

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله دکتری

بررسی مسایل p - میانه و p - مرکز فازی

فاطمه طالشیان جلودار

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

اردیبهشت ۱۳۹۷

با تشکر و سپاس بیکران این پایان نامه را تقدیم می کنم به
محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه تلاش های
محبت آمیزی که در تمام دوران مختلف زندگی ام انجام داده
اند و به همسر مهربانم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم
می باشد.

سپاس خداوندی که سخنوران از ستودن او عاجزند و حساب گران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاش گران از ادای حقّ او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غَوّاصان دریای علوم به او نخواهد رسید.

پس از تشکر و سپاس از محضر حضرت حق، به رسم ادب و احترام از استاد ارجمند جناب آقای دکتر فتحعلی که راهنمایی این رساله را به عهده گرفتند و همواره با سعه صدر و رهنمود های دلسوزانه، در تهیه این تحقیق مرا مورد لطف خویش قرار دادند کمال تقدیر و تشکر را دارم. از پدر و مادر مهربانم که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست، ممنون و سپاس گذارم. از همسر عزیزم که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم به خاطر تمام زحمات و همراهی ها سپاس گذارم. از همراهان همیشگی ام، خواهر و برادر عزیزم که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است متشکرم.

فاطمه طالبیان جلودار
اردیبهشت ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب فاطمه طالبشیان جلودار دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی مسایل p - میانه و p - مرکز فازی، تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه طالبشیان جلودار
اردیبهشت ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

مساله مکانیابی یکی از شاخه های بسیار پر اهمیت تحقیق در عملیات می باشد که برای مدل سازی بسیاری از مسایل واقعی همچون تاسیس بیمارستان ها، مراکز آتش نشانی، بانک ها، مراکز اورژانس و ... به کار می رود. حال آنکه وجود عدم قطعیت و ابهام در مسایل واقعی امری انکار ناپذیر است و اغلب نمی توان مقادیر پارامترها را به طور دقیق و قطعی تعیین نمود. در چنین مسایلی برای مدل سازی مسایل حقیقی نیازمند روشی مناسب برای توصیف عدم قطعیت و ابهامات موجود هستیم. نظریه مجموعه های فازی ابزاری مناسب برای مدل نمودن این ابهامات و عدم قطعیت ها می باشد. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورت بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. از اینرو پرداختن به مسایل مکانیابی فازی از اهمیت بسزایی برخوردار است. در این رساله ضمن معرفی مسایل مکانیابی p - میانه و p - مرکز قطعی، مسایل یک میانه، ۲ - میانه و یک مرکز فازی را مورد بررسی قرار خواهیم داد و برخی روش های حل آن ها را بیان خواهیم کرد. همچنین روش هایی جدید و کارامدی مبتنی بر اثبات قضایا در حالت فازی برای حل این مسایل مکانیابی فازی ارائه خواهیم کرد. به علاوه مسایل مکانیابی پیوسته با نرم توان دوم اقلیدسی و نرم L_1 را مورد بررسی قرار داده و روش هایی برای حل آن ها ارائه می کنیم.

کلمات کلیدی: مساله مکانیابی مرکز، مساله مکانیابی میانه، شبکه فازی، تابع عضویت، مجموعه های فازی، مساله مکانیابی فازی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. F. Taleshian and J. Fathali, (2016), A mathematical model for fuzzy P - median problem with fuzzy weights and variables, Advances in Operations Research, 2016: 1-13
2. F. Taleshian, J. Fathali and N. A. Taghinezhad, Fuzzy majority algorithms for the 1-median and 2-median problems on a fuzzy tree, In Press, Fuzzy Information and Engineering.
3. F. Taleshian and J. Fathali, (2017), Finding the absolute and vertex center of a fuzzy tree, Submitted.

۴. فاطمه طالشیان جلودار و جعفر فتحعلی، مساله مکانیابی تک وسیله ای با نرم توان دوم اقلیدسی و وزن های فازی، سیزدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی صنایع، اسفند ۹۵.

۵. فاطمه طالشیان جلودار و جعفر فتحعلی، مساله مکانیابی چند وسیله ای فازی پیوسته با نرم L_1 ، دهمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، اردیبهشت ۹۶.

فهرست مطالب

خ فهرست تصاویر

ذ فهرست جداول

۳ ۱ نظریه مکانیابی

۳	۱.۱	تعاریف و اصطلاحات
۵	۲.۱	زمینه های عمده تحقیق در نظریه مکانیابی
۶	۳.۱	مساله مکانیابی پیوسته
۶	۴.۱	مساله مکانیابی گسسته
۷	۵.۱	مساله مکانیابی p - میانه
۹	۱.۵.۱	مساله یک میانه روی درخت
۱۲	۲.۵.۱	مساله ۲ - میانه روی درخت
۱۵	۶.۱	مساله مکانیابی p - مرکز
۱۷	۱.۶.۱	مساله یک مرکز روی درخت بدون وزن

۱۹ ۲ نظریه فازی

۱۹	۱.۲	زمینه های عمده تحقیق در نظریه مجموعه های فازی
۲۱	۲.۲	مفاهیم و تعاریف اولیه نظریه مجموعه های فازی
۲۴	۱.۲.۲	عملیات مجموعه های فازی
۲۶	۲.۲.۲	اعداد فازی
۳۱	۳.۲.۲	عملیات اعداد فازی
۳۴	۴.۲.۲	عملیات اعداد بازه ای
۳۵	۵.۲.۲	مقایسه اعداد فازی
۴۱	۶.۲.۲	مقایسه اعداد بازه ای
۴۲	۳.۲	گراف فازی

۴۷ ۳ مسایل مکانیابی فازی

۴۷	۱.۳	زمینه های عمده تحقیق در نظریه مکانیابی فازی
----	-----	---

۴۸	مساله مکانیابی p - مرکز فازی	۲.۳
۵۰	مساله p - میانه فازی	۳.۳
۵۰	مساله مکانیابی p - میانه با رئوس و یال‌های فازی (روش پرز و همکاران)	۱.۳.۳
۵۰	مساله مکانیابی p - میانه با وزن‌ها و طول‌های فازی (روش پرز و همکاران)	۲.۳.۳
۵۲	مساله مکانیابی p - میانه با وزن‌های فازی (روش کانوز و همکاران)	۳.۳.۳
۵۷	مساله مکانیابی p - میانه با وزن‌ها و متغیرهای فازی	۴
۵۷	تعریف مساله	۱.۴
۵۸	روش حل	۲.۴
۶۳	مثال‌های عددی	۳.۴
۷۲	نتیجه‌گیری	۴.۴
۷۹	مساله یک میانه و دو میانه روی درخت فازی	۵
۷۹	اندیس رتبه بندی NR	۱.۵
۸۵	الگوریتم‌های فازی	۲.۵
۹۱	مثال‌های عددی	۳.۵
۱۰۳	نتیجه‌گیری	۴.۵
۱۰۵	مساله مرکز قطعی و مرکز راسی روی درخت بدون وزن با یال‌های فازی	۶
۱۰۵	تعریف مساله	۱.۶
۱۱۲	مثال‌های عددی	۲.۶
۱۱۴	نتیجه‌گیری	۳.۶
۱۱۷	مسایل مکانیابی پیوسته فازی	۷
۱۱۷	مساله تک وسیله‌ای با نرم توان دوم اقلیدسی و وزن‌های فازی	۱.۷
۱۲۲	مساله مکانیابی چند وسیله‌ای فازی پیوسته با نرم L_1	۲.۷
۱۲۹	نتیجه‌گیری	۳.۷
۱۳۱	مراجع	
۱۴۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۴۹	نمایه	

فهرست تصاویر

۱۰	درختی با هفت راس و شش یال.	۱.۱
۱۱	درخت حاصل از حذف راس v_6 و یال (v_5, v_6) .	۲.۱
۱۱	درخت حاصل از حذف راس v_7 و یال (v_5, v_7) .	۳.۱
۱۲	درخت حاصل از حذف راس v_5 و یال (v_2, v_5) .	۴.۱
۱۳	درختی با شش راس و پنج یال.	۵.۱
۱۳	زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_1, v_6) .	۶.۱
۱۴	زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_1, v_2) .	۷.۱
۱۴	زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_2, v_3) .	۸.۱
۱۵	زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_2, v_5) .	۹.۱
۱۶	زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_2, v_4) .	۱۰.۱
۱۸	درخت بدون وزن.	۱۱.۱
۲۲	آلفا برش مجموعه فازی.	۱.۲
۲۳	اجرای مختلف تابع عضویت.	۲.۲
۲۳	مجموعه فازی محدب.	۳.۲
۲۴	مجموعه فازی نرمال و مجموعه فازی غیر نرمال.	۴.۲
۲۵	نمودار تابع عضویت متمم یک مجموعه فازی.	۵.۲
۲۵	الف) تساوی $\tilde{A} = \tilde{B}$ ب) زیر مجموعه $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.	۶.۲
۲۶	اجتماع دو مجموعه فازی.	۷.۲
۲۶	اشتراک دو مجموعه فازی.	۸.۲
۲۷	عدد فازی مثلثی تعمیم یافته.	۹.۲
۲۸	عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته.	۱۰.۲
۲۹	عدد فازی شبه دوزنقه ای	۱۱.۲
۳۰	عدد فازی LR .	۱۲.۲
۳۱	روش اثر یک تابع قطعی.	۱۳.۲
۳۲	روش اثر یک تابع فازی.	۱۴.۲
۳۳	مفهوم اصل گسترش.	۱۵.۲

۹۱	اعداد فازی مثلثی مثال ۱.۳.۵	۱.۵
۹۲	مجموعه های اعداد فازی مثال ۲.۳.۵	۲.۵
۹۴	چهار مجموعه اعداد فازی مثلثی مثال ۳.۳.۵	۳.۵
۹۵	نمایش چهار عدد فازی مثال ۴.۳.۵	۴.۵
۹۷	اعداد فازی تعمیم یافته مثال ۵.۳.۵	۵.۵
۹۸	نمایش هشت عدد فازی مثال ۶.۳.۵	۶.۵
۱۰۳	درخت فازی مثال ۷.۳.۵	۷.۵
۱۱۲	درخت فازی $\tilde{T}$ مثال ۱.۲.۶	۱.۶
۱۱۵	مرکز قطعی درخت فازی $\tilde{T}$ مثال ۲.۲.۶	۲.۶

فهرست جداول

۶۴		مختصات مراکز تقاضا و وزن های متناظر مثال ۱.۳.۴	۱.۴
۶۶		وزن های فازی متناظر مثال ۱.۳.۴	۲.۴
۷۰		جواب بهینه فازی متناظر مثال ۱.۳.۴	۳.۴
۷۱		وزن های فازی متناظر مثال ۲.۳.۴	۴.۴
۷۳		وزن های فازی متناظر مثال ۲.۳.۴	۵.۴
۷۴		میزان سرویس دهی سرویس دهنده چهارم در مثال ۲.۳.۴	۶.۴
۷۵		میزان سرویس دهی سرویس دهنده هشتم در مثال ۲.۳.۴	۷.۴
۷۵		میزان سرویس دهی سرویس دهنده دهم در مثال ۲.۳.۴	۸.۴
۷۶		میزان سرویس دهی سرویس دهنده دهم در مثال ۲.۳.۴	۹.۴
۷۷		میزان سرویس دهی سرویس دهنده دهم در مثال ۲.۳.۴	۱۰.۴
۷۷		میزان سرویس دهی سرویس دهنده بیست و سوم در مثال ۲.۳.۴	۱۱.۴
۷۸		میزان سرویس دهی سرویس دهنده بیست و سوم در مثال ۲.۳.۴	۱۲.۴
۷۸		میزان سرویس دهی سرویس دهنده چهل و دوم در مثال ۲.۳.۴	۱۳.۴
۹۳		نتایج محاسباتی مثال ۲.۳.۵	۱.۵
۹۳		نتایج حاصل از مقایسه مثال ۲.۳.۵	۲.۵
۹۵		نتایج حاصل از مقایسه مثال ۳.۳.۵	۳.۵
۹۶		نتایج محاسباتی مثال ۴.۳.۵	۴.۵
۹۶		نتایج حاصل از مقایسه مثال ۴.۳.۵	۵.۵
۹۷		نتایج حاصل از مقایسه مثال ۵.۳.۵	۶.۵
۹۹		نتایج محاسباتی مثال ۶.۳.۵	۷.۵
۱۰۰		نتایج محاسباتی مثال ۶.۳.۵	۸.۵
۱۰۱		نتایج حاصل از مقایسه مثال ۶.۳.۵	۹.۵
۱۰۲		وزن های فازی رؤس مثال ۷.۳.۵	۱۰.۵
۱۰۳		نتایج محاسباتی مثال ۸.۳.۵	۱۱.۵
۱۱۳		طول یال ها در درخت $\tilde{T}$ مثال ۲.۲.۶	۱.۶

۲.۶	طول یال ها در درخت های T_k مثال ۲.۲.۶	۱۱۴
۱.۷	مختصات مراکز تقاضا و وزن ها مثال ۳.۲.۷	۱۲۶

فصل ۱

نظریه مکانیابی

مساله مکانیابی عبارت است از یافتن مجموعه ای از سرویس دهنده ها که هزینه کل سرویس دهی تا مشتریان نسبت به مجموعه ای از محدودیت ها کمینه شود. این مساله یکی از پرکاربردترین انواع از مسایل بهینه سازی در تحقیق در عملیات می باشد. از جمله کاربردهای آن می توان به تعیین مکان هایی مناسب برای تاسیس تسهیلات خدماتی عمومی مانند احداث مراکز آتش نشانی، ایستگاه های پلیس، بیمارستان ها و مراکز اورژانس اشاره نمود. در ادامه برخی تعاریف و مفاهیم اولیه مساله مکانیابی را که در فصول بعدی مورد نیاز است بیان خواهیم کرد. سپس ضمن بیان برخی از زمینه های عمده تحقیق در نظریه مکانیابی به معرفی دو نوع از پرکاربردترین مسایل مکان یابی و روش های حل آن خواهیم پرداخت.

۱.۱ تعاریف و اصطلاحات

تعریف ۱.۱.۱. (گراف). فرض کنید V مجموعه ای متناهی و غیر تهی و E مجموعه همه زیر مجموعه های دو عضوی V باشد. در این صورت به جفت $G = (V, E)$ یک گراف می گوییم. مجموعه های V و E را به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال های گراف G می نامیم. همچنین هر عضو V را یک راس یا گره و هر عضو E را یک یال می نامیم [۳].

در نمایش تصویری یک گراف هر راس را با یک نقطه و هر یال را توسط یک پاره خط راست یا خمیده نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. (رئوس مجاور). در گراف G اگر دو راس روی یک یال باشند آنها را مجاور می نامیم [۳].

تعریف ۳.۱.۱. (طوقه). در گراف مفروض G یالی که راسی را به خودش وصل کند طوقه نامیده می شود [۳].

تعریف ۴.۱.۱. (گراف ساده و گراف چند گانه). اگر در گرافی بیش از یک یال دو راس را به هم وصل کند گراف را چند گانه و آن یال ها را یال های چند گانه می نامیم. گرافی که طوقه و یال چندگانه ندارد به گراف ساده معروف است [۳].

تعریف ۵.۱.۱. (گراف وزن دار). اگر در گراف G به هر راس v یک عدد حقیقی $w(v)$ نسبت داده شود آن گراف را یک گراف وزن دار می نامیم [۳].

تعریف ۶.۱.۱. (زیر گراف). فرض کنید که $G = (V, E)$ یک گراف باشد. گراف $G' = (V', E')$ را زیر گراف G گوئیم هرگاه $V' \subset V$ و $E' \subset E$ [۳].

تعریف ۷.۱.۱. (درجه یک راس). درجه راس دلخواه v در گراف G عبارت است از تعداد یال هایی که از آن راس می گذرد. درجه راس v را با نماد $\deg(v)$ نشان می دهیم [۳].

تعریف ۸.۱.۱. (گشت). یک گشت از G عبارت است از دنباله ای متناهی و ناتهی از رئوس و یال های G چون $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ که به ازای $1 \leq i \leq k$ ، رئوس v_i و v_{i-1} دو سر یال e_i هستند. در این صورت می گوئیم W یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارت دیگر یک (v_0, v_k) - گشت است [۳].

تعریف ۹.۱.۱. (مسیر). یک مسیر از v_0 تا v_k در گراف G که با نماد $p(v_0, v_k)$ نشان داده می شود عبارت است از گشت $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ به گونه ای که رئوس $v_1, v_2, \dots, v_k$ و v_k متمایز باشند. در نتیجه یال های $e_1, e_2, \dots, e_k$ هم متمایز می شوند [۳].

لازم به ذکر است که در این رساله با گراف های ساده سر و کار خواهیم داشت. از طرفی چون در گراف های ساده یال چند گانه نداریم می توان مسیر $p(v_0, v_k)$ را به صورت دنباله ای از رئوس $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$ یا به صورت دنباله ای از یال های $e_1 e_2 \dots e_k$ نشان داد.

تعریف ۱۰.۱.۱. (طول مسیر). طول مسیر $p(v_0, v_k) = e_1 e_2 \dots e_k$ که با نماد $l(p(v_0, v_k))$ نشان داده می شود برابر است با مجموع طول تمام یال های تشکیل دهنده آن مسیر. یعنی [۳]

$$l(p(v_0, v_k)) = \sum_{i=1}^k l(e_i) \quad (۱.۱)$$

تعریف ۱۱.۱.۱. (فاصله بین دو راس در گراف). فرض کنید $u, v \in V$ دو راس دلخواه از گراف مفروض G باشند. همچنین فرض کنید $P[u, v]$ عبارت باشد از مجموعه همه مسیرهای بین دو راس u و v . در این صورت فاصله بین دو راس u و v که با نماد $d(u, v)$ نشان داده می شود برابر است با طول کوتاه ترین مسیر گذرنده از این رئوس. یعنی [۳]

$$d(u, v) = \min_{p_i(u, v) \in P[u, v]} (l(p_i(u, v))) \quad (۲.۱)$$

تعریف ۱۲.۱.۱. (گراف همبند). یک گراف بدون جهت را همبند گوئیم، هرگاه بین هر دو راس دلخواه آن مسیری موجود باشد. در غیر این صورت آن را نا همبند می نامند [۳].

تعریف ۱۳.۱.۱. (دور). یک دور در گراف عبارت است از مسیری که نقطه ابتدایی و انتهایی آن یکی باشد [۳].

تعریف ۱۴.۱.۱. (درخت). هر گراف همبند و بدون دور $G = (V, E)$ درخت نامیده می شود [۳].

۲.۱ زمینه های عمده تحقیق در نظریه مکانیابی

مطالعات ابتدایی در زمینه مکانیابی با طرح مساله "یافتن یک سرویس دهنده در صفحه که مجموع فاصله آن تا سه مشتری موجود کمترین مقدار باشد" توسط فرما آغاز گردید و بدین ترتیب مساله مکانیابی برای اولین بار در قرن هفدهم پا به عرصه ظهور گذاشت. پس از آن توریچلی مساله مطرح شده توسط فرما را در سال ۱۶۴۰ حل نمود. توریچلی نشان داد که نقطه حاصل از برخورد دوایر محیطی مثلث ساخته شده از سه نقطه موجود نقطه بهینه است. وبر در سال ۱۹۰۹ مساله فرما را به یافتن یک سرویس دهنده در صفحه به طوریکه مجموع کل فواصل چندین مشتری تا سرویس دهنده کمینه گردد تعمیم داد [۱۲۷]. در سال ۱۹۶۴ حکیمی به مساله مکانیابی روی گراف پرداخت [۵۷]. وی در مطالعات خود تابع هدف مساله را به صورت کمترین مجموع و مینیماکس در نظر گرفت. کامپبل مساله مکانیابی گسسته هاب را در سال ۱۹۹۴ مورد مطالعه قرار داد [۲۰]. در سال ۲۰۰۱ کلامروس به مساله تک وسیله ای با موانع چند وجهی پرداخت و یک الگوریتم قطعی و یک راه حل ابتکاری برای آن ارایه کرد [۷۳]. براتکورن و همکاران در سال ۲۰۰۲ الگوریتم هوشمند سریعی برای رده وسیعی از مسایل مکانیابی پوشش ارایه کردند [۱۸]. همچنین یک رویکرد شاخه و قیمت در سال ۲۰۰۵ توسط سنی و همکاران ارایه شد [۱۱۶]. زانگ در سال ۲۰۰۶ الگوریتم شبه حریصانه برای مساله مکانیابی دو سطحی پیشنهاد کرد [۱۴۲]. در سال ۲۰۰۷ ساهین و سورال مدل های مختلف مساله مکانیابی سلسله مراتبی را مورد بررسی قرار دادند [۱۱۵]. بالسیک و بیامون در سال ۲۰۰۸ به مساله مکانیابی برای مساله کمک های بشر دوستانه پرداختند [۸]. در سال ۲۰۰۹ جمالیان و فتحعلی به مساله مکانیابی با کمترین مقدار خطای مطلق پرداختند [۶۷]. در سال ۲۰۱۱ کالکسیک مساله میانه چند وسیله ای با وزن های مثبت و منفی روی گراف را مورد مطالعه قرار داد [۶۸]. فرهانی و همکاران مساله مکانیابی پوشش را در سال ۲۰۱۲ مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۳ لی به مساله مکانیابی بدون ظرفیت پرداخت و الگوریتمی تقریبی برای حل آن ارایه نمود [۸۰]. در همین سال برسو الگوریتم شاخه و کران را برای مساله مکانیابی رقابتی ارایه نمود [۱۳]. در سال ۲۰۱۴ رحمانی و میرحسینی الگوریتم ترکیبی ژنتیک کرم شب تاب را برای مساله مکانیابی با ظرفیت معرفی کردند [۱۱۳]. هو در سال ۲۰۱۵ به مساله با ظرفیت تک منبع پرداخته و یک الگوریتم ابتکاری تکراری تابو را برای آن ارایه کرد [۶۳]. در سال ۲۰۱۶ مانتویا و همکاران مساله مکانیابی با ظرفیت چند محصوله را مورد مطالعه قرار دادند [۹۲]. در حال حاضر به دلیل افزایش روز افزون کاربردهای مسایل مکانیابی در زندگی روزمره، بسیاری از محققین و پژوهشگران به مطالعه در این شاخه از تحقیق در عملیات پرداختند [۱۲۱، ۳۶، ۱۱۱].

مسایل مکانیابی در توابع هدف، فواصل مورد استفاده، تعداد و سائز سرویس دهنده هایی که باید تاسیس شوند و همچنین در چندین عامل دیگر متفاوت هستند. از اینرو بسته به نوع هدف و با استفاده از هر یک از این شاخص های مختلف به مدل های مختلف مساله مکانیابی دست خواهیم یافت. در حالت کلی مساله مکانیابی به دو دسته کلی مسایل مکانیابی گسسته و مسایل مکانیابی پیوسته تقسیم می شود که در ادامه به معرفی آنها خواهیم پرداخت.

۳.۱ مساله مکانیابی پیوسته

مسایل مکانیابی پیوسته نوع خاصی از مسایل مکانیابی هستند که در آنها به دنبال یافتن مکان یک یا چند سرویس دهنده روی صفحه هستیم. شکل کلی این مساله به صورت زیر است [۸۲]

$$\min W(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} d(X_i, A_j) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m w_{ir} d(X_i, X_r) \quad (3.1)$$

که در آن $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ ، $X_i = (a_{i1}, a_{i2})$ ، $i = 1, \dots, m$ مختصات مکان سرویس دهنده ها و $A_j = (a_{j1}, a_{j2})$ ، $j = 1, \dots, n$ مختصات n مراکز تقاضا می باشند. w_{ij} ، $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ و w_{ir} ، $i = 1, \dots, m-1$ ، $r = i+1, \dots, m$ به ترتیب هزینه انتقال کالا از سرویس دهنده i - ام به مرکز تقاضای j - ام و هزینه انتقال کالا از سرویس دهنده i - ام به سرویس دهنده r - ام می باشند. همچنین $d(X_i, A_j)$ و $d(X_i, X_r)$ به ترتیب فاصله بین سرویس دهنده i - ام و مرکز تقاضای j - ام و فاصله بین دو مرکز سرویس دهی i - ام و r - ام می باشند. حال فرض کنید $m = 1$. در این صورت مساله (۳.۱) به مساله تک وسیله ای زیر تبدیل می شود

$$\min W(X) = \sum_{j=1}^n w_j d(X, A_j). \quad (4.1)$$

مساله اخیر یکی از شناخته شده ترین مساله مکانیابی پیوسته است که به مساله تک وسیله ای فرما - وبر معروف است. در این مساله n نقطه در صفحه موجود است. هدف یافتن نقطه ای جدید در صفحه است به طوریکه مجموع کل فواصل نقاط موجود تا نقطه بهینه کمینه شود [۸۲]. در سال ۱۹۳۷ وایزفیلد [۱۲۸] روشی تکراری برای حل مساله فرما - وبر ارائه کرد. مهلی در سال ۱۹۵۸ برای اولین بار الگوریتم تکراری وایزفیلد را برای مساله مکانیابی چند وسیله ای با نرم اقلیدسی گسترش داد [۸۲]. در سال ۱۹۶۴ فرانسیس مساله چند وسیله ای با نرم مستطیلی را مورد بررسی قرار داد [۵۰]. وسولوزکی و لاو در سال ۱۹۷۱ به مکانیابی در صفحه با فاصله مستطیلی در بین مقاصد نقاط و نواحی مستطیلی پرداختند [۱۳۱]. همچنین وسولوزکی در سال ۱۹۷۴ مساله مکانیابی خط بهینه در صفحه را بیان نمود [۱۳۰]. در سال ۱۹۷۸ درزنر و وسولوزکی مساله مکانیابی روی سطح کروی را بررسی کردند [۳۷]. موریس و وردینی مدل کلی مساله چند وسیله ای با نرم L_p را در سال ۱۹۷۹ مورد مطالعه قرار دادند. همچنین در سال های اخیر نیز برخی از پژوهشگران و محققان مطالعه در این زمینه را ادامه دادند که منجر به حصول نتایج جدیدی شده است [۱۶، ۱۹].

۴.۱ مساله مکانیابی گسسته

مسایل مکانیابی گسسته رده ای دیگر از مسایل مکانیابی است که به جستجو برای یافتن بهترین مکان برای تاسیس سرویس دهنده ها روی شبکه می پردازد. یعنی در این رده از مسایل، هدف پیدا کردن مجموعه از نقاط روی شبکه مفروض است به طوری که هزینه کل سرویس دهی این نقاط (سرویس دهنده ها) تا نقاط تقاضا (مشتری ها) کمینه شود. از جمله این مسایل می توان مساله مکانیابی p - میانه، مساله مکانیابی p - مرکز، مساله مکانیابی بدون ظرفیت و مساله مکانیابی پوشش را نام برد. در سال ۱۹۶۸ تیتز و بارت به حل مساله p

- میانه روی گراف پرداختند و روشی جدید برای یافتن p - میانه راسی ارائه کردند [۱۲۰]. در سال ۱۹۹۱ کو و لی الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ برای مساله وزن دار ۲ - مرکز و ۳ - مرکز با فاصله مستطیلی ارائه کردند [۷۴]. کاروین و حکیمی در سال ۱۹۷۹ نشان دادند که مساله مکانیابی p - میانه روی شبکه مساله ای NP - سخت است و الگوریتمی ارائه کردند که p - میانه درخت را می یابد [۷۰]. همچنین آنها در سال ۱۹۷۹ الگوریتمی برای یافتن p - مرکز روی شبکه ارائه نمودند [۶۹]. در سال ۱۹۹۴ کامپیل در مقاله ای تحت عنوان "فرمول بندی عدد صحیح مساله مکانیابی گسسته هاب"، فرمول بندی عدد صحیح را برای چهار نوع از مسایل هاب شامل مساله p - میانه هاب، مساله p - مرکز هاب، مساله بدون ظرفیت هاب و مساله پوشش هاب ارائه نمود [۲۰]. در سال ۱۹۹۷ حدادی روشی ابتکاری ساده برای حل مساله پوشش ارائه کرد [۵۶]. در همین سال روش های جستجوی همسایگی متعددی برای مساله p - میانه توسط هانسن و ملادونویس ارائه شده است [۶۰]. ارنست و کریشنامورتی در سال ۱۹۹۸ با انتشار مقاله ای به مساله تخصیص چندوسیله ای p - میانه هاب بدون ظرفیت پرداختند و الگوریتمی قطعی و همچنین الگوریتمی ابتکاری برای حل آن ارائه کردند [۴۴]. ایبری در سال ۲۰۰۱ روش کارامدی برای حل مساله تخصیص تک وسیله ای p - هاب با سه یا چهار هاب ارائه کرد. وی در این مطالعه مثالی بزرگتر از سایر مثال های حل شده پیشین را حل کرد [۳۹]. فتحعلی در سال ۲۰۰۶ الگوریتم ژنتیک را برای حل مسایل p - میانه با وزن های مثبت و منفی ارائه کرد [۴۵]. در همین سال فتحعلی و تقی زاده الگوریتم جستجوی همسایگی را برای حل مسایل p - میانه با وزن های مثبت و منفی ارائه کردند [۴۷]. در سال ۲۰۰۷ گالینیر و هرترز مساله پوششی را مورد بررسی قرار دادند و سه الگوریتم دقیق برای حل آن ارائه نمودند. همچنین آنها حالت ابتکاری این سه الگوریتم را نیز ارائه نموده و مورد آنالیز قرار دادند [۵۱]. در طی این سال ها هر کدام از این مسایل به طور گسترده و توسط بسیاری از محققین و پژوهشگران مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند و امروزه نتایج بسیار جالب و ارزنده ای در هر یک از این زمینه ها ارائه شده است. به عنوان نمونه می توان به مراجع [۲۹، ۱۰۹، ۱۲۴] اشاره نمود. در ادامه دو نوع از پرکاربردترین مسایل مکانیابی گسسته را معرفی خواهیم نمود.

۵.۱ مساله مکانیابی p - میانه

مساله مکانیابی p - میانه عبارت است تعیین مکان p سرویس دهنده به طوریکه مجموع فاصله وزندار تمام رئوس روی شبکه تا این سرویس دهنده ها کمترین مقدار ممکن باشد. نمادگذاری زیر برای تعریف مدل مساله p میانه ضروری است.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد که $|V| = n$ و هر راس $n, 1, \dots, n$ دارای وزن w_j باشد که بیانگر میزان تقاضای آن راس می باشد. فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ مجموعه ای شامل p راس روی شبکه باشد. مدل ریاضی مساله p - میانه به صورت زیر است [۳۰]

$$\min_X \sum_{j=1}^n w_j D(v_j, X) \quad (5.1)$$

که در آن $D(v_j, X)$ عبارت است از کوتاه ترین فاصله بین راس v_j و مجموعه رئوس X . یعنی

$$D(v_j, X) = \min_{x_i \in X} (d(x_i, v_j))$$

و $d(v_i, v_j)$ کوتاه ترین فاصله بین دو راس v_i و v_j است. تمام حالت های انتخاب p مکان از بین n راس برابر است با

$$C(n, p) = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

بنابراین مساله p - میانه یک مساله NP سخت است. برای حالتی که n خیلی بزرگ نباشد به ازای یک p ثابت می توان به روش شمارشی جواب بهینه را پیدا کرد. از آنجایی که برای n های بزرگ این مساله NP سخت است روش های ابتکاری کارایی در این زمینه ارایه شده است.

مدل برنامه ریزی صفر و یک مساله p - میانه به صورت زیر است [۳۰]

$$\begin{aligned} (P_{11}) \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n y_i = p \quad x_{ij} \leq y_i, j = 1, \dots, n \\ & x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(۶.۱)

که در آن

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر راس } i - \text{ام به عنوان سرویس دهنده انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۹

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر مشتری مکان } j - \text{ام توسط سرویس دهنده مکان } i \text{ سرویس دهی شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در مدل (P_{11}) ، مجموعه قیود اول بیانگر آن است که مشتری مکان j - ام فقط می تواند از یک راس سرویس دهی شود. قید دوم بیان می کند که تعداد سرویس دهنده ها p است. مجموعه قیود سوم دلالت دارند بر اینکه ابتدا باید سرویس دهنده در مکان i - ام تاسیس شود و سپس سرویس دهی انجام شود. مدل (P_{11}) را می توان به صورت صفر و یک و عدد صحیح زیر نیز فرمول بندی نمود [۳۰]

$$\begin{aligned}
 (P_1) \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = w_j \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n y_i = p \\
 & x_{ij} \leq y_i w_j \quad i, j = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{۷.۱}$$

تفاوت این مدل و مدل قبل در تعریف متغیر x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ است که در اینجا عبارت است از مقداری از تقاضای مشتری j - ام که توسط سرویس دهنده i - ام برآورده می شود. در مدل (P_1) مجموعه قیود اول نشان می دهند که تمام نیاز هر مشتری باید پوشش داده شود. بقیه قیود همانند حالت قبل هستند.

۱.۵.۱ مساله یک میانه روی درخت

گلدمن [۸۹] در سال ۱۹۷۱ به مساله یک میانه روی شبکه ها پرداخت و نشان داد که حل این مساله با استفاده از روش شمارش دارای پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ می باشد. همچنین وی برای حالتی که شبکه درخت باشد بر اساس سه لم زیر الگوریتم اکثریت وزنی را که دارای پیچیدگی زمانی $O(n)$ می باشد ارائه نمود.

لم ۱.۵.۱. فرض کنید که X درختی با n راس $v_1, v_2, \dots, v_n$ مفروض باشد. همچنین فرض کنید T و S دو زیر درخت حاصل از حذف یال (v_s, v_t) باشد که $t \in T, s \in S$ همچنین فرض کنید

$$W(S) = \sum_{x \in S} w(x),$$

$$W(T) = \sum_{x \in T} w(x).$$

اگر $W(S) \geq W(T)$ ، آنگاه میانه m در زیر درخت S واقع می باشد.

برهان. به مرجع [۸۹] مراجعه کنید.

□

لم ۲.۵.۱. فرض کنید T و S دو زیر درخت باشند که از حذف یال (s, t) از درخت X به دست می آیند. حال اگر $W(S) \geq W(T)$ آنگاه مساله یافتن میانه روی درخت X تبدیل می شود به یافتن میانه روی زیر درخت N_S که در آن N_S همان درخت S است با این تفاوت که وزن راس s با $w(s) + W(T)$ جایگزین شده است.

برهان. به مرجع [۸۹] مراجعه کنید.

□

لم ۳.۵.۱. اگر وزن راسی از یک درخت (گراف) بیشتر از نصف مجموع وزن های همه رئوس باشد آنگاه آن راس میانه درخت می باشد.

برهان. به مرجع [۸۹] مراجعه کنید.

□

الگوریتم اکثریت وزنی [۸۹]

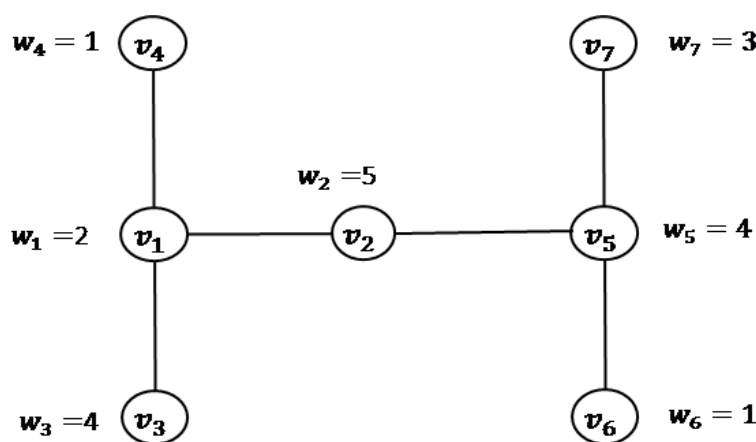
گام اول. اگر X شامل یک راس است توقف کنید همان راس جواب مساله است.

گام دوم. به ازای هر راس انتهایی مانند v اگر $w(v) \geq \frac{W(X)}{2}$ آنگاه به گام چهارم بروید. در غیر این صورت به گام سوم بروید.

گام سوم. فرض کنید u راس مجاور v باشد. وزن راس v را به راس u اضافه کرده و راس v و یال (u, v) را حذف کنید و به گام یک برگردید.

گام چهارم. توقف کنید. راس v جواب مساله است.

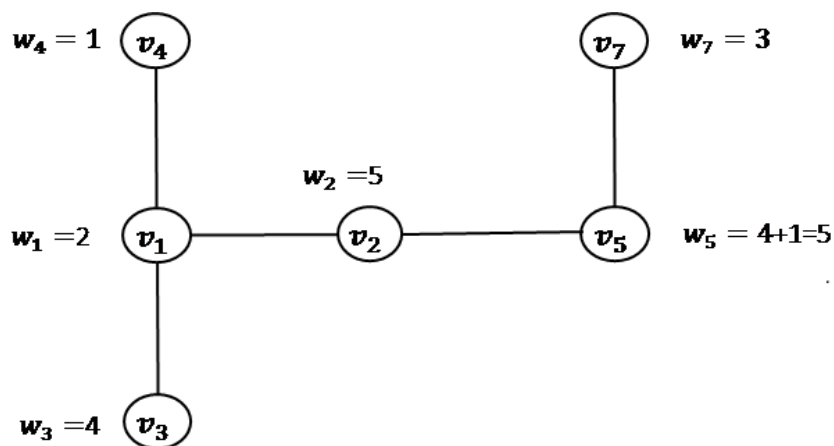
مثال ۴.۵.۱. درخت X با هفت راس و شش یال را در نظر بگیرید (شکل ۱.۱).



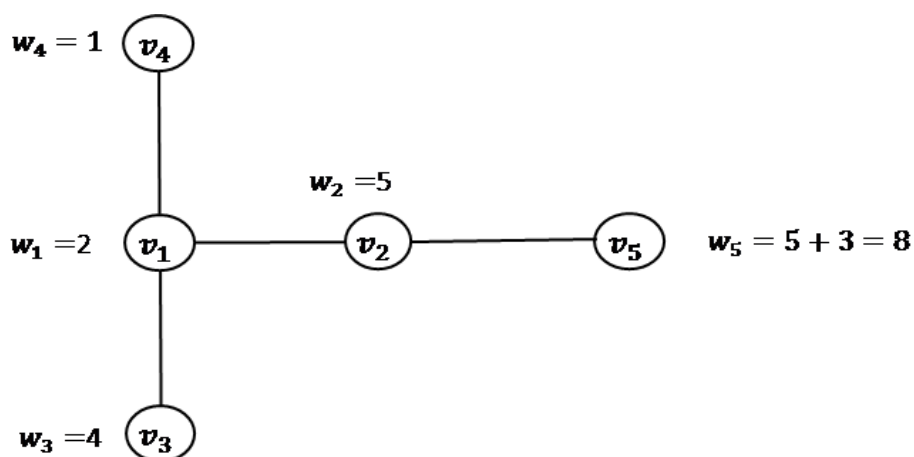
شکل ۱.۱: درختی با هفت راس و شش یال.

به وضوح $W(X) = 20$. از راس دلخواه v_6 شروع می کنیم. از آنجایی که $w_6 \not\geq \frac{W(X)}{2} = 10$ وزن راس v_6 را به راس مجاور آن یعنی v_5 اضافه کرده و یال (v_5, v_6) را از درخت X حذف می کنیم. از اینرو $w_5 = 5$ و درخت X به صورت ۲.۱ تبدیل می شود.

حال به گام اول بر می گردیم و راس دلخواه v_7 را انتخاب می کنیم. از آنجایی که $w_7 \not\geq 10$ وزن راس v_7 را به راس مجاور آن یعنی v_5 افزوده و یال بین این دو راس را حذف می کنیم که درخت ۳.۱ با $w_5 = 8$ حاصل می شود.



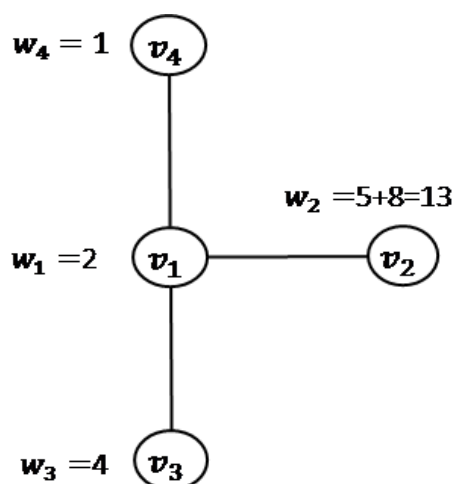
شکل ۲.۱: درخت حاصل از حذف راس v_6 و یال (v_5, v_6) .



شکل ۳.۱: درخت حاصل از حذف راس v_7 و یال (v_5, v_7) .

دوباره به گام اول بر می گردیم و راس v_5 را در نظر می گیریم. از آنجایی که $w_5 \neq 10$ وزن این راس را به راس مجاور آن یعنی v_2 افزوده و یال بین این دو راس را حذف می کنیم که درخت ۴.۱ با $w_2 = 13$ حاصل می شود.

حال به گام اول بر می گردیم و راس v_2 را در نظر می گیریم. از آنجایی که $w_2 = 13 > 10$ توقف می کنیم و نتیجه می شود که راس v_2 میانه درخت X است.



شکل ۴.۱: درخت حاصل از حذف راس v_5 و یال (v_2, v_5) .

۲.۵.۱ مساله ۲ - میانه روی درخت

حال مساله ۲ - میانه روی شبکه را در نظر بگیرید. حل این مساله با استفاده از روش شمارشی دارای پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ می باشد اما برای حالتی که شبکه درخت باشد گلدمن الگوریتم خطی حذف یال را به صورت زیر ارائه نمود.

الگوریتم حذف یال [۸۹]

گام اول. فرض کنید $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ مجموعه تمام یال های درخت X با n راس باشد. به ازای $i = 1, 2, \dots, n-1$ یال e_i را حذف می کنیم. در نتیجه دو زیر درخت حاصل می شود که به ترتیب $T_{\lceil e_i}$ و $T_{\lfloor e_i}$ می نامیم.

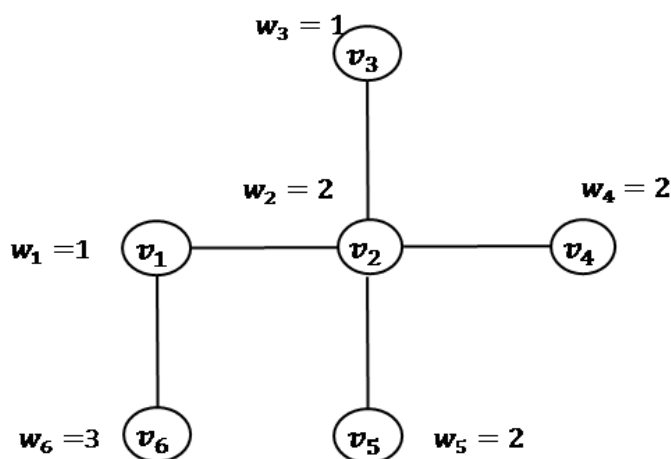
گام دوم. با استفاده از الگوریتم اکثریت وزنی در هر یک از دو زیر درخت $T_{\lceil e_i}$ و $T_{\lfloor e_i}$ یک میانه را می یابیم و به ترتیب $m_{\lceil e_i}$ و $m_{\lfloor e_i}$ نام گذاری می کنیم.

گام سوم. مقدار توابع هدف $f_{\lceil e_i}$ و $f_{\lfloor e_i}$ را برای هر دو زیر درخت $T_{\lceil e_i}$ و $T_{\lfloor e_i}$ به دست آورده و با هم جمع می کنیم تا هزینه نهایی برای مساله اصلی به صورت زیر به دست آید

$$f_{e_i} = f_{\lceil e_i} + f_{\lfloor e_i}$$

گام چهارم. به ازای $i = 1, 2, \dots, n-1$ کمترین مقدار f_{e_i} را می یابیم. فرض کنید این کمترین مقدار با حذف یال e_k به دست آمده باشد. در این صورت $m_{\lceil e_k}$ و $m_{\lfloor e_k}$ میانه های درخت X می باشند و مقدار بهینه عبارت است از $f_{e_k} = f_{\lceil e_k} + f_{\lfloor e_k}$.

مثال ۵.۵.۱. درخت ۵.۱ با طول یال های واحد را در نظر بگیرید.

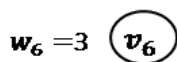
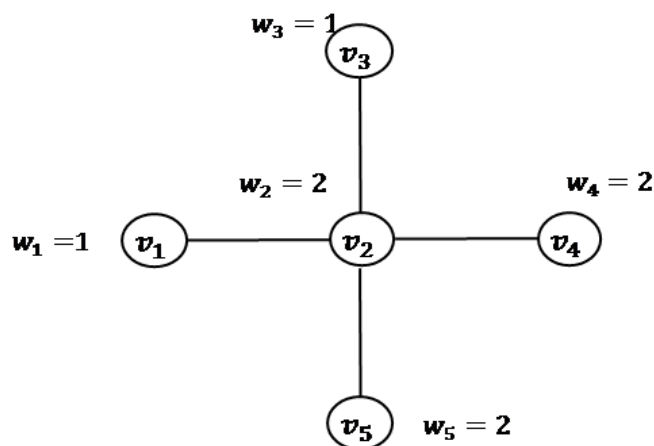


شکل ۵.۱: درختی با شش راس و پنج یال.

