

الحمد لله  
الذي هدانا لهذا  
الذي كنا لنهتدي لولا  
هدى الله لنا





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضیات مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# یک روش برنامه‌ریزی ریاضی برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله

نگارنده: الهام صادقی‌راد

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی  
دکتر سید مجتبی میرلوحی

بهمن ۱۳۹۶



شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم الهام صادقی راد با شماره دانشجویی ۹۴۱۰۹۵۴ رشته ریاضی گرایش مالی تحت عنوان یک روش برنامه ریزی ریاضی برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه های معامله که در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۱۱ با حضور هیأت داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

|                                                                                         |                            |            |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|------------|-------|
| <input type="checkbox"/> مردود <input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: عالی) |                            |            |       |
| <input type="checkbox"/> نظری <input type="checkbox"/> عملی                             |                            |            |       |
| عضو هیأت داوران                                                                         | نام و نام خانوادگی         | مرتبه علمی | امضاء |
| ۱- استاد راهنمای اول                                                                    | دکتر علیرضا ناظمی          | دانشیار    |       |
| ۲- استاد راهنمای دوم                                                                    | دکتر سید مجتبی میرلوحی     | استادیار   |       |
| ۳- استاد مشاور                                                                          |                            |            |       |
| ۴- نماینده تحصیلات تکمیلی                                                               | دکتر محمدهادی نوری اسکندری | استادیار   |       |
| ۵- استاد ممتحن اول                                                                      | دکتر مهرداد غزنوی          | استادیار   |       |
| ۶- استاد ممتحن دوم                                                                      | دکتر مجتبی غیائی           | استادیار   |       |

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تصوه: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند امکان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



تقدیم:

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

ای پدر از تو هرچه می‌گویم باز هم کم می‌آورم خورشیدی شدی و از روشنایی‌ات جان گرفتم و در ناامیدی‌ها نازم را کشیدی و لبریزم کردی از شوق اکنون حاصل دستان خسته‌ات رمز موفقیت‌م شد به خودم تبریک می‌گویم که تو را دارم و دنیا با همه بزرگیش مثل تو را ندارد .....

و تو ای مادر، ای شوق زیبای نفس کشیدن ای روح مهربان هستی‌ام تو رنگ شادی‌هایم شدی و غم‌ها را با تمام وجود از من دور کردی و عمری خستگی‌ها را به جان خریدی تا اکنون توانستی طعم خوش پیروزی را به من بچشانی امروز هستی من به امید شماس است و فردا کلید باغ بهشتم به رضای شماس است.





## سپاس‌گزاری...

از زحمات و راهنمایی‌های استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی به عنوان استاد راهنما اول و همچنین جناب آقای دکتر سید مجتبی میرلوحی به عنوان استاد راهنما دوم که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر را دارم.

الهام صادقی‌راد

بهمن ۱۳۹۶



## تعهد نامه

اینجانب **الهام صادقی راد** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **یک روش برنامه ریزی ریاضی برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه های معامله**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**الهام صادقی راد**

**بهمن ۱۳۹۶**

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.



## چکیده

در این پایان نامه یک روش عددی بر مبنای شبکه‌های عصبی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی در ریاضیات مالی ارائه می‌دهیم. برای این کار ابتدا شرایط بهینگی را برای مسأله بهینه‌سازی مورد نظر می‌نویسیم. سپس یک مدل شبکه عصبی متناظر با آن طراحی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که نقطه تعادل شبکه عصبی متناظر جواب بهینه مسأله اصلی است. با ارائه یک تابع لیاپانوف مناسب، پایه‌ای و همگرایی سراسری مدل ارائه شده را اثبات می‌کنیم. در ابتدا تعاریفی از مفاهیم مالی در ریاضی و مقدماتی از بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی را ارائه می‌دهیم. در ادامه یک روش شبکه عصبی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله ارائه می‌دهیم و در آخر یک روش دقیق برای حل مسائل بهینه‌سازی پرتفوی تحت محدودیت‌های تصادفی ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: پرتفوی، مرز کارایی، هزینه‌های معامله، شبکه عصبی، محدودیت‌های تصادفی.



## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم





# فهرست مطالب

| ق  | فهرست تصاویر                                                                  |
|----|-------------------------------------------------------------------------------|
| ۱  | ۱ مقدمه و مفاهیم اولیه مالی                                                   |
| ۱  | ۱.۱ مقدمه                                                                     |
| ۱  | ۱.۱.۱ تعاریف و مفاهیم مالی                                                    |
| ۲  | ۲.۱.۱ بازده                                                                   |
| ۲  | ۳.۱.۱ ریسک                                                                    |
| ۴  | ۴.۱.۱ مرز کارایی                                                              |
| ۶  | ۲.۱ مقدمات                                                                    |
| ۶  | ۱.۲.۱ مسائل بهینه‌سازی محدب                                                   |
| ۷  | ۲.۲.۱ سیستم‌های دینامیکی                                                      |
| ۱۰ | ۳.۲.۱ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی                                              |
| ۱۱ | ۲ برنامه‌ریزی خطی برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله                |
| ۱۱ | ۱.۲ مقدمه                                                                     |
| ۱۲ | ۲.۲ معرفی مدل                                                                 |
| ۱۴ | ۳.۲ فرمول بندی مدل                                                            |
| ۱۸ | ۴.۲ الگوریتم                                                                  |
| ۲۱ | ۵.۲ یک مثال عددی                                                              |
| ۲۵ | ۳ یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسأله انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله |
| ۲۶ | ۱.۳ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی                                                  |
| ۲۸ | ۱.۱.۳ تحلیل پایداری                                                           |
| ۳۳ | ۲.۱.۳ مثال عددی                                                               |
| ۳۷ | ۴ یک روش دقیق برای حل مسائل بهینه‌سازی پرتفوی تحت محدودیت‌های تصادفی          |
| ۳۷ | ۱.۴ مقدمه                                                                     |
| ۳۹ | ۲.۴ فرمول بندی مسئله و خواص                                                   |

|    |       |                               |       |
|----|-------|-------------------------------|-------|
| ۳۹ | ..... | مدل بهینه‌سازی پرتفوی احتمالی | ۱.۲.۴ |
| ۴۰ | ..... | معادل قطعی                    | ۲.۲.۴ |
| ۴۲ | ..... | مدل شبکه عصبی                 | ۳.۲.۴ |
| ۴۳ | ..... | تحلیل پایداری و همگرایی       | ۴.۲.۴ |
| ۴۷ | ..... | مثال‌های عددی                 | ۵.۲.۴ |

## فهرست تصاویر

|    |     |                                                                |
|----|-----|----------------------------------------------------------------|
| ۵  | ۱.۱ | نمودار مرز کارایی                                              |
| ۹  | ۲.۱ | تفاوت میان نقطه‌ی ساکن پایدار و نقطه‌ی ساکن بطور مجانبی پایدار |
| ۲۱ | ۱.۲ | یک روش انتخاب پارامتر $\lambda$                                |
| ۲۳ | ۲.۲ | یک مرز کارایی                                                  |
| ۲۳ | ۳.۲ | مقایسه دو مرز کارایی                                           |
| ۳۴ | ۱.۳ | رفتار مدل شبکه‌ی عصبی برای $\lambda = 0$                       |
| ۳۵ | ۲.۳ | رفتار مدل شبکه‌ی عصبی برای $\lambda = 1$                       |
| ۳۵ | ۳.۳ | رفتار مدل شبکه‌ی عصبی برای $\lambda = 0.25333$                 |
| ۴۸ | ۱.۴ | رفتار گذرا شبکه عصبی با $50^\circ$ نقطه آغازین دلخواه.         |



# فصل ۱

## مقدمه و مفاهیم اولیه مالی

### ۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف مورد نیاز در فصل‌های بعد به طور مختصر آورده شده است.

#### ۱.۱.۱ تعاریف و مفاهیم مالی

##### فروش استقراضی

فروش استقراضی<sup>۱</sup> فروش اوراق بهادار است به وسیله کسی که چنین اوراقی را ندارد. بنابراین باید آن‌ها را قرض بگیرد و به خریدار تحویل دهد. فروش به این فرم باعث می‌شود که فروشنده از کاهش قیمت اوراق در آینده سود ببرد. فروشنده باید در زمان آینده اوراق را خریداری و بدهی خود را پرداخت نماید.

##### سبد سرمایه

سبد سرمایه (پرتفوی)<sup>۲</sup>، به معنی ترکیب دارایی‌های سرمایه‌گذاری شده توسط یک سرمایه‌گذار اعم از فرد یا موسسه است. به لحاظ فنی، یک سبد سرمایه، مجموعه کامل دارایی‌های حقیقی و مالی سرمایه‌گذار را در بر می‌گیرد.

---

<sup>۱</sup> Short-Selling

<sup>۲</sup> Portfolio

### ۲.۱.۱ بازده

مطالب این بخش از [۱] آورده شده است.

بازده در فرایند سرمایه‌گذاری نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه می‌کند و پاداش برای سرمایه‌گذاری محسوب می‌شود چرا که تمام هدف سرمایه‌گذاری کسب بازده مطلوب است.

**تعریف ۱.۱.۱.** بازده تحقق یافته، بازدهی است که واقع شده است، یا بازدهی است که کسب شده است. در واقع بازده تحقق یافته بازدهی است که به وقوع پیوسته و واقع شده است.

**تعریف ۲.۱.۱.** بازده مورد انتظار، عبارتست از بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه‌گذاران انتظار دارند در یک دوره آینده بدست آورند. بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است، احتمال دارد برآورده شود و یا اینکه برآورده نشود.

**تعریف ۳.۱.۱.** بازده مورد انتظار هر سهم، با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده بالقوه سهام بازده مورد انتظار با  $E(R)$  نشان داده شده و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m (p_k) PR_k,$$

که در آن  $R_i$  نشان دهنده دارایی  $i$ ام و  $PR_k$  بازده بالقوه یک سهم و  $P_k$  احتمال وقوع آن است.

**تعریف ۴.۱.۱.** بازده مورد انتظار پورتفوی:

در صورتیکه سبد سرمایه با  $N$  دارایی داشته باشیم که وزن دارایی  $i$ ام در آن  $x_i$  باشد، بازده مورد انتظار پورتفوی با  $E(R_p)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i),$$

**تعریف ۵.۱.۱.** نرخ بازده از محاسبه درصد نسبت "سود پس از کسر استهلاک" به "میانگین سرمایه به کار رفته" بدست می‌آید. نرخ بازده، یکی از نسبت‌های مالی برای سنجش کارایی بنگاه‌های اقتصادی یا طرح‌های سرمایه‌گذاری است.

### ۳.۱.۱ ریسک

مفاهیمی که در این بخش آمده، از [۲۶] است.

در یک بازار سرمایه اگر سرمایه‌گذار بخواهد بازده مورد انتظارش را افزایش دهد باید در معرض ریسک بیشتری قرار بگیرد. در حالیکه بازده مورد انتظار و سودآوری به خوبی تعریف می‌شود مفهوم ریسک و اینکه چگونه اندازه‌گیری می‌شود مبهم است.

معمولاً در سرمایه‌گذاری‌های مالی گفته می‌شود که سرمایه‌گذاری ریسکی است و با تنوع بخشیدن به سرمایه‌گذاری می‌توان این ریسک و خطر را کاهش داد. در واقع در سرمایه‌گذاری قرار دادن همه

تخم مرغ‌ها در یک سبد می‌تواند خطر ساز باشد. چنین ادعاهایی به مفهوم ریسک برمی‌گردد. اما هیچ توافقی در مورد نحوه اندازه‌گیری ریسک وجود ندارد. سرمایه‌گذاران ممکن است خطر را احساس کنند ولی در مورد اینکه چگونه آن را اندازه‌گیری کنند توافق کمی وجود دارد. در میان تعاریفی که از ریسک وجود دارد می‌توان مفاهیم زیر را یافت:

– “قرار گرفتن در معرض احتمال از دست رفتن”

– “یک خطر یا احتمال خطرناک”

– “خطر یا احتمال از دست دادن”

– “درجه ای از احتمال از دست دادن”

– “مبلغی که شرکت بیمه ممکن است از دست بدهد”

تعریف ریسک بسیار دشوار است. زیرا ما بدنبال یک شاخص ریسک هستیم که بتوان به یک سرمایه‌گذاری مشخص اختصاص داد و در آن همه سرمایه‌گذاران به توافق رسیده باشند.

