بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

ارائه مدلی برای بهینه کردن ریسک پورتفوی فازی

نگارنده: سجاد سلیمانی دامنه

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

استاد مشاور

دکتر سید مجتبی میر لوحی

شهریور ۱۳۹۶

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که همواره بر قصور و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، **آقای دکتر علیرضا ناظمی،** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب **آقای دکتر سید مجتبی میر لوحی** که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سجاد سلیمانی دامنه

شهریور ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **سجاد سلیمانی دامنه** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **ارائه مدلی برای بهینه کردن ریسک پورتفوی فازی** ، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام" دانشگاه صنعتی شاهرود" یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سجاد سلیمانی دامنه
شهریور ۱۳۹۶

چکیده

در این پایان‌نامه، با به‌کارگیری توزیع‌های احتمال پارامتری روشی کارآمد جهت توصیف نتایج فازی ارایه می‌دهیم. توزیع های احتمالی پارامتری با روشهای کاهشی یا ساده سازی ارزش معادل EV بدست می‌آیند. در واقع متغیرهای فازی کاهش یافته‌شان برای متغیرهای فازی معمول مثلثی و ذوزنقه‌ای نوع دوم را مورد مطالعه قرار می دهیم.

ابتدا توزیع های احتمالی پارامتری برای متغیرهای فازی کاهش یافته را بدست می‌آوریم، سپس فرمول‌های گشتاوری دوم برای متغیرهای فازی کاهش یافته ایجاد می‌شوند. با در نظر گرفتن گشتاور دوم به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسکی جدید، مدل‌های پاداش– ریسک و ریسک– پاداش جهت بهینه کردن مسایل انتخاب فازی سبد سهام ایجاد می‌شوند. خواص ریاضی مدل‌های بهینه‌سازی مطرح شده از جمله باز نمودهای تحلیلی گشتاورهای دوم مربوط به ترکیبات خطی متغیرهای فازی کاهش یافته و نیز تحدب گشتاورهای دوم با توجه به بردارهای تصمیم بررسی می‌شوند. مدل‌های ''بازده– ریسک'' و ''ریسک– بازده'' بر اساس باز نمودهای تحلیلی گشتاورهای دوم قادر هستند به مسائل برنامه نویسی محدب و پارامتری معادل درجه دوم تبدیل شوند، که با راه حل های معمول و نرم‌افزار متداول قابل حل هستند. در آخر برخی از نتایج عددی جهت ارائه نظرات جدید مدلی و کارایی روش راه حل عنوان می شود.

کلمات کلیدی: انتخاب سبد سهام، متغیر فازی کاهش یافته، توزیع احتمالی پارامتری، گشتاور، برنامه نویسی پارامتری.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. س. سلیمانی دامنه، ع. ناظمی، ارائه مدلی برای بهینه کردن ریسک پرتفوی فازی و حل آن با الگوریتم pso، اولین کنفرانس ملی مدیریت و سیستم‌های فازی، موسسه مهد پژوهش ره پویان حقیقت، تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، شهریورماه ۱۳۹۶.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی به‌طور مختصر آورده شده است.

۲.۱ مفاهیم اقتصادی

''پرتفوی'' در بحث ''سهام'' چیست و چه مزایایی دارد؟

پرتفوی[۱] یک واژه فرانسوی است که به معنی کیف چرمی بزرگ آمده است. اگر چه در ظاهر خیلی پیچیده است اما مفهوم کاملا واضحی در بورس دارد، که در اصطلاح بازار بورس به معنی کیف یا سبد سهام می‌باشد. بدین معنی که وقتی شخصی از پرتفوی خود صحبت می‌کند، منظورش انواع سهام موجود در سبد سهامش است.
به‌طور کلی سرمایه گذاری در مجموعه‌ای از اوراق بهادار یا پرتفوی، بسیار کارآمدتر از سرمایه گذاری در یک سهم می‌باشد. چون با افزایش تعداد سهام در سبد سرمایه گذاری، ریسک مجموعه کاهش می‌یابد. علت کاهش ریسک تاثیرات مختلفی است که شرکت‌های سرمایه پذیر از شرایط متفاوت اقتصادی سیاسی و اجتماعی می‌پذیرند. در سال ۱۹۵۰هری مارکوویتز [۲] مدل اساسي پرتفوليو را ارائه کرد که مبنایی برای نظریه مدرن پرتفولیو قرار گرفت[۲۲]. مارکوویتز اولین کسی بود که مفهوم پرتفولیو و ایجاد تنوع را به

[۱] Portfolio
[۲] Markowitz

صورت علمی بیان کرد. او معتقد بود سرمایه‌گذاران نسبت به آینده مطمئن نیستند و باید براي کاهش ریسک دست به ایجاد تنوع در سرمایه گذاری بزنند. به عبارت دیگر تشکیل یک پرتفولیو متنوع، میزان ریسک را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. مارکوویتز همچنین مفهوم پرتفولیو کارا را مطرح کرد.
پرتفوی کارا به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار به نحوی است که ریسک آن پرتفوی در ازای نرخ بازده معین به حداقل رسیده باشد.
سرمایه گذاران منطقی به دنبال پرتفوی‌های کارا هستند زیرا این گونه پرتفوی‌ها باعث حداکثر شدن بازده مورد انتظار برای سطح معینی از ریسک، یا حداقل ریسک برای بازده مورد انتظار معینی می‌شود. برای تعیین یک پرتفوی کارا لازم است بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده برای هر پرتفوی را مشخص کنیم. به همین منظور از مدل مارکوویتز استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. گوییم یک پرتفوی خود تامین[۳]است اگر هیچ تزریق و یا خروج پولی وجود نداشته باشد. خرید یک دارایی جدید با فروش یکی از دارایی‌های همان پرتفوی انجام می‌گیرد.

ارزش پرتفوی

به ارزش مالی و نقدی پرتفوی هر شخص حقیقی یا حقوقی، ارزش پرتفوی گویند. برای قیمت گذاری شرکت‌های سرمایه گذاری پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار، مهم ترین عامل ارزش پرتفوی این شرکت هاست.

مدیریت پرتفوی

پرتفوی به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی‌ها (شامل سهام‌های خریداری شده) نزدیک به صفر باشد.
در مسئله انتخاب پرتفوی هدف این است که چگونه سرمایه یک فرد به بازار سرمایه اوراق بهادار وارد شود و حداکثر سود را با حداقل ریسک بدست آورد.

۳.۱ بهینه سازی پرتفوی، مدل مارکویتز

هری. ام. مارکویتز در سال ۱۹۵۲ مدل پیشنهادی خود را برای انتخاب پرتفوی ارائه نمود[۲۲]. مدل میانگین واریانس مارکویتز مشهورترین و متداول‌ترین رویکرد در مسئله‌ی انتخاب سرمایه‌گذاری است. کاراترین ابزار برای انتخاب پرتفوی بهینه، مدل برنامه‌ریزی ریاضی ارائه شده توسط مارکویتز می‌باشد. از برجسته‌ترین نکات مورد توجه در مدل مارکویتز، توجه به ریسک سرمایه‌گذاری، نه تنها براساس انحراف معیار یک سهم، بلکه براساس ریسک مجموعه‌ی ریسک سرمایه‌گذاری است. مدل مارکویتز بر مبنای مفروضات ذیل بیان شده است:
۱. سرمایه‌گذاران، ریسک گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی، می‌باشند و منحنی مطلوبیت نهایی ثروت آن‌ها کاهنده می‌باشد.

[۳] Self-financing

۲.سرمایه‌گذاران پرتفوی خود را بر مبنای میانگین و واریانس مورد انتظار بازدهی انتخاب می‌نمایند. بنابراین منحنی‌های بی‌تفاوتی آن‌ها تابعی از نرخ بازده و واریانس مورد انتظار می‌باشد.
۳. هر گزینه سرمایه‌گذاری، تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.
۴.سرمایه‌گذاران افق زمانی «یک دوره‌ای» داشته و این برای همه‌ی سرمایه‌گذاران، مشابه است.
۵.سرمایه‌گذاران در یک سطح مشخصی از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای یک سطح معین از بازدهی، خواهان کمترین ریسک می‌باشند.

۱.۳.۱ بازده

بهره ناشی از سرمایه گذاری بازده گفته می‌شود[۲]. بازده یک شرکت از نظر کمی، سود حسابداری و از نظر کیفی، اعتبار شرکت تلقی گشته و نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه کرده و به‌عبارت بهتر پاداش سرمایه گذاران محسوب می‌شود، چرا که تمام هدف سرمایه گذاری کسب بازده مطلوب است. از طرف دیگر تعیین تفاوت میان بازده تحقق یافته [۴] و بازده مورد انتظار [۵] از اهمیت بالایی برخوردار است. بازده تحقق یافته، بازده‌ای است که واقع شده است، یا بازده‌ای است که کسب شده است. حال آنکه بازده مورد انتظار، بازده تخمینی برای یک دارایی [۶] در دوره‌ای از آینده است که این بازده با عدم‌قطعیت همراه بوده و احتمال برآورده نشدن آن نیز وجود دارد. در مورد دارایی‌ها و مخصوصا سهام، بازده از دو جزء تشکیل شده است:
۱. بازده ناشی از تغییر قیمت [۷]، این جزء از اختلاف بین قیمت خرید دارایی و فروش دارایی حاصل می‌شود.
۲. بازده ناشی از دریافت سود [۸]، این بازده ناشی از صورت جریانات نقدی دریافتی به دلیل تملک دارایی در طول سرمایه گذاری است (همانند سود تقسیمی).

بازده مورد انتظار هر سهم

عبارت است از بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه گذاران انتظار دارند در یک دوره آینده به دست آورند. بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است و ممکن است برآورده نشود. سرمایه‌گذاری بر روی اوراق بهادار ریسک‌دار بلندمدت می تواند باعث برآورده شدن بازده مورد انتظار سرمایه گذاران شود درحالی که در کوتاه مدت این اتفاق نمی افتد.

تفاوت‌های میان بازده تحقق یافته و بازده مورد انتظار:

۱ــ مبلغ بازده تحقق یافته، واقعی و قابل اتکا می‌باشد.
۲ــ مبلغ بازده مورد انتظار، برآوردی و قابلیت اتکا چندانی ندارد.

[۴] Realized return
[۵] Expected return
[۶] Asset
[۷] Capital gain
[۸] Yeild

۳ـ بازده تحقق یافته با عدم اطمینان همراه نیست.
۴ـ بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است.

محاسبه بازده مورد انتظار

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده بالقوه سهام، بازده مورد انتظار برای سهم iام با $E(R_i)$ نشان داده شده و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^{m} (p_k) PR_k.$$

$E(R_i) =$ بازده مورد انتظار هر سهم $\qquad$ $PR_k=$ kامین بازده بالقوه سهم i ام
$m =$ تعداد بازده‌های ممکن $\qquad$ $p_k=$ احتمال وقوع k امین بازده بالقوه

۴.۱ کوواریانس

به منظور آشنایی با مفهوم کوواریانس، به مثال زیر توجه فرمایید.

جدول ۱.۱: نرخ بازده دو سهم A و B در ۵ دوره

ماه	۱	۲	۳	۴	۵	میانگین
سهم A	۰.۰۴	−۰/۰۲	۰.۰۸	−۰/۰۴	۰.۰۴	۰.۰۲
سهم B	۰.۰۲	۰.۰۳	۰.۰۶	−۰/۰۴	۰.۰۸	۰.۰۳

فرض کنید که نمی‌توانیم توزیع احتمالی بازده دو سهم را ببینیم، بنابراین بایستی کوواریانس را با استفاده از بازده‌های ماهانه برآورد کنیم. در این حالت کوواریانس را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌نماییم.

$$\sigma_{A,B} = Cov_{A,B} = \frac{\sum_{t=1}^{N} [(r_{At} - \bar{r}_A)(r_{Bt} - \bar{r}_B)]}{N-1}$$

برای محاسبه کواریانس به اولین زوج بازده ماهیانه که با عدد ۱ مشخص گردیده توجه فرمایید.
در ماه مذکور سهم A دارای ۴ درصد نرخ بازده و سهم B دارای ۲ درصد نرخ بازده می‌باشد. ابتدا انحراف این دو بازده را نسبت به میانگین بازده‌شان محاسبه می‌کنیم. توجه نمایید که نرخ بازده سهم A، ۲ درصد بالاتر از میانگین می‌باشد و نرخ بازده سهم B، ۱ درصد پایین‌تر از میانگین ۳ درصدی خودش

قرار دارد. بعد از محاسبه انحرافات، آن‌ها را در هم ضرب می‌نماییم، که نتیجه آن ۰/۰۰۰۲ می‌باشد. این رویه را برای هر چهار زوج بازده تکرار نموده و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌نماییم.

$$\begin{aligned}
(۰/۰۴ - ۰/۰۲)(۰/۰۲ - ۰/۰۳) &= -۰/۰۰۰۲ \\
(-۰/۰۲ - ۰/۰۲)(۰/۰۳ - ۰/۰۳) &= ۰/۰۰۰۰ \\
(-۰/۰۴ - ۰/۰۲)(۰/۰۶ - ۰/۰۳) &= ۰/۰۰۱۸ \\
(-۰/۰۴ - ۰/۰۲)(۰/۰۴ - ۰/۰۳) &= ۰/۰۰۴۲ \\
(۰/۰۴ - ۰/۰۲)(۰/۰۸ - ۰/۰۳) &= \underline{۰/۰۰۱۰} \\
& \quad ۰/۰۰۶۸
\end{aligned}$$

نتیجه حاصله را بر تعداد مشاهدات (ماه‌ها) منهای یک تقسیم می‌نماییم تا کواریانس (نمونه) به دست آید.

$$Cov_{A,B} = \frac{۰/۰۰۶۸}{۵ - ۱} = ۰/۰۰۱۷$$

اندازه‌ی کواریانس چیزی بیشتر از رابطه بین بازده‌های دو سهم نمی‌باشد. در مثال فوق، از آنجا که کواریانس مثبت می‌باشد، معنی آن این است که وقتی یک سهم بازدهی بیشتر از متوسطش کسب نماید، سهم دیگر نیز چنین روندی را خواهد داشت.

۵.۱ ریسک

ریسک در واقع به معنی میزان اختلاف بازده واقعی سرمایه گذاری با بازده مورد انتظار است. هرچه پراکندگی بازده بیشتر باشد ریسک نیز بیشتر خواهد بود. انواع ریسک عبارتند از:
ریسک سیستماتیک: سرمایه گذاران با تشکیل پرتفوی قسمتی از ریسک کلی را که به بازار ربطی ندارد کاهش می‌دهند آن قسمت از ریسک که باقی می‌ماند غیر قابل کاهش و ریسک مربوط به بازار است. اگر بازار سهام به سرعت افت کند تمامی سهام را تحت تاثیر قرار می‌دهد و همچنین تغییر پذیری در بازده کل اوراق بهادار مستقیما به تغییرات بازار بستگی دارد که همان ریسک بازار نام دارد.

ریسک غیر سیستماتیک: آن قسمت از تغییر پذیری در بازده کلی اوراق بهادار که به تغییر پذیری کلی بازار بستگی ندارد ریسک غیر سیستماتیک گویند و این نوع ریسک منحصر به اوراق بهادار خاصی نیست و به عواملی جون ریسک تجاری، مالی و نقدینگی بستگی دارد.

۶.۱ ریسک اوراق بهادار و پرتفوی

برای اندازه‌گیری ریسک هر یک از اوراق بهادار از واریانس یا ریشه دوم آن که انحراف از معیار بازده‌های مورد انتظار است استفاده می‌کنیم. از نظر آماری، واریانس پراکندگی بازده سهام در حوالی ارزش مورد انتظار را اندازه‌گیری می‌کند هرچه پراکندگی بیشتر باشد میزان ریسک و انحراف از معیار واریانس بیشتر است. بنابراین واریانس یک معیار منطقی و ثابت ریسک اوراق بهادار برای سرمایه گذاران است. در مدل

مارکویتز ریسک توسط واریانس بازده پرتفوی و مانند محاسبه ریسک هر یک از اوراق بهادار اندازه‌گیری می‌شود، اگرچه بازده مورد انتظار پرتفوی عبارت است از میانگین وزنی بازده‌های مورد انتظار تک تک اوراق بهادار موجود در پرتفوی ولی ریسکی که توسط واریانس یا انحراف از معیار اندازه‌گیری می‌شود عبارت است از میانگین غیر وزنی ریسک تک تک اوراق بهادار موجود در پرتفوی است،

$$Var(R_p) \neq \sum_{i=}^{n} w_i var(R_i), \qquad E(R_p) = \sum_{i=}^{n} w_i E(R_i) \tag{۱.۱}$$

به خاطر همین نابرابری است که سرمایه گذاران می‌توانند ریسک پرتفوی را کاهش دهند. ریسک پرتفوی نه تنها به میانگین وزنی ریسک اوراق بهادار تشکیل دهنده‌ی پرتفوی نیز بستگی دارد بلکه به کواریانس یا روابط میان بازده‌های اوراق بهادار تشکیل دهنده‌ی پرتفوی نیز بستگی دارد و به همین دلیل ریسک پرتفوی تابعی از ریسک هریک از سهام و کواریانس میان بازده هر یک از سهام است.

قضیه ۱.۶.۱. بلکه بر کواریانس یا روابط میان بازده‌های اوراق بهادار تشکیل دهنده پرتفوی نیز بستگی دارد.
ریسک پرتفوی تابعی از ریسک هر یک از اوراق بهادار و کواریانس میان بازده هر یک از اوراق بهادار

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 Var(R_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(R_i, R_j) w_i w_j.$$

اثبات. فرض کنید

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2, \qquad E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2).$$

$$\begin{aligned}
Var(R_p) &= E\left[R_p - E(R_p)\right]^2 \\
&= E\left[w_1 R_1 + w_2 R_2 - E(w_1 R_1 + w_2 R_2)\right]^2 \\
&= E\left[w_1 R_1 + w_2 R_2 - w_1 E(R_1) - w_2 E(R_2)\right]^2 \\
&= E\left[w_1 R_1 - w_1 E(R_1) + w_2 R_2 - w_2 E(R_2)\right]^2 \\
&= E\left[w_1 (R_1 - E(R_1)) + w_2 (R_2 - E(R_2))\right]^2 \\
&= E\left[w_1^2 (R_1 - E(R_1))^2 + w_2^2 (R_2 - E(R_2))^2\right. \\
&\quad \left. + 2 w_1 w_2 (R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2)\right] \\
&= w_1^2 E\left[(R_1 - E(R_1)\right]^2 + w_2^2 E\left[(R_2 - E(R_2)\right]^2 \\
&\quad + 2 w_1 w_2 E\left[(R_1 - E(R_1)(R_2 - E(R_2)\right] \\
&= w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + 2 w_1 w_2 Cov(R_1, R_2).
\end{aligned}$$

□

برای $R_p = w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n$ نیز می‌توان استدلال مشابهی به‌کار برد.

۷.۱ ترکیبات دو دارایی ریسک‌دار

همچنان که بیان شد بازده‌ی مورد انتظار یک پر تفوی دو سهمی به صورت زیر است:

$$E(r_p) = x_A E(r_A) + x_B E(r_B)$$

یا

$$\bar{r_p} = x_A \bar{r_A} + x_B \bar{r_B} \qquad (۲.۱)$$

که در آن

x_A = نسبتی از کل بودجه‌ی صرف‌شده در دارایی A؛

x_B = نسبتی از کل بودجه‌ی صرف‌شده در دارایی B؛

$\bar{r_p}$ = بازده مورد انتظار پرتفوی؛

$E(r_A)$ یا $\bar{r_A}$ = بازده مورد انتظار سهام A؛ و

$E(r_B)$ یا $\bar{r_B}$ = بازده مورد انتظار سهام B می‌باشند.