ابتدا فرض کنید یال بین دو راس v_1 و v_6 را حذف کنیم. با حذف این یال دو زیر درخت حاصل می شود که در شکل ۶.۱ نشان داده شده اند.

با استفاده از الگوریتم اکثریت وزنی در هر یک از این دو زیر درخت یک میانه را می یابیم که به ترتیب عبارتند از راس v_6 در زیر درخت اول و راس v_2 در زیر درخت دوم. بنابراین تابع هزینه برابر است با

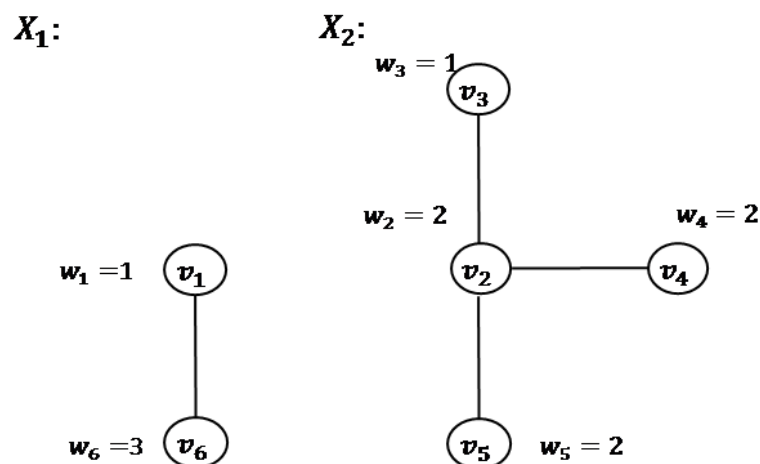
$$f(v_1, v_6) = f_1 + f_2 = 0 + 6 = 6$$

 $X_1:$  $X_2:$ شکل ۶.۱: زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_1, v_6) .

در مرحله بعد یال بین رؤس v_1 و v_2 را حذف کنیم. در اینصورت دو زیر درخت به صورت شکل ۷.۱ به دست

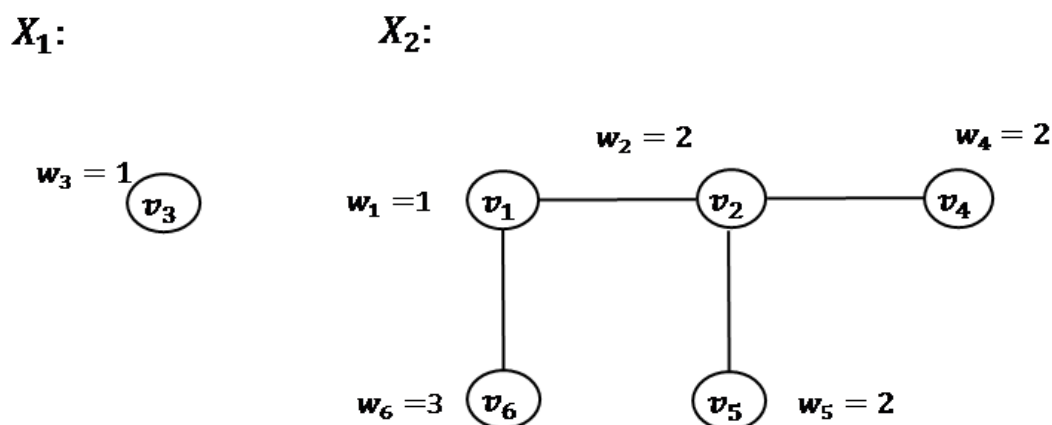
می آید. در نتیجه میانه ها عبارتند از رئوس $v_۲$ و $v_۶$ و مقدار تابع هدف برابر است با

$$f(v_۱, v_۲) = f_۱ + f_۲ = ۱ + ۵ = ۶$$



شکل ۷.۱: زیر درخت های حاصل از حذف یال $(v_۱, v_۲)$.

حال با حذف یال بین رئوس $v_۳$ و $v_۲$ دو زیر درخت که در شکل ۸.۱ نشان داده شده اند به دست می آیند.



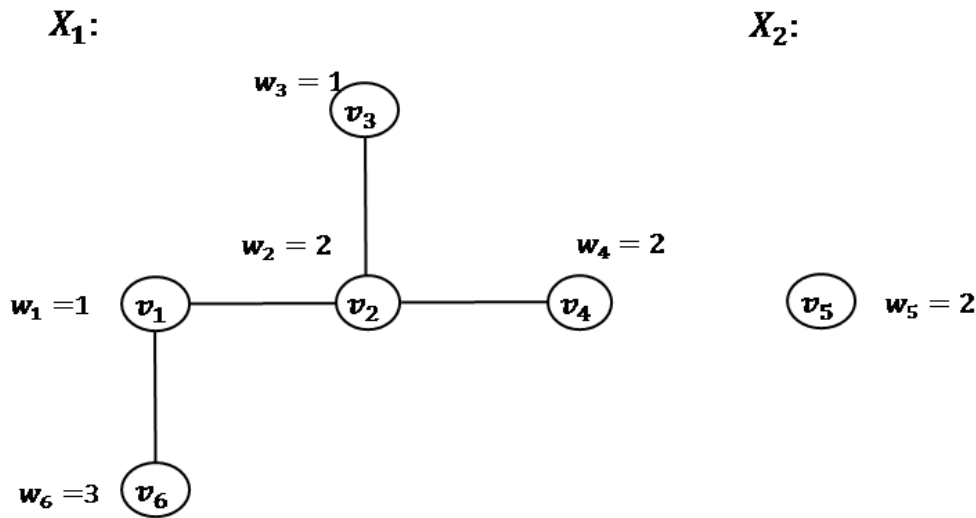
شکل ۸.۱: زیر درخت های حاصل از حذف یال $(v_۲, v_۳)$.

در این حالت میانه ها عبارتند از رئوس $v_۲$ و $v_۳$ و مقدار تابع هدف برابر است با

$$f(v_۱, v_۲) = f_۱ + f_۲ = ۱۱ + ۰ = ۱۱$$

از حذف یال بین رئوس v_5 و v_2 زیر درخت های شکل ۹.۱ نتیجه می شود. در این صورت میانه ها عبارتند از رئوس v_5 و v_2 و مقدار تابع هدف برابر است با

$$f(v_1, v_2) = f_1 + f_2 = 10 + 0 = 10$$



شکل ۹.۱: زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_2, v_5) .

و در نهایت با حذف یال بین رئوس v_4 و v_2 شکل ۱۰.۱ نتیجه می شود که میانه ها عبارتند از رئوس v_4 و v_2 و مقدار تابع هدف برابر است با

$$f(v_1, v_2) = f_1 + f_2 = 10 + 0 = 10$$

ملاحظه می شود که با حذف یال (v_1, v_6) کمترین مقدار تابع هزینه به دست می آید. لذا مجموعه رئوس $\{v_2, v_6\}$ عبارت است از مجموعه دو میانه درخت X .

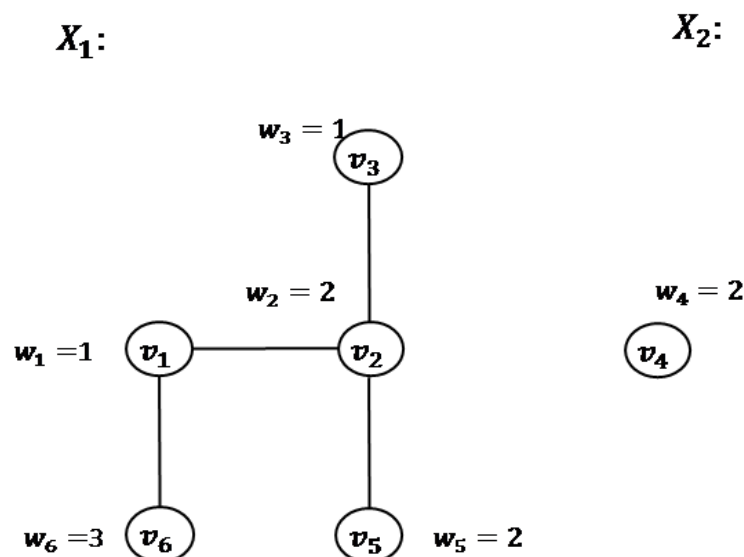
۶.۱ مساله مکانیابی p - مرکز

مساله مکانیابی p - مرکز عبارت است از تعیین مکان p سرویس دهنده روی شبکه به طوری که بیشترین فاصله وزندار مشتری ها تا نزدیکترین سرویس دهنده کمینه شود. فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ یک مجموعه شامل مکان p سرویس دهنده از شبکه N باشد. در این صورت در مساله p - مرکز داریم

$$\min_X \left(\max_{j=1, \dots, n} w_j D(v_j, X) \right) \quad (۸.۱)$$

که در آن

$$D(v_j, X) = \min_{x_i \in X} (d(v_j, x_i))$$



شکل ۱۰.۱: زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_2, v_4) .

مدل برنامه ریزی صفر و یک و عدد صحیح برای مساله p - مرکز به صورت زیر است [۳۰]

$$\begin{aligned}
 (P_r) \quad & \min Z \\
 \text{s.t} \quad & \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = w_j \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n y_i = p \\
 & x_{ij} \leq y_i w_j \quad i, j = 1, \dots, n \\
 & Z \geq \sum_{i=1}^n x_{ij} d_{ij} \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

(۹.۱)

که در آن $i = 1, \dots, n$ و y_i و $j = 1, \dots, n$ و x_{ij} مانند مدل مساله p - میانه تعریف می شوند. در مدل اخیر مجموعه قیود اول نشان می دهند که تمام نیاز هر مشتری باید پوشش داده شود. قید دوم بیان می کند که تعداد سرویس دهنده ها p است. مجموعه قیود سوم دلالت دارند بر اینکه ابتدا باید سرویس دهنده در مکان i - ام تاسیس شود و سپس سرویس دهی انجام شود.

در مدل (۹.۱) اگر $p = 1$ باشد آنگاه مساله تبدیل به یافتن یک مرکز روی شبکه می شود. جواب بهینه به دست آمده از حل این مدل مرکز قطعی نامیده می شود که می تواند هر نقطه ای از شبکه باشد. نزدیکترین راس به مرکز قطعی را مرکز راسی می نامیم.

کوکاینه و همکاران مساله p - مرکز را بر روی شبکه درخت مورد مطالعه قرار دادند و الگوریتم خطی برای آن ارائه نمودند [۶۲]. سپس اسلیتر الگوریتم خطی برای این مساله روی شبکه در سال ۱۹۸۲ ارائه نمود [۱۱۷]. همچنین هندلر در سال ۱۹۷۳ به حل این مساله روی شبکه درخت بدون وزن پرداخت [۵۹]. در سال ۱۹۸۵ مینیکا به حل مساله مسیر مرکزی زمانی که طول مسیر از مقدار خاص l بیشتر نباشد پرداخت [۸۸].

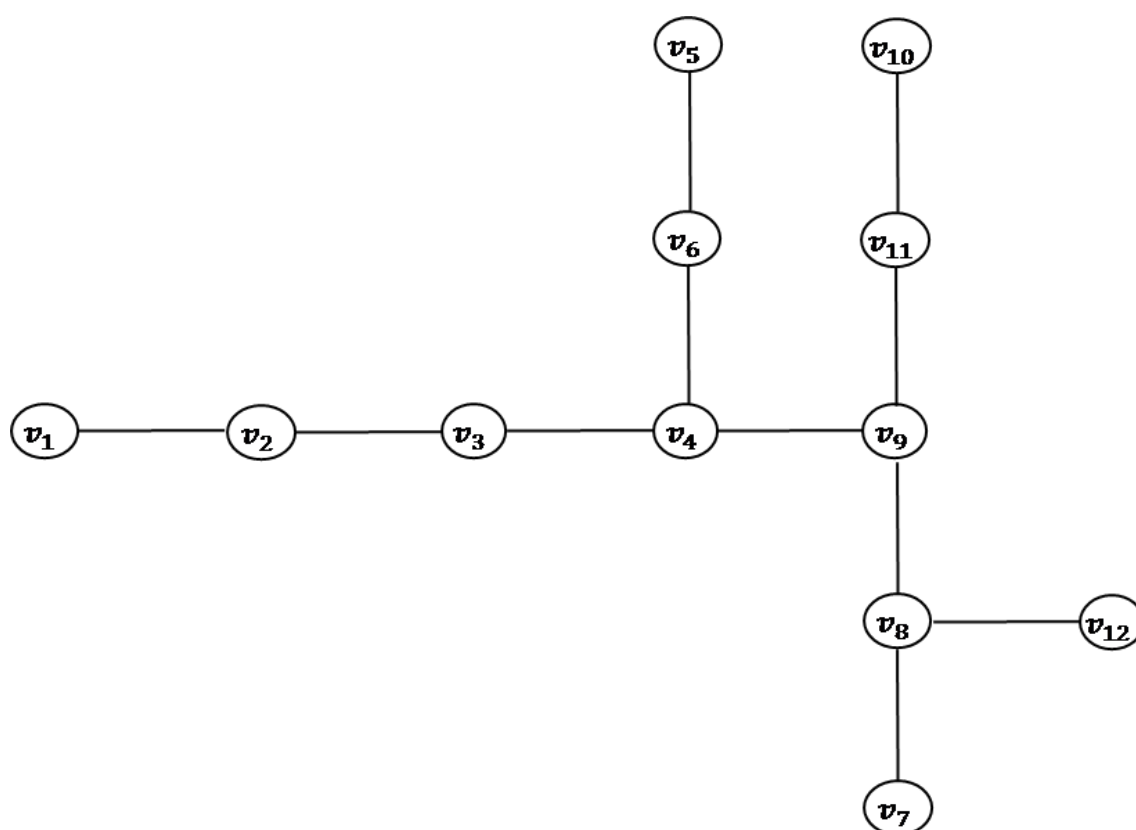
۱.۶.۱ مساله یک مرکز روی درخت بدون وزن

همان طور که گفته شد مساله مرکز عبارت است از یافتن نقطه ای که فاصله دورترین نقطه در درخت از آن دارای کمترین مقدار ممکن باشد. درخت X متشکل از n راس $v_1, v_2, \dots, v_n$ را در نظر بگیرید. هندلر الگوریتم زیر را برای یافتن مرکز ارائه نمود.

الگوریتم یک مرکز [۵۹]

- گام اول. راس دلخواه v_1 را در درخت X انتخاب کنید.
- گام دوم. دورترین راس از v_1 را بیابید و آن را v_2 بنامید.
- گام سوم. دورترین راس از v_2 را بیابید و آن را v_3 بنامید.
- گام چهارم. نقطه میانی مسیر بین دو راس v_2 و v_3 مرکز درخت X می باشد.

مثال ۱.۶.۱. درخت بدون وزن X نشان داده شده در شکل ۱۱.۱ با طول یال های واحد را در نظر بگیرید. می خواهیم مرکز این درخت را بیابیم. بدین منظور بر اساس الگوریتم هندلر راس دلخواه v_1 را انتخاب می کنیم. دورترین راس از آن عبارت است از راس v_1 . همچنین دورترین راس از راس v_1 عبارت است از راس v_7 . در نهایت نقطه میانی مسیر بین رئوس v_1 و v_7 راس v_4 است. بنابراین راس v_4 مرکز درخت X می باشد.



شکل ۱۱.۱: درخت بدون وزن.

فصل ۲

نظریه فازی

۱.۲ زمینه های عمده تحقیق در نظریه مجموعه های فازی

نظریه مجموعه های فازی تعمیمی از نظریه مجموعه های معمولی هستند. از اینرو در این فصل ضمن اشاره به مفهوم نظریه مجموعه های معمولی، به معرفی نظریه مجموعه های فازی خواهیم پرداخت. در نظریه مجموعه ها، به دسته ای «مشخص» از اشیاء مجموعه گفته می شود و اشیای این دسته، اعضا یا عناصر مجموعه نامیده می شوند. همان طور که ملاحظه می کنید در تعریف مجموعه بر لفظ «مشخص» تأکید شده است که این تأکید، به مفهوم عضویت بر می گردد. در این نظریه تابع عضویت هر مجموعه معمولی مانند A ، به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1.2)$$

در واقع این تابع به عناصری که عضو مجموعه A هستند، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر اختصاص می دهد. یعنی مقدار تابع مشخصه فقط می تواند مقادیر صفر یا یک را اختیار کند. بنابراین به یک دسته، تنها وقتی مجموعه گفته می شود که عناصر آن دقیقاً مشخص باشند. اما عبارت «اعداد حقیقی بزرگ» تشکیل یک مجموعه نمی دهد. زیرا ویژگی «بزرگ بودن» یک ویژگی مشخص و دقیق نیست و تشخیص این که یک عدد حقیقی دلخواه دارای این ویژگی هست یا خیر از نظر افراد مختلف، متفاوت می باشد. بنابراین هیچ تعریف واحدی برای آن وجود ندارد.

با توجه به آن چه که گفته شد، مجموعه های معمولی برای مفاهیمی مناسب اند که به طور قطعی و مشخص قابل تعریف هستند. این در حالی است که بیشتر مفاهیم موجود در دنیای واقعی تعاریف دقیقی ندارند تا بتوان برای هر کدام مجموعه هایی معمولی یا دقیق تصور کرد. مفاهیمی مانند زیبایی، توانایی تدریس، روابط عمومی افراد، میزان پیشرفتگی جوامع صنعتی و غیره. در ریاضیات و شاخه نظریه مجموعه های معمولی برای چنین مفاهیمی قالب مدل سازی و ابزار تجزیه و تحلیل وجود ندارد. در واقع در چنین مواردی مغز انسان با در نظر گرفتن فاکتورهای مختلف و بر اساس تفکر استنتاجی جملات را تعریف و ارزش گذاری می نماید که مدل سازی آنها به زبان و فرمول های ریاضی اگر غیر ممکن نباشد کاری بسیار پیچیده خواهد بود. منطق فازی

شیوه جدیدی است که طراحی و مدل سازی یک سیستم نیازمند ریاضیات پیچیده و پیشرفته را با جایگزینی مقادیر زبانی و دانش فرد خبره ممکن می سازد. نظریه مجموعه های فازی قادر است مفاهیم نادقیق و مبهم را به صورت ریاضی مدل سازی کند. این نظریه بسیار کلی تر از نظریه مجموعه های معمولی است و پتانسیلی قدرتمند جهت کاربرد در زمینه های گوناگون را دارد.

واژه فازی در فرهنگ لغت آکسفورد به صورت مبهم، گنگ، نادقیق، گیج، مغشوش، درهم و نامشخص تعریف شده است. نظریه فازی برخلاف نظریه کلاسیک که دو ارزشی است، یک منطق چند ارزشی می باشد. این نظریه بر مبنای زبان طبیعی می باشد و برای مسایل دنیای واقعی که به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آن ها، دارای ساختار پیچیده ای می باشند مناسب است. مفاهیم نادقیق بسیاری در دنیای پیرامون ما وجود دارند که آنها را به صورت روزمره در قالب عبارت های مختلفی بیان می کنیم. نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ با انتشار مقاله ای توسط لطفی زاده استاد علوم کامپوتر دانشگاه کالیفرنیا تحت عنوان "مجموعه های فازی" مطرح گردید [۱۳۷]. این نظریه که تعمیمی از منطق بولی است بر مفهوم درستی نسبی دلالت دارد. در منطق کلاسیک هر چیزی بر اساس یک منطق دوتایی نشان داده می شود (درست یا غلط، صفر یا یک، سیاه یا سفید) ولی منطق فازی درستی هر چیز را با یک عدد بین صفر و یک نشان می دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را با عدد صفر و رنگ سفید را با عدد یک نشان دهیم آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر است. این نظریه بر خلاف آموزش سنتی در ریاضی، منطق انسانی و زبان طبیعت را وارد ریاضیات کرد. منطق فازی بیش از بیست سال پس از ۱۹۶۵ از درگاه دانشگاه ها به بیرون راه نیافت زیرا کمتر کسی معنای آنرا درک کرده بود. در اواسط دهه ۸۰ میلادی صنعتگران ژاپنی معنا و ارزش صنعتی این علم را دریافته و منطق فازی را به کار گرفتند. اولین پروژه آنها طرح هدایت و کنترل تمام خودکار قطار زیرزمینی شهر سندای بود که توسط شرکت هیتاچی برنامه ریزی و ساخته شد. این طرح موفق ژاپنی ها منجر به نتایج چشم گیری شد که برخی از آنها عبارتند از آغاز حرکت نامحسوس (تکان های ضربه ای) قطار، شتاب گرفتن نامحسوس، ترمز و ایستادن نامحسوس و صرفه جویی در مصرف برق. از آن به بعد منطق فازی بسیار سریع در تکنولوژی دستگاه های صوتی و تصویری ژاپنی ها از جمله نلرزدن تصویر فیلم دیجیتال ضمن لرزیدن دست فیلم بردار راه یافت. اروپایی ها بسیار دیر، یعنی در اواسط دهه ۱۹۹۰ میلادی، پس از خوابیدن موج بحث های علمی در رابطه با منطق فازی، استفاده صنعتی از آن را آغاز کردند. مفاهیم بنیادی نظریه فازی به وسیله زاده در اواخر دهه ۶۰ و اوایل دهه ۷۰ مطرح گردید. وی پس از معرفی مجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ مفاهیم الگوریتم های فازی [۱۳۸] را در سال ۱۹۶۸، تصمیم گیری فازی [۱۲] را در سال ۱۹۷۰ و ترتیب فازی [۱۴۰] را در سال ۱۹۷۱ مطرح نمود. همچنین زاده در سال ۱۹۷۳ با انتشار مقاله ای در زمینه تجزیه و تحلیل سیستم های پیچیده و فرایندهای تصمیم گیری [۱۳۹]، اساس کنترل فازی را بنا کرد. او در این مقاله مفهوم متغیرهای زبانی و استفاده از قواعد اگر آنگاه فازی را برای فرموله کردن دانش بشری معرفی نمود. در دهه ۱۹۷۰ نظریه فازی رشد پیدا کرد و کاربردهای عملی آن ظاهر گردید. به عنوان مثال در سال ۱۹۷۴ برای اولین بار تاناکا [۱۱۹] مساله برنامه ریزی فازی را معرفی نمود. همچنین در سال ۱۹۷۸ اولین مدل خطی فازی توسط زیمرمن [۱۴۴] ارایه شد. گسترش روز افزون این علم در جهان توجه دانشمندان را در علوم مختلف به خود معطوف کرد از اینرو با مطالعه و پرداختن به این موضوع زمینه رشد و توسعه این نظریه را در شاخه های مختلف علمی از جمله پزشکی [۴۸، ۱۲۵]، مدیریت [۸۳، ۱۰۷]، تصمیم گیری [۲۵، ۱۳۶]، صنعت [۱۰۵، ۱۱۴، ۱۱۸] و

اقتصاد [۶۴، ۱۰۸] و ... فراهم آوردند. هم اکنون نیز سیستم اینورتر در اسپیلته ها از منطق فازی استفاده می کند. در ادامه به برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز نظریه فازی خواهیم پرداخت.

۲.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه نظریه مجموعه های فازی

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. همانطور که در بخش قبل گفته شد، اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ گسترش داده شود، تابعی به وجود خواهد آمد که به هر عضو x از X عددی را از بازه $[0, 1]$ نسبت می دهد. این تابع، تابع عضویت μ نامیده می شود. بر این اساس می توان مجموعه فازی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۲.۲ (مجموعه فازی). مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X ، توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ مشخص می شود که در آن برای هر x از X مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ میزان عضویت x را در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نشان می دهد [۱].

تعریف ۲.۲.۲ (مجموعه فازی گسسته). اگر مجموعه مرجع یک مجموعه فازی، گسسته باشد به آن مجموعه فازی گسسته گفته می شود. نحوه نمایش یک مجموعه فازی گسسته می تواند به صورت مجموعه زوج های مرتب توصیف شده در تعریف ۱.۲.۲ و یا به صورت زیر باشد

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \quad (2.2)$$

اگر مجموعه مرجع به صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ متناهی باشد آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \quad (3.2)$$

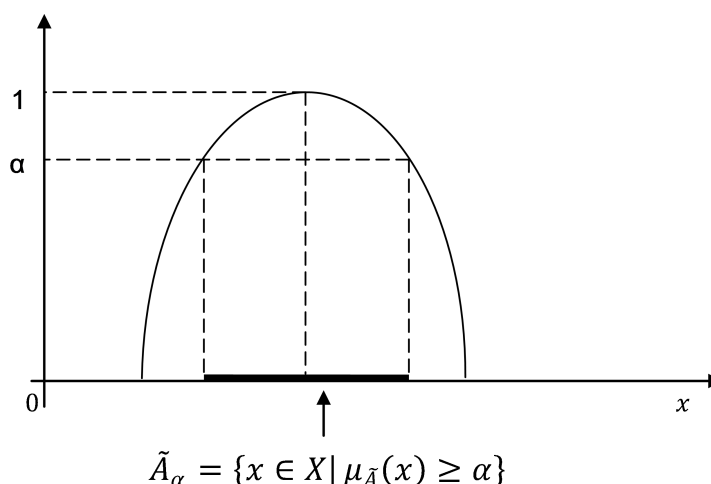
در اینجا نماد $\sum$ به معنای جمع نیست بلکه به معنای گسسته بودن مجموعه فازی است [۱].

تعریف ۳.۲.۲ (مجموعه فازی پیوسته). اگر مجموعه مرجع یک مجموعه فازی، نامتناهی باشد به آن مجموعه فازی پیوسته گفته می شود و درجه عضویت آن به صورت یک تابع بیان می شود. مجموعه فازی پیوسته را می توان به صورت زیر نشان داد

$$\tilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} dx \quad (4.2)$$

در اینجا نماد $\int$ به معنای انتگرال نیست بلکه به معنای پیوسته بودن مجموعه فازی است [۱].

تعریف ۴.۲.۲ (کمیت فازی). مجموعه فازی $\tilde{A}$ تعریف شده روی X را در نظر بگیرید. اگر X مجموعه اعداد حقیقی باشد آنگاه $\tilde{A}$ یک کمیت فازی است [۱].



شکل ۱.۲: آلفا برش مجموعه فازی.

تعریف ۵.۲.۲. (α - برش مجموعه فازی). مجموعه قطعی A_α ، متشکل از تمام عناصری از مجموعه X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α باشد که $\alpha \in [0, 1]$ ، مجموعه α - برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. در شکل ۱.۲ این مفهوم نشان داده شده است [۱].

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (۵.۲)$$

تعریف ۶.۲.۲. (ارتفاع مجموعه فازی). فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی در X باشد. ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، که با نماد $hgt(\tilde{A})$ یا $h(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h(\tilde{A}) = hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x)) \quad (۶.۲)$$

در شکل ۲.۲ ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ نشان داده شده است [۱].

تعریف ۷.۲.۲. (تکیه گاه مجموعه فازی). تکیه گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، که به صورت $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است کلاسیک متشکل از تمام عناصری از X که درجه عضویت آن در مجموعه فازی $\tilde{A}$ بزرگتر از صفر باشد. یعنی

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (۷.۲)$$

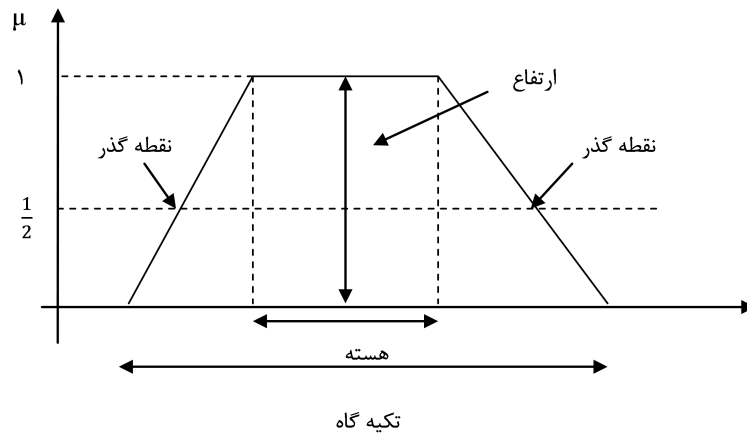
در شکل ۲.۲ تکیه گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ نشان داده شده است [۱].

تعریف ۸.۲.۲. (هسته مجموعه فازی). هسته مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، که به صورت $cor(\tilde{A})$ نمایش داده می‌شود عبارت است از یک مجموعه قطعی متشکل از همه عناصری از مجموعه مرجع X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ برابر یک باشد. این مجموعه به صورت ریاضی زیر توصیف می‌شود

$$cor(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \quad (۸.۲)$$

در شکل ۲.۲ هسته مجموعه فازی $\tilde{A}$ نشان داده شده است [۱].

تعریف ۹.۲.۲. (نقطه گذر مجموعه فازی). به نقطه ای که درجه عضویت آن برابر $0/5$ باشد، نقطه گذر یک مجموعه فازی گفته می شود. شکل ۲.۲ را ببینید [۱].

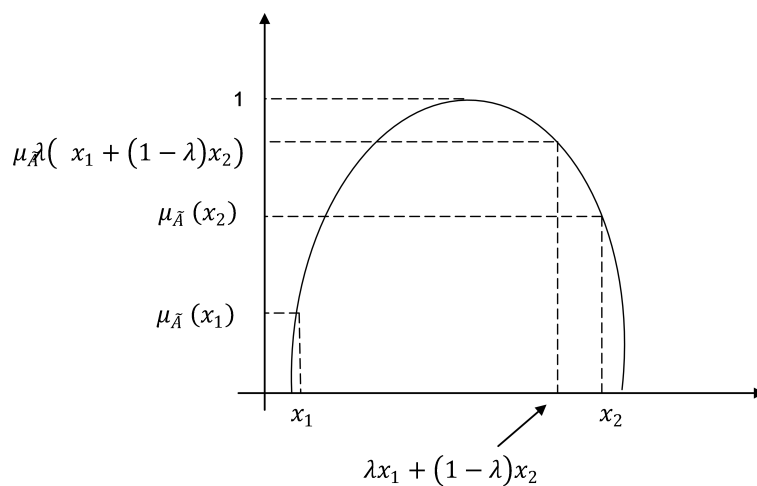


شکل ۲.۲: اجرای مختلف تابع عضویت.

تعریف ۱۰.۲.۲. (مجموعه فازی محدب). مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ و $x_1, x_2 \in \tilde{A}$ باشیم

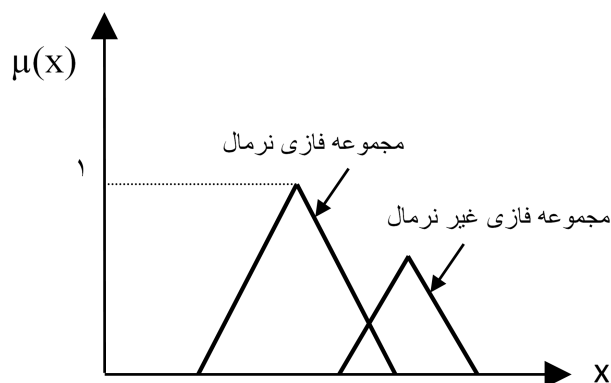
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \quad (9.2)$$

به عبارت دیگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، مجموعه α - برش آن مجموعه ای محدب باشد. شکل ۳.۲، یک مجموعه فازی محدب را نشان می دهد [۱].



شکل ۳.۲: مجموعه فازی محدب.

تعریف ۱۱.۲.۲. (مجموعه فازی نرمال). یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر و تنها اگر درجه عضویت حداقل یک عضو آن یک باشد. به عبارت دیگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر و تنها اگر ارتفاع آن واحد باشد. به مجموعه فازی که ارتفاع آن کمتر از یک باشد، مجموعه فازی غیرنرمال، گفته می شود. در شکل ۴.۲ این مطلب نشان داده شده است [۱].



شکل ۴.۲: مجموعه فازی نرمال و مجموعه فازی غیر نرمال.

۱.۲.۲ عملیات مجموعه‌های فازی

فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه های فازی تعریف شده روی مجموعه مرجع X باشند.

تعریف ۱۲.۲.۲. (متمم مجموعه فازی). متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، مجموعه ای فازی است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود [۱]

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (۱۰.۲)$$

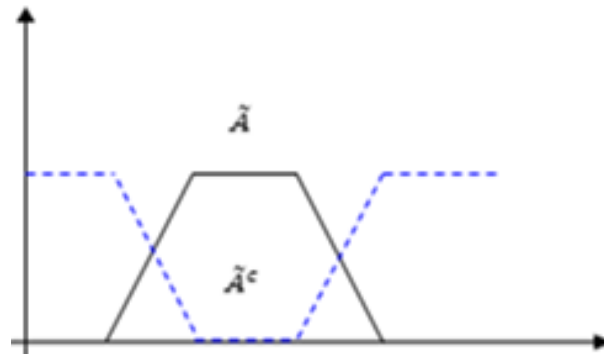
در شکل ۵.۲ متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$ نشان داده شده است.

تعریف ۱۳.۲.۲. (شمولیت فازی). مجموعه فازی $\tilde{A}$ زیرمجموعه، مجموعه فازی $\tilde{B}$ است اگر و تنها اگر

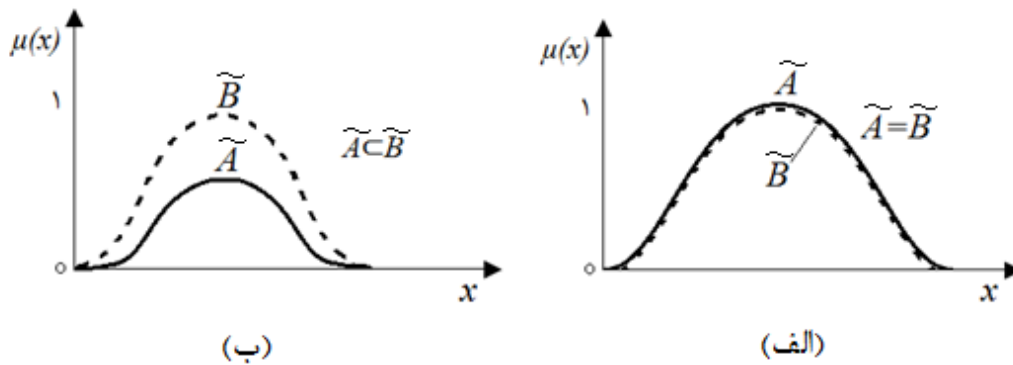
$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (۱۱.۲)$$

و به صورت $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ نمایش داده می شود [۱]. شکل ۶.۲ این مفهوم را نشان می دهد.

تعریف ۱۴.۲.۲. (برابری فازی). دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را برابر گویند اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ ، $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ [۱]. شکل ۶.۲ این مفهوم را نشان می دهد.



شکل ۵.۲: نمودار تابع عضویت متمم یک مجموعه فازی.



شکل ۶.۲: (الف) تساوی $\tilde{A} = \tilde{B}$ (ب) زیر مجموعه $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.

تعریف ۱۵.۲.۲. (اجتماع مجموعه های فازی). اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ، مجموعه ای فازی است و تابع عضویت آن به صورت زیر است [۱]

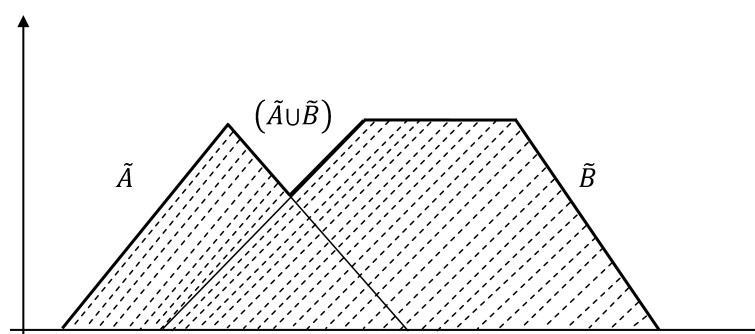
$$\mu_{(\tilde{A} \cup \tilde{B})}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad (۱۲.۲)$$

در شکل ۷.۲ اجتماع دو مجموعه فازی نشان داده شده است.

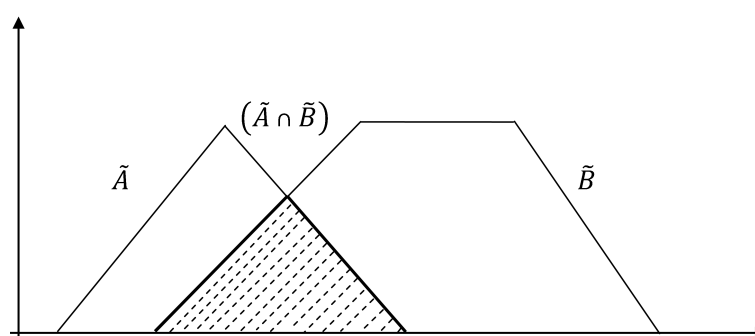
تعریف ۱۶.۲.۲. (اشتراک مجموعه های فازی). اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ، مجموعه ای فازی است و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود [۱]

$$\mu_{(\tilde{A} \cap \tilde{B})}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad (۱۳.۲)$$

در شکل ۸.۲ اشتراک دو مجموعه فازی نشان داده شده است.



شکل ۷.۲: اجتماع دو مجموعه فازی.



شکل ۸.۲: اشتراک دو مجموعه فازی.

۲.۲.۲ اعداد فازی

تعریف ۱۷.۲.۲ (عدد فازی). مجموعه فازی $\tilde{A}$ بر روی مجموعه مرجع R را عدد فازی می نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق نمایند [۱]

۱. $\tilde{A}$ مجموعه ای محدب باشد،

۲. $\tilde{A}$ مجموعه ای نرمال باشد،

۳. $\text{supp}(\tilde{A})$ مجموعه ای کراندار باشد.

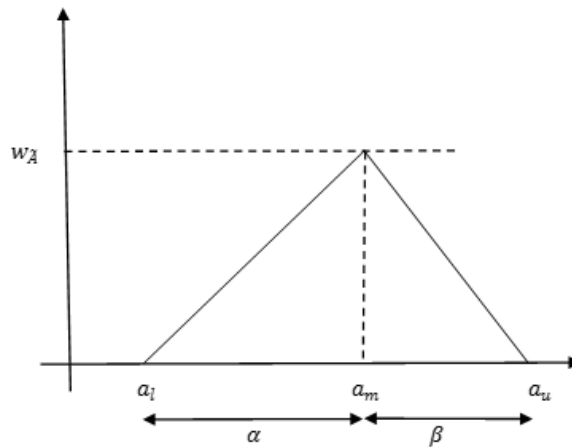
تعریف ۱۸.۲.۲ (عدد فازی غیر نرمال یا تعمیم یافته). اگر یک مجموعه فازی نرمال نباشد ولی دیگر شرایط اعداد فازی را داشته باشد یک عدد فازی غیر نرمال یا تعمیم یافته نامیده می شود [۱].

تعریف ۱۹.۲.۲ (عدد فازی مثلثی تعمیم یافته). عدد فازی مثلثی تعمیم یافته نوع خاص و پرکاربردی از اعداد فازی است که به صورت $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ نمایش داده می شود و تابع عضویت آن به صورت زیر

است [۲]

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} w_{\tilde{A}} \frac{x - a_l}{a_m - a_l} & x \in [a_l, a_m] \\ w_{\tilde{A}} \frac{a_u - x}{a_u - a_m} & x \in [a_m, a_u] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۴.۲)$$

که در آن $0 \leq w_{\tilde{A}} \leq 1$ و $a_l \leq a_m \leq a_u$ سه نقطه دلخواه از R هستند. در شکل ۹.۲ یک عدد فازی مثلثی تعمیم یافته نشان داده شده است.



شکل ۹.۲: عدد فازی مثلثی تعمیم یافته.

مجموعه همه اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته را با نماد Γ نمایش می دهیم.

نکته ۲۰.۲.۲. (منفی عدد فازی مثلثی تعمیم یافته). عدد فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ را در نظر بگیرید. در این صورت $-\tilde{A} = \langle -a_u, -a_m, -a_l; w_{\tilde{A}} \rangle$ [۲].

تعریف ۲۱.۲.۲. (عدد فازی مثلثی نرمال). اگر در تعریف قبل $w_{\tilde{A}} = 1$ باشد عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ نرمال خواهد بود و به صورت $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ نمایش داده می شود [۲].

نکته ۲۲.۲.۲. (نمایش دیگری از عدد فازی مثلثی نرمال). هر عدد فازی مثلثی نرمال $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ را می توان به صورت سه تایی $\tilde{A} = \langle m, \alpha, \beta \rangle$ نیز نمایش داد که در آن m نقطه ای است که درجه عضویت آن یک می باشد و α و β به ترتیب گستره سمت چپ و گستره سمت راست عدد فازی $\tilde{A}$ هستند. به وضوح $\alpha = a_m - a_l$ و $\beta = a_u - a_m$ (شکل ۹.۲) [۲].

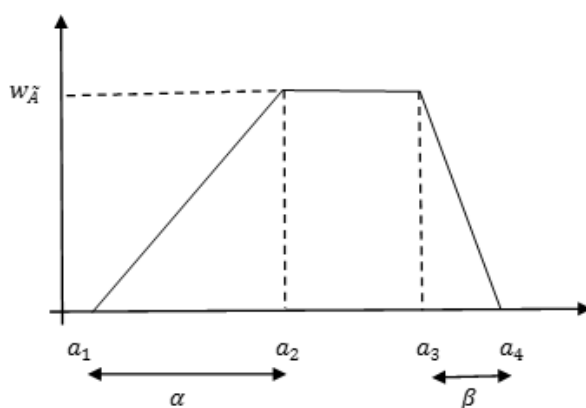
در ادامه برای راحتی به جای عبارت عدد فازی مثلثی نرمال از عبارت عدد فازی مثلثی استفاده می کنیم.

تعریف ۲۳.۲.۲. (اعداد فازی مثلثی غیر غالب). دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b, \gamma, \delta \rangle$ غیر غالب هستند هرگاه $a = b$ و $\alpha \neq \gamma$ و $\beta \neq \delta$ [۱۰۳].

تعریف ۲۴.۲.۲. (عدد فازی دوزنقه ای غیر نرمال یا تعمیم یافته). نوع دیگری از اعداد فازی پرکاربرد اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته است که به صورت $\tilde{A} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, w_{\tilde{A}} \rangle$ نمایش داده می شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است [۲]

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} w_{\tilde{A}} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & x \in [a_1, a_2] \\ w_{\tilde{A}} & x \in [a_2, a_3] \\ w_{\tilde{A}} \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & x \in [a_3, a_4] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۵.۲)$$

که در آن $0 \leq w_{\tilde{A}} \leq 1$ و $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ چهار نقطه دلخواه از R هستند. در شکل ۱۰.۲ یک عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۲: عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته.

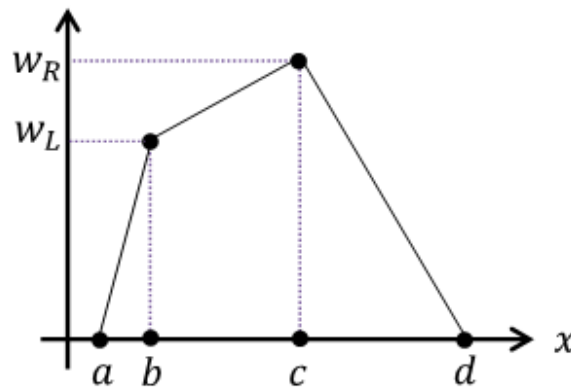
تعریف ۲۵.۲.۲. (عدد فازی دوزنقه ای نرمال). اگر در تعریف قبل $w_{\tilde{A}} = 1$ باشد عدد فازی دوزنقه ای نرمال است. در این نوع از اعداد فازی، بیش از یک نقطه با درجه عضویت یک وجود دارد. عدد فازی دوزنقه ای نرمال به صورت چهارتایی $\tilde{A} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ نمایش داده می شود [۲].

نکته ۲۶.۲.۲. (نمایش دیگری از عدد فازی دوزنقه ای نرمال). هر عدد فازی دوزنقه ای نرمال $\tilde{A} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ را می توان به صورت چهارتایی $\tilde{A} = \langle m, n, \alpha, \beta \rangle$ نیز نمایش داد که در آن $[m, n]$ هسته عدد فازی $\tilde{A}$ می باشد و α و β به ترتیب گستره سمت چپ و گستره سمت راست عدد فازی $\tilde{A}$ هستند که به ترتیب برابرند با $\alpha = a_2 - a_1$ و $\beta = a_4 - a_3$ (شکل ۱۰.۲) [۲].

تعریف ۲.۲.۲. (عدد فازی شبه دوزنقه ای). عدد فازی $\tilde{A}$ ، شبه دوزنقه ای با ارتفاع راست w_R و ارتفاع چپ w_L است و به صورت $\tilde{A} = (a, b, c, d; w_L, w_R)$ نمایش داده می شود اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد [۲]

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} w_L \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ w_L + (w_L - w_R) \frac{x-b}{c-b} & x \in [b, c] \\ w_R \frac{x-d}{d-c} & x \in [c, d] \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $0 \leq w_L \leq 1$ ، $0 \leq w_R \leq 1$ و $a \leq b \leq c \leq d$ چهار نقطه از R هستند (شکل ۱۱.۲). اگر $w_R = w_L$ ، عدد فازی شبه دوزنقه ای به عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته تبدیل خواهد شد.