تعریف موقعیت ریسکی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

یک دارایی دارای موقعیت ریسکی است که در آن بیش از یک خروجی مالی وجود داشته باشد. فرض کنیم  $x_1, x_2, \dots, x_n$  خروجی‌های دارایی مورد نظر با احتمال وقوع  $p(x_i)$  باشند که  $0 < p(x_i) < 1$  است. باید توجه داشت که در این موقعیت حداقل یک مشاهده  $x_j$  با احتمال  $0 < p(x_j) < 1$  وجود خواهد داشت. در واقع طبق این تعریف اگر برای یک دارایی سرمایه‌گذاری شده احتمال وقوع چندین خروجی (بازدهی) وجود داشته باشد، آنگاه این سرمایه‌گذاری ریسکی است. به بیان دیگر فرض کنیم خروجی یک سرمایه‌گذاری  $x$  و احتمال وقوع آن  $p(x)$  باشد و هر سرمایه‌گذاری بصورت  $(x, p(x))$  مشخص شود. اگر یک سرمایه‌گذاری فقط یک خروجی با احتمال  $p(x) = 1$  داشته باشد، آنگاه آن سرمایه‌گذاری بدون ریسک است و اگر چندین خروجی  $x$  با احتمال  $0 < p(x) < 1$  برای همه  $x$ ‌ها داشته باشد، یک سرمایه‌گذاری ریسکی است.

## مطلوبیت مورد انتظار<sup>۳</sup>

مفاهیم ارائه شده در این بخش از [۲۶] می‌باشد.

به تعریف اقتصاددانان مطلوبیت کیفیتی است که کالایی را برای افراد خواستنی می‌کند. به بیان دیگر، مطلوبیت عبارت است از رضایت مصرف‌کننده که از مصرف کالا و خدمات حاصل می‌شود. در واقع کلمه مطلوبیت، رضایت است نه سودمندی.

برای رسیدن به یک تصمیم درست در یک سرمایه‌گذاری، در مقابل اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری که بسیار سخت است، سودآوری سرمایه‌گذاری نیز اهمیت ویژه‌ای دارد. بنابراین سودآوری و ریسک باید هر دو در فرآیند سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شود. سرمایه‌گذاران با گزینه‌های بسیاری برای انتخاب سبد سرمایه خود مواجه هستند. به منظور مقایسه ریسک و بازده سرمایه‌گذاری، معیارهایی برای تصمیم‌گیری مورد نیاز است.

یکی از معیارهایی که در رسیدن به تصمیم‌گیری درست استفاده می‌شود، ابزار مطلوبیت مورد انتظار

<sup>۳</sup>Expected Utility

است. این ابزار فرض می کند سرمایه گذار منطقی است، مثلاً او ثروت بیشتر را به ثروت کمتر ترجیح می دهد.

**قضیه ۶.۱.۱.** مطلوبیت مورد انتظار معیار بهینه برای رتبه بندی سرمایه گذاری های متفاوت است. در واقع این قضیه بیان می کند اگر مطلوبیت مورد انتظار از یک سرمایه گذاری  $L_1$  بیشتر از مطلوبیت مورد انتظار برای سرمایه گذاری  $L_2$  باشد، سرمایه گذار  $L_1$  را بر  $L_2$  ترجیح می دهد ( $L_1 \succ L_2$ ). حال به این سوال پاسخ می دهیم که این نتیجه چه ارتباطی با مطلوبیت مورد انتظار دارد. فرض کنیم برای پیشامد  $A_i$ ، مطلوبیت  $U(A_i)$  باشد. سرمایه گذاری با مطلوبیت مورد انتظار بالاتر بر دیگر سرمایه گذاری ها ترجیح داده می شود. یعنی:

$$L_1 \succ L_2 \iff \sum p_i U(A_i) \equiv E_{L_1} U(x) > \sum q_i U(A_i) \equiv E_{L_2} U(x),$$

که  $x \in A_i$  نشان دهنده خروجی های ممکن و  $E(L_1)$  و  $E(L_2)$  به ترتیب نشان دهنده مطلوبیت مورد انتظار از  $L_1$  و  $L_2$  است.  $U(A_i)$  نشان دهنده اولویت سرمایه گذار برای خروجی های گوناگون است پس می توان گفت: نشان دهنده مطلوبیت متناظر با  $A_i$  است. بنابراین  $U(A_i)$  نشان دهنده تابع مطلوبیت سرمایه گذار است.

طبق قضیه بالا ثابت کردیم اگر مطلوبیت مورد انتظار از سرمایه گذاری  $L_1$  بیشتر از سرمایه گذاری  $L_2$  باشد، سرمایه گذاری  $L_1$  بر  $L_2$  ترجیح داده می شود. اگر سرمایه گذاری  $L_1$  بر  $L_2$  ترجیح داده شود ( $L_1 \succ L_2$ )، پس تابع غیر نزولی  $U_1$  وجود دارد بطوریکه:

$$E_{L_1} U_1(x) > E_{L_2} U_1(x),$$

فقط باید به این نکته توجه داشت که، ممکن است برای یک سرمایه گذار ( $L_1 \succ L_2$ ) و برای سرمایه گذار دیگر ( $L_2 \succ L_1$ ) باشد. این مسأله نشان می دهد که تابع غیر نزولی دیگر  $U_2$  برای سرمایه گذار دوم که  $L_2$  را بر  $L_1$  ترجیح داده است وجود دارد. بطوریکه:

$$E_{L_2} U_2(x) > E_{L_1} U_2(x),$$

که این تابع غیر نزولی تابع مطلوبیت نامیده می شود. حال به این سوال پاسخ می دهیم که چرا این تابع نشان دهنده مطلوبیت سرمایه گذاری سرمایه گذارها است. برای پاسخ به این سوال توجه می کنیم که همه سرمایه گذاران بر روی مقدار  $U(A_i)$  هم عقیده نیستند، اما برای همه سرمایه گذاران تابع  $U(A_i)$  که  $0 \leq U(A_i) \leq 1$  وجود دارد، زیرا ترجیحات یک سرمایه گذار از ترجیحات سرمایه گذار دیگر فرق دارد، که تابع مطلوبیت نامیده می شود و نشان دهنده عملکرد و منعکس کننده منحنی بی تفاوتی (منحنی که هر نقطه روی آن با نقطه دیگر برای سرمایه گذار فرقی ندارد) است.

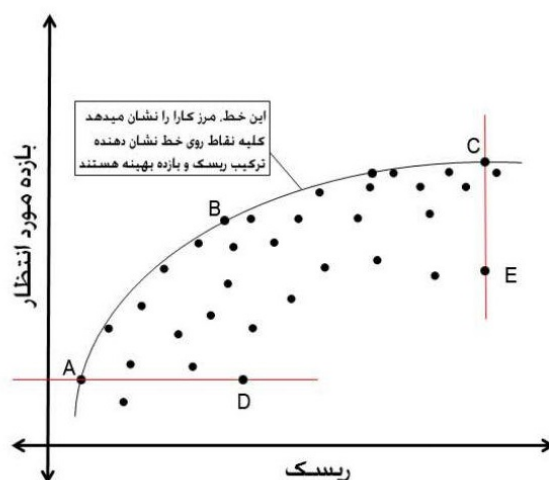
## ۴.۱.۱ مرز کارایی

مرز کارا پورتفوئی است که حداکثر بازدهی را در یک سطح معین از ریسک و یا حداقل ریسک را در یک سطح معین از بازدهی ایجاد می کند. در واقع مرز کارایی، متشکل از واحدهایی (پورتفوئی هایی) با



اندازه کارایی یک است. از لحاظ ریاضی مرز کارا حد بیرونی داده هاست. هر پورتفوی که بر روی مرز کارا باشد دارای بیشترین نرخ بازدهی با ریسک برابر و یا کمترین ریسک با نرخ بازدهی مساوی با سایر پورتفوی هایی که پایین مرز کارایی قرار دارند است.

سرمایه گذاران براساس تابع مطلوبیت و نحوه برخوردشان با ریسک به نقطه ای بر روی مرز کارا می رسند. هیچ پورتفویی بر روی مرز کارا نسبت به سایر پورتفوی ها بر روی این مرز، برتری ندارد. تمام این پورتفوی ها دارای بازدهی و ریسک متفاوت هستند که با افزایش ریسک، نرخ بازدهی مورد انتظار آنها نیز افزایش می یابد.



شکل ۱.۱: نمودار مرز کارایی

در نمودار فوق پورتفوی های A، B و C بر روی مرز کارا قرار دارند. این بدان معنی است که هر سه پورتفوی فوق کارا هستند و هیچکدام بر دیگری برتری ندارند.

**تعریف ۷.۱.۱.** نقدشوندگی به این موضوع اشاره دارد که با چه سرعتی می توان یک دارایی یا سهام را به قیمت واقعی در بازار فروخت. هر قدر میزان معاملات یک سهم در بازار بیشتر باشد و خریداران و فروشندگان بیشتری آن سهم را معامله کنند، نقدشوندگی آن بیشتر است. به عبارت دیگر اگر بتوان یک دارایی را با سرعت بالایی و بدون دردسر به وجه نقد تبدیل کرد، نقد شوندگی آن دارایی و قابلیت عرضه و فروش آن در بازار بیشتر است.

**تعریف ۸.۱.۱.** هزینه های معامله: هزینه ای که به عنوان دستمزد به واسطه مالی از قبیل بانک، کارگزار یا بیمه گذار پرداخت می شود به عبارت دیگر هزینه مربوط به مبادله کالا یا خدمات. هزینه های معاملاتی طیف گسترده ای را شامل می شود: هزینه های ارتباطی، هزینه های قانونی، هزینه های اطلاع رسانی برای یافتن قیمت، کیفیت و دوام، و غیره، و همچنین ممکن است شامل هزینه های حمل و نقل هم شوند.

## ۲.۱ مقدمات

در این بخش برخی از مفاهیم و قضایای بهینه‌سازی که در این پایان‌نامه از آن استفاده شده، آورده شده است.

### ۱.۲.۱ مسائل بهینه‌سازی محدب

در این بخش مفاهیمی از مسائل بهینه‌سازی محدب و شرایط لازم و کافی برای حل آن از [۴] آورده شده است.

**تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی محدب<sup>۴</sup>.**  $X \subset \mathbb{R}^n$  را یک مجموعه‌ی محدب گوییم هرگاه:

$$\forall a, b \in X \Rightarrow [a, b] \subset X,$$

که در آن

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda a + (1 - \lambda)b, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

**تعریف ۲.۲.۱. تابع محدب<sup>۵</sup>.** فرض کنید  $X \subset \mathbb{R}^n$  یک مجموعه‌ی محدب و غیرتهی باشد. در این صورت تابع  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  را یک تابع محدب گوییم هرگاه:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad x, y \in X,$$

که در آن  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**تعریف ۳.۲.۱. مسالهی برنامه‌ریزی محدب<sup>۶</sup>.** مسالهی برنامه‌ریزی محدب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (CP) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{subject to} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad Ax = b, \\ & \quad x \in X, \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  متغیر تصمیم‌گیری مساله و  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  و  $f$  و  $g_i$  توابعی محدب و  $X$  نیز یک مجموعه‌ی محدب است. همچنین  $A = [a_{ij}]_{p \times n}$  و  $b = [b_i]_{p \times 1}$  و مشتق توابع  $f$  و  $g_i$  پیوسته می‌باشد.

<sup>۴</sup> Convex Set

<sup>۵</sup>Convex Function

<sup>۶</sup>Convex Programming

**تعریف ۴.۲.۱.** مساله‌ی برنامه‌ریزی درجه دو<sup>۷</sup>. مساله‌ی برنامه‌ریزی درجه دو به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (QP) \quad & \min \quad f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + D^T x \\ & \text{subject to} \quad Ex \leq d, \\ & \quad \quad \quad Ax = b. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**قضیه ۵.۲.۱.** اگر در مساله‌ی برنامه‌ریزی درجه دو  $Q$  ماتریس نیمه‌معین مثبت باشد، آنگاه مساله‌ی درجه دوی  $(QP)$  یک مساله‌ی برنامه‌ریزی محدب خواهد بود.

**تعریف ۶.۲.۱.** نقطه‌ی منظم<sup>۸</sup>. مساله‌ی برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{subject to} \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad \quad \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

مجموعه‌ی  $A(x)$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$A(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}.$$

در این صورت نقطه‌ی  $x^*$  که در محدودیت‌های  $h_j(x) = 0$  و  $g_i(x) \leq 0$  صدق می‌کند را یک نقطه‌ی منظم گویند هرگاه  $\nabla h_j(x^*)$  و  $\nabla g_i(x^*)$  مستقل خطی باشند که در آن  $i \in A(x^*)$ .

