله مکانیابی دایره در صفحه برای حالتی که نقاط داده شده دارای وزن منفی باشند.

۲) بررسی مسئله مکانیابی کره در فضای سه بعدی.

۳) بررسی مسئله مکانیابی دایره روی کره.

کتاب‌نامه

[1] Bazaraa M.S., Sherali H.D. and Shetty C.M. (1993) *Nonlinear programming theory and algorithms*, Second ed. John Wiley & Sons, N.Y.

[2] Brimberg J., Juel H. and Schobel A. (2009) "Locating a minisum circle in the plane", *Discrete Applied Mathematics,* 157: 901-912.

[3] Brimberg J., Juel H., Korner M.C. and Schobel A. (2009) "Locating a minisum circle on the plane with arbitrary norm", *Preprint-Serie des Instituts fur Numerische und Angewandte Mathematik Lotzestr. 16-18 D-37083 Gottingen.*

[4] Demjanov V.F. and Wendell R.E. (1968) "Algorithms for some minimax problems", *Journal of Computers & System Science,* 2: 342-380.

[5] Drezner Z. and Wesolowsky G.O. (1985) "Layout of facilities with some fixed points", *Computers & Operations Research,* 12: 603-610.

[6] Drezner Z., Steiner S. and Wesolowsky G.O. (2002) "On the circle closest to a set of points", *Computers & Operations Research,* 29: 637-650.

[7] Francis R., McGinnis Jr.L.F. and White J.A. (1992) *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*, Prentice Hall.

[8] Hakimi S.L. (1964) "Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph", *Operations Research*, 12: 450-459.

[9] Jamalian A. and Fathali J. (2009) "Linear programming for the location problem with minimum absolute error", *World Applied Science Journal,* 7: 1423-1427.

[10] Klamroth K. (2002) *Single-facility location problems with barriers*, Springer.

[11] Kuhn H. W. (1967) "On a pair of dual nonlinear programs", In: *Nonlinear Programing,* J.Abadie (eds.), North-Holand Publishers Co. Amsterdam, 37-54.

[12] Love R.F. and Morris J.G. and Wesolosky G.O. (1988) *Facilities location models & methods*, Elsevier Science Publishing Co.

[13] Luenberger D.G. (1984) *Linear and nonlinear programming*, Second ed. Addison & Wesley.

[14] Megiddo N. and Tamir A. (1983) "Finding least-distances lines", *SIAM J. ALG. DISC. METH,* 4: 836-844.

[15] Rockafellar R.T. (1972) *Convex analysis*, Second ed. Princeton University Press.

[16] Ward J.E. and Wendell R.E. (1980) "A new norm for measuring distance which yields linear location problems", *Operations Research,* 28: 836-844.

[17] Ward J.E. and Wendell R.E. (1985) "Using block norms for location modeling", *Operations Research,* 33: 1074-1090.

[18] Weber A. (1929) *Uber den Standort der Industrient*, Tubingen, 1909; English Trans.: *Theory of Location of Industries,* (C.J.Friedrich, ed. and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois.

Abstract

This thesis considers the location problem of a circle in the plane. In the first chapter, firstly, a brief story of the location problem is noted, next, an introduction to the problem is presented. Primary definitions and concept are explained. In chapter 2, initially, we discuss about the polar set and then a number of features of block norms are defined and we notice some of special block norms such as Manhattan, Tchebycheff and One-infinity. In this chapter, the relation between block norms and the shortest path also is discussed. In chapter 3, we will focus on the analysis of the circle location problem with objective function of the least squares. In other words, we will find a circle such as to minimize the sum of the distance squares of the given points. Also, in this chapter, an approximation method is introduced to solve the problem. At the end of the chapter, presented methods are compared with each other by giving an example. In chapter 4, we will consider the circle location problem with the objective function of minimax. In other words we look for a circle in which the maximum distance of the given points to the circumference is minimum. In this chapter, a situation is discussed in which the distances in a plane are measured with block norm and then we will present the programming model which is equal to it. At the end of the chapter, afew of examples are solved with different block norms. In chapter 5, a study is conducted about the circle location ploblem with the objective function of the minisum and Euclidean norm. In other words, we will find a circle such that the sum of the weighted distances between the given points and circle is minimum. In this chapter, we will introduce lemma which identify the center of the optimum circle. An algorithm is presented to find the center of the optimum circle. In chapter 6, disk location problem with the objective function of the minisum and the block norm are studied. In the first part, we note the result which go true for all functions of arbitrary norms, and

in the second part, we confine our study to the block norms. In the second part, we will concentrate upon lemma helping to identify the center of the optimum disk. In the third part of the chapter, a programming model is presented for the location problem of the block norms and as in special cases for Manhattan and Tchebycheff.
Keywords: Location, Optimization and Block norm

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematics

Location a circle in the plane

Student: Maryam Khoshsimayebargard

Supervisor:

Dr. Jafar Fathali

Advisor:

Dr. Alireza Nazemi

A Thesis Submitted for Master of Science Degree in Applied Mathematics

January 2011