شکل ۱۱.۲: عدد فازی شبه دوزنقه ای

تعریف ۲.۲.۲. (عدد فازی p -نرم دوزنقه ای). تابع عضویت عدد فازی p -نرم دوزنقه ای که به صورت $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w)_p$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود [۲]

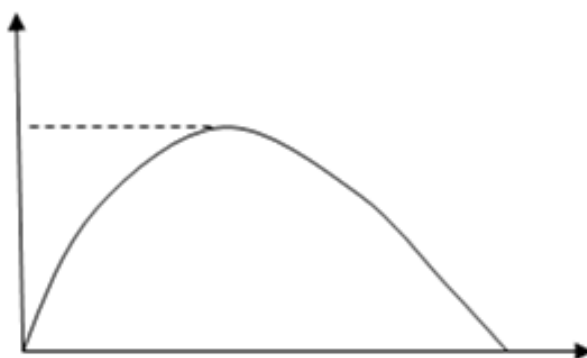
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} w \left[1 - \left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} & x \in [a_1, a_2] \\ w & x \in [a_2, a_3] \\ w \left[1 - \left(\frac{a_4-x}{a_4-a_3} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} & x \in [a_3, a_4] \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن p یک عدد صحیح مثبت است.

تعریف ۲۹.۲.۲. (عدد فازی LR). فرض کنید عدد فازی $\tilde{A}$ ، دارای تابع عضویت زیر باشد [۲]

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x > m \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

که در آن L و R ، توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0, 1]$ هستند که $R(0) = L(0) = 1$ در این صورت $\tilde{A}$ را عدد فازی LR می نامیم و آن را با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می دهیم. عدد m را مقدار میانی و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست عدد فازی $\tilde{A}$ ، می نامیم. L و R ، توابع مرجع نامیده می شوند (شکل ۱۲.۲).



شکل ۱۲.۲: عدد فازی LR .

تعریف ۳۰.۲.۲. (عدد بازه ای). عدد بازه ای عبارت است از $A = [a_L, a_R] = \{a \mid a_L \leq a \leq a_R\}$ ، که a_L و a_R اعداد حقیقی هستند که به ترتیب کران پایین و کران بالای بازه A نامیده می شوند [۱۰۳].

تعریف ۳۱.۲.۲. (نمایش دیگر از عدد بازه ای). فرض کنید $A = [a_L, a_R]$ مفروض باشد. عدد بازه ای A را می توان به صورت $A = \langle m_A, w_A \rangle$ نیز نمایش داد که در آن

$$m_A = \frac{a_R + a_L}{2}$$

۹

$$w_A = \frac{a_R - a_L}{2}$$

به ترتیب عبارتند از نقطه میانی و نصف طول بازه A [۱۰۳].

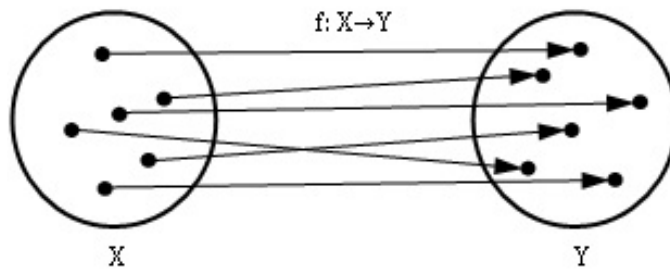
نکته ۳.۲.۲.۲. اگر در هر عدد دوزنقه ای نرمال $a_1 = a_2$ و $a_3 = a_4$ ، آنگاه عدد فازی دوزنقه ای به یک عدد بازه ای تبدیل می شود.

تعریف ۳.۲.۲. (اعداد بازه ای غیر غالب). دو عدد بازه ای $A = \langle m_A, w_A \rangle$ و $B = \langle m_B, w_B \rangle$ ، غیر غالب هستند هرگاه $m_A = m_B$ و $w_A \neq w_B$ [۱۰۳].

۳.۲.۲ عملیات اعداد فازی

در این قسمت به تعریف عملیات بین اعداد فازی خواهیم پرداخت. بدین منظور ابتدا مفهوم اصل گسترش را که یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه های فازی است بیان خواهیم کرد. این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیر فازی به گونه ای که به صورت کمیت های فازی درآیند. به بیان دیگر اصل گسترش، روشی جهت فازی کردن ریاضیات معمولی می باشد. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

فرض کنید که $f: X \rightarrow Y$ ، تابعی باشد که هر عنصر x از مجموعه X ، را به نقطه ای از مجموعه Y می نگارد. بنابراین تابع f بر هر نقطه از X عمل کرده و نقطه ای از Y را به آن نسبت می دهد (شکل ۱۳.۲). قصد داریم تابع f را طوری گسترش دهیم که بر زیرمجموعه فازی از X اثر کند.



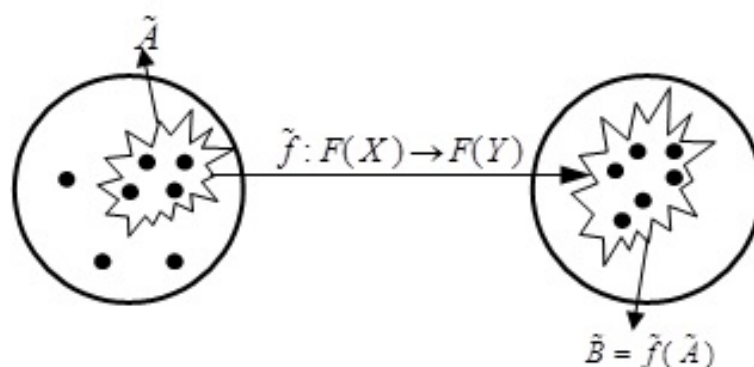
شکل ۱۳.۲: روش اثر یک تابع قطعی.

در این حالت انتظار داریم حاصل عمل تابع f بر زیرمجموعه فازی مورد نظر از X یک زیرمجموعه فازی از Y باشد. به عبارتی تابع f ، تابع جدیدی به صورت زیر القا می کند

$$f: F(X) \rightarrow F(Y)$$

$$\tilde{A} \rightarrow f(\tilde{A})$$

که در آن $f(\tilde{A})$ ، زیر مجموعه فازی از Y است، $F(X)$ و $F(Y)$ به ترتیب مجموعه تمام زیرمجموعه های فازی روی مجموعه های X و Y می باشد (شکل ۱۴.۲).



شکل ۱۴.۲: روش اثر یک تابع فازی.

تعریف ۳۴.۲.۲. (اثر یک تابع بر روی مجموعه فازی). فرض کنید تابع $f: X \rightarrow Y$ و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از X باشد، آنگاه f تابع جدیدی به صورت زیر القا می کند [۴]

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} (\mu_{\tilde{A}}(x)) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases} \quad (۱۷.۲)$$

مثال ۳۵.۲.۲. تابع $f(x) = 2x$ را در نظر بگیرید و فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X بیانگر عدد تقریباً ۵ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0/4}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{0/4}{7} \right\}$$

آنگاه طبق اصل توسیع داریم

$$f(\tilde{A}) = \left\{ \frac{0/4}{6}, \frac{0/7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{0/7}{12}, \frac{0/4}{14} \right\}$$

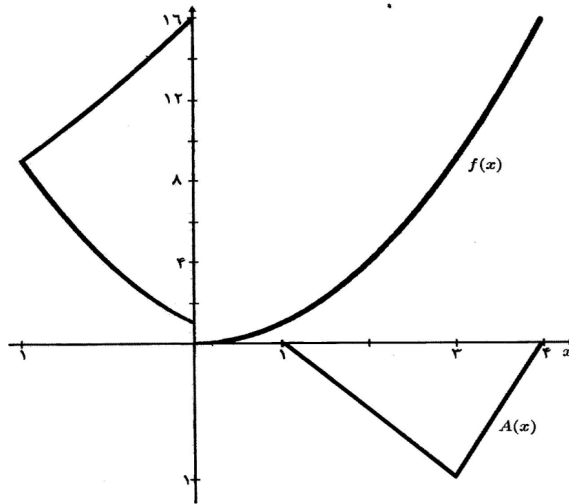
مثال ۳۶.۲.۲. فرض کنید $f(x) = x^2$ و مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه اعداد حقیقی توصیف کننده تقریباً ۳، به صورت زیر تعریف شده باشد [۵]

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x < 3 \\ 4-x & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

از آنجایی که در بازه $[1, 4]$ ، تابع $f(x)$ یک به یک است، داریم

$$\begin{aligned} \mu_{f(\tilde{A})}(y) &= \sup_{y=f(x)} (\mu_{\tilde{A}}(x)) \\ &= \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)) = \mu_{\tilde{A}}(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}-1}{2} & 1 \leq y < 9 \\ 4-\sqrt{y} & 9 \leq y < 16 \end{cases} \end{aligned}$$

چگونگی توسیع $y = f(x) = x^2$ به حالتی که به جای x ، مجموعه فازی $\tilde{A}$ قرار گیرد، در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱۵.۲: مفهوم اصل گسترش.

بنابراین عملیات بین اعداد فازی به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۳۷.۲.۲. (عملیات بین اعداد فازی). عملیات ریاضی برای اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می شوند [۷۷].

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(z) &= \bigvee_{z=x+y} \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \\ \mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(z) &= \bigvee_{z=x-y} \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \\ \mu_{\tilde{A} \otimes \tilde{B}}(z) &= \bigvee_{z=x \cdot y} \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \right) \\ \mu_{\tilde{A} \oslash \tilde{B}}(z) &= \bigvee_{z=\frac{x}{y}} \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \right)\end{aligned}$$

(۱۸.۲)

لازم به ذکر است که عملگرهای $\bigvee$ و $\bigwedge$ به ترتیب عبارتند از ماکزیمم و مینیمم. همان طور که پیش تر اشاره شد یکی از پر کاربرد ترین نوع از اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته می باشند. فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u; w_{\tilde{B}} \rangle$ دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته باشند. آنگاه عملیات بین اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته با توجه به رابطه ۱۸.۲ به صورت زیر می باشند

$$\begin{aligned}\tilde{A} \oplus \tilde{B} &= \langle a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u; \min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}) \rangle \\ \tilde{A} \ominus \tilde{B} &= \langle a_l - b_u, a_m - b_m, a_u - b_l; \min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}) \rangle \\ k \cdot \tilde{A} &= \begin{cases} \langle ka_l, ka_m, ka_u; w_{\tilde{A}} \rangle & k \geq 0 \\ \langle ka_u, ka_m, ka_l; w_{\tilde{A}} \rangle & k < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

(۱۹.۲)

و به طور معادل برای هر دو عدد فازی مثلثی نرمال $\tilde{M} = \langle m, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{N} = \langle n, \gamma, \delta \rangle$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{M} \oplus \tilde{N} &= \langle m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta \rangle \\ \tilde{M} \ominus \tilde{N} &= \langle m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma \rangle \\ \tilde{M} \otimes \tilde{N} &= \begin{cases} \langle m.n, n\alpha + m\gamma, n\beta + m\delta \rangle & m, n \geq 0 \\ \langle m.n, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma \rangle & m < 0, n \geq 0 \\ \langle m.n, -n\beta - m\delta, -n\alpha - m\gamma \rangle, & m, n < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

(۲۰.۲)

۴.۲.۲ عملیات اعداد بازه ای

تعریف ۳۸.۲.۲. (عملیات بین اعداد بازه ای). فرض کنید $A = [a_L, a_R]$ و $B = [b_L, b_R]$ دو عدد بازه ای باشند. آنگاه اعمال $\oplus$ و $\ominus$ بین اعداد بازه ای به صورت زیر تعریف می شوند [۱۰۳].

$$\begin{aligned}A \oplus B &= [a_L + b_L, a_R + b_R] \\ A \ominus B &= [a_L - b_R, a_R - b_L]\end{aligned}$$

(۲۱.۲)

همچنین اعمال $\otimes$ و $\oslash$ بین اعداد بازه ای به صورت زیر تعریف می شود [۱۰۳].

$$\begin{aligned}A \otimes B &= [\min(a_L \cdot b_L, a_L \cdot b_R, a_R \cdot b_L, a_R \cdot b_R), \max(a_L \cdot b_L, a_L \cdot b_R, a_R \cdot b_L, a_R \cdot b_R)] \\ A \oslash B &= \left[\min\left(\frac{a_L}{b_L}, \frac{a_L}{b_R}, \frac{a_R}{b_L}, \frac{a_R}{b_R}\right), \max\left(\frac{a_L}{b_L}, \frac{a_L}{b_R}, \frac{a_R}{b_L}, \frac{a_R}{b_R}\right) \right]\end{aligned}$$

(۲۲.۲)

۵.۲.۲ مقایسه اعداد فازی

مقایسه یک مجموعه از گزینه ها و انتخاب بهترین آن ها آنقدر مهم است که سبب پیدایش شاخه جذاب تحقیق در عملیات است. به طور خاص، در صورتی که ارزش و اهمیت گزینه های مختلف به صورت اعداد فازی بیان شوند، برای تعیین ارجحیت گزینه های مزبور نسبت به یکدیگر، لازم است روشی ارائه گردد که با استفاده از آن بتوان اعداد فازی را مانند اعداد معمولی مقایسه و مرتب کرد. اما تمام اعداد فازی نسبت به یکدیگر مسلط نمی باشند. از اینرو نمی توان مانند اعداد معمولی به صورت مستقیم با یکدیگر مقایسه شوند. روش هایی که برای مقایسه و مرتب کردن اعداد فازی ارائه می شوند، رتبه بندی اعداد فازی نام دارند و نقش بسیار مهمی در برنامه ریزی خطی فازی [۴۱، ۵۴، ۵۵، ۸۴، ۸۵]، برنامه ریزی درجه دوم فازی [۹۷]، زمین شناسی [۳۵]، پزشکی [۹]، تصمیم گیری فازی [۶۵]، آنالیز ریسک [۲۴، ۳۸]، شبکه [۴۳] و مساله حمل و نقل [۴۰] ایفا می کنند. روش های مختلفی برای رتبه بندی اعداد فازی پیشنهاد شده است که هر کدام بر اساس یک یا چند ویژگی مختلف از اعداد فازی استفاده می کنند. این ویژگی ممکن است مرکز ثقل، مساحت یا گستره اعداد فازی باشد. در این بخش به معرفی برخی از این روش ها خواهیم پرداخت.

تعریف ۳۹.۲.۲ (مقایسه اعداد فازی). فرض کنید $\mathcal{R} : F(R) \rightarrow R$ تابع مقایسه باشد که در آن $F(R)$ مجموعه تمام اعداد فازی تعریف شده بر روی مجموعه اعداد حقیقی است. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند. در این صورت داریم

$$1. \text{ اگر } \mathcal{R}(\tilde{A}) < \mathcal{R}(\tilde{B}) \text{ آنگاه } \tilde{A} \prec \tilde{B}$$

$$2. \text{ اگر } \mathcal{R}(\tilde{A}) > \mathcal{R}(\tilde{B}) \text{ آنگاه } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

در این راستا روش های متفاوتی برای مرتب کردن اعداد فازی و مقایسه آنها ارائه شده است. که در ادامه برخی از آنها را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۴۰.۲.۲ (تابع مقایسه آکایار). فرض کنید اعداد فازی مثلثی نرمال $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. آکایار سه تایی زیر را برای رتبه بندی اعداد فازی معرفی کرد [۷]

$$Rank(\tilde{A}_i) = \left(x_{\tilde{A}_i} - \frac{1}{r} y_{\tilde{A}_i}, 1 - y_{\tilde{A}_i}, a_{im} \right)$$

که در آن $(x_{\tilde{A}_i}, y_{\tilde{A}_i})$ مختصات مرکز دایره محاطی است که به صورت زیر به دست می آید

$$(x_{\tilde{A}_i}, y_{\tilde{A}_i}) = \frac{(a_{iu} - a_{il})(a_{im}, 1) + \sqrt{1 + (a_{iu} - a_{im})^2}(a_{il}, 0) + \sqrt{1 + (a_{im} - a_{il})^2}(a_{iu}, 0)}{(a_{iu} - a_{il}) + \sqrt{1 + (a_{iu} - a_{im})^2} + \sqrt{1 + (a_{im} - a_{il})^2}}$$

سپس با استفاده از سه تایی تعریف شده و ترتیب الفبایی که در ادامه تعریف می شود، مقایسه انجام می شود.

تعریف ۴۱.۲.۲. (ترتیب الفبایی). n -تایی های $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ را در نظر بگیرید. ترتیب الفبایی که با نماد $<_L$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود [۲]

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) <_L (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff (\exists m = 1, 2, \dots, n)(\forall i < m)(x_i = y_i) \text{ و } (x_m < y_m)$$

تعریف ۴۲.۲.۲. (تابع مقایسه چن). فرض کنید اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. چن برای رتبه بندی اعداد فازی از مفوم مجموعه ماکزیمم و مجموعه مینیمم استفاده کرد که توابع عضویت آن ها به ترتیب به صورت زیر می باشند [۲۳]

$$\mu_M(x) = \begin{cases} w \left[\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right]^k & x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} w \left[\frac{x - x_{\max}}{x_{\min} - x_{\max}} \right]^k & x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

که در آن $w = \inf w_{\tilde{A}_i}$ و $S_i = \text{supp}(\tilde{A}_i)$, $S = \cup_{i=1}^n S_i$, $x_{\max} = \sup S$, $x_{\min} = \inf S$ سپس $U_M(i)$ و $U_G(i)$ را که به ترتیب عبارتند از میزان تمایل به راست و میزان تمایل به چپ عدد فازی $\tilde{A}_i$ به صورت زیر تعریف کرد

$$U_M(i) = \sup_x (\mu_{\tilde{A}_i}(x), \mu_M(x)), \quad i = 1, \dots, n$$

$$U_G(i) = \sup_x (\mu_{\tilde{A}_i}(x), \mu_G(x)), \quad i = 1, \dots, n$$

در نهایت تابع مقایسه چن به صورت زیر می باشد

$$U_T(i) = \frac{U_M(i) + w - U_G(i)}{2}, \quad i = 1, \dots, n$$

تعریف ۴۳.۲.۲. (تابع مقایسه چن و چن). فرض کنید اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند که $0 < a_{i1} < a_{i2} < a_{i3} < a_{i4} < k$ و k عدد حقیقی دلخواه می باشد. روش رتبه بندی چن و چن به صورت زیر است [۲۴]

گام اول. اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}_i$ را به صورت زیر به اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته استاندارد تبدیل می کنیم

$$\tilde{A}_j^* = \left(\frac{a_{j1}}{k}, \frac{a_{j2}}{k}, \frac{a_{j3}}{k}, \frac{a_{j4}}{k}, w_{\tilde{A}_j} \right) = \left(a_{j1}^*, a_{j2}^*, a_{j3}^*, a_{j4}^*, w_{\tilde{A}_j^*} \right)$$

که در آن $w_{\tilde{A}_j^*} = w_{\tilde{A}_j}$ و $0 < a_{j1}^* < a_{j2}^* < a_{j3}^* < a_{j4}^* < 1$.
گام دوم. برای هر عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته استاندارد $\tilde{A}_j^*$ مرکز ثقل را به صورت زیر محاسبه کنید

$$y_{\tilde{A}_j^*} = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}_j^*} \times \left(\frac{a_{j3}^* - a_{j2}^*}{a_{j4}^* - a_{j1}^*} + 2 \right)}{6} & a_{j1}^* \neq a_{j4}^* \\ \frac{w_{\tilde{A}_j^*}}{2} & a_{j1}^* = a_{j4}^* \end{cases}$$

$$x_{\tilde{A}_j^*} = \frac{y_{\tilde{A}_j^*}(a_{j3}^* + a_{j2}^*) + (a_{j4}^* + a_{j1}^*)(w_{\tilde{A}_j^*} - y_{\tilde{A}_j^*})}{2w_{\tilde{A}_j^*}}$$

گام سوم. برای هر عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته استاندارد $\tilde{A}_j^*$ ضریب انحراف استاندارد را به صورت زیر محاسبه کنید

$$s_{\tilde{A}_j^*} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^4 (a_{jk}^* - a_j^m)^2}{3}}$$

$$a_j^m = \frac{a_{j1}^* + a_{j2}^* + a_{j3}^* + a_{j4}^*}{4} \quad \text{که در آن}$$

گام چهارم. با استفاده از ضریب انحراف $s_{\tilde{A}_j^*}$ مقدار $y_{\tilde{A}_j^*}^s$ را به صورت زیر محاسبه کنید

$$y_{\tilde{A}_j^*}^s = \frac{w_{\tilde{A}_j^*}}{2} - y_{\tilde{A}_j^*} \times s_{\tilde{A}_j^*}$$

بنابراین به ازای $j = 1, \dots, n$ برای هر عدد فازی $\tilde{A}_j^*$ نقطه جدید $(x_{\tilde{A}_j^*}^s, y_{\tilde{A}_j^*}^s)$ به دست می آید که $0 < y_{\tilde{A}_j^*}^s < 0.5$.

گام پنجم. با استفاده از نقطه جدید $(x_{\tilde{A}_j^*}^s, y_{\tilde{A}_j^*}^s)$ اندیس رتبه بندی $Score(\tilde{A}_j^*)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$Score(\tilde{A}_j^*) = \sqrt{(x_{\tilde{A}_j^*} - \min_{j=1, \dots, n}(x_{\tilde{A}_j^*}))^2 + (y_{\tilde{A}_j^*}^s)^2} \quad (23.2)$$

در نهایت با استفاده از اندیس رتبه بندی $Score(\tilde{A}_j^*)$ اعداد فازی با یکدیگر مقایسه می شوند.

تعریف ۴۴.۲.۲. (تابع مقایسه چنگ). فرض کنید اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. چنگ مرکز ثقل هر عدد فازی $\tilde{A}_i$ را به صورت زیر محاسبه کرد [۲۶]

$$x_{\tilde{A}_i} = \frac{\int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} (x f_{\tilde{A}_i}^L) dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} x dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} (x f_{\tilde{A}_i}^R) dx}{\int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} f_{\tilde{A}_i}^L dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} f_{\tilde{A}_i}^R dx}$$

$$y_{\tilde{A}_i} = w_{\tilde{A}_i} \frac{\int_0^1 (y g_{\tilde{A}_i}^L) dy + \int_0^1 (y g_{\tilde{A}_i}^R) dy}{\int_0^1 g_{\tilde{A}_i}^L dy + \int_0^1 g_{\tilde{A}_i}^R dy}$$

سپس تابع رتبه بندی $\Re(\cdot)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$\Re(\tilde{A}_i) = \sqrt{(x_{\tilde{A}_i})^2 + (y_{\tilde{A}_i})^2}$$

که در آن $f_{\tilde{A}_i}^L$ و $f_{\tilde{A}_i}^R$ به ترتیب تابع عضویت سمت چپ و تابع عضویت سمت راست عدد فازی $\tilde{A}_i$ می باشند. همچنین $g_{\tilde{A}_i}^L$ و $g_{\tilde{A}_i}^R$ به ترتیب معکوس توابع $f_{\tilde{A}_i}^L$ و $f_{\tilde{A}_i}^R$ می باشند.

تعریف ۴۵.۲.۲. (تابع مقایسه چو و تساو). فرض کنید اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. چو و تساو برای هر عدد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته مرکز ثقل را به صورت زیر محاسبه کردند [۲۸]

$$x_{\tilde{A}_i} = \frac{\int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} (x f_{\tilde{A}_i}^L) dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} x dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} (x f_{\tilde{A}_i}^R) dx}{\int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} f_{\tilde{A}_i}^L dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} dx + \int_{a_{i\downarrow}}^{a_{i\uparrow}} f_{\tilde{A}_i}^R dx}$$

$$y_{\tilde{A}_i} = \frac{\int_0^{w_{\tilde{A}_i}} (y g_{\tilde{A}_i}^L) dy + \int_0^{w_{\tilde{A}_i}} (y g_{\tilde{A}_i}^R) dy}{\int_0^{w_{\tilde{A}_i}} g_{\tilde{A}_i}^L dy + \int_0^{w_{\tilde{A}_i}} g_{\tilde{A}_i}^R dy}$$

که در آن $f_{\tilde{A}_i}^L$ و $f_{\tilde{A}_i}^R$ به ترتیب تابع عضویت راست و تابع عضویت چپ عدد فازی $\tilde{A}_i$ باشند. همچنین $g_{\tilde{A}_i}^L$ و $g_{\tilde{A}_i}^R$ به ترتیب معکوس توابع $f_{\tilde{A}_i}^L$ و $f_{\tilde{A}_i}^R$ می باشند. فاصله بین نقطه مرکز ثقل $(x_{\tilde{A}_i}, y_{\tilde{A}_i})$ و مبدا $(0, 0)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$S(\tilde{A}_i) = x_{\tilde{A}_i} y_{\tilde{A}_i} \quad (۲۴.۲)$$

حال اعداد فازی $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, n$ بر اساس $S(\tilde{A}_i)$ با یکدیگر مقایسه می شوند.

تعریف ۴۶.۲.۲. (تابع مقایسه لی و چن). فرض کنید اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. تابع رتبه بندی ارایه شده توسط لی و چن به صورت زیر است [۷۸]

$$\Re(\tilde{A}_i) = \alpha w_{\tilde{A}_i} + (1 - \alpha) \left[\beta R_{iM}(\tilde{A}_i) + (1 - \beta) L_{iM}(\tilde{A}_i) \right] - \frac{1}{3} (1 - \alpha) \left[\beta R_{iS}(\tilde{A}_i) + (1 - \beta) L_{iS}(\tilde{A}_i) + T_{iS}(\tilde{A}_i) \right]$$

که در آن α و β به ترتیب ضریب اطمینان تصمیم گیرنده و درجه خوش بینی می باشند که معمولاً $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.5$ در نظر گرفته می شوند. $R_{iM}(\tilde{A}_i)$ و $R_{iM}(\tilde{A}_i)$ به ترتیب عبارتند از میانگین مولفه های سمت راست و میانگین مولفه های سمت چپ که به صورت زیر تعریف می شوند

$$R_{iM}(\tilde{A}_i) = \frac{a_{i3} + a_{i4}}{2}$$

$$L_{iM}(\tilde{A}_i) = \frac{a_{i1} + a_{i2}}{2}$$

همچنین $R_{iS}(\tilde{A}_i)$ ، $L_{iS}(\tilde{A}_i)$ و $T_{iS}(\tilde{A}_i)$ به ترتیب انحراف معیار استاندارد مولفه های سمت راست، انحراف معیار استاندارد مولفه های سمت چپ و انحراف معیار مولفه های تمام مولفه ها نامیده می شوند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$R_{iS}(\tilde{A}_i) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{j=3}^4 (a_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j=3}^4 a_{ij})^2}$$

$$L_{iS}(\tilde{A}_i) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (a_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_{ij})^2}$$

$$T_{iS}(\tilde{A}_i) = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 (a_{ij} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 a_{ij})^2}$$

تعریف ۴۷.۲.۲. (تابع مقایسه لیو و وانگ). فرض کنید اعداد فازی مثلثی نرمال $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ با تابع عضویت راست $f_{\tilde{A}_i}^R$ و تابع عضویت چپ $f_{\tilde{A}_i}^L$ مفروض باشند. لیو و وانگ تابع رتبه بندی به صورت زیر معرفی کردند [۸۱]

$$I_p^\alpha(\tilde{A}_i) = \alpha \int_0^1 g_{\tilde{A}_i}^R(y) dy + (1 - \alpha) \int_0^1 g_{\tilde{A}_i}^L(y) dy$$

که در آن $g_{\tilde{A}_i}^L$ و $g_{\tilde{A}_i}^R$ به ترتیب معکوس توابع $f_{\tilde{A}_i}^L$ و $f_{\tilde{A}_i}^R$ می باشند. همچنین $\alpha \in [0, 1]$ درجه خوش بینی تصمیم گیرنده است.

تعریف ۴۸.۲.۲. (تابع مقایسه فرتمپس و روبنز). فرض کنید اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. تابع رتبه بندی فرتمپس و روبنز به صورت زیر است [۴۹]

$$\Re(\tilde{A}_i) = \frac{1}{2w_{\tilde{A}_i}} \int_1^{w_{\tilde{A}_i}} (a_\alpha^L + a_\alpha^R) d\alpha$$

که در آن a_α^L و a_α^R به ترتیب کران پایین و کران بالای بازه α - برش عدد فازی $\tilde{A}_i$ می باشند.

تعریف ۴۹.۲.۲. (تابع مقایسه موراکامی و همکاران). فرض کنید اعداد فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مفروض باشند. روش موراکامی و همکاران برای مقایسه اعداد فازی بر اساس مفهوم α -برش می باشد. بدین منظور آنها a_i^* را به صورت زیر تعریف کردند [۹۵]

$$a_i^* = \max \{x \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x) \geq \alpha\} \quad i \in [0, 1]$$

سپس با مقایسه مقادیر قطعی a_i^* , $i = 1, \dots, n$ اعداد فازی را با یکدیگر مقایسه می کنند.

تعریف ۵۰.۲.۲. (تابع مقایسه ناصری و همکاران). فرض کنید به ازای $j = 1, \dots, n$ اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}_j = \langle m_j, n_j, \sigma_j, \beta_j, w_{\tilde{A}_j} \rangle$ مفروض باشند. زاویه حاصل از برخورد تابع عضویت راست و تابع عضویت چپ به صورت زیر محاسبه می شود [۱۰۲]

$$\cos(\Theta) = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1||v_2|} = \frac{w_{\tilde{A}_j}^\gamma - \sigma\beta}{\sqrt{(w_{\tilde{A}_j}^\gamma + \sigma^\gamma)(w_{\tilde{A}_j}^\gamma + \beta^\gamma)}}$$

که در آن $\cdot$ ضرب اسکالر بین بردارهای جهت v_1 و v_2 می باشد. همچنین $|v_1|$ و $|v_2|$ به ترتیب اندازه بردارهای v_1 و v_2 می باشند.

حال با استفاده از زاویه Θ و شکل پارامتریک $A_j(\alpha) = [A_j^L(\alpha), A_j^R(\alpha)]$ زاویه عدد فازی $\tilde{A}_j$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\phi(\tilde{A}_j) = \int_0^1 (A_j^L(\alpha) + A_j^R(\alpha) + \alpha \cos(\Theta)) d\alpha$$

حال اعداد فازی $\tilde{A}_j$, $j = 1, \dots, n$ با استفاده از زوایای $\phi(\tilde{A}_j)$ با یکدیگر مقایسه می شوند.

تعریف ۵۱.۲.۲. (تابع مقایسه یاگر). فرض کنید اعداد فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ با توابع عضویت $\mu_{\tilde{A}_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ مفروض باشند. همچنین $S_i = \text{supp} \tilde{A}_i$, $x_{\min} = \inf(S_i)$ و $x_{\max} = \sup(S_i)$ تابع مقایسه یاگر به صورت زیر تعریف می شود [۱۳۳]

$$\Re(\tilde{A}_i) = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(x) \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx} \quad (۲۵.۲)$$

که در آن $g(x)$ ، درجه اهمیت مقدار x است که تابعی انتگرال پذیر است. اگر $g(x) = x$ باشد، آنگاه $\Re(\tilde{A}_i)$ را مرکز ثقل عدد فازی $\tilde{A}_i$ نامیده و با $C_w(\tilde{A}_i)$ نمایش می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$\Re(\tilde{A}_i) = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx} \quad (۲۶.۲)$$

تعریف ۵۲.۲.۲. (شاخص پذیرش نایم و پال برای مقایسه اعداد فازی). فرض کنید اعداد فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b, \gamma, \sigma \rangle$ مفروض باشند. شاخص پذیرش رابطه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ به صورت زیر است [۱۰۳]

$$\Upsilon(\tilde{A} \prec \tilde{B}) = \frac{b - a}{\beta + \gamma} \quad (۲۷.۲)$$

۱. اگر $\Upsilon(\tilde{A} \prec \tilde{B}) \geq ۱$ آنگاه در حالت کمینه سازی $\tilde{A}$ تماماً بر $\tilde{B}$ غالب است و در حالت بیشینه سازی $\tilde{B}$ تماماً بر $\tilde{A}$ غالب است و به صورت $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ نشان داده می شود.

۲. اگر $۰ < \Upsilon(\tilde{A} \prec \tilde{B}) < ۱$ ، آنگاه در حالت کمینه سازی $\tilde{A}$ نسبتاً بر $\tilde{B}$ غالب است و در حالت بیشینه سازی $\tilde{B}$ نسبتاً بر $\tilde{A}$ غالب است و به صورت $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ نشان داده می شود.

۳. اگر $\Upsilon(\tilde{A} \prec \tilde{B}) = ۰$ ، $\beta = \sigma$ و $\alpha > \gamma$ آنگاه گوییم در حالت کمینه سازی $\tilde{A}$ بر $\tilde{B}$ غالب راست است و در حالت بیشینه سازی $\tilde{B}$ بر $\tilde{A}$ غالب راست است و به صورت $\tilde{A} \preceq_R \tilde{B}$ نشان می دهیم.

۴. اگر $\Upsilon(\tilde{A} \prec \tilde{B}) = ۰$ ، $\alpha = \gamma$ و $\beta < \sigma$ ، آنگاه گوییم در حالت کمینه سازی $\tilde{A}$ بر $\tilde{B}$ غالب چپ است و در حالت بیشینه سازی $\tilde{B}$ بر $\tilde{A}$ غالب چپ است و به صورت $\tilde{A} \preceq_L \tilde{B}$ نشان می دهیم.

نکته ۵۳.۲.۲. (تبدیل نامساوی فازی مثلثی به تساوی فازی مثلثی). فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$ دو عدد فازی مثلثی باشند که $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$. آنگاه با افزودن متغیرهای فازی $\tilde{S} = \langle s_l, s_m, s_u \rangle$ و $\tilde{T} = \langle t_l, t_m, t_u \rangle$ می توان نامساوی را به صورت زیر به تساوی تبدیل نمود

$$\tilde{A} \oplus \tilde{S} = \tilde{B} \oplus \tilde{T} \quad (۲۸.۲)$$

یا به طور معادل

$$\langle a_l, a_m, a_u \rangle \oplus \langle s_l, s_m, s_u \rangle = \langle b_l, b_m, b_u \rangle \oplus \langle t_l, t_m, t_u \rangle \quad (۲۹.۲)$$

به عنوان مثال دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle ۱, ۲, ۴ \rangle$ و $\tilde{B} = \langle ۵, ۷, ۸ \rangle$ را در نظر بگیرید. به وضوح $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$. همان طور که می بینید نمی توان فقط با اضافه کردن یک مقدار فازی به طرف راست نامساوی اخیر را به یک تساوی فازی تبدیل نمود. در حالیکه با اضافه کردن اعداد فازی $\langle ۵, ۷, ۹ \rangle$ و $\langle ۱, ۲, ۳ \rangle$ به ترتیب به طرف چپ و راست نامساوی فازی داریم

$$\langle ۱, ۲, ۴ \rangle \oplus \langle ۵, ۷, ۹ \rangle = \langle ۶, ۹, ۱۱ \rangle = \langle ۵, ۷, ۸ \rangle \oplus \langle ۱, ۲, ۳ \rangle$$

۶.۲.۲ مقایسه اعداد بازه ای

روش های زیاد و مختلفی برای مقایسه اعداد بازه ای وجود دارد که در این بخش به معرفی برخی از روش های پرکاربرد خواهیم پرداخت.

تعریف ۵۴.۲.۲. (روش دلگادو و همکاران). فرض کنید دو عدد بازه ای $[a_L, a_R]$ و $[b_L, b_R]$ مفروض باشند. آنگاه [۳۳]

$$1. \quad A < B \text{ اگر و تنها اگر } a_R < b_L$$

$$2. \quad A \subset B \text{ اگر و تنها اگر } a_L \geq b_L \text{ و } a_R \leq b_R$$

تعریف ۵۵.۲.۲. (روش مور). فرض کنید دو عدد بازه ای $[a_L, a_R]$ و $[b_L, b_R]$ مفروض باشند. روابط $\leq_{LR}$ ، $\leq_{MW}$ و $<_{MW}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند [۹۳]

$$1. \quad A \leq_{LR} B \text{ اگر و تنها اگر } a_L \leq b_L \text{ و } a_R \leq b_R$$

$$2. \quad A \leq_{MW} B \text{ اگر و تنها اگر } m_1 \leq m_2 \text{ و } w_1 \geq w_2$$

$$3. \quad A <_{LR} B \text{ اگر و تنها اگر } A \leq_{LR} B \text{ و } A \neq B$$

$$4. \quad A <_{MW} B \text{ اگر و تنها اگر } A \leq_{MW} B \text{ و } A \neq B$$

برای مقایسه اعداد بازه ای نیز روش هایی وجود دارد با استفاده از شاخص پذیرش به مقایسه می پردازد. در ادامه شاخص پذیرش ارایه شده توسط نایم و پال برای مقایسه اعداد بازه ای را تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۵۶.۲.۲. (شاخص پذیرش نایم و پال برای مقایسه اعداد بازه ای). فرض کنید اعداد بازه ای $[a_L, a_R]$ و $[b_L, b_R]$ مفروض باشند. شاخص پذیرش برای رابطه $A \prec B$ ، به صورت زیر است [۱۰۳]

$$\Upsilon(A \prec B) = \frac{m_1 - m_2}{w_1 + w_2} \quad (30.2)$$

۱. اگر $\Upsilon(A \prec B) \geq 1$ ، آنگاه در حالت کمینه سازی A تماماً بر B غالب است و در حالت بیشینه سازی B تماماً بر A غالب است و به صورت $A \prec B$ نشان داده می شود.

۲. اگر $0 < \Upsilon(A \prec B) < 1$ ، آنگاه در حالت کمینه سازی A نسبتاً بر B غالب است و در حالت بیشینه سازی B نسبتاً بر A غالب است و به صورت $A \prec_P B$ نشان داده می شود.

۳. اگر $\Upsilon(A \prec B) = 0$ ، و $w_1 > w_2$ آنگاه از نظر تصمیم گیرنده خوش بین A بر B غالب است و از نظر تصمیم گیرنده بدبین به عکس.

۳.۲ گراف فازی

در این بخش ضمن معرفی گراف و شبکه فازی، برخی تعاریف و مفاهیم اولیه گراف فازی را بیان خواهیم کرد

تعریف ۱.۳.۲. (گراف فازی). گراف فازی عبارت است از چهارتایی $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \sigma, \mu)$ که در آن V مجموعه رئوس، E مجموعه یال ها، $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت مجموعه رئوس و $\mu : E \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت مجموعه یال هاست به طوری که

$$\forall u, v \in V, \max_{e \in [u, v]} \mu(e) \leq (\sigma(u), \sigma(v)) \quad (31.2)$$

هر گراف فازی را با نماد $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ نیز نمایش می دهند [۱۱۰].

با توجه به تعریف گراف فازی می توان شبکه فازی را به صورت زیر تعریف کرد [۱۱۰].

تعریف ۲.۳.۲. (شبکه فازی). فرض کنید $w(\cdot)$ و $l(\cdot)$ توابعی تعریف شده برای اعضای $\tilde{V}$ و $\tilde{E}$ باشند که به ترتیب تابع وزن و تابع طول نامیده می شوند. حال اگر تابع $w(\cdot)$ به همه یا برخی از عناصر مجموعه $\tilde{V}$ عددی فازی نظیر کند آنگاه مقادیر وزن های فازی را به صورت $\tilde{w}(\cdot)$ نمایش می دهیم. به طور مشابه تابع طول فازی به صورت $\tilde{l}(\cdot)$ نمایش داده می شود. آنگاه شبکه $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{w}, \tilde{l})$ شبکه فازی نامیده می شود [۱۱۰].

تعریف ۳.۳.۲. (آلفا برش گراف فازی). آلفا برش گراف فازی $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \sigma, \mu)$ عبارت است از گراف کلاسیک $G^\alpha = (V^\alpha, E^\alpha)$ که در آن $\alpha \in [0, C(G)]$ و V^α و E^α به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند [۱۱۰]

$$V^\alpha = \{v \in V : \sigma(v) \geq \alpha\} \quad (32.2)$$

$$E^\alpha = \{e \in E : \mu(e) \geq \alpha\} \quad (33.2)$$

تعریف ۴.۳.۲. (درجه عضویت مسیر). فرض کنید p مسیری بین رئوس u و v در گراف $\tilde{G}$ باشد. به بیان دیگر p دنباله ای است از یال ها $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ به طوری که

$$x^{e_1}(0) = u$$

$$x^{e_k}(1) = v$$

$$x^{e_i}(1) = x^{e_{i+1}}(0), \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

(۳۴.۲)

درجه عضویت مسیر p عبارت است از کوچکترین درجه عضویت یال های آن. یعنی [۱۱۰]

$$\mu(p) = \min_{e_i \in p} (\mu_{e_i}) \quad (35.2)$$

مجموعه تمام مسیرها بین رئوس u و v در گراف G را با نماد $P[u, v]$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۳.۲. (سطح پیوستگی بین رئوس). فرض کنید $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد و $u, v \in V$. سطح پیوستگی بین u و v برابر است با

$$C(u, v) = \max_{p \in P[u, v]} (p) \quad (۳۶.۲)$$

اگر $u = v$ آنگاه $C(u, v) = \infty$. [۱۱۰]

تعریف ۶.۳.۲. (سطح پیوستگی گراف). فرض کنید $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. سطح پیوستگی گراف $\tilde{G}$ برابر است با [۱۱۰]

$$C(G) = \min_{u, v \in V} C(u, v) \quad (۳۷.۲)$$

تعریف ۷.۳.۲. (شبکه الحاقی). فرض کنید $x = x^e(\theta)$ نقطه ای روی یال $e \in [u, v]$ باشد. الحاق نقطه x به شبکه N ، شبکه جدیدی به صورت $N = (V_{.x}, E_{.x}, w_{.x}, \tilde{l}_{.x})$ را تولید می کند. مجموعه رئوس شبکه جدید عبارت است از $V_{.x} = V \cup \{x\}$ که $w_{.x}(x) = \circ$ و $w_{.x}(v) = w(v)$ ، $\forall v \in V$ همچنین مجموعه یال ها در شبکه جدید عبارت است از $E_{.x} = (E - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\}$ که در آن $e_1 = [u, x]$ و $e_2 = [x, v]$ همچنین در گراف جدید داریم [۱۱۰]

$$\begin{aligned} \tilde{l}(e_1) &= \theta \tilde{l}(e) \\ \tilde{l}(e_2) &= (1 - \theta) \tilde{l}(e) \\ \tilde{l}(e') &= \tilde{l}(e') \quad \forall e' \in E \cap E_{.x} \end{aligned}$$

(۳۸.۲)

تعریف ۸.۳.۲. (کوتاه ترین مسیر فازی). مسیر $p^* \in P[v_i, v_j]$ کوتاه ترین مسیر بین v_i و v_j نامیده می شود اگر و تنها اگر [۱۱۰]

$$\tilde{l}(p^*) = \min\{\tilde{l}(p); p \in P[v_i, v_j]\} \quad (۳۹.۲)$$

توجه کنید که مقایسه بالا با استفاده از تابع رتبه بندی F انجام می شود. کوتاه ترین مسیر بین v_i و v_j منحصر به فرد نیست و ممکن است چندین مسیر با کوتاه ترین طول وجود داشته باشد. از اینرو فرض کنید $P_{min}[v_i, v_j]$ مجموعه تمام کوتاه ترین مسیرهای بین v_i و v_j باشد.

تعریف ۹.۳.۲. (فاصله بین دو راس در گراف). فاصله بین دو راس v_i و v_j در یک گراف فازی عبارت است از طول کوتاه ترین مسیر بین v_i و v_j یعنی [۱۱۰]

$$\tilde{d}(v_i, v_j) = \tilde{l}(P), \quad \forall P \in P_{min}[v_i, v_j] \quad (۴۰.۲)$$

تعریف ۱۰.۳.۲. (فاصله بین دو نقطه در گراف). فاصله بین دو نقطه دلخواه x و y روی گراف فازی $N = (V, E, w, \tilde{l})$ برابر است با فاصله بین x و y روی گراف $N_{x,y} = (V_{x,y}, E_{x,y}, w_{x,y}, \tilde{l}_{x,y})$.
 یال $e \in [u, v]$ را در نظر بگیرید و فرض کنید z نقطه ای خارج از آن باشد. فاصله بین نقطه z و نقطه میانی $x = x^e(\theta)$ که $0 \leq \theta \leq 1$ به صورت زیر تعریف می شود [۱۱۰]

$$\tilde{d}(x^e(\theta), z) = \min\{\tilde{d}(u, z) + \theta \tilde{l}(e), \tilde{d}(v, z) + (1 - \theta) \tilde{l}(e)\} \quad (۴۱.۲)$$

فصل ۳

مسایل مکانیابی فازی

پیشتر مساله مکانیابی را معرفی نموده و به طور مختصر تاریخچه پیدایش آن را بیان کردیم. همچنین مسایل مکانیابی p - میانه و p - مرکز را که در پهنه وسیعی از مسایل کاربردی به کار می روند و موضوع تحقیق این رساله است معرفی نمودیم. در این فصل ضمن مروری بر مطالعات انجام شده در زمینه مساله مکانیابی فازی به بیان برخی از روش های موجود در زمینه مسایل p - میانه و p - مرکز فازی خواهیم پرداخت.