از آن‌جا که فرض بر این است سرمایه‌گذار تمامی وجوه در اختیارش را سرمایه‌گذاری می‌نماید، بنابراین درصد سرمایه‌گذاری وی در سهم A به‌علاوه سهم B بایستی برابر ۱ باشد یعنی:

$$x_A + x_B = ۱$$

عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x_B = ۱ - x_A \qquad (۳.۱)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۳.۱) در معادله‌ی (۲.۱)، بازده‌ی مورد انتظار پرتفوی دو سهمی، به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{r_p} = x_A \bar{r_A} + (۱ - x_A)\bar{r_B}$$

توجه نمایید بازده‌ی مورد انتظار پرتفوی، برابر متوسط موزون بازده‌ی مورد انتظار تک تک اوراق بهادار است که مجموع وزن آن‌ها در پرتفوی برابر یک است. مفهوم فوق ضرورتا در مورد ریسک پرتفوی، صادق نیست. در رابطه (۴.۱) انحراف معیار بازده یک پرتفوی دو سهمی، به صورت زیر نمایش داده شد:

$$\sigma_p = \left[x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_Ax_B\sigma_{A,B}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴.۱}$$

که در آن:

σ_p =انحراف معیار بازده پرتفوی؛

σ_A^2=واریانس بازده سهم A؛

σ_B^2=واریانس بازده سهم B؛ و

$\sigma_{A,B}$ کواریانس بین بازده سهام A و سهام B می‌باشد.

چنان‌چه معادله‌ی (۳.۱) را در معادله فوق جایگزین نماییم خواهیم داشت:

$$\sigma_p = \left[x_A^2\sigma_A^2 + (1-x_A)^2\sigma_B^2 + 2x_A(1-x_A)\sigma_{A,B}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵.۱}$$

می‌دانیم که
A و B به صورت $\sigma_{A,B} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$؛ در این صورت:

$$\sigma_p = \left[x_A^2\sigma_A^2 + (1-x_A)^2\sigma_B^2 + 2x_A(1-x_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۶.۱}$$

روش‌های اندازه‌گیری ریسک

مهمترین مسئله در ریسک، محاسبه آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده، معیارهای اندازه‌گیری ریسک اولین بار از طریق مطالعات شاخص‌های پراکندگی آماری و از آن به بعد توسط معیارهای جدیدتری از جمله حساسیت و ریسک نامطلوب محاسبه شدند، که همگی از روش‌های آماری استفاده می‌کنند.

بسیاری از متون در بهینه سازی پرتفوی برای اندازه‌گیری ریسک از واریانس استفاده می‌کنند. مارکوویتز [۲۴] برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه گذار در بازارهای مالی از مدل نیم واریانس استفاده کرد. سپرانزا [۳۳] انحراف نیمه مطلق را برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه گذاری استخراج کرد. کونو و یاماکازکی [۱۷] برای اندازه‌گیری ریسک از انحراف نیمه مطلق به جای واریانس در مدل مارکوویتز استفاده کردند و یک مدل برنامه‌ریزی خطی را ارائه دادند. سیمان [۳۲] یک مقایسه دقیق از مدل‌های میانگین‌ـ واریانس و انحراف مطلق میانگین برای اندازه‌گیری ریسک ارائه داد. سپرانزا [۳۳] برای اولین بار برای انتخاب ریسک پرتفوی از مدل انحراف نیمه مطلق در محیط تصادفی استفاده کرد.

ریسک عبارت است از احتمال نوسانات آتی نرخ‌بازدهی. شاخص‌های مختلفی برای تبیین نوسانات مورد استفاده قرار می‌گیرد که بعضی از مهم‌ترین آنها بدین صورت هستند:

۱. دامنه تغییرات

۲. متوسط انحراف خطی (متوسط قدر مطلق انحرافات)
۳. واریانس (متوسط مجذور انحرافات)
۴. انحراف معیار
۵. نیم‌واریانس
۶. نیم انحراف معیار
۷. شاخص بتا
۸. دارایی‌درخطر(Var)
۹. انحراف نیمه مطلق میانگین

ریسک گریز

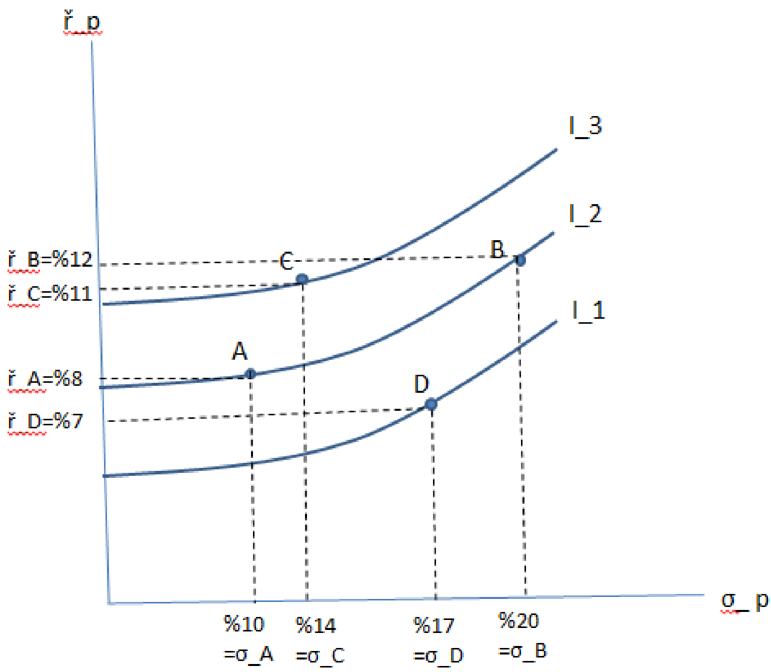
ریسک‌گریزی، اصطلاحی در علم اقتصاد و علوم مالی است، که به معنای ترجیح پذیرش ریسک کم‌تر می‌باشد. تمایل فردی و درونی انسان‌ها (سرمایه گذاران و معامله‌گران) در مواقع عدم قطعیت، جلوگیری از ریسک غیر ضروری است. این نوع ریسک، فردی و درونی است، چرا که سرمایه گذاران متفاوت، تعریف متفاوتی از ریسک غیرضروری دارند. سرمایه گذاری که به دنبال بازده بیشتری است، ریسک‌های ضروری بیشتری را می‌پذیرد، ولی سرمایه گذاری که به دنبال بازده کم تری است، استراتژی سرمایه گذاری خود را بی‌پروا و بدون دقت زیاد انتخاب می‌کند؛ بنابراین یک سرمایه گذار منطقی که ریسک گریز نیز می‌باشد، اگر دو سرمایه گذاری با بازده یکسان و ریسک متفاوت برای انتخاب داشته باشد، سرمایه گذاری با ریسک کم‌تر را انتخاب خواهد کرد.
به بیان ساده ریسک گریزی به معنای عدم تمایل به معامله‌ای پرسود ولی با ریسک بالا و ترجیح دادن معامله‌ای با سود کم‌تر، ولی امنیت بیشتر می‌باشد. از دیدگاه روانشناسی معمول، ریسک پذیری یک نفر به عوامل متعدد درونی و بیرونی بستگی خواهد داشت، ولی همه این عوامل به احساس امنیت شخص باز می‌گردد [۳].

ریسک پذیر

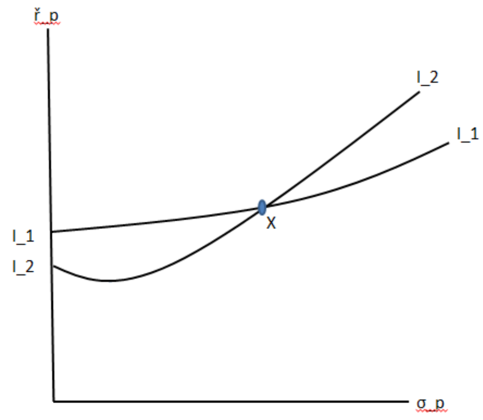
افرادی که در این الگو قرار دارند توانایی تحمل بالا در شرایط عدم اطمینان را داشته و به همان میزان نیز خواهان دریافت بازده بیشتر می باشند. هر سازمان با توجه به ماهیت کار خود، ریسک های گوناگون را تجربه می کند و در شرایط متحول امروز، اساساً موفقیت هر بنگاه به تسلط آن بر ریسک‌ها و نوع مدیریتی است که بر انواع ریسک‌ها اعمال می‌شود، بستگی دارد.
در مجموع ریسک پذیری همان سنجش یا ارزیابی ریسک و به دنبال آن طراحی استراتژی هایی برای اداره ریسک است.
به این ترتیب در شرایط پر تحول امروز، توفیق بنگاه‌ها به تسلط آنها بر ریسک‌ها وابسته است. همان‌طور که معروف است « نه قویترین و نه با هوشترین بلکه منعطف ترین موجودات بقا دارند[۳].
»

۱.۷.۱ منحنی‌های بی‌تفاوتی

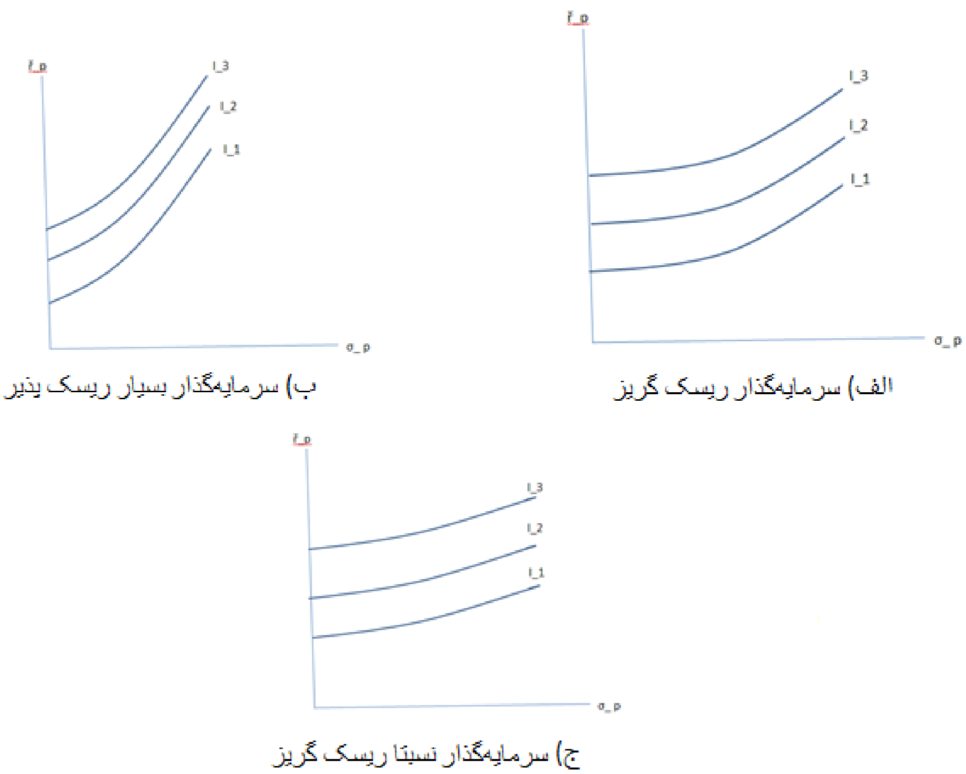
«منحنی بی‌تفاوتی» ترکیبات متفاوت یک مجموعه از ریسک و بازده مورد انتظار را که یک سرمایه‌گذار، با میزان یکسانی از درجه‌ی مطلوبیت به دست می‌آورد، نشان می‌دهد. سرمایه‌گذار در یک منحنی بی‌تفاوتی در انتخاب بین هر ترکیبی از بازده و ریسک مورد انتظار، بی‌تفاوت است. از آن‌جا که منحنی‌های بی‌تفاوتی نشان‌دهنده‌ی ترجیحات یک سرمایه‌گذار برای ریسک و بازده مورد انتظار است، لذا می‌توان آن‌ها را در یک فضای دو بعدی ترسیم نمود، که محور افقی نشان‌دهنده‌ی ریسک (انحراف معیار) و محور عمودی نشان‌دهنده‌ی بازده مورد انتظار ($\bar{r_p}$) باشد[۳].



شکل ۱.۱: مجموعه منحنی‌های بی‌تفاوتی شخص ریسک‌گریز



شکل ۲.۱: منحنی‌های بی‌تفاوتی متداخل



شکل ۳.۱: منحنی‌های بی‌تفاوتی سه سرمایه‌گذار فرضی

فصل ۲

نظریه اعتبار و فازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم فازی و نظریه اعتبار را بیان نموده و سپس امید ریاضی، ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط را در محیط فازی تعریف کرده و در حالات خاص متغیرهای فازی مثلثی، ذوزنقه‌ای و گوسی آن‌ها را بدست می‌آوریم.

عمده ابزارهای مهم برای مدل‌سازی، استدلال و محاسبات از نوع قطعی [۱]، معین [۲] و کاملا مشخص هستند. منظور از قطعی بودن، دو بخشی بودن است: بله یا خیر، به‌جای بیشتر یا کمتر. در منطق دوگان مرسوم، یک عبارت می‌تواند درست یا غلط باشد. در تئوری مجموعه، یک عنصر به مجموعه تعلق دارد یا ندارد. اگر قدرت یک زبان زنده را با یک زبان منطقی [۳] مقایسه کنیم، زبان منطقی فقیرتر خواهد بود. چرا که افکار و احساسات بشری دربر گیرنده مفاهیم یا دریافت‌هایی است که کلمات مورد استفاده ما برای بیان آنها کافی نیست. بنابراین، یک نگاشت یک به یک از مسائل و سیستم‌ها با استفاده از زبان حسابی یا منطقی امکان‌پذیر نیست. پس از آنجا که ذهن ما با منطق دیگری کارهایش را انجام می‌دهد و تصمیماتش را اتخاذ می‌کند، ایجاد منطق‌های تازه و چندارزشی مورد نیاز است، که منطق فازی [۴] یکی از آن‌ها می‌باشد. واژه‌ی فازی به معنای غیر دقیق، ناواضح و مبهم (شناور) است.

[۱] Crisp
[۲] Deterministic
[۳] Logical Language
[۴] Fuzzy Logic

منطق فازی اولین بار در پی تنظیم نظریه مجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ به وسیله پروفسور زاده [۵] در صحنه‌ی محاسبات نو ظاهر شد. [۳۶] سپس، بر اساس این مفهوم، نظریه حل فازی توسط بلمن [۶] و زاده در [۶] ارائه شد.
دانش مورد نیاز برای بسیاری از مسائل مورد مطالعه به دو صورت متمایز ظاهر می‌شود:

۱. دانش عینی [۷] ، مثل مدل‌ها و معادلات و فرمول‌های ریاضی که از پیش تنظیم شده و برای حل و فصل مسائل معمولی فیزیک، شیمی، یا مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲. دانش شخصی[۸] ، مثل دانستنی‌هایی که تا حدودی قابل توصیف و بیان زبان‌شناختی بوده، ولی امکان کمّی کردن آن‌ها با کمک ریاضیات سنتی معمولاً وجود ندارد. به این نوع دانش، دانش ضمنی یا دانش تلویحی [۹] گفته می‌شود.

از آن جا که در عمل هر دو نوع دانش مورد نیاز است منطق فازی می‌کوشد آن‌ها را به صورتی منظم، منطقی، و ریاضیاتی بایکدیگر هماهنگ گرداند. منطق فازی بر نظریه مجموعه‌های فازی تکیه می‌کند. مجموعه‌های فازی خود از تعمیم و گسترش مجموعه‌های قطعی به صورتی طبیعی حاصل می‌آیند.

۲.۲ مفاهیم فازی

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه‌های قطعی [۱۰] در واقع همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند که در ابتدای نظریه مجموعه‌ها معرفی می‌شوند. افزودن صفت قطعی به واقع وجه تمایزی را ایجاد می‌نماید که به کمک آن می‌شود یکی از مفاهیم ابتکاری و حیاتی در منطق فازی موسوم به تابع عضویت را به آسانی در ذهن به وجود آورد.
در حالت مجموعه‌های قطعی، تابع عضویت فقط دو مقدار صفر و یک را می‌گیرد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

که در اینجا $\mu_A(x)$ تابع عضویت عنصر x در مجموعه قطعی A است.

تعریف ۲.۲.۲. مجموعه فازی [۱۱] $\tilde{A}$ به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

[۵] L.A. Zadeh
[۶] R.E. Bellman
[۷] Objective Knowledge
[۸] Personal Knowledge
[۹] Tacit Knowledge
[۱۰] Crisp Sets
[۱۱] Fuzzy Set

تعریف می‌شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به هر عنصر از X، یک عدد را از بازه $[0,1]$ به‌عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (0,1]$ مجموعه $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ را مجموعه $\alpha-$ برش از مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۲. مجموعه $\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ را پشتیبان مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۲. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0,1]$داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

یا به عبارت دیگر یک مجموعه فازی محدب است اگر کلیه مجموعه‌های $\alpha-$ برش آن محدب باشند.

تعریف ۶.۲.۲. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نرمال گوییم هر گاه $\exists\, x \in X$ به‌طوری‌که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۷.۲.۲. عدد فازی [۱۲] $\tilde{M}$ یک مجموعه فازی از خط حقیقی $\mathbb{R}$ با شرایط سه گانه زیر است:

۱. مجموعه فازی $\tilde{M}$ محدب باشد.

۲. نرمال باشد.

۳. شکل تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به‌صورت قطعه قطعه پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ را با $\text{FN}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهند.