**قضیه ۷.۲.۱.** شرط لازم بهینگی درجه اول (شرایط K.K.T) فرض کنید  $x^*$  یک نقطه شدنی و همچنین نقطه‌ی مینیمم برای مساله‌ی  $(P)$  باشد و علاوه بر آن  $x^*$  نقطه‌ی منظم محدودیت‌ها نیز باشد، در این صورت بردارهایی مانند  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  و  $\mu \in \mathbb{R}^p$  وجود دارند به‌طوری که:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)^T \lambda + \nabla g(x^*)^T \mu = 0, \\ \mu \geq 0, \\ \mu^T g(x^*) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

**قضیه ۸.۲.۱.** برای مساله‌ی برنامه‌ریزی محدب (۱.۱)، شرایط قضیه‌ی ۷.۲.۱ لازم و کافی هستند.

## ۲.۲.۱ سیستم‌های دینامیکی

در این بخش سیستم‌های دینامیکی<sup>۹</sup> را معرفی نموده و قضیه‌ی اساسی وجود و یگانگی وجود جواب مساله‌ی مقدار اولیه و قضایای مربوط به پایداری را ارائه می‌نماییم.

<sup>۷</sup>Quadratic Programming

<sup>۸</sup>Regular Point

<sup>۹</sup>Dynamical Systems

## مقدمات

دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t), \quad (4.1)$$

که در آن  $x(t) = [x_i(t)]^T$ ,  $t \geq 0$  بردار وضعیت یا حالت<sup>۱۰</sup> یا حرکت<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود. چنین دستگاهی یک دستگاه وابسته به زمان یا غیرخودگردان<sup>۱۲</sup> است. به این معنی که متغیر  $t$  به‌طور آشکار در ضابطه‌ی  $f$  ظاهر می‌شود.

اگر  $f_i$  به‌طور صریح به  $t$  وابسته نباشد به عبارتی

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \quad (5.1)$$

در این صورت سیستم را خودگردان<sup>۱۳</sup> یا مستقل از زمان نامند.

به چنین دستگاه معادله‌ی دیفرانسیلی که بردار وضعیت آن با تغییر زمان تغییر می‌کند، یک سیستم دینامیکی گفته می‌شود. در ادامه‌ی از نماد  $\dot{x}(t)$  برای نمایش مشتق  $x$  نسبت به زمان استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۹.۲.۱. (قضیه‌ی اساسی وجود و یگانگی وجود جواب مساله‌ی مقدار اولیه) [۳۸].** فرض کنید  $E$  زیرمجموعه‌ی باز از  $\mathbb{R}^n$  و شامل نقطه‌ی  $x_0$  باشد و فرض کنید هر  $f_i$  تابعی به‌طور پیوسته روی  $\mathbb{R}^n$  مشتق‌پذیر است یا به عبارتی  $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ ، در این صورت به ازای هر  $a > 0$  که  $a \in \mathbb{R}$ ، مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر روی بازه‌ی  $[-a, a]$  جواب یگانه‌ی  $x(t)$  دارد:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**تعریف ۱۰.۲.۱. نقطه‌ی تعادل<sup>۱۴</sup> [۳۸].** جواب سیستم دینامیکی (۵.۱) را نقطه‌ی تعادل، نقطه‌ی ساکن یا نقطه‌ی بحرانی می‌نامیم و با  $x^e$  نشان می‌دهیم، هرگاه  $f(x^e) = 0$ . لذا نقطه‌ی بحرانی جوابی از سیستم  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  است که مستقل از زمان می‌باشد.

**تعریف ۱۱.۲.۱. پایداری<sup>۱۵</sup> [۳۸].** نقطه ساکن  $x^e$ ، نقطه‌ی پایدار نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \|x(t_0) - x^e\| < \delta \implies \|x(t) - x^e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

**تعریف ۱۲.۲.۱. پایداری مجانبی<sup>۱۶</sup> [۳۸].** نقطه ساکن  $x^e$  به‌طور مجانبی پایدار است هرگاه پایدار باشد و  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e$ . شکل ۲.۱ مفهوم ساکن پایدار و نقطه‌ی ساکن به‌طور مجانبی پایدار را روشن تر می‌کند.

<sup>۱۰</sup>State Vector

<sup>۱۱</sup>Motion

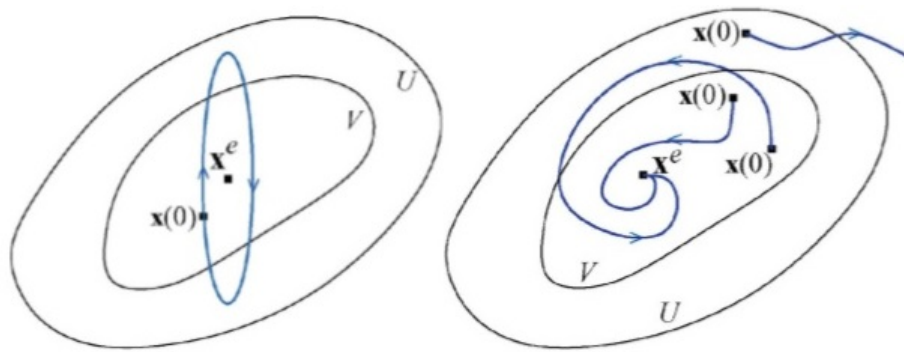
<sup>۱۲</sup>Nonautonomous

<sup>۱۳</sup>Autonomous

<sup>۱۴</sup>equilibrium

<sup>۱۵</sup>stability

<sup>۱۶</sup>asymptotic stability



نقطه ساکن پایدار

نقطه ساکن به طور مجانبی پایدار

شکل ۲.۱: تفاوت میان نقطه‌ی ساکن پایدار و نقطه‌ی ساکن به طور مجانبی پایدار

### نظریه‌ی لیاپانف و پایداری نقطه

روش لیاپانف یکی از بهترین روش‌هایی است که در مورد تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی می‌شناسیم. این روش برای سیستم‌های خطی و غیرخطی از هر مرتبه‌ای قابل استفاده است. این روش شرط کافی برای پایداری مجانبی نقطه‌ی ساکن یک سیستم دینامیکی غیرخطی را می‌دهد. به عبارتی بدون حل معادلات وضعیت سیستم، می‌توان پایداری نقطه‌ی ساکن سیستم غیرخطی را بررسی کرد.

لیاپانف پیشنهاد کرد که ممکن است توابعی وابسته به مسیر وجود داشته باشند که خواص آنها تعیین می‌کند که آیا مسیر به یک نقطه‌ی ساکن همگرا می‌شود یا خیر. چنین تابعی به عنوان تابع انرژی برای سیستم دینامیکی در نظر گرفته می‌شود که به تابع لیاپانف نیز معروف است.

قضیه‌ی لیاپانف به طور مختصر بیان می‌کند که نقطه‌ی ساکن یا بحرانی یک سیستم دینامیکی به طور مجانبی پایدار است هرگاه یک تابع لیاپانف در همسایگی این نقطه وجود داشته باشد.

**تعریف ۱۳.۲.۱ [۳۸]** یک تابع لیاپانف یا تابع انرژی تابعی مانند  $E(x(t))$  است که در شرایط زیر صدق کند:

(۱)  $E(x(t))$  و مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول آن همگی پیوسته باشند، به عبارتی  $E(x(t)) \in C^1$ .

(۲)  $E(x(t)) \geq 0$  به ویژه در همسایگی باز نقطه‌ی ساکن  $x^e$ ،  $E(x(t)) > 0$  و  $E(x^e) = 0$ .

(۳) مشتق تابع  $E(x(t))$  نسبت به زمان منفی است، به عبارتی:

$$\frac{dE(x^e)}{dt} = [\nabla_{x(t)} E(x(t))]^T \cdot \dot{x}(t) = [\nabla_{x(t)} E(x(t))]^T \cdot f(x(t)) < 0, x \in \Omega - \{x^e\}$$

و در نقطه‌ی ساکن  $x^e$  داریم  $\frac{dE(x^e)}{dt} = 0$ .

**قضیه ۱۴.۲.۱ [۳۸]** نقطه‌ی ساکن سیستم  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  پایدار است اگر یک تابع لیاپانف متناظر با این سیستم وجود داشته باشد.

**قضیه ۱۵.۲.۱.** [۳۸] نقطه‌ی ساکن سیستم  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  به طور سراسری پایدار است اگر یک تابع لیاپانف متناظر با این سیستم وجود داشته باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی ساکن  $x^e$ ،  $\frac{dE(x(t))}{dt} < 0$ .

ملاحظه می‌شود که اگر  $\frac{dE(x(t))}{dt} \leq 0$  باشد، آنگاه  $x^e$  پایدار است ولی الزاماً به‌طور مجانبی پایدار نیست.

### ۳.۲.۱ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی

بحث و بررسی در مورد کاربرد شبکه‌های عصبی (شبکه‌های عصبی مصنوعی) در بهینه‌سازی از اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی آغاز شده است. نتایج پژوهش‌های انجام شده از آن زمان تاکنون، مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در برمی‌گیرد. ایده‌ی اصلی در استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده‌ی مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ی اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه‌ی آغازین نقطه‌ی پایدار، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌دست آمده، جواب بهینه‌ی مساله‌ی بهینه‌سازی اصلی باشد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در اینگونه مسائل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

**”برای یک نقطه‌ی آغازین دلخواه، نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌دست آمده جواب بهینه‌ی مساله‌ی اصلی است و برعکس.”**

مدل‌های مطرح شده‌ی متناظر مسائل مختلف بهینه‌سازی را می‌توان به دو قسمت مدل‌های دوگانی و مدل‌های جریمه‌ای تقسیم نمود. نظریه‌ی دوگانی و توابع جریمه‌ای دو نظریه‌ی بسیار مهم در مسائل بهینه‌سازی هستند که اکثر این مسائل بر مبنای این دو روش کلاسیک قابل حل هستند. در نظریه‌ی توابع جریمه‌ای معمولاً از مدل‌های گرادیانی برای معرفی مدل مورد نظر استفاده می‌شود، ولی در نظریه‌ی دوگانی از مدل‌های اولیه-دوگان برای حل این مسائل استفاده می‌شود. اگر بتوان متناظر با هر مساله‌ی بهینه‌سازی، روش مشخصی را ارائه نمود که آن روش برای حل آن مساله شرایط لازم و کافی را برآورده سازد، آنگاه می‌توان متناظر با آن روش، یک مدل شبکه‌ی عصبی برای مساله‌ی مورد نظر بسازیم.

در دهه‌های گذشته، شبکه‌های عصبی به طور گسترده‌ای برای بهینه‌سازی بررسی شده‌اند. برای اولین بار هاپفیلد و تانک شبکه‌های عصبی را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد دادند [۱۹] و [۴۷]. کار آنها توسط بسیاری از محققان جهت بررسی سایر مدل‌های شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی الهام گرفته شده است. کندی و چو [۲۵] یک شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه دادند. مشخص شده است که مدل شبکه‌ی عصبی شامل پارامترهای جریمه متناهی است و تنها جواب‌های تقریبی را تولید می‌کند. برای جلوگیری از استفاده از پارامترهای جریمه، در سال‌های اخیر روش‌های دیگر بسیاری ارائه شده است، [۹]، [۱۴]، [۴۸]، [۵۱]، [۵۵] و [۵۸] را ببینید.

## فصل ۲

# برنامه‌ریزی خطی برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله

### ۱.۲ مقدمه

مدل میانگین-واریانس اصلی که توسط مارکوویتز<sup>۱</sup> [۳۵] ارائه شد، یک نقش پایه‌ای در انتخاب پرتفوی بازی می‌کند. فرمول کلاسیک مدل مارکوویتز برای مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم با ماتریس مثبت معین محدود در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. مسأله با در نظر گرفتن هزینه‌های معامله پیچیده‌تر می‌شود که این برای مدیران پرتفوی یک عامل نگرانی است. بدیهی است که هزینه‌های معامله تأثیر مستقیم بر عملکرد سرمایه‌گذاری شخص دارد. بازده خالص پرتفوی اوراق بهادار باید با در نظر گرفتن هزینه‌های معامله بررسی شود.