۱.۳ زمینه های عمده تحقیق در نظریه مکانیابی فازی

همان طور که در فصل اول ملاحظه کردید، مدل های متداول مسایل مکانیابی نیازمند پارامترهایی معین با مقادیری ثابت هستند. این مدل ها به طور گسترده برای حل مسایل دنیای واقعی به کار برده می شوند. از طرف دیگر دسته گسترده ای از این مسایل که در زندگی روزمره با آنها سروکار داریم و براساس حل مدل ریاضی ساخته شده از آن تصمیم گیری می کنیم، دارای مفاهیمی نادقیق و یا مجموعه هایی با کران های تقریبی می باشند. بنابراین مقادیر پارامترهایی که در این مدل ها استفاده می شوند، بر اساس پیش بینی شرایط آینده تخمین زده می شوند و همواره دارای ابهام و عدم قطعیت می باشند. در نتیجه مدل سازی این مسایل به صورت مساله مکانیابی با داده های فازی یکی از موضوعات مورد توجه محققین در حوزه تحقیق در عملیات است. در سال ۱۹۹۳ باتاچاریا و همکاران به مدل سازی فازی آرمانی برای مساله دو هدفه تاسیس چندین سرویس دهنده جدید روی صفحه که توسط یک چندضلعی محدب محدود شده است پرداختند [۱۵]. کانوز و همکاران در سال ۱۹۹۹ ضمن معرفی مدل فازی مساله کلاسیک p - میانه، الگوریتم دقیقی بر اساس روش حکیمی برای حل آن ارائه کردند [۲۱]. مساله مکانیابی فازی بر روی شبکه در سال ۲۰۰۴ توسط پرز و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت [۱۱۰]. مایویا و همکاران در سال ۲۰۰۵ مساله p - میانه را در محیط فازی مورد بررسی قرار دادند [۸۶] و در سال ۲۰۰۸ نایم و پال به مساله p - مرکز بر روی شبکه پرداختند [۱۰۳]. بشیری و حسینی زاده مساله چند وسیله ای فازی را در سال ۲۰۰۹ مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. داوری و همکاران در سال ۲۰۱۱ به مساله بیشترین پوشش در محیط فازی پرداختند و الگوریتمی ترکیبی برای حل آن ارائه کردند [۳۲]. در همین سال ون و کانگ به مساله مکانیابی تخصیص با تقاضاهای فازی تصادفی پرداختند و با ترکیب شبیه سازی فازی تصادفی، الگوریتم سیمپلکس و الگوریتم ژنتیک، الگوریتمی ترکیبی برای حل آن

ارایه کردند [۱۲۹]. در سال ۲۰۱۲ فتحعلی و جمالیان به مساله تاسیس سرویس دهنده های چند وسیله ای با داده های فازی و نرم های بلوکی پرداختند [۴۶]. در سال ۲۰۱۳ مهرجردی و نادری زاده مساله مسیریابی با ظرفیت محدود با تقاضاهای فازی را در نظر گرفته و روش خوشه بندی حریصانه را برای آن به کار گرفتند [۸۷]. در همین سال موسوی و همکاران مساله مکان یابی با ظرفیت محدود را برای حالتی که میزان تقاضای مشتریان و مکان آنها نادقیق می باشند را بررسی کردند و الگوریتمی ترکیبی برای حل آن ارایه کردند. در سال ۲۰۱۴ یانگ و همکاران به مساله فازی p - مرکز هاب پرداختند [۱۳۵]. قدرت نما و همکاران در سال ۲۰۱۵ برای حل مساله مکانیابی تک وسیله ای هاب یک مدل ریاضی چند هدفه جدید ارایه کردند. آنها در این مقاله برخی از پارامترها را به صورت نادقیق در نظر گرفته و مدل های فازی و استوار برای آن ارایه کردند [۵۳]. نظریه فازی در شاخه مکانیابی در حال رشد و توسعه می باشد و مقالات فراوانی در سال های اخیر در این زمینه به چاپ رسیده است که برخی از آنها عبارتند از [۹۱، ۹۴، ۹۶، ۱۲۲، ۱۲۳]. در ادامه برخی از مطالعات روی شبکه های فازی را بررسی خواهیم کرد.

۲.۳ مساله مکانیابی p - مرکز فازی

در سال ۲۰۰۸ نایم و پال [۱۰۳] به مساله p -مرکز روی شبکه فازی پرداختند. آنها شبکه هایی با وزن ها و طول های فازی را مورد بررسی قرار دادند. مساله p - مرکز یک مساله برنامه ریزی صفر و یک و عدد صحیح است و حل آن حتی برای مسایل کوچک بسیار زمان بر است. به وضوح حل مساله p - مرکز فازی به مراتب سخت تر و پیچیده تر از حالت قطعی آن است. از اینرو آنها در این مقاله برای مسایلی که تعداد نقاط خیلی زیاد نیستند الگوریتم شمارشی ارایه کردند. نایم و پال در این مقاله مقادیر نادقیق را به صورت اعداد بازه ای و اعداد فازی مثلی در نظر گرفتند. آنها برای به دست آوردن جواب بهینه مساله فازی p - مرکز از مقایسه بین اعداد فازی مثلی، مقایسه بین اعداد بازه ای و نیز از مفهوم غیر غالب بودن که در فصل قبل بیان شده است، استفاده کردند و توابع مینیمم و ماکزیمم فازی را به ترتیب به صورت زیر تعریف کردند

تابع $\min(\tilde{A}, \tilde{B})$

- اگر $A = \langle m_A, w_A \rangle$ و $B = \langle m_B, w_B \rangle$ یا $\tilde{A} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b, \gamma, \sigma \rangle$ ، غیر غالب نباشند آنگاه:

اگر $A \prec B$ یا $A \prec_P B$ یا $A \prec_R B$ یا $A \prec_L B$ آنگاه داریم $\tilde{min} = A$ و در غیر این صورت $\tilde{min} = B$

- اگر $A = \langle m_A, w_A \rangle$ و $B = \langle m_B, w_B \rangle$ یا $\tilde{A} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b, \gamma, \sigma \rangle$ ، غیر غالب باشند آنگاه:

اگر $w_A < w_B$ (یا $\alpha < \gamma$) آنگاه:

- اگر تصمیم گیرنده خوش بین باشد آنگاه $\tilde{min} = B$

- اگر تصمیم گیرنده بدبین باشد آنگاه $\tilde{min} = A$

تابع $\text{m}\ddot{\text{a}}\text{x}(\tilde{A}, \tilde{B})$

- اگر $A = \langle m_A, w_A \rangle$ و $B = \langle m_B, w_B \rangle$ یا $\tilde{A} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b, \gamma, \sigma \rangle$ ، غیر غالب نباشند
آنگاه:

اگر $A \prec B$ یا $A \prec_P B$ یا $A \prec_R B$ یا $A \prec_L B$ آنگاه داریم $\text{m}\ddot{\text{a}}\text{x} = B$ و در غیر این صورت
 $\text{m}\ddot{\text{a}}\text{x} = A$

- اگر $A = \langle m_A, w_A \rangle$ و $B = \langle m_B, w_B \rangle$ یا $\tilde{A} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b, \gamma, \sigma \rangle$ ، غیر غالب باشند
آنگاه:

اگر $w_A > w_B$ (یا $\beta > \sigma$) آنگاه:

- اگر تصمیم گیرنده خوش بین باشد آنگاه $\text{m}\ddot{\text{a}}\text{x} = A$

- اگر تصمیم گیرنده بدبین باشد آنگاه $\text{m}\ddot{\text{a}}\text{x} = B$

حال مساله p - مرکز (۹.۱) را در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید که وزن های رئوس یعنی w_j ها به صورت
فازی $\tilde{w}_j$ باشند. در این حالت الگوریتم حل به صورت زیر است.

الگوریتم شمارشی برای مساله p - مرکز با وزن های فازی

گام اول. ابتدا تمام زیر مجموعه های p عضوی مجموعه V را به صورت $C_1, C_2, \dots, C_m$ بیابید که
 $m = C(n, p)$

گام دوم. برای مجموعه مفروض C_j ، مقادیر σ_{ij} را به صورت زیر به دست آورید

$$\sigma_{ij} = d(v_i, C_j) = \min_{u \in C_j} (d(v_i, u))$$

گام سوم. به ازای $j = 1, \dots, m$ مقادیر $\tilde{M}_j$ را به صورت زیر محاسبه کنید

$$\tilde{M}_j = \text{m}\ddot{\text{a}}\text{x}_{i=1, \dots, n} (\tilde{w}_i \sigma_{ij})$$

گام چهارم. قرار دهید $\tilde{M}_k = \min_{j=1, \dots, m} (\tilde{M}_j)$. به وضوح $\tilde{M}_k$ مقدار بهینه است.

گام پنجم. مجموعه C_k که $\tilde{M}_k = \text{m}\ddot{\text{a}}\text{x}_{i=1, \dots, n} (\tilde{w}_i \sigma_{ik})$ مجموعه p - مرکز گراف است.

حال اگر طول یال ها مقادیری فازی به صورت $\tilde{d}(v_i, v_j)$ باشند الگوریتم حل به صورت زیر است.

الگوریتم شمارشی برای مساله p - مرکز با طول یال های فازی

گام اول. تمام زیر مجموعه های p عضوی مجموعه V را به صورت $C_1, C_2, \dots, C_m$ بیابید که
 $m = C(n, p)$

گام دوم. حال برای مجموعه مفروض C_j ، مقادیر $\tilde{\sigma}_{ij}$ را به صورت زیر به دست آورید

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{d}(v_i, C_j) = \min_{u \in C_j} (\tilde{d}(v_i, u))$$

گام سوم. به ازای $j = 1, \dots, m$ مقادیر $\tilde{M}_j$ را به صورت زیر محاسبه کنید

$$\tilde{M}_j = \max_{i=1, \dots, n} (w_i \tilde{\sigma}_{ij})$$

گام چهارم. قرار دهید $\tilde{M}_k = \min_{j=1, \dots, m} (\tilde{M}_j)$. به وضوح $\tilde{M}_k$ مقدار بهینه است.
گام پنجم. مجموعه C_k که $\tilde{M}_k = \max_{i=1, \dots, n} (w_i \tilde{\sigma}_{ik})$ مجموعه p - مرکز گراف است.

۳.۳ مساله p - میانه فازی

در این قسمت برخی از مطالعات در زمینه مکانیابی p - میانه فازی را بیان خواهیم کرد.

۱.۳.۳ مساله مکانیابی p - میانه با رئوس و یال‌های فازی (روش پرز و همکاران)

در سال ۲۰۰۴ پرز و همکاران مقاله ای تحت عنوان "مساله مکانیابی فازی روی شبکه" ارائه کردند [۱۱۰]. آنها در مقاله خود برای حل مسایل مکانیابی با رئوس و یال‌های فازی از مفهوم آلفا برش گراف فازی استفاده کردند. همچنین از آنجایی که مساله مکانیابی p - میانه بر روی شبکه‌های همبند تعریف می‌شود آنها از مفهوم سطح پیوستگی گراف استفاده کردند تا به طور قطع به ازای مقادیر مختلف α ، آلفا-گراف حاصل نیز همبند باشد. حال با توجه به تعاریف بیان شده در قسمت ۳.۲ روش پرز و همکاران را برای مساله مکانیابی p - میانه با رئوس و یال‌های فازی بیان می‌کنیم. آنها در این روش با حل دنباله‌ای از مسایل قطعی در سطوح مختلف α ، $\alpha \in [0, C(G)]$ جواب بهینه مساله فازی را می‌یابند. یعنی با حل مساله‌های مکانیابی G^{α_i} به ازای مقادیر مختلف α_i . در نهایت با حل این دنباله از مسایل قطعی، بازه‌ای به دست می‌آید که متشکل است از مقادیر بهینه حاصل از حل مساله‌های مکانیابی G^{α_i} در سطوح مختلف α_i . این بازه همان جواب بهینه مساله فازی می‌باشد. بهتر است که مسایل قطعی G^{α_i} برای مقادیر نزولی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ حل شود. زیرا که رئوس مکرراً در گراف‌های بعدی ظاهر می‌شوند و چون برای حل مسایل مکانیابی از الگوریتم‌هایی استفاده می‌کنیم که اگر یالی اضافه شود به راحتی بتوانیم ماتریس فاصله جدید را به دست آوریم از دنباله نزولی α_i استفاده می‌کنیم. با این روش زمان کمتری برای محاسبه ماتریس فاصله نیاز است.

۲.۳.۳ مساله مکانیابی p - میانه با وزن‌ها و طول‌های فازی (روش پرز و همکاران)

ابتدا فرض کنید که رئوس شبکه دارای وزن‌های فازی است. از آنجایی که در این حالت به ازای هر جواب شدنی تابع هدف مقداری فازی خواهد بود در این روش از یک تابع مقایسه معروف اعداد فازی برای به دست آوردن مکان بهینه با کمترین مقدار تابع هدف استفاده شده است. به عنوان مثال مساله میانه با وزن‌های فازی مثلاً $w(v_i) = \langle w_l(v_i), w_m(v_i), w_r(v_i) \rangle$ را در نظر بگیرید. آنگاه با استفاده از اندیس سوم یاگر داریم

$$\min_{x \in N} \left(\sum_{v_i \in V} d(x_i, v_i) \frac{1}{4} (w_l(v_i) + 2w_m(v_i) + w_r(v_i)) \right)$$

به وضوح مساله اخیر یک مساله مکانیابی میانه قطعی می‌باشد. می‌توان از توابع مقایسه‌ای دیگری به جای اندیس یاگر استفاده نمود. برای یافتن مکان بهینه وقتی که شبکه شامل یال‌هایی با طول فازی باشد باید

برخی از خواص تابع فاصله بین نقاط گراف را بررسی کنیم. در این حالت اولین گام یافتن مجموعه غالب متناهی است. چگونگی یافتن مجموعه غالب متناهی را در ادامه بیان خواهیم کرد. بدین منظور فرض کنید $\tilde{N} = (V, E, w, \tilde{l})$ شبکه ای با طول های فازی و وزن های قطعی باشد.

خاصیت ۱.۳.۳. فاصله بین نقاط روی یال $e = [u, v]$ و نقطه z خارج از یال e به صورت زیر تعریف می شود

$$\tilde{d}(x^e(\theta), z) = \begin{cases} \tilde{d}(u, z) + \theta \tilde{l}(e) & 0 \leq \theta \leq \theta_z^e \\ \tilde{d}(v, z) + (1 - \theta) \tilde{l}(e) & \theta_z^e \leq \theta \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن:

$$\theta_z^e = \frac{f(\tilde{d}(v, z) + \tilde{l}(e) - \tilde{d}(u, z))}{2f(\tilde{l}(e))} \quad (2.3)$$

برهان. به مرجع [۱۱۰] مراجعه نمایید.

□

خاصیت ۲.۳.۳. فرض کنید z نقطه ای خارج از یال $e = [u, v]$ باشد و Θ_z^e تعریف شده به صورت (۲.۳) مفروض باشد. آنگاه:

- اگر $\Theta_z^e = 0$ باشد آنگاه تابع $\tilde{d}(x^e(\cdot), z)$ روی بازه $[0, 1]$ خطی و کاهشی با شیب $-\tilde{l}(e)$ است.
- اگر $\Theta_z^e = 1$ باشد آنگاه تابع $\tilde{d}(x^e(\cdot), z)$ روی بازه $[0, 1]$ خطی و افزایشی با شیب $\tilde{l}(e)$ است.
- اگر $0 < \Theta_z^e < 1$ باشد آنگاه تابع $\tilde{d}(x^e(\cdot), z)$ در بازه $[0, \Theta_z^e]$ خطی و افزایشی با شیب $\tilde{l}(e)$ و در بازه $[\Theta_z^e, 1]$ خطی و کاهشی با شیب $-\tilde{l}(e)$ می باشد.

برهان. به مرجع [۱۱۰] مراجعه نمایید.

□

خاصیت ۳.۳.۳. تابع $\tilde{d}(x^e(\cdot), z)$ تابعی مقعر روی بازه $[0, 1]$ است.

برهان. به مرجع [۱۱۰] مراجعه نمایید.

□

حال با توجه به مفاهیم بیان شده و با استفاده از قضیه زیر به راحتی می توان جواب بهینه مساله فازی را به دست آورد.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید $\tilde{N} = (V, E, w, \tilde{l})$ شبکه ای با یال های فازی باشد. حداقل یک راس در مجموعه رئوس موجود است که میانه می باشد.

برهان. به مرجع [۱۱۰] مراجعه نمایید.

□

۳.۳.۳ مساله مکانیابی p - میانه با وزن های فازی (روش کانوز و همکاران)

در سال ۱۹۹۹ کانوز و همکاران [۲۱] مساله p - میانه (۶.۱) را برای حالتی که w_j ها قطعی نیستند مورد بررسی قرار دادند. یعنی تصمیم گیرنده مجاز است که برای بهبود تابع هدف با یک درجه آزادی وزن ها را تغییر دهد و یا تعدیل کند. مثلاً می تواند برآورد کند که در هر محل مفروض چه میزان از محصول می تواند فروخته شود. آنها در این مقاله، با حفظ چهارچوب کلی [۲۴، ۱۴۳]، روش خود را به صورت زیر ارایه کردند.

تعریف ۵.۳.۳. (تصمیم فازی). فرض کنید که هدف فازی $\tilde{G}$ و محدودیت فازی $\tilde{C}$ در فضای X ، مفروض باشند. آنگاه از ترکیب $\tilde{G}$ و $\tilde{C}$ ، تصمیم $\tilde{D}$ حاصل می شود که یک مجموعه فازی است. یعنی $\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$ و در نتیجه

$$\mu_{\tilde{D}} = \min\{\mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}}\} \quad (۳.۳)$$

این تعریف بیان می کند که درجه بهبود تابع هدف هم اهمیت با درجه شدنی بودن جواب می باشد. از اینرو برای یافتن جواب بهینه به دنبال جوابی با بیشترین مقدار $\mu_{\tilde{D}}$ هستیم. درجه شدنی بودن هر جواب (x_{ij}, y_i) به اختلاف بین مجموع تقاضاهایی که می بایست پوشش داده شوند با تقاضاهایی که پوشش داده شده است وابسته است. بنابراین $\mu_{\tilde{f}}$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\mu_{\tilde{f}}(x_{ij}, y_i) = h_f\left(\sum_{j=1}^n w_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}\right) \quad (۴.۳)$$

که در آن

$$h_f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{p_f} & 0 \leq x \leq p_f \\ 0 & x \geq p_f \end{cases}$$

در اینجا p_f بیشترین سطح دامنه تغییرات یک جواب شدنی می باشد. در این مقاله هدف فازی $\tilde{G}$ عبارت است از کاهش هزینه. از اینرو در این روش از مقدار بهینه قطعی Z^* ، شروع می کنیم. آنگاه درجه بهبود هدف برای هر جواب (x_{ij}, y_i) ، یا به عبارت دیگر تابع عضویت هدف فازی $\tilde{G}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu_{\tilde{g}}(x_{ij}, y_i) = h_g\left(Z^* - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}x_{ij}\right) \quad (۵.۳)$$

که در آن

$$h_g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \frac{x}{p_g} & 0 \leq x \leq p_g \\ 0 & x \geq p_g \end{cases}$$

که p_g مقدار هزینه ای است که باید به منظور بهبود مورد نظر کاهش یابد.

بنابراین مدل فازی مساله اخیر به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{r1}}) \quad & \text{find } (x_{ij}, y_i) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \leq Z^* \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n y_i = p \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n w_j \\
 & x_{ij} \leq y_i w_j \quad i, j = 1, \dots, n \\
 & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

(۶.۳)

قید اول نشان می دهد که مقدار بهینه فازی باید بهتر از مقدار بهینه قطعی باشد. به ازای $j = 1, \dots, n$ قید تساوی $\sum_{i=1}^n x_{ij} = w_j$ از مدل p - میانه قطعی (۶.۱) به قید نامساوی $\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j$ در مدل فازی (۶.۳) تبدیل شده است که جواب های تا حدی شدنی را مجاز می داند. همچنین قید چهارم اضافه شده است تا مفهوم شدنی بودن فازی را بیان نماید.

حال فرض کنید λ درجه عضویت مجموعه تصمیم گیری فازی $\tilde{D}$ باشد. یعنی λ درجه کلی رضایت جواب مفروض می باشد. باید جوابی با بیشترین مقدار λ را بیابیم. با حل مساله کمکی قطعی زیر به این هدف دست خواهیم یافت

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{r2}}) \quad & \max \lambda \\
 \text{s.t.} \quad & \lambda \leq \mu_g(x_{ij}, y_i) \\
 & \lambda \leq \mu_f(x_{ij}, y_i) \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq w_j y_i \quad i, j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq w_j \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

(۷.۳)

که μ_f و μ_g ، توابع عضویت خطی هستند که قبلاً تعریف شده اند. با جایگذاری این توابع در مدل اخیر و با استفاده از روش شاخه و کران جواب بهینه به دست می آید. اما اگر تعداد نقاط خیلی زیاد نباشد کانوز و همکاران بر اساس الگوریتم حکیمی [۵۷، ۵۸]، الگوریتم شمارشی جایگزینی به صورت زیر ارائه کردند.

الگوریتم شمارشی - ۱

گام اول. ابتدا تمام زیرمجموعه های p عضوی از مجموعه V را بیابید و آنها را $A_1, A_2, \dots, A_k$ بنامید.
گام دوم. تقاضای هر راس توسط نزدیک ترین سرویس دهنده پوشش داده خواهد شد. بنابراین برای هر پوشش مفروض A_i ، فاصله راس v_j تا نزدیک ترین سرویس دهنده به صورت زیر محاسبه کنید

$$D_{ij} = \min_{L \in A_i} (d_{Lj})$$

گام سوم. برای پوشش A_i هزینه کل را به صورت زیر محاسبه کنید

$$\sum_{j=1}^n w_j D_{ij}$$

گام چهارم. در نتیجه مقدار بهینه به صورت زیر به دست می آید

$$Z^* = \min_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^n w_j D_{ij}$$

گام پنجم. حال برای هر پوشش ثابت A_i کاهش هزینه را مورد بررسی قرار می دهیم که این امر با کاهش میزان تقاضایی که برای هر راس پوشش داده می شود امکان پذیر است. فرض کنید که تقاضای هر راس از مقدار w_j به x_j کاهش یابد. در این صورت درجه شدنی بودن جواب، درجه بهبود تابع هدف و درجه کلی رضایت به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند

$$\mu_f^i(x_j) = h_f\left(\sum_{j=1}^n (w_j - x_j)\right)$$

$$\mu_g^i(x_j) = h_g\left(Z^* - \sum_{j=1}^n x_j D_{ij}\right)$$

$$\lambda_i(x_j) = \min\{\mu_f^i(x_j), \mu_g^i(x_j)\}$$

گام ششم. درجه بهبود بهینه برای پوشش A_i را که با نماد λ_i^* نمایش می دهیم به صورت زیر محاسبه کنید

$$(P_{\lambda\lambda}) \quad \max \lambda_i$$

s.t

$$\lambda_i \leq \mu_g^i(x_j)$$

$$\lambda_i \leq \mu_{\bar{f}}(x_j)$$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1$$

(۸.۳)

گام هفتم. در نهایت بهترین درجه ممکن عبارت است از

$$\lambda^* = \max_{1 \leq i \leq k} (\lambda_i^*)$$

مساله (۸.۳) با استفاده از روش معمولی حل می شود. اما کانوز و همکاران برای حالتی که تعداد نقاط زیاد نباشد الگوریتم شمارشی زیر را برای حل مساله این مساله ارایه کردند.

الگوریتم شمارشی - ۲

گام اول. رؤوس $v_1, v_2, \dots, v_n$ را به صورت نزولی بر حسب مقادیر فواصل D_{ij} مرتب کنید و بدون از دست دادن کلیت آنها را به ترتیب $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}$ بنامید.
قرار دهید $n' = n - p$ ، آنگاه برای $k > n'$ ، v_{j_k} ها همان رؤوسی هستند که در آنها سرویس دهنده تاسیس شده است بنابراین داریم

$$D_{ij_k} = 0, \forall j_k > n'$$

گام دوم. اختلاف بین مجموع کل تقاضاها و کل تقاضای پوشش داده شده برای جواب تقریباً شدنی x_j عبارت است از

$$x = \sum_{j=1}^n w_j - \sum_{j=1}^n x_j$$

بدیهی است که برای هر واحد کاهش در راس v_{j_k} ، هزینه به میزان D_{ij_k} واحد کاهش می یابد. همچنین تقاضای هر راس توسط نزدیک ترین سرویس دهنده پوشش داده خواهد شد بنابراین داریم

- اگر $x \leq w_{j_1}$ ، آنگاه بیشترین کاهش در هزینه برابر است با $D_{ij_1}x$ که با قرار دادن $x_{j_1} = w_{j_1} - x$ و $x_{j_k} = w_{j_k}$ ، $k > 1$ بدست می آید.

- حال اگر $w_{j_1} < x \leq w_{j_1} + w_{j_2}$ ، آنگاه بهترین کاهش در این حالت عبارت است از

$$D_{ij_1} \cdot w_{j_1} + D_{ij_2} \cdot (x - w_{j_1})$$

که با کاهش تقاضاهای رؤوس v_{j_1} و v_{j_2} به ترتیب به صفر و $x_{j_2} = w_{j_2} - (x - w_{j_1})$ حاصل می شود.

- حال اگر $x > \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k}$ ، آنگاه بهترین کاهش در این حالت عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{n-1} D_{ij_k} \cdot w_{j_k} + D_{ij_n} \cdot (x - \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k})$$

که با کاهش تقاضاهای رئوس $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{n-1}}$ به صفر و کاهش میزان تقاضای راس v_{j_n} به $w_{j_n} - (x - \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k})$ حاصل می شود.

بنابراین بهترین کاهش در هزینه برای مقدار مفروض x ، به صورت زیر است

$$R_i(x) = \begin{cases} D_{ij_1} x & x \leq w_{j_1} \\ D_{ij_1} \cdot w_{j_1} + D_{ij_2} \cdot (x - w_{j_1}) & w_{j_1} < x \leq w_{j_2} \\ \sum_{k=1}^{n-1} D_{ij_k} \cdot w_{j_k} + D_{ij_n} \cdot (x - \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k}) & x > \sum_{k=1}^{n-1} w_{j_k} \end{cases}$$

که $R_i(x)$ ، تابعی قطعه ای خطی با نقطه گره $s = 1, \dots, n$ است و $a_s = \sum_{k=1}^s w_{j_k}$ است و $a_0 = 0$. بدیهی است که شیب تابع $R_i(x)$ در بازه $[a_{s-1}, a_s]$ برابر است با D_{ij_s} و همچنین

$$R_i(a_s) = \sum_{k=1}^s D_{ij_k} \cdot w_{j_k}$$

گام سوم. بهترین جواب تقریبی x_j را برای مقدار مفروض x در نظر بگیریم. درجه شدنی بودن و درجه بهبود جواب به ترتیب به صورت زیر به دست می آیند

$$\mu_f(x) = h_f(x)$$

$$\mu_g^i(x) = h_g(Z^* - (\sum_{j=1}^n D_{ij} \cdot w_j - R_i(x)))$$

تابع $\mu_f(x)$ در بازه $[0, p_f]$ خطی است و به طور اکید کاهشی است. از طرف دیگر تابع $\mu_g^i(x)$ تکه ای خطی و اکیدا افزایشی است.

گام چهارم. با استفاده از x^* می توانیم جواب های مساله P_i را بهبود دهیم. فرض کنید r اندیسی باشد که $a_{r-1} \leq x^* < a_r$: آنگاه:

$$x_{j_s} = \begin{cases} 0 & s < r \\ w_{j_r} - x^* + a_{r-1} & s = r \\ w_{j_r} & r < s \leq n \end{cases}$$

به این ترتیب این الگوریتم عمل خواهد کرد.

فصل ۴

مساله مکانیابی p - میانه با وزن ها و متغیر های فازی

همان طور که در فصول قبل اشاره شد می توان برخی از مسایل واقعی دنیای پیرامون را به صورت مساله p - میانه مدل نمود. از اینرو ممکن است برخی و یا همه پارامترهای مورد نیاز مساله، به صورت نادقیق و غیر قطعی باشند. بنابراین مدل های مختلفی از مساله مکانیابی p - میانه فازی به وجود می آید که در فصل گذشته به برخی از آن ها پرداخته ایم. بررسی مطالعات پیشین نشان می دهد که مقادیر بهینه حاصل از الگوریتم های مختلف ارایه شده برای حل مسایل مکانیابی فازی، اعدادی قطعی می باشد. حال آنکه انتظار می رود که مقدار بهینه مساله مکانیابی با پارامترهای فازی عددی فازی باشد. همچنین در مدل های بیان شده پیشین، همواره متغیرها به صورت قطعی در نظر گرفته شده اند. در حالی که در نظر گرفتن متغیرها به صورت دقیق در مدل هایی با پارامترهای فازی، دور از واقعیت می باشد. از اینرو در این فصل مساله مکانیابی p - میانه با پارامترها و متغیرهای فازی را مورد بررسی قرار خواهیم داد و الگوریتمی ارایه خواهیم کرد که جواب های بهینه فازی و مقدار بهینه فازی را بیابد.

۱.۴ تعریف مساله

مساله p - میانه (۴.۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که تقاضاهای مشتریان و میزان تقاضاهایی که سرویس دهنده ها به مشتری ها تخصیص می دهند اعداد فازی مثلثی باشند. مساله مکانیابی p - میانه فازی مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned}
 (P_{\mathfrak{r}\mathfrak{1}}) \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \tilde{x}_{ij} \\
 \text{s.t} \quad & \\
 & \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{ij} = \tilde{w}_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n y_i = p \\
 & \tilde{x}_{ij} \leq y_i \tilde{w}_j, \quad i, j = 1, \dots, n \\
 & y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & \tilde{x}_{ij} \succeq 0, \quad i, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{۱.۴}$$

که در آن $\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$ و $\tilde{w}_j = \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle$, $j = 1, \dots, n$ بنابراین با جایگذاری این مقادیر می توان مساله اخیر را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\begin{aligned}
 (P_{\mathfrak{r}\mathfrak{2}}) \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \\
 \text{s.t} \quad & \\
 & \sum_{i=1}^n \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle = \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n y_i = p \\
 & \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \preceq y_i \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle \quad i, j = 1, \dots, n \\
 & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{۲.۴}$$

در ادامه الگوریتمی ارایه خواهیم کرد که جواب بهینه فازی و مقدار بهینه فازی مساله اخیر را به دست می آورد.

۲.۴ روش حل

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $\tilde{X} = [\tilde{x}_{ij}]_{n \times n}$ و $Y = [y_i]_{1 \times n}$ آنگاه $[\tilde{X}, Y]$ جواب بهینه فازی مساله (۲.۴) است اگر در شرایط زیر صدق کند

(۱) $\tilde{x}_{ij}$ ، یک عدد فازی نامنفی باشد.

(۲) $\tilde{X}$ و Y در تمام محدودیت های مساله (۲.۴) صدق کنند.

(۳) اگر $[\tilde{X}', Y']$ ای پیدا شود که به ازای آن تمام محدودیت های مساله (۲.۴) برقرار باشند (یا به بیان دیگر $[\tilde{X}', Y']$ یک جواب شدنی مفروض باشد) آنگاه:

$$\Re \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \right) \leq \Re \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \langle x'_{ij1}, x'_{ij2}, x'_{ij3} \rangle \right)$$

که در آن $\Re$ یک تابع رتبه بندی خطی است که برای مقایسه اعداد فازی به کار می رود.

در این روش با استفاده از حساب فازی محدودیت های فازی را با محدودیت های قطعی جایگزین می کنیم. همچنین تابع هدف فازی را با سه تابع هدف قطعی جایگزین می کنیم. در نتیجه مساله برنامه ریزی فازی به یک مساله برنامه ریزی چند هدفه قطعی تبدیل می شود. در نهایت با حل مساله چند هدفه قطعی متناظر با مساله مکانیابی فازی، جواب بهینه فازی و مقدار بهینه فازی برای مساله مکان یابی p - میانه فازی به دست می آید. گام های الگوریتم پیشنهادی به صورت زیر است

الگوریتم حل

گام اول. قرار دهید

$$z_{ijk} = d_{ij} x_{ijk} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$v_{ijk} = y_i w_{jk} \quad \forall i, j = 1, \dots, n, k = 1, 2, 3$$

آنگاه مدل (۲.۴) به صورت زیر تبدیل می شود

$$\begin{aligned} (P_{\text{فر}}) \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle z_{ij1}, z_{ij2}, z_{ij3} \rangle \\ \text{s. t} \quad & \sum_{i=1}^n \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle = \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n y_i = p \\ & \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \preceq \langle v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3} \rangle \quad i, j = 1, \dots, n \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij1} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

گام دوم. نامساوی $\langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \preceq \langle v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3} \rangle \quad i, j = 1, \dots, n$ را در نظر بگیرید. با استفاده از نکته ۵۳.۲.۲ با اضافه کردن متغیرهای فازی $\tilde{s}_{ij} = \langle s_{ij1}, s_{ij2}, s_{ij3} \rangle$ و $\tilde{t}_{ij} = \langle t_{ij1}, t_{ij2}, t_{ij3} \rangle$ به ازای $i, j = 1, \dots, n$ می توان این قیود را به قیود تساوی به صورت زیر تبدیل نمود

$$\langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \oplus \langle s_{ij1}, s_{ij2}, s_{ij3} \rangle = \langle v_{ij1}, v_{ij2}, v_{ij3} \rangle \oplus \langle t_{ij1}, t_{ij2}, t_{ij3} \rangle$$

که در آن $\mathcal{R}(\tilde{s}_{ij}) - \mathcal{R}(\tilde{t}_{ij}) \geq 0$ و $\mathcal{R}$ تابع رتبه بندی یاگر است که در فصل دوم معرفی شده است. سپس با استفاده از تعریف تساوی فازی مجموعه محدودیت های زیر به دست می آیند

$$\begin{aligned} x_{ij1} + s_{ij1} &= v_{ij1} + t_{ij1} & i, j &= 1, \dots, n \\ x_{ij2} + s_{ij2} &= v_{ij2} + t_{ij2} & i, j &= 1, \dots, n \\ x_{ij3} + s_{ij3} &= v_{ij3} + t_{ij3} & i, j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

گام سوم. حال با استفاده از تعریف عملگرهای اعداد فازی می توان تساوی فازی را با تساوی های قطعی جایگزین نمود و در نتیجه مساله به صورت زیر تبدیل می شود

$$(P_{\#}) \quad \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle z_{ij1}, z_{ij2}, z_{ij3} \rangle$$

s.t

$$\sum_{i=1}^n x_{ij1} = w_{j1}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij2} = w_{j2}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij3} = w_{j3}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = p$$

$$x_{ij1} + s_{ij1} = v_{ij1} + t_{ij1}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij2} + s_{ij2} = v_{ij2} + t_{ij2}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij3} + s_{ij3} = v_{ij3} + t_{ij3}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$(s_{ij1} + 2s_{ij2} + s_{ij3}) - (t_{ij1} + 2t_{ij2} + t_{ij3}) \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
x_{ij1} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
x_{ij2} - x_{ij1} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
x_{ij3} - x_{ij2} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
s_{ij2} - s_{ij1} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
s_{ij3} - s_{ij2} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
t_{ij2} - t_{ij1} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
t_{ij3} - t_{ij2} &\geq 0, & i, j &= 1, \dots, n \\
y_i &\in \{0, 1\}, & i &= 1, \dots, n
\end{aligned}$$

(۴.۴)

گام چهارم. حال تابع هدف فازی را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle z_{ij1}, z_{ij2}, z_{ij3} \rangle \quad (۵.۴)$$

می خواهیم این تابع فازی را به تابع هدف قطعی تبدیل کنیم [۷۶]. با استفاده از خاصیت جمع اعداد فازی داریم

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle z_{ij1}, z_{ij2}, z_{ij3} \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij1}, \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij2}, \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij3} \rangle \quad (۶.۴)$$

که در آن $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij2}$ محتمل ترین مقدار و $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij1}$ و $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij3}$ غیرممکن ترین مقدار هستند. تابع هدف فازی توسط این سه مقدار به خوبی مشخص می شود. از اینرو برای کمینه نمودن تابع هدف باید این سه نقطه را به سمت چپ حرکت دهیم. بنابراین می توان توابع زیر را جایگزین تابع هدف فازی نمود

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij2} - z_{ij1}) \\
Z_2 &= \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij2} \\
Z_3 &= \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij3} - z_{ij2})
\end{aligned}$$

(۷.۴)

گام پنجم. حال فرض کنید F مجموعه همه جواب های شدنی مدل (۴.۴) باشد. برای این سه تابع هدف ایده آل های مثبت (PIS) و ایده آل های منفی (NIS) را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}
 Z_1^{PIS} &= \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij2} - z_{ij1}) & [\tilde{X}, Y] \in F \\
 Z_1^{NIS} &= \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij2} - z_{ij1}) & [\tilde{X}, Y] \in F \\
 Z_2^{PIS} &= \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij2} & [\tilde{X}, Y] \in F \\
 Z_2^{NIS} &= \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij2} & [\tilde{X}, Y] \in F \\
 Z_3^{PIS} &= \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij3} - z_{ij2}) & [\tilde{X}, Y] \in F \\
 Z_3^{NIS} &= \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij3} - z_{ij2}) & [\tilde{X}, Y] \in F
 \end{aligned}$$

(۸.۴)

همچنین تابع عضویت این توابع به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu_{Z_1} = \begin{cases} 1 & \text{if } Z_1 > Z_1^{PIS} \\ \frac{Z_1^{NIS} - Z_1}{Z_1^{NIS} - Z_1^{PIS}} & \text{if } Z_1^{NIS} \leq Z_1 \leq Z_1^{PIS} \\ 0 & \text{if } Z_1 < Z_1^{NIS} \end{cases} \quad (9.4)$$

و برای $k = 2, 3$

$$\mu_{Z_k} = \begin{cases} 1 & \text{if } Z_k < Z_k^{PIS} \\ \frac{Z_k^{NIS} - Z_k}{Z_k^{NIS} - Z_k^{PIS}} & \text{if } Z_k^{PIS} \leq Z_k \leq Z_k^{NIS} \\ 0 & \text{if } Z_k > Z_k^{NIS} \end{cases} \quad (10.4)$$

حال با حل مدل تک هدفه زیر که توسط زیمرمن معرفی شده است [۱۴۴] به جواب بهینه فازی مساله فازی اولیه دست خواهیم یافت.

$$\begin{aligned}
(P_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}}) \quad & \max \alpha \\
\text{s.t} \quad & \\
\mu_{Z_k} \geq \alpha, & \quad k = ۱, ۲, ۳ \\
\sum_{i=۱}^n x_{ij\mathfrak{I}} = w_{j\mathfrak{I}}, & \quad j = ۱, \dots, n \\
\sum_{i=۱}^n x_{ij\mathfrak{J}} = w_{j\mathfrak{J}}, & \quad j = ۱, \dots, n \\
\sum_{i=۱}^n x_{ij\mathfrak{K}} = w_{j\mathfrak{K}}, & \quad j = ۱, \dots, n \\
\sum_{i=۱}^n y_i = p & \\
x_{ij\mathfrak{I}} + s_{ij\mathfrak{I}} = v_{ij\mathfrak{I}} + t_{ij\mathfrak{I}}, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
x_{ij\mathfrak{J}} + s_{ij\mathfrak{J}} = v_{ij\mathfrak{J}} + t_{ij\mathfrak{J}}, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
x_{ij\mathfrak{K}} + s_{ij\mathfrak{K}} = v_{ij\mathfrak{K}} + t_{ij\mathfrak{K}}, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
(s_{ij\mathfrak{I}} + \mathfrak{J}s_{ij\mathfrak{J}} + s_{ij\mathfrak{K}}) - (t_{ij\mathfrak{I}} + \mathfrak{J}t_{ij\mathfrak{J}} + t_{ij\mathfrak{K}}) \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
x_{ij\mathfrak{I}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
x_{ij\mathfrak{J}} - x_{ij\mathfrak{I}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
x_{ij\mathfrak{K}} - x_{ij\mathfrak{J}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
s_{ij\mathfrak{J}} - s_{ij\mathfrak{I}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
s_{ij\mathfrak{K}} - s_{ij\mathfrak{J}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
t_{ij\mathfrak{J}} - t_{ij\mathfrak{I}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
t_{ij\mathfrak{K}} - t_{ij\mathfrak{J}} \geq ۰, & \quad i, j = ۱, \dots, n \\
y_i \in \{۰, ۱\}, & \quad i = ۱, \dots, n
\end{aligned}$$

۳.۴ مثال های عددی

در این بخش با حل چند مثال عددی کارایی روش پیشنهادی را نشان خواهیم داد. همچنین روش پیشنهادی مان را با روش ناصری و همکاران [۹۹] و روش پرز و همکاران [۱۱۰] مقایسه خواهیم کرد.

در روش ناصری و همکاران برای غیر فازی کردن نامساوی های فازی از تابع رتبه بندی زیر استفاده شده

است

$$b_3 \leq a_3 \text{ و } b_2 \leq a_2, b_1 \leq a_1 \text{ اگر } \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \preceq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

این روش قادر نیست که همیشه جوابی درست ارایه دهد. بدیهی است که این روش قادر نخواهد بود که اعداد فازی $\langle 1, 2, 3 \rangle$ و $\langle 0/99, 200, 201 \rangle$ را به درستی مرتب کند. از اینرو ما در روش پیشنهادی این مشکل را با اضافه کردن متغیرهای فازی به طرفین نامساوی فازی بر طرف کردیم و بدین طریق هر نامساوی فازی را به یک تساوی فازی و سپس هر تساوی فازی را به سه تساوی با ضرایب قطعی تبدیل کردیم.

حال روش پیشنهادی مان را با استفاده از مثال زیر بیشتر توضیح داده و همچنین با روش پرز و همکاران مقایسه خواهیم کرد.

مثال ۱.۳.۴. مساله تعیین مکان دو سرویس دهنده از بین پنج نقطه موجود در صفحه را در نظر بگیرید. مختصات نقاط تقاضا در حالت قطعی و وزن های متناظر با آنها در جدول ۱.۴ آورده شده است.

جدول ۱.۴: مختصات مراکز تقاضا و وزن های متناظر مثال ۱.۳.۴

j	۱	۲	۳	۴	۵
a_{j1}	۱	۳	۵	۷	۱۰
a_{j2}	۱	۷	۵	۱۰	۳
w_j	۵	۸	۷	۱۲	۱۵

با استفاده از فاصله اقلیدسی ماتریس فاصله بین این نقاط به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} 0 & 6/324 & 5/656 & 10/816 & 9/219 \\ 6/324 & 0 & 2/828 & 5 & 8/062 \\ 5/656 & 2/828 & 0 & 5/385 & 5/385 \\ 10/816 & 5 & 5/385 & 0 & 7/615 \\ 9/219 & 8/062 & 5/385 & 7/615 & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین مدل ریاضی مساله به صورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 d_{ij} x_{ij} \\ &= 6/324x_{12} + 5/656x_{13} + 10/816x_{14} + 9/219x_{15} \\ &\quad + 6/324x_{21} + 2/828x_{23} + 5x_{24} + 8/062x_{25} \\ &\quad + 5/656x_{31} + 2/828x_{32} + 5/385x_{34} + 5/385x_{35} \\ &\quad + 10/816x_{41} + 5x_{42} + 5/385x_{43} + 7/615x_{45} \\ &\quad + 9/219x_{51} + 8/062x_{52} + 5/385x_{53} + 7/615x_{54} \end{aligned}$$

s.t

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 x_{i1} &= 5 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i2} &= 8 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i3} &= 7 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i4} &= 12 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i5} &= 15 \\ \sum_{i=1}^5 y_i &= 2 \end{aligned}$$

$$x_{ij} \leq y_i w_j, \quad i, j = 1, \dots, 5$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 5$$

با حل این مساله جواب بهینه و مقدار تابع هدف بهینه به صورت زیر به دست می آیند

$$x_{12} = 5$$

$$x_{22} = 8$$

$$x_{32} = 7$$

$$x_{42} = 12$$

$$x_{55} = 15$$

$$y_2 = y_5 = 1$$

$$Z^* = 111/422$$

حال فرض کنید تمام وزن ها اعداد فازی مثلثی باشند که مقادیر آن ها در جدول ۳.۴ آورده شده است.