۳.۲ نظریه اعتبار

تعریف ۱.۳.۲. [۱۸] اگر θ یک مجموعه ناتهی باشد و $P(\theta)$ یک مجموعه توانی از θ باشد به طوری که بزرگ‌ترین $\sigma-$جبر روی θ است، هر عضو در $P(\theta)$ یک پیشامد نامیده می‌شود. تابع مجموعه‌ای C_r یک اندازه اعتبار نامیده می‌شود اگر در اصول زیر صدق کند:
اصل ۱: اصل نرمال

$$C_r\{\theta\} = 1,$$

اصل ۲: اصل یکنواختی

$$C_r\{A\} \leq C_r\{B\}; \quad A \subset B \ \text{برای هر},$$

[۱۲] Fuzzy Number

اصل ۳: اصل خود دوگانی

$$C_r\{A\} + C_r\{A^c\} = ۱; \quad A \text{ برای هر پیشامد},$$

اصل ۴: اصل ماکزیمم

$$C_r\{\cup_i A_i\} = \sup_i C_r\{A_i\}; \quad \sup_i C_r\{A_i\} < ۰/۵ \text{ با } \{A_i\} \text{ برای هر پیشامد}.$$

تعریف ۲.۳.۲. اگر ξ یک متغیر فازی روی فضای اعتبار $(\theta, P(\theta), C_r)$ تعریف شده باشد. تابع عضویت آن از فضای اعتبار گرفته می‌شود

$$\mu(t) = (۲C_r\{\xi = t\}) \wedge ۱, \quad t \in R$$

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با تابع عضویت μ باشد، آن‌گاه برای هر مجموعه A از اعداد حقیقی داریم

$$C_r\{Y \in A\} = \frac{۱}{۲}\left(\sup_{t\in A}\mu(t) + ۱ - \sup_{t\in A^c}\mu(t)\right)$$

اثبات.

$$C_r\{Y \in A\} \le ۰/۵ \Rightarrow C_r\{Y = t\}_{t\in A} \le ۰/۵$$

می‌دانیم

$$C_r\{U_i A_i\} = \sup C_r(A_i)$$

$$C_r\{Y \in A\} = C_r\{U_{t\in A}\{y = t\}\} = \sup C_r\{y = t\} = \frac{۱}{۲}(\sup ۲C_r\{y = t\})$$
$$= \frac{۱}{۲}(\sup(۲C_r\{y = t\} \wedge ۱)) = \frac{۱}{۲}\sup_{t\in A}\mu(t)$$

همچنین

$$C_r\{Y \in A^c\} \ge ۰/۵ \Rightarrow C_{r^{t\in A^c}}\{y = t\} \ge ۰/۵$$
$$\sup_{t\in A^c}\mu(t) = \sup_{t\in A^c}(۲C_r\{y = t\} \wedge ۱) = ۱$$

می‌دانیم

$$\textbf{if} \quad C_r\{Y \in A\} \ge ۰/۵ \Rightarrow C_r\{Y \in A^c\} \le ۰/۵$$

در این صورت

$$C_r\{y \in A\} = ۱ - C_r\{y \in A^c\} = ۱ - \frac{۱}{۲}\left(\sup_{t\in A}\mu(t) + ۱ - \sup_{t\in A^c}\mu(t)\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\sup_{t\in A}\mu(t) + ۱ - \sup_{t\in A^c}\mu(t)\right)$$

□

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت μ است و r یک عدد حقیقی است. در این صورت، تابع اعتبار پیشامد $\xi \leq r$ می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود

$$\mathrm{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Pos}\{\xi \leq r\} + \mathrm{Nec}\{\xi \leq r\}\right] \tag{۱.۲}$$

که در آن $\mathrm{Pos}\{.\}$ و $\mathrm{Nec}\{.\}$ اندازه‌های احتمال و ضرورت در نظریه احتمال [۱۱] هستند، که به‌صورت زیر بیان می‌شوند

$$\mathrm{Pos}\{\xi \leq r\} = \sup_{x \leq r} \mu(x) \tag{۲.۲}$$

$$\mathrm{Nec}\{\xi \leq r\} = 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \tag{۳.۲}$$

از (۲.۲) و(۳.۲) داریم

$$\mathrm{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2}\left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x > r} \mu(x)\right] \tag{۴.۲}$$

همچنین با استفاده از خواص Cr در [۲۰] به طور مشابه داریم

$$\mathrm{Cr}\{\xi \geq r\} = \frac{1}{2}\left[\sup_{x \geq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x < r} \mu(x)\right] \tag{۵.۲}$$

۴.۲ بعضی از متغیرهای فازی خاص

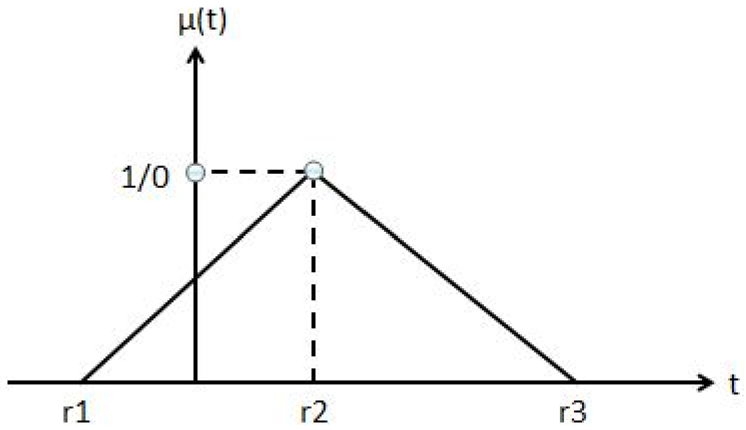
تعریف ۱.۴.۲. یک متغیر فازی، متغیر فازی مثلثی نامیده می‌شود، اگر یک تابع عضویت مثلثی داشته باشد. (شکل ۱.۲)

$$\mu(t) = \begin{cases} \dfrac{t - r_1}{r_2 - r_1}, & r_1 \leq t \leq r_2 \\ \dfrac{t - r_3}{r_2 - r_3}, & r_2 \leq t \leq r_3 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

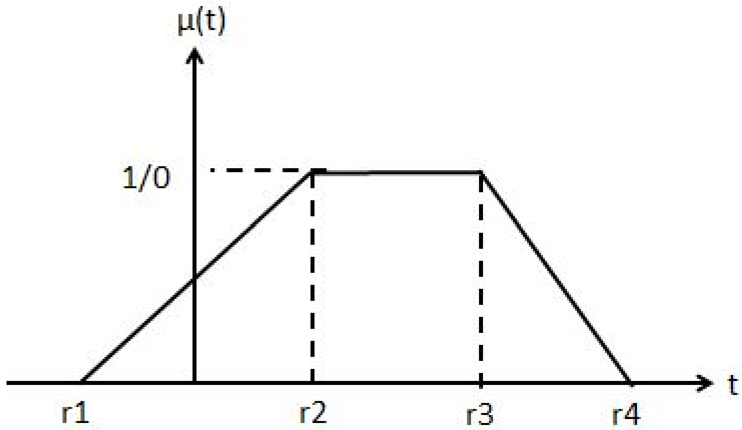
که آن را با $\xi = (r_1, r_2, r_3)$ نشان می‌دهیم که در آن $r_1 < r_2 < r_3$.

تعریف ۲.۴.۲. یک متغیر فازی، یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود، اگر یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای داشته باشد[۱۳]. (شکل ۲.۲)

$$\mu(t) = \begin{cases} \dfrac{t - r_1}{r_2 - r_1}, & r_1 \leq t \leq r_2 \\ 1, & r_2 \leq t \leq r_3 \\ \dfrac{t - r_4}{r_3 - r_4}, & r_3 \leq t \leq r_4 \\ 0, & o.w \end{cases}$$



شکل ۱.۲: تابع عضویت مثلثی



شکل ۲.۲: تابع عضویت ذوزنقه‌ای

که توسط $\xi = (r_۱, r_۲, r_۳, r_۴)$ نشان می‌دهیم که در آن $r_۱ < r_۲ < r_۳ < r_۴$ می‌باشد.

در ادامه اعتبار متغیرهای فازی ذوزنقه‌ای را بررسی می‌کنیم. بر طبق قضیه معکوس اعتبار، اگر $r_۴ \leq t$ باشد، داریم:

$$C_r\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}(۱ + ۱ - ۰) = ۱$$

اگر $r_۳ \leq t \leq r_۴$ باشد، آن‌گاه:

$$C_r\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}\left(۱ + ۱ - \frac{r_۴ - t}{r_۴ - r_۳}\right) = \frac{r_۴ - ۲r_۳ + t}{۲(r_۴ - r_۳)}$$

اگر $r_۲ \leq t \leq r_۳$ باشد، آن‌گاه:

$$C_r\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}(۱ + ۱ - ۱) = \frac{۱}{۲}$$

اگر $r_۱ \leq t \leq r_۲$ باشد، داریم:

$$C_r\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{t-r_۱}{r_۲-r_۱}+۱-۱\right) = \frac{t-r_۱}{۲(r_۲-r_۱)}$$

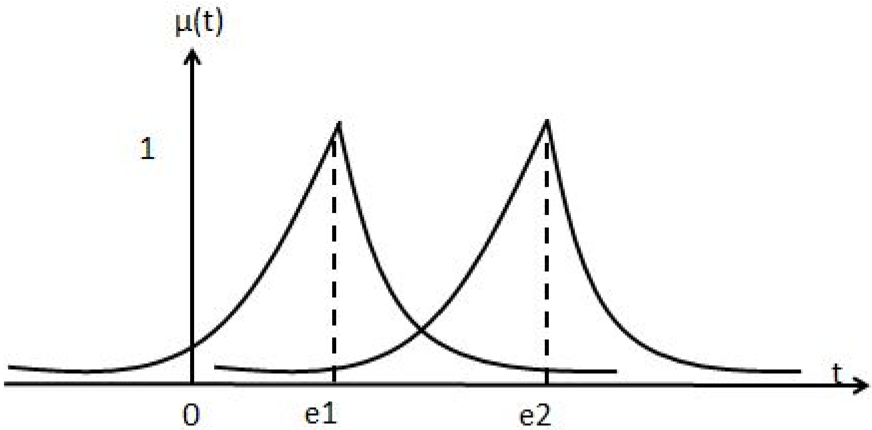
اگر $t < r_۱$ باشد، آن‌گاه:

$$C_r\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}(۰+۱-۱) = ۰$$

بنابراین:

$$C_r\{\xi \leq t\} = \begin{cases} ۱, & r_۴ \leq t \\ \dfrac{r_۴-۲r_۳+t}{۲(r_۴-r_۳)}, & r_۳ \leq t \leq r_۴ \\ \dfrac{۱}{۲}, & r_۲ \leq t \leq r_۳ \\ \dfrac{t-r_۱}{۲(r_۲-r_۱)}, & r_۱ \leq t \leq r_۲ \\ ۰, & o.w \end{cases}$$

تعریف ۳.۴.۲. یک متغیر فازی ξ، متغیر فازی نرمال نامیده می‌شود، اگر تابع عضویت نرمال داشته باشد.(شکل ۳.۲)



شکل ۳.۲: تابع عضویت نرمال

$$\mu(t) = ۲\left(۱+\exp\left(\frac{\pi|t-e|}{\sqrt{۶}\sigma}\right)\right)^{-۱}, \quad t \in R, \quad \sigma > ۰.$$

تعریف ۴.۴.۲. توزیع اعتبار [۱۳] $\Phi : \mathbb{R} \to [۰,۱]$ از متغیر فازی ξ توسط لیو [۱۴] در [۲۰] به صورت زیر تعریف شده است

$$\Phi(r) = \mathrm{Cr}\{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \leq r\} \tag{۶.۲}$$

[۱۳] Credibility Distribution

[۱۴] Liu

داریم

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\xi \leq r\} \tag{۷.۲}$$

قضیه ۵.۴.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است و نقطه‌ی $x_\circ$ موجود باشد به طوری که $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_\circ)$ صعودی و در بازه $(x_\circ, \infty)$ نزولی باشد. در این صورت داریم

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\xi \leq r\} = \begin{cases} \dfrac{\mu(r)}{۲} & r \leq x_\circ \\ ۱ - \dfrac{\mu(r)}{۲} & r > x_\circ \end{cases} \tag{۸.۲}$$

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \begin{cases} ۱ - \dfrac{\mu(r)}{۲} & r \leq x_\circ \\ \dfrac{\mu(r)}{۲} & r > x_\circ \end{cases} \tag{۹.۲}$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{۱}{۲}\left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + ۱ - \sup_{x > r} \mu(x)\right] &= \begin{cases} \dfrac{۱}{۲}(\mu(r) + ۱ - ۱) & r \leq x_\circ \\ \dfrac{۱}{۲}(۱ + ۱ - \mu(r)) & r > x_\circ \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\mu(r)}{۲} & r \leq x_\circ \\ ۱ - \dfrac{\mu(r)}{۲} & r > x_\circ \end{cases} \end{aligned}$$

اثبات رابطه (۹.۲) نیز به‌صورت مشابه می‌باشد.

□

۵.۲ امید ریاضی در محیط فازی

تعریف ۱.۵.۲. امید ریاضی [۱۵] متغیر فازی ξ توسط لیو در [۱۹] به صورت زیر تعریف شده است

$$E[\xi] = \int_\circ^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{\circ} \text{Cr}\{\xi \leq r\}\mathrm{d}r \tag{۱۰.۲}$$

به شرط آن‌که حداقل یکی از انتگرال‌ها متناهی باشد.

[۱۵] Expected Value

قضیه ۲.۵.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است. اگر امید ریاضی آن وجود داشته باشد و نقطه‌ی $x_\circ$ موجود باشد به طوری که $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_\circ)$ صعودی و در بازه $(x_\circ, \infty)$ نزولی باشد در این صورت می‌توان امید ریاضی آن را به‌صورت زیر بدست آورد

$$E[\xi] = x_\circ + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{x_\circ} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \qquad (۱۱.۲)$$

اثبات. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید که $x_\circ \geq \circ$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= \int_\circ^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\}\mathrm{d}r \\
&= \int_\circ^{x_\circ} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r + \int_{x_\circ}^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\}\mathrm{d}r \\
&= \int_\circ^{x_\circ} \left(۱ - \frac{\mu(r)}{۲}\right)\mathrm{d}r + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= x_\circ - \int_\circ^{x_\circ} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= x_\circ + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{x_\circ} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a + ۲b + c}{۴} \qquad (۱۲.۲)$$

اثبات. باتوجه به رابطه (۱.۲) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, b)$ صعودی و در بازه (b, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه ۲.۵.۲ داریم

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= b + \int_b^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^b \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= b + \frac{۱}{۲}\int_b^c \frac{r - c}{b - c}\mathrm{d}r - \frac{۱}{۲}\int_a^b \frac{r - a}{b - a}\mathrm{d}r \\
&= b + \frac{c - b}{۴} - \frac{b - a}{۴} \\
&= \frac{a + ۲b + c}{۴}
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۴.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a+b+c+d}{۴} \tag{۱۳.۲}$$

اثبات. باتوجه به رابطه (۲.۲) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, c)$ صعودی و در بازه (c, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۲.۵.۲) داریم

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= c + \int_c^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{c} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= c + \frac{۱}{۲}\int_c^d \frac{r-d}{c-d}\mathrm{d}r - \frac{۱}{۲}\int_a^b \frac{r-a}{b-a}\mathrm{d}r - \frac{۱}{۲}\int_b^c \mathrm{d}r \\
&= b + \frac{d-c}{۴} - \frac{b-a}{۴} - \frac{c-b}{۲} \\
&= \frac{a+b+c+d}{۴}
\end{aligned}$$

□

تعریف ۵.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی با $E[\xi]$ متناهی باشد. واریانس ξ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^۲] \tag{۱۴.۲}$$

۶.۲ ارزش در معرض ریسک در محیط فازی

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می‌تواند به‌عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب پرتفوی استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در محیط فازی ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۶.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\beta \in (۰, ۱]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\mathrm{VaR} : (۰, ۱] \to \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\mathrm{VaR}(\beta) = -\sup\{x \mid \mathrm{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \tag{۱۵.۲}$$

قضیه ۲.۶.۲. برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (۰, ۱]$ داریم

$$\mathrm{VaR}(\beta) = -\Phi^{-۱}(\beta) \tag{۱۶.۲}$$

اثبات.

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}(\beta) &= -\sup\{x \mid \mathrm{Cr}\{\xi \le x\} \le \beta\}\\ &= \inf\{-x \mid \Phi(x) \le \beta\}\\ &= \inf\{-x \mid x \le \Phi^{-1}(\beta)\}\\ &= \inf\{-x \mid -x \ge -\Phi^{-1}(\beta)\}\\ &= -\Phi^{-1}(\beta)\end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۶.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\mathrm{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2\beta(a-b)-a & 0 < \beta \le \frac{1}{2}\\ 2\beta(b-c)+c-2b & \frac{1}{2} \le \beta < 1\end{cases} \tag{۱۷.۲}$$

اثبات. با استفاده از (۱.۲) و قضیه (۵.۴.۲) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \le a\\ \dfrac{r-a}{2(b-a)} & a \le r \le b\\ \dfrac{2b-r-c}{2(b-c)} & b \le r \le c\\ 1 & r \ge c\end{cases} \tag{۱۸.۲}$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} 2r(b-a)+a & 0 < r \le \frac{1}{2}\\ 2r(c-b)+2b-c & \frac{1}{2} \le r < 1\end{cases} \tag{۱۹.۲}$$

که با استفاده از قضیه (۲.۶.۲) اثبات تمام است □

نتیجه ۴.۶.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\mathrm{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2\beta(a-b)-a & 0 < \beta \le \frac{1}{2}\\ 2\beta(c-d)+d-2c & \frac{1}{2} \le \beta < 1\end{cases} \tag{۲۰.۲}$$

اثبات. با استفاده از (۲.۲) و قضیه (۵.۴.۲) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} ۰ & r \leq a \\ \dfrac{r-a}{۲(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \frac{۱}{۲} & b \leq r \leq c \\ \dfrac{۲c-d-r}{۲(c-d)} & c \leq r \leq d \\ ۱ & r \geq d \end{cases} \tag{۲۱.۲}$$

در نتیجه

$$\Phi^{-۱}(r) = \begin{cases} ۲r(b-a)+a & ۰ < r \leq \frac{۱}{۲} \\ ۲r(d-c)+۲c-d & \frac{۱}{۲} \leq r < ۱ \end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

که با استفاده از قضیه (۲.۶.۲) اثبات تمام است □

۷.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط در محیط فازی

تعریف ۱.۷.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\beta \in (۰,۱]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک مشروط از ξ تابع $\mathrm{CVaR} : (۰,۱] \to \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\mathrm{CVaR}(\beta) = \frac{۱}{۱-\beta}\int_{\beta}^{۱} \mathrm{VaR}(r)\mathrm{d}r \tag{۲۳.۲}$$

نتیجه ۲.۷.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\mathrm{CVaR}(\beta) = \begin{cases} \dfrac{(-۲b-a-c-۴(a-b)\beta^{۲}+۴a\beta)}{۴(۱-\beta)} & ۰ < \beta \leq \frac{۱}{۲} \\ (\beta-۱)b-\beta c & \frac{۱}{۲} \leq \beta < ۱ \end{cases} \tag{۲۴.۲}$$

نتیجه ۳.۷.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\mathrm{CVaR}(\beta) = \begin{cases} \dfrac{(-۲b-a-c-۴(a-b)\beta^{۲}+۴a\beta)}{۴(۱-\beta)} & ۰ < \beta \leq \frac{۱}{۲} \\ (\beta-۱)c-\beta d & \frac{۱}{۲} \leq \beta < ۱ \end{cases} \tag{۲۵.۲}$$

فصل ۳

بهینه‌سازی مسئله‌های انتخاب پرتفوی فازی با استفاده از برنامه‌ریزی پارامتری درجه دوم

۱.۳ مقدمه

مساله انتخاب پرتفوی اولین بار توسط مارکو ویتز [۲۲] در سال ۱۹۵۲ مطرح شد و روش میانگین- واریانس از آن موقع به عنوان ابزاری عملی جهت بهینه‌سازی پرتفوی به طور گسترده پذیرفته شده است. کاربرد شبه واریانس بیش از واریانس در قالب اندازه ریسک نیز توسط مارکو ویتز [۲۳] در سال ۱۹۵۹ مطرح شد. از آن به بعد چندین معیار ریسک جدید دیگر در متون پرتفوی ثبت شده است، مثلا کونو و یاماکازی [۱۷] در سال ۱۹۹۱ خطر سرمایه‌گذاری را از طریق انحراف معیار مطلق اندازه گرفتند و مدل‌های میانگین- انحراف مطلق را ارایه دادند. جوریون [۱۴] در سال ۱۹۹۶ ارزش در معرض خطر VaR را به عنوان معیار اندازه گیری ریسک بررسی کرد و مدل میانگین VaR را در صنعت مالی اجرا کرد. راکافلار و یوریاسر [۳۱] در سال ۲۰۰۰ خطر سرمایه گذاری را با به حداقل رساندن ارزش در معرض ریسک شرطی کاهش دادند و مدل میانگین CVaR را ایجاد کردند.