آرنوت<sup>۲</sup> و واگنر<sup>۳</sup> [۳] مشاهده کردند که نادیده گرفتن هزینه‌های معامله ممکن است یک پرتفوی ناکارآمد نتیجه دهد، بنابراین بازده خالص پرتفوی باید با در نظر گرفتن هزینه‌های معامله بررسی شود. یوشیموتو<sup>۴</sup> [۵۶] نیز با تجزیه و تحلیل‌هایی که انجام داد، بر این حقیقت تأکید کرد. هزینه‌های معامله در بهینه‌سازی پرتفوی توسط بسیاری از کارشناسان مورد مطالعه قرار گرفت، به عنوان مثال مائو<sup>۵</sup> [۳۴]

---

<sup>۱</sup>Markowitz

<sup>۲</sup>Arnott

<sup>۳</sup>Wagner

<sup>۴</sup>Yoshimoto

<sup>۵</sup>Mao

، جاکوب<sup>۶</sup> [۲۲]، برنان<sup>۷</sup> [۶]، لوی<sup>۸</sup> [۳۲]، پاتل<sup>۹</sup> [۳۹] و سوبرامانیام<sup>۱۰</sup> مسائل را با هزینه‌های معامله ثابت بررسی کردند. پوگ<sup>۱۱</sup> [۴۱]، چن<sup>۱۲</sup> [۷] و همکاران و یوشیماتو مسائل را با هزینه‌های معامله متغیر تجزیه و تحلیل کردند. همچنین مالوی<sup>۱۳</sup>، ولدمری<sup>۱۴</sup>، دانتزگ<sup>۱۵</sup> [۱۰]، اینفنگر<sup>۱۶</sup> و گنوت<sup>۱۷</sup> [۱۶] و یونگ<sup>۱۸</sup> هزینه‌های معامله را در مدل‌های انتخاب پرتفوی چند دوره‌ای ترکیب کردند. آن‌ها به طور کلی معتقدند که مسأله انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله ثابت یک مسأله پیچیده برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد، زیرا چنین پیچیدگی در مسأله را نمی‌توان به روش برنامه‌ریزی درجه دوم معمولی حل کرد. هزینه‌های معامله یک تابع V شکل از تفاوت‌های میان پرتفوی جدید و پرتفوی موجود است، زیرا خرید و فروش اوراق هر دو متحمل هزینه‌های معامله هستند. اکنون یک تقریب خطی در تابع مطلوبیت روی بازده و واریانس پرتفوی معرفی می‌کنیم و یک الگوریتم برنامه‌ریزی خطی براساس شیوه‌های حل برنامه‌ریزی درجه دوم برای این حالت ارائه می‌دهیم.

## ۲.۲ معرفی مدل

در اینجا بازار سرمایه‌ای با  $n$  دارایی پریسک با ارائه نرخ بازده تصادفی و یک دارایی بدون ریسک با ارائه نرخ بازده ثابت در نظر می‌گیریم یعنی یک سرمایه‌گذار سرمایه خود را به  $n$  دارایی پریسک و یک دارایی بدون ریسک اختصاص می‌دهد. پرتفوی را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$x_i$  نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی ریسکی  $i$ ام،  $i = 1, \dots, n$ ؛  $x_{n+1}$  نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک؛  $r_i$  نرخ بازده تصادفی روی دارایی ریسکی  $i$ ام،  $i = 1, \dots, n$ ؛  $R_{n+1}$  نرخ بازده دارایی بدون ریسک؛  $R_i = E(r_i)$  نرخ بازده مورد انتظار روی دارایی ریسکی  $i$ ام،  $i = 1, \dots, n$ ؛  $\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j)$ ؛  $i, j = 1, \dots, n$ ؛  $c_i$  هزینه معامله دارایی ریسکی  $i$ ام،  $i = 1, \dots, n$  و  $k_i$  هزینه ثابت برای هر تغییر در نسبت دارایی ریسکی  $i$ ام،  $i = 1, \dots, n$ ،  $i \geq 0$ .

طبق فرضیات مارکوویتز، یوشیماتو و پرولد<sup>۱۹</sup> [۴۰] هزینه معامله  $c_i$  را در اینجا یک تابع V شکل از تفاوت میان پرتفوی موجود  $x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ, x_{n+1}^\circ)$  و پرتفوی جدید  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  در نظر گرفته و به صراحت روی بازده پرتفوی فرمول بندی می‌شود. بنابراین هزینه معامله دارایی ریسکی  $i$ ام

<sup>۶</sup>Jacob

<sup>۷</sup>Brennan

<sup>۸</sup>Levy

<sup>۹</sup>Patel

<sup>۱۰</sup>Subrahmanyam

<sup>۱۱</sup>Pogue

<sup>۱۲</sup>Chen

<sup>۱۳</sup>Mulvey

<sup>۱۴</sup>Vladimirou

<sup>۱۵</sup>Dantzig

<sup>۱۶</sup>Infanger

<sup>۱۷</sup>Gennotte

<sup>۱۸</sup>Jung

<sup>۱۹</sup>Perold



می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$$c_i = k_i |x_i - x_i^\circ|, i = 1, \dots, n.$$

هزینه معامله کل نیز بصورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ|.$$

بازده مورد انتظار و واریانس پرتفوی  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ|,$$

9

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j.$$

برای یک سرمایه‌گذار جدید  $x_i^\circ = 0$  (برای  $i = 1, \dots, n+1$ ) لحاظ می‌شود. سرمایه‌گذار انتظار دارد  $R(x)$  بازده مورد انتظار پرتفوی، بیشینه و ریسک پرتفوی (که با واریانس  $V(x)$  اندازه‌گیری می‌شود) کمینه شود. از نظر ریاضی مسأله انتخاب پرتفوی می‌تواند به صورت مسأله برنامه‌ریزی دو هدفه زیر فرمول بندی شود:

$$(BP) \begin{cases} \text{maximize} & R(x) = \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ|, \\ \text{minimize} & V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1, \end{cases}$$

که در آن اولین محدودیت نشان می‌دهد که یک سرمایه به طور کامل در میان دارایی‌های پرتفوی و بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌شود و محدودیت دیگر فروش کوتاه مدت و استقراضی را منع می‌کند. پرتفوی  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  در هر دو محدودیت (BP) صدق می‌کند که این بیان‌کننده انعطاف‌پذیری بودن آن می‌باشد. پرتفوی انعطاف‌پذیر  $x^*$  کاراست اگر انتخاب کارآمد پارتو از (BP) باشد. البته اگر پرتفوی انعطاف‌پذیر دیگر  $x$  (به طوری که  $R(x) \geq R(x^*)$  و  $V(x^*) \geq V(x)$ ) با حداقل یک نابرابری اکید وجود نداشته باشد. مجموعه‌ای از همه پرتفوی‌های کارا، مرز کارایی نامیده می‌شود. در بیشتر موارد پرتفوی کارا به پرتفوی انعطاف‌پذیر دلالت دارد.

با توجه به نظریه بهینه‌سازی چند هدفه، پرتفوی کارا پرتفویی است که  $R(x)$  بازه مورد انتظار پرتفوی را تحت سطح داده شده واریانس  $\bar{V}$  بیشینه می‌کند یا  $V(x)$  ریسک پرتفوی را تحت سطح داده شده از بازده مورد انتظار  $\bar{R}$  کمینه می‌کند. مرز کارایی با حل مسأله برنامه‌ریزی محدب مشتق‌ناپذیر زیر نیز

می‌تواند تولید شود:

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{maximize} & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ| \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

که در آن پارامتر  $\lambda$  در بازه  $[0, 1]$  تغییر می‌کند.  $\lambda$  و  $1 - \lambda$  به ترتیب وزن‌های مرتبط با معیارهای  $R$  و  $V$  هستند.  $\lambda$  می‌تواند به عنوان عامل ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار تفسیر شود، بیشترین مقدار  $\lambda$  ریسک‌گریزی زیاد سرمایه‌گذار است. وقتی  $\lambda = 1$  باشد سرمایه‌گذار بسیار محافظه‌کار خواهد بود زیرا در این مورد تنها ریسک سرمایه‌گذاری خود را در نظر گرفته و هیچ توجهی به بازده سرمایه‌گذاری خود نمی‌کند. در مقابل  $\lambda = 0$  به این معنی است که سرمایه‌گذار بسیار با جرأت است که تنها به دنبال بازده سرمایه‌گذاری خود است.

مسئله  $(P_\lambda)$  برای استخراج یک مدل برنامه‌ریزی درجه دوم و یک الگوریتم برنامه‌ریزی خطی برای انتخاب یک پرتفوی کارا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۳.۲ فرمول بندی مدل

از آنجا که تابع هدف  $(P_\lambda)$  به فرم درجه دوم مشتق‌پذیر نیست، نمی‌توانیم شیوه حل برنامه‌ریزی درجه دوم را مستقیماً برای آن بکار ببریم. با این حال، ما می‌توانیم با معرفی برخی از متغیرهای جدید مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی درجه دوم فرموله کنیم. به عنوان اولین تناظر با مسئله  $(P_\lambda)$ ، مسئله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(P_\lambda)' \begin{cases} \text{maximize} & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{n+1} k_i |x_i - x_i^\circ| \leq x_{n+2}, \\ & \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

**قضیه ۱.۳.۲.**  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*)$  جواب بهینه برای  $(P_\lambda)$  است اگر و تنها اگر  $x_{n+2}^*$  وجود داشته باشد به طوری که  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$  جواب بهینه برای مسئله  $(P_\lambda)'$  باشد.

برهان. فرض کنید که  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*)$  یک جواب بهینه برای  $(P_\lambda)$  باشد. قرار دهید  $x_{n+2}^* = \sum_{i=1}^n k_i |x_i^* - x_i^\circ|$ . پس  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$  یک جواب شدنی برای  $(P_\lambda)'$  می‌باشد. حال فرض کنید این جواب شدنی بهینه برای  $(P_\lambda)'$  نباشد لذا یک جواب شدنی  $(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2})$  از  $(P_\lambda)'$  وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}
 & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 & > (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i^* - x_{n+2}^* \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i^* x_j^*.
 \end{aligned}$$

زیرا

$$\sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ| \leq x_{n+2}, \quad \sum_{i=1}^n k_i |x_i^* - x_i^\circ| = x_{n+2}^*,$$

داریم

$$\begin{aligned}
 & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ| \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 & > (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i^* - \sum_{i=1}^n k_i |x_i^* - x_i^\circ| \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i^* x_j^*.
 \end{aligned}$$

که این با اینکه  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*)$  برای  $(P_\lambda)$  بهینه است تناقض دارد چون  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  نیز جواب شدنی برای  $(P_\lambda)$  است.

برعکس، فرض کنید  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$  جواب بهینه  $(P_\lambda)'$  باشد. واضح است که  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*)$  یک جواب شدنی برای  $(P_\lambda)$  است. اگر آن جواب بهینه برای  $(P_\lambda)$  نباشد آنگاه جواب شدنی  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  برای  $(P_\lambda)$  وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}
 & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^\circ| \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 & > (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i^* - \sum_{i=1}^n k_i |x_i^* - x_i^\circ| \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i^* x_j^*.
 \end{aligned}$$

فرض کنید  $x_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} k_i |x_i - x_i^\circ|$ . پس  $(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2})$  یک جواب شدنی برای  $(P_\lambda)'$  می باشد. از آنجایی که

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i |x_i - x_i^\circ| \leq x_{n+2}^*$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 & > (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i^* - x_{n+2}^* \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i^* x_j^*.
 \end{aligned}$$

□ که این با فرض اینکه  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$  یک جواب بهینه برای  $(P_\lambda)'$  است در تناقض است.

حال فرض کنید

$$d_i^+ = \frac{|x_i - x_i^\circ| + (x_i - x_i^\circ)}{2}, \quad d_i^- = \frac{|x_i - x_i^\circ| - (x_i - x_i^\circ)}{2}.$$

پس

$$d_i^+ + d_i^- = |x_i - x_i^\circ|,$$

$$d_i^+ - d_i^- = x_i - x_i^\circ,$$

$$d_i^+ d_i^- = 0,$$

$$d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0,$$

بنابراین مسأله  $(P_\lambda)'$  می‌تواند معادل مسأله مشتق‌پذیر زیر فرمول‌بندی شود:

$$(P_\lambda)'' \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n k_i (d_i^+ + d_i^-) \leq x_{n+2}, \\ & d_i^+ - d_i^- = x_i - x_i^\circ, i = 1, \dots, n, \\ & d_i^+ d_i^- = 0, i = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \\ & d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0, i = 1, \dots, n, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, x_{n+2}. \end{array} \right.$$

بنابراین داریم

**قضیه ۲.۳.۲.** [۲۷]  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$  یک جواب بهینه برای مسأله  $(P_\lambda)'$  است اگر و تنها اگر  $d_1^{+*}, \dots, d_n^{+*}, d_1^{-*}, \dots, d_n^{-*}$  وجود داشته باشد به طوری که

$$(x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, d_1^{+*}, \dots, d_n^{+*}, d_1^{-*}, \dots, d_n^{-*})$$

یک جواب بهینه برای  $(P_\lambda)''$  باشد.

