بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز مختلط

رساله دکتری

بررسی پیچش روی توابع همساز و تک ارز

نگارنده: شاهپور نصرتی

استاد راهنما

دکتر احمد معتمدنژاد

اردیبهشت ماه ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای ... **شاهپور نصرتی**.... دانشجوی دکتری رشته ... **ریاضی محض، گرایش آنالیز مختلط**.... به شماره دانشجویی . **۹۲۱۵۶۴۵**.. ورودی **مهرماه** سال **۱۳۹۲** در تاریخ **۱۳۹۷/۰۲/۲۶** از رساله خود با عنوان .. **بررسی پیچش روی توابع همساز و تک ارز**.. دفاع و با اخذ نمره ...۱۸/۷۵... به درجه : ...بسیار خوب... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ — ۱۷ ☑
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹— ۱۵ ☐	د) غیر قابل فبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر احمد معتمدنژاد	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر مهدی ایرانمنش	داور داخلی	دانشیار	
۳	دکتر علی غفاری	داور خارجی	استاد	
۴	دکتر محمود بیدخام	داور خارجی	دانشیار	
۵	دکتر ابراهیم هاشمی	نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران:

تاریخ و امضاء:

سپاس‌گزاری...

تقدیر و تشکر از جناب آقای دکتر معتمدنژاد که با راهنمائی های خود، راه را برای اینجانب هموار نموده و خانم ذاکر که در پیشبرد تز همکاری فراوان داشته، و نیز با قدردانی از گروه ریاضی که امکان تحقیق و مطالعه را برای دانشجویان این گروه فراهم کردند.

شاهپور نصرتی
اردیبهشت ماه ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **شاهپور نصرتی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی پیچش روی توابع همساز و تک ارز** ، تحت راهنمایی **احمد معتمدنژاد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد داده شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهند رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

شاهپور نصرتی
اردیبهشت ماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

با اینکه مثالهای معدودی از توابع تحلیلی ستاره‌گون (به ترتیب، محدب) یکنواخت و همساز کاملاً ستاره‌گون (به ترتیب، محدب) موجود است، با این حال مثالهایی از خانواده های جدید همساز ستاره‌گون (به ترتیب، محدب) یکنواخت ارائه خواهیم داد، هرچند توابعی که در این تعاریف صدق می کنند بسیار محدود و با اهمیت ویژه اند. همچنین شروط لازم و یا کافی ارائه می دهیم که مطابق آن ها توابعی همساز، ستاره‌گون (به ترتیب، محدب) یکنواخت شوند. در این باره از ذکر نتایج اخیر در این زمینه فروگذار نخواهیم نمود.

پیچش روی توابع تحلیلی و همساز ابزاری جانبی جهت بررسی رده ی توابع تک ارز بشمار می آید. آنچه از پیچش روی توابع تحلیلی تک ارز انجام شده، توانائی این روش را به اثبات رسانده و نیز عملکرد آن روی توابع همساز، نظیر تعمیم رده های قبلی از توابع همساز، اعمال پیچش روی توابع همساز رده های مختلف نظیر ستاره‌گون و محدب و نزدیک‌ـ به‌ـ محدب و غیره از این قبیل مسائل بشمار می روند. کارهای اخیر برخی مولفان در چند سال اخیر، تنها نشان دهنده تکامل بخش کوچکی از توانمندی این روش است. ما نیز از روش پیچش برای دستیابی به نتایج استفاده خواهیم کرد.

مطلب دیگری که در انتها به آن می پردازیم توابع دو‌ـ تک ارزند که از زیررده های S بوده و در زمینه یافتن کران ضرایب دارای اهمیت ویژه ای هستند. نتایجی که العشوه یافته، تعمیمی از چند رده ی قبلی است و در اینجا با تعمیمی از رده ی مذکور و با استفاده از پیچش، نشان می دهیم کران های ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ یافته شده، حالات کلی تری از روشهای قبلی را شامل خواهند شد. پس

- این اثر اختصاص دارد به مطالعه در زیررده هائی از توابع مختلط تک ارز اعم از تحلیلی و همساز در قرص واحد $\mathbb{D}$.
- رده های معینی از توابع ستاره‌گون و محدب تک ارز معرفی شده اند.
- این رده های تحلیلی و تک ارز از توابع، به زیررده های جدیدی یکپارچه شده اند.
- نتایج اصلی از خواص شمولی و پیچشی زیرکلاس های جدید بدست آمده اند.
- زیررده ای از توابع تحلیلی دو‌ـ تک ارز تعریف و کران ضرایب نخستین برای این زیررده از طریق لم کاراتئودوری و اصل تابعیت حاصل شده است.

کلمات کلیدی: تابع تک ارز، تابع ستاره‌گون یکنواخت، تابع محدب یکنواخت، تابع کاملاً ستاره‌گون، تابع کاملاً محدب، تابع دو‌ـ تک ارز، پیچش، تابعیت.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Nosrati Shahpour and Zireh Ahmad (2020), ”On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension”, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.

2. Motamednezhad Ahmad, Nosrati Shahpour and Zaker Sima (2019), ”Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination”, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.

3. Shahpour Nosrati and Ahmad Zireh (2016), ”On Starlike Harmonic Functions”, **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر ف

۱ رده ی توابع تک ارز ۱

۱.۱ رده‌ی $\mathcal{S}$ ۲
۲.۱ تابعیت ۵
۳.۱ توابع ستاره‌گون ۵
۴.۱ تحدب ۸
۵.۱ رده ی $\mathbb{P}$ ۱۴
۶.۱ نزدیک به محدب ۱۵
۷.۱ خانواده بازیلویچ ۱۶
۸.۱ مارپیچ گون ها ۱۷
۹.۱ رده ی $\mathcal{T}$ ۱۸
۱۰.۱ ستاره‌گون نسبت به نقاط متقارن ۱۹
۱۱.۱ خانواده $\mathcal{UST}$ ۲۰
۱۲.۱ رده ی $\mathcal{UCV}$ ۲۳
۱۳.۱ رده ی $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ ۲۴
۱۴.۱ ستاره‌گون ما_میندا ۲۵
۱۵.۱ عملگرهای میانگین ۲۵
۱۶.۱ پیچش ۲۶
۱۷.۱ توابع پیش ستاره‌گون ۳۰

۲ توابع همساز ۳۳

۱.۲ نگاشت های همساز حقیقی تک ارز ۳۴
۲.۲ نگاشتهای تک ارز همساز مختلط ۳۵
۳.۲ رده ی $\mathcal{S}_H$ ۳۶
۴.۲ رده ی $\mathcal{S}_H^{\circ}$ ۳۶

۵.۲ روش برش ۳۷
۶.۲ توابع همساز ستاره‌گون ۴۲
۷.۲ توابع همساز محدب ۴۳
۸.۲ توابع همساز نزدیک_به_محدب ۴۵
۹.۲ پیچش ۴۶
۱۰.۲ زیررده هائی مرتبط با پیچش ۴۹
۱۱.۲ رده ی $\mathcal{T}_H$ ۵۱

۳ توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت ۵۵
۱.۳ توابع ستاره‌گون یکنواخت ۵۶
۲.۳ روش پیچش در رده $\mathcal{US}^*_H$ ۶۳
۳.۳ محدب یکنواخت ۶۴
۴.۳ روش پیچش در رده $\mathcal{UK}_H$ ۶۹
۵.۳ مطلقاً محدب ۷۰

۴ توابع دو_تک ارز ۷۵
۱.۴ تعریف ۷۶
۲.۴ زیررده ها ۷۷
۳.۴ رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$ ۸۱
۴.۴ کران ضرایب در رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$ ۸۲
۵.۴ نتایج ۸۶

مراجع ۸۹

آ تابع فوق هندسی گاوس ۹۹

نمایه ۱۰۱

فهرست تصاویر

۱.۱ تصویر $\mathbb{D}$ تحت تابع کوبه. ۴
۲.۱ تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت محدب $f = \dfrac{z}{1-z}$. ۹

۱.۲ تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همدیس $F = z - \frac{1}{6}z^3$. ۳۸
۲.۲ تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $f = z + \frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{z}^2 + \frac{1}{6}\overline{z}^3$. ۳۸
۳.۲ تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز f در مثال ۲.۵.۲. . . . . ۳۹
۴.۲ تصویر قرص $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز (۱۳.۲). ۴۴

۱.۳ تصویر $|z + \frac{1-i}{2}| < \frac{1}{5}$ تحت $\mathcal{US}_H^* \ni f = z + \frac{1}{2}z^2 \overline{- \frac{i}{2}z - \frac{i}{4}z^2}$. ۵۹
۲.۳ تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت های همساز $\mathcal{US}_H^*$. ۶۱
۳.۳ تصویر $|z - 0/7| < 0/3$ تحت نگاشت $\mathcal{UK}_H \ni f(z) = z + \frac{1}{6}z^2 \overline{- \frac{i}{2}z - \frac{i}{12}z^2}$. ۶۷

نمادگذاری:

صفحه ی مختلط .... $\mathbb{C}$

جزء حقیقی عدد مختلط .... $\mathbf{Re}$

جزء موهومی عدد مختلط .... $\mathbf{Im}$

قرص واحد .... $\mathbb{D}$

دایره واحد .... $\mathbb{T}$

رده ی تمام توابع تحلیلی .... $\mathbf{H}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز روی قرص واحد .... $\mathcal{S}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز ستارگون روی قرص واحد .... $\mathcal{S}^*$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{K}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز نزدیک_ به_ محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{C}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز با جزء حقیقی مثبت روی قرص واحد .... $\mathbb{P}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز ستارگون یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UST}$

رده ی تمام توابع تحلیلی تک ارز محدب یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UK}$

زیرترتیبی دو تابع تحلیلی .... $f \prec F$

پیچش دو تابع .... $f * F$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز روی قرص واحد .... $\mathcal{S}_H$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز ستارگون روی قرص واحد .... $\mathcal{S}_H^*$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{K}_H$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز نزدیک_ به_ محدب روی قرص واحد .... $\mathcal{C}_H$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز کاملاً ستارگون یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UFS}_H^*$

رده ی تمام توابع همساز تک ارز کاملاً محدب یکنواخت روی قرص واحد .... $\mathcal{UFK}$

اندیس رده برای توابع دو_ تک ارز روی قرص واحد از هر رده ی خاص .... Σ

رده های مهم توابع تحلیلی دو_ تک ارز

$\mathcal{S}_\Sigma(\alpha,\beta)$، $\mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$، $\mathcal{S}_\Sigma^*[\beta]$، $\mathcal{H}_\Sigma(\alpha)$، $\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$، $\mathcal{K}_\Sigma(\alpha,\beta)$، $\mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha,\lambda)$، $\mathcal{B}_\Sigma(\alpha,\lambda)$، $\mathcal{B}_\Sigma(h,\alpha,\lambda)$، $\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$، $\mathcal{P}_\Sigma(\alpha,\mu)$.

فصل ۱

رده ی توابع تک ارز

نظریه توابع مختلط با قدمتی بیش از دو سده، از شاخه های مهم آنالیز بشمار رفته و با بحث روی نقاط صفحه و کنش آنها، الگوی بسیاری از مباحث و قضایای آنالیز بشمار می رود. از نظر تاریخی پیرامون این نظریه، بحث روی توابع تک ارز به ابتدای قرن بیستم بر می گردد، و آن هنگامی بود که طلایه داران آنالیز، مبانی و تعاریف تابع تک ارز یا تابع تک مقدار را بیان نموده و در این بین حدس بیبرباخ با عمری هفتاد ساله سرمایه بسیاری از پیشرفت ها در این مبحث بوده و پس از آن نظریه توابع همساز که خود منشعب از نظریه توابع تحلیلی است، راه خود را در این میان گشودند.

نظریه توابع مختلط طی شکل‌گیری اولیه با دیدی هندسی که مخصوصا مورد توجه دانشمندانی بود که تمایل به پیوند ریاضی با سایر علوم داشتند، مورد بحث و تفحص قرار داشت. بیان ویژگی های صفحه مختلط با بکارگیری ایده های هندسی توسط هندسه_ دیفرانسیل دانهای نیمه اول قرن بیستم، باعث انگیزش بیشتر دانشمندان غیر ریاضی مخصوصا فیزیکدانها به این سمت بوده و چنین نگرشی از صفحه ی مختلط با آهنگی کندتر به امروز منتقل شده است.

مبحث توابع تک ارز هم اکنون نیز دستمایه ی بسیاری از نوشتجات طرفداران این نظریه است و با وجود تحقق حدس بیبرباخ، همچنان در زیر رده های مختلف مورد بحث بوده و گهگاه تعامل بین این زیررده ها را نیز مورد تحقیق و بررسی قرار می دهند. واضح است که بسیاری از خواص زیر رده های توابع تک ارز روی قرص واحد را می توان به توابع چندارزی و نیز دامنه های همبند چندگانه گسترش داد و از این لحاظ، یافته های مورد بررسی در توابع

تک ارز ارزشمندتر خواهند شد.
ما در ابتدا تعاریف شناخته شده و مورد نیازمان را در رده ی توابع تک ارز بازگو کرده و خواص لازم که در ادامه کار سرلوحه کارمان خواهد بود را از مقابل نظر خواهیم گذراند.

۱.۱ رده‌ی S

در این متن $\mathbb{C}$ عبارتست از صفحه مختلط، $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ قرص یکه باز[1] و مرز آن که با $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ نمایش داده می شود. هر مجموعه باز همبند را که دامنه نامیده می شود با D یا Ω مشخص کرده و $\mathbf{H}(\Omega)$ نمایش مجموعه تمام توابع تحلیلی[2] تعریف شده بر دامنه Ω است. تابع

$$\begin{cases} f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \end{cases}$$

روی D تحلیلی است اگر f پیوسته بوده و u و v در معادلات کوشی ریمان[3] صدق کنند یعنی $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$. این مطلب معادل با آن است که $f \in C^1(D)$ اگر توابع حقیقی $u = \mathbf{Re}\, f$ و $v = \mathbf{Im} f$ از متغیرهای حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی D باشند. یک نگاشت تحلیلی را همدیس[4] گوئیم اگر مشتق آن هرگز صفر نشود. نگاشتهای همدیس وقتی که نقطه ی تقاطع دو منحنی را از دامنه انتقال می دهند، زاویه بین دو منحنی را بهمان اندازه به برد انتقال داده و جهت مثلثاتی آن را نیز به همان صورت حفظ می کنند، از اینرو حافظ زاویه و جهتند. قضیه زیر وجود چنین نگاشتهای همدیسی را بین دو دامنه تضمین می کند.

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه نگاشت ریمان[5] [۷۷]) گیریم G زیرمجموعه سره از صفحه مختلط باشد که همبند ساده[6] است و $z_0 \in G$. سپس نگاشت تک ارز[7] یکتای $\phi : G \to \mathbb{D}$ وجود دارد که $\phi(z_0) = 0$ و $\phi'(z_0) > 0$.

چنین نگاشتی که در قضیه صادق است نگاشت ریمان[8] نامیده می شود. باید ذکر کنیم که منظور از توابع تک ارز در این نوشتار، توابعی تحلیلی و یک به یک بوده مگر در غیر این موارد تصریح شود. پس قضیه نگاشت ریمان وجود نگاشتی تک ارز بین هر دو دامنه همبند ساده

[1] Open Unit Disk
[2] Analytic (Holomorphic) functions
[3] Cauchy-Riemann equations
[4] Conformal
[5] Riemann Mapping Theorem
[6] Simply-Connected
[7] Univalent, Schlicht, One-to-one
[8] Riemann map

را تضمین می کند. چنین نگاشتهای تک ارزی دارای مشتق ناصفر بوده و در نتیجه همدیس اند. علاوه بر این می توان بحث توابع تک ارز را از هر دامنه به $\mathbb{D}$ منتقل کرد. گیریم $G \neq \mathbb{C}$ دامنه ای همبند ساده باشد. پس می توان تابع $F : G \to \mathbb{C}$ را با تابع $f := Fo\phi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ که $\phi : G \to \mathbb{D}$ نگاشت ریمان است، جایگزین نمود. بنابراین در مطالعه ی توابع تحلیلی تک ارز، توجه خود را به نگاشتهای روی $\mathbb{D}$ معطوف می کنیم.

گیریم $\mathcal{A}$ رده[۹] ی توابعی به شکل

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{۱.۱}$$

باشد که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی اند. بعلاوه $\mathcal{S}$ رده ی توابع $f \in \mathcal{A}$ است که روی $\mathbb{D}$ تک ارز ند. رده ی $\mathcal{S}$ خانوادهای فشرده از توابع است که تحت مزدوج سازی[۱۰]، چرخش[۱۱]، انبساط[۱۲]، خودریختی قرص[۱۳][۱۴] و انتقال برد[۱۶] [۳۱] حفظ می شود. یک مثال از چنین توابعی در رده $\mathcal{S}$ تابع کوبه[۱۷]

$$k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots \tag{۲.۱}$$

است. این تابع قرص $\mathbb{D}$ را به تمام صفحه منهای قسمتی از محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا $-\infty$ می نگارد (شکل ۱.۱). این تابع نقش نگاشت اکستریمال[۱۸] را برای رده ی $\mathcal{S}$ بازی می کند. قضیه یک_چهارم کوبه[۱۹] چنین بیان می کند [۳۱]:

قضیه ۲.۱.۱. تصویر $\mathbb{D}$ تحت هر تابع تک ارز $f \in \mathcal{S}$ شامل قرصی به شعاع $\frac{1}{4}$ است.

در ۱۹۱۶ بیبرباخ[۲۰] قضیه ای ثابت کرد که نشان می داد ضریب دوم a_2 در بسط هر تابع $f \in \mathcal{S}$ می بایست حداکثر ۲ باشد یعنی $|a_2| \leqslant 2$ و حدس زد که برای هر تابع تک ارز $f \in \mathcal{S}$ می

---

[۹] Class

[۱۰] Conjugation

[۱۱] Rotation

[۱۲] Dilation

[۱۳] Disc Automorphism

[۱۴] برای تابع تحلیلی موضعا تک ارز $f \in \mathcal{A}$، خودریختی قرص تابع $\Lambda_f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ است که

$$\Lambda_f(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$$

برای $z_0 \in \mathbb{D}$. خانواده $\mathcal{F}$ پایای خطی[۱۵] اگر برای هر $f \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $\Lambda_f(z) \in \mathcal{F}$.

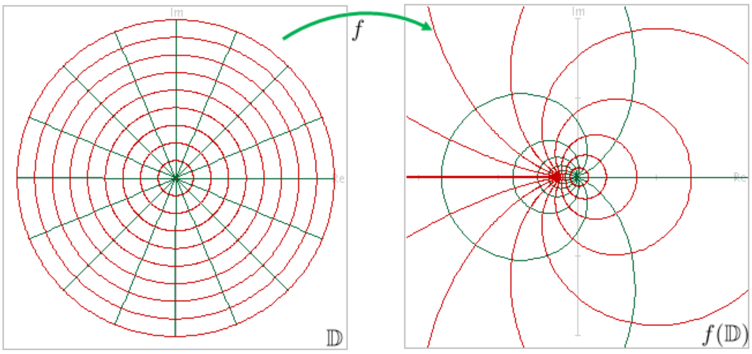
[۱۶] Range Transformation

[۱۷] Paul Koebe (1882-1945)

[۱۸] Extremal

[۱۹] Koebe

[۲۰] Bieberbach



شکل ۱.۱: تصویر $\mathbb{D}$ تحت تابع کوبه.

بایست $|a_n| \leqslant n$ برای هر $n \geqslant ۲$ی برقرار باشد. طی قرن بیستم این حدس مبنای مطالعات زیادی در رده ی توابع تک ارز شد و خواص بسیاری از این رده را آشکار نمود. همچنین بحث بر سر کران ضرایب و اثبات حدس بیبرباخ همچنان ادامه یافت و کران ضرایب نخست، چنین بدست آمد:

۱۹۱۶ $|a_۲| \leqslant ۲$ بیبرباخ [۱۲].

۱۹۲۳ $|a_۳| \leqslant ۳$ لاونر[۲۱] [۵۶].

۱۹۵۵ $|a_۴| \leqslant ۴$ قارابادیان[۲۲] و شیفر[۲۳] [۳۸].

۱۹۷۲ $|a_۵| \leqslant ۵$ پترسون[۲۴] و شیفر[۲۵] [۷۴].

۱۹۶۸ $|a_۶| \leqslant ۶$ پترسون[۲۶] [۷۳] و مستقلا اوزاوا[۲۷] [۷۲] در ۱۹۷۲.

بهترین نتیجه شناخته شده تا آن موقع از آن هوروویتس[۲۸] بود [۴۵] که ثابت کرد $|a_n| < ۱/۰۶۵۷n$. بالاخره در ۱۹۸۵ حدس بیبرباخ توسط دوبرانژ[۲۹] به اثبات رسید:

قضیه ۳.۱.۱. (دوبرانژ [۲۶]) برای هر $f \in \mathcal{S}$، ضرایب در رابطه $|a_n| \leqslant n$ برای هر n صدق می کنند.

برای نیل به این مقصود دوبرانژ، حدس میلین[۳۰] روی ضرایب لگاریتمی را ثابت کرد که حدس روبرتسون[۳۱] روی توابع تک ارز فرد را نتیجه می دهد و آن نیز نتیجه اش حدس روگوسینسکی[۳۲] روی توابع مطیع[۳۳] است که آن هم حدس بیبرباخ را نتیجه می دهد (ر.ک. [۳۱]، ص۱۹۷).

حدس میلین بیانگر آنست که ضرایب لگاریتمی γ_n از یک تابع تک ارز به شکل (۱.۱) که بصورت

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \gamma_n z^n \qquad (۳.۱)$$

[۲۸] Horowitz

[۲۹] Louis de Branges

[۳۰] Milin conjecture (1971)

[۳۱] Robertson conjecture (1936)

[۳۲] Rogosinski conjecture (1943)

[۳۳] Subordinate Functions

تعریف می شود در نابرابری

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\leqslant 0\ ,\ n=1,2,\cdots \tag{4.1}$$

صدق می کنند. واضح است که ضرایب لگاریتمی تابع کوبه $\gamma_n=\frac{1}{n}$ بوده و در حدس میلین صادقند. حدس روبرتسون نیز می گوید که ضرایب هر تابع تک ارز فرد نظیر $h(z)=z+c_3z^3+c_5z^5+\cdots$ در نابرابری

$$1+|c_3|^2+\cdots+|c_{2n-1}|^2\leqslant n$$

صدق می کنند [۵]. حدس روگوسینسکی در لم ۱.۲.۱ خواهد آمد.

۲.۱ تابعیت

گوئیم تابع f مطیع[۳۴] تابع g است و می نویسیم $f\prec g$ یا $f(z)\prec g(z)$ اگر تابع تحلیلی ω روی $\mathbb{D}$ چنان موجود باشد که $\omega(0)=0$، $|\omega(z)|<1$ و $f(z)=g(\omega(z))$ برای $z\in\mathbb{D}$. هنگامی که g تک ارز باشد، f مطیع تابع g است اگر $f(0)=g(0)$ و $f(\mathbb{D})\subset g(\mathbb{D})$.

لم ۱.۲.۱. (حدس روگوسینسکی [۳۱]) اگر $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و بازای $f\in\mathcal{S}$ ی، $f\prec g$ آنگاه $|b_n|\leqslant n$ که $n=1,2,\cdots$.

معمولا حدس روگوسینسکی را بعنوان تعمیم حدس بیبرباخ می شناسند. می توان ثابت کرد که اگر $f,g\in\mathcal{S}$ و $f\prec g$ سپس $f=g$.

۳.۱ توابع ستاره‌گون

تابع $f(z)$ را ستاره‌گون[۳۵] نامیم اگر بردش نسبت به مبداء ستاره‌گون باشد. از نظر هندسی، هر نقطه از برد $f(z)$ را می توان با پاره خطی به مبداء وصل نمود چنانکه تمام پاره خط در برد واقع شود [۷۷]. بعبارتی $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ تابعی غیرنزولی از θ است یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\}\geqslant 0$$

زیررده ی تمام توابع ستاره‌گون در $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^*$ نشان می دهیم. بعلاوه $f(z)\in\mathcal{S}^*$ اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>0$ و این نیز اگر و فقط اگر $z\frac{f'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+z}{1-z}$. همچنین تابعی با خاصیت

[۳۴] Subordinate
[۳۵] Starlike

$\mathbf{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ روی $\mathbb{D}$ تک ارز خواهد شد. این موضوع نشان می دهد که

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{1-z}$$

یا $\log f(z) \prec \log \frac{z}{(1-z)^2}$ و در نتیجه نگاشت $k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ نقش اکستریمال را برای ردهی S^* بازی می کند، و بنابراین $|a_n| \leqslant n$ برای هر $n \geqslant 2$ی برقرار است.

بوضوح حاصلضرب دو تابع ستاره‌گون تابعی است ستاره‌گون زیرا اگر $G(z) = f(z)g(z)$ پس $\log G(z) = \log f(z) + \log g(z)$ که با مشتقگیری $z\frac{G'(z)}{G(z)} = z\frac{f'(z)}{f(z)} + z\frac{g'(z)}{g(z)}$ برای $z \in \mathbb{D}$ و نتیجه حاصل می شود.

ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای نگاشتهای همدیس است یعنی اگر f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک ارز با $f(0) = 0$ بوده و $\mathbb{D}$ را به ناحیه ای ستاره‌گون (نسبت به مبداء) بنگارد، آنگاه تصویر هر زیرقرص $|z| < r < 1$ نیز نسبت به مبداء ستاره‌گون خواهد بود.

فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ روی $\mathbb{D}$ ستاره‌گون باشد، سپس یک اندازه احتمالاتی یکتای μ هست که روی زیرمجموعه های بورل دایره یکه $\mathbb{T}$ تعریف می شود چنانکه

$$F(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \int \frac{1+\overline{\gamma}z}{1-\overline{\gamma}z} d\mu(\gamma) \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

این نتیجه می دهد که

$$F(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int \overline{\gamma}^n d\mu(\gamma)$$

اکنون با تعریف دنباله $c_n = 2\int \overline{\gamma}^n d\mu(\gamma)$ می یابیم

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

و

$$f(z) = z\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_n z^n\right)$$

دنباله های a_n و c_n با رابطه ی $(n+1)a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k}$ با هم مرتبطند که $n = 1, 2, 3, \cdots$ و $a_1 = 1$.

لم ۱.۳.۱. (بازیلویچ [۱۱]) اگر $f(z)$ ستاره‌گون بوده $\gamma > 0$ آنگاه

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\gamma} \prec \frac{|f'(0)|^{\gamma}}{(1-z)^{2\gamma}}$$

روبرتسون[۳۶] (۱۹۳۶) زیررده ای از S را معرفی نمود:

[۳۶] Robertson

تعریف ۱.۳.۱. (روبرتسون [۸۵]) تابع تحلیلی $f(z)$ ستاره‌گون از مرتبه α نامیده می شود اگر

$$\mathbf{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha \tag{۵.۱}$$

برای $z\in\mathbb{D}$ که $0\leqslant\alpha<1$ و مجموعه چنین توابعی را با $S^*(\alpha)$ می نمایانند.

در این تعریف مقدار پارامتر α محدود به $0\leqslant\alpha<1$ می شود زیرا ۵.۱ بازای $\alpha<0$ لزوما در $\mathbb{D}$ تک ارز نخواهد بود. مارکز[۳۷]، روبرتسون و اسکات[۳۸] (۱۹۶۱) حاصلضرب توابع ستاره‌گون از مرتبه عددی مثبت را به شکل زیر مشخصه سازی کردند:

لم ۲.۳.۱. [۵۹] گیریم $f_n(z)$ برای $n=1,2,\cdots,N$ توابع ستاره‌گونی حداقل از مرتبه $1-d_n\geqslant 0$ باشند که $d_n\geqslant 0$ و فرض کنید $s_N=1-\sum_{n=1}^{N}d_n\geqslant 0$. آنگاه حاصلضرب

$$F_N(z)=z\prod_{n=1}^{N}\frac{f_n(z)}{z} \tag{۶.۱}$$

تابعی ستاره‌گون حداقل از مرتبه s_N است.

لم ۳.۳.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z)\in S$ و $F(z)=z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}$ به شرط $F'(0)=1$ باشدآنگاه بازای $\alpha\geqslant 1$، $F(z)$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و ستاره‌گون است اگر و فقط اگر $f(z)$ ستاره‌گون حداقل از مرتبه $1-\frac{1}{\alpha}$ باشد.

این لم بازای $0\leqslant\alpha<1$ ما را به نتیجه مشابه $f(z)=z\left(\frac{F(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ می رساند. لم زیر شرطی کافی را برای ستاره‌گونی برحسب ضرایب ارائه می کند:

لم ۴.۳.۱. [۵۹، ۹۷] تابع $f\in\mathcal{A}$ ستاره‌گون از مرتبه حداقل α است ($0\leqslant\alpha<1$)، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۷.۱}$$

همچنین در صورتی که برای هر nی $a_n\leqslant 0$ باشد سپس (۷.۱) شرط لازم برای ستاره‌گون بودن $f(z)$ از مرتبه حداقل α هم خواهد بود.

مثال ۱.۳.۱. [۵۹] تابع $f_n(z)=z-\frac{z^3}{4n^2}$ بنابر لم ۴.۳.۱ ستاره‌گون از مرتبه

$$a_n=1-d_n=1-\frac{2}{4n^2-1}$$

است. چون $s_N=0$ سپس لم ۲.۳.۱ نشان می دهد که

$$\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{4n^2}\right) \tag{۸.۱}$$

در $\mathbb{D}$ تک ارز و ستاره‌گون است.

مثال ۲.۳.۱. [۵۹] تابع $\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ که $\Gamma(z)$ تابع گامای اویلر[۳۹] است

[۳۷] Markes
[۳۸] Scott
[۳۹] Euler gamma function

بازای $|z| < r_\circ$ تک ارز و ستاره‌گون است که $r_\circ$ اندازه بزرگترین صفر منفی $\Gamma'(z)$ از $= -\circ/\text{۵}\circ \cdots$ است و این نتیجه دقیق است.
باید خاطر نشان کنیم که شعاع ستاره‌گونی[۴۰] از $\tanh \frac{\pi}{\text{۴}} \approx \circ/\text{۶۵۵} \cdots$ کمتر است. زیر رده ی دیگری از رده توابع ستاره‌گون توسط استانکویچ[۴۱] (۱۹۶۶) و برنان[۴۲] (۱۹۶۹) مستقلا معرفی شد:

تعریف ۲.۳.۱. [۱۱۰، ۱۵] تابع تحلیلی $f(z)$ قویا ستاره‌گون[۴۳] از مرتبه β خوانیم $(\circ < \beta \leqslant \text{۱})$ اگر در نابرابری

$$\left|\arg\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\right| < \beta\frac{\pi}{\text{۲}}$$

برای $z \in \mathbb{D}$ صدق کند و رده چنین توابعی با $\mathcal{S}^*[\beta]$ نشان داده می شود.

۴.۱ تحدب

تابع تحلیلی $f(z)$ را محدب[۴۴] گوئیم اگر برد آن مجموعه ای محدب باشد. از نظر هندسی می توان برد $f(\mathbb{D})$ را محدب نامید بدین معنی که $\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\}$ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

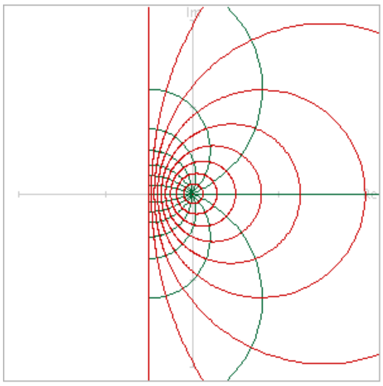
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geqslant \circ$$

رده تمام توابع محدب در $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{K}$ نشان می دهیم [۷۷]. این رده بوده و همچنین $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و فقط اگر $\circ < \mathbf{Re}\left\{\text{۱} + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}$ و این اگر و فقط اگر $\text{۱} + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \frac{\text{۱}+z}{\text{۱}-z}$. واضح است که هر تابع محدب، ستاره‌گون است. تابع اکستریمال برای رده ی $\mathcal{K}$ عبارتست از $\ell(z) = \frac{z}{\text{۱}-z}$ (شکل ۲.۱).
تحدب خاصیتی ارثی در نگاشتهای همدیس دارد. پس اگر f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک ارز بوده و قرص را به دامنه ای محدب بنگارد، سپس تصویر هر زیرقرص $|z| = r < \text{۱}$ نیز محدب خواهد بود. بنابراین می توانیم بگوئیم که برای هر $r < \text{۱}$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\} \geqslant \circ$$

که $\circ \leqslant \theta \leqslant \text{۲}\pi$. شعاع تحدب[۴۵] کلاس $\mathcal{S}$ برابر $\text{۲} - \sqrt{\text{۳}} \approx \circ/\text{۲۶۷} \cdots$ است.
قضیه ای از الکساندر[۴۶] (۱۹۱۵) رابطه ی میان رده های $\mathcal{S}^*$ و $\mathcal{K}$ را بخوبی نشان می دهد:

[۴۰] The radius of starlikeness
[۴۱] Stankiewicz
[۴۲] Brannan
[۴۳] Strongly Starlike
[۴۴] Convex
[۴۵] Radius of Convexity
[۴۶] Alexander



شکل ۲.۱: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت محدب $f=\dfrac{z}{1-z}$.

قضیه ۱.۴.۱. **(قضیه الکساندر)** گیریم f در $\mathbb{D}$ تحلیلی با نرمالسازی $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ باشد. آنگاه $f\in\mathcal{K}$ اگر و فقط اگر $zf'(z)\in\mathcal{S}^*$.

یکی از نتایج مفید این قضیه، روابط زیر بین ستاره‌گونی و تحدب است. چنانچه اگر $f\in\mathcal{S}^*$ باشد سپس $g(z)=\int_0^z \frac{f(z)}{z}dz$ محدب است. علاوه بر این

قضیه ۲.۴.۱. (روبرتسون) اگر $f\in\mathcal{S}^*$ سپس تابع $S(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt$ در $\mathcal{S}^*$ است.

لم ۱.۴.۱. (سیلورمن [47] [۹۷]) فرض کنید $f(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و به شکل (۱.۱) باشد. اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\leqslant 1$ سپس $f\in\mathcal{K}$.

زیررده ی $\mathcal{K}(\alpha)$ از $\mathcal{K}$ شامل تمام توابع محدب از مرتبه α توسط روبرتسون [۸۵] معرفی شد. برای $0\leqslant\alpha<1$ تابع $f(z)$ در $\mathcal{A}$ را محدب از مرتبه α [48] نامیم اگر

$$\mathbf{Re}\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha \tag{۹.۱}$$

بازای $z\in\mathbb{D}$. بدیهی است که برای $0\leqslant\alpha<\beta<1$

$$\mathcal{K}(\beta)\subset\mathcal{K}(\alpha)\subset\mathcal{K}\subset\mathcal{S}^*\subset\mathcal{S} \tag{۱۰.۱}$$

تابع اکستریمال رده ی $\mathcal{K}(\alpha)$ عبارتست از

$$k_\alpha(z)=\begin{cases}\dfrac{(1-z)^{2\alpha-1}-1}{1-2\alpha} & ;\quad \alpha\neq\dfrac{1}{2},\\ -\log(1-z) & ;\quad \alpha=\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{۱۱.۱}$$

که $\mathbb{D}$ را به طور تک ارز به نیم صفحه $\mathbf{Re}\{w\}>\alpha$ می نگارد (سوگاوا [49] [۱۱۲]). جالب است بدانیم که $1+z\dfrac{k''_\alpha(z)}{k'_\alpha(z)}=\dfrac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$ بوده و دارای ویژگی های $k_\alpha(0)=0$ و $k'_\alpha(0)=1$ است.