روش‌های متداول پرتفوی نیازمند سود اوراق بهادار متغیرهای تصادفی هستند و نظریه احتمال ابزار اصلی تحقیق است. با وجود این گاهی اوقات ارزش های مشاهده شده در سود سهام در مسایل دنیای واقعی گنگ و مبهم هستند. ارزیابی‌های مبهم ممکن است به خاطر اطلاعات غیر قابل اندازه‌گیری، ناقص و غیر قابل دسترس باشد. بر اساس نظریه فازی توسط پروفسور زاده در سال ۱۹۶۵ و ۱۹۷۸ و لیو در سال ۲۰۰۴ [۳۶، ۳۸، ۱۸] منتشر شد. برخی از محققین روش‌های فازی متفاوتی برای غلبه کردن بر

ابهام و مبهم بودن انتخاب پرتفوی ارایه داده‌اند. مثلا آرناس_ پارا و دیگر همکارانش [۵] در سال ۲۰۰۱ مناسب‌ترین پرتفوی را برای یک سرمایه گذار خصوصی با احتساب سه معیار مورد بحث قرار دادند که عبارتند از: سود، ریسک و نقدینگی؛ چن و همکارانش [۸] در سال ۲۰۰۹ مدلی برای انتخاب پرتفوی با توجه به میانگین احتمالی واریانس ارایه دادند و آن را به وسیله الگوریتم برش مسطح حل کردند.

هوانگ [۱۲] در سال ۲۰۰۹ بررسی مفصلی در مورد انتخاب پرتفوی فازی بر اساس میزان اعتبار انجام داد؛ دوآن و استاهلکر [۱۰] در سال ۲۰۱۱ مساله انتخاب پرتفوی راکد را بررسی کردند، که در آن بازده‌های آتی اوراق بهادار به عنوان مجموعه‌های فازی در نظر گرفته شده‌اند. وو به همراه لیو [۳۴] در سال ۲۰۱۱ روش میانگین_ سود را برای بهینه‌سازی مسایل انتخاب پرتفوی مطرح کردند تا از مشکل محاسبه واریانس متغیر فازی اجتناب کنند.

پروفسور زاده [۳۷] در سال ۱۹۷۵ برای اولین بار در جامعه فازی، مفهوم یک مجموعه فازی نوع دو را در قالب توسعه یک مجموعه فازی معمولی مطرح کرد که یک مجموعه فازی نوع دو با تابع فازی اعضا مشخص می شود، و میزان عضویت هریک از اعضا را در مجموعه مذکور عدد فازی در فاصله [۰, ۱] است. پس از آن، نظریه فازی نوع دو پیشرفت چشمگیری داشت، به عنوان مثال میزوموتو و تاناکا [۲۸] در سال ۱۹۷۶ در مورد ساختارهای جبری تحقیق کردند که درجه فازی مجموعه‌های فازی نوع دو تحت عملکرد اتصال و انفصال ایجاد می‌شوند و نشان دادند که درجه‌های فازی عادی و محدب شبکهای توزیعی تحت اتصال و برخورد تشکیل می‌دهند. دوبویز و پراد [۱۱] در سال ۱۹۷۹ عملکردهای مذکور را در منطقی با ارزش فازی به وجود آوردند. کارنیک و مندل [۱۵] در سال ۲۰۰۱ با استفاده از مفهوم مرکز برای یک مجموعه فازی نوع دو، روش فازی سازی را پیشنهاد دادند و مندل و جان [۲۵] در سال ۲۰۰۲ ابراز کردند که یک مجموعه فازی نوع دو در رابطه با نقش عضویت دوم، عدم قطعیت و رد پای نامعلومی را نشان می دهد. میشل [۲۷] در سال ۲۰۰۵ اندازه ای مشابه جهت اندازه‌گیری تشابه و هماهنگی بین دو مجموعه فازی نوع دو معرفی کرد. مندل [۲۶] پیشرفت‌های حائز اهمیت مجموعه و سیستم های فازی نوع یک را در هر دو زمینه کلی و بازه‌ای عنوان کرد. لیو و لیو [۲۱] در سال ۲۰۱۰ فازی بودن نوع دو را در چارچوبی مشخص بررسی کردند که به عنوان نظریه احتمال فازی اشاره می‌شود. چن و ژانگ [۹] در سال ۲۰۱۱ نتایج جدیدی در مورد عددی بودن متغیرهای فازی نوع دو ارائه کردند و همچنین کیون و همکارانش [۲۹، ۳۰] در سال ۲۰۱۱ روش‌های مهم کاهش ارزش و میانگین ارزش برای تابع توزیع احتمالی دوم را مطرح کردند.

در اینجا روش جدیدی برای کاهش EV جهت متغیرهای فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای نوع دو ارایه می‌شود. مسایل مربوط انتخاب پرتفوی را از منظر جدیدی بررسی می‌کنیم، که در آن نتایج فازی از طریق توزیع‌های احتمالی پارامتری تعیین می‌شوند. سهام قرضه را می‌توان در برخورد با فازی بودن نوع دو موجود در مسایل انتخابی پرتفوی با توزیع‌های احتمالی پارامتری نشان داد که با کاربرد روشهای کاهشی EV بدست می آیند.

مدل های بازده_ ریسک و ریسک_ بازده بر اساس گشتاورهای دوم متغیرهای فازی کاهش‌یافته نوع دو ایجاد شده‌اند تا به مسایل بهینه‌سازی پرتفوی فازی بپردازد. در مدل‌های مذکور، سود سرمایه گذاری با ارزش عددی پیش‌بینی شده نشان داده می‌شود، ولی ریسک سرمایه‌گذاری با گشتاور دوم

یک پرتفوی تعیین می‌شود. خواص ریاضی مدل‌های بهینه‌سازی مطرح شده، از جمله بازنمودهای تحلیلی گشتاورهای دوم مربوط به ترکیبات خطی متغیرهای فازی کاهش‌یافته و نیز تحدب گشتاورهای دوم با توجه به بردارهای تصمیم بررسی می‌شوند. به کار بردن بازنمودهای تحلیلی برای گشتاورهای دوم مذکور، یعنی مدل‌های ریسک‑ بازده و بازده‑ ریسک می‌توانند به مشکلات برنامه‌نویسی معادل پارامتری درجه دوم محدبشان تبدیل شوند، که با الگوریتم‌های عددی متداول یا نرم‌افزار کل‑ هدف قابل حل هستند. برخی از نتایج عددی جهت نشان دادن نظرات مدلی ذکر شده و کارایی روش راه حلشان عنوان می‌شوند.

در ادامه در بخش ۵.۳ برای متغیرهای رایج فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای نوع دو توزیع‌های احتمالی و پارامتری متغیرهای فازی کاهه‌یافته را به دست می‌آوریم و در بخش ۶.۳ فرمول‌های گشتاور دوم مربوط به متغیرهای فازی کاهش‌یافته را از طریق انتگرال L-S تعیین می‌کنیم و در مورد تحدبشان با توجه به پارامترهای فازی بحث می‌کنیم. در بخش ۱.۷.۳ مدل های بازده‑ ریسک و ریسک‑ بازده را برای مسائل انتخاب فازی پرتفوی ارایه می دهیم. در ۱.۸.۳ به مسائل برنامه‌نویسی معادل پارامتری در رابطه با مدل‌های بهینه‌سازی مطرح شده به همراه روش‌های راه‌حلشان می‌پردازیم.

۲.۳ الگوریتم توده ذرات

۱.۲.۳ هوش گروهی

- آیا موجودات موجود در طبیعت هوشمند هستند؟
- این موجودات که کنار هم قرار می گیرند هوشمندی آنها چگونه است؟
- آیا هوشمندی آنها قابل مدلسازی است؟
- الهام از مجموعه ها و دسته های موجودات زنده
- قابل استفاده در مسائل مهندسی به عنوان راهکارهایی بسیار کارا
  - مورچه ها: ACO
  - پرندگان و ماهی ها: PSO
  - زنبور عسل Bees Algorithm

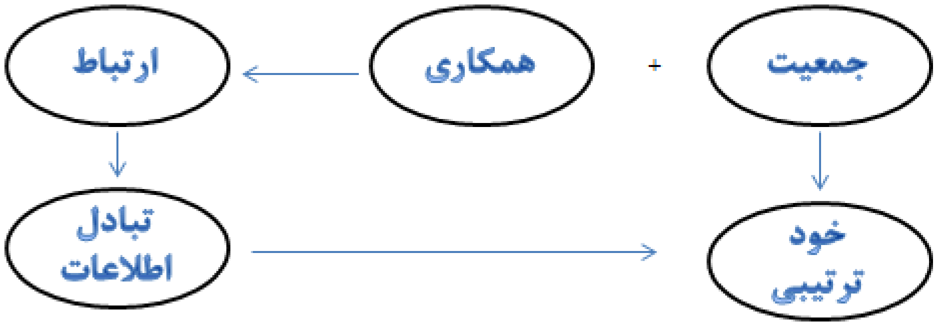
۲.۲.۳ مولفه های اصلی در هوش گروهی

۱. جمعیتی یا ذراتی (به عنوان پاسخهایی برای مسئله) موجود است.

۲. افراد این جمعیت با هم همکاری می کنند.

۳. بین آنها تبادل اطلاعات وجود دارد.

۴. افراد جمعیت خود را با بقیه منظم می‌سازند.



رفتار مورچه‌ها، پرندگان، زنبورها و ... بدین صورت است. با مدلسازی رفتار آنها می‌توان الگوریتم بهینه سازی ارائه داد.

مثال ۱.۲.۳ (مثالی از همکاری). چند نفر منطقه ای را با تجهیزات لازم برای پیدا کردن گنج مورد جستجو قرار می‌دهند.

۳.۲.۳ ایده اصلی

- هر کدام از ذرات به دنبال نقطه بهینه می گردند.
- هر یک از ذرات در هر گام دارای یک سرعت حرکت متفاوت خواهند بود.
- هر ذره مکان بهترین نقطه‌ای که تابحال در آن قرار داشته را به خاطر می‌سپارد.
- بهترین مکانی که تاکنون ذرات به آن دسترسی یافته اند نگهداری می‌شود.
- ذرات لازم است از یکدیگر کمک بگیرند.
- ذرات با هم همکاری می‌کنند و یکدیگر را از مکان‌هایی که جستجو کرده‌اند مطلع می‌سازند.
- همکاری ذرات در PSO استاندارد (که کارایی بسیار خوبی هم دارد) بسیار ساده و به صورت ذیل است:
  - هر ذره با ذراتی که در همسایگی خود قرار دارد، در ارتباط است.

– هر ذره از برازندگی ذراتی که در همسایگی خود قرار دارند مطلع است.

– هر ذره از مکان بهترین ذره‌ای که در همسایگی خود قرار دارد مطلع است.

۴.۲.۳ رفتار هر یک از ذرات

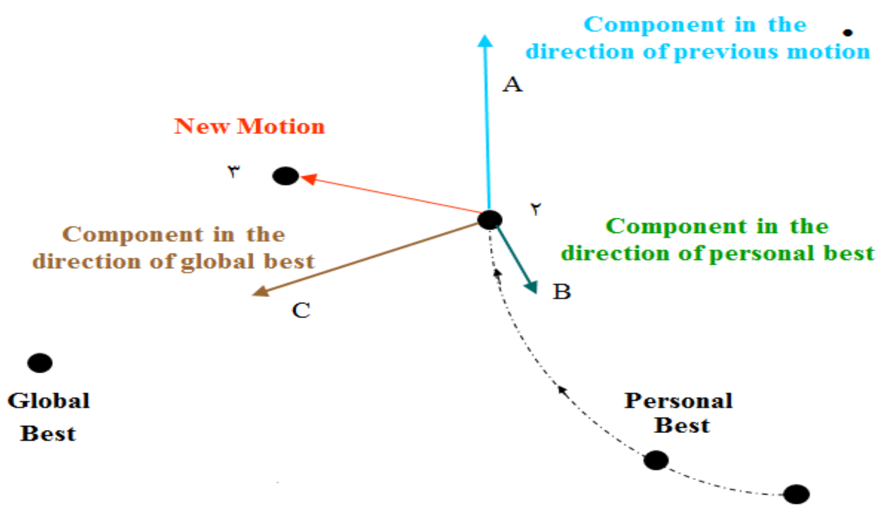
- در هر گام از الگوریتم، هر ذره لازم است مکان خود را طبق بردار سرعتی که دارد، تغییر دهد.
- بردار سرعت هر ذره در هر تکرار به صورت مجموع موارد ذیل به دست می آید:
  – ضریبی تصادفی از بردار سرعت قبلی ذره
  – ضریبی تصادفی از بردار واصل موقعیت فعلی ذره به بهترین موقعیت قبلی ذره
  – ضریبی تصادفی از بردار واصل موقعیت فعلی ذره به موقعیت بهترین ذره در همسایگی

$$v^i(t+1) = wv^i(t) + C_1 r_1 (x^{i,Pbest}(t) - X^i(t)) + C_2 r_2 (x^{gbest}(t) - x^i(t))$$

- به روز رسانی موقعیت ذره با توجه به موقعیت قبلی و بردار سرعت

$$x^i(t+1) = x^i(t) + v^i(t+1)$$

حرکت هر ذره (ایجاد پاسخ جدید)



شکل ۱.۳: حرکت هر ذره (ایجاد پاسخ جدید)

که در شکل بالا بردار A امتداد حرکت ذره و بردار B حرکت ذره در جهت بهترین خاطره شخصی و بردار C حرکت ذره در جهت بهترین خاطره جمعی را نشان می‌دهد.

$$v^i(t+1) = wv^i(t) + C_1 r_1 (x^{i,Pbest}(t) - x^i(t)) + C_2 r_2 (x^{gbest}(t) - x^i(t))$$

معادلات توصیف کننده

$$v^i(t+1) = w\,v^i(t) + C_1 r_1 (\overbrace{x^{i,Pbest}}^{\text{بهترین موقعیت ذره i ام تاکنون}}(t) - \overbrace{x^i(t)}^{\text{موقعیت فعلی}}) + C_2 r_2 (\underbrace{x^{gbest}}_{\text{بهترین موقعیت تمامی ذرات تاکنون}}(t) - x^i(t))$$

$$x^i(t+1) = x^i(t) + v^i(t+1)$$

که در آن

- w وزن اینرسی [1]
- C_1 میزان تأثیر پذیری ذره از بهترین خاطره شخصی [2]
- C_2 میزان تأثیر پذیری ذره از بهترین خاطره جمعی [3]

مراحل الگوریتم PSO

۱. ایجاد جمعیت اولیه و ارزیابی آن

۲. تعیین بهترین تجربه شخصی و بهترین تجربه جمعی

۳. به روز رسانی سرعت ذرات موجود در جمعیت

۴. به روز رسانی موقعیت ذرات موجود در جمعیت (ایجاد پاسخ جدید)

۵. ارزیابی پاسخ های جدید

۶. در صورت برآورده نشدن شرایط توقف رفتن به مرحله ۲

۷. پایان

شرایط توقف

۱. رسیدن به حد قابل قبولی از پاسخ

۲. سپری شدن تعداد تکرار/ زمان مشخص

۳. سپری شدن تعداد تکرار/ زمان مشخص بدون مشاهده بهبود خاصی در نتیجه

[1] Inertia Weight
[2] Personal Learning Coefficient
[3] Global Learning Coefficient

محدود نمودن سرعت

بیشینه سرعت ذره در هر بعد می بایست به $V^i_{\max}$ محدود شود. اگر این مقدار خیلی کم باشد همگرایی کند خواهد شد، اگر خیلی زیاد باشد الگوریتم ناپایدار خواهد شد.

$$\left|V^i_{\max}\right| \leq ۰/۱ \qquad \text{(رنج مجاز تغییرات ذره)}$$

ساختار برنامه

برنامه به پنج مرحله تقسیم می‌گردد

۱. پاک سازی حافظه و صفحه نمایش

۲. پارامترهای الگوریتم بهینه‌سازی

۳. تعیین ذرات اولیه و مقدار دهی اولیه(مقدار دهی اولیه موقعیت و سرعت)

۴. حلقه اصلی

   (آ) بروز رسانی موقعیت تمامی ذرات

   (ب) ارزیابی پاسخ‌ها با توجه به تابع هدف

   (ج) تعیین بهترین پاسخ فردی

   (د) تعیین بهترین پاسخ کلی

   (ه) تعیین سرعت تمامی ذرات

   (و) نمایش نتایج برای تکرار فعلی

   (ز) بررسی شرط خروجی

۵. نتایج(نمودارها، اعلانها و جمع‌بندی)

۳.۳ مسئله انتخاب پرتفوی

با توجه به نظریه نوین پرتفوی، سرمایه‌گذار پرتفوی خود را بر اساس دو معیار بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده انتخاب می‌کند. اگر اوراق بهادار ریسک‌دار باشند مسئله اصلی هر سرمایه گذار تعیین مجموعه اوراق بهاداری است که مطلوبیت آن حداکثر است. این مسئله معادل انتخاب پرتفوی بهینه از مجموع پرتفوی‌های ممکن است، که تحت عنوان مسئله انتخاب پرتفوی نامیده می‌شود. مدل این مسئله در سال ۱۹۵۲ توسط مارکویتز ارائه گردید [۲۲]. مارکویتز بیان می‌کند که سرمایه گذاران بایستی تصمیمات مربوط به پرتفویشان را صرفاً بر مبنای بازده مورد انتظار و انحراف معیار انتخاب نمایند. بدین معنی که سرمایه گذار بایستی بازده مورد انتظار و انحراف معیار هر پرتفوی را تخمین بزند، و سپس بهترین آنها را بر مبنای این پارامتر انتخاب کنند.

۴.۳ مدل مارکویتز (بهینه سازی پرتفوی)

مارکویتز نخستین کسی بود که یک معیار خاص برای ریسک پرتفوی ارائه کرد و بازده مورد انتظار و ریسک یک پرتفوی را استخراج نمود. مدل او بر پایه مشخصه های بازده مورد انتظار و ریسک اوراق بهادار بنا شده و در اصل، یک چارچوب نظری برای تحلیل گزینه های ریسک و بازده است. مدل میانگین واریانس مارکویتز مشهورترین و متداول ترین رویکرد در مسئله انتخاب سرمایه‌گذار است. از برجسته ترین نکات مورد توجه در مدل مارکویتز، توجه به ریسک سرمایه گذاری، نه تنها براساس انحراف معیار یک سهم، بلکه براساس ریسک مجموعه سرمایه گذاری است.

۱ـ سرمایه گذاران ریسک گریزند، و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند و منحنی مطلوبیت نهایی ثروت آنها کاهنده است.

۲ـ سرمایه گذاران پرتفوی خود را بر مبنای میانگین و واریانس مورد انتظار بازدهی انتخاب می‌کنند. بنابراین منحنی‌های بی تفاوتی آنها تابعی از نرخ بازده و و اریانس مورد انتظار است.

۳ـ هر گزینه سرمایه گذاری، تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.

۴ـ سرمایه گذاران افق زمانی « یک دوره‌ای » داشته و این برای همه سرمایه گذاران مشابه است.

۵ـ سرمایه گذاران در یک سطح معینی از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای یک سطح معینی از بازدهی، خواهان کمترین ریسک هستند.

۶ـ سبد سرمایه گذاری کالا سبدی است که در یک سطح معین ریسک، دارای بیشترین بازده است؛ یا دارای کمترین ریسک به ازای یک سطح معین بازده.

اگر سرمایه گذار ، مقداری پول برای سرمایه گذاری بین n سهم داشته باشد، سؤال این است که « مبلغ سرمایه گذاری چگونه بین n ورقه، تخصیص یابد تا پرتفوی حاصله، حداکثر مطلوبیت مورد انتظار را داشته باشد؟ » مارکویتز پیشنهاد میکند که پاسخ سؤال فوق بایستی در دو مرحله انجام پذیرد:

۱ـ تعیین مجموعه پرتفوی کارا

۲ـ انتخاب از مجموعه کارا؛ یعنی انتخاب پرتفویی که مناسب‌ترین ترکیب ریسک و بازده را برای سرمایه گذار فراهم نماید.