اگر محدودیت‌های مکمل  $d_i^+ d_i^- = 0, i = 1, \dots, n$  را از مسأله  $(P_\lambda)''$  حذف کنیم مسأله زیر که تنها دارای محدودیت‌های خطی است را بدست می‌آوریم:

$$(P_\lambda)''' \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n k_i (d_i^+ + d_i^-) \leq x_{n+2}, \\ & d_i^+ - d_i^- = x_i - x_i^\circ, i = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \\ & d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0, i = 1, \dots, n, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, x_{n+2}. \end{array} \right.$$

**قضیه ۳.۳.۲.** فرض کنید  $(x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, d_1^{+*}, \dots, d_n^{+*}, d_1^{-*}, \dots, d_n^{-*})$  یک جواب بهینه برای  $(P_\lambda)'''$  باشد آنگاه  $(x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, \tilde{d}_1^+, \dots, \tilde{d}_n^+, \tilde{d}_1^-, \dots, \tilde{d}_n^-)$  یک جواب بهینه برای  $(P_\lambda)''$  می باشد، که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^+ &= \begin{cases} d_i^{+*} - d_i^{-*}, & \text{if } d_i^{+*} > d_i^{-*} > 0 \\ 0, & \text{if } d_i^{-*} \geq d_i^{+*} > 0 \end{cases} \\ \tilde{d}_i^- &= \begin{cases} 0, & \text{if } d_i^{+*} > d_i^{-*} > 0 \\ d_i^{-*} - d_i^{+*}, & \text{if } d_i^{-*} \geq d_i^{+*} > 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} \tilde{d}_i^+ \\ \tilde{d}_i^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_i^{+*} \\ d_i^{-*} \end{pmatrix} \quad \text{if } d_i^{+*} d_i^{-*} = 0. \end{aligned}$$

برهان. از آنجا که تابع هدف دو مسأله  $(P_\lambda)''$  و  $(P_\lambda)'''$  یکسان هستند و هر جواب شدنی برای  $(P_\lambda)''$  یک جواب شدنی برای  $(P_\lambda)'''$  نیز هست، برای اثبات این نتیجه قضیه باید نشان دهیم که

$$(x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, \tilde{d}_1^+, \dots, \tilde{d}_n^+, \tilde{d}_1^-, \dots, \tilde{d}_n^-)$$

یک جواب شدنی برای  $(P_\lambda)''$  می باشد. در این مرحله محدودیت های دوم تا ششم مسأله  $(P_\lambda)''$  می تواند به طور مستقیم در حالت  $\tilde{d}_i^+$  و  $\tilde{d}_i^-$  ( $i = 1, \dots, n$ ) بررسی شود و

$$(x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, d_1^{+*}, \dots, d_n^{+*}, d_1^{-*}, \dots, d_n^{-*})$$

برای مسأله  $(P_\lambda)'''$  جواب شدنی است، یعنی محدودیت اول مسأله  $(P_\lambda)''$  به صورت زیر صدق می کند

$$\tilde{d}_i^+ = \tilde{d}_i^- = \begin{cases} d_i^{+*} - d_i^{-*} \leq d_i^{+*} + d_i^{-*} & \text{if } d_i^{+*} > d_i^{-*} > 0 \\ d_i^{-*} - d_i^{+*} \leq d_i^{+*} + d_i^{-*} & \text{if } d_i^{-*} \geq d_i^{+*} > 0 \\ d_i^{+*} + d_i^{-*} & \text{if } d_i^{+*} d_i^{-*} = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n k_i (\tilde{d}_i^+ + \tilde{d}_i^-) \leq \sum_{i=1}^n k_i (d_i^{+*} + d_i^{-*}) \leq x_{n+2}^*.$$

## ۴.۲ الگوریتم

در این بخش یک الگوریتم برنامه‌ریزی خطی برای یک پرتفوی بهینه بدست می‌آوریم. مسأله  $(P_\lambda)'''$  یک مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم است که می‌توان آن را با تعدادی از روش‌های عددی حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم حل کرد. برخی از این روش‌ها را می‌توان در کتاب‌های کانزی و کارل<sup>۲۰</sup> [۲۴] و بازرا و شتی<sup>۲۱</sup> [۵] یافت. ما برای بدست آوردن جواب بهینه مسأله  $(P_\lambda)'''$  روش محاسباتی بر اساس روش سیمپلکس ایجاد می‌کنیم. تابع لاگرانژ  $(P_\lambda)'''$  به صورت زیر است

$$\begin{aligned} L(x, d^+, d^-, \pi_1, \pi_2, \pi_3, u, v, w) = & (1 - \lambda) \left( \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ & - \pi_1 \left( \sum_{i=1}^n k_i (d_i^+ + d_i^-) - x_{n+2} \right) = \sum_{i=1}^n \pi_{2i} (d_i^- - d_i^+ + x_i - x_i^\circ) + \pi_2 \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_i + 1 \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n+2} u_i x_i + \sum_{i=1}^n v_i d_i^+ + \sum_{i=1}^n w_i d_i^-, \end{aligned}$$

که در آن  $v = (v_1, \dots, v_n) \geq 0$ ،  $u = (u_1, \dots, u_{n+2}) \geq 0$ ،  $\pi_3, \pi_2 = (\pi_{21}, \dots, \pi_{2n})$ ،  $\pi_1 \geq 0$ ، و  $w = (w_1, \dots, w_n) \geq 0$  مضارب لاگرانژ هستند. شرایط کان-تاکر<sup>۲۲</sup> برای بدست آوردن جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم  $(P_\lambda)'''$  لازم و کافیست، داریم

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = (1 - \lambda) R_i - \lambda \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_j + \pi_{2i} + \pi_2 + u_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{n+1}} = (1 - \lambda) R_{n+1} + \pi_2 = u_{n+1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{n+2}} = -(1 - \lambda) + \pi_1 + u_{n+1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_i^+} = -\pi_1 k_i - \pi_{2i} + v_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_i^-} = -\pi_1 k_i + \pi_{2i} + w_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_1} = - \left( \sum_{i=1}^n k_i (d_i^+ + d_i^-) - x_{n+2} \right) \geq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_{2i}} = d_i^- - d_i^+ + x_i - x_i^\circ = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_2} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - 1 = 0,$$

$$\pi_1 \left( \sum_{i=1}^n k_i (d_i^+ - d_i^-) - x_{n+2} \right) = 0, \quad x_i u_i = 0, \quad i = 1, \dots, n+2,$$

$$d_i^+ v_i = 0, \quad d_i^- w_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

<sup>۲۰</sup>Kunzi and Krelle

<sup>۲۱</sup>Bazaraa and Shetty

<sup>۲۲</sup>kuhn-tucker

فرض کنید  $y = x_{n+2} - [\sum_{i=1}^n k_i(d_i^+ + d_i^-)]$  و  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n, \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+2})$  متغیرهای مصنوعی ساختگی باشند و تعریف میکنیم:

$$\text{sign } R_i = \begin{cases} 1, & \text{if } R_i \geq 0, \\ -1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

برای هر  $i = 1, \dots, n$  دستگاه K.K.T فوق می‌تواند با مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر حل شود:

$$(LP_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i, \\ \text{subject to} \quad \lambda \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_j - \pi_{1i} - \pi_{2i} - u_i + \zeta_i \text{sign } R_i = (1 - \lambda)R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad -\pi_{2i} - u_{n+1} + \zeta_{n+1} \text{sign } R_{n+1} = (1 - \lambda)R_{n+1}, \\ \quad \pi_1 + u_{n+2} = 1 - \lambda \\ \quad -\pi_1 k_i - \pi_{2i} + v_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad -\pi_1 k_i + \pi_{2i} + w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad -x_{n+2} + \left( \sum_{i=1}^n k_i(d_i^+ + d_i^-) \right) + y = 0 \\ \quad d_i^+ - d_i^- - x_i + \zeta_{n+1+i} = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \zeta_{n+2} = 1, \\ \quad x, d^+, d^-, y, \pi_1, u, v, w, \zeta \geq 0, \end{array} \right.$$

با  $i = 1, \dots, n, d_i^- w_i = 0, d_i^+ v_i = 0, i = 1, \dots, n+2, x_i u_i = 0, \pi_1 y = 0$  حال می‌توان به آسانی قضیه زیر را بیان کرد.

**قضیه ۱.۴.۲.** اگر  $(x^*, y^*, d^{+*}, d^{+*}, \pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, u^*, v^*, w^*, \zeta^*)$  یک جواب بهینه برای مسأله برنامه‌ریزی خطی  $(LP_\lambda)$  باشد آنگاه  $(x^*, d^{+*}, d^{-*})$  یک جواب بهینه برای مسأله  $(P_\lambda)'''$  و  $(x_1^*, \dots, x_{n+1}^*)$  یک جواب بهینه برای  $(P_\lambda)$  است.

با توجه به قضایای قبلی از لحاظ تئوری مرز پرتفوی کارا را می‌توان با حل مسأله برنامه‌ریزی خطی  $(LP_\lambda)$  ( $\lambda \in [0, 1]$ ) تولید کرد. با این حال، به اندازه کافی برای استفاده اهداف کاربردی کارا نیست. یک سرمایه‌گذار منطقی هدفش این است که با توجه به اولویت‌هایش در ریسک و بازده به دنبال بهترین پرتفوی کارا از مرز کارایی باشد. از اینرو باید مقدار پارامتر  $\lambda$  را طوری انتخاب کنیم که پرتفوی کارا مربوطه بهترین و برای سرمایه‌گذار مهم باشد. یک روش برای انتخاب  $\lambda$  در زیر ارائه می‌دهیم.

فرض می‌کنیم

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1\},$$

$$V^0 = \min_{x \in S} V(x) \stackrel{\text{def}}{=} V(x^{(1)}), \quad R^* = R(x^{(1)}),$$

$$R^\circ = \max_{x \in S} R(x) \stackrel{\text{def}}{=} R(x^\circ), \quad V^* = V(x^*).$$

تابع مطلوبیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(x) = \alpha_1 R(x) - \alpha_2 \sigma^2(x),$$

که در آن  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  توسط سیستم معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$-\alpha_1 V^\circ + \alpha_2 R^* = c$$

$$-\alpha_1 V^* + \alpha_2 R^\circ = c.$$

که در آن  $c$  یک عدد ثابت ناصفر است. به راحتی  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha_1 = \frac{c(R^\circ - R^*)}{V^* R^* - V^\circ R^\circ}, \quad \alpha_2 = \frac{c(V^* - V^\circ)}{V^* R^* - V^\circ R^\circ}.$$

اگر نیاز باشد که  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  نرمال شوند، آنگاه فرض می‌کنیم:

$$c = \frac{V^* R^* - V^\circ R^\circ}{R^\circ - R^* + V^* - V^\circ}.$$

بنابراین

$$\alpha_1 = \frac{R^\circ - R^*}{R^\circ - R^* + V^* - V^\circ}, \quad \alpha_2 = \frac{V^* - V^\circ}{R^\circ - R^* + V^* - V^\circ}$$

با توجه به  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  که تعریف کردیم، داریم

$$U(x) = \frac{(V^* - V^\circ)R(x) - (R^\circ - R^*)\sigma^2(x)}{R^\circ - R^* + V^* - V^\circ},$$

بنابراین مسأله‌ای که باید حل شود بصورت زیر است:

$$\text{maximize } U(x) \quad \text{subject to } x \in S$$

که در مسأله  $(P_\lambda)$ ،  $\lambda = \alpha_1 = (R^\circ - R^*)/(R^\circ - R^* + V^* - V^\circ)$ ، در فضای نرخ بازده-واریانس مورد نظر  $V - R$ ، معادله  $U(x) = c$  (ثابت) نشان دهنده یک خط است. روی همه نقاط این خط سود سرمایه‌گذار یکسان است. وقتی  $c$  تغییر کند این خطوط موازی و شیب آن‌ها برابر است با

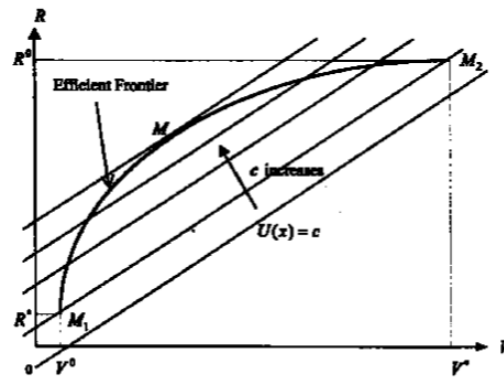
$$k := \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{R^\circ - R^*}{V^* - V^\circ}$$

شیب از روی دو نقطه متصل  $M_1(V^\circ, R^*)$  و  $M_2(V^*, R^\circ)$  تشخیص داده می‌شود. بنابراین (شکل ۴.۲)  $U(x)$  زمانی که خط موازی نقطه  $M$  که روی خط مماس به منحنی مرزی از مجموعه پی‌آف حرکت می‌کند باشد به ماکزیمم مقدار خود روی  $S$  می‌رسد

$$Y = \{(V(x), R(x)) : x \in S\}.$$

به عبارت دیگر سرمایه‌گذار در نقطه  $M$  از پی‌آف  $Y$  به حداکثر سود می‌رسد. بنابراین پرتفوی  $x^*$  متناظر با نقطه  $M$  بهترین پرتفوی کارا برای سرمایه‌گذار است زیرا  $U(x)$  هیچ واحد سنجشی ندارد. هر  $x^*$  به نرخ بازده مورد انتظار  $R_i (i = 1, \dots, n+1)$  و نرخ‌های هزینه معامله  $k_i (i = 1, \dots, n)$  بستگی ندارد. این اجتناب مسأله از عدم اشتراک سنجش دو معیار  $R(x)$  و  $V(x)$  است.