[47] Silverman
[48] Convex of Order α
[49] Sugawa

بوضوح $k_\circ(z)=\dfrac{z}{1-z}$ بوده و این نگاشت $\mathbb{D}$ را به طور تک ارز به نیم صفحه ی $\mathbf{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ نگاشته و $\dfrac{k_\circ(z)}{z}=\dfrac{1}{1-z}$ نیز $\mathbb{D}$ را به طور تک ارز به نیم صفحه $\mathbf{Re}\{w\}>\frac{1}{2}$ می نگارد. طبق قضیه الکساندر (۱.۴.۱) می بینیم که:

$$f(z)\in\mathcal{K}(\alpha)\Longleftrightarrow zf'(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha) \tag{۱۲.۱}$$

بعلاوه

لم ۲.۴.۱. (سیم [50] و کوان [51] [۹۸]) اگر $f(z)\in\mathcal{K}(\alpha)$ سپس $\mathbf{Re}\sqrt{f'(z)}>\dfrac{1}{2-\alpha}$. و بیشتر اینکه

لم ۳.۴.۱. (سیم و کوان [۹۸]) اگر $\mathbf{Re}\left\{1+z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right\}<\beta$ باشد که $1<\beta<2$ آنگاه $\mathbf{Re}\sqrt{f'(z)}<\dfrac{1}{2-\beta}$.

اما آیا ارتباطی میان رده های $\mathcal{S}^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}(\alpha)$ وجود دارد؟. نخست اینکه تابع محدب نرمالشده در قرص واحد ستاره‌گون حداقل از مرتبه $\frac{1}{2}$ است [۶۰] و در ادامه نتیجه ای از مک‌گرگور [52] بیان می کند که

لم ۴.۴.۱. [۱۱۶] گیریم $0\leqslant\alpha<1$ و $f\in\mathcal{K}(\alpha)$، سپس $f(z)\in\mathcal{S}^*(\delta(\alpha))$ است که

$$\delta(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1-2\alpha}{2^{2-2\alpha}-2} & ;\quad \alpha\neq\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{2\log 2} & ;\quad \alpha=\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{۱۳.۱}$$

لم ۵.۴.۱. [۹۷] تابع $f\in\mathcal{A}$ را محدب از مرتبه α با شرط $0\leqslant\alpha<1$ گوئیم اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۱۴.۱}$$

لم ۶.۴.۱. (مارکس [53] و استروهکر [54] ۱۹۳۳) برای تابع محدب نرمالشده f روی قرص واحد $\mathbb{D}$ داریم $\dfrac{1}{1-z}\prec\dfrac{f(z)}{z}$ که $z\in\mathbb{D}$.

[50] Sim
[51] Kwon
[52] MacGregor
[53] Marx
[54] Strohhacker

لم ۷.۴.۱. (بریکمن[۵۵]، هالنبک[۵۶]، مک گرگور و ویلکن[۵۷] ۱۹۷۳) فرض کنید $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ آنگاه برای $f \in \mathcal{K}(\alpha)$ داریم $\frac{k_\alpha(z)}{z} \prec \frac{f(z)}{z}$ که $z \in \mathbb{D}$، همچنین $\frac{k_\alpha(r)}{r} \leqslant \mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} \leqslant \frac{k_\alpha(-r)}{-r}$ بازای $|z| = r < 1$.

لم ۸.۴.۱. (سوگاوا و وانگ[۵۸] ۲۰۱۵ [۱۱۲]) فرض بگیرید که $0 < \alpha < 1$ سپس برای $f \in \mathcal{K}(\alpha)$ داریم $\frac{k_\alpha(z)}{z} \prec \frac{f(z)}{z}$ که $z \in \mathbb{D}$.

لم ۹.۴.۱. (استیر[۵۹] و رایت[۶۰] ۱۹۷۳) فرض کنید $f, g \in \mathcal{K}$ بوده و $\frac{\pi}{4} \geqslant |\mathbf{Im}\frac{f(z)}{z}|$ و نیز $\frac{\pi}{4} \geqslant |\mathbf{Im}\frac{g(z)}{z}|$ روی $\mathbb{D}$ برقرار باشد آنگاه $\frac{f+g}{2} \in \mathcal{S}^*$.

لم ۱۰.۴.۱. (هالنبک و روشه ویه[۶۱] ۱۹۷۵ [۴۳]) برای $f, g \in \mathcal{K}$ با شرط $f''(0) = g''(0) = 0$ داریم $\frac{f+g}{2} \in \mathcal{S}^*$.

در واقع آنها ثابت کردند که برای $f \in \mathcal{K}$ با شرط $f''(0) = 0$ که در $\frac{\pi}{4} \geqslant |\mathbf{Im}\frac{f(z)}{z}|$ صدق می کند داریم

$$\frac{f(z)}{z} \prec H_1(z) := \frac{1}{2\sqrt{z}} \log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}. \tag{۱۵.۱}$$

لم ۱۱.۴.۱. (سوگاوا و وانگ ۲۰۱۵ [۱۱۲]) برای $f, g \in \mathcal{K}(\frac{3}{5})$ داریم $\frac{f+g}{2} \in \mathcal{S}^*$.

لم ۱۲.۴.۱. [۵۹] اگر $f, g \in \mathcal{K}$ آنگاه $\frac{fg}{z} \in \mathcal{S}^*$. این حاصلضرب ستاره‌گون از هیچ مرتبه مثبتی نیست زیرا که $f(z) = g(z) = \frac{z}{1+z}$.

تعریف ۱.۴.۱. تابع تحلیلی $f(z)$ را قویا محدب از مرتبه β[۶۲] $(0 < \beta \leqslant 1)$ گوئیم اگر در نابرابری زیر صدق کند

$$\left|\arg\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\right| < \beta\frac{\pi}{2}$$

که $z \in \mathbb{D}$ و مجموعه ی چنین توابعی را با $\mathcal{K}^*[\beta]$ نشان می دهیم.

داریم

$$f(z) \in \mathcal{K}[\beta] \Longleftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}^*[\beta] \tag{۱۶.۱}$$

[۵۵] Brickman
[۵۶] Hallenbeck
[۵۷] Wilken
[۵۸] Wang
[۵۹] Styer
[۶۰] Wright
[۶۱] Ruscheweyh
[۶۲] Strongly Convex of Order β

نانوکاوا[۶۳] (۱۹۹۳) ثابت کرد که برای $0<\beta<1$، اگر $f(z)\in\mathcal{K}[\delta(\beta)]$ آنگاه $f(z)\in\mathcal{S}^*[\beta]$ که در آن

$$\delta(\beta)=\beta+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{\beta n(\beta)\sin\frac{(1-\beta)\pi}{2}}{m(\beta)+\beta n(\beta)\cos\frac{(1-\beta)\pi}{2}}$$

جائی که $m(\beta)=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{2}}$ و $n(\beta)=(1-\beta)^{\frac{\beta-1}{2}}$.

لم ۱.۴.۱۳. (اومی زاوا[۶۴] [۱۱۵]) فرض کنید $f\in\mathcal{A}$ و $f'(z)\neq 0$ روی $|z|=1$ باشد. اگر رابطه‌ی $\int_0^{2\pi}\left|\mathbf{Re}\left\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\right|d\theta<4\pi$ بازای $|z|=1$ برقرار باشد آنگاه $f(z)$ در یک جهت محدب بوده و در نتیجه $f(z)$ در $|z|\leqslant 1$ تک ارز خواهد شد.

بدین طریق تحدب در یک جهت نیز مطرح گردید و تعریف زیر مفید واقع شد:

تعریف ۱.۴.۲. دامنه D را محدب در جهت α[۶۵] نامیم $(0\leqslant\alpha<\pi)$ اگر اشتراک آن با هر خطی که از مبداء و نقطه ی $e^{i\alpha}$ می گذرد تهی یا یک بازه باشد.

بدین تعریف، تابع f را در D محدب در جهت α گوئیم اگر $f(\mathbb{D})$ محدب در جهت α باشد.

در مفهومی عمومی تر گوئیم f محدب در یک جهت است اگر αی باشد چنانکه f محدب در جهت α شود. گوئیم دامنه $D\subset\mathbb{C}$ محدب در جهت افقی[۶۶] (CHD) است، اگر طبق تعریف فوق اشتراک آن با هر خط افقی، تهی یا همبند باشد.

لم ۱.۴.۱۴. (پومرنکه[۶۷] [۷۶]) فرض کنید f در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده، $f(0)=0$ و $f'(0)\neq 0$ باشد و گیریم

$$\phi(z)=\frac{z}{(1+ze^{i\theta})(1+ze^{-i\theta})}$$

که $\theta\in\mathbb{R}$. اگر

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{\phi(z)}\right\}>0\quad,\quad z\in\mathbb{D}$$

سپس f محدب در جهت افقی است.

لواندوفسکی[۶۸]، میلر[۶۹] و سوتکویچ[۷۰] (۱۹۷۴) [۵۳] رده ی توابع γـستاره‌گون را معرفی نمودند که با نماد $\mathcal{G}(1,\gamma)$ نمایش داده شده و اعضای آن در شرط زیر صادقند

$$\mathbf{Re}\left\{\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right\}>0\quad,\quad z\in\mathbb{D}$$

[۶۳] Nunokawa
[۶۴] Umezawa
[۶۵] Convex in the Direction of α
[۶۶] Convex in the horizontal direction
[۶۷] Pommerenke
[۶۸] Lewandowski
[۶۹] Miller
[۷۰] Złotkiewicz

نانوکاوا و سوکول[۷۱] [۷۱] این رده را به $\mathcal{G}(\alpha,\gamma)$ گسترش داده و آن را توابع γـ قویا ستاره‌گون از مرتبه α[۷۲] نامیدند که شامل توابع $f\in\mathcal{A}$ با خاصیت

$$\left|\arg\left\{\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right\}\right|<\alpha\frac{\pi}{2}\quad,\quad z\in\mathbb{D}\tag{۱۷.۱}$$

هستند که $0<\alpha\leqslant 1$، $\gamma>0$ و $f(z)$ با قید $f(z)f'(z)\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\neq 0$ برای $z\in\mathbb{D}-\{0\}$ انتخاب می شود. نکته اینکه $\mathcal{G}(0,\beta)\subset\mathcal{S}^*[\beta]$ و

قضیه ۳.۴.۱. گیریم $0<\alpha\leqslant 1$، $\gamma>0$ و $f\in\mathcal{A}$ بشکل (۱.۱) باشد که در (۱۷.۱) صدق می کند. اگر معادله ی نسبت به x :

$$x+\frac{2\gamma}{\pi}\tan^{-1}\frac{xn(x)\sin\frac{(1-x)\pi}{2}}{m(x)+xn(x)\cos\frac{(1-x)\pi}{2}}=\alpha\tag{۱۸.۱}$$

با $m(x)=(1+x)^{\frac{1+x}{2}}$ و $n(x)=(1-x)^{\frac{x-1}{2}}$، دارای جواب $\beta\in(0,1]$ باشد آنگاه $f\in\mathcal{G}(\alpha,\gamma)$.

قضیه ۴.۴.۱. برای $0<\alpha\leqslant 1$، $0<\gamma\leqslant 1$ و $f\in\mathcal{A}$ بفرم (۱.۱) که در (۱۷.۱) صدق می کند. اگر معادله (۱۸.۱) دارای جواب $0<\alpha_0\leqslant 1$ باشد، آنگاه $f\in\mathcal{K}[\frac{(1-\gamma)\alpha_0+\alpha}{\gamma}]$.

نتیجه ۱.۴.۱. فرض کنید که معادله (۱۸.۱) دارای جواب $0<\alpha_0<\alpha\leqslant 1$ است. اگر $0<\delta<\gamma$ سپس $\mathcal{G}(\alpha,\gamma)\subset\mathcal{G}(\alpha,\delta)$.

قضیه ۵.۴.۱. فرض بگیرید $0<\alpha\leqslant 1$، $\gamma<0$ و $f\in\mathcal{A}$ به شکل (۱.۱) است و در (۱۷.۱) صدق می کند. اگر $\beta=\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}$ آنگاه $f\in\mathcal{S}^*[\beta]$.

سیم و کوان [۹۸] رده ی زیر را معرفی کردند (۲۰۱۳):

تعریف ۳.۴.۱. برای اعداد حقیقی α و β با شرط $0\leqslant\alpha<1<\beta$، تابع $f(z)\in\mathcal{A}$ متعلق به رده ی $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ است اگر $f(z)$ در نابرابری زیر صدق نماید

$$\alpha<\mathbf{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)<\beta\quad,\qquad z\in\mathbb{D}\tag{۱۹.۱}$$

بوضوح $\mathcal{K}(\alpha,\beta)\subset\mathcal{K}$ بوده و (۲۳.۱) این شروط معادل را در اختیار ما قرار می دهد:

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\quad,\quad z\in\mathbb{D},\ 0\leqslant\alpha<1\tag{۲۰.۱}$$

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\quad,\quad z\in\mathbb{D},\ \beta>1\tag{۲۱.۱}$$

---
[۷۱] Sokol

[۷۲] γ-Strongly Starlike Functions of Order α

در این مورد آنها از تابع

$$p(z) = 1 + i\frac{\beta - \alpha}{\pi} \log\left(\frac{1 - e^{2\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} z}{1 - z}\right) \quad , \quad z \in \mathbb{D} \tag{۲۲.۱}$$

استفاده کردند که $\mathbb{D}$ را به نوار محدب $\alpha < \mathbf{Re}\, w < \beta$ می نگارد و توسط کوروکی [۷۳] و اووا [۷۴] [۵۲] معرفی شد، بنابراین

لم ۱.۴.۱۵. بازای اعداد حقیقی α و β با محدودیت $0 \leqslant \alpha < 1 < \beta$، تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ در رده ی $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$ قرار می گیرد اگر و فقط اگر

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec 1 + i\frac{\beta - \alpha}{\pi} \log\left(\frac{1 - e^{2\pi i \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}} z}{1 - z}\right) \quad , \quad z \in \mathbb{D} \tag{۲۳.۱}$$

و برآورد کران ضرایب را برای $f \in \mathcal{K}(\alpha, \beta)$ بشکل زیر بدست می دهد

$$|a_n| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}|B_1| & ; \quad n = 2, \\ \frac{|B_1|}{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{|B_1|}{k}\right) & ; \quad n = 3, 4, \cdots . \end{cases} \tag{۲۴.۱}$$

که

$$|B_1| = \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi} \sin \frac{(1 - \alpha)\pi}{\beta - \alpha}.$$

لم ۱.۴.۱۶. برای اعداد حقیقی α و β به شرط $0 \leqslant \alpha < 1 < \beta < 2$، اگر $f \in \mathcal{K}(\alpha, \beta)$ سپس

$$\frac{1}{2 - \alpha} < \mathbf{Re}\sqrt{f'(z)} < \frac{1}{2 - \beta}$$

۱.۵ رده ی $\mathbb{P}$

این خانواده از توابع شامل تمام توابع مانند $\mathfrak{p}$ است که در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $\mathbf{Re}\,\mathfrak{p}(z) > 0$ و بعلاوه در قرص واحد بصورت $\mathfrak{p}(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ باشند. فرمول نمایش هرگلوت [۷۵] نشان می دهد که

لم ۱.۵.۱. $\mathfrak{p}(z) \in \mathbb{P}$ اگر و فقط اگر $p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} d\gamma(t)$ چنانکه γ صعودی بوده و $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$.

---

[۷۳] Kuroki

[۷۴] Owa

[۷۵] Herglotz

لم ۱.۵.۲. (کاراتئودوری[۷۶] ([۷۷]) اگر $\mathfrak{p}(z) \in \mathbb{P}$ سپس $|c_n| \leqslant ۲$ برای هر n.
تابع $\mathfrak{p}_\circ(z) = \dfrac{۱+z}{۱-z}$ تابع اکستریمال برای این رده بوده که تابعی محدب است. بدیهی است که

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow z\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathbb{P}$$

۶.۱ نزدیک به محدب

یک دامنه D را نزدیک به محدب[۷۷] گوئیم اگر مکمل D را بتوان با اجتماعی از نیمخط های نامتقاطع نشان داد. تابع تک ارز f در $\mathbb{D}$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر برد آن $f(\mathbb{D})$ دامنه ای نزدیک به محدب باشد. چنین تعریف هندسی، دارای صورت تحلیلی زیر است:

تعریف ۱.۶.۱. یک تابع به شکل (۱.۱) را نزدیک به محدب گوئیم اگر تابع ستاره‌گونی مانند g و تابع $h \in \mathbb{P}$ چنان وجود داشته باشند که

$$zf'(z) = g(z)h(z) \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

این رده توسط کاپلان[۷۸] (۱۹۵۲) معرفی شد و وی ثابت کرد که زیرمجموعه توابع تک ارز است. زیررده نزدیک به محدب از $\mathcal{S}$ را که شامل تمام توابع نزدیک به محدب تک ارز باشند را $\mathcal{C}$ می نمایانیم. بوضوح $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.
تعریف معادل دیگری بیان می کند که تابع $f(z)$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر تابع ستاره‌گون g باشد که

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > \circ \quad , \quad z \in \mathbb{D} \tag{۲۵.۱}$$

این معادل با آن است که بگوئیم تابع محدب تک ارز (و نه لزوما نرمالشده) hی باشد که

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > \circ \quad , \quad z \in \mathbb{D} \tag{۲۶.۱}$$

بنابر قضیه نوشیرو[۷۹]–ورشاوسکی[۸۰] ([۳۱]، ص ۴۷)، هر تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ با $\mathbf{Re}\, f'(z) > \circ$ تک ارز و نزدیک به محدب است. با انتخاب مناسبی از g در (۲۵.۱) می توان زیررده ای از توابع نزدیک محدب

$$\mathbf{Re}\left\{\prod_{j=۱}^{n}(z - e^{i\alpha_j})^{\sigma_j} f'(z)\right\} > \circ \tag{۲۷.۱}$$

[۷۶] Caratheodory
[۷۷] Close-to-Convex
[۷۸] Kaplan
[۷۹] Noshiro
[۸۰] Warschawski

را یافت که $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \cdots \le \alpha_n \le 2\pi$، $0 \le \sigma_j \le 1$ و $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \le 2$.

لم ۱.۶.۱. (کاپلان [۳۱]) گیریم f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و موضعا تک ارز باشد و در شرط

$$\mathbf{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > -\frac{1}{2}$$

بازای تمام $z \in \mathbb{D}$ صدق نماید، سپس f در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک به محدب است.

تعریف ۲.۶.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ را نزدیک به محدب از مرتبه α[۸۱] گوئیم $(0 \leqslant \alpha < 1)$ اگر بازای تابع محدب تک ارز h روی $\mathbb{D}$ (که این تابع لزوما نرمالشده نیست) داشته باشیم

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > \alpha \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

رده ی تمام چنین توابعی را با $\mathcal{C}(\alpha)$ نشان می دهیم.

۷.۱ خانواده بازیلویچ

این رده تعمیمی از رده توابع نزدیک به محدب بحساب می آید. با فرض اینکه $g(z)$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون بوده و $\mathfrak{p}$ تابعی تحلیلی در قرص واحد با شرط $\mathbf{Re}\ \mathfrak{p}(z) > 0$ باشد. سپس بازیلویچ[۸۲] نشان داد که تابع

$$f(z) = \left(\int_0^z \mathfrak{p}(\zeta)g(\zeta)^{\alpha}\zeta^{i\beta-1}d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \qquad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R} \qquad (۲۸.۱)$$

در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک ارز است [۱۱]. رده ای که از این توابع ایجاد می شود را با $B(\alpha+i\beta)$ نشان می دهیم. مسلما $B(1)$ رده ی توابع نزدیک به محدب نرمال شده است. در [۳۳] نشان داده شده که اگر $f(z) \in B(\alpha+i\beta)$ با $\mathfrak{p}(z) = 1$ آنگاه $f(z)$ باید در رابطه

$$\mathbf{Re}\left\{(\alpha - 1 + i\beta)z\frac{f'(z)}{f(z)} + (1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)})\right\} > 0 \qquad (۲۹.۱)$$

برای $z \in \mathbb{D}$ صدق کند. بالعکس اگر $f(z)$ در $\mathbb{D}$ با شروط $f(0) = 0$ و $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ برای $z \in \mathbb{D}$ تحلیلی بوده و در (۱.۲۹) صدق نماید سپس $f(z)$ را می توان به شکل (۱.۲۸) بازای $\mathfrak{p}(z) = 1$ نوشت.

[۸۱] Close-to-Convex of order α

[۸۲] Bazilevič

۸.۱ مارپیچ گون ها

تعمیمی از ستاره‌گونها وجود دارد که بعنوان مارپیچ‌گون[۸۳] شناخته می شوند و در ۱۹۳۳ توسط اسپاسک[۸۴] معرفی شد [۱۰۰]. یک مارپیچ لگاریتمی، یک منحنی در صفحه مختلط به شکل $w = w_\circ e^{-\lambda t}$ است که $t \in \mathbb{R}$ بوده، $w_\circ \neq \circ$ و λ ثابتهای مختلط با شرط $\mathbf{Re}\,\lambda \neq \circ$ هستند. بدون کاستن از کلیت می توان با فرض $\lambda = e^{i\alpha}$ که $\alpha \in [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ منحنی را αـ مارپیچ گون[۸۵] نامید.

دامنه D شامل مبداء را αـ مارپیچ گون نامیم اگر برای هر نقطه $w_\circ \neq \circ$ در D، قوس αـ مارپیچی از $w_\circ$ تا مبداء، کاملا در D قرار گیرد. یک دامنه αـ مارپیچ گون همبند ساده است.

تابع $f \in \mathcal{A}$ را αـ مارپیچ گون نامیم اگر بردش αـ مارپیچ گون باشد. تابع مارپیچ گون است اگر بازای یα αـ مارپیچ گون باشد. توابع $\circ$ـ مارپیچ گون بوضوع ستاره‌گونند. مارپیچ‌گونی[۸۶] را می توان با شرطی تحلیلی که تاحدودی همان تعمیم شرط ستاره‌گونی است مشخصه سازی نمود:

قضیه ۱.۸.۱ [۳۱] گیریم $f \in \mathcal{A}$ با $f'(z) \neq \circ$ بازای $z \in \mathbb{D} - \{\circ\}$ بوده و $\alpha \in [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ باشد. سپس f ، αـ مارپیچگون است اگر و تنها اگر

$$\mathbf{Re}\left\{e^{-i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > \circ \tag{۳۰.۱}$$

رده ی تمام توابع αـ ستاره‌گون در $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^{sp}(\alpha)$ نشان می دهیم. قضیه فوق بیان می کند که (۳۰.۱) شرطی کافی برای تک ارزی است. مشاهدات هندسی نشان می دهد که برای $\alpha \neq \circ$،یک تابع αـ مارپیچ گون لازم نیست تابع نزدیک به محدب[۸۷] باشد. یک مثال تابع

$$f(z) = \frac{z}{(۱-z)^{۲e^{i\alpha}\cos\alpha}} \in \mathcal{S}^{sp}(\alpha) \tag{۳۱.۱}$$

است که $\mathbb{D}$ را به مکمل قوسی از یک αـ مارپیچ می نگارد. این تابع همان نقشی را بازی می کند که تابع کوبه[۸۸] برای توابع ستاره‌گون بازی کرده و در واقع اکستریمال برای توابع αـ مارپیچ گون است. از طرفی تابع نزدیک به محدب لازم نیست مارپیچ گون باشد مانند تابع

$$f(z) = \frac{z - z^{۲}\cos\phi}{(۱-e^{i\phi}z)^{۲}}, \quad \cos\phi \neq \circ \tag{۳۲.۱}$$

[۸۳] Spirallike Class
[۸۴] Spacek
[۸۵] α-spiral
[۸۶] Spiralikeness
[۸۷] Close-to-convex function
[۸۸] Koebe function

که $\mathbb{D}$ را به مکمل یک نیمخط غیر شعاعی می نگارد. کولشرسترا[۸۹] [۵۰] زیررده ی $\mathcal{S}^{sp}(\alpha,\gamma)\subset$ $\mathcal{S}^{sp}(\alpha)$ از توابع γـ مارپیچ گون از مرتبه α را چنین معرفی کرد:

تعریف ۱.۸.۱ [۵۰] گیریم $f\in\mathcal{A}$ با شرط $f'(z)\neq 0$ بازای $z\in\mathbb{D}-\{0\}$ باشد. سپس $f\in\mathcal{S}^{sp}(\alpha,\gamma)$ اگر و تنها اگر اعداد حقیقی $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $0\leqslant\gamma<1$ چنان موجود باشند که

$$\mathbf{Re}\left\{e^{i\alpha}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>\gamma\cos\alpha\,,\quad z\in\mathbb{D} \tag{۳۳.۱}$$

۹.۱ رده ی $\mathcal{T}$

رده ی $\mathcal{T}$ شامل تمام اعضائی از $\mathcal{S}$ است که ضرایب ناصفر آن از دومی بعد منفی اند، یعنی تابعی تحلیلی و تک ارز f در $\mathcal{T}$ است اگر به شکل

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$$

باشد. متناظر با این مجموعه، $\mathcal{T}^*(\alpha)$ و $\mathcal{TK}(\alpha)$ زیر رده هائی از $\mathcal{T}$ خواهند بود که به ترتیب ستاره‌گون و محدب از مرتبه α هستند. بدین ترتیب $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*(0)$.

لم ۱.۹.۱ [۹۷] تابع $f=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ در $\mathcal{T}^*(\alpha)$ است اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leqslant 1$.

لم ۲.۹.۱ [۹۷] تابع $f=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\in\mathcal{A}$ در $\mathcal{T}^*(\alpha)$ است (که $0\leqslant\alpha<1$) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۳۴.۱}$$

لم ۳.۹.۱ [۹۷] اگر $f=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\in\mathcal{T}^*(\alpha)$ به شرط $0\leqslant\alpha<1$، آنگاه $|a_n|\leqslant\dfrac{1-\alpha}{n-\alpha}$ که تساوی تنها برای توابعی بشکل $f(z)=z-\dfrac{1-\alpha}{n-\alpha}z^n$ برقرار است.

لم ۴.۹.۱ [۹۷] تابع $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ در رده ی $\mathcal{TK}^*(\alpha)$ (که $0\leqslant\alpha<1$) قرار می گیرد اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|\leqslant 1 \tag{۳۵.۱}$$

[۸۹] Kulshrestha

لم ۵.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{T}^*(\alpha)$ (که $0 \leqslant \alpha < 1$) سپس

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r^2 \tag{۳۶.۱}$$

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \leqslant |f'(z)| \leqslant 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \tag{۳۷.۱}$$

و تساوی برای تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} z^2$ برقرار است که $z = \pm r$.

لم ۶.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{TK}^*(\alpha)$ (با $0 \leqslant \alpha < 1$) آنگاه

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \tag{۳۸.۱}$$

$$1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \leqslant |f'(z)| \leqslant 1 + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \tag{۳۹.۱}$$

تساوی بازای تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2$ برقرار می باشد که $z = \pm r$.

لم ۷.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{TK}^*(\alpha)$ سپس $f \in \mathcal{T}^*(\frac{2}{3-\alpha})$، نتیجه با تابع اکستریمال $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} z^2$ دقیق است.

لم ۸.۹.۱. [۹۷] اگر $f \in \mathcal{T}^*(\alpha)$ آنگاه شعاع تحدب[۹۰] تابع $f(z)$ عبارتست از

$$r_{con}(\alpha) = \inf_{n \geqslant 2} \left(\frac{n-\alpha}{n^2(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

این مقدار برای تابع اکستریمال $f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n$ بازای nـی دقیق است.

لم ۹.۹.۱. [۹۷] اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{T}$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leqslant 1$.

۱۰.۱ ستاره‌گون نسبت به نقاط متقارن

گیریم $f(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و فرض کنید برای هر r کمتر از واحد و بقدرکافی نزدیک به ۱ و هر ζ روی $|z| = r$، سرعت زاویه ای $f(z)$ حول نقطه $f(-\zeta)$ در $z = \zeta$ مثبت است چنانکه z دایره $|z| = r$ را در جهت مثبت می پیماید و بعبارت تحلیلی

$$\mathbf{Re} \frac{z f'(z)}{f(z) - f(-\zeta)} > 0 \,, \quad z = \zeta, |\zeta| = r \tag{۴۰.۱}$$

دراینصورت $f(z)$ را نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون[۹۱] نامیم. بداهتا رده ی چنین توابع تک ارزی شامل توابع محدب و توابع فرد ستاره‌گون نسبت به مبداء خواهد شد. بیان معادلی از این تعریف توسط ساکاگوچی[۹۲] ثابت شد و ما آنرا بعنوان تعریف می پذیریم:

[۹۰] Convexity radius
[۹۱] Starlike with respect to symmetric points
[۹۲] Sakaguchi

تعریف ۱.۱۰.۱. [۹۳] تابع $f(z)\in\mathcal{A}$ نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون است اگر

$$\mathbf{Re}\,\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}>0\ ,\quad z\in\mathbb{D}$$

این نوع توابع تک ارز بوده و رده ی آنها را با $\mathcal{S}_s^*$ مشخص می کنیم.

لم ۱.۱۰.۱. [۹۳] گیریم $f\in\mathcal{S}_s^*$. سپس $|a_n|\le 1$ برای $n\ge 2$، تساوی برای تابع $\frac{z}{1+\varepsilon z}$ با $|\varepsilon|=1$ حاصل می گردد.
تعمیمی از این تعریف را ساکاگوچی چنین بیان می کند:

لم ۲.۱۰.۱. [۹۳] گیریم $f\in\mathcal{A}$ و فرض کنید برای k صحیح مثبتی نابرابری

$$\mathbf{Re}\,\frac{zf'(z)}{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f(\varepsilon^j z)}{\varepsilon^j}}>0\ ,\quad z\in\mathbb{D}\tag{۴۱.۱}$$

برای $\varepsilon=e^{2\pi i/k}$ برقرار باشد. آنگاه $f(z)$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک به محدب است.

تعریف ۲.۱۰.۱. $f(z)\in\mathcal{A}$ نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون از مرتبه α[۹۳] است اگر

$$\mathbf{Re}\,\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}>\alpha\ ,\quad z\in\mathbb{D}$$

که $0\leqslant\alpha<1$. این نوع توابع تک ارز بوده و رده ی آنها را با $\mathcal{S}_s^*(\alpha)$ مشخص می کنیم.

۱۱.۱ خانواده $\mathcal{UST}$

همانگونه که گفتیم ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای نگاشت های همدیس است اما همیشه چنین نیست که $f\in\mathcal{S}^*$ هر زیرقرص $|z-z_0|<\rho<1-|z_0|$ را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به $f(z_0)$ بنگارد. این واقعیت را براون[۹۴] در ۱۹۸۹ ثابت کرد [۱۸]. وی نشان داد که هر $f\in\mathcal{S}$ هر زیرقرص بقدر کافی کوچکی از $\mathbb{D}$ را به قرص ستاره‌گون خیلی کوچک می نگارد. در حالت کلی تر مجموعه توابعی با این خاصیت را که هر قرص $\{|z-z_0|<\rho\}\subset\mathbb{D}$ را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به $f(z_0)$ می نگارند توسط گودمن[۹۵] از دید تحلیلی و هندسی مورد بررسی قرار گرفت ([۴۱]، [۸۷]):

تعریف ۱.۱۱.۱. تابع $f(z)\in\mathcal{S}^*$ را در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت[۹۶] گوئیم اگر هر قوس مدور γ درون $\mathbb{D}$ با مرکز $\zeta\in\mathbb{D}$ را به قوس ستاره‌گون $f(\gamma)$ نسبت به $f(\zeta)$ بنگارد.

[۹۳] Starlike with respect to symmetric points of order α
[۹۴] Brown
[۹۵] Goodman
[۹۶] Uniforml starlike

خانواده همه چنین توابعی را با $\mathcal{UST}$ نشان داده و شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ در این رده باشد آنستکه [۴۱]:

$$\mathbf{Re}\, \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} > 0 \,, \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \tag{۴۲.۱}$$

از طرفی با تعریف ۱ $= \dfrac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}$ به آسانی مشخص می شود که $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*$. این رده تحت چرخش، یا دوران $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ (بازای $\alpha \in \mathbb{R}$) و انتقال[97]، $\frac{1}{t} f(tz)$، $0 < t \leqslant 1$ حفظ می شود ولی پایای خطی نیست، در واقع خودریختی قرص تابع $f(z) = \dfrac{z}{1 - \frac{1}{2}z}$ متعلق به رده $\mathcal{UST}$ نمی شود.

بازای $\zeta = -z$ در (۴۲.۱) بوضوح $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*_s$ و در نتیجه برای $f \in \mathcal{UST}$، $|a_n| \leqslant 1$ است اما کران بهتر $|a_n| \leqslant \dfrac{2}{n}$ توسط هوروویتس[98] بدست آمد [۴۱]. تعیین مقدار دقیق از کران ضرایب توابع این رده $\mathcal{UST}$ هنوز مسئله ی باز بشمار می رود. یافتن اکثر خواص رده ی $\mathcal{UST}$ کاری مشکل محسوب می شود ولی بعنوان نمونه اشاره می کنیم به کار گودمن، وی نشان داد

$$f(z) = \frac{z}{1 - Az} \in \mathcal{UST} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad |A| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{۴۳.۱}$$

همچنین وی ثابت نمود که برای $|B| \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{2}}$، تابع $f(z) = z + Bz^n$ بازای $n > 1$ در $\mathcal{UST}$ واقع می شود. مرکز[99] و سلماسی[100] [۶۱] این کران را به $|B| \leqslant \sqrt{\dfrac{n+1}{2n^3}}$ برای $n > 1$ ارتقاء دادند و بیان کردند که این مقدار دقیق نیست. کران ظریف توسط نژمدیتنف[101] در ۱۹۹۷ حاصل شد ([۶۸]، نتیجه ۴، ص ۴۷) وی نشان داد برای $n = 2$، $|B| \leqslant \dfrac{1}{2/31}$ و برای $n = 3$، $|B| \leqslant \dfrac{1}{3/573}$. رونینگ[102] [۸۶]، مرکز و سلماسی [۶۱] نتیجه مهم زیر را بدست آوردند:

لم ۱.۱۱.۱. ([۸۶]، لم ۳.۳، ص ۲۳۶) $f(z) \in \mathcal{UST}$ اگر و فقط اگر برای هر $z \in \mathbb{D}$، و $|x| = 1$،

$$\mathbf{Re}\, \frac{f(z) - f(xz)}{(1-x) z f'(z)} \geqslant 0$$

لم ۲.۱۱.۱. [۸۶] $f(z) \in \mathcal{UST}$ اگروفقط اگر برای هر $z \in \mathbb{D}$، و $|t| = 1$، $\mathbf{Re}\, \dfrac{(1-t)zf'(z)}{f(z) - f(tz)} > 0$.

لم ۳.۱۱.۱. ([۶۱]، قضیه ۴، ص ۴۵۱) $f \in \mathcal{UST}$ اگر بازای همه $z, w \in \mathbb{D}$،

$$\mathbf{Re}\, \frac{f'(w)}{f'(z)} > 0$$

[97] Transformations
[98] Charles Horowitz
[99] Merkes
[100] Salmassi
[101] Nezhmetdinov
[102] Rønning

و اگر $f \in \mathcal{UST}$ آنگاه برای تمام $z, w \in \mathbb{D}$،

$$\mathbf{Re}\left(\frac{f'(w)}{f'(z)}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

نمای $\frac{1}{2}$ بهترین مقدار ممکن است.