برای تعیین یک مجموعه پرتفوی کارا، ضروری است که بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده برای هر پرتفوی را تعیین کنیم.

مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز با ماکزیمم بازده در یک سطح خاصی از ریسک بصورت مدل (۱.۳) می‌شود.

$$
\begin{cases}
\textbf{Max} \quad \mathrm{E}[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \\
\textbf{s.t.} \\
\quad V[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \leq \gamma, \\
\quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\
\quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.
\end{cases}
\tag{۱.۳}
$$

که E، ارزش مورد انتظار، ξ_i بازده اوراق بهادارiام که به عنوان متغیر نامعین در نظر گرفته شده است، و V، واریانس و x_i سهمی از مقدار کل وجوه سرمایه‌گذاری اوراق بهادار i ام و γ بیشترین ریسک سرمایه‌گذاری است.

تعریف ۱.۴.۳. فروش استقراضی به معنای دلالی در بازار سهام می‌باشد، در واقع سرمایه گذار با یک سرمایه قرضی اقدام به خرید سهم می‌کند که در صورت افزایش قیمت سهام در پایان دوره سودی را کسب و قرض را ادا می‌کند.

محدودیت $\sum x_i = ۱$ نشان دهنده این است که تمام بودجه فرد، سرمایه‌گذاری می‌شود.
محدودیت$x_i \geq ۰$ بیانگر وزن‌های مثبت هر دارایی در سبد دارایی بوده که حاکی از عدم وجود فروش استقراضی [۴] می‌باشد.
سرمایه گذارانی که طبق مدل (۱.۳) عمل می‌کنند، ریسک گریز هستند، مدیران ریسک گریز با افزایش سطح ریسک خواهان نرخ بازده بیشتری هستند، از آنجا که این افراد ذاتا برخورد محتاطانه‌ای نسبت به ریسک دارند و از آن می‌ترسند بنابراین برای پذیرش ریسک بیشتر، بازده مورد انتظار بالاتر نیز طلب می‌کنند.
و مدل میانگین ــ واریانس مارکویتز با مینیم کردن واریانس در یک سطح بازده مورد انتظار قابل قبول مانند α بصورت مدل (۲.۳) می‌باشد.

$$\begin{cases} \textbf{Min} \quad V[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{s.t.} \\ \quad E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \geq \alpha, \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۲.۳}$$

و سرمایه‌گذارانی که از مدل (۲.۳) پیروی می‌کنند. ریسک پذیر هستند، آنها با افزایش سطح ریسک خواهان نرخ بازده کمتری هستند، چون از ریسک لذت می‌برند حاضرن مقداری از بازده خود را از دست داده و در مقابل ریسک بیشتری تحمل کنند.
و مدل میانگین ــ واریانس مارکویتز با داشتن دو تابع هدف بصورت مدل (۳.۳) می‌باشد.

[۴] Short sale

$$\begin{cases} \textbf{Max} \quad E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{Min} \quad V[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{s.t.} \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۳.۳}$$

و سرمایه‌گذارانی که از مدل (۳.۳) پیروی می‌کنند. افراد متعادلی هستند. که سطح توقعاتشان بین ریسک‌پذیری و ریسک‌گریزی هستند.

۵.۳ توزیع‌های احتمالی پارامتری مربوط به متغیرهای فازی کاهش‌یافته

توزیع های احتمالی پارامتری مربوط به متغیرهای فازی کاهش یافته: یک متغیر فازی مانند ξ که دارای ارزشی در بازه $[۰, ۱]$ باشد، متغیر فازی منظم نامیده می شود. فرض کنید $\mu_\xi(t)$ یک توزیع احتمالی کلی (نه ضرورتا جزئی) از متغیرهای فازی منظم ξ باشد. در نتیجه برای هر برای هر $t \in [۰, ۱]$، احتمال، ضرورت و اعتبار رویداد فازی $\{\xi \leq t\}$ بدین صورت محاسبه می‌شود.

$$Pos\{\xi \leq t\} = \sup_{۰ \leq u \leq t} \mu_\xi(u), \tag{۴.۳}$$

$$Nec\{\xi \leq t\} = \sup_{۰ \leq u \leq ۱} \mu_\xi(u) - \sup_{t < u \leq ۱} \mu_\xi(u), \tag{۵.۳}$$

و

$$Cr\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}\left(\sup_{۰ \leq u \leq ۱} \mu_\xi(u) + \sup_{۰ \leq u \leq t} \mu_\xi(u) - \sup_{t \leq u \leq ۱} \mu_\xi(u)\right). \tag{۶.۳}$$

اگر توزیع احتمالی $\mu_\xi(t)$ جزئی شده باشد، اعتبار تعریف شده‌ی فوق با مفهوم توصیف شده در لیو و لیو [۱۹] در سال ۲۰۰۲ یکسان خواهد بود.
فرض کنیم ξ یک متغیر فازی منظم با توزیع احتمالی کلی μ_ξباشد بدین ترتیب ارزش معادل بدبینانه PEV [۵] ازطریق انتگرال زیرمحاسبه می شود

$$EV_*[\xi] = \int_{[۰,۱]} td(Pos\{\xi \leq t\}). \tag{۷.۳}$$

در حالی که ارزش معادل بهینه OEV [۶] ξ از طریق انتگرال زیر محاسبه می‌شود

$$EV^*[\xi] = \int_{[۰,۱]} td(Nec\{\xi \leq t\}). \tag{۸.۳}$$

[۵] Pessimistic Equivalent Value
[۶] Optim Equivalent Value

ارزش معادل EV [۷] ξ از طریق انتگرال زیر محاسبه می‌شود

$$EV[\xi] = \int_{[0,1]} td(Cr\{\xi \leq t\}). \tag{۹.۳}$$

سه انتگرال در معادلات (۷.۳)، (۸.۳) و (۹.۳) همگی انتگرال L-S هستند و خواص و روش‌های محاسبه در مورد انتگرال L-S در کتاب کارتر و وان برونت [۷] وجود دارد.

قضیه ۱.۵.۳. [۷] فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی (r_0, α, β) با $\alpha > 0, \beta > 0$. سپس داریم:

$$Sp[\xi] = \frac{1}{48}(5\alpha^2 + 6\alpha\beta + 5\beta^2).$$

اثبات. چون $\xi = (r_0, \alpha, \beta)$ یک متغیر فازی مثلثی است توزیع احتمالی آن برابر

$$\mu(r) = \begin{cases} \frac{r-r_0+\alpha}{\alpha}, & r_0 - \alpha \leq r \leq r_0 \\ \frac{r_0+\beta-r}{\beta}, & r_0 \leq r \leq r_0 + \beta \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

و توزیع اعتبار آن برابر با

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0 - \alpha \\ \frac{r-r_0+\alpha}{2\alpha}, & r_0 - \alpha \leq r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0+\beta-r}{2\beta}, & r_0 \leq r \leq r_0 + \beta \\ 1, & r > r_0 + \beta. \end{cases}$$

مقدار مورد انتظار ξ $E[\xi] = r_0 - (\alpha - \beta)/4$ می باشد[۷] و به‌وسیله m اشاره می‌شود. بنابراین فضای

[۷] Equivalent Value

ξ محاسبه می‌شود با

$$\begin{aligned}
Esp[\xi] &= \int_{(-\infty,+\infty)} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) \\
&= \int_{(-\infty,r_۰-\alpha)} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) + \int_{[r_۰-\alpha,r_۰-\alpha]} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) \\
&\quad + \int_{(r_۰-\alpha,r_۰)} (r-m)^۲ \, d(\frac{r-r_۰+\alpha}{۲\alpha}) \\
&\quad + \int_{[r_۰,r_۰]} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) \\
&\quad + \int_{(r_۰,r_۰+\beta)} (r-m)^۲ \, d(۱-\frac{r_۰+\beta-r}{۲\beta}) \\
&\quad + \int_{[r_۰+\beta,r_۰+\beta]} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) + \int_{[r_۰+\beta,+\infty]} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) \\
&= \int_{(r_۰-\alpha,r_۰)} (r-m)^۲ \frac{۱}{۲\alpha} \, dr + \int_{(r_۰,r_۰+\beta)} (r-m)^۲ \frac{۱}{۲\beta} \, dr \\
&= \int_{[r_۰-\alpha,r_۰]} (r-m)^۲ \frac{۱}{۲\alpha} \, dr + \int_{[r_۰,r_۰+\beta]} (r-m)^۲ \frac{۱}{۲\beta} \, dr \\
&= \frac{۱}{۲\alpha} \int_{r_۰-\alpha}^{r_۰} (r-m)^۲ \, dr + \frac{۱}{۲\beta} \int_{r_۰}^{r_۰+\beta} (r-m)^۲ \, dr \\
&= \frac{۱}{۴۸}(۵\alpha^۲ + ۴\alpha\beta + ۵\beta^۲).
\end{aligned}$$

اثبات قضیه کامل شد. $\square$

قضیه ۲.۵.۳. [۷] فرض کنید $\xi \sim N(m,\sigma)$ یک متغیر فازی نرمال با توزیع احتمال زیر باشد

$$\mu_\xi(r) = \exp(-\frac{(x-m)^۲}{۲\sigma^۲}), \; r \in R$$

جایی‌که پارامتر $m \in \mathbb{R}$ و $\sigma > ۰$. سپس داریم

$$Sp[\xi] = ۲\sigma^۲.$$

اثبات. چون $\xi \sim N(m,\sigma)$ تابع توزیع اعتبار آن به صورت

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲}), & r \leq m \\ ۱ - \frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲}), & r \geq m, \end{cases}$$

و مقدار مورد انتظار دقیقا m است. بنابراین فضای ξ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
Ep[\xi] &= \int_{(-\infty,+\infty)} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) \\
&= \int_{(-\infty,m)} (r-m)^۲ \, d(\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲})) \\
&+ \int_{[m,m]} (r-m)^۲ \, d\Phi(r) \\
&+ \int_{(m,+\infty)} (r-m)^۲ \, d(۱-\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲})) \\
&= \int_{(-\infty,m)} (r-m)^۲ \, d(\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲})) \\
&+ \int_{(m,+\infty)} (r-m)^۲ \, d(۱-\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲})) \\
&= \int_{(-\infty,m]} (r-m)^۲ (\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲}))' \, dr \\
&+ \int_{[m,+\infty)} (r-m)^۲ (۱-\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲}))' \, dr \\
&= \int_{-\infty}^{m} (r-m)^۲ \, d(\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲})) \\
&+ \int_{m}^{+\infty} (r-m)^۲ \, d(-\frac{۱}{۲}\exp(\frac{-(r-m)^۲}{۲\sigma^۲})) \\
&= \sigma^۲(۱-۰) - \sigma^۲(۰-۱) = ۲\sigma^۲.
\end{aligned}$$

اثبات قضیه کامل شد. □

مثال ۳.۵.۳. فرض کنید $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شود با

$$\alpha(x) = \begin{cases} ۰, & \text{if} x < ۱, \\ x^۲ - ۲x + ۲, & \text{if} ۱ \leq x < ۲, \\ ۳, & \text{if} x = ۲, \\ x + ۲, & \text{if} x > ۲ \end{cases}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
\int_{[0,3)} x^2 \, d\alpha =& \int_{[0,1)} x^2 \, d\alpha + \int_{[1,1]} x^2 \, d\alpha + \int_{(1,2)} x^2 \, d\alpha \\
&+ \int_{[2,2]} x^2 \, d\alpha + \int_{(2,3)} x^2 \, d\alpha \\
=& \int_{(0,1)} x^2 \, d\alpha + 1^2(\alpha(1^+) - \alpha(1^-)) + \int_{(2,3)} x^2 \, d(x^2 - 2x + 2) \\
&+ 2^2(\alpha(2^+) - \alpha(2^-)) + \int_{(2,3)} x^2 \, d(x + 2) \\
=& 0 + 1(1 - 0) + \int_{(1,2)} x^2(2x - 2) \, dx + 4(4 - 2) \\
&+ \int_{(2,3)} x^2 1 \, dx \\
=& 1 + \int_{[1,2]} (2x^3 - 2x^2) \, dx + 8 + \int_{[2,3]} x^2 \, dx \\
=& 9 + \int_1^2 (2x^3 - 2x^2) \, dx + \int_2^3 x^2 \, dx \\
=& 9 + [\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3}]_1^2 + [\frac{x^3}{3}]_2^3 = \frac{109}{6}.
\end{aligned}$$

تعریف ۴.۵.۳. متغیر فازی نوع دو متغیری است که با استفاده از روش‌های کاهشی در سه حالت خوش‌بینانه، بدبینانه و حالت تعادلی ابهام و پیچیدگی متغیر فازی را کاهش می‌دهد.

متغیر فازی نوع دو، عدم اطمینان را در رابطه با توزیع احتمالی دوم نشان می‌دهد و این عدم اطمینان را تایید می‌کند. در بخش حاضر روش جدیدی ارائه می‌کنیم تا عدم اطمینان مذکور در توزیع احتمالی دوم کم شود. با روش‌های ارزش بحرانی و کاهش ارزش میانگین توصیف شده توسط کویین و همکارانش [۲۹، ۳۰] درسال ۲۰۱۱ فرق می کند. روش کاهش ارزش معادل EV در پژوهش حاضر به جای انتگرال‌های فازی بر اساس انتگرال قدیمی L-S است.

فرض کنید $\tilde{\xi}$ یک متغیر فازی نوع دو باشد. جهت کاهش عدم اطمینان در توزیع احتمالی دوم، اکنون PEV، OEV و EV مربوط به متغیر فازی منظم $\tilde{Pos}\{\gamma \in \Gamma \mid \tilde{\xi}(\gamma) = t\}$ را به عنوان ارزش نماینده آن درنظر می‌گیریم. روش‌های مذکور به ترتیب به عنوان روش‌های کاهش PEV، OEV و EV نامیده می‌شوند. در بخش‌های بعدی، متغیرهای به دست آمده از طریق سه روش کاهش EV، متغیرهای کاهش یافته فازی نامیده می‌شوند. یک متغیر فازی نوع دو مانند $\tilde{\xi}$ ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود اگر توزیع احتمالی دومش یعنی $\tilde{\mu}_{\tilde{\xi}}(t)$ متغیر فازی منظم باشد.

$$\left(\frac{t - r_1}{r_2 - r_1} - \theta_1 \min\left\{\frac{t - r_1}{r_2 - r_1}, \frac{r_2 - t}{r_2 - r_1}\right\}, \frac{t - r_1}{r_2 - r_1}, \frac{t - r_1}{r_2 - r_1} + \theta_r \min\left\{\frac{t - r_1}{r_2 - r_1}, \frac{r_2 - t}{r_2 - r_1}\right\}\right) \tag{10.3}$$

برای $t \in [r_۱, r_۲]$، متغیر فازی منظم ۱ برای $t \in [r_۲, r_۳]$، و متغیر فازی منظم

(۱۱.۳)
$$\left(\frac{r_۴ - t}{r_۴ - r_۳} - \theta_l \min\left\{\frac{r_۴ - t}{r_۴ - r_۳}, \frac{t - r_۳}{r_۴ - r_۳}\right\}, \frac{r_۴ - t}{r_۴ - r_۳}, \frac{r_۴ - t}{r_۴ - r_۳} + \theta_r \min\left\{\frac{r_۴ - t}{r_۴ - r_۳}, \frac{t - r_۳}{r_۴ - r_۳}\right\}\right)$$

برای $t \in [r_۳, r_۴]$، که $\theta_l, \theta_r \in [۰, ۱]$، دو پارامتری هستند که میزان عدم اطمینان را مشخص می‌کنند، زمانی که $\tilde{\xi}$ ارزش t را دارد. $\tilde{\xi}$ متغیر فازی ذوزنقه‌ای نوع دو با توزیع احتمالی دوم بالا را به وسیله‌ی $(\widetilde{r_۱}, \widetilde{r_۲}, \widetilde{r_۳}, \widetilde{r_۴}; \theta_l, \theta_r)$ نشان می‌دهیم.

برای یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای نوع دو $\tilde{\xi}$، متغیرهای فازی نزولی آن، توزیع‌های احتمالی پارامتری زیر را شامل می‌شود:

گزاره ۵.۵.۳. فرض کنید $\tilde{\xi} = (\widetilde{r_۱}, \widetilde{r_۲}, \widetilde{r_۳}, \widetilde{r_۴}; \theta_l, \theta_r)$ متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد، و ξ_*، ξ^* و ξ متغیرهای فازی نزولی‌اش به ترتیب با روش‌های PEV، OEV و EV بدست آیند، در نتیجه توزیع‌های زیر را داریم

الف) توزیع احتمالی پارامتری ξ_* بدین صورت است

$$\mu_{\xi_*}(t;\theta_l) = \begin{cases} \frac{(۲-\theta_l)(t-r_۱)}{۲(r_۲-r_۱)}, & r_۱ \le t \le \frac{r_۱+r_۲}{۲} \\ \frac{(۲+\theta_l)t-\theta_l r_۲-۲r_۱}{۲(r_۲-r_۱)}, & \frac{r_۱+r_۲}{۲} \le t \le r_۲ \\ ۱, & r_۲ \le t \le r_۳ \\ \frac{(-۲-\theta_l)t+\theta_l r_۳+۲r_۴}{۲(r_۴-r_۳)}, & r_۳ \le t \le \frac{r_۳+r_۴}{۲} \\ \frac{(۲-\theta_l)(r_۴-t)}{۲(r_۴-r_۳)}, & \frac{r_۳+r_۴}{۲} \le t \le r_۴, \end{cases}$$

و $\xi_* = (r_۱, r_۲, r_۳, r_۴; h_*(\theta_l))$، که در آن

$$h_*(\theta_l) = \mu_{\xi_*}\left(\frac{r_۱+r_۲}{۲};\theta_l\right) = \mu_{\xi_*}\left(\frac{r_۳+r_۴}{۲};\theta_l\right) = \frac{۲-\theta_l}{۴}$$

ب) توزیع احتمالی پارامتری ξ^* بدین صورت است

$$\mu_{\xi^*}(t;\theta_r) = \begin{cases} \frac{(۲+\theta_r)(t-r_۱)}{۲(r_۲-r_۱)}, & r_۱ \le t \le \frac{r_۱+r_۲}{۲} \\ \frac{(۲-\theta_r)t-\theta_r r_۲-۲r_۱}{۲(r_۲-r_۱)}, & \frac{r_۱+r_۲}{۲} \le t \le r_۲ \\ ۱, & r_۲ \le t \le r_۳ \\ \frac{(\theta_r-۲)t-\theta_r r_۳+۲r_۴}{۲(r_۴-r_۳)}, & r_۳ \le t \le \frac{r_۳+r_۴}{۲} \\ \frac{(۲+\theta_r)(r_۴-t)}{۲(r_۴-r_۳)}, & \frac{r_۳+r_۴}{۲} \le t \le r_۴, \end{cases}$$

و $\xi^* = (r_۱, r_۲, r_۳, r_۴; h^*(\theta_r))$، که در آن

$$h^*(\theta_r) = \mu_{\xi^*}\left(\frac{r_۱+r_۲}{۲};\theta_r\right) = \mu_{\xi^*}\left(\frac{r_۳+r_۴}{۲};\theta_r\right) = \frac{۲+\theta_r}{۴}.$$