جدول ۳.۴: وزن های فازی متناظر مثال ۱.۳.۴

j	۱	۲	۳	۴	۵
$\tilde{w}_j$	$\langle 4, 5, 6 \rangle$	$\langle 6/5, 8, 10 \rangle$	$\langle 5, 7, 8 \rangle$	$\langle 11/5, 12, 13 \rangle$	$\langle 14, 15, 15/5 \rangle$

مدل فازی به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 \min Z &= \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 d_{ij} \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \\
 &= +6/324 \langle x_{111}, x_{112}, x_{113} \rangle + 5/656 \langle x_{121}, x_{122}, x_{123} \rangle + 10/816 \langle x_{131}, x_{132}, x_{133} \rangle \\
 &+ 9/219 \langle x_{141}, x_{142}, x_{143} \rangle + 6/324 \langle x_{211}, x_{212}, x_{213} \rangle + 2/828 \langle x_{221}, x_{222}, x_{223} \rangle \\
 &+ 5 \langle x_{231}, x_{232}, x_{233} \rangle + 8/062 \langle x_{241}, x_{242}, x_{243} \rangle + 5/656 \langle x_{251}, x_{252}, x_{253} \rangle \\
 &+ 2/828 \langle x_{311}, x_{312}, x_{313} \rangle + 5/385 \langle x_{321}, x_{322}, x_{323} \rangle + 5/385 \langle x_{331}, x_{332}, x_{333} \rangle \\
 &+ 10/816 \langle x_{341}, x_{342}, x_{343} \rangle + 5 \langle x_{351}, x_{352}, x_{353} \rangle + 5/385 \langle x_{411}, x_{412}, x_{413} \rangle \\
 &+ 7/615 \langle x_{421}, x_{422}, x_{423} \rangle + 9/219 \langle x_{431}, x_{432}, x_{433} \rangle + 8/062 \langle x_{441}, x_{442}, x_{443} \rangle \\
 &+ 5/385 \langle x_{451}, x_{452}, x_{453} \rangle + 7/615 \langle x_{511}, x_{512}, x_{513} \rangle + 9/219 \langle x_{521}, x_{522}, x_{523} \rangle \\
 &+ 8/062 \langle x_{531}, x_{532}, x_{533} \rangle + 5 \langle x_{541}, x_{542}, x_{543} \rangle + 5/656 \langle x_{551}, x_{552}, x_{553} \rangle
 \end{aligned}$$

s . t

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^5 \langle x_{i11}, x_{i12}, x_{i13} \rangle &= \langle 4, 5, 6 \rangle \\
 \sum_{i=1}^5 \langle x_{i21}, x_{i22}, x_{i23} \rangle &= \langle 6/5, 8, 10 \rangle \\
 \sum_{i=1}^5 \langle x_{i31}, x_{i32}, x_{i33} \rangle &= \langle 5, 7, 8 \rangle \\
 \sum_{i=1}^5 \langle x_{i41}, x_{i42}, x_{i43} \rangle &= \langle 11/5, 12, 13 \rangle \\
 \sum_{i=1}^5 \langle x_{i51}, x_{i52}, x_{i53} \rangle &= \langle 14, 15, 15/5 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 1$$

$$\langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle \preceq y_i \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle, \quad i, j = 1, \dots, 5$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 5$$

به ازای $i, j = 1, \dots, 5$ با اضافه کردن متغیرهای فازی $\tilde{t}_{ij} = \langle t_{ij1}, t_{ij2}, t_{ij3} \rangle$ و $\tilde{s}_{ij} = \langle s_{ij1}, s_{ij2}, s_{ij3} \rangle$ به قیود نامساوی و سپس استفاده از تساوی فازی قیود مساله اخیر به صورت زیر تبدیل می شود

$$\sum_{i=1}^5 x_{i11} = 4$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i12} = 5$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i13} = 6$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i21} = 6/5$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i22} = 8$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i23} = 10$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i31} = 5$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i32} = 7$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i33} = 8$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i41} = 11/5$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i42} = 12$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i43} = 13$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{i51} = 14$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^5 x_{i52} &= 15 \\
 \sum_{i=1}^5 x_{i53} &= 15/5 \\
 \sum_{i=1}^5 y_i &= 1 \\
 x_{ij1} + s_{ij1} &= v_{ij1} + t_{ij1}, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 x_{ij2} + s_{ij2} &= v_{ij2} + t_{ij2}, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 x_{ij3} + s_{ij3} &= v_{ij3} + t_{ij3}, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 (s_{ij1} + 2s_{ij2} + s_{ij3}) - (t_{ij1} + 2t_{ij2} + t_{ij3}) &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 x_{ij1} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 x_{ij2} - x_{ij1} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 x_{ij3} - x_{ij2} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 s_{ij2} - s_{ij1} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 s_{ij3} - s_{ij2} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 t_{ij2} - t_{ij1} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 t_{ij3} - t_{ij2} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, 5 \\
 y_i &\in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 5
 \end{aligned}$$

همچنین می توان تابع هدف فازی را به سه تابع هدف زیر با ضرایب قطعی تبدیل نمود

$$\begin{aligned}
 \max Z_1 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 (z_{ij2} - z_{ij1}) \\
 \min Z_2 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 z_{ij2} \\
 \min Z_3 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 (z_{ij3} - z_{ij2})
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
Z_1 = & 6/324(x_{122} - x_{121}) + 5/656(x_{132} - x_{131}) + 10/816(x_{142} - x_{141}) \\
& + 9/219(x_{152} - x_{151}) + 6/324(x_{212} - x_{211}) + 2/828(x_{232} - x_{231}) + 5(x_{242} - x_{241}) \\
& + 8/062(x_{252} - x_{251}) + 5/656(x_{312} - x_{311}) + 2/828(x_{322} - x_{321}) + 5/385(x_{342} - x_{341}) \\
& + 5/385(x_{352} - x_{351}) + 10/816(x_{412} - x_{411}) + 5(x_{422} - x_{421}) + 5/385(x_{432} - x_{431}) \\
& + 7/615(x_{452} - x_{451}) + 9/219(x_{512} - x_{511}) + 8/062(x_{522} - x_{521}) + 5/385(x_{532} - x_{531}) \\
& + 7/615(x_{542} - x_{541})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 = & 6/324x_{122} + 5/656x_{132} + 10/816x_{142} + 9/219x_{152} + 6/324x_{212} + 2/828x_{232} \\
& + 5x_{242} + 8/062x_{252} + 5/656x_{312} + 2/828x_{322} + 5/385x_{342} + 5/385x_{352} + 10/816x_{412} \\
& + 5x_{422} + 5/385x_{432} + 7/615x_{452} + 9/219x_{512} + 8/062x_{522} + 5/385x_{532} + 7/615x_{542}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_3 = & +6/324(x_{123} - x_{122}) + 5/656(x_{133} - x_{132}) + 10/816(x_{143} - x_{142}) \\
& + 9/219(x_{153} - x_{152}) + 6/324(x_{213} - x_{212}) + 2/828(x_{233} - x_{232}) + 5(x_{243} - x_{242}) \\
& + 8/062(x_{253} - x_{252}) + 5/656(x_{313} - x_{312}) + 2/828(x_{323} - x_{322}) + 5/385(x_{343} - x_{342}) \\
& + 5/385(x_{353} - x_{352}) + 10/816(x_{413} - x_{412}) + 5(x_{423} - x_{422}) + 5/385(x_{433} - x_{432}) \\
& + 7/615(x_{453} - x_{452}) + 9/219(x_{513} - x_{512}) + 8/062(x_{523} - x_{522}) + 5/385(x_{533} - x_{532}) \\
& + 7/615(x_{543} - x_{542})
\end{aligned}$$

حال فرض کنید که S فضای همه جواب های شدنی برای مدل اخیر باشد. سپس بر اساس گام پنجم ایدآل های مثبت و منفی برای هر یک از این سه تابع به صورت زیر به دست می آید

$$Z_1^{PIS} = 12/32$$

$$Z_1^{NIS} = 47/255$$

$$Z_2^{PIS} = 418$$

$$Z_2^{NIS} = 111/422$$

$$Z_3^{PIS} = 46/427$$

$$Z_3^{NIS} = 11/86$$

و در نهایت تابع عضویت خطی آنها به ترتیب به صورت زیر نتیجه می شود

$$\mu_1(v) = \begin{cases} 1 & z_1 > 47/255 \\ \frac{z_1 - 12/32}{34/935} & 12/32 \leq z_1 \leq 47/255 \\ 0 & z_1 < 12/32 \end{cases}$$

$$\mu_2(v) = \begin{cases} 1 & z_2 < 111/422 \\ \frac{418 - z_2}{306/578} & 111/422 \leq z_2 \leq 418 \\ 0 & z_2 > 418 \end{cases}$$

9

$$\mu_3(v) = \begin{cases} 1 & z_3 < 11/86 \\ \frac{46/427 - z_3}{34/567} & 11/86 \leq z_3 \leq 46/427 \\ 0 & z_3 > 46/427 \end{cases}$$

حال با استفاده از مدل (P_{45}) حداقل درجه رضایت α برابر است با 0.904 و $y_2 = y_5 = 1$ بنابراین سرویس دهنده ها باید در مکان های دوم و پنجم تاسیس شوند و جواب بهینه فازی به صورت زیر می باشد

جدول ۳.۴: جواب بهینه فازی متناظر مثال ۱.۳.۴

j	۱	۲	۳	۴	۵
$\tilde{x}_{1j}$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$
$\tilde{x}_{2j}$	$\langle 4, 4, 6 \rangle$	$\langle 6/5, 6/5, 8/5 \rangle$	$\langle 5, 5, 6 \rangle$	$\langle 11/5, 11/52, 12/52 \rangle$	$\langle 0, 1, 1 \rangle$
$\tilde{x}_{3j}$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$
$\tilde{x}_{4j}$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$
$\tilde{x}_{5j}$	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 1/5, 1/5 \rangle$	$\langle 0, 2, 2 \rangle$	$\langle 0, 0/48, 0/48 \rangle$	$\langle 14, 14, 14/5 \rangle$

همان طور که می بینید بر اساس روش ما مقادیر متغیرها به صورت اعداد فازی به دست آمده است و این امکان را برای تصمیم گیرنده فراهم می آورند تا با توجه به شرایط بهترین تصمیم را بگیرد. حال فرض کنید مساله فازی اخیر با استفاده از روش مورنو پرز و همکاران حل شود. بر اساس این روش هر عدد فازی $\tilde{w}_j = \langle w_{1j}, w_{2j}, w_{3j} \rangle$ به عدد قطعی $\frac{1}{4}(w_{1j} + 2w_{2j} + w_{3j})$ تبدیل می شود. بنابراین وزن های فازی به وزن های قطعی به صورت زیر تبدیل می شوند

$$w'_1 = 5$$

$$w'_2 = 8/125$$

$$w'_3 = 6/75$$

$$w'_4 = 12/125$$

$$w'_5 = 14/875$$

بعد از حل مساله با این وزن های جدید مقدار تابع هدف و مقدار متغیرها به صورت زیر به دست می آیند

$$z^* = 111/340$$

$$y_2 = y_5 = 1$$

$$x_{12} = 5$$

$$x_{22} = 8/125$$

$$x_{32} = 6/725$$

$$x_{42} = 12/125$$

$$x_{55} = 14/875$$

بدیهی است که بر اساس روش آنها بسیاری از اطلاعات از دست می رود. همچنین آنها مقادیری دقیق برای تابع هدف و متغیرها به دست آوردند و این دور از واقعیت است که جواب بهینه مساله فازی مقداری قطعی باشد. بر اساس روش ما مقدار بهینه فازی تابع هدف و متغیرهای بهینه فازی به دست می آیند. بنابراین تصمیم گیرنده قادر خواهد بود بر اساس شرایط و امکانات بهترین تصمیم را بگیرد.

مثال ۲.۳.۴. حال مساله $p-med1$ را که عبارت است از درختی متشکل از ۱۰۰ راس و ۲۰۰ یال و در مرجع [۱۱] آمده است در نظر بگیرید. فرض کنید که تعداد سرویس دهنده ها $p = 5$ باشد. تقاضاهای فازی متناظر با رئوس در جدول های ۴.۴ و ۵.۴ آورده شده است. با اعمال روش جدیدمان نتیجه می شود که $\alpha = 0/911$ و $y_4 = y_8 = y_{10} = y_{23} = y_{42} = 1$. این بدین معناست که باید در رئوس چهارم، هشتم، دهم، بیست و سوم و چهل و دوم سرویس دهنده تاسیس شود. همچنین مقدار بهینه فازی تابع هدف عبارت است از $\tilde{z}^* = \langle 125944, 170330, 180999/56 \rangle$. جدول های ۶.۴ تا ۱۳.۴ چگونگی سرویس دهی مشتری ها توسط این سرویس دهنده ها را نشان می دهند.

جدول ۴.۴: وزن های فازی متناظر مثال ۲.۳.۴

$W_4 = \langle 19, 20, 21 \rangle$	$W_3 = \langle 16/5, 17/5, 18 \rangle$	$W_2 = \langle 9, 10, 10/5 \rangle$	$W_1 = \langle 23, 24, 25 \rangle$
$W_8 = \langle 18, 19, 20 \rangle$	$W_7 = \langle 11, 11/5, 12 \rangle$	$W_6 = \langle 18/5, 20, 21 \rangle$	$W_5 = \langle 8, 9, 9/5 \rangle$
$W_{12} = \langle 21, 22, 23 \rangle$	$W_{11} = \langle 21, 22, 23 \rangle$	$W_{10} = \langle 4, 5, 6 \rangle$	$W_9 = \langle 14, 15, 16/5 \rangle$
$W_{16} = \langle 11, 11/5, 12/5 \rangle$	$W_{15} = \langle 25, 26, 27 \rangle$	$W_{14} = \langle 8, 9, 10 \rangle$	$W_{13} = \langle 17/5, 18/5, 19/5 \rangle$
$W_{20} = \langle 4/5, 5/5, 6/5 \rangle$	$W_{19} = \langle 4/5, 5/5, 6 \rangle$	$W_{18} = \langle 19, 20, 21 \rangle$	$W_{17} = \langle 6, 7, 8 \rangle$

۴.۴ نتیجه گیری

از آنجایی که مساله p - میانه یکی از مسایل مهم در نظریه مکانیابی می باشد که برای مدل سازی مسایل دنیای واقعی به کار می رود، پرداختن به این مساله در شرایط عدم قطعیت از اهمیت زیادی برخوردار است. از اینرو در این فصل به مساله مکانیابی p - میانه با وزن ها و متغیر های فازی پرداختیم. سپس الگوریتمی ارائه کردیم که جواب فازی و مقدار بهینه فازی را به دست می آورد.

جدول ۵.۴: وزن های فازی متناظر مثال ۲.۳.۴

$W_{\tau\tau} = \langle 9, 10, 11 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 19, 20, 21 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 9, 10, 11 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 26, 27, 28 \rangle$
$W_{\tau\lambda} = \langle 14/5, 15, 16 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 22, 23, 24 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 3, 4, 4/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 11, 12, 13 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 14, 15, 16 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 19/5, 20, 21 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 27, 28, 29 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 7, 7/5, 9 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 29, 30, 31 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 12, 13, 14 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 5, 6, 7 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 9/5, 10, 11 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 9, 10, 11 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 6/5, 7/5, 8/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 13, 14, 15 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 25, 26, 27 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 21, 22, 23 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 12, 13, 14 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 7/5, 8/5, 9/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 19, 20, 21 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 10/5, 12, 13 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 30/5, 31, 32 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 6, 7, 8 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 18, 19, 20 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 19/5, 20, 21 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 24, 25, 26 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 9/5, 10, 11 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 9/5, 11, 12 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 16/5, 17, 18 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 4/5, 5, 5/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 12, 13, 14 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 18/5, 19/5, 20/5 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 10, 11, 12 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 26, 27, 28 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 7/5, 9, 10/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 19/5, 20, 21 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 30, 31, 32 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 19, 20, 21 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 22, 23, 24 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 8/5, 9, 9/5 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 14, 15, 16 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 4, 5, 6 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 12, 13, 14 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 29/5, 30, 31 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 27/5, 28/5, 29 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 20, 21, 22 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 10, 11, 12 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 14, 15, 16 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 8/5, 9, 10 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 30, 31, 32/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 14, 15, 15/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 9, 10, 11 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 20, 21, 22 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 11, 12, 13 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 6/5, 7, 8/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 19, 20, 21 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 23, 24, 25 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 25, 26, 27 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 14/5, 15, 16/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 8/5, 9/5, 10 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 14, 15, 16/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 16/5, 17/5, 19 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 20/5, 11, 12 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 20, 21, 22 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 9/5, 7/5, 8 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 9/5, 10/5, 11/5 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 27, 28, 29 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 30, 31, 32 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 12/5, 13, 14 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 8/5, 9/5, 10 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 18, 19, 20 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 16, 17, 18 \rangle$
$W_{\tau\tau} = \langle 7/5, 8/5, 9 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 18/5, 19, 20 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 28, 29, 30 \rangle$	$W_{\tau\tau} = \langle 4, 5, 6 \rangle$

جدول ۶.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده چهارم در مثال ۲.۳.۴

$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتري	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتري	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتري
$\langle 19, 19, 20 \rangle$	۴	$\langle 16/5, 16/5, 16/5 \rangle$	۳	$\langle 9, 9, 9/5 \rangle$	۲
$\langle 5/95, 5/95, 5/95 \rangle$	۷	$\langle 18/5, 18/5, 18/5 \rangle$	۶	$\langle 8, 8, 8 \rangle$	۵
$\langle 11, 11, 11 \rangle$	۱۶	$\langle 25, 25, 25 \rangle$	۱۵	$\langle 8, 8, 8 \rangle$	۱۴
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۲۴	$\langle 4/5, 4/5, 4/5 \rangle$	۲۰	$\langle 4/5, 4/5, 4/5 \rangle$	۱۹
$\langle 14/5, 14/5, 15/5 \rangle$	۲۸	$\langle 22, 22, 23 \rangle$	۲۷	$\langle 3, 3, 3 \rangle$	۲۶
$\langle 5, 5, 6 \rangle$	۳۴	$\langle 9/5, 9/5, 10/5 \rangle$	۳۳	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۳۱
$\langle 18, 18, 19 \rangle$	۴۵	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۳۷	$\langle 12, 12, 13 \rangle$	۳۵
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۴۹	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۴۸	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۴۶
$\langle 0, 0, 1/5 \rangle$	۵۸	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۵۲	$\langle 9/5, 9/5, 10/5 \rangle$	۵۰
$\langle 22, 22, 23 \rangle$	۶۲	$\langle 10, 10, 11 \rangle$	۶۰	$\langle 26, 26, 27 \rangle$	۵۹
$\langle 4, 4, 5 \rangle$	۶۷	$\langle 29/5, 29/5, 29/5 \rangle$	۶۵	$\langle 19, 19, 19 \rangle$	۶۳
$\langle 27/5, 27/5, 28 \rangle$	۷۲	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۷۱	$\langle 14, 14, 15 \rangle$	۶۸
$\langle 19, 19, 19 \rangle$	۷۷	$\langle 8/5, 8/5, 9/5 \rangle$	۷۶	$\langle 9, 9, 10 \rangle$	۷۳
$\langle 20, 20, 20 \rangle$	۸۰	$\langle 11, 11, 12 \rangle$	۷۹	$\langle 6/5, 6/5, 8 \rangle$	۷۸
$\langle 14, 14, 15/5 \rangle$	۸۸	$\langle 16/5, 16/5, 16/5 \rangle$	۸۷	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۸۴
$\langle 9/5, 9/5, 10/5 \rangle$	۹۱	$\langle 27, 27, 28 \rangle$	۹۰	$\langle 30, 30, 31 \rangle$	۸۹
$\langle 12/5, 12/5, 13/5 \rangle$	۹۶	$\langle 18, 18, 19 \rangle$	۹۴	$\langle 6/5, 6/5, 7 \rangle$	۹۲
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۹۹	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۹۸	$\langle 4, 4, 5 \rangle$	۹۷

جدول ۷.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده هشتم در مثال ۲.۳.۴

$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری
$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$	۵	$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$	۳	$\langle 23, 23, 24 \rangle$	۱
$\langle 18, 18, 19 \rangle$	۸	$\langle 5/05, 5/05, 5/05 \rangle$	۷	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۶
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۱۶	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۱۴	$\langle 14, 14, 14 \rangle$	۹
$\langle 26, 26, 26 \rangle$	۲۱	$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$	۱۹	$\langle 19, 19, 20 \rangle$	۱۸
$\langle 7, 7, 8/5 \rangle$	۲۹	$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$	۲۶	$\langle 9, 9, 10 \rangle$	۲۲
$\langle 6/5, 6/5, 7/5 \rangle$	۳۹	$\langle 13, 13, 13 \rangle$	۳۸	$\langle 14, 14, 15 \rangle$	۳۲
$\langle 24, 24, 24 \rangle$	۵۱	$\langle 9/5, 9/5, 9/5 \rangle$	۴۹	$\langle 10/5, 10/5, 10/5 \rangle$	۴۸
$\langle 8/5, 8/5, 8/5 \rangle$	۶۱	$\langle 18/5, 18/5, 19/5 \rangle$	۵۳	$\langle 19/5, 19/5, 19/5 \rangle$	۵۲
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۶۵	$\langle 30, 30, 31 \rangle$	۶۴	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۶۳
$\langle 14, 14, 14/5 \rangle$	۷۴	$\langle 20, 20, 20 \rangle$	۷۱	$\langle 12, 12, 13 \rangle$	۶۶
$\langle 14/5, 14/5, 16 \rangle$	۸۲	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۸۰	$\langle 30, 30, 30 \rangle$	۷۵
$\langle 16, 16, 16 \rangle$	۹۳	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۸۶	$\langle 25/5, 25/5, 26 \rangle$	۸۳
$\langle 18/5, 18/5, 18/5 \rangle$	۹۹	$\langle 28, 28, 28 \rangle$	۹۸	$\langle 8/5, 8/5, 8/5 \rangle$	۹۵

جدول ۸.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده دهم در مثال ۲.۳.۴

$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری
$\langle 0, 1/5, 1/5 \rangle$	۶	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۵	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۴
$\langle 4, 4, 5 \rangle$	۱۰	$\langle 0, 0, 1/5 \rangle$	۹	$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$	۷

جدول ۹.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده دهم در مثال ۲.۳.۴

$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتري	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتري	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتري
$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۱۶	$\langle \circ, \circ, 1 \rangle$	۱۵	$\langle 21, 21, 22 \rangle$	۱۱
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۱۹	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۱۸	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۱۷
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۲	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۱	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۰
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۵	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۴	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۳
$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۲۸	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۷	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۲۶
$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۳۳	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۳۲	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۳۰
$\langle 29, 29, 29 \rangle$	۳۶	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۳۵	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۳۴
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۳۹	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۳۸	$\langle 25, 25, 25 \rangle$	۳۷
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۴۳	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۴۱	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۴۰
$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۴۷	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۴۶	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۴۵
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۵۴	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۵۳	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۵۲
$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۵۷	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۵۶	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۵۵
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۶۰	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۵۹	$\langle \circ, 1/5, 1/5 \rangle$	۵۸
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۶۳	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۶۲	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۶۱
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۶۶	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۶۵	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۶۴
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۷۴	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۷۲	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۷۱
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۷۷	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۷۶	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۷۵
$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۸۱	$\langle \circ, 1, 1 \rangle$	۸۰	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۷۸
$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۸۶	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۸۳	$\langle \circ, \circ/5, \circ/5 \rangle$	۸۲

جدول ۱۰.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده دهم در مثال ۲.۳.۴

$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۸۹	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۸۸	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۸۷
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۲	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۱	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۰
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۵	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۴	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۳
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۸	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۷	$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$	۹۶

جدول ۱۱.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده بیست و سوم در مثال ۲.۳.۴

$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۲	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۲	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۸	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۳
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱۲	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱۱	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱۰
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱۵	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱۴	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۱۳
$\langle 19, 19, 20 \rangle$	۲۳	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۲۱	$\langle 0, 0, 0/126 \rangle$	۱۷
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۲۶	$\langle 11, 11, 12 \rangle$	۲۵	$\langle 9, 9, 9 \rangle$	۲۴
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۳۶	$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$	۳۱	$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$	۲۹
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۴۴	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۴۲	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۳۷
$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$	۵۰	$\langle 0, 1/5, 1/5 \rangle$	۴۹	$\langle 0, 1/5, 1/5 \rangle$	۴۸
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۶۸	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۶۷	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۵۱
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۷۰	$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$	۶۱	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۶۹

جدول ۱۲.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده بیست و سوم در مثال ۲.۳.۴

مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$
۷۳	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۷۵	$\langle 0, 0, 1/5 \rangle$	۷۹	$\langle 0, 1, 1 \rangle$
۸۴	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۸۵	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹۹	$\langle 0, 0/5, 0/5 \rangle$
۱۰۰	$\langle 0, 1, 1 \rangle$				

جدول ۱۳.۴: میزان سرویس دهی سرویس دهنده چهل و دوم در مثال ۲.۳.۴

مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$	مشتری	$\tilde{x}_{ij} = \langle x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3} \rangle$
۷	$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$	۱۲	$\langle 21, 21, 21 \rangle$	۱۳	$\langle 17/5, 17/5, 18/5 \rangle$
۱۷	$\langle 6, 6, 6/874 \rangle$	۸	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	۹	$\langle 0, 1, 1 \rangle$
۲۰	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۳۰	$\langle 27, 27, 28 \rangle$	۳۱	$\langle 19/5, 19/5, 19/5 \rangle$
۳۶	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۳۸	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۴۰	$\langle 9, 9, 10 \rangle$
۴۱	$\langle 19, 19, 20 \rangle$	۴۲	$\langle 7/5, 7/5, 8/5 \rangle$	۴۳	$\langle 12, 12, 13 \rangle$
۴۴	$\langle 21, 21, 22 \rangle$	۴۶	$\langle 6, 6, 6 \rangle$	۴۷	$\langle 30/5, 30/5, 31/5 \rangle$
۵۱	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۵۴	$\langle 12, 12, 13 \rangle$	۵۵	$\langle 4/5, 4/5, 5 \rangle$
۵۶	$\langle 16/5, 16/5, 17/5 \rangle$	۵۷	$\langle 19/5, 19/5, 20 \rangle$	۵۸	$\langle 7/5, 7/5, 7/5 \rangle$
۶۱	$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$	۶۹	$\langle 14, 14, 15 \rangle$	۷۰	$\langle 10, 10, 11 \rangle$
۷۷	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۸۱	$\langle 8/5, 8/5, 9 \rangle$	۸۴	$\langle 23, 23, 23 \rangle$
۸۵	$\langle 20, 20, 21 \rangle$	۸۶	$\langle 10/5, 10/5, 10/5 \rangle$	۸۷	$\langle 0, 0, 1/5 \rangle$
۹۳	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	۹۵	$\langle 0, 0, 0/5 \rangle$		

فصل ۵

مساله یک میانه و دو میانه روی درخت فازی

در این فصل به مساله یک میانه و دو میانه روی درخت فازی خواهیم پرداخت و الگوریتم اکثریت وزنی را برای حل آن ارایه خواهیم کرد. از آنجایی که در این الگوریتم جهت تعیین کمترین مقدار، باید اعداد فازی را با یکدیگر مقایسه کنیم، نیازمند یک تابع رتبه بندی مناسب و کارا هستیم. از اینرو در ابتدا یک اندیس رتبه بندی خطی با پیچیدگی محاسباتی کم ارایه خواهیم کرد که قادر به مقایسه همه انواع اعداد فازی می باشد. سپس الگوریتم اکثریت وزنی فازی را ارایه خواهیم کرد. در نهایت این الگوریتم را برای تعیین مکان دو میانه درخت فازی توسعه خواهیم داد.

۱.۵ اندیس رتبه بندی NR

رتبه بندی اعداد فازی روشی مهم در بسیاری از مسایل بهینه سازی می باشد. از اینرو تا کنون محققین بسیاری به این زمینه پرداخته و روش های مختلفی برای رتبه بندی اعداد فازی ارایه کردند [۲۷، ۶۵، ۷۱، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۴]. بخش ۵.۲.۲ را ببینید. در حالی که بسیاری از این روش ها معایب زیادی دارند که از جمله آنها می توان به خطی نبودن تابع رتبه بندی، ناتوانی در مقایسه اعداد فازی متمایز و عدم مقایسه درست اعداد فازی تعمیم یافته اشاره نمود. از اینرو ما یک روش رتبه بندی خطی با پیچیدگی محاسباتی کم تر ارایه خواهیم کرد که در آن هیچ عملگر انتگرالی و رادیکالی به کار نرفته است. روش ما قادر است اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته را با بهترین دقت مرتب کند و نتیجه حاصل از این تابع رتبه بندی جدید مشابه نتایج ارایه شده توسط روش های مشهور پیشین است. همچنین اگر بر اساس این روش دو عدد فازی ارزش یکسان داشته باشند آنگاه آن دو عدد فازی با یکدیگر برابرند. یعنی این روش قادر است که به خوبی اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته مختلف را از یکدیگر تشخیص دهد. روش ارایه شده جدید قادر است که اعداد حقیقی را به خوبی اعداد فازی با یکدیگر مقایسه کند. این روش ساده قادر به مقایسه اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته و معکوس آن ها می باشد و همیشه رتبه بندی درست را تضمین می کند. در ادامه تابع رتبه بندی پیشنهادی مان را معرفی خواهیم کرد.

بر اساس مطالعات وانگ و همکاران [۱۲۶] مرکز ثقل هر عدد فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$G_{\tilde{A}} = (x_{\tilde{A}}, y_{\tilde{A}}) = \left(\frac{a_l + a_m + a_u}{3}, \frac{w_{\tilde{A}}}{3} \right) \quad (۱.۵)$$

به وضوح از رابطه (۱.۵) نتیجه می شود که مرکز ثقل اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته بر اساس پارامترهای a_l, a_m, a_u و $w_{\tilde{A}}$ محاسبه می شود. بنابراین ما اندیس رتبه بندی جدیدی در فضای R^* به صورت زیر معرفی می کنیم

$$NR(\tilde{A}) = \left(\frac{a_l + a_m + a_u}{3}, a_m, \frac{\psi_{\tilde{A}}(a_u - a_l)}{2}, \frac{\psi_{\tilde{A}}(w_{\tilde{A}} - 1)}{3} \right) \in R^* \quad (2.5)$$

که در آن تابع علامت $\psi(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱.۱.۵. تابع علامت $\psi : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\forall \tilde{A} \in \Gamma : \quad \psi_{\tilde{A}} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a_l + a_m + a_u \geq 0 \\ -1 & \text{اگر } a_l + a_m + a_u < 0 \end{cases}$$

حال فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u; w_{\tilde{B}} \rangle$ دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته باشند. بر اساس اندیس NR دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر با یکدیگر مقایسه می شوند

$$\tilde{A} \preceq \tilde{B} \text{ اگر و تنها اگر } NR(\tilde{A}) <_L NR(\tilde{B})$$

که نماد $<_L$ عبارت است از ترتیب الفبایی که در فصل دوم تعریف شده است.

ترتیب الفبایی یک ترتیب کامل در R^* می باشد [۹۵]. بنابراین روش پیشنهادی قادر است که همه اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته را با یکدیگر مقایسه کند. اخیرا جین و همکاران [۶۶] یک عملگر تقریب مثلثی ارائه کردند که بر اساس اندیس مهم مرکز ثقل هر عدد فازی را با یک عدد فازی مثلثی تقریب می زند. بنابراین روش ما قادر خواهد بود که همه انواع مختلف اعداد فازی را با یکدیگر مقایسه کند. لازم به ذکر است که روش ما نه تنها قادر به مقایسه اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته یکسان است بلکه از نظر محاسباتی بسیار ساده است.

در بسیاری از روش های موجود پیشین به هر عدد فازی یک عدد حقیقی نظیر می شود. سپس با مقایسه اعداد حقیقی متناظر اعداد فازی را با یکدیگر مقایسه می کنند. در حالی که بر اساس این روش ها بسیاری از اطلاعات مهم از دست خواهد رفت. از اینرو ما در روش جدید برای حفظ این اطلاعات مهم به هر عدد فازی یک اندیس چهارتایی NR در فضای R^* را نظیر می کنیم. اندیس چهارتایی NR متشکل است از مرکز ثقل، مرکز، نصف طول مجموعه تکیه گاه و ارتفاع عدد فازی مثلثی تعمیم یافته که به راحتی قابل محاسبه می باشند. همان طور که ملاحظه می کنید اندیس چهارتایی NR برای هر عدد فازی مثلثی تعمیم یافته به سادگی و بدون نیاز به عملگرهای پیچیده همچون انتگرال و رادیکال و غیره قابل محاسبه است. علی رغم روش های موجود پیشین در قضیه بعد نشان خواهیم داد که اگر اندیس های چهارتایی NR دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته با یکدیگر برابر باشند آنگاه آن دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته با هم برابرند.

قضیه ۲.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u; w_{\tilde{B}} \rangle$ دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته باشند. آنگاه $\tilde{A} = \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $NR(\tilde{A}) = NR(\tilde{B})$.

برهان. اگر دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u; w_{\tilde{B}} \rangle$ با یکدیگر برابر باشند بدیهی است که $NR(\tilde{A}) = NR(\tilde{B})$.

حال فرض کنید $NR(\tilde{A}) = NR(\tilde{B})$. بنابراین

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3}$$

با استفاده از رابطه بالا و تعریف ۱.۱.۵ نتیجه می شود که $\psi_{\tilde{A}} = \psi_{\tilde{B}}$ از آنجایی که $NR(\tilde{A}) = NR(\tilde{B})$ داریم

$$\begin{cases} \frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3}, \\ a_m = b_m, \\ \frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (a_u - a_l)}{2} = \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (b_u - b_l)}{2}, \\ \frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (w_{\tilde{A}} - 1)}{3} = \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (w_{\tilde{B}} - 1)}{3} \end{cases}$$

بنابراین $a_l = b_l$ ، $a_u = b_u$ و $w_{\tilde{A}} = w_{\tilde{B}}$ که این نتیجه می دهد $\tilde{A} = \tilde{B}$

□

در ادامه برخی از ویژگی های مهم روش پیشنهادی را بیان و اثبات خواهیم کرد.

خاصیت ۳.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u; w_{\tilde{A}} \rangle$ یک عدد فازی مثلثی تعمیم یافته دلخواه باشد. آنگاه:

$$NR(-\tilde{A}) = \left(-\frac{a_l + a_m + a_u}{3}, -a_m, -\frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (a_u - a_l)}{2}, -\frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (w_{\tilde{A}} - 1)}{3} \right) \in R^* = -NR(\tilde{A})$$

برهان. با استفاده از تعریف اندیس NR در رابطه (۲.۵) داریم

$$NR(-\tilde{A}) = \left(\frac{(-a_l) + (-a_m) + (-a_u)}{3}, -a_m, \frac{\psi_{-\tilde{A}} \cdot ((-a_u) - (-a_l))}{2}, \frac{\psi_{-\tilde{A}} \cdot (w_{-\tilde{A}} - 1)}{3} \right)$$

بر اساس تعریف ۱.۱.۵ و نکته ۲.۲.۲ نتیجه می شود

$$\psi_{-\tilde{A}} = -\psi_{\tilde{A}}$$

$$w_{-\tilde{A}} = w_{\tilde{A}}$$

از اینرو داریم

$$NR(-\tilde{A}) = \left(-\frac{a_l + a_m + a_u}{3}, -a_m, -\frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (a_u - a_l)}{2}, -\frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (w_{\tilde{A}} - 1)}{3} \right) = -NR(\tilde{A})$$

□

خاصیت ۴.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی مثلثی تعمیم یافته باشند که $\tilde{A} \leq \tilde{B}$. آنگاه $-\tilde{B} \leq -\tilde{A}$.

برهان. این مطلب با استفاده از رابطه (۲.۵) و خاصیت ۳.۱.۵ به سادگی قابل اثبات است. با استفاده از خاصیت

۳.۱.۵ به سادگی نتیجه می شود که روش پیشنهادی ما ترتیب منطقی بین اعداد فازی مثلثی و قرینه شان را همیشه تضمین می کند.

□

خاصیت ۵.۱.۵. فرض کنید Υ زیر مجموعه ای متناهی دلخواه از Γ باشد. ویژگی های زیر برقرار است

۱. به ازای هر $\tilde{A} \in \Upsilon$ ، آنگاه $\tilde{A} \preceq \tilde{A}$.

۲. به ازای هر $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \Upsilon^2$ ، اگر $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ و $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ آنگاه $\tilde{A} = \tilde{B}$.

۳. به ازای هر $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \in \Upsilon^3$ ، اگر $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \preceq \tilde{C}$ آنگاه $\tilde{A} \preceq \tilde{C}$.

برهان. با استفاده از ترتیب الفبایی روابط (۱) و (۲) به سادگی نتیجه می شوند. حال نشان می دهیم رابطه (۳) برقرار است

از آنجایی که $\tilde{B} \preceq \tilde{C}$ بر اساس ترتیب الفبایی داریم

(i)

$$\frac{b_l + b_m + b_u}{3} < \frac{c_l + c_m + c_u}{3}$$

(ii)

$$\begin{cases} \frac{b_l + b_m + b_u}{3} = \frac{c_l + c_m + c_u}{3} \\ b_m < c_m \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} \frac{b_l + b_m + b_u}{3} = \frac{c_l + c_m + c_u}{3} \\ b_m = c_m \\ \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (b_u - b_l)}{2} < \frac{\psi_{\tilde{C}} \cdot (c_u - c_l)}{2} \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} \frac{b_l + b_m + b_u}{3} = \frac{c_l + c_m + c_u}{3} \\ b_m = c_m \\ \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (b_u - b_l)}{2} = \frac{\psi_{\tilde{C}} \cdot (c_u - c_l)}{2} \\ \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (w_{\tilde{B}} - 1)}{3} < \frac{\psi_{\tilde{C}} \cdot (w_{\tilde{C}} - 1)}{3} \end{cases}$$

حال فرض کنید $\frac{b_l + b_m + b_u}{3} < \frac{c_l + c_m + c_u}{3}$. از طرفی چون $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ آنگاه:

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} < \frac{b_l + b_m + b_u}{3}$$

یا

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3}$$

بنابراین

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} \leq \frac{b_l + b_m + b_u}{3} < \frac{c_l + c_m + c_u}{3}$$

در نتیجه $\tilde{A} \preceq \tilde{C}$.

برای هر یک از سه حالت دیگر نیز می توان به سادگی و مشابه قبل حکم را اثبات کرد.

□

خاصیت ۶.۱.۵. فرض کنید Υ زیر مجموعه ای متناهی از Γ باشد و $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \Upsilon^2$. اگر $a_l > b_u$ آنگاه نتیجه می شود $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$.

برهان. بر اساس تعریف ۱۹.۲.۲ داریم

$$a_u \geq a_m \geq a_l = \inf \text{supp}(\tilde{A}) > \sup \text{supp}(\tilde{B}) = b_u \geq b_m \geq b_l$$

بنابراین

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} > \frac{b_l + b_m + b_u}{3}$$

حال با استفاده از ترتیب الفبایی نتیجه می شود که $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

□

خاصیت ۷.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{A} \oplus \tilde{C}$ و $\tilde{B} \oplus \tilde{C}$ متعلق به مجموعه Γ باشند. فرض کنید که $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ دارای تابع علامت یکسان باشند و $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$. آنگاه $\tilde{A} \oplus \tilde{C} \succeq \tilde{B} \oplus \tilde{C}$.

برهان. از آنجایی که $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ ، بر اساس ترتیب الفبایی یکی از موارد زیر برقرار است

(i)

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} > \frac{b_l + b_m + b_u}{3}$$

(ii)

$$\begin{cases} \frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3} \\ a_m > b_m \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} \frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3} \\ a_m = b_m \\ \frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (a_u - a_l)}{2} > \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (b_u - b_l)}{2} \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} \frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3} \\ a_m = b_m \\ \frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (a_u - a_l)}{2} = \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (b_u - b_l)}{2} \\ \frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (w_{\tilde{A}} - 1)}{3} > \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (w_{\tilde{B}} - 1)}{3} \end{cases}$$

برای حالت های (i) و (iii) نشان می دهیم که حکم برقرار است. بقیه موارد نیز به سادگی قابل اثبات است. ابتدا فرض کنید

$$\frac{a_l + a_m + a_u}{3} > \frac{b_l + b_m + b_u}{3}$$

با اضافه کردن عبارت $\frac{c_l + c_m + c_u}{3}$ به طرفین این نامساوی نتیجه می شود

$$\frac{a_l + a_m + a_u + c_l + c_m + c_u}{3} > \frac{b_l + b_m + b_u + c_l + c_m + c_u}{3}$$

بر اساس رابطه (۲.۵) و تعریف ۳۷.۲.۲ نتیجه می شود که $\tilde{A} \oplus \tilde{C} \succeq \tilde{B} \oplus \tilde{C}$. حال فرض کنید رابطه (iii) برقرار باشد. یعنی

$$\begin{cases} \frac{a_l + a_m + a_u}{3} = \frac{b_l + b_m + b_u}{3} \\ a_m = b_m \\ \frac{\psi_{\tilde{A}} \cdot (a_u - a_l)}{2} > \frac{\psi_{\tilde{B}} \cdot (b_u - b_l)}{2} \end{cases}$$

از آنجایی که $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ هم علامت هستند بر اساس تعریف ۳۷.۲.۲ نتیجه می شود

$$\psi_{\tilde{A} \oplus \tilde{C}} = \psi_{\tilde{B} \oplus \tilde{C}} = \psi_{\tilde{A}} = \psi_{\tilde{B}}$$

بنابراین داریم

$$\frac{\psi_{\tilde{A} \oplus \tilde{C}} \cdot (a_u - a_l)}{2} > \frac{\psi_{\tilde{B} \oplus \tilde{C}} \cdot (b_u - b_l)}{2} \quad (۳.۵)$$

حال با اضافه کردن عبارت $\frac{\psi_{\tilde{B} \oplus \tilde{C}} \cdot (c_u - c_l)}{2}$ به طرفین نامساوی (۳.۵) داریم

$$\frac{\psi_{\tilde{A} \oplus \tilde{C}} \cdot (a_u + c_u - a_l - c_l)}{2} > \frac{\psi_{\tilde{B} \oplus \tilde{C}} \cdot (b_u + c_u - b_l - c_l)}{2}$$

با استفاده از رابطه (۲.۵) و تعریف ۳۷.۲.۲ نتیجه می شود که $\tilde{A} \oplus \tilde{C} \succeq \tilde{B} \oplus \tilde{C}$.

□

خاصیت ۸.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$ دو عدد فازی مثلثی هم علامت و $k \in R$ تابع رتبه بندی ارایه شده خطی است. یعنی

$$NR(k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}) = k \cdot NR(\tilde{A}) + NR(\tilde{B})$$

برهان. با استفاده از تعریف ۳۷.۲.۲ داریم

$$k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B} = \langle ka_l + b_l, ka_m + b_m, ka_u + b_u \rangle$$

همچنین از رابطه (۲.۵) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}
 NR(k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}) &= \\
 &= \left(\frac{ka_l + b_l + ka_m + b_m + ka_u + b_u}{3}, ka_m + b_m, \frac{\psi_{k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}}(ka_u + b_u - ka_l - b_l)}{3}, \circ \right) \\
 &= \left(\frac{k(a_l + a_m + a_u)}{3}, ka_m, \frac{\psi_{k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}} \cdot k(a_u - a_l)}{3}, \circ \right) \\
 &+ \left(\frac{b_l + b_m + b_u}{3}, b_m, \frac{\psi_{k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}}(b_u - b_l)}{3}, \circ \right) \\
 &= k \left(\frac{a_l + a_m + a_u}{3}, a_m, \frac{\psi_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(a_u - a_l)}{3}, \circ \right) \\
 &+ \left(\frac{b_l + b_m + b_u}{3}, b_m, \frac{\psi_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(b_u - b_l)}{3}, \circ \right)
 \end{aligned}
 \tag{۴.۵}$$

از آنجایی که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ هم علامت هستند و $k \in R$ و با استفاده از تعریف ۳۷.۲.۲ نتیجه می شود $\psi_{k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}} = \psi_{\tilde{A}} = \psi_{\tilde{B}}$ حال با جایگذاری در رابطه (۴.۵) داریم

$$\begin{aligned}
 NR(k \cdot \tilde{A} \oplus \tilde{B}) &= k \left(\frac{a_l + a_m + a_u}{3}, a_m, \frac{\psi_{\tilde{A}}(a_u - a_l)}{3}, \circ \right) \\
 &+ \left(\frac{b_l + b_m + b_u}{3}, b_m, \frac{\psi_{\tilde{B}}(b_u - b_l)}{3}, \circ \right) = k \cdot NR(\tilde{A}) + NR(\tilde{B})
 \end{aligned}$$

□

با اثبات اخیر نشان دادیم که رتبه بندی پیشنهادی ما یک رتبه بندی خطی است. در حالیکه بیشتر روش های موجود این خاصیت را ندارند. از طرفی دیگر استفاده از رتبه بندی خطی در مسایل با سائز بزرگ نیازمند محاسبات کمتری است. همچنین در برخی از مسایل واقعی و روش هایی همچون سیمپلکس فازی [۹۸، ۴۲] فقط رتبه بندی خطی قابل استفاده است.

۲.۵ الگوریتم های فازی

برای مساله کلاسیک یک میانه روی درخت، گلدمن [۸۹] الگوریتم اکثریت وزنی را ارایه کرد که در فصل ۱ بیان شده است. در این بخش ابتدا مساله یک میانه را روی درخت فازی در نظر گرفته و الگوریتمی برای آن ارایه خواهیم کرد. سپس این الگوریتم را جهت یافتن دو میانه روی درخت فازی توسعه خواهیم داد.