بررسی بیشتر روی رده ی $\mathcal{UST}$ از بسط سری تیلور[۱۰۳] (۴۲.۱) حول z و به طور جداگانه ζ حاصل می شود. گیریم $p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$، $q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$ و

$$\frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\zeta) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z)\zeta^n \,, \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \tag{۴۴.۱}$$

چنانکه $\mathbf{Re}\, p(z) > 0$ و $\mathbf{Re}\, q(z) > 0$، سپس

لم ۴.۱۱.۱. ([۴۱]، لم ۱ ص ۳۶۵) اگر $f \in \mathcal{UST}$ آنگاه

$$p_0(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta} \,,\ p_1(\zeta) = \frac{f(\zeta)[1 - 2a_2\zeta] - \zeta}{\zeta^2} \,,\ q_0(z) = \frac{f(z)}{zf'(z)} \,,\ q_1(z) = \frac{f(z) - z}{z^2 f'(z)}$$

و

$$|p_1(\zeta)| \leqslant 2\mathbf{Re}\, p_0(\zeta) \,,\ |q_1(z)| \leqslant 2\mathbf{Re}\, q_0(z)$$

این لم و برآورد کران ضرایب $|a_n| \leqslant \frac{2}{n}$ ما را به نابرابری رشد مناسبی برای اعضای $f \in \mathcal{UST}$ می رساند:

$$\frac{r}{1+2r} \leqslant |f(z)| \leqslant -r + 2\ln\frac{1}{1-r}$$

بازای $|z| = r < 1$. در نهایت ثابت کوبه[۱۰۴] برای خانواده $\mathcal{UST}$ را بصورت

$$\frac{1}{3} \leqslant K(\mathcal{UST}) \leqslant 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بدست می دهد. برای یافتن شرط کافی که شامل تابعی در $\mathcal{UST}$ شود به روش پیچش[۱۰۵] نیازمندیم. جهت تعیین بزرگترین مقدار δ چنانکه شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leqslant \delta$$

نتیجه دهد که $f \in \mathcal{UST}$ شود، گودمن نشان داد که $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/7071\ldots$ مقداری پذیرفتنی است لیکن مقدار دقیق δ نباید از $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0/8660\ldots$ تجاوز نماید. بالاخره

---

[۱۰۳] Taylor series exansion

[۱۰۴] Koebe constant

[۱۰۵] Convolution

لم ۵.۱۱.۱. (نژمدینتف [۶۸]) اگر $f \in \mathcal{A}$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leqslant \delta_0$ صدق کند، آنگاه $f \in \mathcal{UST}$.
ثابت δ_0 در طرف راست برابر با $\ldots 0/7963 = \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_0$ است که M بهترین مقدار ممکن بوده که در لم ۳.۱۶.۱ بدست آمد.

لم زیر با استفاده از پیچش روی توابع بیان شده است (ر. ک. ۱۶.۱):

لم ۶.۱۱.۱. ([۶۱]، قضیه ۱ ص ۴۵۰) گیریم $f \in \mathcal{A}$. $f \in \mathcal{UST}$ اگر و تنها اگر برای تمام $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{D}}$،

$$\mathbf{Re}\, \frac{f(z) * \dfrac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}}{f(z) * \dfrac{z}{(1-\alpha z)^2}} \geqslant 0\,, \quad z \in \mathbb{D}$$

باید توجه داشت که $\ell(z) = \frac{z}{1-z} = \frac{1}{2}(p_0 - 1)$ در رده ی $\mathcal{UST}$ نیست. رونینگ ثابت کرد که $\mathcal{UST} \not\subseteq \mathcal{S}^*(\frac{1}{2})$ و مسئله تعیین بزرگترین α را مطرح کرد چنانکه $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$.
نژمدینتف نشان داد که $\mathcal{UST} \not\subseteq \mathcal{S}^*(\alpha_0)$ بازای $\alpha_0 \approx 0/1483$ درست است. اما یافتن بزرگترین αی چنانکه $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ مسئله ی باز است.

۱۲.۱ رده ی $\mathcal{UCV}$

بعنوان یادآوری گفتیم که ستاره‌گونی خاصیتی ارثی برای توابع همدیس است اما همیشه چنین نیست که $f \in \mathcal{S}^*$ هر قرص $|z - z_0| < \rho < 1 - |z_0|$ را به دامنه ای ستاره‌گون نسبت به $f(z_0)$ بنگارد. چنین خاصیتی در تحدب نیز برقرار است و گودمن چنین توابعی را از دید تحلیلی و هندسی بررسی نمود که در آن توابع، هر زیرقرص را به مجموعه ای محدب می نگارند ([۴۱]، [۸۷]):

تعریف ۱.۱۲.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را در $\mathbb{D}$ محدب یکنواخت[۱۰۶] گوئیم اگر هر قوس مدور γ در $\mathbb{D}$ با مرکز $\zeta \in \mathbb{D}$ را به ناحیه محدب $f(\gamma)$ بنگارد.

خانواده همه چنین توابعی با این خاصیت را با $\mathcal{UCV}$ نشان داده و شرطی لازم و کافی برای توابع $f \in \mathcal{S}$ در این رده این است که [۴۰]:

$$\mathbf{Re}\left(1 + (z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant 0\,, \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \tag{۴۵.۱}$$

واضح است که $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{K}$. بازای $\zeta = -z$ در (۴۵.۱)، داریم $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{K}(\frac{1}{2})$ و از آنجا برای $f \in \mathcal{UCV}$، $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$. گودمن با استفاده از تابع $f(z) = \frac{z}{1 - Az}$ نشان داد که خانواده $\mathcal{UCV}$

[۱۰۶] Uniformly convex

پایای خطی نیست ([۴۰]، قضیه ۵ ص۹۰). وی ثابت نمود $f(z)=\dfrac{z}{1-Az}\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر $|A|\leqslant\frac{1}{3}$.

لم ۱.۱۲.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) برای $n\geqslant 2$، $f=z+Bz^n\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر

$$|B|\leqslant\frac{1}{n(2n-1)}$$

لم ۲.۱۲.۱. (نژمدیتنف [۶۸]) اگر $f\in\mathcal{A}$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty}n(2n-1)|a_n|\leqslant 1$ صدق کند سپس $f\in\mathcal{UCV}$. ثابت ۱ در طرف راست بهترین مقدار ممکن است.

مشخصه سازی تک ـ متغیره بسیار مهمی از رده ی $\mathcal{UCV}$ توسط رونینگ ([۸۸]، قضیه ۱ ص۱۹۰) و مستقلاً ما[۱۰۷] و میندا[۱۰۸] ([۵۷]، قضیه ۲ ص۱۶۷) حاصل شد:

لم ۳.۱۲.۱. $f\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر

$$\mathbf{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|,\quad z\in\mathbb{D} \tag{۴۶.۱}$$

در نتیجه اگر $\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|<\frac{1}{2}$ سپس $f\in\mathcal{UCV}$. از طرفی مشابه قضیه ی الکساندر برای توابع تحلیلی ۱.۴.۱ را نمی توان بین رده های $\mathcal{UCV}$ و $\mathcal{UST}$ بیان کرد [۴۰، ۸۸].

۱۳.۱ رده ی $\mathcal{S_P}$

حال فرض کنید $w=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$، طبق (۴۶.۱) تعریف کنید

$$\Omega_p=\{w\in\mathbb{C}:\mathbf{Re}\,w>|w-1|\} \tag{۴۷.۱}$$

مجموعه Ω_p درون سهمی $(\mathbf{Im}\,w)^2=2\mathbf{Re}\,w-1$ قرار می گیرد که نسبت به محور حقیقی متقارن بوده و راس آن $(\frac{1}{2},0)$ است. پس $f\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر $1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\in\Omega_p$. خانواده $\mathcal{S_P}$ چنین تعریف می شود:

تعریف ۱.۱۳.۱. رده ی $\mathcal{S_P}$ از توابع ستاره‌گون سهموی[۱۰۹] شامل تمام توابع $f\in\mathcal{A}$ است که در شرط زیر صدق می کنند:

$$\mathbf{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|,\quad z\in\mathbb{D} \tag{۴۸.۱}$$

---
[۱۰۷] Ma
[۱۰۸] Minda
[۱۰۹] Parabolic starlike functions

بوضوح $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{S}^*$ و چون ناحیه سهموی Ω_p درون نیم صفحه $\left\{w : \mathbf{Re}\, w > \frac{1}{2}\right\}$ و قطاع $\{w : |\arg w| < \frac{\pi}{4}\}$ قرار می گیرد لذا $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{S}^*(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{S}^*_{\frac{1}{2}}$ [۸۸]. همچنین (۴۶.۱) و (۴۸.۱) طبق قضیه الکساندر ۱.۴.۱ نشان می دهند

$$f \in \mathcal{UCV} \Longleftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \tag{۴۹.۱}$$

اما آیا رابطه ای شبیه (۴۹.۱) بین $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ و $\mathcal{UST}$ وجود دارد؟ پاسخ منفی است. گودمن [۴۰] و رونینگ [۸۶] نشان دادند

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \nsubseteq \mathcal{UST} \ , \ \mathcal{UST} \nsubseteq \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$$

همچنین اگر $\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{2}$ بنابراین $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

۱۴.۱ ستاره‌گون ما_ میندا

ما و مستقلا توسط میندا (۱۹۹۲م.) نمایش های از یکپارچه کردن برخی زیر رده های ستاره‌گون و محدب را با اصل تابعیت یافتند. گیریم ϕ تابعی تحلیلی با جزء حقیقی مثبت بوده و با شرایط $\phi(0) = 1$، $\phi'(0) > 0$ نرمال شده و ϕ، $\mathbb{D}$ را به ناحیه ای ستاره‌گون نسبت به ۱ و متقارن نسبت به محور طولها بنگارد. آنها این زیر رده ها را از توابع ستاره‌گون و محدب معرفی نمودند.

$$\mathcal{S}^*(\phi) = \left\{f \in A : z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \phi(z),\ z \in \mathbb{D}\right\}$$

در ادبیات، توابعی که در این رده اند را به ترتیب ستاره‌گون ما_ میندا[۱۱۰] و محدب ما_ میندا[۱۱۱] خوانند.

۱۵.۱ عملگرهای میانگین

فرض بگیرید $co(E)$ پوش محدب[۱۱۲] مجموعه E در $\mathbb{C}$ باشد. میلر و موکانو[۱۱۳] [۶۲] مفهوم عملگر میانگین[۱۱۴] روی مجموعه $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}(\mathbb{D})$ را تعریف نمودند. بدین شکل که عملگر میانگین یک عملگر $I : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ است که در $I[f](0) = f(0)$ صدق کرده و

$$I[f](\mathbb{D}) \subset co\big(f(\mathbb{D})\big) \tag{۵۰.۱}$$

[۱۱۰] Ma-Minda starlike
[۱۱۱] Ma-Minda convex
[۱۱۲] Convex hull
[۱۱۳] Mocanu
[۱۱۴] Averaging operator

برای تمام $f \in \mathbf{K}$ درست باشد. یک شرط لازم و کافی برای عملگر میانگین چنین است:

لم ۱.۱۵.۱. ([۶۲]، لم ۲) گیریم $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}$ و فرض کنید عملگر میانگین $I : \mathbf{K} \to \mathbf{H}$ بازای تمام $f \in \mathbf{K}$ در $I[f](\circ) = f(\circ)$ صدق نماید. شرط لازم و کافی برای I روی $\mathbf{K}$ عملگر میانگین باشد آنستکه

$$(f \in \mathbf{K}, h \text{ محدب باشد و } f \prec h) \Longleftrightarrow I[f] \prec h. \tag{۵۱.۱}$$

همچنین نویسنگان فوق مثال زیر را ارائه داند:

$$I_\gamma[f](z) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_\circ^z f(t) t^{\gamma - 1} dt \tag{۵۲.۱}$$

که یک عملگر میانگین روی $\mathbf{H}$ است برای $\mathbf{Re}\,\gamma > \circ$. آنها تعمیمی از (۵۲.۱) را به شکل

$$I_{\beta,\gamma}[f](z) = \left[\frac{\gamma}{z^\gamma} \int_\circ^z f^\beta(t) t^{\gamma - 1} dt\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{۵۳.۱}$$

برای $\mathbf{Re}\,\gamma > \circ$ ارائه دادند [۶۳] و نشان دادند که این عملگرها، عملگر میانگین روی مجموعه های خاصی از $\mathbf{H}$ می باشند.

۱۶.۱ پیچش

مطالعه ی پیچش روی توابع تحلیلی در اواسط قرن بیستم انجام گرفت و بعنوان ابزاری جانبی جهت بررسی رده ی توابع تک ارز بکار رفت. در ۱۹۷۳ روشه ویه و شیل_اسمال ثابت کردند که پیچش یک تابع محدب با یک تابع محدب (به ترتیب نزدیک به محدب)، خود یک تابع محدب (به ترتیب نزدیک به محدب) است و پیچش تابع ستاره‌گون با تابع نزدیک به محدب، ستاره‌گون خواهد شد بعلاوه این نتیجه مهم را ثابت نمودند که با فرض $f \in \mathcal{K}$، $F \in \mathcal{K}$ و $G \in \mathcal{C}$، سپس $\frac{f * zG'}{f * zF'}$ همه مقادیرش را در دامنه ی محدب D می گیرد، اگر $\frac{G'}{F'}$ همه ی مقادیرش را در D اخذ کند. هرچند آنچه در زمینه پیچش روی توابع همساز انجام شده، قابل توجه و استفاده است لیکن خلاء موجود در کلیت دادن به مسائل قبلی کاملا دیده می شود. تعمیم رده های قبلی از توابع همساز با استفاده از پیچش، اعمال پیچش روی توابع رده های مختلف نظیر ستاره‌گون و محدب و نزدیک_به_محدب و غیره از این قبیل مسائل بشمار می رود که نبود کلیت در آنها کاملا دیده می شود. کارهای اخیر برخی مولفان در چند سال اخیر، تنها نشان دهنده تکامل بخش کوچکی از این موضوعات است و کاوش بیشتر روی این مباحث، نیازمند زمان و مطالعات بیشتر خواهد بود. استفاده از تعاریف فوق و تعمیم آنها به توابعی که حاصل کنش آنها با توابع دیگر رده ها در اثر پیچش می باشد هدف نهائی این رساله خواهد بود. هرچند تعاریف اولیه و حصول برخی ویژگی ها در این زمینه در حال انجام است لیکن تا تحصیل قطعی نتایج و تایید یافته ها، اندکی زمان لازم خواهد بود.

پیچش یا ضرب هادامار[۱۱۵] دو تابع $f(z)$ و $F(z)$ با سری های توانی $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$ و $F(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}A_nz^n$ را با $f*F$ نشان داده و بشکل زیر تعریف می کنیم[۱۱۶]

$$(f*F)(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nA_nz^n, \qquad (۵۴.۱)$$

نگاشت $\ell(z)=\frac{z}{۱-z}$ به عنوان همانی پیچش عمل کرده و نگاشت کوبه $k(z)=\frac{z}{(۱-z)^۲}$ بعنوان عمل مشتق روی توابع عمل می نماید. برخی از خواص پیچش روی توابع تحلیلی f و F چنین است:

$$f*F=F*f$$
$$\alpha(f*F)=\alpha f*F$$
$$f*\ell(z)=f$$
$$zf*zF=z(f*F)$$
$$f*\frac{۱}{\alpha}(\alpha z)=\frac{۱}{\alpha}f(\alpha z)$$
$$\overline{f*F}=\overline{f}*\overline{F}$$
$$f_۱*(f_۲*f_۳)=(f_۱*f_۲)*f_۳$$
$$\alpha(f*F)=\alpha f*F$$
$$zf'(\alpha z)=f*\frac{z}{(۱-\alpha z)^۲}$$
$$\frac{۱}{\alpha}f(\alpha z)=f*\frac{z}{۱-\alpha z}$$
$$zf'(z)=f*k(z)$$
$$z(f*F)'=zf'*F=f*zF'$$
$$\frac{f(\alpha z)-f(\beta z)}{\alpha-\beta}=f*\frac{z}{(۱-\alpha z)(۱-\beta z)}$$

که $\alpha\in\hat{\mathbb{C}}$، همچنین برای تابع حقیقی g داریم:

$$\mathbf{Re}\,(f*g)=\mathbf{Re}\,f*g \quad , \quad \mathbf{Im}(f*g)=\mathbf{Im}f*g$$

در حالتی که توابع $f(z)$ و $F(z)$ تحلیلی اند این عمل مهم تلقی شده و به شکل ابزاری مفید در نظریه توابع تک ارز بکار گرفته شده است. رده های ستاره‌گون، محدب و تابع

[۱۱۵] Hadamard product

[۱۱۶] عبارت پیچش از آنجا آمده که برای $|z|<\rho<۱$

$$(f*F)(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}f\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)F(z)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

نزدیک به محدب تحت عمل پیچش با توابع محدب بسته اند. این موضوع توسط پولیا[۱۱۷] و شوئنبرگ[۱۱۸] حدس زده شد و بوسیله روشه ویه و شیل_سمال[۱۱۹] در ۱۹۷۳ ثابت گردید [۹۲]:

(الف) اگر $f \in \mathcal{K}$ و $F \in \mathcal{K}$، آنگاه $f * F$ نیز در $\mathcal{K}$ است.

(ب) اگر $f \in \mathcal{K}$ و $F \in \mathcal{C}$، آنگاه $f * F$ هم در $\mathcal{C}$ است.

(ج) اگر $f \in \mathcal{K}$، $F \in \mathcal{K}$ و $G \in \mathcal{C}$ سپس اگر $\frac{G'}{F'}$ همه مقادیرش را از D بگیرد آنگاه $\frac{f * zG'}{f * zF'}$ همه مقادیرش را در دامنه محدب D خواهد گرفت.

بعلاوه

(د) اگر $f \in \mathcal{C}$ و $F \in \mathcal{S}^*$ آنگاه $f * F$ هم در $\mathcal{S}^*$ قرار می گیرد.

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$ آنگاه $f \in \mathcal{C}$ و اگر $f \in \mathcal{C}$ سپس $|a_n| \leq 1$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ آنگاه $f \in \mathcal{S}^*$ و اگر $f \in \mathcal{S}^*$ سپس $|a_n| \leq n$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| \leq 1$ آنگاه $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ و اگر $f \in \mathcal{S}^*$ سپس $|a_n| \leq n$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$ آنگاه $f \in \mathcal{K}$

لم ۱.۱۶.۱. (روشه ویه و شیل_سمال [۹۲]) فرض کنید $f(z)$ و $F(z)$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و $f(0) = F(0) = 0$ باشد. اگر f محدب بوده F ستاره‌گون باشد، آنگاه برای هر تابع $p(z)$ که در $\mathbb{D}$ تحلیلی است $\mathbf{Re}\, p(z) > 0$ است داریم:

$$\mathbf{Re}\, \frac{(f * pF)(z)}{(f * F)(z)} > 0 \quad , \quad z \in \mathbb{D}$$

تعیین اینکه آیا رده ی $\mathcal{UST}$ تحت پیچش با توابع محدب بسته است یا خیر مسئله ی باز می باشد.

تعریف ۱.۱۶.۱. برای زیرمجموعه مفروض $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$، مجموعه دوگان[۱۲۰] $\mathcal{V}^*$ عبارتست از

$$\mathcal{V}^* = \left\{ g \in \mathcal{A} : \frac{f * g(z)}{z} \neq 0, \ \forall f \in \mathcal{V}, \ \forall z \in \mathbb{D} \right\}$$

نژمدیتنف (۱۹۹۷) ثابت کرد که برای رده ی های $\mathcal{UST}$ و $\mathcal{UCV}$، مجموعه های دوگان معینی از توابع در $\mathcal{A}$ وجود دارند و نشان داد ([۶۸]، قضیه ۲ ص۴۳) که مجموعه دوگان رده ی $\mathcal{UST}$ زیرمجموعه $\mathcal{A}$ و شامل توابع $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ است که

$$h(z) = \frac{z\left(1 - \frac{w+i\alpha}{1+i\alpha} z\right)}{(1 - wz)(1 - z)^2}$$

---

[۱۱۷] Pólya
[۱۱۸] Schoenberg
[۱۱۹] Shiel-Small
[۱۲۰] Dual set

که $\alpha \in \mathbb{R}$، $w \in \mathbb{C}$ و $|w| = ۱$. وی برآورد یکنواخت $|a_n(h)| \leq dn$ را برای ضریب nــام بسط سری تیلور h در مجموعه دوگان $\mathcal{UST}$ با ثابت دقیق $d = \sqrt{M} \approx ۱/۲۵۵۷$ بدست آورد که $M \approx ۱/۵۷۷۰$ مقدار ماکزیمال عبارت مثلثاتی (۵۵.۱) است. با استفاده از این او ثابت کرد

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{۱}{\sqrt{M}} \Longrightarrow f \in \mathcal{UST}$$

کران $\frac{۱}{\sqrt{M}}$ دقیق است.

لم ۲.۱۶.۱. [۶۸] گیریم

$$G_۰ = \left\{g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}\left[۱ - \frac{i\alpha}{۱+i\alpha}z\right], \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

آنگاه $\mathcal{S}^* = G_۰^*$ و $|a_n| \leq n(۲n-۱)$ برای هر $g \in G_۲$.

نژمدینتنف مجموعه دوگان رده های $\mathcal{UST}$ و $\mathcal{UCV}$ را بدست آورد [۶۸]:

لم ۳.۱۶.۱. فرض کنید

$$G_۱ = \left\{g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}\left[۱ - \frac{(t+i\alpha)}{۱+i\alpha}z\right]\left[\frac{۱}{۱-tz}\right], \alpha \in \mathbb{R}, |t| = ۱\right\}$$

آنگاه $\mathcal{UST} = G_۱^*$ و $c_n = \sup_{g \in G_۱} |a_n| \leq dn$ برای همه $n \geq ۲$ با ثابت دقیق $d = \sqrt{M} = ۱/۲۵۵۷\ldots$ که $M = S(\theta_۰) = ۱/۵۷۷۰\ldots$ ماکزیمم عبارت

$$S(\theta) = \frac{۱}{۲}\left[۱ + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^۲ + \sqrt{\left(۱ + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^۲\right)^۲ - \left(\frac{\sin ۲\theta}{\theta}\right)^۲}\right] \tag{۵۵.۱}$$

روی $۰ \leq \theta \leq \pi$ است. از اینجا نقطه اکستریمال $\theta_۰ = ۰/۹۹۵۸\ldots$ جواب یکتای معادله

$$\theta^۳(\cos\theta + \cos ۳\theta) - \theta^۲ \sin ۳\theta + \sin^۳\theta = ۰ \tag{۵۶.۱}$$

روی پاره خط $۰/۸ \leq \theta \leq ۱/۳$ است.

نژمدینتنف (۱۹۹۷) مجموعه دوگان رده ی $\mathcal{UCV}$ را یافت و نشان داد که $|a_n| \leq n(۲n-۱)$ برآورد یکنواختی برای nــامین بسط تیلور توابع دوگان محسوب می شود:

لم ۴.۱۶.۱. [۶۸] فرض کنید

$$G_۲ = \left\{g \in \mathcal{A} : g(z) = \frac{z}{(۱-z)^۳}\left[۱ - z - \frac{۴z}{(\alpha+i)^۲}\right], \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

آنگاه $\mathcal{UCV} = G_۲^*$ و $|a_n| \leq n(۲n-۱)$ برای تمام $g \in G_۲$.

۱۷.۱ توابع پیش ستاره‌گون

تعریف ۱.۱۷.۱. تابع $f(z)\in \mathbf{H}(\mathbb{D})$ را پیش ستاره‌گون[۱۲۱] از مرتبه α (با $\alpha \leqslant 1$) نامیم اگر

$$\frac{z}{(1-z)^{2-2\alpha}} * f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$$

و برای $\alpha = 1$، $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$.

مجموعه چنین توابعی با R_α نموده می شود. داریم $R_0 = \mathcal{K}$ و $R_{\frac{1}{2}} = \mathcal{S}^*(\frac{1}{2})$.

گیریم $\Omega^* = \mathcal{C} - [1,\infty)$ و $f(z)\in \mathbf{H}(\Omega^*)$ تعریف می کنیم

$$(D^\beta f)(z) = \frac{z}{(1-z)^\beta} * f(z)$$

برای $\beta \geqslant 0$. $(D^1 f)(z) = f(z)$، $(D^2 f)(z) = zf'(z)$ و بازای $\beta = n \in \mathbb{N}$ داریم $D^{n+1}f = \frac{1}{n!}z(z^{n-1}f)^{(n)}$.

تعریف ۲.۱۷.۱. فرض کنید $\alpha \leqslant 1$ و $\mathfrak{p}\in\mathbb{P}$ در $\mathbb{D}$ با شرط $\mathfrak{p}'(0) > 0$ باشد که $\mathfrak{p}(\mathbb{D})$ نسبت به ۱ ستاره‌گون و نسبت به محور طولها نیز متقارن است. آنگاه رده ی $R^u_\alpha(\mathfrak{p})$ شامل تمام توابع تحلیلی $f(z)\in \mathbf{H}(\Omega^*)$ در شرط زیر صدق می کند:

$$\frac{D^{3-2\alpha}f}{D^{2-2\alpha}f} \prec \mathfrak{p}$$

با فرض $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^m z^n$ بازای $m = 0,1,2,3,\cdots$، سپس $f*g$ نمایشگر مشتق سالاگان[۱۲۲] f است که $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$.

لم ۱.۱۷.۱. (راوی چاندران[۱۲۳] و دیگران. [۸۴]) اگر تابع $\mathfrak{p}(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $\mathbf{Re}\,\mathfrak{p}(z) > 0$ باشد آنگاه $|c_2 - \epsilon c_1^2| \leqslant 2\max\{1, |2\epsilon - 1|\}$. تساوی برای $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ دقیق است.

ملاحظه ۱.۱۷.۱. گیریم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}$$

که $a_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$ و $\mu(t)$ اندازه احتمالاتی روی $[0,1]$ است.

---

[۱۲۱] Prestarlike Function

[۱۲۲] Sălăgean derivative

[۱۲۳] Ravichandran

تعریف ۳.۱۷.۱. فرض کنید f در یک ناحیه همبند ساده شامل مبداء تحلیلی باشد. مشتق کسری f از مرتبه λ را بصورت

$$D_z^{\lambda}f(z) := \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{\lambda}} \qquad (0<\lambda<1)$$

تعریف می کنیم که چندگانگی $(z-\zeta)^{\lambda}$ با این نیاز که $\log(z-\zeta)$ برای $z-\zeta>0$ حقیقی است، حذف می شود.

با این تعریف توسیع شناخته شده ای از مشتق کسری و انتگرال کسری وجود دارد. اووا و اسریواستاوا[124] عملگر $\Omega^{\lambda} := \mathbf{H}(\mathbb{D}) \to \mathbf{H}(\mathbb{D})$ را برای λ و اعداد حقیقی مثبت $\lambda \neq 2,3,4,\dots$ بصورت

$$(\Omega^{\lambda}f)(z) = \Gamma(2-\lambda)z^{\lambda}D_z^{\lambda}f(z)$$

تعریف کردند. در اینجا توابع پیش ستاره‌گون از مرتبه مختلط تعریف می شوند [۹۴].

تعریف ۴.۱۷.۱. گیریم $\alpha \leqslant 1$ و $b \neq 0$ عددی مختلط باشد. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ در $\mathbb{D}$ با شرط $\mathfrak{p}'(0) > 0$ بوده که $\mathfrak{p}(\mathbb{D})$ نسبت به ۱ ستاره‌گون و نسبت به محور طولها متقارن باشد. سپس رده ی $R^{u}_{\alpha,b}(\mathfrak{p})$ شامل تمام توابع تحلیلی $f(z) \in \mathbf{H}(\Omega^{*})$ است که در شرط زیر صدق می کنند

$$1+\frac{1}{b}\left(\frac{D^{3-2\alpha}f}{D^{2-2\alpha}f}-1\right) \prec \mathfrak{p}$$

[124] Srivastava

فصل ۲

توابع همساز

تعاریف توابع تحلیلی و خواص آنها به توابع همساز تعمیم داده شد. توابع همساز در نیمه اول قرن بیستم به طور مختصر معرفی و بررسی شدند و توسط هندسه دیفرانسیل دانانی مانند چوکه [۱] ، کنزه [۲] ، لوی [۳] و رادو [۴] مطالعه گردیدند. پس از آن توابع مختلط همساز توسط نظریه پردازان هندسی توابع، کلونی [۵] و شیل اسمال [۶] گسترش یافت. آنها اصول نظری خانواده ی توابع همساز که بر $\mathbb{D}$ تک ارز می شوند را توسعه دادند. این شاخه از توابع همساز مختلط که تک ارزی آنها روی قرص واحد بررسی می شود تنها در سه دهه اخیر مطالعه و فرمولبندی شده و از آنجا که تصور می شد که این خانواده از توابع، تعمیمی از توابع تحلیلی خواهند بود بیشتر مورد توجه قرار گرفت و بدین ترتیب غالب موضوعاتی را که درباره توابع تحلیلی مطرح بوده و هست را روی این خانواده بررسی می نمایند.

در این فصل $u(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را تابع همساز حقیقی[۷] نامیم اگر در معادله ی $u_{xx}+u_{yy}=0$ که به معادله لاپلاس[۸] شهرت دارد صدق نماید. معادله لاپلاس در خیلی از علوم کاربردی ظاهر می

[۱] Gustave Choquet (1915-2006)

[۲] Adolf Kneser (1862-1930)

[۳] Hans Lewy (1904-1988)

[۴] Richard Radó (1906-1989)

[۵] Clunie

[۶] Sheil-Small

[۷] Harmonic real function

[۸] Laplace equation

شود مثلاً در بسیاری از مسائل فیزیکی نظیر هیدرودینامیک[۹] و پتانسیل سرعت[۱۰]. معادلات جریان سیالات[۱۱] در معادله لاپلاس صدق می‌کنند و نیز رابطه‌ی پتانسیل الکترواستاتیک[۱۲] دارای این خاصیت است. همچنین معادله لاپلاس ارتباطات مهمی با فرایندهای احتمالاتی[۱۳] و تصادفی نیز این معادله بخوبی ظاهر شده و در مباحث مهندسی نیز استفاده از آن امری ضروری بشمار می رود.

۱.۲ نگاشت های همساز حقیقی تک ارز

هر تابع همساز از رده ی $\mathbb{C}^\infty$ بوده و بی نهایت بار مشتقپذیر است. بعلاوه هر تابع همساز بر یک دامنه ی همبندساده، قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است که بر آن ناحیه تعریف می گردد. همچنین

لم ۱.۱.۲. [۳۹] تابع همساز دارای خاصیت مقدار میانگین بوده و در نتیجه در اصل مقدار ماکزیمم[۱۴] صدق می کند. توابع همساز حقیقی در اصل مقدار مینیمم[۱۵] هم صادق بوده و اگر f تابعی همساز بر دامنه ی $|z| < \rho$، (برای $\rho > 0$)، تعریف شده باشد سپس برای هر $0 < r < \rho$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} f(re^{i\theta})d\theta, \quad ; \quad |z| < r. \tag{۱.۲}$$

لم ۲.۱.۲. (فرمول انتگرال پواسن[۱۶] [۳۹]). گیریم f تابعی همساز روی دامنه $|z| < \rho$ باشد که $\rho > 0$. آنگاه برای هر $0 < r < \rho$،

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} f(re^{i\theta})d\theta, \quad ; \quad |z| < r. \tag{۲.۲}$$

این توابع را می توان تعمیمی از نگاشتهای تحلیلی بحساب آورد.

---

[۹] Hydrodynamics
[۱۰] Velocity potential
[۱۱] Fluid flow
[۱۲] Electrostatics potential
[۱۳] Stochastic processes
[۱۴] Maximum Modulus Principle
[۱۵] Minimum Modulus Principle
[۱۶] Poisson integral formula

۲.۲ نگاشتهای تک ارز همساز مختلط

در ادامه از نگاشتهای همساز مسطح[۱۷] صحبت خواهیم کرد که تعمیم نگاشت های همساز حقیقی[۱۸] تک ارز هستند. فرض کنید H خانواده ی توابع مختلط پیوسته باشد که بر قرص واحد $\mathbb{D}$ همسازند. گیریم $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. تابع $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابع همساز مختلط[۱۹] است اگر f پیوسته باشد و u و v در D همساز حقیقی باشند. در حالت کلی u و v لزوما مزدوج همساز[۲۰] نیستند زیرا در غیر این حالت، تابع f تحلیلی بوده و مورد بحث ما نیست.
اگر D همبند ساده باشد، در این صورت نمایش استانداردی برای f خواهیم داشت [۲۵]:

لم ۱.۲.۲. [۳۰] گیریم D دامنه ای همبند ساده و $f = u + iv$ در D همساز باشد. سپس f دارای نمایش کانونی[۲۱] $f = h + \overline{g}$ است که h و g در D تحلیلی می باشند. h را بخش تحلیلی و g را بخش هم تحلیلی[۲۲] تابع f خوانیم.

حال به فرض $f(0) = 0$ در دامنه ی $\mathbb{D}$، می توان توابع تحلیلی h و g را با بسطهای سری تیلور $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ نشان دهیم بدینترتیب f دارای نمایش سری به شکل

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \tag{۳.۲}$$

خواهد بود. ژاکوبین[۲۳] تابع $f = u + iv$ عبارتست از

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

که از محاسبات زیر حاصل می شود:

$$f_z = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = \frac{1}{2}\Big(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\Big)$$
$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) = \frac{1}{2}\Big(u_x - v_y + i(v_x + u_y)\Big)$$
$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = \frac{1}{4}\Big((u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 - (u_x - v_y)^2 - (v_x + u_y)^2\Big) = u_x v_y - u_y v_x$$

اگر f تحلیلی باشد، ژاکوبین فرم زیر را بخود می گیرد

$$J_f(z) = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

---

[۱۷] Planar harmonic mappings
[۱۸] Real-Value Harmonic Maps
[۱۹] Complex-valued harmonic function
[۲۰] Harmonic conjugates
[۲۱] Canonical representation
[۲۲] Co-analytic
[۲۳] Jacobian

گوئیم نگاشت همساز $f = h + \overline{g}$ در $z = a$ جهت نگهدار[۲۴] است اگر $J_f(a) > 0$ یعنی $|h'(a)|^2 - |g'(a)|^2 > 0$ یا $|h'(a)| > |g'(a)|$. با فرض $\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ سپس $f = h + \overline{g}$ در $z = a$ جهت نگهدار است اگر $|\omega(a)| < 1$ و آنرا جهت برگردان[۲۵] در این نقطه گوئیم اگر $|\omega(a)| > 1$. تابع $\omega(z)$ تابعی تحلیلی روی $\mathbb{D}$ بوده و انبساط مختلط دوم[۲۶] f نامیده می شود. توجه کنید که $\omega(z) = 0$ اگر و فقط اگر f تحلیلی باشد. بالاخره اینکه نمایش $f = h + \overline{g}$ معادل با نمایش سودمند $f = \mathbf{Re}\,(h+g) + i\mathbf{Im}(h-g)$ است.

لم ۲.۲.۲. [۳۰] همه ی نقاط بحرانی تابع همساز غیرثابت مجزا هستند.

قضیه ۱.۲.۲. (قضیه لوی[۲۷] [۳۰]) اگر f تابع همساز مختلطی باشد که در یک دامنه ی $D \subset \mathbb{C}$ موضعا تک ارز است، آنگاه ژاکوبین آن برای $z \in D$ ناصفر است $J_f(z) \neq 0$.

بنابراین از دید قضیه لوی، تابع همساز مختلطی که در یک دامنه موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشد، در آن دامنه ژاکوبین مثبت دارد. اگر $J_f < 0$، سپس $\overline{f}$ جهت نگهدار است.

فرمول انتگرال پواسن برای نگاشتهای همساز مختلط نیز صحیح است [۳۰].