پ) توزیع احتمالی پارامتری ξ بدین صورت است

$$\mu_\xi(t;\theta_l,\theta_r)=\begin{cases}\frac{(4+\theta_r-\theta_l)(t-r_1)}{4(r_2-r_1)}, & r_1\le t\le \frac{r_1+r_2}{2}\\ \frac{(4-\theta_r+\theta_l)t+(\theta_r-\theta_l)r_2-4r_1}{4(r_2-r_1)}, & \frac{r_1+r_2}{2}\le t\le r_2\\ 1, & r_2\le t\le r_3\\ \frac{(-4+\theta_r-\theta_l)t-(\theta_r-\theta_l)r_3+4r_4}{4(r_4-r_3)}, & r_3\le t\le \frac{r_3+r_4}{2}\\ \frac{(4+\theta_r-\theta_l)(r_4-t)}{4(r_4-r_3)}, & \frac{r_3+r_4}{2}\le t\le r_4,\end{cases}$$

و $\xi=(r_1,r_2,r_3,r_4;h(\theta_l,\theta_r))$، که در آن

$$h(\theta_l,\theta_r)=\mu_\xi\left(\frac{r_1+r_2}{2};\theta_l,\theta_r\right)=\mu_\xi\left(\frac{r_3+r_4}{2};\theta_l,\theta_r\right)=\frac{4+\theta_r-\theta_l}{8}.$$

اثبات. تنها ادعای اول را اثبات می‌کنیم و سایر ادعاها به همین صورت قابل اثبات هستند.
چون ξ_* متغیر فازی نزولی $\tilde{\xi}$ با استفاده از روش PEV می‌باشد، توزیع احتمالی پارامتری $\mu_{\xi_*}(t;\theta_l)$ با استفاده از معادلات (۱۰.۳) و (۱۱.۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود

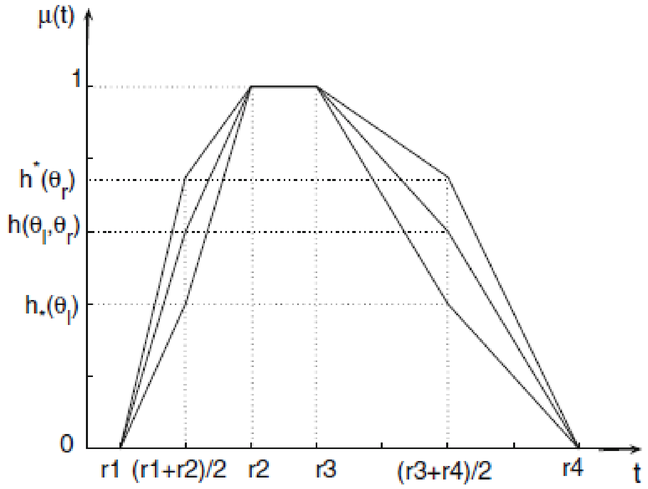
$$\begin{aligned}\mu_{\xi_*}(t;\theta_l)&=Pos\{\xi_*=t\}\\&=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(2\frac{t-r_1}{r_2-r_1}-\theta_l\min\left\{\frac{t-r_1}{r_2-r_1},\frac{r_2-t}{r_2-r_1}\right\}\right), & r_1\le t\le r_2\\ 1, & r_2\le t\le r_3\\ \frac{1}{2}\left(2\frac{r_4-t}{r_4-r_3}-\theta_l\min\left\{\frac{r_4-t}{r_4-r_3},\frac{t-r_3}{r_4-r_3}\right\}\right), & r_3\le t\le r_4\end{cases}\\&=\begin{cases}\frac{(2-\theta_l)(t-r_1)}{2(r_2-r_1)}, & r_1\le t\le\frac{r_1+r_2}{2}\\ \frac{(2+\theta_l)t-\theta_l r_2-2r_1}{2(r_2-r_1)}, & \frac{r_1+r_2}{2}\le t\le r_2\\ 1, & r_2\le t\le r_3\\ \frac{(-2-\theta_l)t+\theta_l r_3+2r_4}{2(r_4-r_3)}, & r_3\le t\le\frac{r_3+r_4}{2}\\ \frac{(2-\theta_l)(r_4-t)}{2(r_4-r_3)}, & \frac{r_3+r_4}{2}\le t\le r_4,\end{cases}\end{aligned}$$

که اثبات ادعای (الف) را کامل می‌کند. □

نتیجه ۶.۵.۳. فرض کنید $\tilde{\xi}$ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد. در نتیجه توزیع‌های احتمالی پارامتری $\mu_{\xi_*}(t;\theta_l)$، $\mu_{\xi^*}(t;\theta_r)$ و $\mu_\xi(t;\theta_l,\theta_r)$ همانطور که در شکل ۲.۳ نشان داده شده است، در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$\mu_{\xi^*}(t;\theta_r)\ge\mu_\xi(t;\theta_l,\theta_r)\ge\mu_{\xi_*}(t;\theta_l). \qquad (۱۲.۳)$$

به عنوان نتیجه‌ی گزاره ۵.۵.۳ متغیرهای فازی نزولی مربوط به متغیر فازی مثلثی نوع دو، دارای توزیع‌های احتمالی پارامتری زیر هستند.



شکل ۲.۳: رابطه بین توزیع‌های احتمالی پارامتری ξ_*، ξ^* و ξ

نتیجه ۷.۵.۳. فرض کنید $\widetilde{\xi} = (\widetilde{r_1}, \widetilde{r_2}, \widetilde{r_3}; \theta_l, \theta_r)$ یک متغیر فازی مثلثی نوع دو باشد و ξ_*، ξ^* و ξ متغیرهای فازی نزولی آن به ترتیب از طریق روش‌های PEV، OEV و EV بدست آیند. در این صورت داریم

الف) توزیع احتمالی پارامتری ξ_* عبارت است از

$$\mu_{\xi_*}(t;\theta_l) = \begin{cases} \frac{(2-\theta_l)(t-r_1)}{2(r_2-r_1)}, & r_1 \le t \le \frac{r_1+r_2}{2} \\ \frac{(2+\theta_l)t-\theta_l r_2-2r_1}{2(r_2-r_1)}, & \frac{r_1+r_2}{2} \le t \le r_2 \\ \frac{(-2-\theta_l)t+\theta_l r_2+2r_3}{2(r_3-r_2)}, & r_2 \le t \le \frac{r_2+r_3}{2} \\ \frac{(2-\theta_l)(r_3-t)}{2(r_3-r_2)}, & \frac{r_2+r_3}{2} \le t \le r_3, \end{cases}$$

و $\xi_* = (r_1, r_2, r_3; h_*(\theta_l))$، که در آن

$$h_*(\theta_l) = \mu_{\xi_*}\left(\frac{r_1+r_2}{2};\theta_l\right) = \mu_{\xi_*}\left(\frac{r_2+r_3}{2};\theta_l\right) = \frac{2-\theta_l}{4}.$$

ب) توزیع احتمالی پارامتری ξ^* عبارت است از

$$\mu_{\xi^*}(t;\theta_r) = \begin{cases} \frac{(2+\theta_r)(t-r_1)}{2(r_2-r_1)}, & r_1 \le t \le \frac{r_1+r_2}{2} \\ \frac{(2-\theta_r)t-\theta_r r_2-2r_1}{2(r_2-r_1)}, & \frac{r_1+r_2}{2} \le t \le r_2 \\ \frac{(\theta_r-2)t-\theta_r r_2+2r_3}{2(r_3-r_2)}, & r_2 \le t \le \frac{r_2+r_3}{2} \\ \frac{(2+\theta_r)(r_3-t)}{2(r_3-r_2)}, & \frac{r_2+r_3}{2} \le t \le r_3, \end{cases}$$

و $\xi^* = (r_1, r_2, r_3; h^*(\theta_r))$، که در آن

$$h^*(\theta_r) = \mu_{\xi^*}\left(\frac{r_1+r_2}{2};\theta_r\right) = \mu_{\xi^*}\left(\frac{r_2+r_3}{2};\theta_r\right) = \frac{2+\theta_r}{4}.$$

پ) توزیع احتمالی پارامتری ξ عبارت است از

$$\mu_\xi(t;\theta_l,\theta_r)=\begin{cases}\frac{(۴+\theta_r-\theta_l)(t-r_۱)}{۴(r_۲-r_۱)}, & r_۱\le t\le \frac{r_۱+r_۲}{۲}\\ \frac{(۴-\theta_r+\theta_l)t+(\theta_r-\theta_l)r_۲-۴r_۱}{۴(r_۲-r_۱)}, & \frac{r_۱+r_۲}{۲}\le t\le r_۲\\ \frac{(-۴+\theta_r-\theta_l)t-(\theta_r-\theta_l)r_۲+۴r_۳}{۴(r_۳-r_۲)}, & r_۲\le t\le \frac{r_۲+r_۳}{۲}\\ \frac{(۴+\theta_r-\theta_l)(r_۳-t)}{۴(r_۳-r_۲)}, & \frac{r_۲+r_۳}{۲}\le t\le r_۳,\end{cases}$$

و $\xi=(r_۱,r_۲,r_۳;h(\theta_l,\theta_r))$، که در آن

$$h(\theta_l,\theta_r)=\mu_\xi\left(\frac{r_۱+r_۲}{۲};\theta_l,\theta_r\right)=\mu_\xi\left(\frac{r_۲+r_۳}{۲};\theta_l,\theta_r\right)=\frac{۴+\theta_r-\theta_l}{۸}.$$

برای متغیرهای فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای نوع دو، گزاره ۵.۵.۳ و نتیجه ۷.۵.۳ نشان می‌دهند که متغیرهای فازی نزولی آن‌ها یعنی ξ_*، ξ^* و ξ به وسیله‌ی توزیع‌های احتمالی پارامتری تعیین می‌شوند، یعنی، توزیع‌های احتمالی آن‌ها به پارامترهای θ_l و θ_r بستگی دارد. به عنوان نتیجه، یک متغیر فازی نزولی نسبت به یک متغیر فازی معمولی هنگام استفاده در مسائل تصمیم‌گیری در دنیای واقعی تحت عدم اطمینان، انعطاف‌پذیرتر است.

۶.۳ گشتاورهای متغیرهای فازی نزولی

فرض کنید ξ یک متغیر فازی نزولی با توزیع احتمالی پارامتری $\mu_\xi(t;\theta)$باشد. برای اندازه‌گیری تغییرات توزیع احتمالی پارامتری در مقدار امید ریاضی $E[\xi]$، شاخص زیر را در در nـ امین گشتاور ξ در نظر می‌گیریم [۳۵]

$$M_n[\xi]=\int_{(-\infty,+\infty)}(t-E[\xi])^n d(Cr\{\xi\le t\}), \qquad (۱۳.۳)$$

که توزیع باورمندی به وسیله‌ی توزیع احتمالی پارامتری $\mu_\xi(u;\theta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Cr\{\xi\le t\}=\frac{۱}{۲}\left(\sup_{u\in\mathbb{R}}\mu_\xi(u;\theta)+\sup_{u\le t}\mu_\xi(u;\theta)-\sup_{u>t}\mu_\xi(u;\theta)\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$

علاوه بر این انتگرال در معادله‌ی شماره (۱۳.۳)، انتگرال L-S است. زمانی که $n=۲$، $M_۲[\xi]$ گشتاور دوم ξ نامیده می‌شود. در ادامه فرمول‌های گشتاور دوم برای متغیرهای فازی نزولی را تعریف می‌کنیم.ابتدا نتایج زیر را در مورد متغیر فازی ذوزنقه‌ای ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۶.۳. فرض کنید $\tilde{\xi}$ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای نوع دو بصورت $(\widetilde{r_۱},\widetilde{r_۲},\widetilde{r_۳},\widetilde{r_۴};\theta_l,\theta_r)$ باشد و ξ_*، ξ^* و ξ متغیرهای فازی نزولی آن باشند که به ترتیب از طریق روش‌های PEV، OEV و EV به دست آمده‌اند، در نتیجه داریم

الف) گشتاور دوم ξ_* برابر است با

$$\begin{aligned}M_2[\xi_*] &= \frac{1}{48}\left(5r_1^2+5r_2^2+5r_3^2+5r_4^2+2r_1r_2+2r_3r_4-6r_1r_3-6r_1r_4-6r_2r_3-6r_2r_4\right)\\ &\quad -\frac{1}{256}\theta_l^2(r_1-r_2-r_3+r_4)^2-\frac{1}{32}\theta_l(r_1^2-r_2^2-r_3^2+r_4^2+2r_2r_3-2r_1r_4),\end{aligned}$$

که با شکل ماتریسی پارامتری زیر برابر است

$$M_2[\xi_*] = \frac{1}{2}r^TQ_*r,$$

که در آن $r=(r_1,r_2,r_3,r_4)^T$ و

$$Q_* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{16}\theta_l+\frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{24} & \frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{16}\theta_l-\frac{1}{8}\\ \frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{16}\theta_l+\frac{5}{24} & -\frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{16}\theta_l-\frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{8}\\ \frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{16}\theta_l-\frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{16}\theta_l+\frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{24}\\ -\frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{16}\theta_l-\frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_l^2+\frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_l^2-\frac{1}{16}\theta_l+\frac{5}{24} \end{bmatrix}$$

ب) گشتاور دوم ξ^* برابر است با

$$\begin{aligned}M_2[\xi^*] &= \frac{1}{48}\left(5r_1^2+5r_2^2+5r_3^2+5r_4^2+2r_1r_2+2r_3r_4-6r_1r_3-6r_1r_4-6r_2r_3-6r_2r_4\right)\\ &\quad -\frac{1}{256}\theta_r^2(r_1-r_2-r_3+r_4)^2+\frac{1}{32}\theta_r(r_1^2-r_2^2-r_3^2+r_4^2+2r_2r_3-2r_1r_4),\end{aligned}$$

که با شکل ماتریسی پارامتری زیر برابر است

$$M_2[\xi^*] = \frac{1}{2}r^TQ^*r,$$

که در آن $r=(r_1,r_2,r_3,r_4)^T$ و

$$Q^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{16}\theta_r+\frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{24} & \frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{16}\theta_r-\frac{1}{8}\\ \frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{16}\theta_r+\frac{5}{24} & -\frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{16}\theta_r-\frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{8}\\ \frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{16}\theta_r-\frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{16}\theta_r+\frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{24}\\ -\frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{16}\theta_r-\frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_r^2-\frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_r^2+\frac{1}{16}\theta_r+\frac{5}{24} \end{bmatrix}$$

پ) گشتاور دوم ξ برابر است با

$$\begin{aligned}M_2[\xi] &= \frac{1}{48}\left(5r_1^2+5r_2^2+5r_3^2+5r_4^2+2r_1r_2+2r_3r_4-6r_1r_3-6r_1r_4-6r_2r_3-6r_2r_4\right)\\ &\quad -\frac{1}{1024}(\theta_r-\theta_l)^2(r_1-r_2-r_3+r_4)^2+\frac{1}{64}(\theta_r-\theta_l)(r_1^2-r_2^2-r_3^2+r_4^2+2r_2r_3-2r_1r_4),\end{aligned}$$

که با شکل ماتریسی پارامتری زیر برابر است

$$M_2[\xi] = \frac{1}{2} r^T Q r,$$

که در آن $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$ و عناصر ماتریس متقارن Q عبارتند از

$$\begin{aligned}
Q_{11} = Q_{44} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24},\\
Q_{12} = Q_{34} &= \frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{24},\\
Q_{13} = Q_{24} &= \frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{8},\\
Q_{14} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8},\\
Q_{22} = Q_{33} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24},\\
Q_{23} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

علاوه بر این زمانی که بردار $r \in \mathbb{R}^4$، گشتاورهای دوم $M_2[\xi_*]$، $M_2[\xi^*]$ و $M_2[\xi]$ توابع محدب درجه دوم پارامتری هستند.

اثبات. تنها ادعای (پ) را ثابت می‌کنیم و سایر ادعاها به صورت مشابه اثبات می‌شوند.

از آنجا که ξ متغیر فازی نزولی بدست آمده از طریق روش EV است، توزیع احتمالی پارامتری آن $\mu_\xi(t;\theta_l,\theta_r)$ با توجه به ادعای (پ) از گزاره ۵.۵.۳ بدست می‌آید. در نتیجه توزیع باورمندی ξ برابر است با

$$Cr\{\xi \le t\} = \begin{cases}
0, & t < r_1\\
\frac{(4+\theta_r-\theta_l)(t-r_1)}{8(r_2-r_1)}, & r_1 \le t \le \frac{r_1+r_2}{2}\\
\frac{(4-\theta_r+\theta_l)t+(\theta_r-\theta_l)r_2-4r_1}{8(r_2-r_1)}, & \frac{r_1+r_2}{2} \le t \le r_2\\
\frac{1}{2}, & r_2 \le t \le r_3\\
1 - \frac{(-4+\theta_r-\theta_l)t-(\theta_r-\theta_l)r_3+4r_4}{8(r_4-r_3)}, & r_3 \le t \le \frac{r_3+r_4}{2}\\
1 - \frac{(4+\theta_r\theta_l)(r_4-t)}{8(r_4-r_3)}, & \frac{r_3+r_4}{2} \le t \le r_4\\
1, & t > r_4,
\end{cases}$$

و مقدار امید ξ برابر است با

$$E[\xi] = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l)(r_1 - r_2 - r_3 + r_4),$$

که با m نشان داده می‌شود. بنابراین گشتاور دوم ξ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
M_۲[\xi] &= \int_{(-\infty,+\infty)} (t-m)^۲ d(Cr\{\xi \le t\}) \\
&= \int_{\left(r_۱, \frac{r_۱+r_۲}{۲}\right)} (t-m)^۲ d\left(\frac{(۴+\theta_r-\theta_l)(t-r_۱)}{۸(r_۲-r_۱)}\right) \\
&+ \int_{\left(\frac{r_۱+r_۲}{۲}, r_۲\right)} (t-m)^۲ d\left(\frac{(۴+\theta_r-\theta_l)t+(\theta_r-\theta_l)r_۲-۴r_۱}{۸(r_۲-r_۱)}\right) \\
&+ \int_{\left(r_۳, \frac{r_۳+r_۴}{۲}\right)} (t-m)^۲ d\left(۱-\frac{(-۴+\theta_r-\theta_l)t-(\theta_r-\theta_l)r_۳+۴r_۴}{۸(r_۴-r_۳)}\right) \\
&+ \int_{\left(r_۳, \frac{r_۳+r_۴}{۲}\right)} (t-m)^۲ d\left(۱-\frac{(۴+\theta_r-\theta_l)(r_۴-t)}{۸(r_۴-r_۳)}\right) \\
&= \frac{۴+\theta_r-\theta_l}{۸(r_۲-r_۱} \int_{r_۱}^{\frac{r_۱+r_۲}{۲}} (t-m)^۲ dt + \frac{۴-\theta_r+\theta_l}{۸(r_۲-r_۱} \int_{\frac{r_۱+r_۲}{۲}}^{r_۲} (t-m)^۲ dt \\
&- \frac{-۴+\theta_r-\theta_l}{۸(r_۴-r_۳} \int_{r_۳}^{\frac{r_۳+r_۴}{۲}} (t-m)^۲ dt + \frac{۴+\theta_r-\theta_l}{۸(r_۴-r_۳} \int_{\frac{r_۳+r_۴}{۲}}^{r_۴} (t-m)^۲ dt \\
&= \frac{۱}{۲} r^T Q r.
\end{aligned}$$

از طرفی تابع انتگرالده $(t-m)^۲$ و توزیع باورمندی $Cr\{\xi \le t\}$ هر دو غیر منفی هستند، بنابراین رابطه‌ی $M_۲[\xi] \ge ۰$ برای هر $r \in \mathbb{R}^۴$ برقرار است. بعلاوه Q یک ماتریس پارامتری متقارن ۴×۴ است. بنابراین $M_۲[\xi]$ دارای یک صورت مثبت نیمه معین درجه دو است. به عبارت دیگر برای هر پارامتر θ_l و θ_r، گشتاور دوم $M_۲[\xi]$ با توجه به بردار $r \in \mathbb{R}^۴$ یک تابع محدب درجه دو پارامتری است. اثبات قضیه مذکور کامل است. □

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۳.۶.۱، فرمول‌های گشتاور دوم برای متغیرهای فازی نزولی مربوط به متغیرهای فازی مثلثی نوع دو به صورت زیر هستند.