شکل ۱.۲: یک روش انتخاب پارامتر  $\lambda$

## ۵.۲ یک مثال عددی

در این بخش مدل برنامه‌ریزی درجه دوم که ارائه دادیم و شیوه برنامه‌ریزی خطی را از طریق مثال عددی به صورت زیر نشان می‌دهیم.  
فرض کنید

$$n = 3,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.05,$$

$$R_1 = 0.05, \quad R_2 = 0.10, \quad R_3 = 0.15, \quad R_4 = 0.05,$$

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0,$$

$$\sigma_{11} = 0.25, \quad \sigma_{22} = 0.21, \quad \sigma_{33} = 0.28,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.15, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0.17, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0.09.$$

بنابراین  $(P_\lambda)'''$  و  $(LP_\lambda)$  به ترتیب هستند:

$$(P_\lambda)''' \left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \quad (1 - \lambda)(0.05x_1 + 0.10x_2 + 0.15x_3 + 0.05x_4 - x_5) \\ \quad - \lambda(0.25x_1^2 + 0.21x_2^2 + 0.28x_3^2 \\ \quad + 2 * 0.15x_1x_2 + 2 * 0.17x_1x_3 + 2 * 0.09x_2x_3) \\ \text{subject to} \quad 0.05(d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- + d_3^+ + d_3^-) \leq x_5 \\ \quad d_1^+ - d_1^- = x_1 \\ \quad d_2^+ - d_2^- = x_2 \\ \quad d_3^+ - d_3^- = x_3 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_1^-, d_2^-, d_3^-, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{array} \right.$$

$$(LP_\lambda) \left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \zeta_1 + \dots + \zeta_n \\ \text{subject to} & \begin{aligned} & 2\lambda(0.25x_1 + 0.21x_2 + 0.09x_3) - \pi_{21} - \pi_3 - u_1 + \zeta_1 = 0.05, \\ & 2\lambda(0.15x_1 + 0.21x_2 + 0.28x_3) - \pi_{22} - \pi_3 - u_2 + \zeta_2 = 0.10, \\ & 2\lambda(0.17x_1 + 0.09x_2 + 0.28x_3) - \pi_{23} - \pi_3 - u_3 + \zeta_3 = 0.15, \\ & -\pi_3 - u_4 - \zeta_4 = 0.05, \\ & \pi_1 + u_5 = 1, \\ & -0.05\pi_1 - \pi_{21} + v_1 = 0, \\ & -0.05\pi_1 - \pi_{22} + v_2 = 0, \\ & -0.05\pi_1 - \pi_{23} + v_3 = 0, \\ & -0.05\pi_1 - \pi_{21} + w_1 = 0, \\ & -0.05\pi_1 - \pi_{22} + w_2 = 0, \\ & -0.05\pi_1 - \pi_{23} + w_3 = 0, \\ & -x_5 + 0.05(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+ + d_1^- + d_2^- + d_3^-) + y = 0, \\ & d_1^+ - d_1^- - x_1 + \zeta_5 = 0, \\ & d_2^+ - d_2^- - x_2 + \zeta_6 = 0, \\ & d_3^+ - d_3^- - x_3 + \zeta_7 = 0, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \zeta_8 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, y, d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_1^-, d_2^-, d_3^-, \pi_1 \geq 0, \\ & u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, \zeta_1, \dots, \zeta_8 \geq 0, \\ & \pi_1 y = 0, \quad x_1 u_1 = 0, \quad x_2 u_2 = 0, \quad x_3 u_3 = 0, \quad x_4 u_4 = 0, \quad x_5 u_5 = 0, \\ & d_1^+ v_1 = 0, \quad d_2^+ v_2 = 0, \quad d_3^+ v_3 = 0, \quad d_1^- w_1 = 0, \quad d_2^- w_2 = 0, \quad d_3^- w_3 = 0, \end{aligned} \end{array} \right.$$

مسئله  $(P_\lambda)'''$  بالا را برای  $\lambda = 0$  حل می‌کنیم (در اینجا مسئله برنامه‌ریزی خطی است). فرض می‌کنیم

$$x^{(2)} = (0, 0, 1, 0), \quad R^0 = 0.145, \quad V^* = 0.28.$$

مسئله  $(LP_\lambda)$  را برای  $\lambda = 1$  حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$x^{(1)} = (0, 0, 0, 1), \quad V^0 = 0, \quad R^* = 0.05.$$

از اینرو بهترین مقدار از پارامتر  $\lambda$  عبارتست از

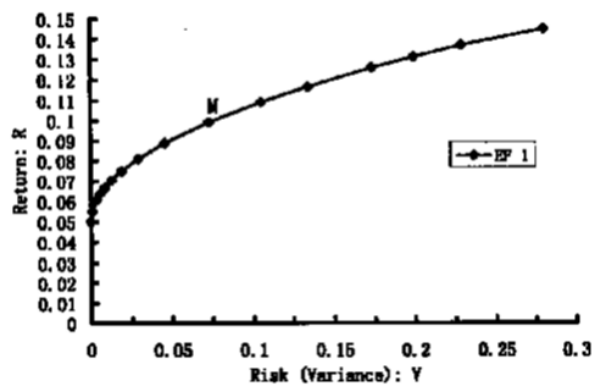
$$\lambda^* = \frac{0.145 - 0.05}{0.145 - 0.05 + 0.28 - 0} = 0.253333.$$

مسأله  $(LP_\lambda)$  را برای  $\lambda = \lambda^*$  حل می‌کنیم، داریم

$$x^* = (0, 0.12, 0.46, 0.42)$$

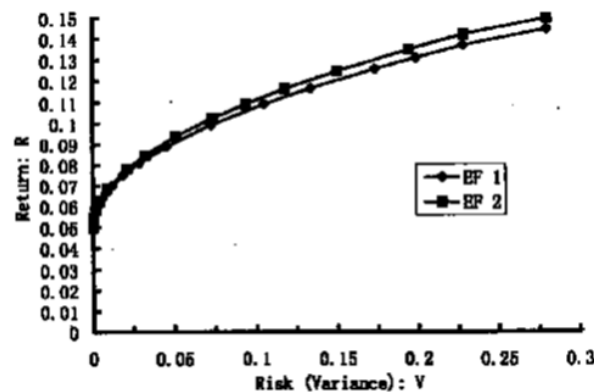
که بهترین پرتفوی کارا برای سرمایه‌گذار است.

با انتخاب مقادیر مختلف  $\lambda$  از بازه  $[0, 1]$ ، ۱۵ پرتفوی مختلف دیگر بدست می‌آید. این نقاط می‌توانند به عنوان یک تقریب خوب برای مرز کارایی محسوب شوند. مرز کارایی روی  $(V, R)$  که در شکل ۲.۲ رسم شده، نقطه مماس بین خانواده‌ای از خطوط  $c = (1 - \lambda^*)R - \lambda^*\sigma^2$  و مرز  $M$  است که نشان دهنده پرتفوی  $x^*$  است.



شکل ۲.۲: یک مرز کارایی

برای مقایسه، مرز کارای دیگری با حل مسأله یکسان با هزینه‌های معامله صفر ساخته می‌شود (که  $k_i = 0$  برای همه  $i$ ها). در شکل ۳.۲ دو مرز جدید رسم شده‌اند. اولین برجسب EF۱ و دومین EF۲ است.



شکل ۳.۲: مقایسه دو مرز کارایی



## فصل ۳

# یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسأله انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله

مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم در طیف گسترده‌ای از کاربردهای علمی و مهندسی، تحلیل رگرسیون، پردازش سیگنال، بازسازی تصویر، کنترل ربات و غیره به وجود می‌آیند. همچنین، برخی مسائل بهینه‌سازی غیرخطی معمولاً با یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم تقریب زده می‌شوند. به طور کلی، مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم می‌تواند به شکل زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2}x^T W x + c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

بسیاری از شبکه‌های عصبی برای مسئله فوق ارائه شده‌اند. برای مثال، برخی شبکه‌های عصبی اولیه – دوگان ارائه شدند [۸]، [۱۱]، [۴۹] و [۵۰]. به منظور ساده‌سازی ساختار شبکه‌ی عصبی دوگان، شبکه‌ی عصبی دوگان ساده شده معرفی شد [۲۹] و [۲۱]. با استفاده از قضیه‌ی تصویر، چندین شبکه‌ی عصبی تصویری برای حل مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم توسعه داده شدند [۱۳]، [۱۷]، [۱۵]، [۱۸]، [۲۰]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۷]، [۵۴] و [۵۷] که به طور کلی به جواب‌های بهینه‌ی دقیق همگرا بودند. در [۳۰] و [۳۱]، لیو وانگ چند شبکه‌ی عصبی بازگشتی تک‌لایه را برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم پیشنهاد دادند. شبکه‌های عصبی بازگشتی تک‌لایه پیچیدگی ساختاری ساده‌تری نسبت به سایر شبکه‌های عصبی مانند شبکه‌ی لاگرانژی و شبکه‌ی تصویری دارند.

تا به حال، تنها چند شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم زیر با محدودیت‌های تساوی و نامساوی توسعه یافته است.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} x^T W x + c^T x \\ & \text{subject to} \quad Ax = b, \\ & \quad \quad \quad Bx \leq d. \end{aligned} \quad (1.3)$$

که در آن  $W$ ، یک ماتریس  $n \times n$  نیمه معین مثبت متقارن حقیقی،  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ،  $d \in \mathbb{R}^p$  و  $b \in \mathbb{R}^m$ ،  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ،  $\text{rank}(A) = m$  ( $0 < m < n$ )،  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $c \in \mathbb{R}^n$ ، ژانگ و وانگ [۵۹] و شیا و همکاران [۵۲] با محدودیت‌های تساوی و نامساوی یک طرفه همانند حالات خاص محدودیت‌های کران دوطرفه عمل کردند. نشان دادن کران پایین  $-\infty$  یا تا کران  $+\infty$  نیاز به اعداد به اندازه کافی بزرگ دارد که برای طراحی شبکه‌های عصبی نامساعد است. عفتی و ناظمی [۱۲] برای حل این مسئله با شرایط کاراش-کوهن-تاکر ( $KKT$ ) یک شبکه‌ی عصبی پیشنهاد دادند. با این حال، این شبکه‌ی عصبی دارای نوروهای بیشتری است و نیاز به شرایط همگرایی قوی‌تری دارد.

با انگیزه‌ی مباحث فوق، هدف این پایان نامه توسعه‌ی یک شبکه‌ی عصبی جدید برای حل (۱.۳) است که متغیرهای حالت کمتر، پیچیدگی ساختاری کمتر و شرایط همگرایی قوی‌تری دارد.

### ۱.۳ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی

مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم محدب به صورت کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} x^T W x + c^T x \\ & \text{subject to} \quad Ax = b \\ & \quad \quad \quad Bx \leq d, \end{aligned} \quad (2.3)$$

که در آن  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ، یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن،  $d \in \mathbb{R}^p$  و  $b \in \mathbb{R}^m$ ،  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ،  $\text{rank}(A) = m$  ( $0 < m < n$ )،  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $c \in \mathbb{R}^n$  است.