۳.۲ رده ی S_H

بعنوان تعمیمی از شکل همساز $\mathcal{A}$، گیریم $\mathcal{H}$ رده ی توابع مختلطی به شکل $f = h + \overline{g}$ باشدکه روی $\mathbb{D}$ همسازند و h و g توابع تحلیلی نرمالشده روی $\mathbb{D}$ چنان هستند که

$$f(z) = h + \overline{g} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}\,\overline{z}^n \tag{۴.۲}$$

تعمیمی از رده S روی توابع همساز وجود دارد که بسیاری از خواص رده ی قبل را حفظ می کند. در نظر بگیرید که S_H خانواده ی تمام توابع همساز تک ارز مختلطی به شکل (۳.۲) است که روی $\mathbb{D}$ جهت نگهدار بوده و با شروط $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ نرمال شده اند. پس هر عضو $f \in S_H$ دارای بسط سری (۴.۲) خواهد بود. این رده ابتدا توسط کلونی و شیل_سمال در ۱۹۸۴ مطالعه شد [۲۵] و سپس خواص دیگری از آن بدست آمد که در مطالعه ی توابع همساز مسطح سودمند بنظر می رسیدند.

۴.۲ رده ی S_H°

اکنون توابع رده ی $f \in S_H$ را چنان محدود می کنیم که $b_1 = 0 = f_{\overline{z}}(0) = \overline{g'(0)}$ باشد و این رده را با S_H° نمایش می دهیم. روشن است که $S \subset S_H^\circ \subset S_H$ و ثابت می شود که خانواده ی

[۲۴] Sense-preserving
[۲۵] Sense-reserving
[۲۶] Second complex dilatation
[۲۷] Lewy

نرمال فشرده است و این در حالی است که S_H چنین نیست. این خانواده تحت مزدوج سازی، چرخش، انبساط، خودریختی قرص و انتقال برد حفظ می شود. شبیه به حدس بیبرباخ در رده ی S، در اینجا نیز حدس بیبرباخ همساز[۲۸] مطرح می شود: فرض کنید $f(z) \in S_H^\circ$ تابع همساز به شکل (۴.۲) باشد آنگاه

$$|a_n| \leqslant \frac{۱}{۶}(n+۱)(۲n+۱) \tag{۵.۲}$$

$$|b_n| \leqslant \frac{۱}{۶}(n-۱)(۲n-۱) \tag{۶.۲}$$

$$\big||a_n|-|b_n|\big| \leqslant ۱ \tag{۷.۲}$$

با وجود اینکه این حدس یک مسئله ی باز بشمار می رود، در برخی زیررده های آن به اثبات رسیده است. همچنین برای تمام توابع $f(z) \in S_H^\circ$ داریم $|a_۲| < ۴۹$ که بهترین کران شناخته شده است. ایضا

لم ۱.۴.۲. [۳۰] برای تمام توابع $f(z) \in S_H^\circ$، نامساوی دقیق $|b_۲| \leqslant \frac{۱}{۲}$ برقرار است.

۵.۲ روش برش

ایجاد روش ساختار برشی[۲۹] در ابتدا توسط کلونی و شیل_سمال در ۱۹۸۴ معرفی گردید [۲۵] و جهت مطالعه ی توابع همساز مسطح بکار گرفته شد. این تکنیک روش ساختن یک نگاشت همساز تک ارز را در صفحه بیان می کند و یکی از خصوصیات مهم آن استفاده از توابع تحلیلی مرتبط با آن می باشد، و بنابراین آگاهی از این روش در کار با توابع همساز بسیار ضروری است.

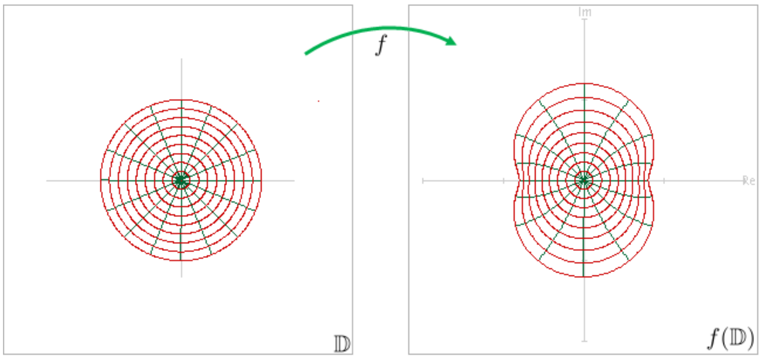
لم ۱.۵.۲. [۳۰] فرض کنید $f = h + \overline{g}$ در $\mathbb{D}$ همساز و موضعا تک ارز باشد. سپس f تک ارز و بردش CHD است اگر و تنها اگر $h-g$ تک ارز و بردش CHD باشد.

برای استفاده از تکنیک برش، با بکارگیری لم فوق و $F = h - g$ تک ارز مفروضی با برد CHD همراه با یک انبساط $\omega(z) = \dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ خواسته شده، می توان تابع همساز تک ارز $f = h+\overline{g}$ را با برد CHD یافت. طی این فرآیند فرض $|\omega(z)| < ۱$ برای جهت نگهداربودن f ضروری است (قضیه ۱.۲.۲).

مثال ۱.۵.۲. تابع $F = z - \frac{۱}{۶}z^۳$ با برد CHD مفروض است (شکل۱.۲). می خواهیم نگاشت همساز تک ارز $f = h + \overline{g}$ را با انبساط $\omega(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}z$ بیابیم. تابع f جهت نگهدار خواهد بود زیرا $|\omega(z)| = |\frac{۱}{\sqrt{۲}}z| < ۱$. می نویسیم $h - g = z - \frac{۱}{۶}z^۳$ و $\dfrac{g'(z)}{h'(z)} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}}z$ بنابراین

[۲۸] Harmonic Bieberbach conjecture

[۲۹] Shearing construction technique



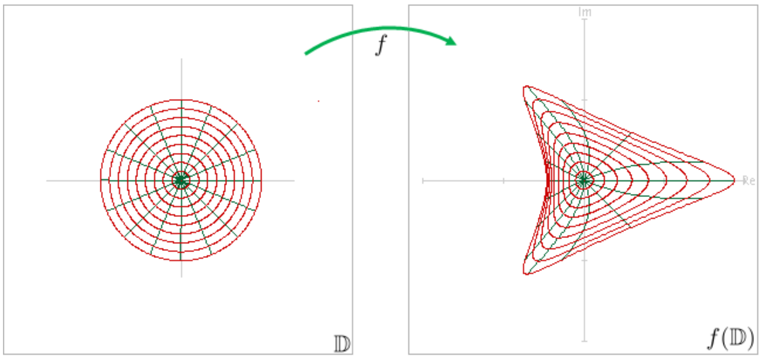
شکل ۱.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همدیس $F = z - \frac{1}{6}z^3$.

$$\begin{cases} h' - g' = 1 - \frac{1}{2}z^2 \\ g' = \frac{1}{\sqrt{2}}zh' \end{cases} \quad \begin{cases} h'(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ g'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{2}z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} h(z) = z + \frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 \\ g(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \end{cases}$$

توجه کنید که $h(0) = g(0) = 0$ و بدینصورت نگاشت همساز تک ارز

$$f = h + \overline{g} = z + \frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{z}^2 + \frac{1}{6}\overline{z}^3$$

با برد CHD حاصل می گردد (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $f = z + \frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{z}^2 + \frac{1}{6}\overline{z}^3$.

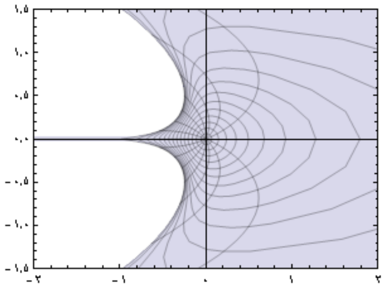
مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $F = \frac{z}{1-z}$ که تک ارز محدب است (شکل ۱.۲). می خواهیم نگاشت همساز تک ارز $f = h + \overline{g}$ را با انبساط $\omega(z) = z^2$ بسازیم. شرط $|\omega(z)| = |z^2| < 1$ موضعا تک ارزی f را تضمین می کند. گیریم $h - g = \frac{z}{1-z}$ و $\frac{g'(z)}{h'(z)} = z^2$ و بنابراین

$$\begin{cases} h' - g' = \frac{1}{(1-z)^2} \\ g' = z^2 h' \end{cases} \quad \begin{cases} h'(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z)^2} \\ g'(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)(1-z)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} h(z) = \frac{z-2}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{8} - \frac{1}{2} \\ g(z) = \frac{3z-2}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{8} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

با ثابت انتگرالگیری $h(0)=g(0)=0$ و بعد

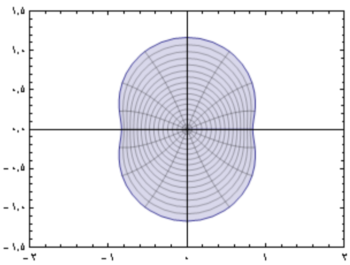
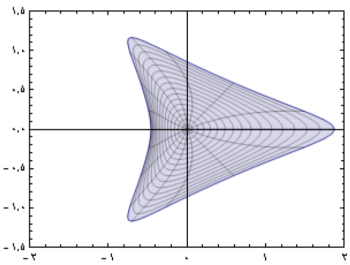
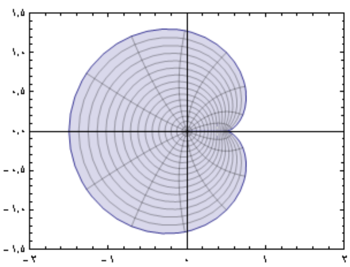
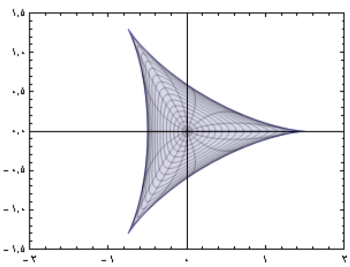
$$f=h+\overline{g}=-\frac{1}{2}\frac{z}{(1-z)^{2}}+2\mathbf{Re}\left(\frac{3z-2}{4(z-1)^{2}}+\frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1}\right)$$

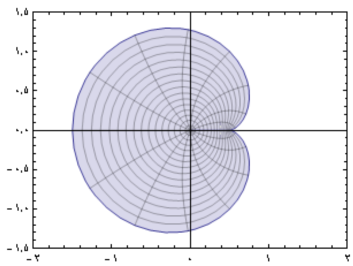
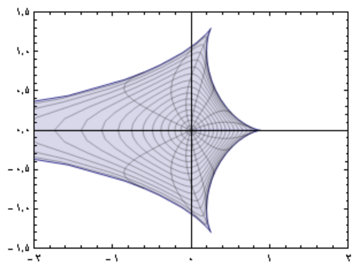
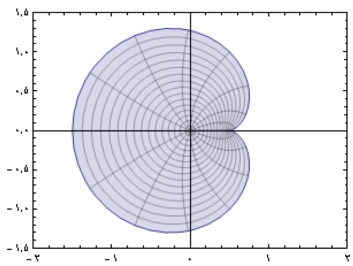
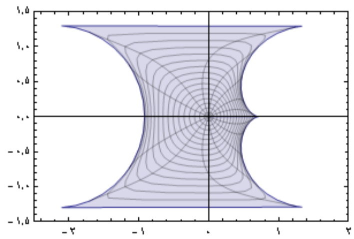
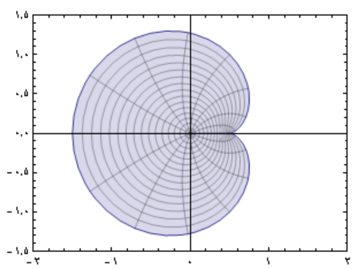
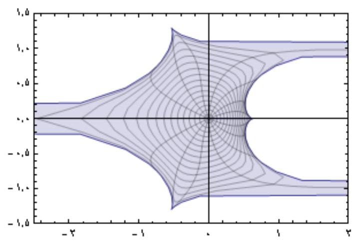
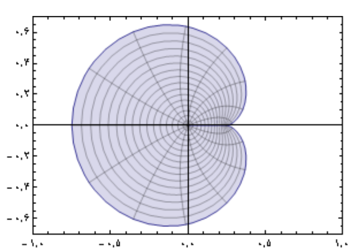
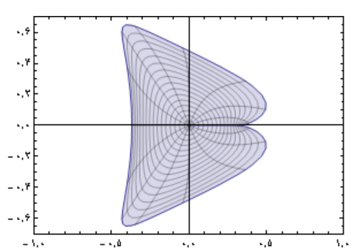
نگاشت CHD مطلوب خواهد بود (شکل ۳.۲).

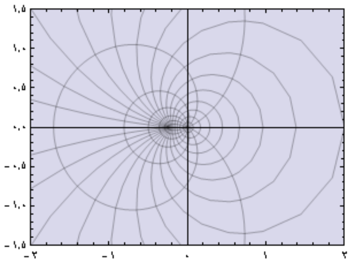
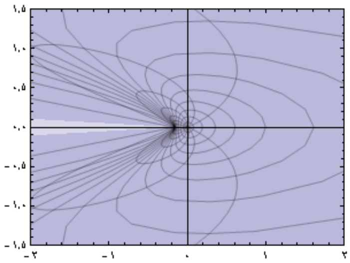


شکل ۳.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز f در مثال ۲.۵.۲.

در ذیل چند نگاشت که با تکنیک برشی حاصل شده اند را با رسم شکل‌شان خواهیم آورد. در اینجا نیز نگاشت تحلیلی با برد CHD مانند F داده شده و با انبساط خاص ω در نظر گرفته می شود، سپس نگاشت همساز تک ارز f که برد CHD است، متناظر با آن ساخته می شود. سرانجام تصویر قرص یکه را تحت F و f آورده ایم:

–	F	f
$\begin{cases} F=z-\frac{1}{6}z^{3} \\ \omega=\frac{1}{\sqrt{2}}z \\ h=z+\frac{1}{2\sqrt{2}}z^{2} \\ g=\frac{1}{2\sqrt{2}}z^{2}+\frac{1}{6}z^{3} \\ f=z+\frac{1}{2\sqrt{2}}z^{2} \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{z}^{2}+\frac{1}{6}\overline{z}^{3} \end{cases}$		
$\begin{cases} F=z-\frac{1}{2}z^{2} \\ \omega=z \\ h=z \\ g=\frac{1}{2}z^{2} \\ f=z+\frac{1}{2}\overline{z}^{2} \end{cases}$		

$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^2 \\ h = \log(1+z) \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 \\ \quad + \log(1+z) \\ f = 2\,\mathbf{Re}\,\log(1+z) \\ \quad - \overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z}^2 \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^3 \\ h = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) \\ \quad - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ \quad + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^4 \\ h = \frac{1}{4}\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{\tan^{-1} z}{2} \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 \\ + \frac{1}{4}\log\frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{\tan^{-1} z}{2} \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 \\ h = \log\frac{4}{z^2-2z+4} \\ g = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 \\ \quad + \log\frac{4}{z^2-2z+4} \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		

$\begin{cases} k_0 = \frac{z}{(1-z)^2} \\ \omega = z \\ h = \frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \\ g = \frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \\ f = \mathbf{Re}\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} \\ \quad +i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} \end{cases}$		

در ردیف انتهای جدول، با استفاده از تابع کوبه تحلیلی $k_0(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ و انبساط $\omega = z$ تابع کوئب (احتمالی) همساز [30]

$$f(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2}$$

ساخته شده است. انتظار می رود این تابع

$$k_{0H}(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \frac{\frac{1}{2}\bar{z}^2+\frac{1}{6}\bar{z}^3}{(1-\bar{z})^3} \in \mathcal{S}_H^\circ \qquad (۸.۲)$$

نقش تابع کرانی را در رده ی $\mathcal{S}_H^\circ$ بازی نماید. تابع $k_{0H}(z)$ قرص $\mathbb{D}$ را به تمام صفحه منهای قسمتی از محور حقیقی منفی، از $-\frac{1}{6}$ تا ∞ می نگارد. ضرایب این تابع در

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad , \quad |b_n| \leqslant \frac{1}{6}(n-1)(2n-1) \qquad (۹.۲)$$

صدق می کنند [۳۰]. البته این مسئله که تمام توابع $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ برای تمام اندیسهای n ، ضرایب h و g می بایست در (۹.۲) صدق نمایند هنوز هم مسئله ی باز تلقی می شود. همچنین انتظار می رود که مانند قضیه یک‌ـچهارم کوبه، برد هر تابع در $\mathcal{S}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{1}{6}$ شود اما تاکنون چنین ثابت شده که

لم ۲.۵.۲. [۲۵] برد هر تابع $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{1}{16}$ است.

بعنوان مسئله ی باز چنین عنوان می شود که مثالهایی از توابع تک ارز همساز ارائه دهید که انبساط آنها توابع داخلی منفرد[31] و خواص آنها را نیز بررسی نمائید.

[30] Harmonic Koebe function
[31] Singular inner function

۶.۲ توابع همساز ستاره‌گون

از لحاظ تحلیلی تابع همساز f ستاره‌گون است اگر $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ یعنی آرگومان باید تابعی غیرنزولی برحسب θ باشد، بعبارتی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\} \geq 0$$

رده تمام توابع همساز ستاره‌گون در $\mathcal{S}_H$ با $\mathcal{S}_H^*$ نمایش داده شده که در تحدید به $\mathcal{S}_H^\circ$ بشکل $\mathcal{S}_H^{\circ *}$ مشخص می شود. یکی از شروط کافی برای ستاره‌گونی چنین است:

لم ۱.۶.۲. (سیلورمن [۹۶]، آهوجا[32] [۲]) اگر ضرایب (۴.۲) در $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leqslant 1$ صدق کنند، آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^*$.

زیررده $\mathcal{S}_H^\circ$ از $\mathcal{S}_H$ شامل همه توابع $f \in \mathcal{S}_H$ با شرط $f_{\bar{z}}(0) = 1$ است ، پس $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_H^\circ \subset \mathcal{S}_H$. کلونی و شیل_سمال توابع ستاره‌گون در $\mathcal{S}_H$ با عنوان زیررده $\mathcal{S}_H^*$ بررسی کردند. برخلاف ستاره‌گونی در توابع تحلیلی، روی رده ی توابع $\mathcal{S}_H^*$ ستاره‌گونی خاصیتی ارثی نیست، در واقع لزومی ندارد که تصویر هر زیرقرص $|z| < r < 1$ خود، ناحیه ای ستاره‌گون (نسبت به مبداء) باشد [۳۰، ۳، ۷۹]. بنابراین به خاصیتی نیازمندیم تا ستاره‌گونی را برای توابع همساز موروثی کند:

تعریف ۱.۶.۲. تابع همساز f با شرط $f(0) = 0$ را کاملاً ستاره‌گون[33] نامیم اگر هر دایره ی $|z| = r < 1$ را به صورت یک به یک به منحنی بسته ای که مرز ناحیه ای ستاره‌گون نسبت به مبداء است بنگارد.

در حالت کلی یک تابع کاملاً ستاره‌گون لزوماً تک ارز نیست ([۲۴]، ص۱۴)، ولی می توانیم خود را محدود به $\mathcal{S}_H$ کنیم. قابل توجه اینکه یک نگاشت کاملاً ستاره‌گون جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ تک ارز است. برای $f \in \mathcal{S}_H$، خانواده همه توابع کاملاً ستاره‌گون را با $\mathcal{FS}_H^*$ مشخص می کنیم. در ۱۹۸۰ موکانو رابطه ای را بین کاملا ستاره‌گونی عملگر مشتق یک تابع غیرتحلیلی بیان کرد [۶۴]. برای تابع مختلط f عملگر دیفرانسیلی

$$Df = zf_z - \bar{z}f_{\bar{z}} \tag{۱۰.۲}$$

را در نظر می گیریم. در اینصورت می توان دید که برای تابع مختلط جهت نگهدار $f(z)$ داریم $Df \neq 0$ و نیز

$$D^2 f = D(Df) = zf_z + \bar{z}f_{\bar{z}} + zzf_{zz} + \overline{zz}f_{\overline{zz}} \tag{۱۱.۲}$$

[32] Ahuja

[33] Fully-starlike

برای تابع مختلط جهت نگهدار $f(z)$، که $Df \neq \circ$. اگر برای تمام $z \in \mathbb{D} - \{\circ\}$ داشته باشیم $f(z) \neq \circ$، و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > \circ$ بوده و در شرط $\mathbf{Re}\,\dfrac{Df(z)}{f(z)} > \circ$ یا $\mathbf{Re}\,\dfrac{D^{۲}f(z)}{Df(z)} > \circ$ برای $z \in \mathbb{D} - \{\circ\}$ صدق نماید، سپس f هر دایره $\circ < |z| = r < ۱$ را به منحنی ساده بسته می نگارد [۶۴]، و از

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\} = \mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)}$$

داریم:

لم ۲.۶.۲. (موکانو [۶۴]) گیریم $f \in C^{۱}(\mathbb{D})$ تابع مختلطی با $f(\circ) = \circ$ باشد. اگر برای $z \in \mathbb{D} - \{\circ\}$ داشته باشیم $f(z) \neq \circ$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > \circ$ و $\mathbf{Re}\,\dfrac{Df(z)}{f(z)} > \circ$ برقرار باشند سپس f در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً ستاره‌گون است.

زیر رده ی $\mathcal{S}_H^{\circ *}(\alpha)$ از رده ی توابع $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را که به توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه ی α، $(\circ \leqslant \alpha < ۱)$ معروف است توسط جهانگیری[۳۴] معرفی شد [۴۷] . وی ثابت کرد که $f \in \mathcal{S}_H^{\circ *}(\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n| + \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n| \leqslant ۱ \qquad (۱۲.۲)$$

۷.۲ توابع همساز محدب

می دانیم که f تابعی محدب است اگر در $f(\mathbb{D})$ عبارت $\arg\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\}$ تابعی غیرنزولی برحسب θ باشد. بعبارتی دیگر

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geq \circ$$

رده ی تمام توابع محدب در $\mathcal{S}_H$ را با $\mathcal{K}_H$ نشان داده و زیر رده ی $\mathcal{K}_H^{\circ}$ نیز توابع محدب در $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را مشخص می کند.

لم ۱.۷.۲. (کلونی و شیل‌ـسمال [۲۵]) برای f با نمایش کانونی (۳.۲)، اگر $f \in \mathcal{K}_H$ سپس برای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|A_n| \leqslant \frac{n-۱}{۲}|B_۱| + \frac{n+۱}{۲} \;,\; |B_n| \leqslant \frac{n-۱}{۲} + \frac{n+۱}{۲}|B_۱|$$

برای $n \geq ۲$ نیز خواهیم داشت $|A_n| < n$ و $|B_n| < n$.

لم ۲.۷.۲. (سیلورمن [۹۶]، [۲]) اگر $\sum_{n=۲}^{\infty}n^{۲}|a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty}n^{۲}|b_n| \leqslant ۱$ سپس $f \in \mathcal{K}_H$.

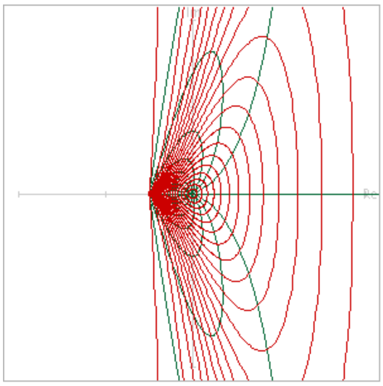
برخلاف توابع تحلیلی، تحدب روی رده ی $\mathcal{K}_H$ خاصیتی موروثی ندارد، یعنی لازم نیست که تصویر هر زیرقرص $|z| < r < ۱$ تحت f خود ناحیه ای محدب باشد. اگر f نگاشتی تک ارز

[۳۴] Jahangiri

روی $\mathbb{D}$ به ناحیه ای محدب باشد، آنگاه تصویر هر قرص $|z| < r$ برای هر شعاع $r \leqslant \sqrt{2}-1$ محدب خواهد بود ولی برای شعاعی در بازه ی $\sqrt{2}-1 < r < 1$ این موضوع درست نیست. کافی است تابع

$$f(z) = \mathbf{Re}\frac{z}{1-z} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} + \frac{-\frac{1}{2}\bar{z}^2}{(1-\bar{z})^2} \in \mathcal{K}_H \tag{13.2}$$

را در نظر بگیریم که $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه ی $\mathbf{Re}\, w > -\frac{1}{2}$ می نگارد. تصویر هر قرص $|z| \leqslant r$ برای هر r در $\sqrt{2}-1 < r < 1$ محدب نیست (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲: تصویر قرص $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز (۱۳.۲).

لازم است تعریفی ارائه دهیم که خاصیت ارثی تحدب را منتقل نماید:

تعریف ۱.۷.۲. [۲۴، ۷۹] تابع همساز f روی قرص واحد را کاملاً محدب[۳۵] نامیم اگر $f(0) = 0$ بوده و هر دایره ی $|z| = r < 1$ را در وضعیتی یک به یک به مرز یک ناحیه محدبی در برد بنگارد.

در حالت خاصی که برای $0 < |z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ طبق قضیه ی رادو[۳۶]ـ کنزه[۳۷]ـ چوکه[۳۸] نگاشت کاملاً محدب در $\mathbb{D}$ لزوماً تک ارز خواهد شد ([۳۰]، بخش ۱.۳). زیررده ی تمام توابع کاملاً محدب از توابع $\mathcal{S}_H$ را در $\mathbb{D}$ با $\mathcal{FK}_H$ نشان می دهیم. اگر برای همه ی $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ باشد، آنگاه [۶۴]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} = \mathbf{Re}\frac{D^2 f(z)}{Df(z)}$$

بنابراین

۳۵ Fully-convex

۳۶ Radó

۳۷ Kneser

۳۸ Choquet

لم ۳.۷.۲. (موکانو [۶۴]) گیریم $f \in C^{2}(\mathbb{D})$ تابعی مختلط باشد که $f(0) = 0$، برای همه ی $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ بوده و $\mathbf{Re}\,\frac{D^{2} f(z)}{Df(z)} > 0$ باشد، آنگاه f در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً_محدب است.

تابع همساز f تک ارز و محدب است اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، تابع تحلیلی $e^{i\alpha}h - e^{i\alpha}g$ تک ارز و محدب در جهت افقی باشد. علاوه بر این، شرطی لازم و کافی برای آنکه تابعی کاملاً محدب باشد توسط چوکه[۳۹]، دورن[۴۰] و آسگود[۴۱] مطرح شد ([۲۴] ص۱۳۹).

قضیه ۱.۷.۲. [۲۴] گیریم $f(z) \in \mathcal{S}_H$. $f \in \mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$|zh'(z)|^{2}\mathbf{Re}\,Q_h \geqslant |zg'(z)|^{2}\mathbf{Re}\,Q_g + \mathbf{Re}\left\{z^{3}\left(h''(z)g'(z) - h'(z)g''(z)\right)\right\} \tag{۱۴.۲}$$

که $Q_h = 1 + z\frac{h''(z)}{h'(z)}$ و $Q_g = 1 + z\frac{g''(z)}{g'(z)}$ بازای هر z در $\mathbb{D}$.

تابع همساز تک ارز f در D را محدب در جهت α گوئیم اگر $f(\mathbb{D})$ محدب در جهت α باشد. رده ی $\mathcal{K}_H^{\circ}(\alpha)$ از زیر رده های $\mathcal{S}_H^{\circ}$ شامل همه ی توابع محدب از مرتبه ی α، $(0 \leqslant \alpha < 1)$ است که در شرط

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geq \alpha$$

صدق می کنند و داریم

لم ۴.۷.۲. (جهانگیری [۴۷]) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n| \leqslant 1 \tag{۱۵.۲}$$

آنگاه $f \in \mathcal{K}_H^{\circ}(\alpha)$.

۸.۲ توابع همساز نزدیک_به_محدب

تابع همساز $f(z) \in \mathcal{S}_H$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر بردش $f(\mathbb{D})$ دامنه ای نزدیک_به_محدب باشد. رده ی همه ی توابع نزدیک_به_محدب از $\mathcal{S}_H$ را با $\mathcal{C}_H$ نشان داده و زیر رده ی محدود به $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را با $\mathcal{C}_H^{\circ}$ مشخص می کنیم.

لم ۱.۸.۲. [۲۵] گیریم $f = h + \overline{g}$ در $\mathbb{D}$ موضعا تک ارز بوده و $h + \epsilon g$ برای $|\epsilon| \leqslant 1$ ی محدب باشد، آنگاه f در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک_به_محدب است.

---

[۳۹] Martin Chuaqui

[۴۰] Peter Duren

[۴۱] Brad Osgood

۹.۲ پیچش

پیچش دو تابع همساز $f(z)$ و $F(z)$ با نمایش های کانونی

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n}\overline{z}^n \tag{۱۶.۲}$$

$$F(z)=H(z)+\overline{G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\overline{z}^n \tag{۱۷.۲}$$

چنین تعریف می شود:

$$(f*F)(z)=(h*H)(z)+\overline{g*G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nA_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_nB_n}\overline{z}^n \tag{۱۸.۲}$$

برخلاف حالت تحلیلی، پیچش دو تابع همساز لزوماً خواص رده را حفظ نمی کند. مثلاً گیریم

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=\frac{z}{1-z}$$

با انبساط $\omega(z)=-z$ باشد پس $f\in\mathcal{K}_H^{\circ}$ و

$$F(z)=H(z)+\overline{G(z)}=\frac{z}{1-z}$$

با انبساط $\omega(z)=-z^n$ را نیز در نظر بگیرید که $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$ خواهد بود. برای $n\in\mathbb{N}$ (که $n\geq 3$)، پیچش $(f*F)(z)$ در $\mathbb{D}$ حتی موضعاً تک ارز هم نیست [۲۹].

لم ۱.۹.۲. (کلونی و شیل_سمال [۲۵]) اگر $\phi\in\mathcal{K}$ و $F\in\mathcal{K}_H$ آنگاه

$$(\phi+\epsilon\overline{\phi})*F\in\mathcal{C}_H$$

بازای $|\epsilon|\leqslant 1$.

آهوجا و دیگران [۲] نشان دادند که در لم فوق، شرط تحدب ϕ را نمی توان با ستاره‌گونی تعویض نمود. برای مثال تابع تحلیلی ستاره‌گون $\phi(z)=z+\frac{1}{n}z^n$ در $\mathbb{D}$ را با $\epsilon=0$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$F(z)=h+\overline{g}=\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}+\frac{-\frac{1}{2}\overline{z}^2}{(1-\overline{z}^2)^2}\in\mathcal{K}_H$$

در اینصورت تابع پیچش

$$(\phi+0\overline{\phi})*F=z+\frac{n+1}{2n}z^n\ ,\ \ n\geq 2$$

حتی در $\mathbb{D}$ تک ارز هم نخواهد بود.

لم ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم h و g در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $|g'(0)| < |h'(0)|$ باشد و نیز $h + \epsilon g$ در $\mathbb{D}$ برای هر $|\epsilon| = 1$ نزدیک_به_محدب شود. در اینصورت

$$h + \overline{g} \in \mathcal{C}_H$$

اگر ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و محدب باشد آنگاه

$$(\phi + \sigma\overline{\phi}) * (h + \overline{g}) \in \mathcal{C}_H \;\;,\;\; |\sigma| = 1$$

کلونی و شیل_سمال در مقاله ی خود سوالی در این موضوع را مطرح نمودند که برای چه توابع همساز ϕ ی با $f \in \mathcal{K}_H$، خواهیم داشت $\phi * f \in \mathcal{K}_H$. این سوال به طور جزئی توسط روشه ویه و سالیناس[۴۲] [۹۱] پاسخ داده شد. آنها ثابت کردند که اگر ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد سپس برای هر $F \in \mathcal{K}_H$، $\phi * F = \phi * \mathbf{Re}\, F + \overline{\phi * \mathbf{Im} F} \in \mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی γ تابع $\phi + i\gamma z\phi'$ در جهت محور موهومی محدب شود.

لم ۳.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم h و ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی محدب و g هم در آنجا تحلیلی باشد چنانکه $|g'(z)| < |h'(z)|$ برای $z \in \mathbb{D}$. آنگاه برای هر $|\epsilon| \leqslant 1$،

$$(\phi + \epsilon\overline{\phi}) * (h + \overline{g}) \in \mathcal{C}_H$$

قضیه ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای اینکه تابعی در توابع همساز ستاره‌گون واقع شود را بیان می دارد:

قضیه ۱.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H$ سپس $f \in \mathcal{S}_H^*$ اگر و تنها اگر

$$h(z) * \frac{z + \frac{1}{2}(\zeta - 1)z^2}{(1-z)^2} - \overline{g(z)} * \frac{\zeta\overline{z} - \frac{1}{2}(\zeta - 1)\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2} \neq 0 \quad ; \quad |\zeta| = 1,\ 0 < |z| < 1$$

نتیجه ۱.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H$، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \leqslant 1$$

آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^*$.

قضیه ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای آنکه تابع همسازی محدب باشد را عنوان می کند:

[۴۲] Salinas

قضیه ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f=h+\bar{g}\in\mathcal{S}_H$، سپس $f\in\mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر

$$h(z)*\frac{z+\zeta z^2}{(1-z)^3}+\overline{g(z)*\frac{\zeta\bar{z}+\bar{z}^2}{(1-\bar{z})^3}}\neq 0\ ;\ |\zeta|=1,\ 0<|z|<1$$

نتیجه ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم $f=h+\bar{g}\in\mathcal{S}_H$، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}n^2|b_n|\leqslant 1$$

دراینصورت $f\in\mathcal{K}_H$.

کومار[43] و دیگران [۵۱] هم برخی نتایجی را بر اساس نامساوی هایی که روی ضرایب توابع همساز محدب ۱.۷.۲ برقرار است را بدست آوردند (۲۰۱۲) که نتایج مفیدی از پیچش دربرداشت:

لم ۴.۹.۲. [۵۱] فرض کنید که f، F و $f*F$ به ترتیب دارای نمایش هایی بفرم ۱۶.۲ـ ۱۸.۲ باشند، در اینصورت

- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^3|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^3|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^2|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*\circ}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^3|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^3|b_n|\leqslant 1-|b_1|$ و $F\in\mathcal{K}_H$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^2|b_n|\leqslant 1-|b_1|$ و $F\in\mathcal{K}_H$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*\circ}(\alpha)$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$.
- فرض کنید $\sum_{n=2}^{\infty}n^3|a_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H$، اگر $f*F$ موضعاً تک ارز باشد، آنگاه $f*F\in\mathcal{C}_H$.

اگر $f=h+\bar{g}\in\mathcal{S}_H^{\circ}$ قرص $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه راست $\{w:\mathbf{Re}\,w>\frac{1}{2}\}$ بنگارد، سپس باید در $h+g=\dfrac{z}{1-z}$ صدق نماید.

مجموعه توابع $f=h+\bar{g}$ که $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه راست $R=\{w:\mathbf{Re}\ w>-\frac{1}{2}\}$ می نگارد دارای شکل کلی

$$h(z)+g(z)=\frac{z}{1-z}$$

است که $\dfrac{z}{1-z}$ تابع اکستریمال رده ی $\mathcal{K}$ است و این توابع $\mathbb{D}$ را به نوار عمودی

$$R=\left\{w:\frac{\alpha-\pi}{2\sin\alpha}<\mathbf{Re}\ w<\frac{\alpha}{2\sin\alpha}\right\}\tag{۱۹.۲}$$

[43] Kumar

می نگارند و دارای شکل کلی زیرند:

$$h(z)+g(z)=\frac{1}{2i\sin\alpha}\log\frac{1+ze^{i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}}$$

لم ۵.۹.۲. (دورف[44] [۲۸]) فرض کنید $f_1=h_1+\overline{g_1}\in\mathcal{K}_H^\circ$ با $h_1+g_1=\frac{z}{1-z}$ و نیز $f_2=h_2+\overline{g_2}\in\mathcal{K}_H^\circ$ با $h_2+g_2=\frac{z}{1-z}$ باشد. اگر f_1*f_2 موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشند، آنگاه $f_1*f_2\in\mathcal{S}_H^\circ$ و محدب در جهت محور طولهاست.