نتیجه ۳.۶.۲. فرض کنید $\tilde{\xi}$ یک متغیر فازی مثلثی نوع دو باشد که به صورت $(\tilde{r_۱}, \tilde{r_۲}, \tilde{r_۳}; \theta_l, \theta_r)$ تعریف می‌شود و ξ_*، ξ^* و ξ متغیرهای فازی نزولی آن باشند که به ترتیب از طریق روش‌های PEV، OEV و EV بدست می‌آیند، بنابراین معادله‌های زیر را داریم

الف) گشتاور دوم ξ_* عبارت است از

$$\begin{aligned}
M_۲[\xi_*] &= \frac{۱}{۴۸}\left(۵r_۱^۲+۴r_۲^۲+۵r_۳^۲-۴r_۱r_۲-۴r_۲r_۳-۶r_۱r_۳\right) \\
&- \frac{۱}{۲۵۶}\theta_l^۲(r_۱-۲r_۲+r_۳)^۲ - \frac{۱}{۳۲}\theta_l(r_۳-r_۱)^۲,
\end{aligned}$$

که با صورت ماتریسی پارامتری زیر برابر است

$$M_۲[\xi_*] = \frac{۱}{۲} r^T R_* r,$$

که در آن $r = (r_1, r_2, r_3)^T$ و

$$R_* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{16}\theta_l + \frac{5}{24} & \frac{1}{64}\theta_l^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{16}\theta_l - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{64}\theta_l^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{32}\theta_l^2 + \frac{1}{6} & \frac{1}{64}\theta_l^2 - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{16}\theta_l - \frac{1}{8} & \frac{1}{64}\theta_l^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{16}\theta_l + \frac{5}{24} \end{bmatrix}.$$

ب) گشتاور دوم ξ^* عبارت است از

$$\begin{aligned} M_2[\xi^*] = \frac{1}{48}\left(5r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 - 4r_1r_2 - 4r_2r_3 - 6r_1r_3\right) \\ - \frac{1}{256}\theta_r^2(r_1 - 2r_2 + r_3)^2 + \frac{1}{32}\theta_r(r_3 - r_1)^2, \end{aligned}$$

که با صورت ماتریسی پارامتری زیر برابر است

$$M_2[\xi^*] = \frac{1}{2}r^T R^* r,$$

که در آن $r = (r_1, r_2, r_3)^T$ و

$$R^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} & \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{32}\theta_r^2 + \frac{1}{6} & \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} & \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} \end{bmatrix}.$$

پ) گشتاور دوم ξ عبارت است از

$$\begin{aligned} M_2[\xi] = \frac{1}{48}\left(5r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 - 4r_1r_2 - 4r_2r_3 - 6r_1r_3\right) \\ - \frac{1}{1024})\theta_r - \theta_l)^2(r_1 - 2r_2 + r_3)^2 + \frac{1}{64}(\theta_r - \theta_l)(r_3 - r_1)^2, \end{aligned}$$

که با صورت ماتریسی پارامتری زیر برابر است

$$M_2[\xi^*] = \frac{1}{2}r^T R r,$$

که در آن $r = (r_1, r_2, r_3)^T$ و

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24} & \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{6} & \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8} & \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24} \end{bmatrix}.$$

بعلاوه، زمانی که $r \in \mathbb{R}^3$، گشتاورهای دوم $M_2[\xi_*]$، $M_2[\xi^*]$ و $M_2[\xi]$ توابع محدب درجه دو هستند.

۷.۳ معیار ریسک گشتاور در بهینه‌سازی پرتفوی

در این بخش، گشتاور دوم را به عنوان اندازه ریسک در نظر می‌گیریم و مدل‌های بازده- ریسک و ریسک- بازده را به بهینه سازی مسائل انتخاب پرتفوی فازی، در حالتی که نتایج فازی به وسیله‌ی توزیع‌های احتمالی پارامتری تعیین می‌شوند، گسترش می‌دهیم. در واقع احتمال فازی تلفیقی از ''احتمال'' و ''فازی'' می‌باشد یعنی احتمال وقوع یک پدیده با شدت خاص، که شدت یا میزان وقوع پدیده در لغت ''فازی'' گنجانده شده‌است.

۱.۷.۳ مدل‌های بازده- ریسک و ریسک- بازده

انتخاب پرتفوی اولین بار توسط مارکویتز (۱۹۵۲) [۲۲] برای مطالعه مسائل چگونگی توزیع سرمایه یک شخص به تعدادی اوراق بهادار بالقوه، به طوری که مبلغ سرمایه‌گذاری شده دارای سود مفیدی باشد، مطرح شد.

به علت پیچیدگی بازار سهام تحت عدم اطمینان، ارزش‌های بررسی شده اوراق قرضه گاهی اوقات در مشکلات دنیای واقعی گنگ و مبهم هستند. جهت برطرف کردن موقعیت حاضر، مشکلات انتخاب پرتفوی فازی مدل مربوطه ارایه شده است که توابع توزیع احتمال ثابت یا توابع عضو اوراق قرضه معمولا دردسترس فرض شده اند (طبق [۱۳] و [۳۴]). روشی قوی جهت برطرف کردن مشکل انتخاب پرتفوی فازی ارایه می‌دهیم. در این روش جهت توصیف اوراق قرضه نزولی، توابع توزیع احتمال پارامتری را به جای توابع توزیع احتمال ثابت به کار می‌بریم و توزیع احتمال پارامتری با روش کاهشی EV برای بازده‌های فازی نوع دو به دست می‌آید. به بیان دیگر بازده‌های فازی نزولی دارای توزیع احتمال پارامتری هستند و می‌توانند به جای نمونه بازده‌های فازی نوع دو به کار روند. وقتی پارامترها در بازه $[0, 1]$ نوسان می‌کنند، توابع توزیعی تمام بازده‌های فازی نوع دو را می‌پوشاند. در ادامه مدلی را ارایه می‌دهیم تا مشکلات انتخاب پرتفوی فازی را تعیین کنیم.

با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از اوراق بهادار بالقوه فهرست شده از ۱ تا n، فرض کنید $\tilde{\xi}_i$ ها در دوره‌ی بعدی بازده‌های فازی نوع دو از اوراق i باشند، یعنی $i = 1, 2, ..., n$. با توجه به توزیع احتمالی نوع دو از بازده های $\tilde{\xi}_i$ از روش نزولی EV استفاده می شود تا بازده های فازی نزولی شان را برای $i = 1, 2, ...n$ به دست آوریم، که با توزیع احتمال پارامتری تعیین می شوند. با استفاده گشتاور دوم بازده‌های فازی نزولی به عنوان معیار ریسک جدید، مدل‌های انتخاب پرتفوی هدفمند را می‌سازیم. فرض کنید سرمایه‌گذاری تمام دارایی خود را در n اوراق بهادار بالقوه سرمایه گذاری می کند، تعداد مثبت x_i نسبت به سهام i سهم سرمایه گذاری به صورت $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ است. به عنوان نتیجه، سود سرمایه‌گذاری با استفاده ازمجموعه ایی که در زیر ارایه شده است به دست می‌آید

$$R(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = \xi^T x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, x_3, ...x_n)^T$ و $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ باشد. بازده مربوط به چنین مجموعه‌ای

با عنوان بازده مورد انتظار به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E[R(x,\xi)] = E\left[\xi^T x\right].$$

توجه کنید یک سهام با بازده زیاد معمولا ریسک بالایی در پی دارد. بنابراین لازم است میزان ریسک برای بازده‌ی $R(x,\xi)$ تعریف شود. در مقاله‌ی حاضر، ریسک مربوط به بازده‌ی $R(x,\xi)$ را با استفاده از گشتاور دوم آن تعیین می‌کنیم.

$$M_۲[R(x,\xi)] = M_۲\left[\xi^T x\right].$$

با بهره‌گیری از شاخص‌های بهینه‌سازی $E[R(x,\xi)]$ و $M_۲[R(x,\xi)]$، در مورد مساله انتخاب پرتفوی با دو توجه برای ارتفاع سرمایه گذار نسبت به ریسک دو ارائه عنوان می‌کنیم.

از طرفی اگر سرمایه‌گذاری بخواهد بازده مورد انتظار را تحت شرایطی که حداکثر ریسک قابل قبول ψ است، به حداکثر برساند، آن‌گاه ممکن است مدل ریاضی زیر را بکار برد.

$$\begin{cases} \max & E[\xi^T x] \\ \text{subject to:} & M_۲[\xi^T x] \le \phi \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \ge ۰,\ i = ۱, ۲, \ldots, n, \end{cases} \tag{۱۴.۳}$$

که $\phi \ge ۰$ نقش یک پارامتر را بازی می‌کند. این فرمول از مسائل انتخاب پرتفوی را مدل *بازده- ریسک* می‌نامیم، در مدل مذکور $E[\xi^T x]$ نشانگر بازده و $M_۲[\xi^T x]$ نماینده‌ی ریسک است.

از طرفی اگر سرمایه‌گذاری برای یک پرتفوی با حداقل ریسک در نظر گرفته شود به طوری که حداقل مقدار قابل قبول برای بازده مورد انتظار از پرتفوی ψ معین باشد، می‌توان مدل بهینه‌سازی زیر را در نظر گرفت

$$\begin{cases} \min & M_۲[\xi^T x] \\ \text{subject to:} & E[\xi^T x] \ge \psi \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \ge ۰,\ i = ۱, ۲, \ldots, n, \end{cases} \tag{۱۵.۳}$$

که $\psi \ge ۰$ نقش یک پارامتر را بازی می‌کند. این فرمول از مساله انتخاب پرتفوی را مدل *ریسک- بازده* می‌نامیم،که یک مساله بهینه‌سازی پارامتری با پارامتر ψ می‌باشد. در سرمایه‌گذاری، مقدار خروجی بهینه شده به عنوان تابعی از ψ نقش مهمی را بازی می‌کند که به نمودار آن مرز *کارآمدی* گوییم و در آن محور افقی معادل ریسک و محور عمودی معادل بازده است.

۲.۷.۳ ترکیبات خطی بازده‌های فازی نزولی و فرمول‌های گشتاوری آن‌ها

به دلیل اینکه $M_۲[\xi^T x]$ در مساله‌های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) گشتاور نوع دوم از ترکیب خطی بازده‌های فازی نزولی است، ld توان فرمول‌های گشتاور دوم آن را مساله زیر به دست آورد.

ابتدا برای متغیرهای فازی ذوزنقه‌ای نوع دو، فرمول‌های محاسبه‌ای زیر را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱.۷.۳. فرض کنید $\tilde{\xi}_i = (\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}\tilde{r}_{i3}\tilde{r}_{i4}; \theta_l, \theta_r)$ و $i = 1, 2, \ldots, n$ بازده‌های فازی ذوزنقه‌ای نوع دوم و مستقل دو طرفه باشند و ξ_*، ξ^* و ξ بازده‌های فازی نزولی $\tilde{\xi}_i$ باشند که به ترتیب از طریق روش‌های PEV، OEV و Ev به دست آمده‌اند. در این صورت برای هر $x_i \in \mathbb{R}$ که $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم

الف) گشتاور دوم $\xi_*^T x$ برابر است با

$$M_2\left[\xi_*^T x\right] = \frac{1}{2} x^T D_* x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، $\xi_*^T = (\xi_{1,*}, \xi_{2,*}, \ldots, \xi_{n,*})^T$ و $D_* = F^T Q_* F$ که

$$F = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{n1} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{n2} \\ r_{13} & r_{23} & \cdots & r_{n3} \\ r_{14} & r_{24} & \cdots & r_{n4} \end{bmatrix} \tag{۱۶.۳}$$

$$Q_* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{16}\theta_l + \frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{24} & \frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{16}\theta_l - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{16}\theta_l + \frac{5}{24} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{16}\theta_l - \frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{16}\theta_l - \frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{16}\theta_l + \frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{16}\theta_l - \frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_l^2 + \frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_l^2 - \frac{1}{16}\theta_l + \frac{5}{24} \end{bmatrix}$$

ب) گشتاور دوم $\xi^{*T} x$ برابر است با

$$M_2\left[\xi^{*T} x\right] = \frac{1}{2} x^T D^* x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*)^T$ و $D^* = F^T Q^* F$ که همان ماتریس تعریف شده در (۱۶.۳) است و

$$Q^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{24} & \frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} & \frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{8} & \frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{24} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} \end{bmatrix}$$

پ) گشتاور دوم $\xi^T x$ برابر است با

$$M_2\left[\xi^T x\right] = \frac{1}{2} x^T D x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$، $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ و $D = F^TQF$ که همان ماتریس تعریف شده در (۱۶.۳) است و درآیه‌های ماتریس متقارن Q عبارتند از

$$
\begin{aligned}
Q_{11} = Q_{44} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24},\\
Q_{12} = Q_{34} &= \frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{24},\\
Q_{13} = Q_{24} &= \frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{8},\\
Q_{14} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8},\\
Q_{22} = Q_{33} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24},\\
Q_{23} &= -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

علاوه بر این زمانی که بردار تصمیم $x \in \mathbb{R}^n$، گشتاورهای دوم $M_2[\xi_*^Tx]$، $M_2[\xi^{*T}x]$ و $M_2[\xi^Tx]$ توابع محدب درجه دوم پارامتری هستند.

اثبات. تنها ادعای (پ) را ثابت می‌کنیم و سایر ادعاها به همین صورت قابل اثبات هستند.

توجه کنید که ξ_i ها بازده‌های فازی نزولی مستقل دوطرفه هستند. اگر نشان دهیم $R(x,\xi) = \xi^Tx$، آن‌گاه αــ برش آن برابر است با $R_\alpha(x,\xi) = \sum_{i=1}^n x_i\xi_{i,\alpha}$. در نتیجه توزیع احتمالی پارامتری $R(x,\xi)$ به صورت زیر خواهد بود

$$
\mu_R(t;\theta_l,\theta_r) = \begin{cases}
\frac{(4+\theta_r-\theta_l)(t-r_1)}{4(r_2-r_1)}, & r_1 \le t \le \frac{r_1+r_2}{2}\\
\frac{(4-\theta_r+\theta_l)t+(\theta_r-\theta_l)r_2-4r_1}{4(r_2-r_1)}, & \frac{r_1+r_2}{2} \le t \le r_2\\
1, & r_2 \le t \le r_3\\
\frac{(-4+\theta_r-\theta_l)t-(\theta_r-\theta_l)r_3+4r_4}{4(r_4-r_3)}, & r_3 \le t \le \frac{r_3+r_4}{2}\\
\frac{(4+\theta_r-\theta_l)(r_4-t)}{4(r_4-r_3)}, & \frac{r_3+r_4}{2} \le t \le r_4,
\end{cases}
$$

که در آن $r_1 = \sum_{i=1}^n x_ir_{i1}$، $r_2 = \sum_{i=1}^n x_ir_{i2}$، $r_3 = \sum_{i=1}^n x_ir_{i3}$ و $r_4 = \sum_{i=1}^n x_ir_{i4}$.

با توجه به ادعای (پ) از قضیه ۱.۶.۳، گشتاور دوم ξ^Tx را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$
M_2[\xi^Tx] = \frac{1}{2}[r_1, r_2, r_3, r_4]Q\begin{bmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{bmatrix} \ge 0.
$$

به علاوه معادله زیر را داریم

$$
\begin{bmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \dots & r_{n1}\\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{n2}\\ r_{13} & r_{23} & \dots & r_{n3}\\ r_{14} & r_{24} & \dots & r_{n4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.
$$

فرض کنید $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T$ و

$$F = \begin{bmatrix} r_{۱۱} & r_{۲۱} & \dots & r_{n۱} \\ r_{۱۲} & r_{۲۲} & \dots & r_{n۲} \\ r_{۱۳} & r_{۲۳} & \dots & r_{n۳} \\ r_{۱۴} & r_{۲۴} & \dots & r_{n۴} \end{bmatrix},$$

در این صورت $Fx = (r_۱, r_۲, r_۳, r_۴)^T$. بنابراین، گشتاور دوم بازده فازی $\xi^T x$ برابر است با

$$M_۲ \left[\xi^T x\right] = \frac{۱}{۲} x^T F^T Q F x = \frac{۱}{۲} x^T D x \geq ۰,$$

که در آن $D = F^T Q F$. توجه کنید که $M_۲[\xi^T x] \geq ۰$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ برقرار است و D یک ماتریس پارامتری متقارن است. بنابراین برای هر پارامتر θ_l و θ_r، گشتاور دوم $M_۲[\xi^T x]$، زمانی که بردار تصمیم $x \in \mathbb{R}$، یک تابع محدب درجه دوم پارامتری است. اثبات قضیه کامل است. □

به عنوان یک نتیجه از قضیه‌ی ۱.۷.۳، برای بازده‌های فازی مثلثی نوع دو، نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۲.۷.۳. فرض کنید $\tilde{\xi_i} = (\tilde{r}_i۱, \tilde{r}_i۲, \tilde{r}_i۳; \theta_l, \theta_r)$ که $i = ۱, ۲, \dots, n$، بازده‌های فازی مثلثی نوع دو و مستقل دو طرفه باشند و $\xi_{i,*}$، ξ_i^* و ξ_i، بازده‌های فازی نزولی آن به ترتیب به دست آمده از طریق روش‌های PEV، OEV و EV باشند. در این صورت برای هر $x_i \in mathbbR$، که $i = ۱, ۲, \dots, n$، داریم

الف) گشتاور دوم $\xi_*^T x$ برابر است با

$$M_۲ \left[\xi_*^T x\right] = \frac{۱}{۲} x^T H_* x,$$

که در آن $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T$، $\xi_*^T = (\xi_{۱,*}, \xi_{۲,*}, \dots, \xi_{n,*})^T$ و $H_* = S^T R_* S$ که

$$S = \begin{bmatrix} r_{۱۱} & r_{۲۱} & r_{۳۱} & \dots & r_{n۱} \\ r_{۱۲} & r_{۲۲} & r_{۳۲} & \dots & r_{n۲} \\ r_{۱۳} & r_{۲۳} & r_{۳۳} & \dots & r_{n۳} \end{bmatrix}, \tag{۱۷.۳}$$

و

$$R_* = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۱۲۸}\theta_l^۲ - \frac{۱}{۱۶}\theta_l + \frac{۵}{۲۴} & \frac{۱}{۶۴}\theta_l^۲ - \frac{۱}{۱۲} & -\frac{۱}{۱۲۸}\theta_l^۲ + \frac{۱}{۱۶}\theta_l - \frac{۱}{۸} \\ \frac{۱}{۶۴}\theta_l^۲ - \frac{۱}{۱۲} & -\frac{۱}{۳۲}\theta_l^۲ + \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۶۴}\theta_l^۲ - \frac{۱}{۱۲} \\ -\frac{۱}{۱۲۸}\theta_l^۲ + \frac{۱}{۱۶}\theta_l - \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۶۴}\theta_l^۲ - \frac{۱}{۱۲} & -\frac{۱}{۱۲۸}\theta_l^۲ - \frac{۱}{۱۶}\theta_l + \frac{۵}{۲۴} \end{bmatrix}.$$

ب) گشتاور دوم $\xi^{*T} x$ برابر است با

$$M_۲ \left[\xi^{*T} x\right] = \frac{۱}{۲} x^T H^* x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، $\xi^* = (\xi^*_1, \xi^*_2, \ldots, \xi^*_n)^T$ و $H^* = S^T R^* S$ و S ماتریس تعریف شده در (۱۷.۳) می‌باشد و

$$R^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} & \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{32}\theta_r^2 + \frac{1}{6} & \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{128}\theta_r^2 - \frac{1}{16}\theta_r - \frac{1}{8} & \frac{1}{64}\theta_r^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}\theta_r^2 + \frac{1}{16}\theta_r + \frac{5}{24} \end{bmatrix}.$$

پ) گشتاور دوم $\xi^T x$ برابر است با

$$M_2\left[\xi^T x\right] = \frac{1}{2} x^T H x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ و $H = S^T R S$ و S ماتریس تعریف شده در (۱۷.۳) می‌باشد و

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24} & \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{128}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{6} & \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) - \frac{1}{8} & \frac{1}{256}(\theta_r - \theta_l)^2 - \frac{1}{12} & -\frac{1}{512}(\theta_r - \theta_l)^2 + \frac{1}{32}(\theta_r - \theta_l) + \frac{5}{24} \end{bmatrix}.$$

علاوه بر این زمانی که بردار تصمیم $x \in \mathbb{R}^n$، گشتاورهای دوم $M_2[\xi_*^T x]$، $M_2[\xi^{*T} x]$ و $M_2[\xi^T x]$ توابع محدب درجه دوم پارامتری هستند.