درخت $X = (V, E)$ را در نظر بگیرید. حال فرض کنید که تقاضاهای مشتریان اعداد فازی مثلثی نرمال باشند. یعنی وزن راس v عدد فازی $\tilde{w}(v)$ باشد. در این حالت درخت فازی را با نماد $\tilde{X}$ نشان می دهیم. به ازای هر زیر درخت $\tilde{X}'$ از $\tilde{X}$ قرار دهید

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) &= \sum_{x \in \tilde{X}} \tilde{w}(x) d(x, y) \\ \tilde{f}(y, \tilde{X}') &= \sum_{x \in \tilde{X}'} \tilde{w}(x) d(x, y) \\ \tilde{W}(\tilde{X}') &= \sum_{x \in \tilde{X}'} \tilde{w}(x)\end{aligned}$$

همچنین فرض کنید که میانه را با m نشان دهیم. در ادامه ابتدا نشان خواهیم داد که سه لم ۱.۵.۱، ۲.۵.۱ و ۳.۵.۱ برای حالتی که تقاضاهای مشتریان مقادیری فازی باشند نیز برقرار است. سپس الگوریتم اکثریت وزنی فازی را ارائه خواهیم کرد.

لم ۱.۲.۵. فرض کنید $\tilde{S}$ و $\tilde{T}$ دو زیر درخت حاصل از حذف یال (v_s, v_t) از درخت فازی $\tilde{X}$ باشد که $s \in \tilde{S}$ ، $t \in \tilde{T}$. آنگاه $\tilde{W}(\tilde{S}) \geq \tilde{W}(\tilde{T})$ اگر و تنها اگر $m \in \tilde{S}$.

برهان. فرض کنید $\tilde{W}(\tilde{S}) \geq \tilde{W}(\tilde{T})$ و y راسی دلخواه در زیر درخت $\tilde{T}$ باشد. کافی است که ثابت کنیم $\tilde{f}(y) \geq \tilde{f}(s)$. بدین منظور اندیس NR تعریف شده در قسمت ۱.۵ را در نظر بگیرید. آنگاه داریم

$$\begin{aligned}NR(\tilde{f}(y)) &= NR\left(\tilde{f}(y, \tilde{T}) \oplus \tilde{f}(y, \tilde{S})\right) = NR\left(\tilde{f}(y, \tilde{T}) \oplus \sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, y)\right) \\ &= NR\left(\tilde{f}(y, \tilde{T}) \oplus \sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) [d(x, s) + d(s, y)]\right) \\ &= NR\left(\tilde{f}(y, \tilde{T}) \oplus d(s, y) \tilde{W}(\tilde{S}) \oplus \sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, s)\right) \\ &= NR(\tilde{f}(y, \tilde{T})) + d(s, y) NR(\tilde{W}(\tilde{S})) + NR\left(\sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, s)\right)\end{aligned}$$

از آنجایی که $\tilde{W}(\tilde{S}) \geq \tilde{W}(\tilde{T})$ ، نتیجه می شود $NR(\tilde{W}(\tilde{S})) \geq NR(\tilde{W}(\tilde{T}))$. بنابراین

$$\begin{aligned}NR(\tilde{f}(y)) &\geq NR(\tilde{f}(y, \tilde{T})) + d(s, y) NR(\tilde{W}(\tilde{T})) + NR\left(\sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, s)\right) \\ &= NR\left(\tilde{f}(y, \tilde{T}) \oplus d(s, y) \tilde{W}(\tilde{T}) \oplus \sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, s)\right) \\ &= NR\left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(y, x) \oplus \sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(s, y) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{S})\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= NR \left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) [d(s, y) + d(y, x)] \oplus \tilde{f}(s, \tilde{S}) \right) \\
&\geq NR \left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(s, x) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{S}) \right) \\
&= NR \left(\tilde{f}(s, \tilde{T}) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{S}) \right) = NR \left(\tilde{f}(s) \right)
\end{aligned}$$

و این بدین معناست که $\tilde{f}(y) \succeq \tilde{f}(s)$. یعنی میانه نمی تواند در زیر درخت T واقع شود. حال به عکس فرض کنید $m \in S$ و $\tilde{W}(\tilde{S}) \prec \tilde{W}(\tilde{T})$. همچنین فرض کنید که y راس دلخواهی از زیر درخت $\tilde{S}$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned}
NR(\tilde{f}(y)) &= NR \left(\tilde{f}(y, \tilde{S}) \oplus \tilde{f}(y, \tilde{T}) \right) = NR \left(\tilde{f}(y, \tilde{S}) \oplus \sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(y, x) \right) \\
&= NR \left(\tilde{f}(y, \tilde{S}) \oplus \sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) [d(y, t) + d(t, x)] \right) \\
&= NR \left(\tilde{f}(y, \tilde{S}) \oplus d(y, t) \tilde{W}(\tilde{T}) \oplus \sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(t, x) \right) \\
&= NR(\tilde{f}(y, \tilde{S})) + d(y, t) NR(\tilde{W}(\tilde{T})) + NR \left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(t, x) \right)
\end{aligned}$$

از آنجایی که $\tilde{W}(\tilde{S}) \prec \tilde{W}(\tilde{T})$ نتیجه می شود $NR(\tilde{W}(\tilde{S})) < NR(\tilde{W}(\tilde{T}))$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
NR(\tilde{f}(y)) &> NR(\tilde{f}(y, \tilde{S})) + d(y, t) NR(\tilde{W}(\tilde{S})) + NR \left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(t, x) \right) \\
&= NR \left(\tilde{f}(y, \tilde{S}) \oplus d(y, t) \tilde{W}(\tilde{S}) \oplus \sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(t, x) \right) \\
&= NR \left(\sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, y) \oplus \sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(y, t) \oplus \sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x) d(t, x) \right) \\
&= NR \left(\sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) [d(x, y) + d(y, t)] \oplus \tilde{f}(t, \tilde{T}) \right) \\
&\geq NR \left(\sum_{x \in \tilde{S}} \tilde{w}(x) d(x, t) \oplus \tilde{f}(t, \tilde{T}) \right) \\
&= NR \left(\tilde{f}(t, \tilde{S}) + \tilde{f}(t, \tilde{T}) \right) = NR(\tilde{f}(t))
\end{aligned}$$

این بدین معناست که m در زیر درخت $\tilde{S}$ قرار ندارد که مغایر با فرض مساله است. بنابراین نتیجه می شود

$$\tilde{W}(\tilde{S}) \succeq \tilde{W}(\tilde{T})$$

□

لم ۲.۲.۵. فرض کنید $\tilde{S}$ و $\tilde{T}$ دو زیر درخت حاصل از حذف یال (v_s, v_t) از درخت فازی $\tilde{X}$ باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{W}(\tilde{S}) \succeq \tilde{W}(\tilde{T})$. آنگاه مساله یافتن یک میانه روی درخت $\tilde{X}$ معادل است با یافتن یک میانه روی زیر درخت $\tilde{N}_S$ که در آن $\tilde{N}_S$ همان زیر درخت فازی $\tilde{S}$ است که در آن وزن راس s با $\tilde{w}(s) \oplus \tilde{W}(\tilde{T})$ جایگزین شده است.

برهان. بر اساس لم ۱.۲.۵، نتیجه می شود که میانه در زیر درخت $\tilde{S}$ قرار دارد. حال نشان می دهیم که مساله یافتن یک میانه روی درخت $\tilde{X}$ معادل است با یافتن یک میانه روی زیر درخت $\tilde{N}_S$ که در آن وزن راس ها آنگونه که در بالا بیان شد اصلاح شده است.

فرض کنید تابع هدف زیر درخت $\tilde{N}_S$ با $\tilde{f}'$ نمایش داده شود. برای هر $y \in \tilde{S}$ داریم

$$\begin{aligned} NR(\tilde{f}(y)) &= NR\left(\tilde{f}(y, \tilde{T}) \oplus \tilde{f}(y, \tilde{S} - \{s\}) \oplus \tilde{w}(s)d(y, s)\right) \\ &= NR\left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x)d(y, x) \oplus \tilde{f}(y, \tilde{S} - \{s\}) \oplus \tilde{w}(s)d(y, s)\right) \\ &= NR\left(\sum_{x \in \tilde{T}} \tilde{w}(x)[d(y, s) + d(s, x)] \oplus \tilde{f}(y, \tilde{S} - \{s\}) \oplus \tilde{w}(s)d(y, s)\right) \\ &= NR\left(d(y, s)\tilde{W}(\tilde{T}) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{T}) \oplus \tilde{f}(y, \tilde{S} - \{s\}) \oplus \tilde{w}(s)d(y, s)\right) \\ &= NR\left(\left[\tilde{W}(\tilde{T}) \oplus \tilde{w}(s)\right]d(y, s) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{T}) \oplus \tilde{f}(y, \tilde{S} - \{s\})\right) \\ &= NR\left(\tilde{f}'(y) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{T})\right) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\min_{y \in \tilde{S}} \left(NR(\tilde{f}(y)) \right) = \min_{y \in \tilde{S}} \left(NR(\tilde{f}'(y) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{T})) \right)$$

به عبارت دیگر

$$\min_{y \in \tilde{S}} (\tilde{f}(y)) = \min_{y \in \tilde{S}} (\tilde{f}'(y)) \oplus \tilde{f}(s, \tilde{T})$$

و از این نتیجه می شود که یافتن یک میانه روی درخت $\tilde{X}$ معادل است با یافتن یک میانه روی زیر درخت $\tilde{N}_S$ که در آن وزن راس s با $\tilde{w}(s) \oplus \tilde{W}(\tilde{T})$ جایگزین شده است.

□

لم ۳.۲.۵. اگر وزن راسی از یک درخت (گراف) فازی $\tilde{X}$ بیشتر از نصف مجموع وزن های همه رئوس باشد آنگاه آن راس میانه درخت فازی $\tilde{X}$ می باشد.

برهان. درخت $\tilde{X}$ با n راس $v_1, v_2, \dots, v_n$ را در نظر بگیرید و بدون از دست دادن کلیت فرض کنید

$$\tilde{w}(v_1) \succeq \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}(v_j)}{2} \quad (5.5)$$

ادعا می کنیم که راس v_1 میانه درخت $\tilde{X}$ است. برای اثبات این ادعا فرض کنید v_r یکی از راس های مجاور v_1 باشد. با حرکت از راس v_1 در جهت راس v_r به اندازه δ به نقطه جدید v'_1 خواهیم رسید. همچنین فرض کنید $\tilde{X}_{v_1}$ و $\tilde{X}_{v_r}$ زیر درخت های حاصل از حذف یال (v_1, v_r) باشند. تابع هدف به ازای نقطه جدید برابر است با

$$\begin{aligned} NR(\tilde{f}(v'_1)) &= NR\left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}(v_j)d(v_j, v'_1)\right) \\ &= NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j)d(v_j, v'_1) \oplus \sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)d(v_j, v'_1)\right) \\ &= NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j)[d(v_j, v_1) + \delta] \oplus \sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)[d(v_j, v_1) - \delta]\right) \\ &= NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j)d(v_j, v_1) \oplus \sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)d(v_j, v_1) \oplus \delta\left[\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j) \ominus \sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)\right]\right) \\ &= NR\left(\tilde{f}(v_1) \oplus \delta\left[\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j) \ominus \sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)\right]\right) \\ &= NR(\tilde{f}(v_1)) + \delta NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j) \ominus \sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)\right) \\ &= NR(\tilde{f}(v_1)) + \delta \left(NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j)\right) - NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j)\right) \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} NR\left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j)\right) &> NR(\tilde{w}(v_1)) \geq NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X})}{2}\right) \\ &= NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X}_{v_1})}{2}\right) + NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X}_{v_r})}{2}\right) \end{aligned}$$

(۷.۵)

از رابطه (۷.۵) به وضوح نتیجه می شود که

$$NR \left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_1}} \tilde{w}(v_j) \right) > NR \left(\sum_{v_j \in \tilde{X}_{v_r}} \tilde{w}(v_j) \right) \quad (۸.۵)$$

حال با جایگذاری (۸.۵) در (۶.۵) نتیجه می شود

$$NR \left(\tilde{f}(v'_1) \right) \geq NR \left(\tilde{f}(v_1) \right)$$

بنابراین:

$$\tilde{f}(v'_1) \succeq \tilde{f}(v_1)$$

این بدان معناست که با حرکت از راس v_1 در هر جهتی به مقدار بهتری دست نخواهیم یافت. بنابراین v_1 میانه می باشد. $\square$

تا اینجا نشان دادیم که سه لم ۲.۵.۱، ۱.۵.۱ و ۳.۵.۱ برای حالتی که وزن ها اعداد فازی مثلثی هستند نیز برقرار است. حال می توان الگوریتم اکثریت فازی را برای درخت $\tilde{X}$ با وزن های فازی به صورت زیر ارایه کرد.

الگوریتم یک میانه فازی

گام اول. اگر درخت $\tilde{X}$ فقط یک راس داشته باشد توقف کنید. همان راس میانه می باشد.

گام دوم. راس انتهایی (راسی با درجه یک) دلخواه v_i را در نظر بگیرید. اگر

$$NR(\tilde{w}(v_i)) \geq NR \left(\frac{\sum_{v_j \in \tilde{X}} \tilde{w}(v_j)}{2} \right)$$

به گام چهارم بروید. در غیر این صورت به گام سوم بروید. لازم به ذکر است که اندیس NR همان تابع رتبه بندی است که در قسمت قبل ارایه کردیم.

گام سوم. فرض کنید v_k راس مجاور با v_i باشد. درخت $\tilde{X}$ را با حذف راس v_i و یال $[v_i, v_k]$ اصلاح کنید و قرار دهید $\tilde{w}(v_k) = \tilde{w}(v_k) + \tilde{w}(v_i)$. سپس به گام اول برگردید.

گام چهارم. توقف کنید. راس v_i میانه است.

حال مساله یافتن دو میانه روی درخت با تقاضاهای فازی را در نظر بگیرید. می توان الگوریتم فازی ارایه شده را به گونه ای توسعه دهیم که دو میانه درخت $\tilde{X}$ با وزن های فازی را بیابد. اساس این الگوریتم همانند حالت قطعی استفاده از روش حذف یال است. گام های این الگوریتم به صورت زیر است.

الگوریتم دو میانه فازی

گام اول. به ازای هر $e_i \in E$ ، یال $e_i = (s_i, t_i)$ را از درخت $\tilde{X}$ حذف کنید. در این صورت دو زیر درخت $\tilde{T}_i$ و $\tilde{S}_i$ به ترتیب با مجموعه رئوس V_{t_i} و V_{s_i} حاصل می شود. برای هر کدام از این دو زیر درخت با استفاده از الگوریتم قبل یک میانه را بیابید و آنها را به ترتیب m_{t_i} و m_{s_i} بنامید.

گام دوم. به ازای حذف هر یال $e_i = (s_i, t_i)$ مقادیر زیر را محاسبه کنید

$$\tilde{F}_i(m_{s_i}, m_{t_i}) = \sum_{v_j \in V_s} \tilde{w}_j d(m_{s_i}, v_j) + \sum_{v_j \in V_t} \tilde{w}_j d(m_{t_i}, v_j)$$

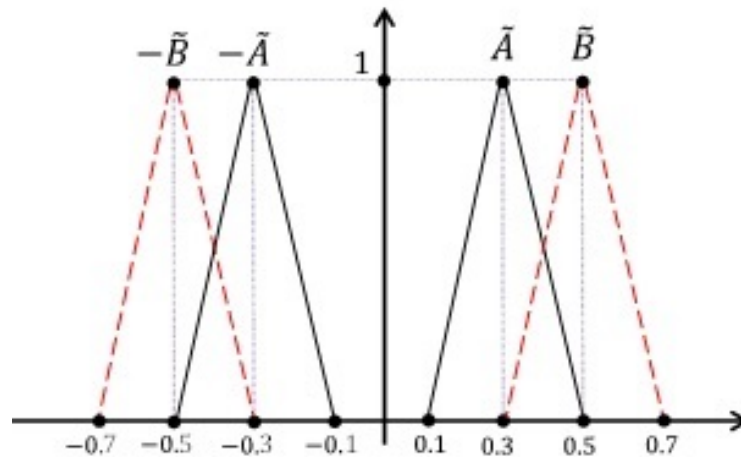
گام سوم. با استفاده از رتبه بندی ارایه شده در قسمت قبل به ازای $i = 1, 2, \dots, m-1$ کمترین مقدار $\tilde{F}_i(m_{s_i}, m_{t_i})$ را بیابید. زوج (m_{s_k}, m_{t_k}) متناظر با این کمترین مقدار دو میانه درخت $\tilde{X}$ است. یعنی

$$NR(\tilde{F}_k(m_{s_k}, m_{t_k})) = \min_{i=1, \dots, m-1} NR(\tilde{F}_i(m_{s_i}, m_{t_i}))$$

۳.۵ مثال های عددی

در این بخش ابتدا با استفاده از شش دسته از اعداد فازی، رتبه بندی جدید ارایه شده را با برخی روش های پیشین مقایسه می کنیم. سپس با ذکر یک مثال کارایی الگوریتم های فازی ارایه شده را نشان خواهیم داد.

مثال ۱.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle \circ/1, \circ/3, \circ/5 \rangle$ و $\tilde{B} = \langle \circ/3, \circ/5, \circ/7 \rangle$ دو عدد فازی باشند. همچنین $-\tilde{A} = \langle -\circ/5, -\circ/3, -\circ/1 \rangle$ و $-\tilde{B} = \langle -\circ/7, -\circ/5, -\circ/3 \rangle$ به ترتیب قرینه های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشند.



شکل ۱.۵: اعداد فازی مثلثی مثال ۱.۳.۵.

با استفاده از (۲.۵) داریم

$$NR(\tilde{A}) = (\circ/3, \circ/3, \circ/2, \circ), \quad NR(\tilde{B}) = (\circ/5, \circ/5, \circ/2, \circ)$$

$$NR(-\tilde{A}) = (-\circ/3, -\circ/3, -\circ/2, \circ), \quad NR(-\tilde{B}) = (-\circ/5, -\circ/5, -\circ/2, \circ)$$

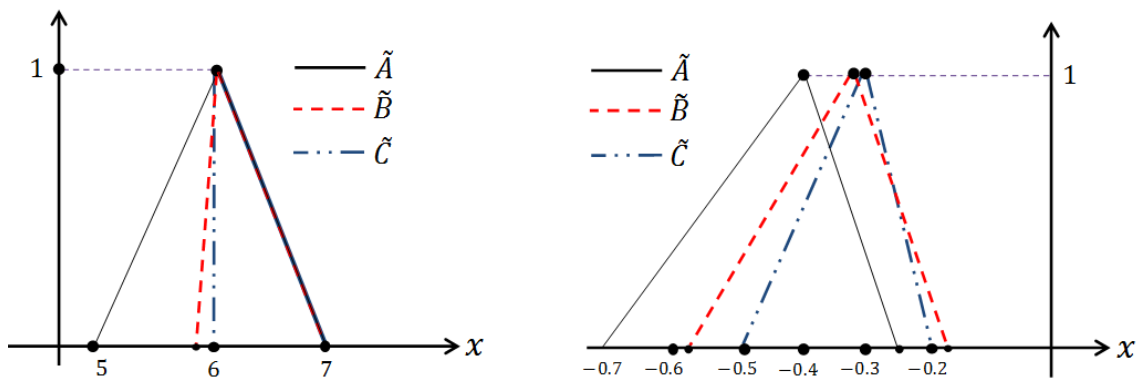
بدیهی است که مولفه اول $NR(\tilde{B})$ بزرگتر از مولفه اول $NR(\tilde{A})$ است. بنابراین $NR(\tilde{A}) <_L NR(\tilde{B})$. در نتیجه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ (شکل ۱.۵). به طریق مشابه می توان نشان داد که

$$-\tilde{B} \prec -\tilde{A} \prec \tilde{A} \prec \tilde{B}$$

این مثال نشان می دهد که رتبه بندی ارایه شده قادر است که همه اعداد فازی و قرینه شان را به خوبی با یکدیگر مقایسه کند.

مثال ۲.۳.۵. دو مجموعه اعداد فازی به صورت زیر را که در شکل ۲.۵ نمایش داده شده است در نظر بگیرید [۱۰۲].

مجموعه اول: $\tilde{A} = \langle 5, 6, 7 \rangle$, $\tilde{B} = \langle 5/9, 6, 7 \rangle$ و $\tilde{C} = \langle 6, 6, 7 \rangle$
 مجموعه دوم: $\tilde{A} = \langle -0.5, -0.3, -0.2 \rangle$, $\tilde{B} = \langle -0.58, -0.32, -0.17 \rangle$ و $\tilde{C} = \langle -0.7, -0.4, -0.25 \rangle$



شکل ۲.۵: مجموعه های اعداد فازی مثال ۲.۳.۵.

حال رتبه بندی پیشنهادی را با چهار روش موجود دیگر مقایسه می کنیم. جدول های ۱.۵ و ۲.۵ به ترتیب نتایج محاسباتی حاصل از اعمال رتبه بندی ها بر روی این دو دسته از اعداد فازی و نتایج حاصل از مقایسه این چهار روش با یکدیگر را نشان می دهند. همان طور که ملاحظه می شود برای اولین دسته از مجموعه های فازی روش های ارایه شده توسط چو و تساو [۲۸] و چن [۲۳] نتیجه غیر قابل قبول و ناسازگار با شهود بشر ارایه می دهند. در حالی که روش ما همان جواب بدست آمده توسط روش های چنگ [۲۶] و ناصری [۱۰۲] را نتیجه می دهد. همچنین باید اشاره نمود که خاصیت مهم روش ما این است که پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به روش های چنگ [۲۶] و ناصری [۱۰۲] دارد.

جدول ۱.۵: نتایج محاسباتی مثال ۲.۳.۵

روش ها	روش جدید	روش ناصری	روش چو-تساو	روش چنگ	روش چن
$\tilde{A}$	(۶,۶,۱,۰)	۱۲	۳	۶/۰۲۱	۰/۵
$\tilde{B}$	(۶/۳,۶,۰/۵۵,۰)	۱۲/۷۶۷	۳/۱۲۶	۶/۳۴۹	۰/۵۸۳۳
$\tilde{C}$	(۶/۳۳۳,۶,۰/۵,۰)	۱۲/۸۵۴	۳/۹۸۵	۶/۳۵۱۹	۰/۵۷۱۴
$\tilde{A}$	(-۰/۳۳۳, -۰/۳, -۰/۱۵, ۰)	-۰/۱۷۱۹	-۰/۱۶۲	۰/۵۹	۰/۶۷۰۸
$\tilde{B}$	(-۰/۳۵۷, -۰/۳۲, -۰/۲۰۵, ۰)	-۰/۴۱۲۷	-۰/۱۷۴	۰/۶۰۴	۰/۶۳۰۲
$\tilde{C}$	(-۰/۴۵, -۰/۴, -۰/۲۲۵, ۰)	-۰/۴۱۵۲	-۰/۲۱۹	۰/۶۶۲	۰/۵۱۱۶

جدول ۲.۵: نتایج حاصل از مقایسه مثال ۲.۳.۵

روش ها	نتایج مقایسه دسته اول	نتایج مقایسه دسته اول
روش جدید	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} > \tilde{B} > \tilde{C}$
روش ناصری	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} > \tilde{B} > \tilde{C}$
روش چو-تساو	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} > \tilde{B} > \tilde{C}$
روش چنگ	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$
روش چن	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} > \tilde{B} > \tilde{C}$

مثال ۳.۳.۵. مجموعه های زیر را در نظر بگیرید [۷].

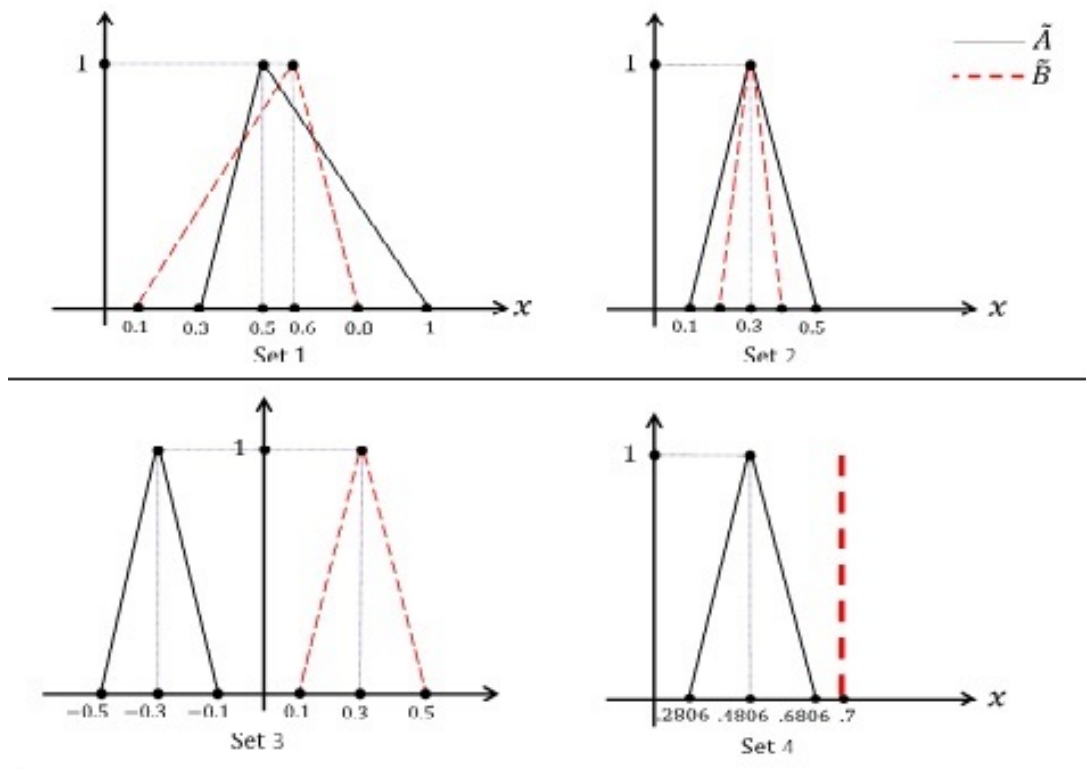
مجموعه اول: $\tilde{A} = \langle ۰/۳, ۰/۵, ۱ \rangle$, $\tilde{B} = \langle ۰/۱, ۰/۶, ۰/۸ \rangle$

مجموعه دوم: $\tilde{A} = \langle ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵ \rangle$, $\tilde{B} = \langle ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴ \rangle$

مجموعه سوم: $\tilde{A} = \langle -۰/۵, -۰/۳, -۰/۱ \rangle$, $\tilde{B} = \langle ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵ \rangle$

مجموعه چهارم: $\tilde{A} = \langle ۰/۲۸۰۶, ۰/۴۸۰۶, ۰/۶۸۰۶ \rangle$, $\tilde{B} = \langle ۰/۷, ۰/۷, ۰/۷ \rangle$

این مجموعه ها در شکل ۳.۵ نشان داده شده اند. همچنین نتایج حاصل از مقایسه در جدول ۳.۵ آورده شده است. به وضوح مشاهده می شود که



شکل ۳.۵: چهار مجموعه اعداد فازی مثلثی مثال ۳.۳.۵.

۱. نتیجه حاصل از رتبه بندی ما و سایر روش های رتبه بندی ذکر شده ترتیب یکسانی را برای اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ از مجموعه اول از شکل ۳.۵ ارائه می دهند. همچنین روش جدید ما از نظر محاسباتی از سایر روش های ذکر شده بسیار ساده تر می باشد.

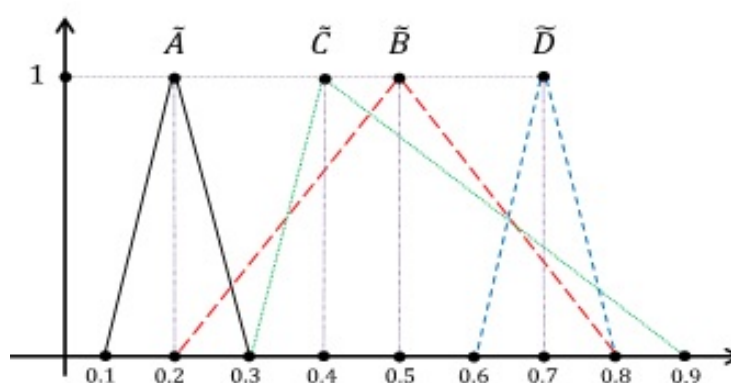
۲. اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در مجموعه دوم از شکل ۳.۵ نمی توانند بر اساس رتبه بندی یاگر [۱۳۳]، موراکامی و همکاران [۹۵] و چنگ [۲۶] به درستی مرتب شوند. درحالی که نتایج حاصل از روش های ارائه شده توسط لی و چن [۷۸]، آکایار [۷]، چن و چن [۲۴] و روش ارائه شده ما یکسان است. همچنین اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در مجموعه سوم از شکل ۳.۵ نمی توانند با استفاده از روش چنگ [۲۶] مرتب شود. در حالی که روش ارائه شده ما و سایر روش های دیگر نتیجه یکسانی را ارائه می دهند. نتیجه حاصل از مقایسه این مجموعه از اعداد نشان می دهد که اعداد فازی و قرینه شان می توانند با استفاده از رتبه بندی ارائه شده ما به درستی با یکدیگر مقایسه شوند.

۳. اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در مجموعه چهارم از شکل ۳.۵ فقط می تواند با استفاده از روش ارائه شده ما و روش های چنگ [۲۶] و آکایار [۷] مقایسه شوند.

جدول ۳.۵: نتایج حاصل از مقایسه مثال ۳.۳.۵

روش های رتبه بندی	مجموعه ۱	مجموعه ۲	مجموعه ۳	مجموعه ۴
روش یاگر	$\tilde{A} > \tilde{B}$	-	$\tilde{A} < \tilde{B}$	-
روش موراکی و همکاران	$\tilde{A} > \tilde{B}$	-	$\tilde{A} < \tilde{B}$	-
روش چنگ	$\tilde{A} > \tilde{B}$	-	-	-
روش چن و چن	$\tilde{A} > \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$
روش لی و چن	$\tilde{A} > \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	-
روش آکایار و همکاران	$\tilde{A} > \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$
روش جدید	$\tilde{A} > \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$

مثال ۴.۳.۵. در شکل ۴.۵، چهار عدد فازی $\tilde{A} = \langle 0/1, 0/2, 0/3 \rangle$ ، $\tilde{B} = \langle 0/2, 0/5, 0/8 \rangle$ ، $\tilde{C} = \langle 0/3, 0/4, 0/9 \rangle$ و $\tilde{D} = \langle 0/6, 0/7, 0/8 \rangle$ نشان داده شده اند.



شکل ۴.۵: نمایش چهار عدد فازی مثال ۴.۳.۵.

این اعداد پیش از این توسط روش های یاگر [۱۳۴]، فورتمپس و روبنز [۴۹] و لیو و وانگ [۸۱] مقایسه شده اند [۵۲].

نتایج محاسباتی و نتایج حاصل از مقایسه که به ترتیب در جدول های ۴.۵ و ۵.۵ آورده شده است نشان می دهند که هیچ یک از روش ها قادر به مقایسه این اعداد به طور کامل نمی باشند. روش های یاگر [۱۳۳] و فورتمپس و روبنز [۴۹] قادر به تشخیص اعداد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ نیستند. همچنین روش لیو و وانگ [۸۱] نمی تواند اعداد $\tilde{B}$ ، $\tilde{C}$ و $\tilde{A}$ را از یکدیگر تشخیص دهد. در حالی که روش ارایه شده ما رتبه بندی کاملی از این اعداد ارایه می کند.

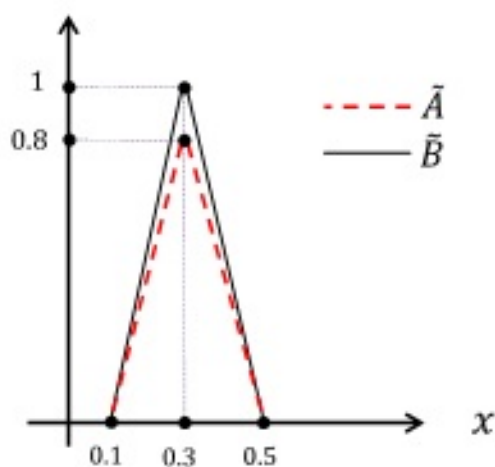
جدول ۴.۵: نتایج محاسباتی مثال ۴.۳.۵

اعداد فازی	روش جدید	روش یاگر	روش فورتمپس و روبنز	روش لیو و وانگ
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0/5$	$\alpha = 1$	
$\tilde{A}$	$(0/2, 0/2, 0/1, 0)$	۰/۲	۰/۲	۰/۱۵
$\tilde{B}$	$(0/5, 0/5, 0/3, 0)$	۰/۵	۰/۵	۰/۳۵
$\tilde{C}$	$(0/533, 0/4, 0/3, 0)$	۰/۵	۰/۵	۰/۳۵
$\tilde{D}$	$(0/7, 0/7, 0/1, 0)$	۰/۷	۰/۷	۰/۶۵

جدول ۵.۵: نتایج حاصل از مقایسه مثال ۴.۳.۵

روش ها	نتایج مقایسه
روش جدید	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C} < \tilde{D}$
روش یاگر	$\tilde{A} < \tilde{B} = \tilde{C} < \tilde{D}$
روش فورتمپس و روبنز	$\tilde{A} < \tilde{B} = \tilde{C} < \tilde{D}$
روش لیو و وانگ	
$\alpha = 1$	$\tilde{A} < \tilde{B} = \tilde{C} < \tilde{D}$
$\alpha = 0/5$	$\tilde{A} < \tilde{B} = \tilde{C} < \tilde{D}$
$\alpha = 0$	$\tilde{A} < \tilde{B} = \tilde{C} < \tilde{D}$

مثال ۵.۳.۵. در شکل ۵.۵ اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = \langle \circ/1, \circ/3, \circ/5; \circ/8 \rangle$ و $\tilde{B} = \langle \circ/1, \circ/3, \circ/5; 1 \rangle$ نمایش داده شده اند [۳۱].



شکل ۵.۵: اعداد فازی تعمیم یافته مثال ۵.۳.۵.

با استفاده از روش جدید ما نتیجه می شود که $\tilde{A} < \tilde{B}$. همچنین نتایج حاصل از مقایسه با سایر روش ها در جدول ۶.۵ آورده شده است.

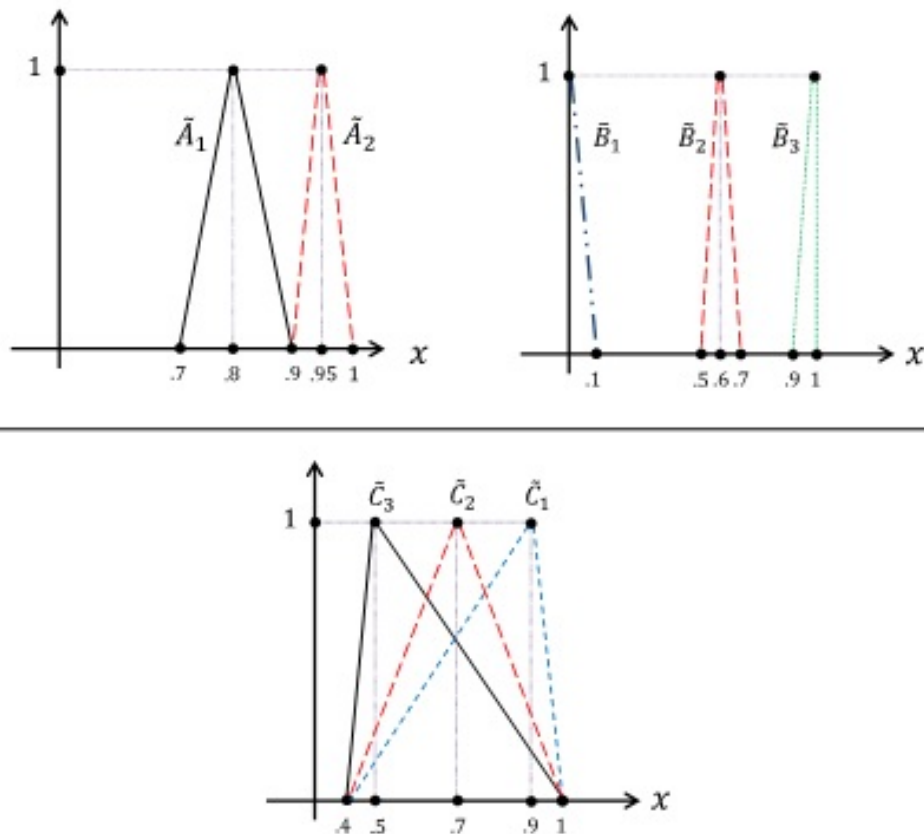
جدول ۶.۵: نتایج حاصل از مقایسه مثال ۵.۳.۵

اعداد فازی	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	نتایج مقایسه
روش جدید	$(\circ/3, \circ/3, \circ/2, -\circ/0.67)$	$(\circ/3, \circ/3, \circ/2, \circ)$	$\tilde{A} < \tilde{B}$
روش یاگر	$\circ/3$	$\circ/3$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$
روش موراکامی	$\circ/233$	$\circ/3$	$\tilde{A} < \tilde{B}$
روش چنگ	$\circ/461$	$\circ/5831$	$\tilde{A} < \tilde{B}$
روش چن و چن	$\circ/2063$	$\circ/2579$	$\tilde{A} < \tilde{B}$
روش لی و چن	-	-	-
روش آکاپار	-	-	-

این جدول نشان می دهد که بر اساس روش یاگر [۱۳۳] ترتیب درستی ارایه نمی کند. همچنین روش های لی و چن [۷۸] و آکایار [۷] قادر به مقایسه اعداد فازی تعمیم یافته شکل ۵.۵ نیستند. بدیهی است که ما در روش پیشنهادی مان مشکلات موجود در سایر روش ها را برطرف نمودیم.

مثال ۶.۳.۵. در شکل ۶.۵ هشت عدد فازی زیر نشان داده شده است [۱۷].

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \langle \circ/7, \circ/8, \circ/9 \rangle, \tilde{A}_2 = \langle \circ/9, \circ/9.5, 1 \rangle \\ \tilde{B}_1 &= \langle \circ, \circ, \circ/1 \rangle, \tilde{B}_2 = \langle \circ/5, \circ/6, \circ/7 \rangle, \tilde{B}_3 = \langle \circ/9, 1, 1 \rangle \\ \tilde{C}_1 &= \langle \circ/4, \circ/9, 1 \rangle, \tilde{C}_2 = \langle \circ/4, \circ/7, 1 \rangle, \tilde{C}_3 = \langle \circ/4, \circ/5, 1 \rangle\end{aligned}$$



شکل ۶.۵: نمایش هشت عدد فازی مثال ۶.۳.۵.

در جدول های ۷.۵ و ۸.۵ نتایج محاسباتی اعمال اندیس NR و روش های جین [۶۶]، چنگ [۲۶]، کری [۷۱]، لی و لی [۷۹] و لیو و وانگ [۸۱] بر این اعداد ارایه شده است. همچنین نتایج حاصل از مقایسه در جدول ۹.۵ آورده شده است.

جدول ۷.۵: نتایج محاسباتی مثال ۶.۳.۵

اعداد فازی	روش جدید	روش چنگ	روش کری
$\tilde{A}_1$	$(0/8, 0/8, -0/1, 0)$	$0/16$	$0/85$
$\tilde{A}_2$	$(0/95, 0/95, -0/05, 0)$	$0/09$	1
$\tilde{B}_1$	$(0/033, 0, -0/05, 0)$	0	$0/89$
$\tilde{B}_2$	$(0/6, 0/6, -0/1, 0)$	$0/12$	$0/85$
$\tilde{B}_3$	$(0/967, 1, -0/05, 0)$	$0/1$	1
$\tilde{C}_1$	$(0/767, 0/9, -0/3, 0)$	$0/46$	1
$\tilde{C}_2$	$(0/7, 0/7, -0/3, 0)$	$0/41$	$0/86$
$\tilde{C}_3$	$(0/633, 0/5, -0/3, 0)$	$0/38$	$0/76$

در مثال های بعد با استفاده از الگوریتم های فازی ارایه شده به یافتن یک میانه و دو میانه روی درخت های فازی خواهیم پرداخت.

مثال ۷.۳.۵. درخت فازی $\tilde{X}$ نشان داده شده در شکل ۷.۵ را در نظر بگیرید که در آن تقاضاهای مشتری ها اعداد فازی مثلثی نرمال هستند که در جدول ۱۰.۵ آورده شده است. به وضوح داریم

$$\tilde{W}(\tilde{X}) = \sum_{j=1}^v \tilde{w}(v_j) = \langle 9/75, 20/45, 30/5 \rangle$$

برای یافتن یک میانه این درخت فازی بر اساس الگوریتم یک میانه فازی به صورت زیر عمل می کنیم ابتدا راس دلخواه v_3 را درخت $\tilde{X}$ در نظر بگیرید. آنگاه داریم

$$NR(\tilde{w}(v_3)) = (3/66, 4, 1/5, 0)$$

$$NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X})}{2}\right) = (10/116, 10/225, 10/375, 0)$$

به وضوح نتیجه می شود که

$$NR(\tilde{w}(v_3)) \not\geq NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X})}{2}\right)$$

جدول ۸.۵: نتایج محاسباتی مثال ۶.۳.۵

اعداد فازی		روش لی و لی		روش لیو و وانگ			روش جین		
		G	O	$\alpha = 0$	$\alpha = 0/5$	$\alpha = 1$	$k = 0/5$	$k = 2$	$k = 1$
$\tilde{A}_1$	۰	۰	۰	۰/۷۵	۰/۸	۰/۸۵	۰/۹۰	۰/۷۰	۰/۸۱
$\tilde{A}_2$	۱	۱	۱	۰/۹۳	۰/۹۵	۰/۹۸	۰/۹۷	۰/۹۲	۰/۹۵
$\tilde{B}_1$	۰	۰	۰	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۶	۰	۰/۰۹
$\tilde{B}_2$	۰	۰	۰	۰/۶۵	۰/۷	۰/۷۵	۰/۷۸	۰/۴۲	۰/۶۳
$\tilde{B}_3$	۱	۱	۱	۰/۹۵	۰/۹۸	۱	۱	۱	۱
$\tilde{C}_1$	۰/۶۵	۱	۱	۰/۶۵	۰/۸	۰/۹۵	۰/۹۵	۰/۸۴	۰/۹۰
$\tilde{C}_2$	۰/۳۵	۰/۶۱	۰/۳۵	۰/۵۵	۰/۷	۰/۸۵	۰/۸۶	۰/۶۵	۰/۷۶
$\tilde{C}_3$	۰/۲	۰/۱۸	۰/۲	۰/۴۵	۰/۶	۰/۷۵	۰/۷۸	۰/۵۴	۰/۶۶

بنابراین راس v_3 و یال $[v_3, v_1]$ را حذف کرده و وزن راس v_1 را به صورت زیر اصلاح می کنیم و به گام اول بر می گردیم.

$$\tilde{w}(v_1) = \langle 1/5, 2, 4 \rangle \oplus \langle 2, 4, 5 \rangle = \langle 3/5, 6, 9 \rangle$$

حال راس دلخواه v_4 را درخت $\tilde{X}$ در نظر بگیرید. آنگاه داریم

$$NR(\tilde{w}(v_4)) = (1/483, 1/45, 1/5, 0)$$

ملاحظه می شود که

$$NR(\tilde{w}(v_4)) \not\leq NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X})}{2}\right)$$

بنابراین راس v_4 و یال $[v_4, v_1]$ را حذف کرده و وزن راس v_1 را به صورت زیر اصلاح می کنیم و به گام اول بر می گردیم.

$$\tilde{w}(v_1) = \langle 3/5, 6, 9 \rangle \oplus \langle 0, 1/45, 3 \rangle = \langle 3/5, 7/45, 12 \rangle$$

حال راس v_1 را انتخاب می کنیم. آنگاه داریم

$$NR(\tilde{w}(v_1)) = (7/45, 7/45, 4/25, 0)$$

جدول ۹.۵: نتایج حاصل از مقایسه مثال ۶.۳.۵

نتایج مقایسه	روش ها
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	روش جدید
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	روش چنگ
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_2 < \tilde{B}_1 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	روش کری
	روش لی و لی
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	O
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	G
	روش لیو و وانگ
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	$\gamma = 1$
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	$\gamma = 0.5$
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	$\gamma = 0$
	روش جین
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	$k = 1$
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	$k = 2$
$\tilde{C}_3 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_1$ $\tilde{B}_1 < \tilde{B}_2 < \tilde{B}_3$ $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$	$k = 0.5$

ملاحظه می شود که

$$NR(\tilde{w}(v_1)) \not\subseteq NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X})}{2}\right)$$

بنابراین راس v_1 و یال $[v_2, v_1]$ را حذف کرده و وزن راس v_1 را به راس مجاور آن یعنی راس v_2 به صورت زیر می افزاییم و به گام اول بر می گردیم.

$$\tilde{w}(v_2) = \langle 3/5, 5, 7 \rangle \oplus \langle 3/5, 7/45, 12 \rangle = \langle 7, 12/45, 19 \rangle$$

جدول ۱۰.۵: وزن های فازی رئوس مثال ۷.۳.۵

رئوس	وزن های فازی
v_1	$\langle 1/5, 2, 4 \rangle$
v_2	$\langle 3/5, 5, 7 \rangle$
v_3	$\langle 2, 4, 5 \rangle$
v_4	$\langle 0, 1/45, 3 \rangle$
v_5	$\langle 1/75, 4, 5 \rangle$
v_6	$\langle 0, 1, 2 \rangle$
v_7	$\langle 1, 3, 4/5 \rangle$

حال راس v_2 را انتخاب می کنیم. آنگاه داریم

$$NR(\tilde{w}(v_2)) = (12/816, 12/45, 6, 0)$$

بدیهی است که

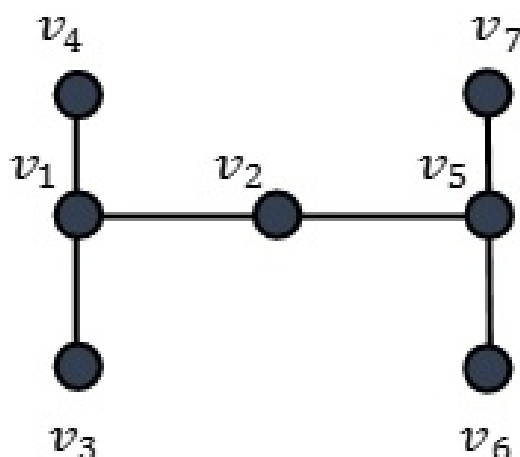
$$NR(\tilde{w}(v_2)) \geq NR\left(\frac{\tilde{W}(\tilde{X})}{2}\right)$$

بنابراین توقف می کنیم. راس v_2 میانه درخت $\tilde{X}$ می باشد.