۱۰.۲ زیررده هائی مرتبط با پیچش

بین سالهای ۱۹۹۸ و ۲۰۰۸، زیررده هایی از $\mathcal{S}_H$ توسط مولفانی معرفی و بررسی شد مانند جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸)، جهانگیری ([۴۷]، ۱۹۹۹)، جهانگیری، موروگوروموری[45] و وی جی[46] ([۴۸]، ۲۰۰۲)، آهوجا، جهانگیری و سیلورمن ([۲]، ۲۰۰۳)، موروگوروموری ([۶۶]، ۲۰۰۳)، یالسین[47]، اوزترک[48] و یامانکارادنیز[49] ([۱۱۹]، ۲۰۰۷) و نیز الشقصی[50] و داروس[51] ([۸]، [۹]، ۲۰۰۸) که هر کدام به نوعی در یافتن شروطی لازم و کافی در زیررده های معرفی شده کوشیدند. در ۲۰۱۰، علی[52]، استفان[53] و سوبرامانیان[54] زیررده ای از $\mathcal{S}_H$ را معرفی کردند که اکثر زیررده های قبل را بعنوان حالتی خاص در بر می گرفت. آنها تعریف زیر را ارائه دادند [۶]:

تعریف ۱.۱۰.۲. فرض کنید σ ثابتی حقیقی بوده و $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n z^n$ تابعی مفروض است که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی می باشد. تابع همساز $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^\circ$ متعلق به رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ است اگر

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{z(h*\phi)'(z)-\sigma\overline{z(g*\phi)'(z)}}{(h*\phi)(z)+\sigma\overline{(g*\phi)(z)}}\right\}>\alpha\ ,\ z\in\mathbb{D} \qquad (۲۰.۲)$$

که $0\leqslant\alpha<1$.

این تعریف در حالات خاصی زیررده های قبلی را شامل می شود مثلاً

[44] Dorff
[45] Murugusundaramoorthy
[46] Vijaya
[47] Yalçin
[48] Öztürk
[49] Yamankaradeniz
[50] Al-Shaqsi
[51] Darus
[52] Ali
[53] Stephen
[54] Subramanian

$\mathcal{S}_H^{*\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\dfrac{z}{1-z}, 1, 0\right)$ سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸).

$\mathcal{K}_H^{\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\dfrac{z}{(1-z)^2}, 1, 0\right)$ سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸).

$\mathcal{S}_H^{*\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\dfrac{z}{1-z}, 1, \alpha\right)$ جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، ([۴۷]، ۱۹۹۹).

$\mathcal{K}_H^{\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\dfrac{z}{(1-z)^2}, -1, \alpha\right)$ جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، ([۴۷]، ۱۹۹۹).

$H(p,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^p z^n, (-1)^p, \alpha\right)$ که عملگر سالاگان[۵۵] تغییریافته است که توسط جهانگیری، موروگورومورثی و وی جی مطالعه شد ([۴۸]، ۲۰۰۲).

$R_H(\lambda,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(\dfrac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}, 1, \alpha\right)$ به شرط $\lambda > -1$ که شامل عملگر مشتق روشه ویه است و توسط موروگورومورثی بررسی شد ([۶۶]، ۲۰۰۳).

$H(p,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^p C(\lambda,n) z^n, (-1)^p, \alpha\right)$ که $C(\lambda,n) = \dfrac{(\lambda+1)_{n-1}}{(n-1)!}$ و $(\lambda+1)_{n-1} = (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$ که بدینصورت رده ی $M_H(1,\lambda,\alpha)$ را مشخص می کند که توسط الشقصی و داروس مطالعه شد ([۸، ۹]، ۲۰۰۸).

در واقع رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ این تعداد از زیررده های قبلی را روی توابع همساز متحد و یکپارچه می کند و نتایج زیر را بدست می دهد:

قضیه ۲.۱۰.۱. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$، سپس $f \in \mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$(h*\phi)*\left[\frac{z+\frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^3}\right] - \sigma\overline{(g*\phi)*\left[\frac{\frac{x+\alpha}{1-\alpha}\overline{z} - \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^3}\right]} \neq 0 \; ; \; |x|=1 \, , \, |z| \neq 0. \qquad (۲.۲۱)$$

شرطی کافی برای آنکه تابع همسازی در رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ قرار گیرد عبارتست از

قضیه ۲.۱۰.۲. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$، آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n||\phi_n| + |\sigma| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n||\phi_n| \leqslant 1. \qquad (۲.۲۲)$$

علاوه بر این، مولفان مذکور مجموعه ای دیگر از توابع همساز را که قبلا توسط مولفان دیگر بررسی شده بود را بکپارچه نمودند. این رده ها شامل رده هائی از توابع تحلیلی محدب یکنواخت و توابع ستاره‌گون سهموی هستند [۸۷]. چنین زیررده هائی از توابع همساز شامل رده های $G_H(\alpha)$ و $GK_H(\alpha)$ از توابع همساز نوع گودمن-رونینگ[۵۶] هستند که در [۸۹، ۹۰] مطالعه

---

[۵۵] Salagean

[۵۶] Goodman-Rønning-type harmonic functions

شده و نیز رده های $RS_H(p,\gamma)$ [۱۱۹] و $M_H(n,\alpha)$ [۹] است که به ترتیب شامل عملگر نوع سالاگان[۵۷] و عملگر روشه ویه[۵۸] هستند. سپس تعریف زیر ارائه شد:

تعریف ۲.۱۰.۲. گیریم σ ثابتی حقیقی بوده و $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ تابعی مفروض باشد که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی است. تابع همساز $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^{\circ}$ در رده ی $\mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ است اگر

$$\mathbf{Re}\left\{(1+e^{i\gamma})\frac{z(h*\phi)'(z) - \sigma\overline{z(g*\phi)'(z)}}{(h*\phi)(z)+\sigma\overline{(g*\phi)(z)}} - e^{i\gamma}\right\} > \alpha \quad ; \quad z\in\mathbb{D} \qquad (۲۳.۲)$$

با $\gamma \in \mathbb{R}$ و $0 \leq \alpha < 1$.

قضیه ۳.۱۰.۲. ([۶]) فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^{\circ}$. آنگاه $f \in \mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$(h*\phi)*\left[\frac{z + \frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right] - \sigma\overline{(g*\phi)}*\left[\frac{\frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+\alpha}{1-\alpha}\overline{z} - \frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+2\alpha-1}{2-2\alpha}\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}\right] \neq 0 \ ; \ |x|=1\,,\ |z|\neq 0. \qquad (۲۴.۲)$$

قضیه ۴.۱۰.۲. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^{\circ}$، سپس $f \in \mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1-\alpha}{1-\alpha}|a_n||\phi_n| + |\sigma|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1+\alpha}{1-\alpha}|b_n||\phi_n| \leqslant 1. \qquad (۲۵.۲)$$

۱۱.۲ رده ی $\mathcal{T}_H$

چندین زیررده از توابع تحلیلی با ضرایب منفی توسط سیلورمن بررسی شد [۹۷]. یک اتحاد و یکپارچگی از توابع تحلیلی با ضرایب منفی pــ مقداری توسط [۴] معرفی شد که روی پیچش عمل می کردو شامل چند زیررده از توابع تحلیلی با ضرایب منفی بود که قبلا مطالعه شده بودند.

گیریم $\mathcal{T}_H(\alpha)$ زیررده ای از $\mathcal{S}_H$ شامل تمام توابع همساز $f = h + \overline{g}$ است که که ضرایب ناصفرشان در بسط سری تابع تحلیلی h، از دومی به بعد منفی اند، یعنی

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n \quad , \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n$$

و نیز در شرط زیر صدق می نمایند

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(re^{i\theta})\} \geq \alpha$$

[۵۷] Salagean-type operator

[۵۸] Ruscheweyh operator

که $r<1=|z|$ و $1>\alpha\geqslant 0$. این رده در ۱۹۹۹ توسط جهانگیری معرفی شد [۴۷].
اژی لارسی[۵۹] و سوداراسان[۶۰] [۳۵] رده ی $\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ از توابع همساز در $\mathcal{S}_H$ که در شرط

$$\mathbf{Re}\left\{(1+ke^{i\alpha})\frac{(z(h*\phi)'-\overline{z(g*\psi)'})}{z'((1-\lambda)z+\lambda((h*\phi)+\overline{(g*\psi)}))}-ke^{i\alpha}\right\}\geq\gamma$$

برای همه α حقیقی صدق می کنند را بررسی نمودند (۲۰۱۳). در این تعریف $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n z^n$، $\psi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n z^n$ با شروط $\lambda_n\geq 0$، $\mu_n\geq 0$، $0\leqslant\lambda\leqslant 1$، $z'=\frac{\partial}{\partial\theta}(z=re^{i\theta})$، $0\leqslant r<1$، $0\leqslant\theta<2\pi$ و $0\leqslant\gamma<1$ تحلیلی اند. همچنین با فرض $\overline{\mathcal{S}_H^*}(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ نمایش رده ی $\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ شامل توابع $f=h+\overline{g}\in\mathcal{T}_H$ می شود.

ملاحظه ۲.۱۱.۱. بازای $\alpha=0$،

$$\overline{\mathcal{S}_H^*}\left(\frac{z}{1-z},\frac{z}{1-z},1,\gamma,1\right)=\mathcal{T}_H\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

لم ۲.۱۱.۱. [۳۵] فرض کنید تابع $f=h+g$ چنان باشد که h و g با (۲.۳) داده شده و نیز بگیرید

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n(1+k)-\lambda(k+\gamma)}{1-\gamma}\right)\lambda_n|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(1+k)+\lambda(k+\gamma)}{1-\gamma}\right)\mu_n|b_n|\leqslant 1$$

که $k\geq 0$، $\lambda_n\geq 0$، $\mu_n\geq 0$، $0\leqslant\lambda\leqslant 1$، $0\leqslant\gamma\leqslant 1$، α عدد حقیقی و اگر

$$n(1-\gamma)\leqslant\big(n(1+k)-\lambda(k+\gamma)\big)\lambda_n\leqslant\big(n(1+k)+\lambda(k+\gamma)\big)\mu_n$$

آنگاه f نگاشتی همساز تک ارز جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ بوده و برای $\lambda=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$، $f\in\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$.

اکنون توجه خود را به زیررده ی $TS_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ از $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ معطوف می کنیم که شامل توابع همساز $f=h+\overline{g}$ به شکل

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\quad,\quad g(z)=\sigma\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n\quad;\quad a_n\geq 0,\ b_n\geq 0 \qquad (۲.۲۶)$$

هستند. زیررده $TS_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ شامل حالات خاصی است که قبلا در [۸، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۶۶] مطالعه شده اند.

[۵۹] Ezhilarasi
[۶۰] Sudharsan

قضیه ۱.۱۱.۲. ([۶]) فرض نمائید $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ با $\phi_n \geqslant 0$ بوده و f به شکل ۲۶.۲ باشد. آنگاه $f \in TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} a_n \phi_n + \sigma^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha} b_n \phi_n \leqslant 1. \tag{۲۷.۲}$$

یک کران ظریف برای $|f(z)|$ که $f \in TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ چنین بدست می آید:

نتیجه ۱.۱۱.۲. ([۶]) گیریم $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ با $\phi_n \geqslant \phi_2 (n \geqslant 2)$ بوده و $|\sigma| \geqslant \frac{2-\alpha}{2+\alpha}$ باشد. اگر $f \in TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ باشد سپس برای $|z| = r < 1$

$$r - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2} r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2} r^2 \tag{۲۸.۲}$$

این نتیجه بازای تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2} z^2$ ظریف بوده و تساوی را برقرار می کند.

چنانکه پیداست برد توابع موجود در $TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ قرص $|w| < 1 - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\phi_2}$ را می پوشانند. همچنین رده ی $TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ محدب بوده و نقاط اکستریمال رده ی $TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ را می توان چنین یافت:

قضیه ۲.۱۱.۲. ([۶]) گیریم

$$h_1(z) := z \quad , \quad h_n(z) := z - \frac{1-\alpha}{(n-\alpha)\phi_n} z^n \quad , \quad g_n(z) := z + \frac{1-\alpha}{\sigma(n+\alpha)\phi_n} \bar{z}^n \tag{۲۹.۲}$$

برای $n = 2, 3, \cdots$. یک تابع $f \in TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ اگر و فقط اگر f را بتوان بصورت

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n), \tag{۳۰.۲}$$

بیان کرد که $\lambda_n \geqslant 0$، $\gamma_n \geqslant 0$، $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n)$ و $\gamma_1 = 0$ است. در حالت خاص نقاط اکستریم $TS^{\circ}_H(\phi, \sigma, \alpha)$ عبارتند از $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$.

فصل ۳

توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت

هدف اصلی رساله در این بخش ظاهر می شود و در اینجا ما رده های توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت را تعریف و مشخصه سازی می کنیم. هر دو رده با استفاده از یکپارچه سازی روی رده های توابع تحلیلی ستارهٔگون یکنواخت (به ترتیب محدب یکنواخت) و توابع همساز کاملاً ستارهٔگون (به ترتیب کاملاً محدب) اعمال شده و در برگیرنده ی خواص خانواده‌های پیشین است. مطالعه ی نخستین رده‌ها از توابع تحلیلی توسط گودمن انجام شده و رده‌های توابع همساز که توسط کلونی و شیل–اسمال صورت گرفته ما را به این تعمیم راهنمائی کرد. برخلاف رده‌های ستارهٔگون یکنواخت و کاملاً ستارهٔگون، روی خانواده های محدب مطالعات بیشتری انجام شده و این به رساندن ما به مقصودمان کمک شایانی می کند. در این زمینه اخیراً مطالعات بیشتری صورت گرفته و ما در این فصل آنها را ذکر خواهیم نمود. بعلاوه هم در توابع تحلیلی و هم در توابع همساز، وجود ویژگی پیچش نه تنها از خواص عملکردی دو تابع است بلکه ابزاری قوی در تعمیم مسئله به حالات کلی تر، و استنتاج نتایجی است که در وضعیت قبلی قابل حصول نبوده اند. برای نیل به این مهم، جهت بهره گیری از ابزار پیچش تعاریف و قضایای مورد نیاز را در ادامه بیان خواهیم نمود.

برای تابع همساز $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\mathcal{S}_H$ عملگر $\mathbf{D}_\zeta f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ با تعریف

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\zeta f(z) &= (z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\overline{z}}(z)\\ &= (z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}\end{aligned}\qquad(۱.۳)$$

عملگری همساز است. بازای $\zeta=0$ عملگر $\mathbf{D}_0 f(z)=zf_z-\overline{z}f_{\overline{z}}=zh'-\overline{zg'}=Df(z)$ همان عملگر پیشین (۱۰.۲) بوده و مشتقگیری از عملگر $\mathbf{D}_\zeta f(z)$ نتیجه می دهد که

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2_\zeta f(z) &= \mathbf{D}_\zeta(\mathbf{D}_\zeta f(z))\\ &= \mathbf{D}_\zeta((z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)})\\ &= (z-\zeta)^2h''(z)+\overline{(z-\zeta)^2g''(z)}+(z-\zeta)h'(z)+\overline{(z-\zeta)g'(z)}\end{aligned}\qquad(۲.۳)$$

بازای $\zeta=0$ عملگر $\mathbf{D}^2_0 f(z)=z^2h''(z)+\overline{z^2g''(z)}+zh'(z)+\overline{zg'(z)}=D^2f(z)$ توسط الامیری[۱] و موکانو تشریح شد [۷]. با بکارگیری این نماد، از عملیات نگارش مختصری کاسته شده و معانی فرمول ها واضح تر خواهد بود. در اینجا لازم است ذکر شود که همزمان با کار مولفان در بحث تعمیم توابع کاملا ستاره‌گون، مقاله ای نیز در این باب توسط پوناسمی[۲]، پاراجاپات[۳] و سایرام کالیراج[۴] ارائه شد که حاوی همین ایده هاست [۷۹]. اگرچه تعاریف و نتایج در هر دو مورد مشابه و بحث شکل یکسانی دارد، لیکن اثبات ارائه شده در اینجا با روش پیچش می باشد که به نوبه خود حاوی نوآوری بوده و تاییدی بر کار آنهاست. در این نوشتار سعی شده تا از نمادهای مشترک بهره گرفته و نتایج را در هر دو شکل بیان کنیم.

۱.۳ توابع ستاره‌گون یکنواخت

شبیه تعریف ۱.۱۱.۱ برای توابع تحلیلی، می توان برای توابع همساز چنین تعریف کرد:

تعریف ۱.۱.۳. [۷۹] تابع همساز موضعا تک ارز $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}$ را نگاشت ستاره‌گون یکنواخت[۵] در $\mathbb{D}$ گوئیم اگر f در $\mathbb{D}$ کاملاً ستاره‌گون بوده و هر قوس مدور γ_ζ در $\mathbb{D}$ با مرکز $\zeta\in\mathbb{D}$ را به قوس $f(\gamma_\zeta)$ بنگارد که نسبت به $f(\zeta)$ ستاره‌گون است.

اکنون شرطی لازم را برای آنکه تابع تک ارز $f\in\mathcal{S}_H$ که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت باشد را بیان می کنیم. برای هر قوس مدور

$$\gamma_\zeta:=\{z=\zeta+re^{i\theta}\ ,\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$$

[۱] Al-Amiri
[۲] Ponnusamy
[۳] Prajapat
[۴] Sairam Kaliraj
[۵] Uniformly starlike

که در $\mathbb{D}$ واقع شده و مرکز آن $\zeta \in \mathbb{D}$ است، گیریم Γ_ζ تصویر γ_ζ تحت f باشد. قوس Γ_ζ را نسبت به $f(\zeta)$ ستاره‌گون گوئیم اگر شناسه بردار $f(\zeta+re^{i\theta})-f(\zeta)$ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(\zeta+re^{i\theta})-f(\zeta)\}\geqslant 0 \quad , \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \tag{۳.۳}$$

و یا

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(z)-f(\zeta)\}\geqslant 0$$

و این درست است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{Im}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(z)}{f(z)-f(\zeta)}\geqslant 0$$

برای $z\in\gamma_\zeta$. قرار می دهیم $z=\zeta+re^{i\theta}$ بنابراین $\frac{\partial}{\partial\theta}z=i(z-\zeta)$ و یک محاسبه ساده نتیجه می دهد

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\bar z}(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right\}\geqslant 0 \quad , \quad (z,\zeta)\in\mathbb{D}^2 \quad (z\neq\zeta) \tag{۴.۳}$$

به طور معادل

$$\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}_\zeta f(z)}{f(z)-f(\zeta)}\geqslant 0\ , \quad (z,\zeta)\in\mathbb{D}^2 \tag{۵.۳}$$

رده ی تمام توابع $f\in\mathcal{S}_H$ (به ترتیب $f\in\mathcal{S}_H^\circ$) که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت هستند را با $\mathcal{US}_H^*$ (به ترتیب $\mathcal{US}_H^{\circ *}$) نشان می دهیم. واضح است که $\mathcal{US}_H^*\subset\mathcal{FS}_H^*$.

نتیجه ۱.۱.۳. [۶۹] اگر $f\in\mathcal{UST}$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه $f\in\mathcal{US}_H^*$. لذا $\mathcal{UST}\subset\mathcal{US}_H^*$ و اگر تابعی در (۱.۱۱.۱) صدق نکند، سپس در $\mathcal{US}_H^*$ نیست. گودمن [۴۱] نشان داد که تابع تحلیلی $f(z)=\frac{z}{1-Az}\in\mathcal{UST}$ اگر و فقط اگر $|A|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$، در نتیجه برای نگاشت محدب $\ell(z)=\frac{z}{1-z}\notin\mathcal{US}_H^*$.

مثال ۱.۱.۳. بازای $|\beta|<1$ برای نگاشتهای آفین[۶] $f(z)=z+\overline{\beta z}\in\mathcal{US}_H^*$، زیرا

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)-\overline{(z-\zeta)\beta}}{(z-\zeta)+\overline{(z-\zeta)\beta}}\geqslant 0$$

معادل است با

$$\mathbf{Re}\left((z-\zeta)-\overline{(z-\zeta)\beta}\right)\left(\overline{(z-\zeta)}+(z-\zeta)\beta\right)\geqslant 0$$

یا $(1-|\beta|^2)|z-\zeta|^2\geqslant 0$.

[۶] Affine mappings

نتیجه ۲.۱.۳. [۶۹] بازای $\zeta=0$ در (۵.۳)، تابع همساز $f\in\mathcal{US}_H^*$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و طبق لم ۲.۶.۲ کاملا ستاره‌گون خواهد بود. پس واضح است که هر تابع همسازی که کاملا ستاره‌گون نباشد در $\mathcal{US}_H^*$ واقع نخواهد شد. تابع همساز $f(z)=\mathbf{Re}\,\frac{z}{(1-z)^2}+i\mathbf{Im}\frac{z}{1-z}$ کاملا ستاره‌گون نیست [۳۰] پس $f\notin\mathcal{US}_H^*$.

بسادگی دیده می شود که این رده تحت $\mathcal{US}_H^*$ چرخش، $e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z)$ بازای α حقیقی حفظ می شود. خاصیت دیگر حفظ رده تحت انتقال[۷] $\frac{1}{t}f(tz)$، $0<t\leqslant 1$ است. $\mathcal{US}_H^*\subset\mathcal{FS}_H^*\subset\mathcal{S}_H^*$.
اکنون شرطی کافی را برای آنکه تابع $f\in\mathcal{H}$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و ستاره‌گون یکنواخت باشد را ذکر می نمائیم. نابرابری های (۳.۳) و (۴.۳) تنها وقتی بامعنی اند که f در $\mathbb{D}$ تک ارز باشند. بنابراین نگاشت همساز $f\in\mathcal{S}_H$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت است اگر و فقط اگر (۴.۳) برقرار باشد. از طرف دیگر یافتن شرط کافی برای جهت نگهدار بودن تابع همساز $f\in\mathcal{H}$ که در رده ی $\mathcal{US}_H^*$ قرار گیرد مهم است.

قضیه ۱.۱.۳. [۷۹] گیریم $f\in\mathcal{H}$ چنان باشد که

(الف) $f(0)=0$ و برای تمام $z\in\mathbb{D}$ ها $J_f(z)>0$،

(ب) $\mathbf{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\overline{z}}(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right\}\geqslant 0$ بازای $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2$ که $(z\neq\zeta)$ و نابرابری اکید وقتی برقرار است که $\zeta=0$.

آنگاه $f\in\mathcal{US}_H^*$.

برهان. با فرض $f\in\mathcal{H}$ در شرط های (الف) و (ب) صدق نماید. برای $z\in\mathbb{D}-\{0\}$ و $\zeta=0$، شرط (ب) شکل زیر را بخود می گیرد

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{f(z)}{zf_z(z)-\overline{z}f_{\overline{z}}(z)}\right\}>0\ ,\quad z\in\mathbb{D}-\{0\}$$

از ([۶۴]، قضیه ۱) می دانیم که f در $\mathbb{D}$ تک ارز بوده و از آنجا $f(z)-f(\zeta)\neq 0$ برای $z\neq\zeta$.
بدین ترتیب (ب) را می توان چنین بازنویسی کرد:

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\overline{z}}(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right\}\geqslant 0\ ,\quad (z,\zeta)\in\mathbb{D}^2\quad (z\neq\zeta)$$

که شرطی لازم برای $f\in\mathcal{H}$ است که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت باشد. □

در ذیل شرطی لازم و کافی برای آنکه $f\in\mathcal{US}_H^*$ باشد را ارائه می دهیم. این شرط تعمیم شکلی از قضیه ای درباره توابع کاملاً ستاره‌گون است که توسط چوکه[۸]، دورن[۹] و آسگود[۱۰] مطرح شده است ([۲۴] ص۱۳۹).

[۷] Transformation
[۸] Chuaqui
[۹] Duren
[۱۰] Osgood

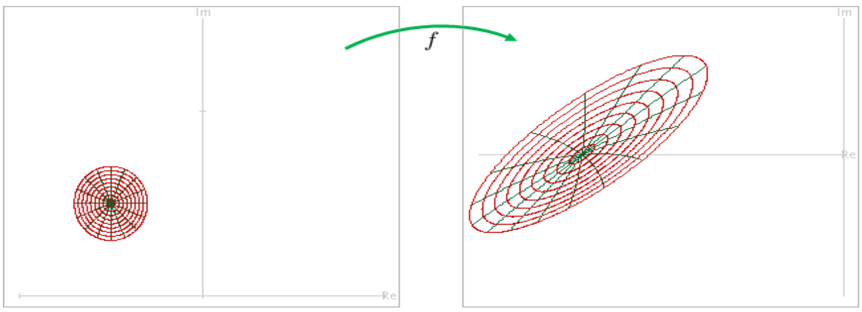
قضیه ۲.۱.۳. [۶۹] گیریم $f(z) \in \mathcal{S}_H$. $f \in \mathcal{US}_H^*$ اگر و فقط اگر

$$|h(z)-h(\zeta)|^2 \mathbf{Re}\, Q_h \geqslant |g(z)-g(\zeta)|^2 \mathbf{Re}\, Q_g + \mathbf{Re}\left\{\left(h(z)-h(\zeta)\right)\left(g(z)-g(\zeta)\right)\left(Q_g-Q_h\right)\right\} \qquad (۶.۳)$$

که $Q_h = \dfrac{(z-\zeta)h'(z)}{h(z)-h(\zeta)}$ و $Q_g = \dfrac{(z-\zeta)g'(z)}{g(z)-g(\zeta)}$ بازای (z,ζ) در $\mathbb{D}^2$.

برهان. مطابق تعریف $f \in \mathcal{US}_H^*$ اگر وفقط اگر $\mathbf{Re}\,\dfrac{\mathbf{D}_\zeta f(z)}{f(z)-f(\zeta)} > 0$ که $(z,\zeta) \in \mathbb{D}^2$، و این اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\,(\mathbf{D}_\zeta f(z))(\overline{f(z)}-\overline{f(\zeta)}) > 0$ برای $(z,\zeta) \in \mathbb{D}^2$، بدین ترتیب محاسبه ساده ای ما را به (۶.۳) می رساند. □

مثال ۲.۱.۳. اگر $h \in \mathcal{UST}$ و $g = \beta h$ با شرط $|\beta| < 1$ باشند، سپس $f = h + \overline{g} \in \mathcal{US}_H^*$ زیرا در این حالت h و g در $Q_h = Q_g$ صادق بوده و (۶.۳) برقرار است. به موجب این می توان گفت که $f(z) = z + Az^2 + \overline{\beta z + \beta A z^2} \in \mathcal{US}_H^*$ که $|\beta| < 1$ و $|A| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. در این مثال با فرض $A = \dfrac{1}{2}$، $\beta = -\dfrac{i}{2}$ بنابراین $f = z + \dfrac{1}{2}z^2 \overline{- \dfrac{i}{2}z - \dfrac{i}{4}z^2} \in \mathcal{US}_H^*$. شکل ۱.۳ یک دایره $|z + \dfrac{1-i}{2}| < \dfrac{1}{5}$ را نشان می دهد که تحت این نگاشت به ناحیه ای بیضوی ستاره‌گون بمرکز $f(\zeta) = (-0/37, 0)$ نگاشته می شود.



شکل ۱.۳: تصویر $|z + \frac{1-i}{2}| < \frac{1}{5}$ تحت $f = z + \frac{1}{2}z^2\overline{-\frac{i}{2}z - \frac{i}{4}z^2} \in \mathcal{US}_H^*$.

نتیجه ۳.۱.۳. [۶۹] بازای $\zeta \in \mathbb{D}$ ثابتی می توان مثلا گرفت $z = 0$ در (۵.۳) پس تابع همساز $f \in \mathcal{US}_H^*$ در $\mathbf{Re}\,\dfrac{\zeta - \overline{\zeta} b_1}{f(\zeta)} > 0$ صدق می کند. بعلاوه اگر $f \in \mathcal{US}_H^{\circ *}$ پس $\mathbf{Re}\,\dfrac{f(z)}{z} > 0$ در $\mathbb{D}$.

مثال ۳.۱.۳. برای بررسی تابع همساز

$$f(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z}{1-z} + i\mathbf{Im}\,\frac{z}{(1-z)^2}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}-\frac{1}{2}\overline{(\frac{z}{1-z})^2}\in\mathcal{S}_H^\circ\\
h'(z) &= \frac{1}{(1-z)^3}\\
g'(z) &= \frac{-z}{(1-z)^3}\\
Df(z) &= \frac{z}{(1-z)^3}+\overline{\frac{z^2}{(1-z)^3}}\\
\mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)} &= \mathbf{Re}\,\frac{\frac{z}{(1-z)^3}+\overline{\frac{z^2}{(1-z)^3}}}{\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}-\frac{1}{2}\overline{(\frac{z}{1-z})^2}}>0\\
\mathbf{Re}\,\frac{D_{0/2}f(z)}{f(z)-f(0/2)} &= \mathbf{Re}\,\frac{\frac{(z-0/2)}{(1-z)^3}+\overline{\frac{z(z-0/2)}{(1-z)^3}}}{\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}-\frac{1}{2}\overline{(\frac{z}{1-z})^2}-\frac{0/2-\frac{1}{2}0/2^2}{(1-0/2)^2}-\frac{1}{2}\overline{(\frac{0/2}{1-0/2})^2}}\not>0
\end{aligned}
$$

که نشان می دهد $f\in\mathcal{FS}_H^*$ اما $f\notin\mathcal{US}_H^*$.

مثال ۴.۱.۳. جهت بررسی تابع $f(z)=z+\frac{1}{4}\overline{z}^4\in\mathcal{S}_H^*$ چون $Df(z)=z-\overline{z}^4$،

$$\mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)}=\mathbf{Re}\,\frac{z-\overline{z}^4}{z+\frac{1}{4}\overline{z}^4}>0$$

و

$$\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}_\zeta f(z)}{f(z)-f(\zeta)}=\mathbf{Re}\,\frac{z-\zeta-\overline{z}^4+\overline{z}^3\zeta}{z+\frac{1}{4}\overline{z}^4-\zeta-\frac{1}{4}\overline{\zeta}^4}$$

در $(z,\zeta)=(0/2,-0/3)$ و در نتیجه $f\in\mathcal{FS}_H^*$ اما $f\notin\mathcal{US}_H^*$.

از محاسبات روی این رده حدس میزنیم که می بایست $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z}\geqslant\frac{1}{2}$.

قضیه ۳.۱.۳. [۷۹] با فرض اینکه $f=h+\overline{g}$ بشکل (۴.۲) بوده و در شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|\leqslant\frac{1}{2} \tag{7.3}$$

صدق کند آنگاه

(الف) $f\in\mathcal{US}_H^*$،

(ب) $(1-|b_1|)|z|-\left(\frac{1}{2}-|b_1|\right)\frac{|z|^2}{2}\leqslant|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\left(\frac{1}{2}-|b_1|\right)\frac{|z|^2}{2}$

کرانهای بالا و پائین با نگاشت همساز زیر برای انتخاب مناسبی از $\theta\in\mathbb{R}$ بدست می آیند:

$$f_{b_1}(z)=z+e^{i\theta}b_1\overline{z}+e^{i\theta}\frac{1-2b_1}{4}\overline{z}^2$$

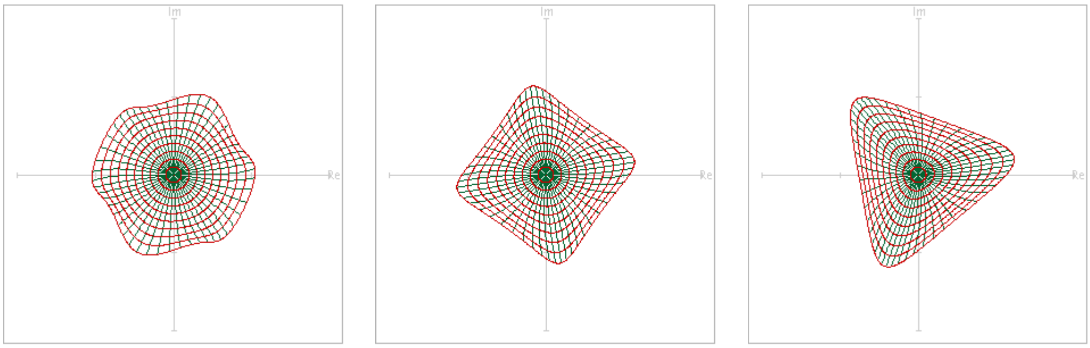
در اینجا $b_1 \in [0, \frac{1}{2}]$.
مثلا توابعی بصورت

$$\vartheta_{n,\alpha,\beta}(z) = z + \alpha z^n + \beta \overline{z}^n, \quad n \geqslant 2\ ;\ |\alpha| + |\beta| \leqslant \frac{1}{2n} \tag{۸.۳}$$

در شرط (۷.۳) قرار گرفته و در نتیجه در رده $\mathcal{US}_H^*$ قرار می گیرند. بخصوص برای $\alpha = 0$ و $|\beta| = \frac{1}{4}$ تابع

$$\vartheta_{2,0,\frac{1}{4}e^{i\varphi}}(z) = z + \frac{1}{4}e^{i\varphi}\overline{z}^2$$

عضوی از $\mathcal{US}_H^*$ است. همچنین این تابع همساز در $\mathbb{D}$ محدب مانا[۱۱] است [۱۲] [۴۴]. تصویر قرص $\mathbb{D}$ تحت $\vartheta_{n,\alpha,\beta}$ بازای مقادیر معینی از n، α و β در (شکل ۲.۳) نمایش داده شده است.



$\vartheta_{2,0,\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{6}}}(z)$ $\vartheta_{3,0,\frac{3}{20}e^{i\frac{\pi}{5}}}(z)$ $\vartheta_{5,\frac{1}{20}e^{i\frac{\pi}{2}},\frac{1}{20}e^{i\frac{\pi}{5}}}(z)$

شکل ۲.۳: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت های همساز $\mathcal{US}_H^*$.

در اینجا ما نگاشت همسازی را ملاحظه می کنیم که بخش هم تحلیلی آن شکلی از تابع فوق هندسی‌گاوس[۱۳] است.

قضیه ۴.۱.۳. [۸۲] در نظر بگیرید که یکی از حالات $a, b \in (-1, \infty)$ با $ab > 0$ و یا $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ با $b = \overline{a}$ بین a و b حاکم است. همچنین فرض کنید c عددی حقیقی مثبت و $\alpha \in \mathbb{D}$ است، و نیز

$$f_1(z) = z + \overline{\frac{\alpha}{2} zF(a, b; c; z)}, \tag{۹.۳}$$

$$f_2(z) = z + \overline{\frac{\alpha}{2}(F(a, b; c; z) - 1)}, \tag{۱۰.۳}$$

$$f_3(z) = z + \overline{\frac{\alpha}{2} \int_0^z F(a, b; c; z)\, dt} \tag{۱۱.۳}$$

[۱۱] Stable harmonic convex

[۱۲] نگاشت همساز جهت نگهدار $f = h + g$ را در $\mathbb{D}$ همساز محدب مانا نامیم اگر تمامی نگاشتهای $f_\lambda = h + \lambda g$ برای $|\lambda| = 1$ در $\mathbb{D}$ محدب باشند.

[۱۳] Gaussian hypergeometric function

(الف) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+1$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(ab+c-a-b-1)\leqslant 1 \tag{۱۲.۳}$$

آنگاه $f_1 \in \mathcal{US}_H^*$.

(ب) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+1$ و

$$ab|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\leqslant 1 \tag{۱۳.۳}$$

آنگاه $f_2 \in \mathcal{US}_H^*$.

(پ) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\leqslant 1 \tag{۱۴.۳}$$

آنگاه $f_3 \in \mathcal{US}_H^*$.

نتیجه ۴.۱.۳. [۸۲] برای اعداد حقیقی مثبت b و c و نیز $\alpha\in\mathbb{D}$،

(الف) اگر

$$c \geqslant \beta^+ = \frac{2b+3-3|\alpha|+\sqrt{|\alpha|^2+2|\alpha|(2b^2-1)+1}}{2(1-|\alpha|)} \tag{۱۵.۳}$$

سپس تابع $f(z)=z+\overline{\frac{\alpha}{2}zF(1,b;c;z)}$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت است.