۸.۳ برنامه‌ریزی پارامتری معادل و روش‌های حل

۱.۸.۳ برنامه‌ریزی پارامتری معادل

فرض کنید $\tilde{\xi}_i$ ها بازده‌های فازی ذوزنقه‌ای نوع دو و مستقل دو طرفه باشند. هم اکنون به بحث در مورد مساله‌های برنامه‌ریزی پارامتری معادل مساله‌های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) می‌پردازیم. مطابق با قضیه ۱.۷.۳، گشتاور دوم از بازده فازی به صورت زیر می‌باشد

$$M_2\left[\xi^T x\right] = \frac{1}{2} x^T D x,$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$، $D = F^T Q F$ و ماتریس اطلاعات

$$F = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \ldots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \ldots & r_{n2} \\ r_{13} & r_{23} & \ldots & r_{n3} \\ r_{14} & r_{24} & \ldots & r_{n4} \end{bmatrix},$$

دانشی در مورد بازده‌های سهام است. بعلاوه عناصر ماتریس متقارن Q به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned}
Q_{۱۱} &= Q_{۴۴} = -\frac{۱}{۵۱۲}(\theta_r-\theta_l)^۲ + \frac{۱}{۳۲}(\theta_r-\theta_l) + \frac{۵}{۲۴},\\
Q_{۱۲} &= Q_{۳۴} = \frac{۱}{۵۱۲}(\theta_r-\theta_l)^۲ + \frac{۱}{۲۴},\\
Q_{۱۳} &= Q_{۲۴} = \frac{۱}{۵۱۲}(\theta_r-\theta_l)^۲ - \frac{۱}{۸},\\
Q_{۱۴} &= -\frac{۱}{۵۱۲}(\theta_r-\theta_l)^۲ - \frac{۱}{۳۲}(\theta_r-\theta_l) - \frac{۱}{۸},\\
Q_{۲۲} &= Q_{۳۳} = -\frac{۱}{۵۱۲}(\theta_r-\theta_l)^۲ - \frac{۱}{۳۲}(\theta_r-\theta_l) + \frac{۵}{۲۴},\\
Q_{۲۳} &= -\frac{۱}{۵۱۲}(\theta_r-\theta_l)^۲ + \frac{۱}{۳۲}(\theta_r-\theta_l) - \frac{۱}{۸},
\end{aligned}$$

که θ_l و θ_r میزان فازی بودن را مشخص می‌کنند.

از طرف دیگر، در مورد صورت پارامتری معادل $E\left[\xi^T x\right]$ بحث می‌کنیم. با توجه به مستقل بودن بازده‌های سهام داریم

$$E\left[\xi^T x\right] = \sum_{i=۱}^{n} x_i E[\xi_i],$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد

$$E\left[\xi^T x\right] = c^T x,$$

که در آن $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T$، $c = (E[\xi_۱], E[\xi_۲], \dots, E[\xi_n])^T$ و

$$E[\xi_i] = \frac{۱}{۴}(r_{i۱}+r_{i۲}+r_{i۳}+r_{i۴}) + \frac{۱}{۳۲}(\theta_r-\theta_l)(r_{i۱}-r_{i۲}-r_{i۳}+r_{i۴}).$$

با توجه به مبحث مطرح شده در بخش ۱.۷.۳، زمانی که بازده‌های سهام به وسیله‌ی متغیرهای فازی ذوزنقه‌ای نوع دو مشخص می‌شوند، مساله بازده‌ ـ ریسک (۱۴.۳)،به یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم معادل پارامتری به صورت زیر تبدیل شود

$$\begin{cases}
\max & c^T x\\
\text{subject to:} & \frac{۱}{۲}x^T D x \le \phi\\
& \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱\\
& x_i \ge ۰,\ i = ۱, ۲, \dots, n.
\end{cases} \tag{۱۸.۳}$$

به طور مشابه، مساله ریسک‌ ـ بازده (۱۵.۳)، می‌تواند به صورت یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم پارامتری معادل به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{cases}
\min & \frac{۱}{۲}x^T D x\\
\text{subject to:} & c^T x \ge \psi\\
& \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱\\
& x_i \ge ۰,\ i = ۱, ۲, \dots, n.
\end{cases} \tag{۱۹.۳}$$

در مساله‌های (۱۸.۳) و (۱۹.۳)، گشتاور دوم $\frac{۱}{۲}x^TDx$، یک تابع محدب درجه دوم نسبت به بردار تصمیم x (قضیه ۱.۷.۳) است. مقدار مورد انتظار c^Tx و دیگر محدودیت‌ها نسبت به بردار تصمیم x توابعی خطی هستند. بنابراین مساله‌های (۱۸.۳) و (۱۹.۳) می‌توانند به مساله‌های برنامه‌ریزی محدب درجه دوم پارامتری با پارامترهای θ_l و θ_r به صورت زیر تبدیل شوند

$$\begin{cases} \min & -c^Tx \\ \text{subject to:} & \frac{۱}{۲}x^TDx \leq \phi \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \geq ۰,\ i = ۱, ۲, \ldots, n, \end{cases} \tag{۲۰.۳}$$

و

$$\begin{cases} \min & \frac{۱}{۲}x^TDx \\ \text{subject to:} & -c^Tx \leq -\psi \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \geq ۰,\ i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۲۱.۳}$$

فصل ۴

نتیجه‌گیری

نتایج

در این پایان‌نامه روش‌های کاهش Ev را برای متغیرهای محدود فازی در نظریه احتمالی فازی بررسی شد، و از روش کاهش Ev را برای مسئله پرتفوی فازی استفاده کرد، که در آن بازده‌های فازی از طریق توزیع‌های احتمالی پارامتری تعیین می‌شوند. نتایج عمده جدید در زیر آمده است.

- الف: بر اساس PEV ، OEV و EV از متغیر فازی منظم، متغیرهای فازی نزولی با متغیرهای فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای نوع دو، و همچنین توزیع‌های احتمال پارامتری آن‌ها را بدست آوردیم، که پارامترها میزان عدم قطعیت در توزیع‌های احتمالی درجه دوم را مشخص می‌کنند.

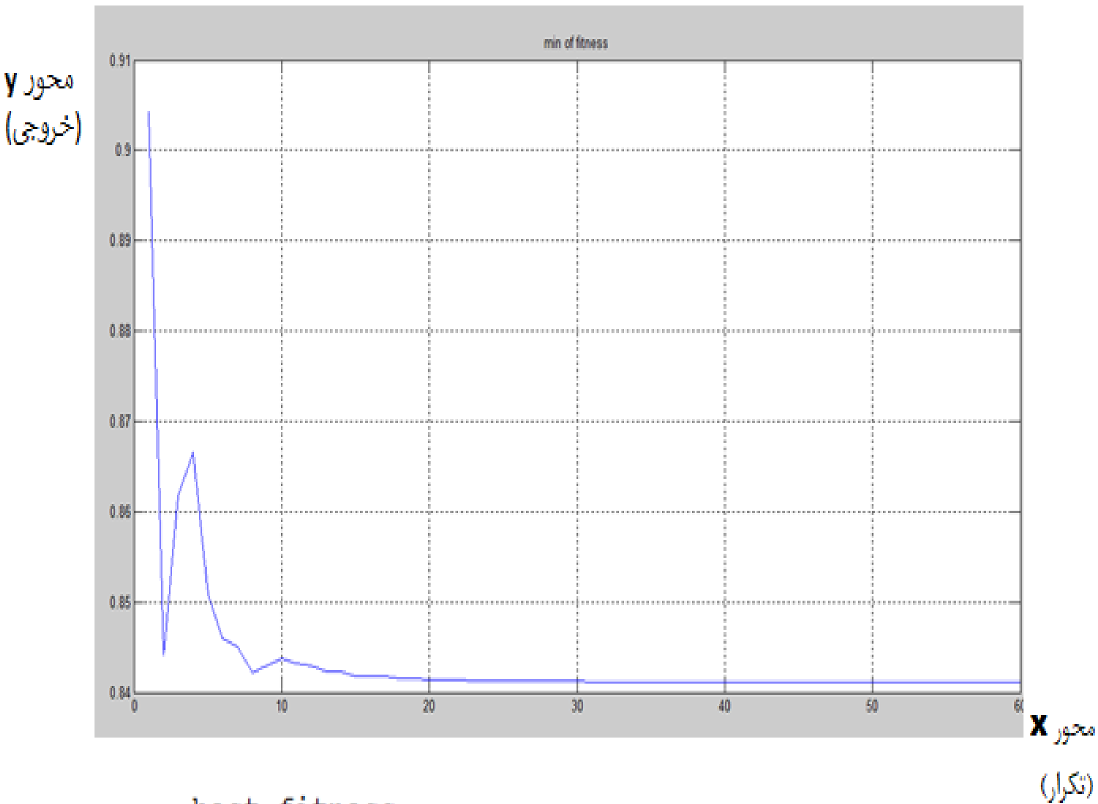
- ب: برای متغیرهای فازی نزولی مربوط به متغیرهای فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای نوع دو، فرمول‌های گشتاور دوم آن‌ها تعیین شدند، و تحدب گشتاورهای دوم در مورد پارامترهای فازی بررسی شدند.

- پ: با درنظر گرفتن گشتاور دوم به عنوان مقیاس جدیدی برای ریسک جهت بهینه کردن مسئله‌های انتخاب پرتفوی فازی، مدل‌های بازده‌ـ ریسک و ریسک‌ـ بازده ارائه شدند. ویژگی‌های ریاضی مدل‌های بهینه مطرح شده بررسی شدند، از جمله (بازنمودهای) تحلیلی گشتاوری دوم و ترکیبات خطی مربوط به متغیرها فازی نزولی و نیز تحدب گشتاورهای دوم در مورد بردارهای تصمیم.

- ث: با استفاده ازارائه‌های تحلیلی گشتاورهای دوم، مدل‌های بازده‌ـ ریسک و ریسک‌ـ بازده

می‌توانند به مسئله‌های برنامه‌ریزی محدب معادل درجه دوم پارامتری تبدیل شوند، که بوسیله‌ی راه‌حل‌های متداول و نرم افزار کل_ هدف قابل حل هستند. نتایج عددی گزارش شده اعتبار و درستی روش‌های پارامتری ارائه شده را نشان دادند.

در آخر، تاکید می‌کنیم که روش پارامتری ارائه شده در مقاله حاضر روشی قوی جهت بهینه‌سازی مسئله‌های انتخاب پرتفوی فازی است و به اطلاعات کمی درباره بازده‌های اوراق بهادار نیاز دارد. در جریان عملی مدل سازی، روش پارامتری تنها به اطلاعاتی درباره انواع توزیع بازده‌های اوراق بهادار مانند توزیع‌های مثلثی و عادی نیاز دارد، و به اطلاعات مربوط به ارزش‌ها عینی پارامترهای موجود در توزیع‌ها نیازی ندارد. تصمیم گیران می‌توانند ارزش‌های مختلف پارامترها را با توجه به ترجیح خود یا نظرات حاکم بر ریسک انتخاب کنند. از دیدگاه حاضر، روش پارامتری ارائه شده فوایدی برای برخی از روش‌های فازی موجود دارد که در آن‌ها بازده‌های اوراق بهادار محاسبه شده‌است.




```
best_fitness
     0.84118

final_best_key
     0.27469      0.8775     0.0019134
```

ما در واقع مسئله برنامه‌ریزی محدب درجه دوم پارامتری (۲۰.۳) و (۲۱.۳) را با استفاده از الگوریتم

PSO حل کردیم،در شکل بالا واضح است که در تکرار بیستم به ازاء $x_3 = ۰/۸۷۷۵, x_2 = ۰/۲۷۴۶۹, x_1 =$ $۰/۰۰۱۹۱۳۴, y = ۰/۸۴۱۱۸$ همگرایی رخ داده‌است.

مراجع

[۱] چالز پی. جونز، مدیریت سرمایه گذاری، ترجمه و اقتباس: تهرانی. ر و نوربخش. ع، انتشارات نگاه دانش، چاپ اول، (۱۳۸۲).

[۲] راعی. ر، پویان‌فر. ا، مدیریت سرمایه گذاری پیشرفته،انتشارات سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها، چاپ ۸، (۱۳۹۲).

[۳] رضایی. م، ناظمی. ع، ارائه یک مدل شبکه عصبی برای پرتفوی فازی، پایانامه کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، (۱۳۹۴).

[۴] جامعی. ز، ناظمی.ع، تنظیم پرتفوی نامعین با استفاده از مدل انحراف نیمه مطلق، پایانامه کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، (۱۳۹۵).

[5] Arenas-Parra, M., Bilbao-Terol, A., Rodríguez-Uría, M. V. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. European Journal of Operational Research, 133, 287–297.

[6] Bellman, R.E., Zadeh, L.A., Decision-Making in a Fuzzy Enviroment, Management Science, Vol. 7, pp.141-164, (1970)

[7] Carter, M., Van Brunt, B. (2000). The Lebesgue-Stieltjes integral. Berlin: Springer.

[8] Chen, G., Liao, X.,Wang, S. (2009). A cutting plane algorithm forMVportfolio selectionmodel. Applied Mathematics and Computation, 215, 1456–1462.

[9] Chen, Y., Zhang, L. (2011). Some new results about arithmetic of type-2 fuzzy variables. Journal of Uncertain Systems, 5, 227–240.

[10] Duan, L., Stahlecker, P. (2011). A portfolio selection model using fuzzy returns. Fuzzy Optimization and Decision Making, 10, 167–191.

[11] Dubois, D., Prade, H. (1979). Operations in a fuzzy-valued logic. Information and Control, 43, 224–240.

[12] Huang, X. (2009). A review of credibilistic portfolio selection. Fuzzy Optimization and Decision Making, 8, 263–281.

[13] Huang, X. (2010). Portfolio analysis: From probabilistic to credibilistic and uncertain approaches. Berlin: Springer.

[14] Jorion, P. H. (1996). Value at risk: A new benchmark for measuring derivatives risk. Chicago: Irwin Professional Publishers.

[15] Karnik, N. N., Mendel, J. M. (2001). Centroid of a type-2 fuzzy set. Information Sciences, 132, 195–220.

[16] Kelley, J. E. (1960). The cutting-plane method for solving convex programs. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 8, 703–712.

[17] Konno, H., Yamakazi, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokio stock market. Management Science, 37, 519–531.

[18] Liu, B. (2004). Uncertainty theory. Berlin: Springer.

[19] Liu, B., Liu, Y. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10, 445–450.

[20] Liu, B. Theory and Practice of Uncertain Programming, Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, (2008).

[21] Liu, Z., Liu, Y. (2010). Type-2 fuzzy variables and their arithmetic. Soft Computing, 14, 729–747.

[22] Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 7, 77–91.

[23] Markowitz, H. M. (1959). Portfolio selection: Efficient diversification of investments. New York: Wiley.

[24] Markowitz, H. M. (1993). Compiutation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm, Annals of Operational Research 45, 307-317.

[25] Mendel, J. M., John, R. I. (2002). Type-2 fuzzy sets made simple. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10, 117–127.

[26] Mendel, J. M. (2007). Advances in type-2 fuzzy sets and systems. Information Sciences, 177, 84–110.

[27] Mitchell, H. (2005). Pattern recognition using type-II fuzzy sets. Information Sciences, 170, 409–418.

[28] Mizumoto, M., Tanaka, K. (1976). Some properties of fuzzy sets of type-2. Information and Control, 31, 312–340.

[29] Qin, R., Liu, Y., Liu, Z. (2011a). Methods of critical value reduction for type-2 fuzzy variables and their applications. Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 1454–1481.

[30] Qin, R., Liu, Y., Liu, Z. (2011b).Modeling fuzzy data envelopment analysis by parametric programming method. Expert Systems with Applications, 38, 8648–8663.

[31] Rockafellar, T. R., Uryaser, S. P. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of Risk, 2, 21–41.

[32] Simaan, Y., Estimation risk in portfolio selection: the mean variance model versus the mean absolute deviation model. Managment Science, 43, 1437-1446, (1997).

[33] Speranza, M. G., Linear programming models for portfolio optimization. Finance, 14, 107-123, (1993).

[34] Wu, X., Liu, Y. (2011). Spread of fuzzy variable and expectation-spread model for fuzzy portfolio optimization problem. Journal of Applied Mathematics and Computing, 36, 373–400.

[35] Wu, X., Liu, Y. (2012). Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming. Fuzzy Optim Decis Making, 11, 411–449.

[36] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338–353.

[37] Zadeh, L. A. (1975). Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I. Information Sciences, 8, 199–249.

[38] Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1, 3–28.

Abstract

This paper develops a method to describe fuzzy returns by employing parametric possibility distributions. The parametric possibility distributions are obtained by equivalent value (EV) reduction methods. For common type-2 triangular and trapezoidal fuzzy variables, their reduced fuzzy variables are studied in the current development. The parametric possibility distributions of reduced fuzzy variables are first derived, then the second moment formulas for the reduced fuzzy variables are established. Taking the second moment as a new risk measure, the reward-risk and risk-reward models are developed to optimize fuzzy portfolio selection problems. The mathematical properties of the proposed optimization models are analyzed, including the analytical representations for the second moments of linear combinations of reduced fuzzy variables as well as the convexity of second moments with respect to decision vectors. On the basis of the analytical representations for the second moments, the reward-risk and risk-reward models can be turned into their equivalent parametric quadratic convex programming problems, which can be solved by conventional solution methods or general-purpose software. Finally, some numerical experiments are performed to demonstrate the new modeling ideas and the efficiency of solution method.

Keywords:
portfoilio selection, Fuzzy variable dropped, Parametric probabilistic distribution, torque, Parametric programming.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

M.Sc. Thesis in Financial Mathematics

Optimizing risk fuzzy portfolio selection

By: Sajjad Soleimani Damane

Supervisor

Alireza Nazemi

Advisor

Seyed Mojtaba Mirlohi

September 2017