مثال ۸.۳.۵. درخت فازی مثال ۷.۳.۵ را در نظر بگیرید. در این مثال می خواهیم مجموعه دو میانه این درخت فازی را بیابیم. جدول ۱۱.۵ نتایج حاصل از الگوریتم دو میانه فازی را نشان می دهد. بر اساس رتبه بندی جدید ما نتیجه می شود که

$$\tilde{F}(v_2, v_5) \prec \tilde{F}(v_2, v_3) \prec \tilde{F}(v_1, v_3) \prec \tilde{F}(v_2, v_4) \prec \tilde{F}(v_2, v_7) \prec \tilde{F}(v_2, v_6)$$

بنابراین رئوس v_2 و v_5 دو میانه درخت فازی X می باشند که با حذف یال (v_2, v_5) به دست آمده و مقدار بهینه برابر است با $\langle 9/5, 26/8, 42 \rangle$.



شکل ۷.۵: درخت فازی مثال ۷.۳.۵.

جدول ۱۱.۵: نتایج محاسباتی مثال ۸.۳.۵

$\tilde{F}(m_1, m_2)$	m_2	m_1	یال ها
$\langle 13, 29/35, 44 \rangle$	v_5	v_1	(v_1, v_2)
$\langle 15, 37, 53 \rangle$	v_4	v_2	(v_1, v_4)
$\langle 7/5, 28/8, 46 \rangle$	v_3	v_2	(v_1, v_3)
$\langle 9/5, 26/8, 42 \rangle$	v_5	v_2	(v_2, v_5)
$\langle 13/5, 37/8, 55 \rangle$	v_6	v_2	(v_5, v_6)
$\langle 14, 36/8, 54/5 \rangle$	v_7	v_2	(v_5, v_7)

۴.۵ نتیجه گیری

در این فصل به مساله یک میانه روی شبکه درخت با وزن های فازی پرداختیم و به کمک اثبات قضایای مهم الگوریتم اکثریت وزنی فازی را برای حل این مساله ارایه کردیم. همچنین این الگوریتم را برای مساله دو میانه توسعه دادیم. از آنجایی که در این الگوریتم ها نیازمند مقایسه اعداد فازی با یکدیگر هستیم، ابتدا یک اندیس رتبه بندی خطی و بسیار ساده ارایه کردیم. همچنین نشان دادیم که اندیس رتبه بندی ما نواقص و معایب روش های پیشین را ندارد و از نظر محاسباتی بسیار ساده تر از سایر روش های پیشین است.

فصل ۶

مساله مرکز قطعی و مرکز راسی روی درخت بدون وزن با یال های فازی

همان طور که قبلا بیان کردیم مساله p - مرکز عبارت است از یافتن p مکان برای تاسیس p مرکز سرویس دهی به طوری که دورترین فاصله کمینه شود. این مساله نیز از جمله مسایل کاربردی تحقیق در عملیات می باشد. از اینرو پرداختن به این مسایل در شرایط عدم قطعیت امری اجتناب ناپذیر می باشد. هدف از این فصل یافتن مرکز قطعی و مرکز راسی در درخت بدون وزن با یال های فازی است و بدین منظور الگوریتمی فازی ارائه خواهیم کرد. لازم به ذکر است که طول یال ها همگی اعداد فازی مثلثی نرمال در نظر گرفته شده اند.

۱.۶ تعریف مساله

درخت T با مجموعه رئوس $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال های E را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید به هر یال از مجموعه E عددی مثبت $l(.)$ نظیر شده باشد که بیانگر طول آن یال است. در این جا فرض بر این است که طول یال ها اعداد فازی مثلثی باشند. یعنی برای هر دو راس مجاور $v_i, v_j \in V$ طول یال $e_{ij} = (v_i, v_j)$ برابر است با $\tilde{l}(v_i, v_j) = \tilde{l}_{ij} = \langle l_{ij}^1, l_{ij}^2, l_{ij}^3 \rangle$. معرفی نمادهای زیر برای بیان الگوریتم ضروری می باشد.

- فرض کنید EP مجموعه همه برگ ها باشد. در این صورت مجموعه EP از همه رئوس با درجه یک تشکیل شده است.

- فاصله بین هر دو راس دلخواه $v_i, v_j \in V$ با نماد $\tilde{d}(v_i, v_j)$ نمایش داده می شود که برابر است با مجموع طول یال های کوتاه ترین مسیری که این دو راس را به یکدیگر متصل می کند.

- فرض کنید $p(v_i, v_j)$ مسیری باشد که دو راس $v_i, v_j \in V$ را به یکدیگر متصل می کند.

$$\tilde{L}(x) = \max_{v_i \in EP} \left(\tilde{d}(x, v_i) \right)$$

- $P(\tilde{L}(x))$ عبارت است از مسیری با بیشترین فاصله از راس x .

- VC و AC به ترتیب عبارتند از مرکز راسی و مرکز قطعی.

- $x(\tilde{t})$ عبارت است از نقطه $x \in \tilde{T}$ که $\tilde{d}(x, AC) = \tilde{t}$

با استفاده از این نمادها مساله مرکز قطعی و مرکز راسی به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند

$$\min_{x \in \tilde{T}} \left(\max_{v_j \in V} \left(\tilde{d}(x, v_j) \right) \right) \quad (۱.۶)$$

$$\min_{v_i \in V} \left(\max_{v_j \in V} \left(\tilde{d}(v_i, v_j) \right) \right) \quad (۲.۶)$$

از آنجایی که در درخت $\tilde{T}$ دورترین فاصله از نقطه دلخواه x به ازای نقاط مجموعه EP اتفاق می افتد، می توان هر یک از مسایل (۱.۶) و (۲.۶) را به ترتیب به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\min_{x \in \tilde{T}} \left(\max_{v_j \in EP} \left(\tilde{d}(x, v_j) \right) \right) = \min_{x \in \tilde{T}} \left(\tilde{L}(x) \right) \quad (۳.۶)$$

$$\min_{v_i \in V} \left(\max_{v_j \in EP} \left(\tilde{d}(v_i, v_j) \right) \right) = \min_{v_i \in V} \left(\tilde{L}(v_i) \right) \quad (۴.۶)$$

الگوریتم فازی بر اساس قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۱.۱.۶. فرض کنید $\tilde{T} = (V, \tilde{E})$ درختی با یال های فازی باشد. نتایج زیر برقرارند

۱. $\tilde{L}(AC) = \frac{\tilde{L}(v)}{۲}$ برای هر $v \in \tilde{T}$ به طوری که وجود داشته باشد $x \in \tilde{T}$ که $\tilde{L}(x) = \tilde{d}(x, v)$

۲. $\tilde{d}(AC, v) = \frac{\tilde{L}(v)}{۲}$ و AC روی مسیر $P(\tilde{L}(v))$ واقع است.

۳. VC نزدیک ترین راس تا نقطه AC روی مسیر $P(\tilde{L}(v))$ می باشد.

برای اثبات قضیه بالا لازم است که پنج لم زیر اثبات شوند.

لم ۲.۱.۶. $\tilde{L}(AC)$ عبارت است از فاصله AC تا نقاط روی درخت $\tilde{T}$ در حداقل دو جهت اولیه از AC .

برهان. فرض خلف کنید که چنین نباشد. یعنی فرض کنید که $\tilde{L}(AC)$ برابر باشد با فاصله بین AC و نقاط درخت $\tilde{T}$ در فقط یک جهت اولیه نسبت به AC . از اینرو راس $v_r \in EP$ وجود دارد که

$$\tilde{L}(AC) = \tilde{d}(v_r, AC)$$

بدون از دست دادن کلیت فرض کنید فقط یک راس با این ویژگی وجود داشته باشد. یعنی

$$\tilde{d}(v_i, AC) \prec \tilde{d}(v_r, AC), \quad \forall v_i \in EP - \{v_r\}$$

فرض کنید AC' نقطه جدیدی روی مسیر $P(\tilde{L}(AC))$ باشد که با حرکت از نقطه AC به اندازه بسیار کوچک $\tilde{\epsilon}$ در جهت v_r به دست آمده است که

$$NR(\tilde{\epsilon}) < NR\left(\tilde{L}(AC) - \max_{v_i \in V - \{AC\}}(\tilde{l}(v_i))\right)$$

که در آن NR اندیس رتبه بندی خطی است که در فصل قبل تعریف شده است. بنابراین داریم

$$\tilde{d}(v_i, AC') \prec \tilde{d}(v_r, AC'), \quad \forall v_i \in EP - \{v_r\}$$

یعنی $\tilde{L}(AC') = \tilde{d}(v_r, AC')$ از طرف دیگر

$$\tilde{d}(v_r, AC') \prec \tilde{d}(v_r, AC)$$

بنابراین داریم

$$\tilde{L}(AC') = \tilde{d}(v_r, AC') \prec \tilde{d}(v_r, AC) = \tilde{L}(AC)$$

که مغایر با این فرض می باشد که AC مرکز قطعی است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

□

لم ۳.۱.۶. به ازای هر $x, y \in \tilde{T}$ داریم

$$\tilde{L}(x) \preceq \tilde{L}(y) + \tilde{d}(y, x)$$

برهان. با استفاده از تعریف برای هر $y \in \tilde{T}$ داریم

$$\tilde{L}(y) = \max_{v_i \in EP} \left(\tilde{d}(v_i, y) \right)$$

بنابراین راس $v_r \in EP$ چنان وجود دارد که

$$NR(\tilde{d}(v_i, y)) \leq NR(\tilde{d}(v_r, y)) \quad \forall v_i \in EP$$

که در آن NR اندیس رتبه بندی خطی است که در فصل قبل تعریف شده است. از اینرو

$$\tilde{L}(y) = \tilde{d}(v_r, y)$$

یعنی

$$\tilde{d}(v_i, y) \preceq \tilde{d}(v_r, y) \quad \forall v_i \in EP \quad (۵.۶)$$

از آنجایی که گراف $\tilde{T}$ درخت است و با استفاده از خاصیت جمع اعداد فازی داریم

$$\tilde{d}(v_i, x) \preceq \tilde{d}(v_i, y) + \tilde{d}(y, x) \quad (۶.۶)$$

با استفاده از روابط (۵.۶) و (۶.۶) نتیجه می شود که

$$\tilde{d}(v_i, x) \preceq \tilde{d}(v_r, y) + \tilde{d}(y, x) \quad \forall v_i \in EP$$

یعنی

$$\tilde{d}(v_i, x) \preceq \tilde{L}(y) + \tilde{d}(y, x) \quad \forall v_i \in EP$$

با استفاده از تعریف داریم

$$\tilde{L}(x) = \max_{v_i \in EP} \left(\tilde{d}(v_i, x) \right)$$

بنابراین نتیجه می شود که

$$\tilde{L}(x) \preceq \tilde{L}(y) + \tilde{d}(y, x) \quad \forall x, y \in \tilde{T}$$

□

لم ۴.۱.۶. $\tilde{L}(x(\tilde{t})) = \tilde{L}(AC) + \tilde{t}$ یا $\tilde{L}(x(\tilde{t})) = \tilde{L}(AC) + \tilde{d}(x(\tilde{t}), AC)$

برهان. با استفاده از لم ۲.۱.۶، $\tilde{L}(AC)$ عبارت است از بیشترین فاصله از AC تا نقاط روی درخت $\tilde{T}$ در حداقل دو جهت اولیه نسبت به AC . بدون از دست دادن کلیت فرض کنید v_1 و v_2 نقاط انتهایی این دو جهت اولیه باشند. یعنی

$$\tilde{L}(AC) = \tilde{d}(v_1, AC) = \tilde{d}(v_2, AC)$$

از اینرو داریم

$$\tilde{d}(v_1, AC) = \tilde{d}(v_2, AC) \succeq \tilde{d}(v_i, AC), \quad \forall v_i \in EP - \{v_1, v_2\}$$

همچنین بر اساس تعریف $\tilde{L}(x(\tilde{t}))$ داریم

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x(\tilde{t})) &= \max_{v_i \in EP} \left(\tilde{d}(v_i, x(\tilde{t})) \right) \\ &= \max \left[\max_{v_i \in EP - \{v_1, v_2\}} \left(\tilde{d}(v_i, x(\tilde{t})) \right), \tilde{d}(v_1, x(\tilde{t})), \tilde{d}(v_2, x(\tilde{t})) \right] \end{aligned}$$

همچنین

$$\max \left[\tilde{d}(v_1, x(\tilde{t})), \tilde{d}(v_2, x(\tilde{t})) \right] = \tilde{L}(AC) + \tilde{t}$$

بنابراین نتیجه می شود که

$$\tilde{L}(x(\tilde{t})) = \max \left[\max_{v_i \in \tilde{T} - \{v_1, v_2\}} \left(\tilde{d}(v_i, x(\tilde{t})) \right), \tilde{L}(AC) + \tilde{t} \right]$$

لذا

$$\tilde{L}(x(\tilde{t})) \succeq \tilde{L}(AC) + \tilde{t}$$

یعنی

$$NR(\tilde{L}(x(\tilde{t}))) \geq NR(\tilde{L}(AC) + \tilde{t})$$

از طرف دیگر از لم ۳.۱.۶ داریم

$$\tilde{L}(x(\tilde{t})) \preceq \tilde{L}(AC) + \tilde{t}$$

و این بدین معناست که

$$NR(\tilde{L}(x(\tilde{t}))) \leq NR(\tilde{L}(AC) + \tilde{t})$$

از اینرو داریم

$$NR(\tilde{L}(x(\tilde{t}))) = NR(\tilde{L}(AC) + \tilde{t})$$

به وضوح نتیجه می شود که

$$\tilde{L}(x(\tilde{t})) = \tilde{L}(AC) + \tilde{t}$$

□

لم ۵.۱.۶. AC یکتا است.

برهان. فرض کنید AC_1 و AC_2 دو مرکز قطعی درخت $\tilde{T}$ باشند. با استفاده از لم ۴.۱.۶ داریم

$$\tilde{L}(AC_1) = \tilde{L}(AC_2) + \tilde{d}(AC_1, AC_2)$$

بنابراین

$$NR(\tilde{L}(AC_1)) = NR(\tilde{L}(AC_2) + \tilde{d}(AC_1, AC_2)) = NR(\tilde{L}(AC_2)) + NR(\tilde{d}(AC_1, AC_2))$$

از آنجایی که AC_1 و AC_2 مرکز قطعی هستند نتیجه می شود که

$$NR(\tilde{L}(AC_1)) = NR(\tilde{L}(AC_2))$$

از اینرو داریم

$$NR(\tilde{d}(AC_1, AC_2)) = (\circ, \circ, \circ, \circ)$$

یعنی:

$$AC_1 = AC_2$$

□

لم ۶.۱.۶. به ازای هر $x \in \tilde{T}$ ، AC روی هر مسیر ماکسیمال $P(\tilde{L}(x))$ قرار دارد.

برهان. فرض خلف کنید چنین نباشد. یعنی وجود داشته باشد $x \in \tilde{T}$ به طوری که AC روی مسیر ماکزیمال $P(\tilde{L}(x))$ موجود نباشد. همچنین فرض کنید $\tilde{L}(x)$ به ازای راس v_r اتفاق بیافتد. یعنی

$$\tilde{L}(x) = \tilde{d}(v_r, x)$$

حال درخت $\tilde{T}$ را چنان مرتب کنید که راس AC ریشه آن باشد و $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ مجموعه همه رئوس مجاور با راس AC باشد. همچنین فرض کنید به ازای $j = 1, \dots, m$ j زیر درخت های $\tilde{T}_{v_j}$ از حذف

یال (AC, v_j) به دست آمده باشند. بنا به لم ۲.۱.۶ و بدون از دست دادن کلیت فرض کنید رئوس v_t و v_s به ترتیب در زیر درخت های $\tilde{T}_{v_t}$ و $\tilde{T}_{v_s}$ چنان وجود دارند که

$$\tilde{L}(AC) = \tilde{d}(v_s, AC) = \tilde{d}(v_t, AC)$$

به وضوح v_r به زیر درخت $\tilde{T}_{v_t}$ تعلق ندارد. زیرا اگر $v_r \in \tilde{T}_{v_t}$ داریم

$$\begin{aligned} NR(\tilde{d}(v_t, x)) &= NR(\tilde{d}(v_t, AC) + \tilde{d}(AC, x)) = NR(\tilde{d}(v_t, AC)) + NR(\tilde{d}(AC, x)) \\ &> NR(\tilde{d}(v_r, AC)) + NR(\tilde{d}(AC, x)) = NR(\tilde{d}(v_r, AC) + \tilde{d}(AC, x)) \\ &\geq NR(\tilde{d}(v_r, x)) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\tilde{d}(v_t, x) \succ \tilde{d}(v_r, x)$$

که مغایر است با ماکزیمال بودن مسیر $p(v_r, x)$

به طریق مشابه می توان نشان داد که به ازای $j = 2, \dots, m$ مسیر ماکزیمال $P(v_r, x)$ در هیچ یک از زیر درخت های $\tilde{T}_{v_j}$ قرار ندارد. بنابراین فرض خلف باطل است و مسیر ماکزیمالی که مرکز AC را شامل نشود وجود ندارد.

□

بر اساس لم ۶.۱.۶، به ازای هر $x \in \tilde{T}$ روی مسیر $P(\tilde{L}(x))$ قرار دارد. فرض کنید v_1 دورترین نقطه از x روی مسیر $P(\tilde{L}(x))$ باشد. از لم ۴.۱.۶ نتیجه می شود $\tilde{L}(x(\tilde{t}))$ روی مسیر $P(\tilde{L}(x(\tilde{t})))$ کاهش می یابد و در نقطه $\tilde{t} = 0$ به مقدار $\tilde{L}(AC)$ خواهد رسید و سپس افزایش خواهد یافت تا اینکه در نقطه v_1 به مقدار $\tilde{L}(v_1)$ دست می یابد. حال با دو بار اعمال لم ۴.۱.۶ داریم

$$\begin{aligned} \tilde{L}(v_1) &= \tilde{L}(AC) + \tilde{d}(AC, v_1) \\ NR(\tilde{L}(v_1)) &= NR(\tilde{L}(AC) + \tilde{d}(AC, v_1)) = NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{d}(AC, v_1)) \\ &= NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{d}(AC, v_1)) + NR(\tilde{d}(x, AC)) - NR(\tilde{d}(x, AC)) \\ &= NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{d}(x, AC) + \tilde{d}(AC, v_1)) - NR(\tilde{d}(x, AC)) \\ &= NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{d}(x, v_1)) - NR(\tilde{d}(x, AC)) \\ &= NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{L}(x)) - NR(\tilde{d}(x, AC)) \\ &= NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{L}(AC) + \tilde{d}(x, AC)) - NR(\tilde{d}(x, AC)) \\ &= NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{L}(AC)) + NR(\tilde{d}(x, AC)) - NR(\tilde{d}(x, AC)) \\ &= 2NR(\tilde{L}(AC)) \end{aligned}$$

از اینرو

$$NR(\tilde{L}(AC)) = NR\left(\frac{\tilde{L}(v_1)}{2}\right)$$

بنابراین نتیجه می شود که

$$\tilde{L}(AC) = \frac{\tilde{L}(v_1)}{2} \quad \text{i.}$$

$$\tilde{d}(AC, v_1) = \frac{\tilde{L}(v_1)}{2} \quad \text{ii.}$$

روی مسیر $P(\tilde{L}(v_1))$ واقع شده است.

پس داریم VC نزدیک ترین راس به AC می باشد. بدین ترتیب قضیه ۱.۱.۶ ثابت شده است. لذا الگوریتم فازی زیر بدست می آید.

الگوریتم فازی ۱ - مرکز

گام اول. برای هر $x \in \tilde{T}$ راس $v_1 \in EP$ را چنان بیابید که

$$\tilde{d}(x, v_1) = \tilde{L}(x)$$

گام دوم. راس v_2 را چنان بیابید که

$$\tilde{d}(v_1, v_2) = \tilde{L}(v_1)$$

گام سوم. AC روی مسیر $P(\tilde{L}(v_1))$ و در فاصله $\frac{\tilde{L}(v_1)}{2}$ از راس v_1 قرار دارد.

$$\tilde{L}(AC) = \frac{\tilde{L}(v_1)}{2}$$

گام چهارم. به ازای $k = 1, 2, 3$ فرض کنید T^k درختی هایی قطعی باشد که با جایگزین کردن l_{ij}^k به جای $\tilde{l}_{ij}$ در درخت فازی $\tilde{T}$ حاصل شده اند. نقطه میانه مسیر $P(L(v_1))$ را به ازای $k = 1, 2, 3$ بیابید و آنها را به ترتیب AC^1, AC^2, AC^3 بنامید. آنگاه $AC = \langle AC^1, AC^2, AC^3 \rangle$ مرکز قطعی درخت فازی $\tilde{T}$ می باشد.

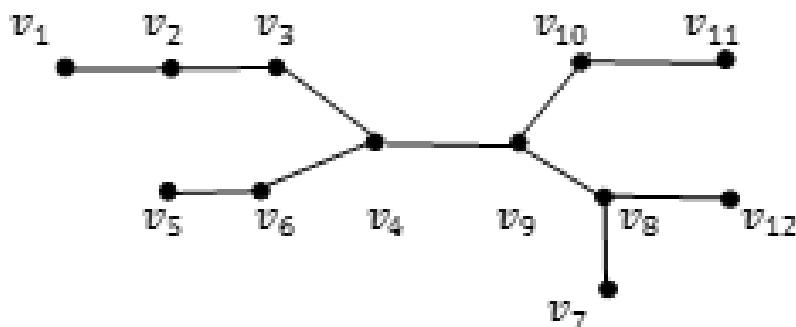
بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که AC روی یال $e = (v_s, v_t)$ قرار داشته باشد. فاصله بین AC^1 و v_s را در درخت قطعی T^1 و فاصله بین AC^3 و v_t را در درخت قطعی T^3 بیابید و به ترتیب آنها را $d^1(AC^1, v_s)$ و $d^3(AC^3, v_t)$ نام گذاری کنید. از آنجایی که VC نزدیک ترین راس به AC می باشد داریم

$$VC = \begin{cases} v_s, & \text{اگر } \min(d^1(AC^1, v_s), d^3(AC^3, v_t)) = d^1(AC^1, v_s) \\ v_t, & \text{اگر } \min(d^1(AC^1, v_s), d^3(AC^3, v_t)) = d^3(AC^3, v_t) \end{cases}$$

۲.۶ مثال های عددی

حال به کمک مثال های عددی کاربرد الگوریتم ارایه شده را نشان خواهیم داد.

مثال ۱.۲.۶. درخت فازی $\tilde{T}$ نشان داده شده در شکل ۱.۶ را در نظر بگیرید و فرض کنید طول تمام یال های آن برابر مقدار فازی $\langle 0/5, 1, 2 \rangle$ باشد. مرکز قطعی و مرکز راسی به صورت زیر به دست می آیند. ابتدا راسی دلخواه را از درخت $\tilde{T}$ انتخاب کنید. به عنوان مثال فرض کنید راس v_8 انتخاب شود.



شکل ۱.۶: درخت فازی $\tilde{T}$ مثال ۱.۲.۶.

آنگاه دورترین راس از راس v_8 به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} & \max \left(\tilde{d}(v_1, v_8), \tilde{d}(v_5, v_8), \tilde{d}(v_7, v_8), \tilde{d}(v_{11}, v_8), \tilde{d}(v_{12}, v_8) \right) \\ &= \max \left(\langle 2/5, 5, 10 \rangle, \langle 2, 4, 8 \rangle, \langle 0/5, 1, 2 \rangle, \langle 1/5, 3, 6 \rangle \right) = \langle 2/5, 5, 10 \rangle = \tilde{d}(v_1, v_8) \end{aligned}$$

با استفاده از اندیس رتبه بندی NR داریم

$$NR(\langle 2/5, 5, 10 \rangle) > NR(\langle 2, 4, 8 \rangle) > NR(\langle 1/5, 3, 6 \rangle) > NR(\langle 0/5, 1, 2 \rangle)$$

به طور مشابه دورترین راس از v_1 عبارت است از راس v_7 . بنابراین

$$\tilde{L}(AC) \approx \frac{\tilde{d}(v_1, v_7)}{2} = \langle 1/5, 3, 6 \rangle$$

حال فرض کنید T^1, T^2 و T^3 سه درخت قطعی باشند که طول یال های آن ها به ترتیب برابر $0/5, 1$ و 2 می باشد. به وضوح نتیجه می شود که

$$AC^1 = AC^2 = AC^3 = v_4$$

یعنی $AC = v_4$

از آنجایی که در این مثال طول همه یال ها با هم برابرند، نتیجه می شود که $AC^1 = AC^2 = AC^3$. بدیهی است که $VC = AC = v_4$

مثال ۲.۲.۶. درخت فازی مثال ۱.۲.۶ را در نظر بگیرید که در آن طول یال های فازی در جدول ۱.۶ آورده شده است. مرکز قطعی و مرکز راسی به صورت زیر به دست می آیند

جدول ۱.۶: طول یال ها در درخت $\tilde{T}$ مثال ۲.۲.۶

یال ها	طول یال ها در درخت فازی $\tilde{T}$
$\tilde{e}_1 = (v_1, v_2)$	$\tilde{l}_1 = \langle 0/5, 1, 2 \rangle$
$\tilde{e}_2 = (v_2, v_3)$	$\tilde{l}_2 = \langle 1, 3, 4/5 \rangle$
$\tilde{e}_3 = (v_3, v_4)$	$\tilde{l}_3 = \langle 1, 3, 4/5 \rangle$
$\tilde{e}_4 = (v_4, v_6)$	$\tilde{l}_4 = \langle 0/5, 2, 3/25 \rangle$
$\tilde{e}_5 = (v_6, v_5)$	$\tilde{l}_5 = \langle 3, 4/5, 5 \rangle$
$\tilde{e}_6 = (v_4, v_9)$	$\tilde{l}_6 = \langle 3, 4, 5 \rangle$
$\tilde{e}_7 = (v_9, v_8)$	$\tilde{l}_7 = \langle 1, 2, 3 \rangle$
$\tilde{e}_8 = (v_9, v_{10})$	$\tilde{l}_8 = \langle 3, 4, 5 \rangle$
$\tilde{e}_9 = (v_{10}, v_{11})$	$\tilde{l}_9 = \langle 2, 3, 3/5 \rangle$
$\tilde{e}_{10} = (v_8, v_{12})$	$\tilde{l}_{10} = \langle 3, 4, 5 \rangle$
$\tilde{e}_{11} = (v_8, v_7)$	$\tilde{l}_{11} = \langle 3/5, 4/75, 5/5 \rangle$

راس دلخواه v_4 را در نظر بگیرید. آنگاه با استفاده از اندیس رتبه بندی خطی NR داریم

$$\begin{aligned}
 & \max \left(\tilde{d}(v_1, v_4), \tilde{d}(v_5, v_4), \tilde{d}(v_7, v_4), \tilde{d}(v_{11}, v_4), \tilde{d}(v_{12}, v_4) \right) \\
 &= \max \left(\langle 2/5, 7, 11 \rangle, \langle 3/5, 6/5, 8/25 \rangle, \langle 7/5, 10/75, 13/5 \rangle, \langle 8, 11, 13/5 \rangle \right) \\
 &= \langle 7, 10, 13 \rangle = \tilde{d}(v_{11}, v_4)
 \end{aligned}$$

این بدین معناست که v_{11} دورترین راس از v_4 است. به طور مشابه دورترین نقطه از v_{11} راس v_1 می باشد. بنابراین

$$\tilde{L}(AC) = \frac{\tilde{d}(v_1, v_{11})}{2} = \langle 5/25, 9, 12/25 \rangle$$

حال فرض کنید T^1, T^2 و T^3 سه درخت قطعی باشند که طول یال های آن ها در جدول ۲.۶ آورده شده است.

جدول ۲.۶: طول یال ها در درخت های T_k مثال ۲.۲.۶

یال ها	طول یال ها در درخت T^1	طول یال ها در درخت T^2	طول یال ها در درخت T^3
$\tilde{e}_1 = (v_1, v_2)$	۰/۵	۱	۲
$\tilde{e}_2 = (v_2, v_3)$	۱	۳	۴/۵
$\tilde{e}_3 = (v_3, v_4)$	۱	۳	۴/۵
$\tilde{e}_4 = (v_4, v_5)$	۰/۵	۲	۳/۲۵
$\tilde{e}_5 = (v_5, v_6)$	۳	۴/۵	۵
$\tilde{e}_6 = (v_4, v_9)$	۳	۴	۵
$\tilde{e}_7 = (v_9, v_8)$	۱	۲	۳
$\tilde{e}_8 = (v_9, v_{10})$	۳	۴	۵
$\tilde{e}_9 = (v_{10}, v_{11})$	۲	۳	۳/۵
$\tilde{e}_{10} = (v_8, v_{12})$	۳	۴	۵
$\tilde{e}_{11} = (v_8, v_7)$	۳/۵	۴/۷۵	۵/۵

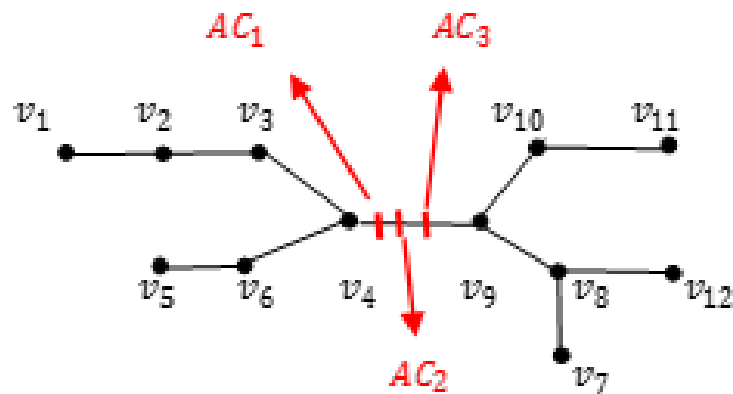
نقطه میانی مسیر $P(v_1, v_{11})$ در این سه زیر درخت به ترتیب AC^1, AC^2 و AC^3 در شکل ۲.۶ نشان داده شده اند. همچنین

$$\min(d^1(AC_1, v_4), d^2(AC_3, v_9)) = d(AC_1, v_4) = 2/75$$

از اینرو $VC = v_4$.

۳.۶ نتیجه گیری

در این فصل به مساله مرکز روی شبکه درخت با یال های فازی پرداختیم و الگوریتمی ارایه کردیم که مرکز قطعی و مرکز راسی را به دست می آورد. مزیت این روش در این است که بر اساس این الگوریتم مرکز قطعی



شکل ۲.۶: مرکز قطعی درخت فازی $\tilde{T}$ مثال ۲.۲.۶.

به صورت فازی به دست می آید که این امکان را فراهم می آورد که تصمیم گیرنده بتواند بنا به امکانات و شرایط موجود بهترین تصمیم را بگیرد.

فصل ۷

مسائل مکانیابی پیوسته فازی

همان طور که پیش تر بیان شد مساله مکانیابی پیوسته عبارت است از یافتن بهترین مکان برای تاسیس مراکز و تسهیلات سرویس دهی روی صفحه جهت برآورده کردن تقاضای مشتریان به طوری که هزینه کل کمینه شود. در این فصل مسائل مکانیابی پیوسته را در نظر گرفته و دو حالت خاص مساله تک وسیله ای با نرم توان دوم اقلیدسی و مساله چند وسیله ای با نرم L_1 را در شرایط عدم قطعیت مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱.۷ مساله تک وسیله ای با نرم توان دوم اقلیدسی و وزن های فازی

در این بخش به مساله تک وسیله ای با نرم توان دوم اقلیدسی و وزن های فازی می پردازیم و با استفاده از حساب فازی به حل آن خواهیم پرداخت. شکل کلی مساله تک وسیله ای با نرم توان دوم اقلیدسی به صورت زیر است [۸۲]

$$\min f(X) = \sum_{j=1}^n w_j ((x_1 - a_{j1})^2 + (x_2 - a_{j2})^2) \quad (1.7)$$

که در آن n نقطه به مختصات $A_j = (a_{j1}, a_{j2})$ در صفحه موجود هستند که نشان دهنده مختصات مراکز تقاضا هستند. w_j , $j = 1, \dots, n$ میزان تقاضای مشتریان می باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که تقاضاهای مشتریان همه اعداد فازی مثلثی $w_j = \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle$, $j = 1, \dots, n$ باشند. بنابراین مساله (۱.۷) تبدیل به مساله فازی زیر می شود

$$\min \tilde{f}(X) = \sum_{j=1}^n \langle w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \rangle ((x_1 - a_{j1})^2 + (x_2 - a_{j2})^2) \quad (2.7)$$

در ادامه اثبات می کنیم که تابع فازی $\tilde{f}(X)$ تابعی محدب است. سپس به کمک این خاصیت روشی برای یافتن جواب مساله فازی (۲.۷) ارائه می کنیم.

قضیه ۱.۱.۷. تابع $\tilde{f}(X)$ ، تعریف شده در مدل (۲.۷) تابعی محدب است.

برهان. از آنجایی که مجموع توابع محدب تابعی محدب است، برای اثبات محدب بودن تابع فازی $\tilde{f}(X)$ ، فقط کافی است ثابت کنیم که هر یک از توابع فازی $\tilde{f}_j$ ، $j = 1, \dots, n$ ، توابعی محدب هستند.

$$\tilde{f}_j(x) = \tilde{w}_j((x_1 - a_{j1})^2 + (x_2 - a_{j2})^2)$$

به وضوح توابع $d_j(x) = ((x_1 - a_{j1})^2 + (x_2 - a_{j2})^2)$ به ازای $j = 1, \dots, n$ توابعی محدب هستند [۲]. بنابراین داریم

$$d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda d_j(x) + (1 - \lambda)d_j(y)$$

از طرفی $j = 1, \dots, n$ ، $d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq 0$ ، بنابراین به ازای $j = 1, \dots, n$ داریم

$$\tilde{w}_j d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \langle w_{j1} d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y), w_{j2} d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y), w_{j3} d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \rangle$$

حال با استفاده از رتبه بندی خطی یاگر داریم

$$\begin{aligned} & \Re(\tilde{w}_j d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \\ &= \frac{w_{j1} d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) + 2w_{j2} d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) + w_{j3} d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y)}{4} \\ &= d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \left(\frac{w_{j1} + 2w_{j2} + w_{j3}}{4} \right) \\ &= d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \Re(\tilde{w}_j) \\ &\leq (\lambda d_j(x) + (1 - \lambda)d_j(y)) \Re(\tilde{w}_j) \\ &= \lambda \Re(\tilde{w}_j) d_j(x) + (1 - \lambda) \Re(\tilde{w}_j) d_j(y) \\ &= \Re(\lambda \tilde{w}_j d_j(x) + (1 - \lambda) \tilde{w}_j d_j(y)) \end{aligned}$$

از اینرو

$$\tilde{w}_j d_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \tilde{w}_j d_j(x) + (1 - \lambda) \tilde{w}_j d_j(y)$$

در نتیجه

$$\tilde{f}_j(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \tilde{f}_j(x) + (1 - \lambda) \tilde{f}_j(y)$$

و این یعنی توابع فازی $\tilde{f}_j$ به ازای هر $j = 1, \dots, n$ توابعی محدب هستند.

□

با توجه به قضیه ۱.۱.۷ چون $\tilde{f}(x)$ تابعی محدب است نتیجه می شود که کمینه موضعی یک کمینه سراسری است. حال نشان می دهیم که تابع $\tilde{f}(x)$ تابعی مشتق پذیر است. بدین منظور فرض کنید تابع $\tilde{g}_j = \tilde{w}_j x^\natural$ مفروض باشد. بنابراین داریم

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{g}_j(x) - \tilde{g}_j(x_0)}{x - x_0}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \Re\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{g}_j(x) - \tilde{g}_j(x_0)}{x - x_0}\right) &= \Re\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{w}_j x^\natural - \tilde{w}_j x_0^\natural}{x - x_0}\right) \\ &= \Re\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\langle w_{j\setminus} x^\natural - w_{j\Re} x_0^\natural, w_{j\Im} x^\natural - w_{j\Im} x_0^\natural, w_{j\Re} x^\natural - w_{j\setminus} x_0^\natural \rangle}{x - x_0}\right) \\ &= \Re\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \left\langle \frac{w_{j\setminus} x^\natural - w_{j\Re} x_0^\natural}{x - x_0}, \frac{w_{j\Im} x^\natural - w_{j\Im} x_0^\natural}{x - x_0}, \frac{w_{j\Re} x^\natural - w_{j\setminus} x_0^\natural}{x - x_0} \right\rangle\right) \\ &= \Re\left(\left\langle \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\setminus} x^\natural - w_{j\Re} x_0^\natural}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\Im} x^\natural - w_{j\Im} x_0^\natural}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\Re} x^\natural - w_{j\setminus} x_0^\natural}{x - x_0} \right\rangle\right) \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\setminus} x^\natural - w_{j\Re} x_0^\natural}{x - x_0} + \Im \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\Im} x^\natural - w_{j\Im} x_0^\natural}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\Re} x^\natural - w_{j\setminus} x_0^\natural}{x - x_0}}{\Im} \\ &= \frac{1}{\Im} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_{j\setminus} x^\natural - w_{j\Re} x_0^\natural + \Im w_{j\Im} x^\natural - \Im w_{j\Im} x_0^\natural + w_{j\Re} x^\natural - w_{j\setminus} x_0^\natural}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{w_{j\setminus} + \Im w_{j\Im} + w_{j\Re}}{\Im} x^\natural - \frac{w_{j\setminus} + \Im w_{j\Im} + w_{j\Re}}{\Im} x_0^\natural}{x - x_0} \\ &= \frac{w_{j\setminus} + \Im w_{j\Im} + w_{j\Re}}{\Im} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^\natural - x_0^\natural}{x - x_0} \\ &= \Re(\tilde{w}_j) \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = \Im \Re(\tilde{w}_j) x_0. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{w}_j x^\natural - \tilde{w}_j x_0^\natural}{x - x_0} = \Im x_0 \tilde{w}_j$$

یعنی

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} = \Im x_0 \tilde{w}_j$$

از اینرو داریم

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{r} \tilde{w}_j (x_1 - a_{j1})$$

9

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{r} \tilde{w}_j (x_2 - a_{j2})$$

حال با حل دستگاه معادلات (۳.۷)

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

مختصات مکان بهینه به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$x_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j a_{j1}}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j}$$

$$x_2 = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j a_{j2}}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j}$$

بنابراین مختصات مکان بهینه عبارت است از

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j a_{j1}}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j}, \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j a_{j2}}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j} \right)$$

حال با استفاده از تابع رتبه بندی یاگر نتیجه می شود

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Re(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j a_{j1})}{\Re(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n w_{j1} a_{j1} + \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n w_{j2} a_{j1} + \sum_{j=1}^n w_{j3} a_{j1}}{\sum_{j=1}^n w_{j1} + \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n w_{j2} + \sum_{j=1}^n w_{j3}} \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\Re(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j a_{j2})}{\Re(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n w_{j1} a_{j2} + \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n w_{j2} a_{j2} + \sum_{j=1}^n w_{j3} a_{j2}}{\sum_{j=1}^n w_{j1} + \mathfrak{r} \sum_{j=1}^n w_{j2} + \sum_{j=1}^n w_{j3}} \end{aligned}$$

مثال ۲.۱.۷. فرض کنید $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (3, 4)$, $A_3 = (2, 3)$, $A_4 = (5, 3)$ و $A_5 = (10, 2)$ پنج نقطه موجود در صفحه باشند که وزن های آن ها به ترتیب عبارتند از $\tilde{w}_1 = \langle 1/5, 3, 4 \rangle$, $\tilde{w}_2 = \langle 6, 7, 10 \rangle$, $\tilde{w}_3 = \langle 3, 5, 6/5 \rangle$, $\tilde{w}_4 = \langle 1/5, 3, 4 \rangle$ و $\tilde{w}_5 = \langle 2/5, 4, 5/25 \rangle$ بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n w_{j1} a_{j1} &= 1/51 + 63 + 32 + 1/55 + 2/510 = 58 \\ \sum_{j=1}^n w_{j2} a_{j1} &= 31 + 73 + 52 + 35 + 410 = 89 \\ \sum_{j=1}^n w_{j3} a_{j1} &= 41 + 103 + 6/52 + 45 + 5/2510 = 119/5 \\ \sum_{j=1}^n w_{j1} &= 14/5 \\ \sum_{j=1}^n w_{j2} &= 22 \\ \sum_{j=1}^n w_{j3} &= 29/5\end{aligned}$$

در نتیجه

$$x_1 = \frac{58 + 2 \times 89 + 119/5}{14/5 + 2 \times 22 + 29/5} = 4/0.39$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n w_{j1} a_{j2} &= 1/51 + 64 + 33 + 1/53 + 2/52 = 44 \\ \sum_{j=1}^n w_{j2} a_{j2} &= 31 + 74 + 53 + 33 + 42 = 63 \\ \sum_{j=1}^n w_{j3} a_{j2} &= 41 + 104 + 6/53 + 43 + 5/252 = 86\end{aligned}$$

در نتیجه

$$x_2 = \frac{44 + 2 \times 63 + 86}{14/5 + 2 \times 22 + 29/5} = 2/9.9$$

۲.۷ مساله مکانیابی چند وسیله ای فازی پیوسته با نرم L_1

در این قسمت به مساله مکانیابی چند وسیله ای پیوسته با نرم L_1 خواهیم پرداخت. شکل کلی این مساله به صورت زیر است [۸۲]

$$\begin{aligned} \min W(X) = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} [|x_{i1} - a_{j1}| + |x_{i2} - a_{j2}|] \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m w_{ir} [|x_{i1} - x_{r1}| + |x_{i2} - x_{r2}|] \end{aligned} \quad (۴.۷)$$

که در آن $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ ، $X_i = (a_{i1}, a_{i2})$ ، $i = 1, \dots, m$ مختصات مکان سرویس دهنده ها و $A_j = (a_{j1}, a_{j2})$ ، $j = 1, \dots, n$ مختصات مراکز تقاضا می باشند. w_{ij} ، $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ هزینه انتقال کالا از سرویس دهنده i - ام به مرکز تقاضای j - ام و w_{ir} ، $i = 1, \dots, m-1$ ، $r = i+1, \dots, m$ هزینه انتقال کالا از سرویس دهنده i - ام به سرویس دهنده r - ام می باشند. حال فرض کنید که در مساله (۴.۷) هزینه های انتقال، اعداد فازی مثلثی باشند. یعنی

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{ij} &= \langle w_{ij}^l, w_{ij}^m, w_{ij}^r \rangle, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\ \tilde{w}_{ir} &= \langle w_{ir}^l, w_{ir}^m, w_{ir}^r \rangle, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad r = i+1, \dots, m \end{aligned}$$

باشند. در این صورت مساله تبدیل به مساله مکانیابی چند وسیله ای فازی به صورت زیر می شود

$$\begin{aligned} \min \tilde{W}(X) = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle w_{ij}^l, w_{ij}^m, w_{ij}^r \rangle [|x_{i1} - a_{j1}| + |x_{i2} - a_{j2}|] \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \langle w_{ir}^l, w_{ir}^m, w_{ir}^r \rangle [|x_{i1} - x_{r1}| + |x_{i2} - x_{r2}|] \end{aligned} \quad (۵.۷)$$

در ادامه با استفاده از خاصیت تفکیک پذیری و تحذب تابع $\tilde{W}(X)$ روشی برای یافتن جواب مساله فازی (۵.۷) ارائه می کنیم.

قضیه ۱.۲.۷. تابع $\tilde{W}(X)$ تعریف شده در مدل (۵.۷) تابعی تفکیک پذیر است.