(ب) اگر

$$c \geqslant \gamma^+ = \frac{2b+3+b|\alpha|+\sqrt{b^2|\alpha|^2+4|\alpha|)+2|\alpha|b+1}}{2} \tag{۱۶.۳}$$

آنگاه تابع $f(z)=z+\overline{\frac{\alpha}{2}F(1,b;c;z)-1}$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت است.

(پ) اگر $c\geqslant 1+\dfrac{b}{1-|\alpha|}$ آنگاه تابع $f(z)=z+\overline{\dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\int_0^z F(1,b;c;t)\,dt}$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت خواهد بود.

با استفاده از رابطه قضیه ۴.۱.۳ می توان خانواده ای از چندجمله ای های همساز تک ارز یافت که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت هستند.

نتیجه ۵.۱.۳. [۸۲] اگر m عدد صحیح مثبت، c عددی حقیقی مثبت و $\alpha\in\mathbb{D}$ باشند و

$$F_1(z) \quad = z+\overline{\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{(m-n+1)_n}{(c)_n}z^{n+1}}, \tag{۱۷.۳}$$

$$F_2(z) \quad = z+\overline{\frac{\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{(m-n+1)_n}{(c)_n}z^{n}}, \tag{۱۸.۳}$$

$$F_3(z) \quad = z+\overline{\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{(m-n+1)_n}{(c)_n}\frac{z^{n+1}}{n+1}} \tag{۱۹.۳}$$

(الف) اگر $|\alpha|\Gamma(c)\Gamma(c+2m-1)(m^2+2m+c-1)\leqslant(\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_1\in\mathcal{US}_H^*$.

(ب) اگر $m^2|\alpha|\Gamma(c)\Gamma(c+2m-1)\leqslant(\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_2\in\mathcal{US}_H^*$.

(پ) اگر $|\alpha|\Gamma(c)\Gamma(c+2m)\leqslant(\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_3\in\mathcal{US}_H^*$.

۲.۳ روش پیچش در رده $\mathcal{US}^*_H$

در این بخش شرطی کافی در رده $\mathcal{US}^*_H$ را با استفاده از پیچش می یابیم و در ابتدا نیاز به همتای مجموعه دوگان روی خانواده توابع همساز داریم. گیریم $\mathcal{A}_H$ رده ی توابع همساط مختلط $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ در دامنه همبند ساده $\mathbb{D}$ بوده و به شکل (۴.۲) باشد که لزوما تک ارز و جهت نگهدار روی $\mathbb{D}$ نیست. مجموعه دوگان یک زیرمجموعه از $\mathcal{A}_H$ را چنین تعریف می کنیم:

تعریف ۱.۲.۳. [۶۹] برای مجموعه مفروض $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{A}_H$، مجموعه دوگان $\mathcal{V}^*_H$ عبارتست از

$$\mathcal{V}^*_H = \left\{F = H+\overline{G} \in \mathcal{A}_H : \frac{h*H}{z} + \frac{\overline{g*G}}{\overline{z}} \neq ۰,\ \forall f = h+\overline{g} \in \mathcal{V}_H,\ \forall z \in \mathbb{D}\right\} \quad (۲۰.۳)$$

چنین الگوئی که برگرفته از مجموعه دوگان روی توابع تحلیلی است، ابزاری توانا در مطالعه رده‌های همساز نیز محسوب می شود.

قضیه ۱.۲.۳. [۶۹] گیریم

$$G_H = \left\{\varphi - \sigma\overline{\varphi} : \varphi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲(۱-wz)}\left(۱ - \frac{w+i\alpha}{۱+i\alpha}z\right), \sigma = \frac{\overline{(۱-w)(۱+i\alpha)}}{(۱-w)(۱+i\alpha)}, z \in \mathbb{D}\right\} \quad (۲۱.۳)$$

سپس $G^*_H = \mathcal{US}^*_H$. علاوه بر این اگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + n|b_n| < \frac{۱-|b_۱|}{\sqrt{M}}$ آنگاه $f \in \mathcal{US}^*_H$، که ثابت $\sqrt{M} = ۱/۲۵۵۷\ldots$ همان ثابت ذکر شده در لم ۳.۱۶.۱ است.

تذکر اینکه تابع تحلیلی φ همان g در لم ۳.۱۶.۱ است اما σ با $|\sigma| = ۱$ عدد دلخواهی نبوده و وابسته به w و α در φ است.

برهان. فرض کنید $f = h+\overline{g} \in \mathcal{US}^*_H$ یعنی

$$\mathbf{Re}\, \frac{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)} - h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}} > ۰\ , \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^۲ \quad (۲۲.۳)$$

بازای $\zeta = ۰$ و سپس $z = ۰$ داریم $۱ = \frac{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{f(z)-f(\zeta)}$، در نتیجه شرط (۲۲.۳) را می توان بشکل

$$(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)} \neq i\alpha\Big(h(z)+\overline{g(z)} - h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}\Big) \quad (۲۳.۳)$$

که $\alpha \in \mathbb{R}$ نوشت. اما طبق اصل مقدار ماکزیمم برای توابع همساز کافی است کافیست که شرط را برای $|z| = |\zeta|$ بررسی نمائیم و بدین جهت با فرض $\zeta = wz$ با $|w| = ۱$، از تعریف مجموعه دوگان برای توابع همساز (۲۰.۳) و سپس محاسبه ساده، نتیجه $\frac{h*\varphi}{z} - \sigma\frac{\overline{g*\varphi}}{\overline{z}} \neq ۰$ حاصل می شود که همان مطلوب ماست.

برای مابقی شرط ضرایب با تابع $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ که بشکل (۱۶.۲) است و بسط سری $\varphi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n z^n$ از تابع تحلیلی $\varphi(z)$ می توان یافت $|\phi_n|\leqslant dn$ که برای تمام $n\geqslant 2$ برقرار بوده و ثابت دقیق $d=\sqrt{M}=1/2557\ldots$ را که در لم ۳.۱۶.۱ آمده بدست می دهد. با استفاده از قسمت قبل

$$\begin{aligned}\left|\frac{h*\varphi}{z}-\sigma\overline{\frac{g*\varphi}{z}}\right| &= \left|1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\phi_n z^{n-1}-\sigma\big(b_1+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n\phi_n\overline{z}^{n-1}}\big)\right|\\ &\geqslant |1-\sigma b_1|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||\phi_n||z|^{n-1}-|\sigma|\sum_{n=2}^{\infty}|b_n||\phi_n||z|^{n-1}\\ &\geqslant |1-\sigma b_1|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|dn-\sum_{n=2}^{\infty}|b_n|dn\\ &> 0\end{aligned}$$

که $\frac{1-|b_1|}{\sqrt{M}} > \sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|+n|b_n|$. $\square$

۳.۳ محدب یکنواخت

حال نگاشت های همساز محدب یکنواخت را بعنوان همتای همساز رده ی $\mathcal{UCV}$ که توسط گودمن [۴۰] و رونینگ [۸۸] معرفی شد را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۳.۳. [۷۰] تابع همساز موضعا تک ارز $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}$ را نگاشت محدب یکنواخت در $\mathbb{D}$ گوئیم اگر f در $\mathbb{D}$ کاملاً محدب بوده و هر قوس مدور γ_ζ در $\mathbb{D}$ با مرکز ζ که در $\mathbb{D}$ قرار دارد را به قوس محدب $f(\gamma_\zeta)$ در $f(\mathbb{D})$ بنگارد.

که مشابه تعریف ۱.۱۱.۱ برای توابع تحلیلی است. رده ی تمام توابع $f\in\mathcal{S}_H$ (به ترتیب $f\in\mathcal{S}_H^{\circ}$) که در $\mathbb{D}$ محدب یکنواخت هستند را با $\mathcal{UK}_H$ (به ترتیب $\mathcal{UK}_H^{\circ}$) نشان می دهیم. تک ارزی f از این حقیقت که نگاشتهای کاملاً محدب در $\mathbb{D}$ تک ارزند نتیجه می شود [۲۴]. جهت یافتن معادل تحلیلی تعریف فوق، گیریم $\gamma_\zeta=\{\zeta+re^{i\theta}:\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$ قوس مدوری بمرکز ζ درون $\mathbb{D}$ بوده و Γ_γ تصویر γ_ζ تحت f باشد. قوس Γ_γ را محدب گوئیم اگر شناسه مماس بر Γ_γ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(\zeta+re^{i\theta})-f(\zeta)\right\}\right)\geqslant 0 \quad , \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \tag{۲۴.۳}$$

با انتخاب $z=\zeta+re^{i\theta}$، که $r>0$ می بینیم که نابرابری (۲۴.۳) برای هر قوس مدور درون $\mathbb{D}$ درست است اگر و فقط اگر در γ_ζ داشته باشیم

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(z)-f(\zeta)\}\right)\geqslant 0$$

از اینجا داریم:

$$\mathbf{Im}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\log\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(z)-f(\zeta)\}\Big)\geqslant \circ$$

اما برای قوس مدور γ_ζ از $z=\zeta+re^{i\theta}$ نتیجه می شود $\frac{\partial}{\partial\theta}z=i(z-\zeta)$ و با محاسبه ای ساده می یابیم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(z)-f(\zeta)\}=i\Big\{(z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\bar z}(z)\Big\}=i\,\mathbf{D}_\zeta f(z)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\log i\,\mathbf{D}_\zeta f(z) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\log i\Big\{(z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}\Big\}\\ &= \frac{i\big[h'(z)+(z-\zeta)h''(z)\big]}{i\,\mathbf{D}_\zeta f(z)}i(z-\zeta)\\ &- \frac{\overline{i\big[g'(z)+(z-\zeta)g''(z)\big]}}{i\,\mathbf{D}_\zeta f(z)}\overline{i(z-\zeta)}\\ &= i\frac{\mathbf{D}^{\text{۲}}_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\end{aligned}$$

بدین ترتیب می بایست داشته باشیم

$$\mathbf{Im}\frac{\partial}{\partial\theta}\log i\,\mathbf{D}_\zeta f(z) \quad = \quad \mathbf{Re}\frac{\mathbf{D}^{\text{۲}}_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\geqslant\circ$$

و البته برای برخی کاربردهای آتی، این شرط معادل است با

$$\mathbf{Re}\,P(z,\zeta)\geqslant\circ\quad,\quad (z,\zeta)\in\mathbb{D}^{\text{۲}}\quad (z\neq\zeta) \tag{۲۵.۳}$$

که

$$P(z,\zeta)=\frac{(z-\zeta)h'(z)+(z-\zeta)^{\text{۲}}h''(z)+\overline{(z-\zeta)g'(z)}+\overline{(z-\zeta)^{\text{۲}}g''(z)}}{(z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}}$$

لذا اگر $f\in\mathcal{H}$ در $\mathbb{D}$ جهت نگهدار بوده و در نابرابری (۲۵.۳) صدق کند سپس f می باید در $\mathbb{D}$ تک ارز و محدب یکنواخت باشد. یادآور می شویم که $P(\circ,\circ)=\text{۱}$ و در مجموع

قضیه ۱.۳.۳. [۷۰] گیریم $f\in\mathcal{H}$ چنان باشد که $f(\circ)=\circ$ و برای تمام $z\in\mathbb{D}$ ها $J_f(z)>\circ$. $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$\mathbf{Re}\frac{\mathbf{D}^{\text{۲}}_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\geqslant\circ\;,\quad (z,\zeta)\in\mathbb{D}^{\text{۲}} \tag{۲۶.۳}$$

براحتی می توان بررسی نمود که این رده تحت چرخش، $e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z)$ بازای α حقیقی، حفظ شده و نیز حافظ انتقال $\frac{\text{۱}}{t}f(tz)$، $\circ<t\leqslant\text{۱}$ است. از طرفی دیگر $\mathcal{UK}_H$ شامل تمام توابع

کاملاً محدب و محدب یکنواخت نیز می گردد. همچنین (۲۶.۳) برای تابع تحلیلی $f(z)\in\mathcal{UK}_H$ بشکل (۱.۳) و (۲.۳) با $g=0$ در شرط زیر قرار می گیرد:

$$\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}_\zeta^2 f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}=\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)^2h''(z)+(z-\zeta)h'(z)}{(z-\zeta)h'(z)}=\mathbf{Re}\left(1+(z-\zeta)\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)\geqslant 0$$

که $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2$. بنابراین

نتیجه ۱.۳.۳. [۷۰] اگر $f\in\mathcal{UCV}$ تابعی تحلیلی باشد سپس $f\in\mathcal{UK}_H$. لذا $\mathcal{UCV}\subset\mathcal{UK}_H\subset\mathcal{K}_H$. گودمن [۴۰] نشان داد که تابع تحلیلی $f(z)=\dfrac{z}{1-Az}\in\mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر $|A|\leqslant\frac{1}{3}$ در نتیجه تابع محدب $\ell(z)=\dfrac{z}{1-z}\notin\mathcal{UK}_H$.

مثال ۱.۳.۳. بازای $|\beta|<1$ نگاشتهای آفین $f(z)=z+\overline{\beta z}\in\mathcal{UK}_H$، زیرا

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)+\overline{(z-\zeta)\beta}}{(z-\zeta)-\overline{(z-\zeta)\beta}}\geqslant 0$$

معادل است با

$$\mathbf{Re}\left((z-\zeta)+\overline{(z-\zeta)\beta}\right)\left(\overline{(z-\zeta)}-(z-\zeta)\beta\right)\geqslant 0$$

یعنی $(1-|\beta|^2)|z-\zeta|^2\geqslant 0$.

نتیجه ۲.۳.۳. [۷۰] اگر در (۲۶.۳) قرار دهیم $\zeta=0$ ، تابع همساز $f\in\mathcal{UK}_H$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً محدب است، پس روشن است که هر تابع همساز که کاملاً محدب نباشد در $\mathcal{UK}_H$ هم نخواهد بود. تابع همساز $f(z)=\mathbf{Re}\,\dfrac{z}{1-z}+i\mathbf{Im}\dfrac{z}{(1-z)^2}$ کاملاً محدب نیست ([۳۰]، ص۴۶) یعنی $f\notin\mathcal{UK}_H$.

قضیه ۲.۳.۳. [۷۹] گیریم h و g دارای شکل (۴.۲) باشند به شرطی که $|b_1|<1$، $f=h+\overline{g}$ و ضرایب در شرط زیر صدق نمایند

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(2n-1)(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1| \qquad (۲۷.۳)$$

سپس $f\in\mathcal{UK}_H$. کران موجود در (۲۷.۳) برای تابع $f(z)=z-\frac{1}{6}\overline{e^{3i\alpha}z^2}$ با $\alpha\in\mathbb{R}$ دقیق است.

قضیه ۳.۳.۳. [۷۹] فرض کنید $f\in\mathcal{UK}_H$ و Λ مجموعه اندیس گذار باشد. گیریم

$$A=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(\mathbb{D}(\zeta_\lambda,R_\lambda)\cap\mathbb{D}(0,r_\lambda))\neq\phi$$

که $\zeta_\lambda\in\mathbb{D}$، $0<R_\lambda<2$، $0<r_\lambda\leqslant 1$. آنگاه $f(A)$ مجموعه ای محدب است.

در [۸۲] مولفان رده ی محدب یکنواخت را روی نگاشتهای همساز بیشتر بررسی نموده و خواص بیشتری را آشکار نمودند که جزئیات را ذکر خواهیم نمود. قبل از آن، شرطی لازم و کافی برای آنکه $f\in\mathcal{UK}_H$ باشد را ارائه می دهیم. این شرط تعمیم شکلی از قضیه ۱.۷.۲ درباره توابع کاملاً محدب است که توسط چوکه، دورن و آسگود مطرح شده است ([۲۴] ص۱۳۹).

قضیه ۴.۳.۳. [۷۰] گیریم $f(z)\in\mathcal{S}_H$. $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$|(z-\zeta)h'(z)|^2\,\mathbf{Re}\,Q_h \geqslant |(z-\zeta)g'(z)|^2\,\mathbf{Re}\,Q_g+\mathbf{Re}\left\{(z-\zeta)^3\left(h''(z)g'(z)-h'(z)g''(z)\right)\right\} \tag{۲۸.۳}$$

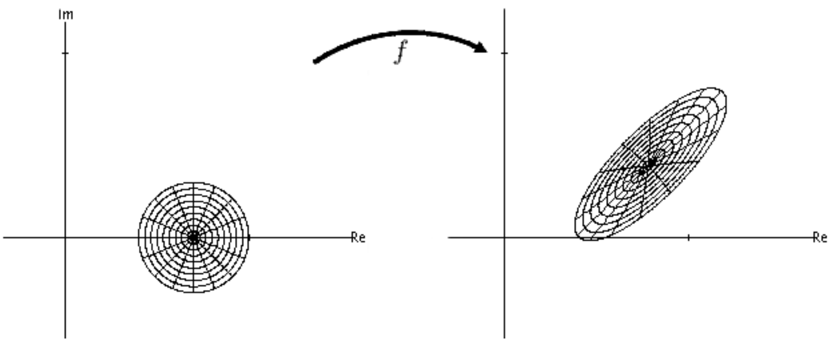
که $Q_h=1+(z-\zeta)\dfrac{h''(z)}{h'(z)}$ و $Q_g=1+(z-\zeta)\dfrac{g''(z)}{g'(z)}$ بازای (z,ζ) در $\mathbb{D}^2$.

برهان. مطابق تعریف $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\,\dfrac{\mathbf{D}_\zeta^2 f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}>0$ که $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2$، و این اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\left\{\mathbf{D}_\zeta^2 f(z)\overline{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\right\}>0$ برای $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2$، بدین ترتیب محاسبه ساده ای ما را به (۲۸.۳) می رساند. □

لم ۱.۳.۳. [۷۰] $f=h+\overline{\beta h}\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر $h\in\mathcal{UCV}$ که در آن $|\beta|<1$.

برهان. گیریم $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H$ و $g=\beta h$ با شرط $|\beta|<1$ باشد پس $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر (۲۸.۳) برقرار باشد. چون در این حالت h و g در تساوی $Q_h=Q_g$ صادقند پس (۲۸.۳) برقرار است اگر و فقط اگر $|(z-\zeta)h'(z)|^2\,\mathbf{Re}\,Q_h(1-|\beta|^2)\geqslant 0$ یا به طور معادل $\mathbf{Re}\,Q_h\geqslant 0$ که نشان می دهد $h\in\mathcal{UCV}$. □

مثال ۲.۳.۳. تابع تحلیلی $h=z+Az^2$ در $\mathcal{UCV}$ است اگر و فقط اگر $|A|\leqslant\frac{1}{6}$. [۴۰]. از لم ۱.۳.۳ می دانیم $f(z)=z+Az^2+\overline{\beta z+\beta Az^2}\in\mathcal{UK}_H$ برای $|\beta|<1$ و $|A|\leqslant\frac{1}{6}$. مثلا بگیرید $A=\frac{1}{6}$، $\beta=-\frac{i}{2}$ سپس $f=z+\frac{1}{6}z^2\overline{-\frac{i}{2}z-\frac{i}{12}z^2}\in\mathcal{UK}_H$. در شکل ۳.۳ دایره $|z-0/7|<0/3$ تحت این نگاشت همساز محدب یکنواخت به ناحیه ای بیضی شکل محدب بمرکز $f(\zeta)=(0/78,0/39)$ نگاشته می شود.



شکل ۳.۳: تصویر $|z-0/7|<0/3$ تحت نگاشت $f(z)=z+\frac{1}{6}z^2\overline{-\frac{i}{2}z-\frac{i}{12}z^2}\in\mathcal{UK}_H$.

قضیه ۵.۳.۳. [۸۲] در نظر بگیرید که یکی از حالات $a,b\in(-1,\infty)$ با $ab>0$ و یا $a,b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ با $b=\overline{a}$ بین a و b حاکم است. همچنین فرض کنید c عددی حقیقی مثبت و $\alpha\in\mathbb{D}$ است، آنگاه

(الف) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+۲$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{۲(a)_۲(b)_۲}{(c-a-b-۲)_۲}+\frac{۵ab}{c-a-b-۱}+۱\right)\leqslant ۲ \tag{۲۹.۳}$$

آنگاه $f_۱\in\mathcal{UK}_H$.

(ب) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+۲$ و

$$ab|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-۱)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{a+b+c+۲ab}{c-a-b-۲}\right)\leqslant ۲ \tag{۳۰.۳}$$

آنگاه $f_۲\in\mathcal{UK}_H$.

(پ) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+۱$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{۲ab+c-a-b-۱}{c-a-b-۱}\right)\leqslant ۲ \tag{۳۱.۳}$$

آنگاه $f_۳\in\mathcal{UK}_H$.

در اینجا $f_۱$، $f_۲$ و $f_۳$ همان توابع تعریف شده در قضیه ۴.۱.۳ هستند.

قضیه الکساندر برای توابع تحلیلی (۱.۴.۱) را نمی توان بطریقی مشابه بین رده های

$$\mathcal{UCV}:=\mathcal{UK}_H\cap\{f=h+\overline{g}:g\equiv ۰\} \text{ و } \mathcal{UST}:=\mathcal{US}^*_H\cap\{f=h+\overline{g}:g\equiv ۰\} \tag{۳۲.۳}$$

بیان کرد [۴۰، ۸۸]، اما می توان پلی ارتباطی میان $\mathcal{US}^*_H$ و $\mathcal{UK}_H$ ایجاد نمود. عملگر

$$f=h+\overline{g}\mapsto \Lambda_f=\Lambda_h+\overline{\Lambda_g} \tag{۳۳.۳}$$

را در نظر بگیرید که یک تابع $f\in\mathcal{US}^*_H$ را به $\Lambda_f\in\mathcal{UK}_H$ می نشاند. تاکید ویژه ما بر $\Lambda_h=$ $H_{a,b}(h)$ بازای $a,b\in\mathbb{R}$، $a\neq b$، $a>-۱$ و $b>-۱$ استوار است که در آن

$$H_{a,b}(h)(z)=\frac{(a+۱)(b+۱)}{(b-a)}\int_۰^۱ t^{a-۱}(۱-t^{b-a})h(tz)\,dt=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(a+۱)(b+۱)}{(a+n)(b+n)}a_nz^n \tag{۳۴.۳}$$

بوده و $h(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$ است.

این تبدیلات انتگرالی ما را با پیچش f با رده ی معینی از توابع خاص رهنمون می سازد [۸۰]. بخصوص با در نظر گرفتن حالت حدی $b\to\infty$ عملگر نوع برناردی[۱۴] حاصل می شود. با در نظر گرفتن دو حالت حدی $H_{a,b}(h)$ را با تعاریف

$$H_{a,\infty}(h)(z)=\lim_{b\to\infty}H_{a,b}(h)(z)=\frac{a+۱}{z^a}\int_۰^z t^{a-۱}h(t)\,dt \tag{۳۵.۳}$$

و

$$H_{a,a}(h)(z)=\lim_{b\to a}H_{a,b}(h)(z)=-(a+۱)^۲\int_۰^۱ t^{a-۱}\,h(tz)\log t\,dt \tag{۳۶.۳}$$

بحث را پی می گیریم [۸۰]. دقت شود که

$$H_{a,\infty}(h)(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a+۱}{a+n}a_nz^n \text{ و } H_{a,a}(h)(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(a+۱)^۲}{(a+n)^۲}a_nz^n \tag{۳۷.۳}$$

[۱۴] Bernardi type operator

قضیه ۶.۳.۳. [۸۲] فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{H}$ بفرم (۴.۲) بوده و در شرط ضریب (۷.۳) صدق نماید. قرار دهید $H = \Lambda_h$ و $G = \Lambda_g$. سپس تابع همساز $F(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in \mathcal{UK}_H$ است مشروط بر اینکه $a > -۱$، $b > -۱$ بوده و در یکی از شروط زیر صدق کند:

(الف) $ab \leqslant ۳$.

(ب) $ab > ۳$ و $a^۲b^۲ - ۴ab - ۲(a+b) \leqslant ۱$.

برخلاف تحقق شروط فوق، حالات خاصی نیز بچشم می خورد چنانکه در اثبات قضیه ۶.۳.۳ اگر $ab > ۳$ و $a^۲b^۲ - ۴ab - ۲(a+b) > ۱$ و $\lfloor r_۱ \rfloor - \lfloor r_۲ \rfloor = ۰$ آنگاه تابع $F(z)$ تعریف شده در قضیه ۶.۳.۳ در رده ی $\mathcal{UK}_H$ واقع می شود که در آن $r_۱$ و $r_۲$ ریشه های حقیقی معادله ی $\phi(n) = ۰$ بوده و $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی با x است. مثلاً با اخذ $a = ۲$ و $b = \frac{۵۹}{۲۰}$ هیچکدام از شروط (الف) و (ب) قضیه ۶.۳.۳ درست نیستند با اینحال

$$\phi(n) = ۲n^۲ - \frac{۶۹}{۵}n + \frac{۴۷۳}{۲۰} > ۰ \quad \text{برای هر } n \geqslant ۲ \tag{۳۸.۳}$$

در نتیجه تابع متناظر $F(z)$ با $a = ۲$ و $b = \frac{۵۹}{۲۰}$ در $\mathcal{UK}_H$ خواهد بود [۸۲].

قضیه ۷.۳.۳. [۸۲] در نظر بگیرید $F = H + \overline{G} \in \mathcal{H}$، $G'(۰) = ۰$ در شرط ضریب (۲۷.۳) صدق کند. برای h_a و g_a با تعاریف

$$h_a(z) = \frac{aH(z) + zH'(z)}{a+۱} \quad \text{و} \quad g_a(z) = \frac{aG(z) + zG'(z)}{a+۱} \tag{۳۹.۳}$$

که $a \geqslant ۱$، تابع همساز $f_a(z) = h_a(z) + \overline{g_a(z)} \in \mathcal{US}_H^*$ است.

۴.۳ روش پیچش در رده $\mathcal{UK}_H$

با استفاده از مجموعه دوگان توابع همساز می توانیم شرطی کافی را برای اعضاء رده ی $\mathcal{UK}_H$ بیابیم:

قضیه ۱.۴.۳. [۷۰] فرض کنید

$$G_H = \{\varphi - \sigma\overline{\varphi} : \varphi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۳}\Big(۱ - \frac{w - i\alpha}{۲ - w - i\alpha}z\Big), \sigma = \frac{\overline{(۱-w)(۲-w-i\alpha)}}{(۱-w)(۲-w-i\alpha)}, z \in \mathbb{D}\}$$

آنگاه $\mathcal{UK}_H = G_H^*$. علاوه بر این اگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n(۲n-۱)|a_n| + n(۲n-۱)|b_n| < ۱ - |b_۱|$ سپس $f \in \mathcal{UK}_H$.

در اینجا نیز تابع تحلیلی φ همان تابع g در لم ۴.۱۶.۱ بوده ولی σ با $|\sigma| = ۱$ عددی دلخواه نیست و وابسته به هر دو پارامتر w و α در φ می باشد.

برهان. گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{UK}_H$ یعنی

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)^{۲}h''(z) + \overline{(z-\zeta)^{۲}g''(z)} + (z-\zeta)h'(z) + \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}} > ۰\,, \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^{۲} \tag{۴۰.۳}$$

بازای $\zeta = ۰$ و سپس $z = ۰$ داریم $\frac{\mathbf{D}^{۲}_{\zeta} f(z)}{\mathbf{D}_{\zeta} f(z)} = ۱$، که با شرط (۴۰.۳) می توان نوشت

$$(z-\zeta)^{۲}h''(z) + \overline{(z-\zeta)^{۲}g''(z)} + (z-\zeta)h'(z) + \overline{(z-\zeta)g'(z)} \neq i\alpha\Big((z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}\Big)$$

که $\alpha \in \mathbb{R}$. طبق اصل مقدار ماکزیمم برای توابع همساز کافی است که شرط را برای $|\zeta| = |z|$ بررسی نمائیم و بدین جهت با فرض $\zeta = wz$ با $|w| = ۱$، از تعریف مجموعه دوگان برای توابع همساز (۲۰.۳) و سپس محاسبه‌ای سرراست نتیجه $\frac{h*\varphi}{z} + \sigma\frac{\overline{g*\varphi}}{\overline{z}} \neq ۰$ حاصل می شود که نتیجه نخست را ثابت می کند.

برای شرط ضرایب با تابع $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ که بشکل (۴.۲) است و بسط سری $\varphi(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \phi_n z^n$ برای تابع تحلیلی $\varphi(z)$ می توان یافت که بازای تمام $n \geqslant ۲$ بموجب لم ۴.۱۶.۱، $|\phi_n| \leqslant n(۲n-۱)$. همچنین

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h*\varphi}{z} + \sigma\frac{\overline{g*\varphi}}{\overline{z}}\right| &= \left|۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n\phi_n z^{n-۱} + \sigma\big(b_۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \overline{b_n\phi_n}\,\overline{z}^{n-۱}\big)\right| \\
&\geqslant |۱ + \sigma b_۱| - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n||\phi_n||z|^{n-۱} - |\sigma| \sum_{n=۲}^{\infty} |b_n||\phi_n||z|^{n-۱} \\
&\geqslant |۱ + \sigma b_۱| - \sum_{n=۲}^{\infty} n(۲n-۱)|a_n| - \sum_{n=۲}^{\infty} n(۲n-۱)|b_n| \\
&> ۰
\end{aligned}$$

در نتیجه $\sum_{n=۲}^{\infty} n(۲n-۱)|a_n| + n(۲n-۱)|b_n| < ۱ - |b_۱|$. □

۵.۳ مطلقاً محدب

مفهومی که اخیراً معرفی شده، خانواده ای از توابع همساز محدب است که توسط پوناسمی، سایرام کالیراج و استارکف[۱۵] بیان گردیده [۸۲] و تعریف آن چنین است:

تعریف ۱.۵.۳. [۸۲] یک تابع همساز موضعا تک ارز $f = h + \overline{g} \in \mathcal{H}$ را در $\mathbb{D}$ مطلقاً محدب[۱۶] نامیم اگر $f(\mathbb{D}(a,r))$ برای هر $a \in \mathbb{D}$ و تمام $r \in (۰, ۱ - |a|)$ ها محدب باشد. این خانواده را با $f \in \mathcal{AK}_H$ نشان می دهیم.

[۱۵] Starkov

[۱۶] Absolutely convex

گیریم $\mathcal{AK}_H^{\circ} = \{f = h + \overline{g} \in \mathcal{AK}_H : g'(\circ) = \circ\}$ و

$$\widetilde{\mathcal{AK}_H} = \{f \in \mathcal{AK}_H : \text{ برای تمام } a \in \mathbb{D} \text{ و } r \in (\circ, 1 - |a|] \text{ محدب است. } f(\mathbb{D}(a,r))\} \tag{۴۱.۳}$$

داریم

$$\mathcal{UK}_H \subset \widetilde{\mathcal{AK}_H} \subset \mathcal{AK}_H \subset \mathcal{FK}_H \tag{۴۲.۳}$$

می توان نشان می دهد که رده های $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$ و $\mathcal{AK}_H$ خانواده های پایای خطی از نگاشت های همساز تک ارز هستند یعنی هنگامی که $f = h + \overline{g} \in \mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$)، تابع

$$F(z) = \frac{f(\frac{z + z_\circ}{1 + z\overline{z_\circ}}e^{i\theta}) - f(z_\circ e^{i\theta})}{(1 - |z_\circ|^2)h'(z_\circ e^{i\theta})e^{i\theta}} \tag{۴۳.۳}$$

برای تمام $z_\circ \in \mathbb{D}$ و $\theta \in \mathbb{R}$ نیز در رده ی $\mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\mathcal{AK}_H^{\circ}$) قرار خواهد گرفت، بهمانصورت که خودریختی قرص دایره را به دایره می برد، و این موضوع را می توان از تعریف نیز حاصل نمود. این خانواده از توابع دارای خاصیت پایای آفین[۱۷] هم هستند. یعنی اگر $f \in \mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$) باشد آنگاه برای تمام $c \in \mathbb{D}$ که $b_1 = g'(\circ)$ تابع $\frac{f + c\overline{f}}{1 + cb_1} \in \mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$). بعنوان نتیجه ای از این خواص بیان شده، نتایج جالبی را از رده ی $\mathcal{AK}_H$ می توان بدست آورد.

قضیه ۱.۵.۳. [۸۲] گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{H}$ تابع همساز جهت نگهداری در $\mathbb{D}$ باشد. عبارات زیر معادلند:

(الف) $f \in \mathcal{AK}_H$.

(ب) $f \in \widetilde{\mathcal{AK}_H}$.

(پ)

$$|h'(\zeta)|^2 \left(1 + |b|^2 + \mathbf{Re}\left\{\frac{(\zeta - b)(1 - \zeta\overline{b})h''(\zeta)}{h'(\zeta)} - 2\overline{b}\zeta\right\}\right) \geqslant \tag{۴۴.۳}$$

$$|g'(\zeta)|^2 \left(1 + |b|^2 + \mathbf{Re}\left\{\frac{(\zeta - b)(1 - \zeta\overline{b})g''(\zeta)}{g'(\zeta)} - 2\overline{b}\zeta\right\}\right) + \mathbf{Re}\left\{\frac{(\zeta - b)^3(1 - \zeta\overline{b})^3}{|\zeta - b|^2|1 - \zeta\overline{b}|^2}\right\}$$

برای تمام ζ ها و b در $\mathbb{D}$.

در [۱۱۱] مولف تعریف جدیدی برای خانواده های پایای خطی ارائه داده و مرتبه پایای خطی یک خانواده L از نگاشت های همساز f که به شکل (۴.۲) هستند را بصورت

$$\overline{\text{ord}}L = \sup_{f \in L} \frac{|a_2 - \overline{b_1}b_2|}{1 - |b_1|^2} \tag{۴۵.۳}$$

تعریف کرده و کران های بالا و پائین برای ژاکوبین تابع f و نیز نتایج جالبی دیگری را یافت [۹۹].

---
[۱۷] Affine invariance property

لم ۱.۵.۳. ([۳۷]) فرض کنید L خانواده ای پایای خطی از نگاشتهای همساز باشد. آنگاه $\overline{\mathrm{ord}}L = \sup_{f\in A^\circ[L]} |a_۲|$ که

$$A^\circ[L] = \left\{F = \frac{f+\varepsilon\overline{f}}{۱+\varepsilon\overline{b_۱}} : f\in L, \varepsilon\in\mathbb{D}, F_{\overline{z}}(\circ)=\circ\right\} \qquad (۴۶.۳)$$

قضیه ۲.۵.۳. (cf. [۹۹]) گیریم $f \in L$ با $b_۱ = f_{\overline{z}}(\circ)$ است که L در فوق بیان شد. سپس ژاکوبین J_f نگاشت f با هر $z \in \mathbb{D}$ در کران های

$$(۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱-|z|)^{۲\alpha_\circ - ۲}}{(۱+|z|)^{۲\alpha_\circ+۲}} \leqslant J_f(z) \leqslant (۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱+|z|)^{۲\alpha_\circ-۲}}{(۱-|z|)^{۲\alpha_\circ+۲}} \qquad (۴۷.۳)$$

صدق می کند که در آنها $\alpha_\circ = \overline{\mathrm{ord}}L$.

اکنون خواص پایای خطی و خاصیت پایای آفین از رده ی $\mathcal{AK}_H$ را بکار گرفته و ویژگی های رشد، پوشش و نیز قضیه مساحت را مورد بحث قرار می دهیم.

قضیه ۳.۵.۳. [۸۲] فرض کنید f بفرم (۴.۲) بوده و $f \in \mathcal{AK}_H^\circ$ باشد. آنگاه ضریب $a_۲$ در شرط $|a_۲| \leqslant \frac{۲}{\sqrt{۳}} \approx ۱/۱۵۴۷$ صدق می کند. همچنین هر تابع $f \in \mathcal{AK}_H^\circ$ در نابرابرای های

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴}\left[۱-\left(\frac{۱-r}{۱+r}\right)^{\frac{\sqrt{۳}+۴}{۲\sqrt{۳}}}\right] \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴}\left[\left(\frac{۱+r}{۱-r}\right)^{\frac{\sqrt{۳}+۴}{۲\sqrt{۳}}}-۱\right] \qquad (۴۸.۳)$$

بازای $۱ > r = |z| > \circ$ صادق می باشد. بخصوص اینکه برد هر تابع $f \in \mathcal{AK}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \dfrac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴} \approx \circ/۳\circ۲۱۶۹$ است.