می‌توان مدل شبکه‌ی عصبی زیر را برای به دست آوردن جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۲.۳) به صورت زیر به کار برد [۵۳]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] - Q(Ax - b) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}y + \frac{1}{\tau}(y + Bx - d)^+, \end{cases} \quad (3.3)$$

که در آن

$$P = A^T(AA^T)^{-1}A \quad Q = A^T(AA^T)^{-1}$$

$$(y + Bx - d)^+ = ([y + Bx - d]_1^+, [y + Bx - d]_2^+, \dots, [y + Bx - d]_m^+)$$

$$[y + Bx - d]_k^+ = \max\{(y + Bx - d)_k, 0\} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

لم ۱.۱.۳. [۵۳]  $x^*$  جواب بهینه‌ی (۲.۳) است اگر و تنها اگر  $y^* \geq 0$  موجود باشد به طوری که  $(x^*, y^*)^T$  در شرایط زیر صدق کند:

$$(I - P)[Wx^* + c + B^T y^*] + Q(Ax^* - b) = 0 \quad (۴.۳)$$

$$(y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0 \quad (۵.۳)$$

برهان. اگر  $x^*$  جواب بهینه‌ی (۲.۳) باشد، مطابق [۴] شرایط KKT برای مسائل بهینه‌سازی محدب،  $(x^*, \lambda^*, y^*)$  و  $y^* \geq 0$  موجودند به طوری که در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$Wx^* + c + A^T \lambda^* + B^T y^* = 0 \quad (۶.۳)$$

$$Ax^* = b \quad (۷.۳)$$

$$d - Bx^* \geq 0, \quad y^* \geq 0, \quad (y^*)^T(d - Bx^*) = 0 \quad (۸.۳)$$

به آسانی دیده می‌شود که (۵.۳) و (۸.۳) معادل هستند. به این معنی که

$$d - Bx^* \geq 0, \quad y^* \geq 0, \quad (y^*)^T(d - Bx^*) = 0 \iff (y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0$$

در ادامه، نشان می‌دهیم که جواب‌های (۴.۳) و جواب‌های (۶.۳) و (۷.۳) معادلند. از (۶.۳) داریم

$$-A(Wx^* + c + A^T \lambda^* + B^T y^*) = 0$$

با جمع کردن معادله‌ی بالا با معادله‌ی (۷.۳) داریم

$$Ax^* - A(Wx^* + c) - AA^T \lambda^* - AB^T y^* = b$$

بنابراین

$$A^T \lambda^* = A^T(AA^T)^{-1}(Ax^* - b) - A^T(AA^T)^{-1}(Wx^* + c + B^T y^*) \quad (۹.۳)$$

با جایگذاری (۹.۳) در معادله‌ی (۶.۳) داریم

$$[I - A^T(AA^T)^{-1}A](Wx^* + c + B^T y^*) + A^T(AA^T)^{-1}(Ax^* - b) = 0$$

با قرار دادن  $P = A^T(AA^T)^{-1}A$  و  $Q = A^T(AA^T)^{-1}$  می‌توان معادله‌ی فوق را به صورت زیر نوشت

$$(I - P)[Wx^* + c + B^T(y^* + Bx^* - d)^+] + Q(Ax^* - b) = 0$$

برعکس، اگر  $y^*$  موجود باشد به طوری که  $(x^*, y^*)^T$  در معادله‌ی (۴.۳) صدق کند با ضرب  $A$  در طرفین معادله‌ی (۴.۳) داریم

$$A(I - P)[Wx^* + c + B^T(y^* + Bx^* - d)^+] + AQ(Ax^* - b) = 0$$

توجه کنید که  $AQ = I$  و  $A(I - P) = 0$  پس داریم  $Ax^* - b = 0$ . در نتیجه از (۴.۳) داریم  $(I - P)(Wx^* + c + B^T y^*) = 0$ . با قرار دادن  $\lambda^* = -(AA^T)^{-1}A(Wx^* + c + B^T y^*)$  داریم

$$\begin{aligned} Wx^* + c + A^T \lambda^* + B^T y^* &= Wx^* + c + B^T y^* - A^T (AA^T)^{-1} A(Wx^* + c + B^T y^*) \\ &= (I - P)(Wx^* + c + B^T y^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس حکم ثابت شده است.  $\square$

**ملاحظه ۲.۱.۳.** با استفاده از لم ۱.۱.۳، به آسانی می‌بینیم که  $x^*$  جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۲.۳) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد  $y^* \geq 0$  به طوری که  $(x^*, y^*)^T$  نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی ارائه شده در (۳.۳) باشد. بنابراین، زمانی که شبکه‌ی عصبی به نقطه‌ی تعادل همگرا است، مسیر حرکت  $x(t)$  به جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۲.۳) همگرا می‌باشد.

### ۱.۱.۳ تحلیل پایداری

در این بخش نشان خواهیم داد که مدل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) همگرای سراسری است.

**لم ۳.۱.۳.** [۵۳] فرض کنید  $(x^*, y^*)^T \in \Omega^e$  یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) باشد و

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{1}{\gamma} (x - x^*)^T W (x - x^*) - (x - x^*)^T B^T y^* + \frac{1}{\gamma} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y^*\|^2 \\ &\quad - y^T y^* + \frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

در این صورت

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2; \quad (۱۱.۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2. \end{aligned} \quad (۱۲.۳)$$

برهان. برای اثبات (۱۱.۳) داریم، از آنجا که تابع  $\|(y + Bx - d)^+\|^2$  محدب و مشتق پذیر می‌باشد و

$$\nabla \|(y + Bx - d)^+\|^2 = 2 \begin{bmatrix} B^T(y + Bx - d)^+ \\ (y + Bx - d)^+ \end{bmatrix}$$



در نتیجه

$$\|(y + Bx - d)^+\|^2 - \|y^*\|^2 \geq \Upsilon(x - x^*)^T B^T y^* + \Upsilon(y - y^*)^T y^*$$

یعنی

$$\frac{1}{\Upsilon} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\Upsilon} \|y^*\|^2 - (x - x^*)^T B^T y^* - y^T y^* \geq 0.$$

و با توجه به این که ماتریس  $W$  نیمه‌معین مثبت متقارن است، داریم

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\Upsilon} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\Upsilon} \|y - y^*\|^2$$

همچنین برای اثبات (۱۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= -[W(x - x^*) - B^T y^* + B^T(y + Bx - d)^+ + x - x^*]^T \\ &\quad \times [(I - P)(Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+) + Q(Ax - b)] \\ &\quad - \frac{1}{\Upsilon} [y - (y + Bx - d)^+]^T \times [(y + Bx - d)^+ - \Upsilon y^* + y] \\ &= [-W(x - x^*) + x - x^* + B^T((y + Bx - d)^+ - y^*)]^T \\ &\quad \times [(I - P)(W(x - x^*) + B^T((y + Bx - d)^+ - y^*) + P(x - x^*)) \\ &\quad - \frac{1}{\Upsilon} [y - (y + Bx - d)^+]^T \times [y - (y + Bx - d)^+ + \Upsilon(y + Bx - d)^+ - \Upsilon y^*] \\ &= -(x - x^*)^T W(I - P)W(x - x^*) \\ &\quad - (x - x^*)^T \times W(I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - (x - x^*)^T W P(x - x^*) \\ &\quad - (x - x^*)^T (I - P)W(x - x^*) - (x - x^*)^T (I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] \\ &\quad - (x - x^*)^T P(x - x^*) - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \times B(I - P)W(x - x^*) \\ &\quad - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T B B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \\ &\quad \times B P(x - x^*) - \frac{1}{\Upsilon} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 \\ &\quad + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T [(y + Bx - d)^+ - y] \end{aligned}$$

توجه کنید که  $P(I - P) = 0$ ،  $P^2 = P$ ،  $(I - P)^2 = I - P$  و

داریم  $(y + Bx - d)^+ - y = Bx - d + (-y - Bx - d)^+$

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= -(x - x^*)^T W(I - P)^T W(x - x^*) \\
 &\quad - (x - x^*)^T W(I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - (x - x^*)^T P^T(x - x^*) \\
 &\quad - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T BB^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - (x - x^*)^T W(x - x^*) \\
 &\quad - (x - x^*)^T B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 \\
 &\quad + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \times [Bx - d + (-y - Bx + d)^+] \\
 &= -\|(I - P)W(x - x^*) + (I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] + P(x - x^*)\|^2 \\
 &\quad - (x - x^*)^T W(x - x^*) - (x - x^*)^T B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \\
 &\quad \times [B(x - x^*) + (Bx^* - d) + (-y - Bx - d)^+] \\
 &= -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 \\
 &\quad - (x - x^*)^T W(x - x^*) - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 \\
 &\quad + [(y + Bx - d)^+]^T (Bx^* - d) - (y^{*T})(Bx^* - d) \\
 &\quad + [(y + Bx - d)^+]^T (-y - Bx + d)^+ - (y^{*T})(-y - Bx + d)^+ \\
 &= -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 \\
 &\quad - (x - x^*)^T W(x - x^*) - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 \\
 &\quad + [(y + Bx - d)^+]^T (Bx^* - d) - (y^{*T})(-y - Bx + d)^+ \\
 &\leq -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] \\
 &\quad + Q(Ax - b)\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2
 \end{aligned}$$

□ که در معادله‌ی فوق با استفاده از (۵.۳) اثبات تمام است.

**ملاحظه ۴.۱.۳.**  $V(x, y)$  معرفی شده در (۱۰.۳) یک تابع لیپانوف می‌باشد، بنابراین، شبکه‌ی عصبی (۳.۳) پایدار به مفهوم لیپانوف می‌باشد.

**قضیه ۵.۱.۳.** [۵۳] برای هر نقطه‌ی اولیه‌ی  $(x(\circ), y(\circ)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ ، یک جواب پیوسته منحصر به فرد  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^{n+p}$  از (۳.۳) برای  $t \geq \circ$  وجود دارد.

برهان. فرض کنید

$$E(x, y) = -(I - P)(Wx + c - (y + BX - d)^+) - Q(Ax - b) - \frac{1}{\gamma} y + \frac{1}{\gamma} (y + Bx - d)^+.$$

برای هر  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{n+p}$  داریم

$$\begin{aligned} \|E(x, y) - E(x', y')\| &\leq \|(I - P)[Wx + c - (y + BX - d)^+] + Q(Ax - b) \\ &\quad - (I - P)[Wx' + c - (y' + BX' - d)^+] - Q(Ax' - b)\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{\gamma}y - \frac{1}{\gamma}(y + Bx - d)^+ - \frac{1}{\gamma}y' + \frac{1}{\gamma}(y' + Bx' - d)^+ \right\| \\ &\leq (\|(I - P)W\| + \|(I - P)B\| + \|P\| + \|B\|/\gamma)\|x - x'\| \\ &\quad + (\|I - P\| + 1)\|y - y'\| \end{aligned}$$

از این رو،  $E(x, y)$  روی  $\mathbb{R}^{n+p}$  پیوسته‌ی لپ‌شیتز<sup>۱</sup> است. از قضیه‌ی وجودی موضعی معادله‌ی دیفرانسیل معمولی [۳۸] نتیجه می‌شود یک جواب منحصر به فرد (۳.۳) روی  $[0, T)$  وجود دارد. بنا به لم ۳.۱.۳ می‌دانیم که  $V$  نسبت به  $t$  یک تابع نزولی است، لذا

$$\frac{1}{\gamma}\|x - x^*\|^2 \leq V(x(0), y(0)) \leq V(x(t), y(t)), \quad \forall t \geq 0 \quad (۱۳.۳)$$

نشان می‌دهد مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳.۳) کراندار است. در نتیجه  $T = +\infty$ . این اثبات را کامل می‌کند.  $\square$

**قضیه ۶.۱.۳.** [۵۳] مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳.۳) برای هر نقطه‌ی اولیه‌ی  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^{n+p}$  به یک نقطه‌ی تعادل همگرا است. به ویژه، شبکه‌ی عصبی (۳.۳) با هر نقطه‌ی اولیه‌ی  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^{n+p}$  هنگامی که  $\Omega^e$  نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد دارد به طور سراسری پایدار مجانبی است.