برهان. تابع $\tilde{W}(X)$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}\tilde{W}(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} [|x_{i1} - a_{j1}| + |x_{i2} - a_{j2}|] \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} [|x_{i1} - x_{r1}| + |x_{i2} - x_{r2}|] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} |x_{i1} - a_{j1}| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} |x_{i2} - a_{j2}| \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} |x_{i1} - x_{r1}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} |x_{i2} - x_{r2}| \\ &= \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} |x_{i1} - a_{j1}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} |x_{i1} - x_{r1}| \right] \\ &+ \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} |x_{i2} - a_{j2}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} |x_{i2} - x_{r2}| \right] \\ &= \tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) + \tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$ و $\tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})$ به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} |x_{i1} - a_{j1}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} |x_{i1} - x_{r1}| \\ \tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij} |x_{i2} - a_{j2}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{ir} |x_{i2} - x_{r2}|\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می شود که تابع $\tilde{W}(X)$ تابعی تفکیک پذیر است.

□

قضیه ۲.۲.۷. تابع $\tilde{W}(X)$ ، تعریف شده در مدل (۵.۷) تابعی محدب است.

برهان. می دانیم که مجموع توابع محدب تابعی محدب است. از اینرو برای اینکه نشان دهیم تابع $\tilde{W}(X)$ محدب است، کافی است که ثابت کنیم هر یک از توابع $\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$ و $\tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})$ محدب می باشند. ابتدا تابع $\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\tilde{f}_{1ij} = \tilde{w}_{ij} |x_{i1} - a_{j1}|$$

۹

$$\tilde{f}_{ir} = \tilde{w}_{ir} |x_{i1} - x_{r1}|$$

از اینرو داریم

$$\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{f}_{ir}$$

حال برای اثبات محدب بودن تابع $\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$ فقط کافی است ثابت کنیم که هر یک از توابع $\tilde{f}_{ir}$ و $\tilde{f}_{ij}$ تابعی محدب هستند. تابع $\tilde{f}_{ij}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\Re(\tilde{f}_{ij}(\lambda x_{i1} + (1 - \lambda)x'_{i1})) = \Re(\tilde{w}_{ij}|\lambda x_{i1} + (1 - \lambda)x'_{i1} - a_{j1}|)$$

$$= \Re(\tilde{w}_{ij})|\lambda(x_{i1} - a_{j1}) + (1 - \lambda)(x'_{i1} - a_{j1})|$$

$$\leq \Re(\tilde{w}_{ij})[|\lambda(x_{i1} - a_{j1})| + |(1 - \lambda)(x'_{i1} - a_{j1})|]$$

$$= \lambda[\Re(\tilde{w}_{ij})|x_{i1} - a_{j1}|] + (1 - \lambda)[\Re(\tilde{w}_{ij})|x'_{i1} - a_{j1}|]$$

$$= \lambda\Re(\tilde{w}_{ij}|x_{i1} - a_{j1}|) + (1 - \lambda)\Re(\tilde{w}_{ij}|x'_{i1} - a_{j1}|)$$

$$= \Re(\lambda(\tilde{w}_{ij}|x_{i1} - a_{j1}|) + (1 - \lambda)(\tilde{w}_{ij}|x'_{i1} - a_{j1}|))$$

$$= \Re(\lambda\tilde{f}_{ij}(x_{i1}) + (1 - \lambda)\tilde{f}_{ij}(x'_{i1}))$$

بنابراین نتیجه می شود

$$\tilde{f}_{ij}(\lambda x_{i1} + (1 - \lambda)x'_{i1}) \preceq \lambda\tilde{f}_{ij}(x_{i1}) + (1 - \lambda)\tilde{f}_{ij}(x'_{i1})$$

و این یعنی تابع $\tilde{f}_{ij}$ تابعی محدب است. به طریق مشابه نتیجه می توان نشان داد که تابع $\tilde{f}_{ir}$ نیز محدب است. لذا هر یک از توابع $\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$ و $\tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})$ محدب هستند و این نتیجه می دهد که تابع $\tilde{W}(X)$ محدب است.

□

مساله مکانیابی چند وسیله ای فازی (۵.۷) را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه ۱.۲.۷ داریم

$$\min \tilde{W}(X) = \min \tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) + \min \tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}) \quad (۶.۷)$$

از اینرو برای یافتن جواب بهینه مساله فازی (۵.۷) باید جواب هر یک از زیر مساله های فازی زیر را به طور جداگانه بیابیم.

$$\min \tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{1ij} |x_{i1} - a_{j1}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{2ir} |x_{i1} - x_{r1}| \quad (۷.۷)$$

$$\min \tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{2ij} |x_{i2} - a_{j2}| + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{2ir} |x_{i2} - x_{r2}| \quad (۸.۷)$$

بدین منظور با تبدیل هر یک از این مسایل به یک مساله برنامه ریزی خطی فازی می توان جواب بهینه را بیابیم. تابع $\tilde{W}_K(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})$ را به ازای $k = 1, 2$ در نظر بگیرید و متغیرهای نامنفی $d_{ijk}^+, d_{ijk}^-, e_{irk}^+, e_{irk}^-$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$d_{ijk}^+ = \begin{cases} x_{ik} - a_{jk} & \text{اگر } x_{ik} \geq a_{jk} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$d_{ijk}^- = \begin{cases} -x_{ik} + a_{jk} & \text{اگر } x_{ik} \leq a_{jk} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$e_{irk}^+ = \begin{cases} x_{ik} - x_{rk} & \text{اگر } x_{ik} \geq x_{rk} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$e_{irk}^- = \begin{cases} -x_{ik} + x_{rk} & \text{اگر } x_{ik} \leq x_{rk} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین مدل های (۷.۷) و (۸.۷) به ترتیب تبدیل به مدل های خطی فازی زیر می شود

$$\min \tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{1ij} (d_{ij1}^+ + d_{ij1}^-) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{2ir} (e_{ir1}^+ + e_{ir1}^-)$$

s.t

$$x_{i1} - d_{ij1}^+ + d_{ij1}^- = a_{j1} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{i1} - x_{r1} - e_{ir1}^+ + e_{ir1}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m-1 \quad r = i+1, \dots, m$$

$$x_{i1}, x_{r1}, d_{ij1}^+, d_{ij1}^-, e_{ir1}^+, e_{ir1}^- \geq 0 \quad \forall i, r, j$$

$$\min \tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{1ij}(d_{ij2}^+ + d_{ij2}^-) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^m \tilde{w}_{2ir}(e_{ir2}^+ + e_{ir2}^-)$$

s.t

$$x_{i2} - d_{ij2}^+ + d_{ij2}^- = a_{j2} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{i2} - x_{r2} - e_{ir2}^+ + e_{ir2}^- = 0 \quad i = 1, \dots, m-1 \quad r = i+1, \dots, m$$

$$x_{i2}, x_{r2}, d_{ij2}^+, d_{ij2}^-, e_{ir2}^+, e_{ir2}^- \geq 0 \quad \forall i, r, j$$

(۱۰.۷)

در مدل (۹.۷) مجموعه قیود اول تضمین می کند که متغیرهای d_{ij1}^+ و d_{ij1}^- نمی توانند به طور هم زمان مثبت باشند. به طریق مشابه مجموعه قیود دوم نشان می دهد که متغیرهای e_{ir1}^+ و e_{ir1}^- نمی توانند به طور هم زمان مثبت باشند. همچنین در مجموعه قیود آخر متغیرهای $x_{i1} \geq 0$ و $x_{r1} \geq 0$ به ازای $i = 1, \dots, m-1$ و $r = i+1, \dots, m$ به صورت نا منفی در نظر گرفته شده اند که از کلیت مساله نمی کاهد. زیرا می توان دستگاه مختصات را طوری در نظر گرفت که تمام نقاط در ربع اول واقع گردند. نتایج مشابه برای مساله برنامه ریزی (۱۰.۷) نیز برقرار است.

بوضوح هر یک از مسایل (۹.۷) و (۱۰.۷) یک مساله برنامه ریزی خطی با ضرایب هدف فازی هستند. با حل این مدل ها توسط روش کومار [۷۵] جواب بهینه مساله (۵.۷) بدست می آید.

مثال ۳.۲.۷. مساله تاسیس دو سرویس دهنده بین چهار نقطه موجود در صفحه که مختصات نقاط و وزن های فازی متناظر در جدول ۱.۷ آورده شده است در نظر بگیرید. بنابراین داریم

جدول ۱.۷: مختصات مراکز تقاضا و وزن ها مثال ۳.۲.۷

j	۱	۲	۳	۴
a_{j1}	۳	۲	۱	۵
a_{j2}	۱	۲	۴	۷
w_{11j}	$\langle 0, 1, 2/5 \rangle$	$\langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1, 2/5 \rangle$
w_{12j}	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1, 2/5 \rangle$	$\langle 2, 3, 4/2 \rangle$	$\langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle$
$\tilde{w}_{212}$	$\langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle$			

$$\begin{aligned}\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}) = & \langle \circ, 1, 2/5 \rangle |x_{11} - 3| + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle |x_{11} - 2| + \langle \circ, \circ, \circ \rangle |x_{11} - 1| \\ & + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle |x_{11} - 5| + \langle \circ, \circ, \circ \rangle |x_{21} - 3| + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle |x_{21} - 2| + \langle 2, 3, 4/2 \rangle |x_{21} - 1| \\ & + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle |x_{21} - 5| + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle |x_{11} - x_{21}|\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}\tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}) = & \langle \circ, 1, 2/5 \rangle |x_{12} - 1| + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle |x_{12} - 2| + \langle \circ, \circ, \circ \rangle |x_{12} - 4| \\ & + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle |x_{12} - 7| + \langle \circ, \circ, \circ \rangle |x_{22} - 1| + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle |x_{22} - 2| + \langle 2, 3, 4/2 \rangle |x_{22} - 4| \\ & + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle |x_{22} - 7| + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle |x_{12} - x_{22}|\end{aligned}$$

فرض کنید به ازای $k = 1, 2$ متغیرهای d_{ijk}^+ و d_{ijk}^- و همچنین به ازای $k = 1, 2$ متغیرهای e_{12k}^+ و d_{12k}^- آنگونه که پیشتر گفته شده است تعریف شوند. بنابراین هر یک از مسایل کمینه سازی تابع غیر خطی $\tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$ و کمینه سازی تابع غیر خطی $\tilde{W}_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})$ به ترتیب به مسایل کمینه سازی خطی فازی به صورت زیر تبدیل می شوند

$$\begin{aligned}\min \tilde{W}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}) = & \langle \circ, 1, 2/5 \rangle (d_{111}^+ + d_{111}^-) + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle (d_{121}^+ + d_{121}^-) \\ & + \langle \circ, \circ, \circ \rangle (d_{131}^+ + d_{131}^-) + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle (d_{141}^+ + d_{141}^-) + \langle \circ, \circ, \circ \rangle (d_{151}^+ + d_{151}^-) \\ & + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle (d_{221}^+ + d_{221}^-) + \langle 2, 3, 4/2 \rangle (d_{231}^+ + d_{231}^-) + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle (d_{241}^+ + d_{241}^-) \\ & + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle (e_{121}^+ + e_{121}^-)\end{aligned}$$

s.t

$$x_{11} - d_{111}^+ + d_{111}^- = 3$$

$$x_{11} - d_{121}^+ + d_{121}^- = 2$$

$$x_{11} - d_{131}^+ + d_{131}^- = 1$$

$$x_{11} - d_{141}^+ + d_{141}^- = 5$$

$$x_{21} - d_{211}^+ + d_{211}^- = 3$$

$$x_{21} - d_{221}^+ + d_{221}^- = 2$$

$$x_{21} - d_{231}^+ + d_{231}^- = 1$$

$$x_{21} - d_{241}^+ + d_{241}^- = 5$$

$$x_{11} - x_{21} - e_{121}^+ + e_{121}^- = \circ$$

$$x_{11}, x_{21}, e_{121}^+, e_{121}^- \geq \circ$$

$$d_{ij1}^+, d_{ij1}^- \geq \circ \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \min \tilde{W}_r(x_{1r}, x_{2r}, \dots, x_{mr}) = & \langle \circ, 1, 2/5 \rangle (d_{11r}^+ + d_{11r}^-) + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle (d_{12r}^+ + d_{12r}^-) \\ & + \langle \circ, \circ, \circ \rangle (d_{13r}^+ + d_{13r}^-) + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle (d_{14r}^+ + d_{14r}^-) + \langle \circ, \circ, \circ \rangle (d_{15r}^+ + d_{15r}^-) \\ & + \langle \circ, 1, 2/5 \rangle (d_{22r}^+ + d_{22r}^-) + \langle 2, 3, 4/2 \rangle (d_{23r}^+ + d_{23r}^-) + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle (d_{24r}^+ + d_{24r}^-) \\ & + \langle 1/2, 2/5, 3/5 \rangle (e_{12r}^+ + e_{12r}^-) \end{aligned}$$

s.t

$$x_{1r} - d_{12r}^+ + d_{12r}^- = 1$$

$$x_{1r} - d_{13r}^+ + d_{13r}^- = 2$$

$$x_{1r} - d_{14r}^+ + d_{14r}^- = 4$$

$$x_{1r} - d_{15r}^+ + d_{15r}^- = 7$$

$$x_{2r} - d_{22r}^+ + d_{22r}^- = 1$$

$$x_{2r} - d_{23r}^+ + d_{23r}^- = 2$$

$$x_{2r} - d_{24r}^+ + d_{24r}^- = 4$$

$$x_{2r} - d_{25r}^+ + d_{25r}^- = 7$$

$$x_{1r} - x_{2r} - e_{12r}^+ + e_{12r}^- = \circ$$

$$x_{1r}, x_{2r}, e_{12r}^+, e_{12r}^- \geq \circ$$

$$d_{ijr}^+, d_{ijr}^- \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

(۱۲.۷)

حال با حل مسائل فازی خطی (۱۱.۷) و (۱۲.۷) به روش کومار [۷۵] داریم

$$x_{11} = 2$$

$$x_{21} = 3$$

$$W_1(x_{11}, x_{21}) = 14/825$$

$$x_{12} = 4$$

$$x_{22} = 4$$

$$W_2(x_{12}, x_{22}) = 21/125$$

بنابراین

$$X_1 = (2, 4), \quad X_2 = (3, 4)$$

$$W(X_1, X_2) = W_1(x_{11}, x_{21}) + W_2(x_{12}, x_{22}) = 35/95$$

۳.۷ نتیجه گیری

در این فصل ابتدا به مساله تک وسیله ای با نرم توان دوم اقلیدسی و وزن های فازی پرداختیم و نشان دادیم که این مساله یک مساله برنامه ریزی محدب است. سپس روشی برای حل این مساله ارائه کردیم. در ادامه مساله مکانیابی چند وسیله ای فازی پیوسته با نرم L_1 را در نظر گرفته و ثابت کردیم که این مساله یک مساله محدب و تفکیک پذیر است. در نهایت با تبدیل مساله به مساله برنامه ریزی خطی با ضرایب هدف فازی جواب بهینه را به دست آوردیم.

مراجع

- [۱] ک. تاناکا، مقدمه ای بر منطق فازی برای کاربردهای علمی آن، ترجمه علی وحیدیان کامیاد و حامد رضا طارقیان، انتشارات دانشگاه مشهد، (۱۳۸۱).
- [۲] ن. تقی نژاد، ارایه یک روش رتبه بندی جدید فازی (مطالعه موردی سیستم توزیع فرآورده های نفتی)، دانشگاه مازندران، (۱۳۹۴).
- [۳] گ. چارتراند، نظریه الگوریتمی و کاربردی گراف ها، ترجمه سید مهدی تشکری هاشمی، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر (۱۳۹۴).
- [۴] م. طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، (۱۳۷۸).
- [۵] م. طاهری و م. ماشین چی، مقدمه ای بر احتمال و آمار فازی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، (۱۳۸۷).
- [6] J.M. Adamo, Fuzzy decision trees, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980): 207 - 219 .
- [7] E. Akyar, H. Akyar and S. Aluzce, A new method for ranking triangular fuzzy numbers, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 20 (5) (2012): 729 - 740 .
- [8] B. Balcik and B. M. Beamon, Facility location in humanitarian relief, International Journal of Logistics Research and Applications, 11 (2) (2008): 101 - 121 .
- [9] S. Barro and R. Marin, Fuzzy logic in medicine, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 83, Physical Verlag, Heidelberg, (2002).
- [10] M. Bashiri and S. J. Hosseinienezhad, A fuzzy group decision support system for multifacility location problems, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 42 (5-6) (2009): 533 - 543 .
- [11] J. E. Beasley, OR-Library: distributing test problems by electronic mail, Journal of the Operational Research Society, 41 (11) (1990): 1069 - 1072 .
- [12] L. E. Bellman and L. A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, Management Science, 17(4) (1970): 141 - 164 .
- [13] V. Beresnev, Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem, Computers and Operations Research, 40 (8) (2013): 2062 - 2070 .

- [14] D. Bepamyatnikh, B. Bhattacharya, M. Keil, D. Kirkpatrick and M. Segal, Efficient algorithms for centers and medians in interval and circular-arc graphs, *Networks*, 39(3) (2000): 144 - 152 .
- [15] U. Bhattacharya, J. R. Rao and R. N. Tiwari, Bi-criteria multi facility location in fuzzy environment, *Fuzzy Sets and Systems*, 56 (1993): 145 - 153 .
- [16] R. Blanquero and E. Carrizosa, Continuous location problems and Big Triangle Small Triangle: constructing better bounds, *Journal of Global Optimization*, 45 (3) (2009): 389 - 402 .
- [17] G. Bortolan and R. Degani, A review of some methods for ranking fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems*, 15 (1) (1985): 1 - 19.
- [18] L. Brotcorne, G. Laporte and F. Semet, Fast heuristics for large scale covering location problems, *Computers and Operations Research*, 29 (2002): 651 - 665 .
- [19] S. Cabello, J. M. Díaz-Báñez, S. Langerman, C. Seara and I. Ventura, Facility location problems in the plane based on reverse nearest neighbor queries, *European Journal of Operational Research*, 202 (2010): 99 – 106 .
- [20] J. F. Campbell, Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, 72 (1994): 387 - 405 .
- [21] M. J. Canos, C. Ivorra and V. Liern, An exact algorithm for the fuzzy p -median problem, *European Journal of Operational Research*, 116 (1999): 80 - 86 .
- [22] R. Chandrasekaran and A. Tamir, Polynomially bounded algorithms for locating p -centers on a tree, *Mathematics Programming*, 22 (1982): 304 - 315 .
- [23] S. H. Chen, Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, *Fuzzy Sets and Systems*, 17 (1) (1985): 113 - 129 .
- [24] S. J. Chen and S. M. Chen, Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers, *Applied Intelligence*, 26 (2007): 1 - 11 .
- [25] S. M. Chen, M. W. Yang, S. W. Yang, T. W. Sheu and C. J. Liao, Multicriteria fuzzy decision making based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets, *Expert Systems with Applications*, 39 (2012): 12085 – 12091 .
- [26] C. H. Cheng, A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, *Fuzzy Sets and Systems*, 95 (1998): 307 - 317 .
- [27] F. Choobineh and H. Li, An index for ordering fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 54 (1993): 287 - 294 .

- [28] T. Chu and C. Tsao, Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point, *Computers and Mathematics with Applications*, 43 (2002): 11 - 17 .
- [29] I. Contreras, E. Fernández, General network design: A unified view of combined location and network design problems, *European Journal of Operational Research*, 219 (2012): 680 - 697 .
- [30] M. S. Daskin, *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*, Wiley, NewYork, 1995 .
- [31] L.Q. Dat, V.F. Yu and S.Y. Chou, An improved ranking method for fuzzy numbers based on the centroid index, *International Journal of Fuzzy Systems*, 14 (3) (2012): 413 - 419.
- [32] S. Davari, M. H. Fazel Zarandi and A. Hemmativ, Maximal covering location problem (MCLP) with fuzzy travel times, *Expert Systems with Applications*, 38 (12) (2011): 14535 - 14541 .
- [33] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila, A procedure for ranking fuzzy number using fuzzy relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 26 (1988): 49 - 62 .
- [34] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila, *Fuzzylinear programming: From Classical Methods to New Applications*, *Fuzzy Optimization: Recent Advances*, Physica-Verlag, Heidelberg, 1994 .
- [35] R. V. Demicco and G. J. Klir (Eds.), *Fuzzy Logic in Geology*, Academic Press, (2004).
- [36] S. Dominik Jena, J. F. Cordeau and B. Gendron, Lagrangian Heuristics for Large-Scale Dynamic Facility Location with Generalized Modular Capacities, *INFORMS Journal on Computing*, 29 (2) (2017): 388 - 404 .
- [37] Z. Drezner and G. O. Wesolowsky, Facility location on a sphere, *The Journal of the Operational Research Society*, 29 (10) (1978): 997 - 1004 .
- [38] S. A. Duzce, A new ranking method for trapezial fuzzy numbers and its application to fuzzy risk analysis, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology*, 28 (3) (2015): 1411 - 1419 .
- [39] J. Ebery, Solving large single allocation p-hub problems with two or three hubs, *European Journal of Operational Research*, 128 (2001): 447 - 458 .
- [40] A. Ebrahimnejad, A simplified new approach for solving fuzzy transportation problems with generalized trapezoidal fuzzy numbers, *Applied Soft Computing*, 19 (2014): 171 - 176 .

- [41] A. Ebrahimnejad and S.H. Nasser, Linear programmes with trapezoidal fuzzy numbers: a duality approach, *International Journal of Operational Research*, 13(1) (2012): 67 - 89 .
- [42] A. Ebrahimnejad, S. H. Nasser, F. Hosseinzadeh-Lotfi and M. Soltanifar, A primal-dual method for linear programming problems with fuzzy variables. *European Journal of Industrial Engineering*, 4(2) (2010): 189 - 209 .
- [43] A. Ebrahimnejad, S.H. Nasser and S.M. Mansourzadeh, Modified bounded dual network simplex algorithm for solving minimum cost flow problem with fuzzy costs based on ranking functions, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 24 (1) (2013): 191 - 198 .
- [44] A. T. Ernst and M. Hrishnamoorthy, Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p - hub median problem, *European Journal of Operational Research*, 104 (1998): 100 - 112 .
- [45] J. Fathali, A genetic algorithm for the p-median problem with pos/neg weights, *Applied Mathematics and Computation*, 183 (2006): 1071 - 1083 .
- [46] J. Fathali and A. Jamalian, Locating multiple facilities in convex sets with fuzzy data and block norms, *Applied Mathematics*, 3 (2012): 1950 - 1958 .
- [47] J. Fathali and H. Taghizadeh Kakhki, Solving the p-median problem with pos/neg weights by variable neighborhood search and some results for special cases, *European Journal of Operational Research*, 170 (2006): 440 - 462 .
- [48] M. H. Fazel Zarandi, M. Zolnoori, M. Moin and H. Heidarnejad, A fuzzy rule-based expert system for diagnosing asthma, *International Journal of Science and Technology*, 17 (2) (2010): 129 - 140 .
- [49] P. Fortemps and M. Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation, *Fuzzy Sets and Systems*, 82 (1996): 319 - 330 .
- [50] R. L. Francis, On the location of multiple new facilities with respect to existing facilities, *The Journal of Industrial Engineering*, 15 (1964): 106 - 107 .
- [51] P. Galinier and A. Hertz, Solution techniques for the large set covering problem, *Discrete Applied Mathematics*, 155 (2007): 312 - 326 .
- [52] M.S. Garcia and M.T. Lamata, A modification of the index of Liou and Wang for ranking fuzzy number, *International Journal of Uncertainty*, 15 (4) (2007): 411 - 424.

- [53] A. Ghodratinama, R. Tavakkoli-Moghaddam and A. Azaron, Robust and fuzzy goal programming optimization approaches for a novel multi-objective hub location-allocation problem: A supply chain overview, *Applied Soft Computing*, 37 (2015): 255 - 276 .
- [54] M. Gunes and N. Umarusman, The usage of vague sets for different approaches of fuzzy goal programming, *Int. J. of Industrial and Systems Engineering* 15 (3) (2013): 315 - 328 .
- [55] S. M. Hatefi and J. Razmi, An integrated methodology for supplier selection and order allocation in the presence of imprecise data, *Int. J. of Industrial and Systems Engineering* 15 (1) (2013): 51 - 68 .
- [56] S. Haddadi, Simple lagrangian heuristic for the set covering problem, *European Journal of Operational research*, 99 (1997): 200 - 204 .
- [57] S. L. Hakimi, Optimum distributions of swiching centers in a communications network and some related graph theoretic problems, *Operations Research*, 13 (1965): 462 - 475 .
- [58] S. L. Hakimi, Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph, *Operations Research*, 12 (1964): 450 - 459 .
- [59] G. Y. Handler, Minimax location of a facility in a undirected tree network, *Transportation Science*, 7 (1973): 287 - 293 .
- [60] P. Hansen and N. Mladenovic, Variable neighborhood search for the p-median, *Location Science*, 5 (4) (1997): 207 - 226 .
- [61] H. Y. Handler and P. B. Mirchandani, *Location on networks : theory and algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA (1979) .
- [62] S. M. Hedetniemi, E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, linear algorithm for finding the Jordan center and path center of a tree, *Trancs.SCI*, 15 (1981): 98 - 114 .
- [63] S. C. Ho, An iterated tabu search heuristic for the Single Source Capacitated Facility Location Problem, *Applied Soft Computing*, 27 (2015): 169 - 178 .
- [64] F. Husseinov and N. Sagara, Concave measures and the fuzzy core of exchange economies with heterogeneous divisible commodities, *Fuzzy Set and System*, 198 (2012): 70 - 82 .
- [65] R. Jain, Decision-making in the presence of fuzzy variables, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 6 (1976): 698 - 703 .

- [66] L. Jian, X. W. Zhong and Y. Qi, Triangular approximation preserving the centroid of fuzzy numbers, *International Journal of Computer Mathematics*, 89 (6) (2012): 810 - 821 .
- [67] A. Jamalain and J. fathali, Linear Programming for the Location Problem with Minimum Absolute Error, *World Applied Sciences Journal* 7 (11) (2009): 1423 - 1427 .
- [68] J. Kalcsics, The multi-facility median problem with pos/neg weights on general graphs, *Computers and Operations Research*, 38 (2011): 674 - 682 .
- [69] O. Karvin and S. L. Hakimi, An algorithm approach to network location problems. Part I: The p-centers, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 37 (1979): 513 - 538 .
- [70] O. Karvin and S.L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems; part 2, the p-medians, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37 (1969): 539 - 560 .
- [71] E.E. Kerre, The use of fuzzy set theory in electro cardiological diagnostics, in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, (1982): 277 - 282 .
- [72] A. khedhairi and S. Salhi, Enhancement to two exact algorithms for solving the vertex p - center problem, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 4 (2) (2005): 129 - 147 .
- [73] K. Klamroth, A reduction result for location problems with polyhedral barriers, *European Journal of Operational Research*, 130 (2001): 486 - 497 .
- [74] M. T. Ko and R. C. T. Lee, On weighted rectilinear 2-center and 3-center problems, *Information Sciences*, 54 (1991): 169 - 190 .
- [75] A. Kumar and P. Singh, A new method for solving fully fuzzy linear programming problems, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3 (1), (2012): 103 - 118 .
- [76] Y. J. Lai and C. L. Hwang, A new approach to some possibilistic linear programming problems, *Fuzzy Sets and Systems*, 49 (1992): 121 - 133 .
- [77] K. H. Lee, *First course on fuzzy theory and application*, Springer - Verlag, Berlin - Hedelberg, (2005).
- [78] L. W. Lee and S. M. Chen, Fuzzy risk analysis based on fuzzy numbers with different shapes and different deviations, *Expert Systems with Application*, 34 (2008): 2763 - 2771 .

- [79] H. Lee-Kwang and J.H. Lee, A method for ranking fuzzy numbers and its application to decision-making, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7 (1999): 677 - 685 .
- [80] S. Li, A 1.488 approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem, *Information and Computation*, 222 (2013): 45 - 58 .
- [81] T. S. Liou and M. J. Wang, Ranking fuzzy numbers with integral value, *Fuzzy Sets and Systems*, 50 (1992): 247 - 255 .
- [82] R. F. Love, J. D. Morris and G. O Wesolowsky, *Facilities locations: Models and methods*, Publications in Operations Research Series, vol. 7. North-Holland, Amsterdam, (1988) .
- [83] H. W. Lu, G. H. Huang and L. He, Development of an interval-valued fuzzy linear-programming method based on infinite α -cuts for water resources management, *Environmental Modelling and Software*, 25 (2010): 354 - 361 .
- [84] N. Mahdavi-Amiri and S. H. Nasseri, Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function, *Applied Mathematics and Computations*, 180 (2006): 206 - 216 .
- [85] N. Mahdavi-Amiri and S. H. Nasseri, Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 158 (2007): 1961 – 1976 .
- [86] D. K. Mayoya and J. L. Verdegay, p-median problems in fuzzy environment, *Mathware and Soft Computing*, 12 (2005): 97 - 106 .
- [87] Y. Z. Mehrjerdi and A. Nadizadeh, Using greedy clustering method to solve capacitated location-routing problem with fuzzy demands, *European Journal of Operational Research*, 229 (1) (2013): 75 - 84 .
- [88] E. Minika, The optimal location of a path or tree in a tree network, *Networks*, 15 (1985): 309 - 321 .
- [89] P. B Mirchandani and R. L. Francis, *Discrete location theory*, Wiley, New York, (1990) .
- [90] N. Mledanovic, M. Labbe and P. Hansen, Solving the p - center problem with tabu search and variable neighborhood search, *Networks*, 42 (1) (2003): 48 - 64 .
- [91] M. Mohammadi, R. Tavakkoli-Moghaddam, A. Siadat and Y. Rahimi, A game-based meta-heuristic for a fuzzy bi-objective reliable hub location problem, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 50 (2016): 1 - 19 .

- [92] A. Montoya, M. C. Velez-Gallego and J. G. Villegas, Multi-product capacitated facility location problem with general production and building costs, *NETNOMICS: Economic Research and Electronic Networking*, 17 (1) (2016): 47 - 70 .
- [93] R. E. Moor, *Method and applications of interval analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979 .
- [94] S. M. Mousavi and S. T. Akhavan Niaki, Capacitated location allocation problem with stochastic fuzzy demand: A hybrid algorithm, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013): 5109 - 5119 .
- [95] S. Murakami, S. Maeda and S. Imamura, Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system, In *Proceedings of the IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*, (1983): 363 - 368 .
- [96] A. Nadizadeh and H. Hosseini Nasab, Solving the dynamic capacitated location-routing problem with fuzzy demands by hybrid heuristic algorithm, *European Journal of Operational Research*, 238 (2) (2014): 458 - 470 .
- [97] S. H. Nasser, Quadratic programming with fuzzy numbers: A linear ranking method, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 4 (8) (2010): 3513 - 3518 .
- [98] S. H. Nasser and A. Ebrahimnejad, A fuzzy primal simplex algorithm and its application for solving flexible linear programming problems. *European Journal of Industrial Engineering*, 4(3) (2010): 372 - 389 .
- [99] S. H. Nasser, E. Behmanesh, F. Taleshian, M. Abdollahipour and N. A. Taghinezhad, Fully fuzzy linear programming with inequality constraints, *International Journal of Industrial Mathematics*, 5 (2013): 309 - 316 .
- [100] S. H. Nasser, N. Taghinezhad and A. Ebrahimnejad, A note on ranking fuzzy numbers with an area method using circumcenter of centroids, *Fuzzy Information and Engineering*, 9 (2) (2017): 259-268.
- [101] S. H. Nasser, N. Taghinezhad and A. Ebrahimnejad, A novel method for ranking fuzzy quantities using center of incircle and its application to a petroleum distribution center evaluation problem, *International Journal of Industrial and System engineering*, 27 (4) (2017) 457-484.
- [102] S. H. Nasser, M. M. Zadeh, M. Kardoost and E. Behmanesh, Ranking fuzzy quantities based on the angle of the reference functions, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013): 9230 - 9241 .

- [103] S. M. A. Nayeem and M. Pal, The p -center problem on fuzzy networks and reduction of cost, *International Journal of Fuzzy Systems*, 5 (1) (2008): 1 - 26 .
- [104] A. M. Nejad and M. Mashinchi, Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and right sides of fuzzy number, *Computers and Mathematics with Applications*, 61(2) (2011): 431 - 442 .
- [105] E. U. Olugu and K. Y. Wong, An expert fuzzy rule-based system for closed-loop supply chain performance assessment in the automotive industry, *Expert Systems with Applications*, 39 (2012): 375 - 384 .
- [106] F. A. Ozsoya and MC. Pınar, An exact algorithm for the capacitated vertex p - center problem, *Computers and Operations Research*, 33 (5) (2006): 1420 - 1436 .
- [107] T. Paksoy, N. Y. Pehlivan and C. Kahraman, Organizational strategy development in distribution channel management using fuzzy AHP and hierarchical fuzzy TOPSIS, *Expert Systems with Applications*, 39 (2012): 2822 - 2841 .
- [108] M. Patriche, New results on equilibria of abstract fuzzy economies, *Fuzzy Set and Systems*, 245 (1014): 137 - 147 .
- [109] M. A. Pereira, L. C. Coelho, L. A. N. Lorena and L. C. de, A hybrid method for the Probabilistic Maximal Covering Location–Allocation Problem, *Computers and Operations Research*, 57 (2015): 51 - 59 .
- [110] J. A. M. Perez, J. M. M. Vega and J. L. Verdegay, Fuzzy location problems on networks, *Fuzzy Set and Systems*, 142 (2004): 393 - 405 .
- [111] Z. Qin and Y. Gao, Uncapacitated p -hub location problem with fixed costs and uncertain flows, *Journal of Intelligent Manufacturing*, 28 (3) (2017): 705 - 716 .
- [112] C. Revelle and R. W. Swain, Central facilities location, *Geographical Analysis*, 2 (1970): 30 - 42 .
- [113] A. Rahmani and S.A. MirHassani, A hybrid Firefly-Genetic Algorithm for the capacitated facility location problem, *Information Sciences*, 283 (2014): 70 - 78 .
- [114] J. Roshandel, S. S. Miri-Nargesi and L. Hatami-Shirkouhi, Evaluating and selecting the supplier in detergent production industry using hierarchical fuzzy TOPSIS, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013): 10170 - 10181 .
- [115] G. Sahin and H. Sural, A review of hierarchical facility location models, *Computers and Operations Research*, 34 (8) (2007): 2310 - 2331 .

- [116] E. L. F. Senne, L. A. N. Lorena and M. A. Pereira, A branch-and-price approach top - median location problems, *Computers and Operations Research*, 32 (2005): 1655 - 1664 .
- [117] P. J. Slater, Locating central path in a graph, *Transportation Science*, 16 (1982): 1 - 18 .
- [118] A. Susilawati, J. Tan, D. Bell and M. Sarwar, Fuzzy logic based method to measure degree of lean activity in manufacturing industry, *Journal of Manufacturing Systems*, 34 (2015): 1 - 11 .
- [119] H. Tanaka, T. Okuda and K. Asai, On fuzzy mathematical programming, *The Journal of Cybernetics*, 3 (1974): 37 - 46 .
- [120] M. B. Teitz and P. Bart, Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph, *Operations Research*, 16 (1968): 955 - 961 .
- [121] C. Teye, M. G. HBell and M. C. JBliemer, Urban intermodal terminals: The entropy maximising facility location problem, *Transportation Research Part B: Methodological*, 100 (2017): 64 - 81 .
- [122] F. Torfi, R. ZanjiraniFarahani and I. Mahdavi, Fuzzy MCDM for weight of object's phrase in location routing problem, *Applied Mathematical Modelling*, 40 (1) (2016): 526 - 541 .
- [123] A. Trivedi and A. Singh, A hybrid multi-objective decision model for emergency shelter location-relocation projects using fuzzy analytic hierarchy process and goal programming approach, *International Journal of Project Management*, 35 (5) (2017): 827 - 840 .
- [124] T. Uno and H. Katagiri, Single- and multi-objective defensive location problems on a network, *European Journal of Operational Research*, 188 (1) (2008): 76 - 84 .
- [125] T. Vetterlein, H. Mandl and K.P. Adlassing, Fuzzy Arden Syntax: A fuzzy programming language for medicine, *Artificial Intelligence in Medicine*, 49 (1) (2010): 1 - 10 .
- [126] Y. M. Wang, J. B. Yang, D. L. Xu and K. S. Chin, On the centroids of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (2006): 919 - 926 .
- [127] A. Weber, *Über den Standort der Industrien*. Tübingen, 1909; English Trans: *Theory of Location of Industries*, (C.J. Friedrich, ed and trans), Chicago University of Press, Chicago, Illinois, 1926 .
- [128] E. Weiszfeld, Sur le point pour lequel la somme des distances denpoints donnés est minimum, *Tôhoku Mathematical Journal*, 43 (1937): 355 - 386 .

- [129] M. Wen and R. Kang, Some optimal models for facility location-allocation problem with random fuzzy demands, *Applied Soft Computing*, 11 (1) (2011): 1202 - 1207 .
- [130] G. O. Wesolowsky, Location of the median line for weighted points, *Environment and planning*, 7 (1974): 163 - 170 .
- [131] G. O. Wesolowsky and R. F. Love, Location of facilities with rectangular distance among point and area destinations, *Naval Research Logistics Quarterly*, 18 (1971): 83 - 90 .
- [132] R.R. Yager, A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval, *Inf. Sci.* 24 (1981): 143 - 161 .
- [133] R. R. Yager, On a general class of fuzzy connectives, *Fuzzy Sets and Systems*, 4 (1980): 235 - 242 .
- [134] R.R. Yager, On choosing between fuzzy subsets, *Kybernetes* 9 (1980): 151 - 154 .
- [135] K. Yang, Y. Liu, G. Yang, Optimizing fuzzy p -hub center problem with generalized value-at-risk criterion, *Applied Mathematical Modelling*, 38 (15-16) (2014): 3987 - 4005 .
- [136] J. Ye, Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment, *European Journal of Operational Research*, 205 (2010): 202 - 204 .
- [137] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8 (1965): 338 - 353 .
- [138] L. A. Zadeh, Fuzzy algorithms, *Information and Control* 12 (2) (1968): 94 .
- [139] L. A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 2 (1973): 28 - 44 .
- [140] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Information Science*, 3 (1971): 177 - 200 .
- [141] R. Zanjirani Farahani, N. Asgari, N. Heidari, M. Hosseiniinia and M. Goh, Covering problems in facility location: A review, *Computers and Industrial Engineering*, 62 (1) (2012): 368 - 407 .
- [142] J. Zhang, Approximating the two-level facility location problem via a quasi-greedy approach, *Mathematical Programming*, 108 (1) (2006): 159 - 176 .
- [143] H. J. Zimmermann, Fuzzy mathematical programming, in: T. Gal, H.J. Greenberg (Eds.), *Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997 .

-
- [144] H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Systems, 1(1978): 45 - 55 .

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

α - cut	آلفا برش
Heuristic	ابتکاری
Vagueness	ابهام
Hight	ارتفاع
Scaler	اسکالر
Union	اجتماع
Intersection	اشتراک
Extension principal	اصل گسترش
Algorithm	الگوریتم
Integration	انتگرال
Interval	بازه
Pessimistic	بدبینانه
Unweighted	بدون وزن
programming	برنامه ریزی
Linear programming	برنامه ریزی خطی
Integer programming	برنامه ریزی عدد صحیح
Fuzzy programming	برنامه ریزی فازی
Infimum	بزرگ‌ترین کران پایین
Optimal	بهینه
Optimization	بهینه‌سازی
Maximum	بیشینه‌سازی
Complexity	پیچیدگی
Fuzzy index function	تابع اندیس فازی
Linear function	تابع خطی
Ranking function	تابع رتبه بندی

Membership function	تابع عضویت
LR membership function	تابع عضویت ال آر
Trapezoidal membership function	تابع عضویت ذوزنقه ای
Triangular membership function	تابع عضویت مثلثی
Convex function	تابع محدب
Characteristic function	تابع مشخصه
Concave function	تابع مقعر
Objective function	تابع هدف
Convexity	تحدب
Remark	تذکر
Partial ordering	ترتیب جزئی
Equality	تساوی
Facility	تسهیل
Dominance	تسلط داشتن
Decision maker	تصمیم گیرنده
Fuzzy decision	تصمیم گیری فازی
Image	تصویر
Definition	تعریف
Extended	تعمیم یافته - گسترش یافته
Generalized	تعمیم یافته - عمومیت داده شده
Subtraction	تفاضل
Separable	تفکیک پذیر
Divide	تقسیم کردن
Concavity	تقعر
Iteration	تکرار
Support	تکیه گاه
Develop	توسعه دادن
Empty	تهی
Established	ثابت کردن
Partially	جزئی
Search	جستجو
Summation	جمع کردن

Solution	جواب
Optimal solution	جواب بهینه
Feasible solution	جواب شدنی
Unique solution	جواب یکتا
Polynomial	چند جمله ای
Linearity	خطی بودن
Optimism	خوش بینانه
Degree of membership	درجه عضویت
Precision	دقت
Binary	دودویی
Vertex	راس
Ranking	رتبه بندی
Fuzzy ranking	رتبه بندی فازی
Fuzzy mathematic	ریاضیات فازی
Consistence	سازگار
Ordered triple	سه تایی مرتب
Index	شاخص
Inclusion	شمولیت
Accurate	صحیح - دقیق
Increasing	صعودی
Right-hand-side coefficients	ضرایب سمت راست
Cost coefficients	ضرایب هزینه
Constraints coefficients	ضرایب محدودیت ها
Multiplication	ضرب
Length	طول
Interval number	عدد بازه ای
Fuzzy number	عدد فازی
LR fuzzy number	عدد فازی ال آر
Trapezoidal fuzzy number	عدد فازی ذوزنقه ای
Triangular fuzzy number	عدد فازی مثلثی
Uncertainty	عدم قطعیت
Membership	عضویت - تعلق

Operator	عملگر
Fuzzy operators	عملگرهای فازی
Complement	عنصر
Non-empty	غیر تهی
Imprecise	غیر دقیق
Subnormal	غیر نرمال
Fuzziness	فازی بودن
Distance	فاصله
Assumption	فرضیات
Formula	فرمول
Opposite	قرینه
Theorem	قضیه
Total	کلی
Supremum	کوچک ترین کران بالا
Fuzzy quantity	کمیت فازی
Graph	گراف
Node	گره
Lemma	لم
Variable	متغیر
Decision variable	متغیر تصمیم گیری
Symmetric	متقارن
Complement	متمم - مکمل
Contradict	متناقض
Finite	متناهی - محدود
Positive	مثبت
Triangular	مثلثی
Set	مجموعه
α - level set	مجموعه آلفا برش
Universal set	مجموعه جهانی مرجع
Fuzzy set	مجموعه فازی
Convex fuzzy set	مجموعه فازی محدب
Normal fuzzy set	مجموعه فازی نرمال

Crisp set	مجموعه قطعی
Convex set	مجموعه محدب
Concave fuzzy set	مجموعه فازی مقعر
Concave set	مجموعه مقعر
Computation	محاسبه
Convex	محدب
Constraint	محدودیت
Model	مدل
Mathematical model	مدل ریاضی
Center	مرکز
Center of gravity	مرکز ثقل
Problem	مساله
Equal	مساوی بودن - برابر بودن
Customer	مشتری
Derivative	مشتق
Differentiable	مشتق پذیری
Equation	معادله
Inverse	معکوس
Concept	مفهوم
Compare	مقایسه کردن
Primary	مقدماتی
Concave	مقعر
Location	مکانیابی
Logic	منطق
Fuzzy logic	منطق فازی
Negative	منفی
Median	میانه
Non-empty	نا تهی
Infinite	نامتناهی
Result	نتیجه
Norm	نرم
Normality	نرمال بودن

Decreasing	نزولی
Point	نقطه
Demand point	نقطه تقاضا
Crossover point	نقطه گذر
Weight	وزن
Weighted	وزندار
Core	هسته
Edge	یال

Aabstract

Facility location problem is one of the most important fields of operation research that is used to model real problems such as locating hospitals, fire fighting stations, banks, emergency centers and etc . However the existence of uncertainty and ambiguity are unassailable in real situations and in most of the times it is not possible to determine the value of parameters certainly and exactly. To model real problems in such cases, a proper method is used to model these ambiguity and uncertainty. The fuzzy set theory is an efficient tool to model vagueness and uncertainty of real problems in mathematical forms. This theory is able to model uncertain and ambiguous concepts, variables and systems in mathematical form and provide the situations to reasoning, conclusion, control and decision making in uncertainty. Hence it is so important to studding of fuzzy facility location problems. In this thesis the crisp version of p - median and p center problems are defined and the fuzzy form of 1 - median, 2 - median and 1 - center problems are studied. Some previous existing methods are explained. Also some new efficient methods are proposed to solve these problems. More over continuous facility location problems with square of Euclidean norm and L_1 norm are discussed and some new methods are presented to solve them.

keywords: Center facility location problem, median facility location problem, fuzzy network, membership function, fuzzy sets, fuzzy location problem.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

**Consideration of fuzzy p - median and p -
center problems**

Fatemeh Taleshian Jelodar

Supervisor

Dr. Jafar Fathali

May 2018