نابرابری (۴۸.۳) حاصل نتیجه اس از شیل_سمال روی خانواده ای از نگاشتهای همساز تک ارز با خاصیت پایای خطی است [۹۵].

ملاحظه ۱.۵.۳. [۸۲] اگر f بشکل (۴.۲) بوده و $f \in \mathcal{AK}_H^\circ$ با $a_۲ \geqslant \circ$ باشد سپس $a_۲ + \mathbf{Re}\, b_۲ \leqslant ۱$. این نابرابری برای توابع رده $f \in \mathcal{AK}_H^\circ$ در تحدید به توابع تحلیلی دقیق است.

قضیه ۴.۵.۳. [۸۲] گیریم $f \in \mathcal{AK}_H$ به شرط $b_۱ = f_{\overline{z}}(\circ)$ باشد. سپس ژاکوبین J_f نگاشت f با هر $z \in \mathbb{D}$ در کران های

$$(۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱-|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۲}}{(۱+|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۲}} \leqslant J_f(z) \leqslant (۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱+|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۲}}{(۱-|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۲}} \qquad (۴۹.۳)$$

صدق کرده و مقدار $A(f(\mathbb{D}_r))$، مساحت $f(\mathbb{D}_r)$، دارای کران های زیر است:

$$\frac{\pi(۱-|b_۱|^۲)}{۲۶}\left\{۳-(۳r^۲+۸\sqrt{۳}r+۳)\frac{(۱-r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۱}}{(۱+r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۱}}\right\} \leqslant A(f(\mathbb{D}_r)) \qquad (۵۰.۳)$$

و

$$A(f(\mathbb{D}_r)) \leqslant \frac{\pi(۱-|b_۱|^۲)}{۲۶}\left\{۳-(۳r^۲-۸\sqrt{۳}r+۳)\frac{(۱+r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۱}}{(۱-r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۱}}\right\} \tag{۵۱.۳}$$

قضیه ۵.۵.۳. [۸۲] فرض نمائید f بفرم (۴.۲) بوده و $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ باشد. آنگاه ضریب $a_۲$ در شرط $|a_۲| \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۳}} \approx ۰/۵۷۷۳۵$ صدق کرده و هر تابع $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ در نابرابری (۴۸.۳) قرار می گیرد.

کران ضریب حاصل شده در قضیه ۵.۵.۳ را می توان بعنوان شرطی لازم جهت بررسی اینکه یک تابع در رده ی $\mathcal{UK}_H^\circ$ قرار بگیرد، بکار گرفت. برای یک تابع همساز $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ کران های موجود در نابرابری های (۴۸.۳) قابل بهبودی نیستند زیرا رده ی $\mathcal{UK}_H^\circ$ خانواده ای پایای خطی نیست.

فصل ۴

توابع دو_ تک ارز

هر تابع تک ارز $f \in \mathcal{S}$ دارای یک تابع معکوس[۱] f^{-1} است که با $z = f^{-1}(f(z))$ در $\mathbb{D}$ تعریف می شود. از آنجا که قضیه یک_چهارم کوبه ۲.۱.۱ تضمین می کند که تصویر $\mathbb{D}$ تحت هر $f \in \mathcal{S}$ شامل قرصی به شعاع $\frac{1}{4}$ است بنابراین داریم $f(f^{-1}(w)) = w$ که $|w| < r_0(f)$ بازای $r_0(f) \geq \frac{1}{4}$ که در آن

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \cdots . \qquad (۱.۴)$$

واضح است که اگر $\phi(z) = \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \phi_3 z^3 + \cdots$ و $\psi(z) = \phi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \cdots$ دامنه $\mathbb{D}$ را به دامنه ای شامل $\mathbb{D}$ بنگارند آنگاه تابع

$$f(z) = \phi(\psi^{-1}(z)) \qquad (۲.۴)$$

دو_ تک ارز[۲] خواهد بود. در اینصورت اگر هردوی f و f^{-1} در $\mathbb{D}$ تحلیلی باشند، سپس مشکلی وجود ندارد. اما آیا تمام توابع دو_تک ارز دارای نمایشی بفرم (۲.۴) می باشند؟ در صورت مثبت بودن، آیا این نمایش یکتاست؟ بحثهای زیادی را می توان مطرح نمود و چنین توابعی را با خواص دو_تک ارز ی یافت. بهرطریق آنچه در اینجا مورد بحث روز قرار می گیرد، یافتن کرانهای ضریب برای تابع $f(z)$ بصورت (۱.۱) و با معکوسی بفرم (۱.۴) است. در حالت کلی

[۱] Inverse function

[۲] Bi-Univalent

یافتن کران (قدرمطلق) ضرایب در رده توابع دو_تک ارز تاکنون غیرممکن بوده ولی برای زیررده هائی از آن این کران آنهم برای ضرایب نخستین حاصل شده، ولی یافتن کران دقیق ضرایب مسئله ی باز بحساب می آید.

تاکنون مولفان متعددی روی توابع دو_تک ارز رده ی Σ مطالعاتی انجام داده و برآوردهای غیردقیقی روی دوضریب نخست بسط توابع این رده، یعنی $|a_2|$ و $|a_3|$ انجام داده اند. تاریخچه کوتاهی از این مطالعات و مثالهای جالب در رده ی Σ را می توانید در [۱۰۸] ببینید. در این مرجع جزئیات بسیاری برای علاقمندان وجود دارد. بهرحال بررسی های بسیاری در این زمینه اخیرا انجام گرفته مانند کارهای اسریواستاوا و دیگران. [۱۹، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۷، ۱۱۸] و یا سایرین [۳۴، ۳۶، ۸۳، ۱۲۰]. در کار اخیر از چندجمله ای های فابر[۳] جهت برآورد کران ضرایب نخستین بهره گرفته شده که روشی موثر بنظر می رسد (مثلا رجوع کنید [۱۰۳]).

۱.۴ تعریف

تعریف ۱.۱.۴. تابع $f \in \mathcal{A}$ را در $\mathbb{D}$ تابع دو_تک ارز گوئیم اگر هردوی f و f^{-1} در $\mathbb{D}$ تک ارز باشند.

رده ی تمام توابع دو_تک ارز در $\mathbb{D}$ را با Σ نمایش می دهیم و نیز $f \in \mathcal{S}$ و f^{-1} توسط (۱.۴) نشان داده می شود.

$$\Sigma = \{f \in \mathcal{S} : f^{-1} \in \mathcal{S}\}. \tag{۳.۴}$$

برخی از اعضاء Σ عبارتند از $\frac{z}{1-z}$ = $\ell(z)$، $-\log(1-z)$ و $\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ و نیز اعضائی از رده ی $\mathcal{S}$ که در Σ نیستند عبارتند از $k_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ و چرخشهای آن، $z - \frac{1}{2}z^2$ و $\frac{z}{1-z^2}$.
لوین[۴] [۵۴] در ۱۹۶۷ توابع رده Σ را بررسی نمود و با استفاده از نامساوی گرانسکی[۵] نشان داد که $|a_2| < 1/51$ برای $f \in \Sigma$. برنان و کلونی [۱۳] (۱۹۸۰) این حدس را مطرح کردند که $|a_2| < \sqrt{2}$ و نتانیاهو[۶] [۶۷] نشان داد که $\max\limits_{f\in\Sigma} |a_2| = \frac{4}{3}$. مسئله برآورد کران ضریب a_2 هنوز هم مسئله ی باز محسوب می شود.

---
[۳] Faber
[۴] Lewin
[۵] Grunsky
[۶] Netanyahu

۲.۴ زیررده ها

تاکنون برای خانواده دوـ تک ارز ها زیررده هایی معرفی و بررسی شده اند و درباره آنها کران های ضریب اول و دوم توابع $f \in \mathcal{S}$ و f^{-1} حاصل شده، که در ذیل به چند زیررده مهم اشاره خواهیم نمود.

$\mathcal{S}^*_\Sigma[\beta]$، $\mathcal{S}^*_\Sigma(\alpha)$ برنان و طاها[۷] (۱۹۸۸) [۱۷]

گیریم $f(z)$ بصورت (۱.۱) باشد. برنان و طاها (۱۹۸۸) زیررده توابع قویا دوـ ستاره‌گون از مرتبه β[۸] از رده Σ را چنین تعریف کردند [۱۷]:

$$\mathcal{S}^*_\Sigma[\beta] = \{f \in \Sigma : \left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \beta\frac{\pi}{۲}\, , \left|\arg \frac{zg'(w)}{g(w)}\right| < \beta\frac{\pi}{۲}\, ; ۰ < \beta \leqslant ۱,\, z \in \mathbb{D}\} \qquad (۴.۴)$$

و نیز توابع دوـ ستاره‌گون از مرتبه α[۹] عبارتند از

$$\mathcal{S}^*_\Sigma(\alpha) = \{f \in \Sigma : \mathbf{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\, , \mathbf{Re}\left(\frac{zg'(w)}{g(w)}\right) > \alpha\, ; ۰ \leqslant \alpha < ۱,\, z \in \mathbb{D}\} \qquad (۵.۴)$$

$\mathcal{H}_\Sigma(\beta)$ اسریواستاوا و دیگران. (۲۰۱۰) [۱۰۸]

گیریم $f(z)$ بصورت (۱.۱) بوده و

$$\mathbf{Re}\, f'(z) > \beta \quad ; \quad f(z) \in \Sigma, \quad z \in \mathbb{D}$$
$$\mathbf{Re}\, g'(w) > \beta \quad ; \quad g(w) = f^{-۱}(w), \quad w \in \mathbb{D}$$

$۰ \leqslant \beta < ۱$. برای $f \in \mathcal{H}_\Sigma(\beta)$:

$$|a_۲| \leqslant \begin{cases} \sqrt{\dfrac{۲(۱-\beta)}{۳}} & , \quad ۰ \leqslant \beta < \dfrac{۱}{۳} \\ ۱-\beta & , \quad \dfrac{۱}{۳} \leqslant \beta < ۱ \end{cases} \quad , \ |a_۳| \leqslant \frac{۲(۱-\beta)}{۳}$$

$\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$ برنان و طاها (۱۹۸۶) [۱۶]

برای $f(z)$ بصورت (۱.۱)

$$\mathbf{Re}\left(۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \quad ; \quad f(z) \in \Sigma, \quad z \in \mathbb{D} \qquad (۶.۴)$$

$$\mathbf{Re}\left(۱ + w\frac{g''(w)}{g'(w)}\right) > \beta \quad ; \quad g(w) = f^{-۱}(w), \quad w \in \mathbb{D} \qquad (۷.۴)$$

که $۰ \leqslant \beta < ۱$، سپس اگر $f \in \mathcal{K}_\Sigma(\beta)$:

$$|a_۲| \leqslant ۱-\beta, \ |a_۳| \leqslant \begin{cases} ۱-\beta & , \quad ۰ \leqslant \beta < \dfrac{۱}{۳} \\ \dfrac{(۱-\beta)(۴-۳\beta)}{۳} & , \quad \dfrac{۱}{۳} \leqslant \beta < ۱ \end{cases} \qquad (۸.۴)$$

---
[۷] Taha

[۸] Strongly bi-starlike of Order β

[۹] Bi-starlike of Order α

عزیز[۱۰]، عبادیان[۱۱] و نجف زاده[۱۲] (۲۰۱۵) [۱۰] زیررده $\mathcal{S}_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ رامعرفی و بررسی نموده و برآورد ضرایب $|a_۲|$ و $|a_۳|$ را در این رده یافتند.تابع $f(z)\in\Sigma$ را در رده $\mathcal{S}_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ گوئیم اگر در شرایط زیر بازای $g(w)=f^{-۱}(w)$ صدق کنند (۱.۴).

$\mathcal{S}_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ — عزیز، عبادیان و نجف زاده (۲۰۱۵) [۱۰]

برای $f(z)$ بصورت (۱.۱)

$$\mathbf{Re}\Big((۱-\alpha)f'(z)+\alpha(۱+z\frac{f''(z)}{f'(z)})\Big)>\beta \quad ; \quad f(z)\in\Sigma,\ \ z\in\mathbb{D}$$
$$\mathbf{Re}\Big((۱-\alpha)g'(w)+\alpha(۱+w\frac{g''(w)}{g'(w)})\Big)>\beta \quad ; \quad g(w)=f^{-۱}(w),\ \ w\in\mathbb{D}$$

$۰\leqslant\alpha<۲$، $۰\leqslant\beta<۱$. برای $f\in\mathcal{S}_{\Sigma}(\alpha,\beta)$:

$$|a_۲|\leqslant\min\Big\{۱-\beta,\sqrt{\frac{۲(۱-\beta)}{۳-\alpha}}\Big\},$$
$$|a_۳|\leqslant\min\Big\{\frac{۲(۱-\beta)}{۳(۱+\alpha)}+(۱-\beta)^۲,\frac{۲(۱-\beta)}{۳-\alpha}\Big\}.$$

برای $\alpha=۰$: $\mathcal{S}_{\Sigma}(۰,\beta)=\mathcal{H}_{\Sigma}(\beta)$ (اسریواستاوا و دیگران [۱۰۸])

بازای $\alpha=۱$: $\mathcal{S}_{\Sigma}(۰,\beta)=\mathcal{K}_{\Sigma}(\beta)$ (برنان و طاها [۱۶])

برنان و طاها همچنین زیررده ای معرفی کردند که شامل بسیاری از زیررده های قبلی بود:

$\mathcal{N}^{\mu}_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ — برنان و طاها (۱۹۸۸) [۱۷]

$$f\in\Sigma, \tag{۹.۴}$$
$$\Big|\arg\Big((۱-\lambda)(\frac{f(z)}{z})^{\mu}+\lambda f'(z)(\frac{f(z)}{z})^{\mu-۱}\Big)\Big|<\frac{\alpha\pi}{۲}\quad ;\quad z\in\mathbb{D}, \tag{۱۰.۴}$$
$$g(w)=f^{-۱}(w),\ \ w\in\mathbb{D}, \tag{۱۱.۴}$$
$$\Big|\arg\Big((۱-\lambda)(\frac{g(w)}{w})^{\mu}+\lambda g'(w)(\frac{g(w)}{w})^{\mu-۱}\Big)\Big|<\frac{\alpha\pi}{۲}\quad ;\quad w\in\mathbb{D}. \tag{۱۲.۴}$$

$۰<\alpha\leqslant۱$، $\mu\geqslant۰$ و $\lambda\geqslant۱$. برای $f\in\mathcal{N}^{\mu}_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$:

$$|a_۲|\leqslant\frac{۲\alpha}{\sqrt{(\mu+\lambda)^۲+\alpha(\mu+۲\lambda-\lambda^۲)}},\ \ |a_۳|\leqslant\frac{۴\alpha^۲}{(\lambda+\mu)^۲}+\frac{۲\alpha}{۲\lambda+\mu} \tag{۱۳.۴}$$

بازای $\mu=۱$: $\mathcal{N}^{۱}_{\Sigma}(\alpha,\lambda)=\mathcal{B}_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ (فراسین[۱۳] و آئوف[۱۴] ۲۰۱۱. [۳۶])

$$\mathbf{Re}\left\{(۱-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\right\}>\alpha\ ,\ \mathbf{Re}\left\{(۱-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\right\}>\alpha \tag{۱۴.۴}$$

[۱۰] Aziz
[۱۱] Ebadian
[۱۲] Najafzadeh
[۱۳] Frasin
[۱۴] Aouf

که $0 \leqslant \alpha < 1$. بنابراین

$$|a_2| \leqslant \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}, \ |a_3| \leqslant \frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2\alpha}{2\lambda+1} \tag{۱۵.۴}$$

$\lambda = 1$: $\mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha,1) = \mathcal{P}_\Sigma(\alpha,\mu)$ تابع دو-بازیلویچ[۱۵] است (پریما[۱۶] و کرسی[۱۷] ۲۰۱۳.) و در شرط $f \in \mathcal{P}_\Sigma(\alpha,\mu)$:

$$\mathbf{Re}\,\frac{z^{1-\mu}f'(z)}{f(z)^{1-\mu}} > \alpha\ ,\ \mathbf{Re}\,\frac{w^{1-\mu}g'(w)}{g(w)^{1-\mu}} > \alpha$$

با $0 \leqslant \alpha < 1$ صدق می کند. پس

$$|a_2| \leqslant \frac{2\alpha}{\sqrt{(\mu+1)^2+\alpha(\mu+1)}}, \ |a_3| \leqslant \frac{4\alpha^2}{(\mu+1)^2}+\frac{2\alpha}{\mu+2} \tag{۱۶.۴}$$

$\lambda = \mu = 1$: $\mathcal{N}_\Sigma^1(\alpha,1) = \mathcal{H}_\Sigma(\alpha)$ (اسریواستاوا و دیگران. ۲۰۱۰. [۱۰۸])

$$|a_2| \leqslant \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}, \ |a_3| \leqslant \frac{1}{3}\alpha(3\alpha+2) \tag{۱۷.۴}$$

$\lambda = 1$ و $\mu = 0$: $\mathcal{N}_\Sigma^0(\alpha,1) = \mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$ (توابع دو-ستاره‌گون از مرتبه α)

$$|a_2| \leqslant \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}, \ |a_3| \leqslant \alpha(4\alpha+1) \tag{۱۸.۴}$$

بولوت[۱۸] (۲۰۱۴) با ضرائب فابر برای $n \geqslant 4$ نشان داد که:

$$|a_n| \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{\mu+(n-1)\lambda}$$

و

$$\left|a_3 - \frac{\mu+3}{2}a_2^2\right| = \frac{2(1-\alpha)}{\mu+2\lambda}$$

بولوت کران بهتری برای a_2 و a_3 برای توابع موجود در این رده یافت (۲۰۱۴). ژو[۱۹] (۲۰۰۷) شرایطی را روی α، λ، μ و M بیان کرد که

$$\left|(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^\mu + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} - 1\right| < M$$

$\mathcal{K}_\Sigma(\alpha,\beta)$	سیم و کوان (۲۰۱۳) [۹۸]

[۱۵] Bi-Bazilevič
[۱۶] Prima
[۱۷] Keresi
[۱۸] Bulut
[۱۹] Zhu

گیریم $f(z)$ بصورت (۱.۱) بوده و

$$\alpha < \mathbf{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) < \beta \quad ; \quad f(z)\in\Sigma,\ \ z\in\mathbb{D}$$
$$\alpha < \mathbf{Re}\left(1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right) < \beta \quad ; \quad g(w)=f^{-1}(w),\ \ w\in\mathbb{D}$$

برای اعداد حقیقی α و β با شرط $0\leqslant\alpha<1<\beta$، بازای $f\in\mathcal{K}_\Sigma(\alpha,\beta)$:

$$|a_2|\leqslant\frac{|B_1|\sqrt{|B_1|}}{\sqrt{2|B_1^2-2B_1+2B_2|}},$$
$$|a_3|\leqslant\frac{1}{2}(|B_1|+|B_2-B_1|).$$

که

$$|B_1|=i\frac{\beta-\alpha}{\pi}\left(1-e^{2\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}\right),|B_2|=i\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\left(1-e^{4\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}\right).$$

و

$$\begin{aligned}|b_2| &\leqslant \frac{\beta-\alpha}{\pi}\sin\frac{(1-\alpha)\pi}{\beta-\alpha},\\ |b_3| &\leqslant \frac{\beta-\alpha}{3\pi}\sin\frac{(1-\alpha)\pi}{\beta-\alpha}\max\left\{1,\left|\frac{1}{2}-\frac{2i(\beta-\alpha)}{\pi}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2i(\beta-\alpha)}{\pi}\right)e^{2\pi i\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}}\right|\right\}.\end{aligned}$$

کاری که اخیرا العشوه[20] [۳۴] با معرفی زیررده هائی از توابع دو_تک ارز انجام داده، بکارگیری پیچش در این زیررده ها می باشد و دو ضریب نخست بسط سری تیلور این زیر رده ها را، یعنی $|a_2|$ و $|a_3|$ یافته است:

العشوه (۲۰۱۴) [۳۴] — $\mathcal{B}_\Sigma(h,\alpha,\lambda)$

تابع $f(z)$ داده شده با (۱.۱) را متعلق به رده $\mathcal{B}_\Sigma(h,\alpha,\lambda)$ نامیم اگر

$$\begin{aligned}&f\in\Sigma,\\ &\mathbf{Re}\left((1-\lambda)\frac{(f*h)(z)}{z}+\lambda(f*h)'(z)\right)>\alpha,\quad z\in\mathbb{D},\\ &\mathbf{Re}\left((1-\lambda)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\lambda((f*h)^{-1})'(w)\right)>\alpha,\quad w\in\mathbb{D}.\end{aligned}\tag{۱۹.۴}$$

که $0\leqslant\alpha<1$ و $\lambda\geqslant 1$ و توابع $h(z)$ و $(f*h)^{-1}(w)$ چنین تعریف می شوند:

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}h_nz^n\quad,\quad h_n>0.\tag{۲۰.۴}$$

و

$$\begin{aligned}(f*h)^{-1}(w)=&w-a_2h_2w^2+(2a_2^2h_2^2-a_3h_3)w^3\\ &-(5a_2^3h_2^3-5a_2h_2a_3h_3+a_4h_4)w^4+\cdots.\end{aligned}\tag{۲۱.۴}$$

---
[20] El-Ashwah

گیریم $f\in\mathcal{B}_\Sigma(h,\alpha,\lambda)$ باشد سپس

$$|a_2|\leqslant\frac{1}{h_2}\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{(2\lambda+1)}},\qquad (۲۲.۴)$$
$$|a_3|\leqslant\frac{1}{h_3}\left(\frac{4(1-\alpha)^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2(1-\alpha)}{(2\lambda+1)}\right).$$

$\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$	العشوه (۲۰۱۴) [۳۴]

تابع $f(z)$ داده شده با (۱.۱) را متعلق به رده $\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$ نامیم اگر

$$\begin{aligned}&f\in\Sigma,\\&\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{(f*h)(z)}{z}+\lambda(f*h)'(z)\right)\right|<\beta\frac{\pi}{2},\quad z\in\mathbb{D},\\&\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\lambda((f*h)^{-1})'(w)\right)\right|<\beta\frac{\pi}{2},\quad w\in\mathbb{D}.\end{aligned}\qquad (۲۳.۴)$$

که $0<\beta\leqslant 1$ و $\lambda\geqslant 1$ و توابع $h(z)$ و $(f*h)^{-1}(w)$ به ترتیب با (۲۰.۴) و (۲۱.۴) تعریف می شوند. گیریم $f\in\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$ باشد سپس

$$|a_2|\leqslant\frac{2\beta}{h_2\sqrt{(\lambda+1)^2+\beta(1+2\lambda-\lambda^2)}},\qquad (۲۴.۴)$$
$$|a_3|\leqslant\frac{1}{h_3}\left(\frac{4\beta^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2\beta}{(2\lambda+1)}\right).$$

حال زیررده جدیدی را از Σ معرفی می کنیم که در حقیقت تعمیمی از $\mathcal{B}_\Sigma(h,\alpha,\lambda)$ و $\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$ بوده و با یافتن ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ نشان می دهیم که در حالت خاص همان (۲۲.۴) و (۲۴.۴) را بدست می دهند.

۳.۴ رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$

گیریم φ تابع تحلیلی با جزء حقیقی مثبت در $\mathbb{D}$ بوده و $\varphi(0)=1$، $\varphi'(0)>0$ و نیز $\varphi(\mathbb{D})$ نسبت به محور حقیقی متقارن باشد. چنین تابعی دارای بسط سری زیر است:

$$\varphi(z)=1+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\cdots\quad(B_1>0).\qquad (۲۵.۴)$$

رده ی جدید را چنین می گیریم:

تعریف ۱.۳.۴. [۶۵] فرض کنید $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ و $\tau\in\mathbb{C}-\{0\}$. تابع $f\in\Sigma$ بفرم (۱.۱) را گوئیم در رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ است اگر شرایط تابعیت زیر برقرار باشند:

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{(f*h)(z)}{z}+\lambda(f*h)'(z)-1\right]\prec\varphi(z)\quad(z\in\mathbb{D}),\qquad (۲۶.۴)$$

و

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\lambda((f*h)^{-1})'(w)-1\right]\prec\varphi(w)\quad(w\in\mathbb{D}), \tag{۲۷.۴}$$

که در آن $h(z)$ و $(f*h)^{-1}(w)$ به ترتیب با (۲۰.۴) و (۲۱.۴) تعریف می شوند.

کافیست ببینیم که با انتخاب مناسبی از φ رده های پیشین از Σ بدست می آید که زیر رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ محسوب خواهند شد.

- گیریم $\tau=1$ و $\varphi=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$ که $0<\alpha\leqslant 1$، سپس رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ همان (۱۹.۴) است.

- برای $\tau=1$، $\varphi=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$ که $0<\alpha\leqslant 1$ و $h(z)=\frac{z}{1-z}$، رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ همان $\mathcal{B}_\Sigma(\alpha,\lambda)$ در (۱۴.۴) خواهد شد که توسط فراسین و آئوف معرفی شده است [۳۶].

- اگر بگیریم $\tau=\lambda=1$، $\varphi=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$ که $0<\alpha\leqslant 1$ و $h(z)=\frac{z}{1-z}$، دراینصورت رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ همان رده ی $\mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ با (۱۷.۴) است که توسط اسریواستاوا و دیگران بررسی شد [۱۰۸].

- بازای $\tau=1$ و $\varphi=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0\leqslant\beta<1$، آنگاه رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ همان رده ی $\mathcal{B}_\Sigma[h,\beta,\lambda]$ در (۲۳.۴) است که توسط العشوه بررسی شد.

- برای $\tau=1$ و $\varphi=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0\leqslant\beta<1$، سپس $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\beta,\lambda)$ همانست که فراسین و آئوف معرفی کردند [۳۶].

- اگر بگیریم $\tau=\lambda=1$ و $\varphi=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0\leqslant\beta<1$، رده $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ همان خانواده $\mathcal{H}_\Sigma(\beta)$ است که توسط اسریواستاوا و دیگران بررسی شد [۱۰۸].

۴.۴ کران ضرایب در رده ی $\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$

اکنون کرانی برای ضرایب رده ی مورد بحث می یابیم:

قضیه ۱.۴.۴. [۶۵] گیریم $f(z)\in\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ به شکل (۱.۱) باشد. سپس

$$|a_2|\leqslant\min\left[\frac{|\tau|B_1}{h_2(1+\lambda)},\frac{1}{h_2}\sqrt{\frac{|\tau|(B_1+|B_1-B_2|)}{(1+2\lambda)}},\frac{|\tau|B_1\sqrt{B_1}}{h_2\sqrt{|(B_1-B_2)(1+\lambda)^2+\tau B_1^2(1+2\lambda)|}}\right]. \tag{۲۸.۴}$$

$$|a_3|\leqslant\min\left[\frac{|\tau|(B_1+|B_1-B_2|)}{h_3(1+2\lambda)},\frac{|\tau^2|B_1^2}{h_3(1+\lambda)^2}+\frac{|\tau|B_1}{h_3(1+2\lambda)}\right]. \tag{۲۹.۴}$$

که ضرایب B_1 و B_2 در (۲۵.۴) داده شده اند.

برهان. برای $f\in\mathcal{B}_\Sigma(\varphi,\tau,\lambda)$ ، توابع تحلیلی $u,v:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ با $u(0)=v(0)=0$ هستند که در شرایط زیر صدق می کنند:

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{(f*h)(z)}{z}+\lambda(f*h)'(z)-1\right]=\varphi(u(z))\quad(z\in\mathbb{D})\tag{۳۰.۴}$$

و

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\lambda((f*h)^{-1})'(w)-1\right]=\varphi(v(w))\quad(w\in\mathbb{D}).\tag{۳۱.۴}$$

با تعریف توابع p_1 و p_2 بشکل

$$p_1(z)=\frac{1+u(z)}{1-u(z)}=1+c_1z+c_2z^2+\cdots\tag{۳۲.۴}$$

و

$$p_2(z)=\frac{1+v(z)}{1-v(z)}=1+b_1z+b_2z^2+\cdots.\tag{۳۳.۴}$$

سپس p_1 و p_2 در $\mathbb{D}$ تحلیلی با جزء حقیقی مثبت بوده و $p_1(0)=1=p_2(0)$ است. بدین ترتیب از دید لم ۲.۵.۱ داریم

$$|b_n|\leqslant 2\ \text{و}\ |c_n|\leqslant 2\quad(n\in\mathbb{N}).\tag{۳۴.۴}$$

با حل (۳۲.۴) و (۳۳.۴) برای $u(z)$ و $v(z)$ می یابیم

$$u(z)=\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}=\frac{1}{2}\left[c_1z+\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)z^2+\cdots\right]\quad(z\in\mathbb{U})\tag{۳۵.۴}$$

و

$$v(z)=\frac{p_2(z)-1}{p_2(z)+1}=\frac{1}{2}\left[b_1z+\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)z^2+\cdots\right]\quad(z\in\mathbb{U}).\tag{۳۶.۴}$$

با جانشینی از (۳۵.۴) و (۳۶.۴) به ترتیب به (۳۰.۴) و (۳۱.۴)و با استفاده از (۲۵.۴) داریم

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{(f*h)(z)}{z}+\lambda(f*h)'(z)-1\right]=\varphi\left(\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}\right)\\&=1+\frac{1}{2}B_1c_1z+\left[\frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2c_1^2\right]z^2+\cdots\end{aligned}\tag{۳۷.۴}$$

و

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\lambda)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\lambda((f*h)^{-1})'(w)-1\right]=\varphi\left(\frac{p_2(w)-1}{p_2(w)+1}\right)\\&=1+\frac{1}{2}B_1b_1w+\left[\frac{1}{2}B_1\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2b_1^2\right]w^2+\cdots.\end{aligned}\tag{۳۸.۴}$$

از (۳۷.۴) و (۳۸.۴) داریم

$$\frac{(1+\lambda)a_2h_2}{\tau}=\frac{1}{2}B_1c_1, \qquad (39.4)$$

$$\frac{(1+2\lambda)a_3h_3}{\tau}=\left[\frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2c_1^2\right], \qquad (40.4)$$

$$\frac{-(1+\lambda)a_2h_2}{\tau}=\frac{1}{2}B_1b_1 \qquad (41.4)$$

و

$$\frac{(1+2\lambda)(2a_2^2h_2^2-a_3h_3)}{\tau}=\left[\frac{1}{2}B_1\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2b_1^2\right]. \qquad (42.4)$$

از (۳۹.۴) و (۴۱.۴) نتیجه می شود

$$c_1=-b_1 \qquad (43.4)$$

و

$$\frac{2(1+\lambda)^2a_2^2h_2^2}{\tau^2}=\frac{1}{4}B_1^2(c_1^2+b_1^2). \qquad (44.4)$$

با استفاده از لم کاراتئودوری ۲.۵.۱ می یابیم

$$|a_2|\leqslant\frac{|\tau|B_1}{h_2(1+\lambda)}. \qquad (45.4)$$

از افزودن (۴۰.۴) و (۴۲.۴) داریم

$$\frac{(1+2\lambda)2a_2^2h_2^2}{\tau}=\left[\frac{1}{2}B_1(b_2+c_2)-\frac{1}{4}B_1(b_1^2+c_1^2)+\frac{1}{4}B_2(b_1^2+c_1^2)\right]. \qquad (46.4)$$

یعنی

$$a_2^2=\frac{\tau\left[2B_1(b_2+c_2)-B_1(b_1^2+c_1^2)+B_2(b_1^2+c_1^2)\right]}{8(1+2\lambda)h_2^2}.$$

از آنجا که $B_1>0$، $h_2>0$، $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ و از لم کاراتئودوری ۲.۵.۱ نتیجه می گیریم

$$|a_2|^2\leqslant\frac{|\tau|(B_1+|B_1-B_2|)}{(1+2\lambda)h_2^2},$$

$$|a_2|\leqslant\frac{1}{h_2}\sqrt{\frac{|\tau|(B_1+|B_1-B_2|)}{(1+2\lambda)}}. \qquad (47.4)$$

از طرفی با بکارگیری (۴۴.۴) در (۴۶.۴) به

$$\frac{2(1+2\lambda)a_2^2h_2^2}{\tau}=\left[\frac{1}{2}B_1(b_2+c_2)-\frac{2(B_1-B_2)(1+\lambda)^2a_2^2h_2^2}{\tau^2B_1^2}\right]. \tag{۴۸.۴}$$

می رسیم و بنابراین

$$\frac{2a_2^2h_2^2}{\tau^2B_1^2}((B_1-B_2)(1+\lambda)^2+\tau B_1^2(1+2\lambda))=\frac{1}{2}B_1(b_2+c_2). \tag{۴۹.۴}$$

یعنی

$$a_2^2=\frac{\tau^2B_1^3(b_2+c_2)}{4h_2^2((B_1-B_2)(1+\lambda)^2+\tau B_1^2(1+2\lambda))}.$$

از لم ۲.۵.۱ داریم

$$|a_2|^2\leqslant\frac{4\tau^2B_1^3}{4h_2^2|(B_1-B_2)(1+\lambda)^2+\tau B_1^2(1+2\lambda)|},$$

$$|a_2|\leqslant\frac{|\tau|B_1\sqrt{B_1}}{h_2\sqrt{|(B_1-B_2)(1+\lambda)^2+\tau B_1^2(1+2\lambda)|}}. \tag{۵۰.۴}$$

حال از (۴۵.۴)، (۴۸.۴) و (۵۰.۴) کرانی برای $|a_2|$ می یابیم.

به طور مشابه با تفاضل (۴۲.۴) از (۴۰.۴) و استفاده از (۴۳.۴) به عبارت

$$\frac{2(1+2\lambda)a_3h_3}{\tau}-\frac{2(1+2\lambda)a_2^2h_2^2}{\tau}=\frac{1}{2}B_1(c_2-b_2). \tag{۵۱.۴}$$

رسیده و اگر از (۴۴.۴) در (۵۱.۴) استفاده کنیم می یابیم

$$\frac{2(1+2\lambda)a_3h_3}{\tau}=\frac{\tau B_1^2(1+2\lambda)(c_1^2+b_1^2)}{4(1+\lambda)^2}+\frac{1}{2}B_1(c_2-b_2). \tag{۵۲.۴}$$

$$a_3=\frac{\tau^2B_1^2(1+2\lambda)(c_1^2+b_1^2)}{8(1+\lambda)^2(1+2\lambda)h_3}+\frac{\tau B_1(c_2-b_2)}{4(1+2\lambda)h_3},$$

با استفاده از لم کاراتئودوری ۲.۵.۱ داریم

$$|a_3|\leqslant\frac{|\tau^2|B_1^2}{h_3(1+\lambda)^2}+\frac{|\tau|B_1}{h_3(1+2\lambda)}. \tag{۵۳.۴}$$

از بکارگیری (۴۶.۴) در (۵۱.۴) داریم

$$\frac{2(1+2\lambda)a_3h_3}{\tau}=\left[\frac{1}{2}B_1(c_2+c_2)-\frac{1}{4}B_1(b_1^2+c_1^2)+\frac{1}{4}B_2(b_1^2+c_1^2)\right], \tag{۵۴.۴}$$

$$a_3 = \frac{\tau\left(2B_1(c_3+c_2) - B_1(b_1^2+c_1^2) + B_2(b_1^2+c_1^2)\right)}{8(1+2\lambda)h_3}.$$

چون $B_1 > 0$، $h_3 > 0$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ و استفاده از لم کاراتئودوری ۲.۵.۱ می یابیم

$$|a_3| \leqslant \frac{|\tau|(B_1 + |B_1 - B_2|)}{h_3(1+2\lambda)}. \tag{۵۵.۴}$$

و بالاخره از (۵۳.۴) و (۵۵.۴) کران $|a_3|$ را بدست می آوریم. □

۵.۴ نتایج

با فرض $\tau = 1$ و

$$\varphi = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \cdots \qquad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

در قضیه ۱.۴.۴ نتیجه ی زیر را بدست می آوریم که ارتقاء از نتایج العشوه محسوب می شود.

نتیجه ۱.۵.۴. [۶۵] گیریم $f(z) \in \mathcal{B}_\Sigma(h, \alpha, \lambda)$ به شکل (۱.۱) باشد. آنگاه

$$|a_2| \leqslant \min\left[\frac{2\alpha}{h_2(1+\lambda)}, \frac{1}{h_2}\sqrt{\frac{4\alpha - 2\alpha^2}{(1+2\lambda)}}, \frac{2\alpha}{h_2\sqrt{(1+\lambda)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}\right]. \tag{۵۶.۴}$$

$$|a_3| \leqslant \min\left[\frac{4\alpha - 2\alpha^2}{h_3(1+2\lambda)}, \frac{4\alpha^2}{h_3(1+\lambda)^2} + \frac{2\alpha}{h_3(1+2\lambda)}\right]. \tag{۵۷.۴}$$

با فرض $h(z) = \frac{z}{1-z}$ در نتیجه ۱.۵.۴ به نتیجه زیر می رسیم که بهتر از نتیجه یافته شده توسط فراسین و آئوف [۳۶] است.

نتیجه ۲.۵.۴. [۶۵] گیریم $f(z) \in \mathcal{B}_\Sigma(\alpha, \lambda)$ به شکل (۱.۱) باشد. سپس

$$|a_2| \leqslant \min\left[\frac{2\alpha}{(1+\lambda)}, \sqrt{\frac{4\alpha - 2\alpha^2}{(1+2\lambda)}}, \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}\right]. \tag{۵۸.۴}$$

$$|a_3| \leqslant \min\left[\frac{4\alpha - 2\alpha^2}{(1+2\lambda)}, \frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{2\alpha}{(1+2\lambda)}\right]. \tag{۵۹.۴}$$

با فرض $\lambda = 1$ در نتیجه ۲.۵.۴ به نتیجه زیر می رسیم که بهتر از نتیجه یافته شده توسط اسریواستاوا و دیگران [۱۰۸] است.

نتیجه ۳.۵.۴. [۶۵] گیریم $f(z) \in \mathcal{H}_{\Sigma}^{\alpha}$ بفرم (۱.۱) باشد. آنگاه

$$|a_۲| \leqslant \min\left[\sqrt{\frac{۴\alpha - ۲\alpha^۲}{۳}}, \frac{۲\alpha}{\sqrt{۴+۲\alpha}}\right]. \tag{۶۰.۴}$$

$$|a_۳| \leqslant \min\left[\frac{۴\alpha - ۲\alpha^۲}{۳}, \alpha^۲ + \frac{۲\alpha}{۳}\right]. \tag{۶۱.۴}$$

اگر بگیریم $\tau = ۱$ و

$$\varphi = \frac{۱+(۱-۲\beta)z}{۱-z} = ۱ + ۲(۱-\beta)z + ۲(۱-\beta)z^۲ + \cdots \quad ۰ \leqslant \beta < ۱$$

در قضیه ۱.۴.۴ نتیجه ی زیر را بدست می آوریم که ارتقاء از نتایج العشوه محسوب می شود.

نتیجه ۴.۵.۴. [۶۵] گیریم $f(z) \in \mathcal{B}_{\Sigma}(h,\beta,\lambda)$ به شکل (۱.۱) باشد. سپس

$$|a_۲| \leqslant \min\left[\frac{۲(۱-\beta)}{h_۲(۱+\lambda)}, \frac{۱}{h_۲}\sqrt{\frac{۲(۱-\beta)}{(۱+۲\lambda)}}\right]. \tag{۶۲.۴}$$

$$|a_۳| \leqslant \frac{۲(۱-\beta)}{h_۳(۱+۲\lambda)}. \tag{۶۳.۴}$$

با فرض $h(z) = \frac{z}{۱-z}$ در نتیجه ۱.۵.۴ به نتیجه زیر می رسیم که بهتر از نتیجه یافته شده توسط فراسین و آئوف [۳۶] است.

نتیجه ۵.۵.۴. [۶۵] گیریم $f(z) \in \mathcal{B}_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ به شکل (۱.۱) باشد. سپس

$$|a_۲| \leqslant \min\left[\frac{۲(۱-\beta)}{(۱+\lambda)}, \sqrt{\frac{۲(۱-\beta)}{(۱+۲\lambda)}}\right]. \tag{۶۴.۴}$$

$$|a_۳| \leqslant \frac{۲(۱-\beta)}{(۱+۲\lambda)}. \tag{۶۵.۴}$$

با فرض $\lambda = ۱$ در نتیجه ۵.۵.۴ به نتیجه زیر می رسیم که بهتر از نتیجه یافته شده توسط اسریواستاوا و دیگران [۱۰۸] است.

نتیجه ۶.۵.۴. [۶۵] گیریم $f(z) \in \mathcal{H}_{\Sigma}(\beta)$ به شکل (۱.۱) باشد. سپس

$$|a_۲| \leqslant \min\left[(۱-\beta), \sqrt{\frac{۲(۱-\beta)}{۳}}\right]. \tag{۶۶.۴}$$

$$|a_۳| \leqslant \frac{۲(۱-\beta)}{۳}. \tag{۶۷.۴}$$

مراجع

[۱] سیلورمن هرب (۱۳۶۹)، **متغیرهای مختلط**، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه اصفهان.

[2] Ahuja Om P., Jahangiri J. M. and Silverman H. (2003), ”Convolutions for special classes of harmonic univalent functions”, **Applied Mathematics Letters**, 16 (6), pp. 905-909.

[3] Ahuja Om P. (2005), ”Planar harmonic univalent and related mappings”, **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 6 (4), Art-122.

[4] Ali R. M., Khan M. H., Ravichandran V. and Subramanian K. G. (2006), ”A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution”, **Bull. Korean Math. Soc.**, 43 (1), 179-188.

[5] Ali R. M. and Ravichandran V. (2011), ”Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions”, **Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society**, 21 (1), pp. 16-30.

[6] Ali R. M., Stephen B. A. and Subramanian K. G. (2010), ”Subclasses of harmonic mappings defined by convolution”, **Applied Mathematics Letters**, Vol. 23 (10).

[7] Al-Amiri H. and Mocanu P. T. (1981), ”Spirallike nonanalytic functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 82 (1), pp. 61-65.

[8] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator”, **J. Inequal. Appl.**, 10 pp. Art. ID 263413.

[9] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Goodman-Ronning-Type harmonic univalent functions defined by Ruscheweyh operator”, **Int. Math.**, Forum 3, no. 44, pp.2161-2174.

[10] Azizi S., Ebadian A. and Najafzadeh Sh. (2015), ”Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-univalent Functions”, **Comm. Adv. Comp. Sci. App.**, 1, pp. 41-44.

[11] Bazilevič I. E. (1955), ”On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation” (Russian), **Mat. Sb. (N.S.)**, 37 (79)(3), pp. 471-476.

[12] Bieberbach L. (1916), ”Ober die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln”, **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, pp. 940-955.

[13] Brannan D. A. and Clunie J. G. (1980), ”**Aspects of Contemporary Complex Analysis**”, Academic Press, NY.

[14] Brannan D. A., Clunie J. G. and Kirwan W. E. (1970), ”Coefficient estimates for a class of starlike functions”, **Can. J. Math.**, 22, pp. 476-485.

[15] Brannan D. A. and Kirwan W. E. (1969), ”On some classes of bounded univalent functions”, **J. London Math. Soc.**, 1 (2), pp. 431-443.

[16] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **Studia Univ. Babes-Bolyai Math.**, 31 (2), pp. 70-77.

[17] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **KFAS Proceedings Series, v. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford**, pp. 53-60.

[18] Brown J. E. (1989), ”Images of disks under convex and starlike functions”, **Math. Z.**, 202 (4), pp. 457-462.

[19] Çaglar M., Deniz E. and Srivastava H. M. (2017), ”Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions”, **Turkish J. Math.**, 41, pp. 694-706.

[20] Çaglar M., Orhan H. and Yagmur N. (2012), ”Coefficient Bounds For New Subclasses of Bi-Univalent Functions”, **Faculty Sci. Math. Uni. Nis, Serbia**, 27 (7), pp. 1165-1171.

[21] Chen M. (1975), ”On the regular functions satisfying $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \alpha$”, **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica**, 3, pp. 65-70.

[22] Catas A., Oros G. I. and Oros G. (2008), ”Differential subordinations associated with multiplier transformations”, **Abstr. Appl. Anal.**, ID 845724:1-11.

[23] Chichra P. N. (1977), ”New subclasses of the class of close-to-convex functions”, **Proc. Am. Math. Soc.**, 62, pp. 37-43.

[24] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B. (2004), ”Curvature properties of planar harmonic mappings”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 4 (1), pp. 127-142.

[25] Clunie J. and Sheil-Small T. (1984), "Harmonic Univalent Functions", **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.**, 9 (2), pp. 3-25.

[26] de Branges L. (1985), "A proof of the Bieberbach conjecture", **Acta Mathematica**, 154, pp. 137-152.

[27] Ding S. S., Ling Y. and Bao G. J. (1995), "Some properties of a class of analytic functions", **J. Math. Anal. Appl.**, 195 (1), pp. 71-81.

[28] Dorff M. (2001), "Convolutions of planar harmonic convex mappings", **Comp. Var. Theory Appl.**, 45 (3), pp. 263-271.

[29] Dorff M., Nowak M. and Woloszkiewicz M. (2012), "Convolutions of harmonic convex mappings", **Complex Variables and Elliptic Equations**, 57 (5), pp. 489-504.

[30] Duren P. L. (2004), "**Harmonic Mappings in the Plane**", Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge.

[31] Duren P. L. (1983), "**Univalent Functions**", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.

[32] Dziok J. and Srivastava H. M. (1999), "Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function", **Appl. Math. Comput.**, 103, pp. 1-13.

[33] Eenigenburg P. J., Miller S. S., Mocanu P. T. and Reade M. O. (1974), "On a subclass of Bazilevič functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 45, pp. 88-92.

[34] El-Ashwah R. M. (2014), "Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution", **J. Egypt. Math. Soc.**, 22 (3), pp. 348-351.

[35] Ezhilarasi R. and Sudharsan T. V. (2013), "A Subclass of Harmonic Functions Associated with a Convolution Structure", **Ann. Pure & App. Math.**, 4 (2), pp. 182-191.

[36] Frasin B. A. and Aouf M. K. (2011), "New subclasses of bi-univalent functions", **Appl. Math. Lett.**, 24, pp. 1569-1573.

[37] Ganenkova E. and Starkov V. V. (2015), "Regularity theorems for harmonic functions", **J. Appl. Anal.**, 21 (1), 1-12.

[38] Garabedian P. R. and Schiffer M. (1955), "A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient", **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4, pp. 427-455.

[39] Gilman J. P., Kra I. and Rodr guedriguez R. E. (2007), ”**Complex Analysis**”, Springer.

[40] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Convex Functions”, **Ann. Polon. Math.**, 56, pp. 87-92.

[41] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Starlike Functions”, **J. Math. Ana. & App.**, 155, pp. 364-370.

[42] Goodman A. W (1983)., ”**Univalent Functions**”, Polygonal, Washington, NJ.

[43] Hallenbeck D. J. and Ruscheweyh St. (1975), ”Subordination by convex functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 52, pp. 191-195.

[44] Hernandez R. and Martn M. J. (2013), ”Stable geometric properties of analytic and harmonic functions”, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 155 (2), pp. 343-359.

[45] Horowitz D. (1978), ”A Further Refinement for Coefficient Estimates of Univalent Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 71, 217-221.

[46] Jahangiri J. M. (1998), ”Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect.**, A 52 (2), 57-66.

[47] Jahangiri J. M. (1999), ”Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk”, **J. Math. Anal. Appl.**, 235 (2), pp. 470-477.

[48] Jahangiri J. M., Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K. (2002), ”Salagean-type harmonic univalent functions”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 77-82 (electronic).

[49] Kim Y. C. and Ponnusamy S. (1999), ”Sufficiency for gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex”, **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 22 (4), 765-773.

[50] Kulshrestha P. K. (1973), ”Generalized Convexity in Conformal Mappings”, **J. Math. anal. App.**, 3, pp. 441-449.

[51] Kumar R., Gupta S. and Singh S. (2012), ”Convolution Properties of Convex Harmonic Functions”, **Int. J. Open Prob. Compl. Anal.**, 4 (3), pp. 69-77.

[52] Kuroki K. and Owa S. (2011), ”Notes on new class for certain analytic functions”, **RIMS Kokyuroku**, 1772, pp. 21-25,.

[53] Lewandowski Z., Miller S. S. and Zlotkiewicz E. J. (1976), ”Generating functions for some classes of univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, vol. 56, pp. 111-117.

[54] Lewin M. (1967), ”On a coefficient problem for bi-univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18, pp. 63-68.

[55] Libera R. J. (1965), ”Some classes of regular univalent functions”, **Proceedings of the American Mathematical Society**.

[56] Lowner K. (1923), ”Untersuchungen tiber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises”, **Math. Ann.**, 89, pp. 102-121.

[57] Ma W. and Minda D. (1992), ”Uniformly convex functions”, **Ann. Polon. Math.**, 57, 165-175.

[58] MacGregor T. H. (1962), ”Functions whose derivative has a positive real part”, **Trans. Am. Math. Soc.**, 104, pp. 532-537.

[59] Markes E. P., Robertson M. S. and Scott W. T. (1962), ”On Products of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, pp. 960-964.

[60] Marx A. (1932), ”Untersuchungen uber schlichte Abbildungen”, **Math. Ann.**, 107 (1), pp. 40-67.

[61] Merkes E. and Salmassi M. (1992), ”Subclasses of uniformly starlike functions”, **Internat. J. Math. & Math. Sci.**, 15 (3), pp. 449-454.

[62] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1993), ”Averaging operators and a generalized Robinson differential inequality”, **J. Math. Anal. Appl.**, 173, pp. 459-469.

[63] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1996), ”A Class of Nonlinear Averaging Integral Operators”, **J. Math. Anal. Appl.**, 197, pp. 313-323.

[64] Mocanu P. T. (1980), ”Starlikeness and convexity for nonanalytic functions in the unit disc”, **Mathematica (Cluj).**, 22 (45), pp. 77-83.

[65] Motamednezhad A., Nosrati S. and Zaker S. (2019), ”Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination”, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.

[66] Murugusundaramoorthy G. (2003), ”A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 90-95 (electronic).

[67] Netanyahu E. (1969), ”The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < ۱$”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 32 (2), pp. 100-112.

[68] Nezhmetdinov I. R. (1997), ”Classes of Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions as Dual Sets”, **J. Math. Anal. Appl.**, 216, pp. 40-47.

[69] Nosrati S. and Zireh A. (2018), ”On Starlike Harmonic Functions”, **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.

[70] Nosrati S. and Zireh A. (2020), ”On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension”, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.

[71] Nunokawa M. and Sokol J. (2013), ”Strongly gamma-starlike functions of order alpha”, **Ann. Uni. Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia**, vol LXVII (2), pp. 43-51.

[72] Ozawa M. (1969), ”An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Kodai Math. Sere. Rep.**, 21, pp. 129-132.

[73] Pederson R. N. (1968), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 31, pp. 331-351.

[74] Pederson R. N. and Schiffer M. (1972), ”A proof of the Bieberbach conjecture of the fifth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 45, pp. 161-193.

[75] Pólya G. and Schoenberg I. J. (1958), ”Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle”, **Pacific J. Math.**, 8 (2), pp. 295-334.

[76] Pommerenke C. (1963), ”On starlike and close-to-convex functions”, **Proc. London Math. Soc.**, 3-13 (1), pp. 290-304.

[77] Pommerenke C. (1975), ”**Univalent Functions**”, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[78] Ponnusamy S. and Sairam Kaliraj A. (2014), ”Univalent harmonic mappings convex in one direction”, **Anal. & Math. Phys.**, 4 (3).

[79] Ponnusamy S., Prajapat J. K. and Sairam Kaliraj A. (2015), ”Uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **J. Anal.**, 23, pp. 121-129.

[80] Ponnusamy S. and Rønning F. (1997), ”Duality for Hadamard products applied to certain integral transforms”, **Complex Variables: Theory and Appl.**, 32 (3), 263-287.

[81] Ponnusamy S. and Rønning F. (1998), "Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series", **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska**, L II.1, 16, 141-155.

[82] Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. and Starkov V. V. (2016), "Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings", **Complex Variables and Elliptic Equations**, 61 (10), pp. 1418-1433.

[83] Porwal S. and Darus M. (2013), "On a new subclass of bi-univalent functions", **J. Egyptian Math. Soc.**, 21, pp. 190-193.

[84] Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M. and Sen A. (2005), "Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order", **Hacet. J. Math. Stat.**, 34, pp. 9-15.

[85] Robertson M. S. (1936), "On the theory of univalent functions", **Ann. Math.**, 37, pp. 374-408.

[86] Rønning F. (1994), "On uniform starlikeness and related properties of univalent functions", **Comp. Var. Theory Appl.**, 24 (3-4), pp. 233-239.

[87] Rønning F. (1993), "A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions", **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska**, Sect. A, 47 (13), pp. 123-134.

[88] Rønning F. (1993), "Uniformly Convex Functions and a Corresponding Class of Starlike Functions", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (1), pp. 189-196.

[89] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2001), "Goodman-Rønning-type harmonic univalent functions", **Kyungpook Math. J.**, 41 (1), 45-54.

[90] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2002), "Goodman-type harmonic convex functions", **J. Natur. Geom.**, 21 (1-2), 39-50.

[91] Ruscheweyh St. and Salinas L. (1989), "On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture", **Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.**, 14, pp. 63-73.

[92] Ruscheweyh St. and Sheil-Small T. (1973), "Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture", **Comment. Math. Helv.**, 48 (1), pp. 119-135.

[93] Sakaguchi K. (1959), "On a certain univalent mapping", **J. Math. Soc. Japan**, 11 (1), 72-75.

[94] Shanmugam T. N. and Lourthu M. J. (2013), "Universally Prestarlike Functions of Complex Order", **Int. Journal of Math. Analysis**, 7 (24), pp. 1155-1164.

[95] Sheil-Small T. (1990), ”Constants for Planar Harmonic Mappings”, **J. London Math. Soc.**, 2 (42), pp. 237-248.

[96] Silverman H. (1998), ”Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients”, **J. Math. Ana. Appl.**, 220 (1), 283-289.

[97] Silverman H. (1975), ”Univalent functions with Negative Coefficients”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 51, pp. 109-116.

[98] Sim Y. J. and Kwon O. S. (2013), ”On Certain Classes of Convex Functions”, **Int. J. Math. & Math. Sci.**, Article ID 294378.

[99] Sobczak-Kneć M., Starkov V. V. and Szynal J. (2011), ”Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian”, **Ann. Univ. Mariae Curie - Skodowska**, **LXV** (2), 191-20.

[100] Spacek L. (1933), ”Prispěvek k teorii funkei prostych”, **Čapopis Pest. Mat. Fys.**, 62, pp. 12-19.

[101] Srivastava H. M. and Bansal D. (2015), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **J. Egyptian Math. Soc.**, 23, pp. 242-246.

[102] Srivastava H. M., Bulut S., Ça□lar M. and Ya□mur N. (2013), ”Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Filomat**, 27 (5), pp. 831-842.

[103] Srivastava H. M., Eker S. Sumer and Ali M. Rosihan (2015), ”Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions”, **Filomat 29:8**, pp. 1839-1845.

[104] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2015), ”Coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 23, pp. 153-164.

[105] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), ”Initial coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.**, 36, pp. 863-871.

[106] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), ”Coefficient estimates for some general subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Afr. Mat.**, 28, pp. 693-706.

[107] Srivastava H. M., Joshi B. S., Joshi S. and Pawar H. (2016), ”Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions”, **Palest. J. Math.**, 5, Special Issue, pp. 250-258.

[108] Srivastava H. M., Mishra A. K. and Gochhayat P. (2010), ”Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett**, 23 (10), pp. 1188-1192.

[109] Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Sivakumar R. (2014), ”Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Tbilisi Math. J.**, 7, pp. 1-10.

[110] Stankiewicz J. (1966), ”Quelques problémes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska**, Sect. A, 20, pp. 59-75.

[111] Starkov V. V. (2004), ”Application of the linear invariance idea in the theory of harmonic mappings”, New order (in Russian), **Modern Problems of Function Theory and its Applications**, Saratov State University, Saratov, 173.

[112] Sugawa Toshiyuki and Wang li-Mei (2016), ”Notes on Convex Functions of Order alpha”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 16 (1), pp. 79-92.

[113] Tang Huo, Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Gurusamy P. (2016), ”The Fekete-Szegö functional problems for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **J. Math. Inequal.**, 10, pp. 1063-1092.

[114] Temme N. M. (1996), ”Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics”, New York: Wiley.

[115] Umezawa T. (1955), ”On the theory of univalent functions”, **Tohoku Math. J.**, 7 (2)(3), pp. 212-228 .

[116] Wilken D. R. and Feng J. (1980), ”A Remark on Convex and Starlike Functions”, **J. London Math. Soc.**, 2 (21), pp. 287-290.

[117] Xu Q.- H., Gui Y.- C. and Srivastava H. M. (2012), ”Coefficient estimates for a Certain subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 25, pp. 990-994.

[118] Xu Q.- H., Xiao H. -G. and Srivastava H. M. (2012), ”A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems”, **Appl. Math. Comput.**, 218 (23), pp. 11461-11465.

[119] Yalçin S., Öztürk M. and Yamankaradeniz M. (2007), ”On the subclass of Salagean-type harmonic univalent functions”, **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 8 (2). Article 54.

[120] Zireh A. and Analouei Audegani E. (2016), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Bull. Iranian Math. Soc.**, 42, pp. 881-889.

پیوست آ

تابع فوق هندسی گاوس

در پایان فصل از تابع مهمی سخن می گوئیم. تابع فوق هندسی گاوس با نماد $_2F_1(a,b;c;z)$ بصورت

$$_2F_1(a,b;c;z) := F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n, |z| < 1 \tag{آ.۱}$$

تعریف می شود که $a,b,c \in \mathbb{C}$، $c \neq 0,-1,-2,\cdots$ و $(a)_n$ نماد پوچهامر[1] با تعریف $(a)_0 = 1$ و $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ $(n \in \mathbb{N})$ است. سری (آ.۱) بازای $|z| < 1$ مطلقا همگراست. بعلاوه اگر $\mathbf{Re}\,(c) > \mathbf{Re}\,(a+b)$ سری برای $|z| \leqslant 1$ نیز همگرا خواهد شد. رابطه زیر گاهی مفید است [۱۱۴]:

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} < \infty \quad \text{بازای} \quad \mathbf{Re}\,(c) > \mathbf{Re}\,(a+b) \tag{آ.۲}$$

لم آ.۰.۱. ([۸۱] لم ۳.۱ و [۴۹]) گیریم $a,b > 0$. داریم

(الف) برای $c > a+b+1$،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(ab+c-a-b-1) \tag{آ.۳}$$

---
[1] Pochhammer

(ب) برای $c > a+b+2$،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 (a)_n (b)_n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(\frac{(a)_2 (b)_2}{(c-a-b-2)_2} + \frac{3ab}{c-a-b-1} + 1 \right) \quad \text{(آ.۴)}$$

دقت کنید که برای $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{-1, -2, \cdots\}$ و $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ داریم

$$\frac{(-1)^n (-\lambda)_n}{n!} = \binom{\lambda}{n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda-n+1)} \quad \text{(آ.۵)}$$

بخصوص وقتی $\lambda = m(m \in \mathbb{N}_0, m \geq n)$ خواهیم داشت

$$(-m)_n = \frac{(-1)^n m!}{(m-n)!} \quad \text{(آ.۶)}$$

نمایه

αــ مارپیچ گون، ۱۷

آئوف، ۷۸، ۸۲، ۸۶، ۸۷
آسگود، ۴۵، ۵۸، ۶۶
آهوجا، ۴۲، ۴۶–۴۹
استارکف، ۷۰
استانکویچ، ۸
استروهکر، ۱۰
استفان، ۴۹
استیر، ۱۱
اسریواستاوا، ۳۱، ۷۶–۷۹، ۸۲، ۸۶، ۸۷
اسپاسک، ۱۷
اسکات، ۷
اصل تابعیت، ۲۵
اصل مقدار ماکزیمم، ۳۴، ۶۳، ۷۰
اصل مقدار مینیمم، ۳۴
الامیری، ۵۶
الشقصی، ۴۹، ۵۰
العشوه، ۸۰–۸۲، ۸۶، ۸۷
الکساندر، ۸، ۱۰، ۲۴، ۲۵، ۶۸
انبساط، ۳، ۳۷
انبساط مختلط دوم، ۳۶
انتقال، ۲۱، ۵۸، ۶۵
انتقال برد، ۳، ۳۷
اوزاوا، ۴
اوزترک، ۴۹
اومی زاوا، ۱۲
اووا، ۱۴، ۳۱
اژی لارسی، ۵۲
اکستریمال، ۳
بازیلویچ، ۱۶
براون، ۲۰
برناردی، ۶۸
برنان، ۸، ۷۶–۷۸
بریکمن، ۱۱
بسط سری تیلور، ۲۲، ۲۹، ۸۰
بولوت، ۷۹
بیبرباخ، ۳، ۴
تابع فوق هندسی گاوس، ۶۱، ۹۹
تابع معکوس، ۷۵
تابع نزدیک به محدب، ۱۷، ۲۸
تابع همساز حقیقی، ۳۳
تابع کوبه، ۱۷، ۴۱
تابع گامای اویلر، ۷
تابع همساز مختلط، ۳۵
تابعیت، ۸۱
توابع γــ قویا ستاره‌گون از مرتبه α، ۱۳
توابع تحلیلی، ۲
توابع داخلی منفرد، ۴۱
توابع ستاره‌گون سهموی، ۲۴، ۵۰
توابع مطیع، ۴
توابع همساز نوع گودمن–رونینگ، ۵۰
تک ارز، ۲، ۳، ۳۵
ثابت کوبه، ۲۲

جریان سیالات، ۳۴
جهانگیری، ۴۳، ۴۵، ۴۹، ۵۰، ۵۲
جهت برگردان، ۳۶
جهت نگهدار، ۳۶
حدس بیبرباخ همساز، ۳۷
حدس بیبرباخ، ۴، ۵
حدس روبرتسون، ۴، ۵
حدس روگوسینسکی، ۴، ۵
حدس میلین، ۴، ۵
خاصیت پایای آفین، ۷۱، ۷۲
خودریختی قرص، ۳، ۲۱، ۳۷، ۷۱
داروس، ۴۹، ۵۰
دو_بازیلویچ، ۷۹
دو_تک ارز، ۷۵–۷۷، ۸۰
دو_ستاره‌گون از مرتبه α، ۷۷، ۷۹
دوبرانژ، ۴
دورف، ۴۹
دورن، ۴۵، ۵۸، ۶۶
رادو، ۴۴
راوی چاندران، ۳۰
رایت، ۱۱
رده، ۳، ۳۶
روبرتسون، ۶، ۷، ۹
روش ساختار برشی، ۳۷
روشه ویه، ۱۱، ۲۸، ۴۷، ۵۰
رونینگ، ۲۱، ۲۳–۲۵، ۶۴
سالاگان، ۳۰، ۵۰
سالیناس، ۴۷
ساکاگوچی، ۱۹، ۲۰
سایرام کالیراج، ۵۶، ۷۰
ستاره‌گون، ۵
ستاره‌گون ما_میندا، ۲۵
ستاره‌گون یکنواخت، ۲۰، ۵۵–۵۸، ۶۲
سلماسی، ۲۱
سوبرامانیان، ۴۹
سوتکویچ، ۱۲
سوداراسان، ۵۲
سوکول، ۱۳
سوگاوا، ۹، ۱۱
سیلورمن، ۹، ۴۲، ۴۳، ۴۹–۵۱
سیم، ۱۰، ۱۳، ۷۹
شعاع تحدب، ۸، ۱۹
شعاع ستاره‌گونی، ۸
شوئنبرگ، ۲۸
شیفر، ۴
شیل_سمال، ۲۸، ۳۶، ۳۷، ۴۲، ۴۳، ۴۶، ۴۷، ۷۲
ضرب هادامار، ۲۷
طاها، ۷۷، ۷۸
عبادیان، ۷۸
عزیز، ۷۸
علی، ۴۹
عملگر روشه ویه، ۵۱
عملگر نوع سالاگان، ۵۱
عملگر میانگین، ۲۵، ۲۶

فابر، ۷۶، ۷۹
فراسین، ۷۸، ۸۲، ۸۶، ۸۷
فرایندهای احتمالاتی، ۳۴
فرمول انتگرال پواسن، ۳۴، ۳۶
قارابادیان، ۴
قرص یکه باز، ۲
قضیه نگاشت ریمان، ۲
قویا دو_ستاره‌گون از مرتبه β، ۷۷
قویا ستاره‌گون، ۸
قویا محدب از مرتبه β، ۱۱
لاونر، ۴
لواندوفسکی، ۱۲

لوی، ۳۶
لوین، ۷۶
ما، ۲۴، ۲۵
مارپیچ گون، ۱۷
مارپیچ گونی، ۱۷
مارکز، ۷
مارکس، ۱۰
مجموعه دوگان، ۲۸، ۲۹، ۶۳، ۷۰
محدب، ۸
محدب از مرتبه α، ۹
محدب در جهت α، ۱۲
محدب در جهت افقی، ۱۲
محدب در یک جهت، ۱۲
محدب ما_میندا، ۲۵
محدب مانا، ۶۱
محدب یکنواخت، ۵۵
محدب یکنواخت، ۲۳، ۵۰، ۶۴–۶۷
مرتبه پایای خطی، ۷۱
مرکز، ۲۱
مزدوج سازی، ۳، ۳۷
مزدوج همساز، ۳۵
مسئله ی باز، ۲۱، ۲۳، ۲۸، ۳۷، ۴۱، ۷۶
مطلقاً محدب، ۷۰
مطیع، ۵
معادلات کوشی ریمان، ۲
معادله لاپلاس، ۳۳
موروگورومورثی، ۴۹، ۵۰
موکانو، ۲۵، ۴۲، ۴۳، ۴۵، ۵۶
مک گرگور، ۱۰
میلر، ۱۲، ۲۵
میندا، ۲۴، ۲۵
نانوکاوا، ۱۲، ۱۳
نتانیاهو، ۷۶
نجف زاده، ۷۸
نزدیک به محدب، ۱۵، ۱۶، ۴۵
نزدیک به محدب از مرتبه α، ۱۶
نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون، ۱۹، ۲۰
نسبت به نقاط متقارن ستاره‌گون از مرتبه α، ۲۰
نمایش کانونی، ۳۵
نوشیرو، ۱۵
نژمدینتف، ۲۱، ۲۳، ۲۴، ۲۸، ۲۹
نگاشت ریمان، ۲
نگاشت های همساز حقیقی، ۳۵
نگاشتهای آفین، ۵۷، ۶۶
نگاشتهای همساز مسطح، ۳۵
هالنبک، ۱۱
هرگلوت، ۱۴
هم تحلیلی، ۳۵، ۶۱
همبند ساده، ۲
همدیس، ۲
هوروویتس، ۴، ۲۱
هیدرودینامیک، ۳۴
وانگ، ۱۱
ورشاوسکی، ۱۵
وی جی، ۴۹، ۵۰
ویلکن، ۱۱
پاراجاپات، ۵۶
پایای خطی، ۳، ۲۱، ۲۴، ۷۱–۷۳
پتانسیل الکترواستاتیک، ۳۴
پتانسیل سرعت، ۳۴
پترسون، ۴
پریما، ۷۹
پوش محدب، ۲۵
پولیا، ۲۸
پومرنکه، ۱۲
پوناسمی، ۵۶، ۷۰
پوچهامر، ۹۹

پیش ستاره‌گون، ۳۰، ۳۱
پیچش، ۲۲، ۲۳، ۲۷، ۴۶، ۵۶، ۶۳، ۸۰

چرخش، ۳، ۲۱، ۳۷، ۵۸، ۶۵
چوکه، ۴۴، ۴۵، ۵۸، ۶۶
ژاکوبین، ۳۵، ۷۱، ۷۲
ژو، ۷۹
کاراتئودوری، ۱۵، ۸۴–۸۶
کاملاً محدب، ۴۴، ۴۵، ۶۴، ۶۶
کاملاً ستاره‌گون، ۴۲، ۵۵، ۵۶، ۵۸
کاملاً محدب، ۵۵
کاپلان، ۱۵، ۱۶
کرسی، ۷۹
کلونی، ۳۶، ۳۷، ۴۲، ۴۳، ۴۶، ۴۷، ۷۶
کنزه، ۴۴
کوان، ۱۰، ۱۳، ۷۹
کوبه، ۳، ۵، ۲۷، ۷۵
کوروکی، ۱۴
کولشرسترا، ۱۸
کومار، ۴۸
گرانسکی، ۷۶
گودمن، ۲۰–۲۳، ۲۵، ۵۷، ۶۴، ۶۶

یالسین، ۴۹
یامانکارادنیز، ۴۹

Abstract

There are a few examples of uniformly starlike (convex) analytic functions and fully-starlike (fully-convex) harmonic functions, although we pose some examples in new class, uniformly starlike (convex) harmonic functions, any way the functions in new classes are rare and worthy as well. Furthermore we give necessary and sufficient conditions for a function to be in these classes. We mention recently works in this area.

The convolution or Hadamard product is a additional tool in univalent functions classes investigation. Previous results with convolution showed that this is a effective tool with powerful ability in univalent functions classes and with harmonic function, like generalizations of previous subclasses, convolution on harmonic classes like starlike, convex and close-to-convex families and so on. Recent works which have done by some authors in last decade, show ability and power of this method. We use convolution to obtain our results in new classes.

At last we discuss about bi-univalent functions as a subclass of $\mathcal{S}$, more recently El-Ashwah introduced two subclasses of bi-univalent function class Σ and obtained non-sharp estimates on the first two Taylor-Maclaurin coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ of functions in each of these subclasses. We generalize her classes to new class of bi-univalent function with a convolution form and find the coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ of new class.

In brief,

- The work is devoted to the study of certain subclasses of analytic and harmonic univalent complex functions in the unit disk $\mathbb{D}$.
- Certain classes of univalent starlike and convex functions are introduced.
- These analytic and harmonic classes provide a unified treatment to new subclasses.
- Main results are derived from Inclusion and convolution properties on new subclasses.
- New bi-univalent subclass is introduced and initial coefficients bound are derived using Caratheodory lemma and subordination.

Acknowledgement: I appreciate Mr. Dr. Motamednezhad[2] for good suggestions and sharing his ideas in order to help me toward my purpose and also thanks to Miss Zaker[3] for her contribution in this thesis to be a good work.

Shahpour Nosrati[4],
Faculty of Mathematical Sciences,
Shahrood University of Technology,
P. O. Box 316-36155, Shahrood, Iran.

[2] a.motamedne@gmail.com
[3] zaker.sima@yahoo.com
[4] shahpournosrati@yahoo.com

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 30C45, 30C50; Secondary 31C05, 31A05.

Keywords: Univalent function, Uniformly starlike function, Uniformly convex function, Fully-starlike function, Fully-convex function, Bi-Univalent function, Convolution, Subordination.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Complex Analysis

On Convolution over Harmonic and Univalent Functions

By: Shahpour Nosrati

Supervisor

Ahmad Motamednezhad

May 2018