برهان. تعریف کنید

$$D(x, y) = \|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 + \frac{1}{\gamma}\|y - (y + Bx - d)^+\|^2.$$

در این صورت  $D(x, y) = 0$  اگر و تنها اگر  $(x, y)$  یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) باشد. از اثبات قضیه‌ی ۵.۱.۳ نتیجه می‌گیریم مسیر حالت  $(x(t), y(t))$  شبکه‌ی عصبی (۳.۳) کراندار است. بنابراین، دنباله‌ی صعودی  $\{t_n\}$  با  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \rightarrow \infty$  و نقطه‌ی حدی  $(\hat{x}, \hat{y})^T$  وجود دارند به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ .

حال، ثابت می‌کنیم  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega^e$  و مسیر حالت  $(x(t), y(t))$  به طور کلی به نقطه‌ی تعادل  $(\hat{x}, \hat{y})$  همگرا است.

در مرحله اول، ثابت می‌کنیم که  $D(\hat{x}, \hat{y}) = 0$  یعنی  $(\hat{x}, \hat{y})$  یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) است. اگر این مورد برقرار نباشد، آنگاه  $D(\hat{x}, \hat{y}) > 0$ . چون  $D(x, y)$  به ترتیب نسبت به  $x$  و  $y$  پیوسته است،  $\varepsilon > 0$ ،  $q > 0$  و همسایگی  $\varepsilon$  از  $(\hat{x}, \hat{y})^T$

$$B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon) = \{(x, y)^T : \|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\| \leq \varepsilon\}$$

<sup>۱</sup>Lipschitz

وجود دارند به طوری که برای هر  $(x, y)^T \in B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon)$ ،  $D(x, y) > q$ .

با توجه به اینکه  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$ ، عدد صحیح مثبت  $N$  وجود دارد به طوری که برای هر  $n \geq N$ ،  $\|x(t_n) - \hat{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$  و  $\|y(t_n) - \hat{y}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

از (۳.۳) و کراندار بودن  $(x(t), y(t))$  نتیجه می‌گیریم  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  نیز کراندار هستند که این کران با  $M$  نشان داده می‌شود. با در نظر گرفتن  $n \geq N$ ،  $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$  داریم

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}\| + \|y(t) - \hat{y}\| &\leq \|x(t) - x(t_n)\| + \|y(t) - y(t_n)\| + \|x(t_n) - \hat{x}\| + \|y(t_n) - \hat{y}\| \\ &= \|\dot{x}(\xi_1)\| \times |t - t_n| + \|\dot{y}(\xi_2)\| \times |t - t_n| \\ &\quad + \|x(t_n) - \hat{x}\| + \|y(t_n) - \hat{y}\| \\ &\leq 2M|t - t_n| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

از این رو، برای هر  $n \geq N$ ،  $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$  داریم  $(x, y)^T \in B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon)$ . بنابراین برای هر  $n \geq N$ ،  $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$  نتیجه می‌شود  $D(x(t), y(t)) > q$ . چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  و اندازه‌ی لبگ<sup>۲</sup> مجموعه‌ی  $t \in \cup_{n \geq N} [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$  بی نهایت است، پس داریم

$$\int_0^\infty D(x(t), y(t)) dt = \infty. \quad (۱۴.۳)$$

با این حال از رابطه (۱۲.۳)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty D(x(t), y(t)) dt &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s D(x(t), y(t)) dt \\ &\leq - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \dot{V}(x(t), y(t)) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} [V(x(\circ), y(\circ)) - V(x(s), y(s))] \\ &\leq V(x(\circ), y(\circ)). \end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

که (۱۴.۳) را نقض می‌کند. لذا  $D(\hat{x}, \hat{y}) = 0$  که یعنی  $(\hat{x}, \hat{y})^T \in \Omega^e$ .

در مرحله دوم، ثابت می‌کنیم مسیر حالت  $(x(t), y(t))$  به طور سراسری به نقطه‌ی تعادل  $(\hat{x}, \hat{y})$  همگرا است.

<sup>۲</sup>Lebeque

تابع لیاپانوف

$$\begin{aligned}\hat{V}(x, y) = & \frac{1}{\gamma} W(x(t) - \hat{x}) - (x(t) - \hat{x})^T B^T \hat{y} + \frac{1}{\gamma} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\hat{y}\|^2 \\ & - y^T \hat{y} + \frac{1}{\gamma} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y(t) - \hat{y}\|^2\end{aligned}$$

را تعریف کنید که  $\hat{V}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ .

چون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y} \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$$

به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $t_k$  وجود دارد به طوری که  $\hat{V}(x(t_k), y(t_k)) < \varepsilon$ .

بنا به لم ۳.۱.۳ داریم  $\frac{1}{\gamma} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq \hat{V}(x(t), y(t))$  و نزولی است.

بنابراین، برای هر  $t \geq t_k$  داریم

$$\frac{1}{\gamma} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq \hat{V}(x(t), y(t)) \leq \hat{V}(x(t_k), y(t_k)) \leq \varepsilon$$

که یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t) = \hat{y}$ . لذا مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳.۳) همگرای سراسری به نقطه‌ی تعادل  $(\hat{x}, \hat{y})^T$  همگرا می‌شود.

به ویژه، اگر  $\Omega^e = \{(x^*, y^*)\}$ ، آنگاه بنا به تحلیل فوق مسیر حالت  $(x(t), y(t))$  با هر نقطه‌ی اولیه‌ی  $(x(0), y(0))$  به  $(x^*, y^*)$  میل خواهد نمود. پس این شبکه‌ی عصبی پایدار مجانبی سراسری است.  $\square$

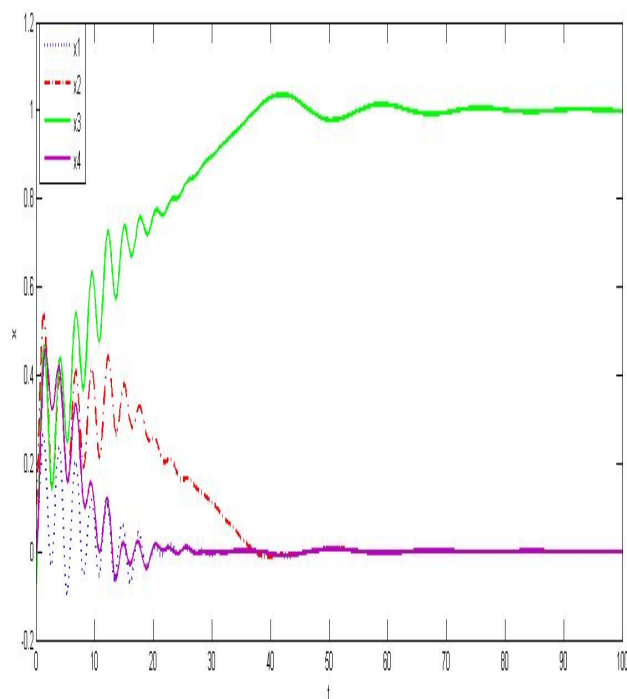
## ۲.۱.۳ مثال عددی

**مثال ۷.۱.۳ [۵۳]** مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم  $(P_\lambda)'''$  که در مثال عددی فصل قبل برای انتخاب پرتفوی بهینه با هزینه‌های معامله بود را در نظر بگیرید:

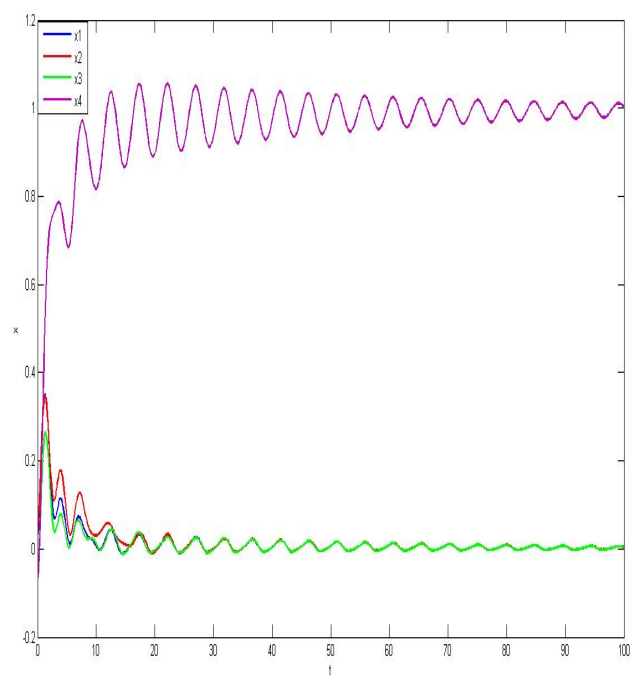
$$(P_\lambda)''' \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximize} & (1 - \lambda)(\circ/^\circ \circ x_1 + \circ/^\circ \circ x_2 + \circ/^\circ \circ x_3 + \circ/^\circ \circ x_4 - x_5) \\ & - \lambda(\circ/^\circ \circ x_1^2 + \circ/^\circ \circ x_2^2 + \circ/^\circ \circ x_3^2 \\ & + 2 * \circ/^\circ \circ x_1 x_2 + 2 * \circ/^\circ \circ x_1 x_3 + 2 * \circ/^\circ \circ x_2 x_3) \\ \text{subject to} & \circ/^\circ \circ (d_1^+ + d_2^+ + d_3^+ + d_1^- + d_2^- + d_3^-) \leq x_5 \\ & d_1^+ - d_1^- = x_1 \\ & d_2^+ - d_2^- = x_2 \\ & d_3^+ - d_3^- = x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_1^-, d_2^-, d_3^-, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{array} \right.$$

این مسأله برای چند  $\lambda$  بررسی شده است.

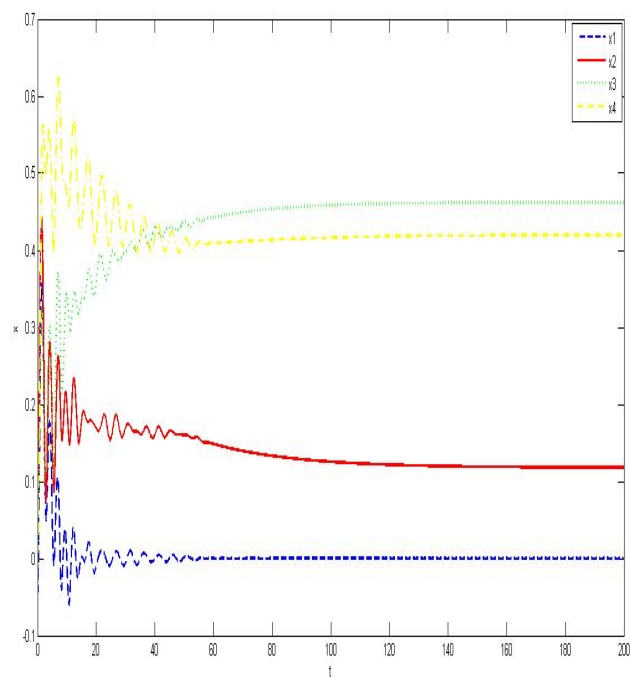
مسأله  $(P_\lambda)'''$  بالا برای  $\lambda = 0$  جواب بهینه  $x^{(2)} = (0, 0, 1, 0)$  دارد. همچنین برای  $\lambda = 1$  جواب بهینه  $x^{(1)} = (0, 0, 0, 1)$  و برای  $\lambda = 0.253333$  جواب بهینه  $x^* = (0, 0.12, 0.46, 0.42)^T$  دارد. شبکه‌ی عصبی را با استفاده از  $10$  نقطه‌ی اولیه‌ی تصادفی بررسی کرده‌ایم. تمامی نتایج شبیه سازی که شبکه‌ی عصبی (۳.۳) را نشان می‌دهند به این جواب‌های بهینه همگرا می‌شوند. نتایج شبیه سازی به ترتیب در شکل‌های ۱.۳، ۲.۳ و ۳.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱.۳: رفتار مدل شبکه‌ی عصبی برای  $\lambda = 0$



شکل ۲.۳: رفتار مدل شبکه‌ی عصبی برای  $\lambda = 1$



شکل ۳.۳: رفتار مدل شبکه‌ی عصبی برای  $\lambda = 0.25333$





## فصل ۴

# یک روش دقیق برای حل مسائل بهینه‌سازی پرتفوی تحت محدودیت‌های تصادفی

### ۱.۴ مقدمه

پس از کار پیشگامانه مارکوویتز در انتخاب پرتفوی، بهینه‌سازی پرتفوی از سوی متقاضیان حرفه‌ای و دانشگاهیان مورد توجه قرار گرفت. روش میانگین-واریانس بررسی می‌کند که چگونه سرمایه‌گذاران می‌توانند با در نظر گرفتن اختلافات بین نوسانات بازار و بازده مورد انتظار پرتفوی بهینه را ایجاد کنند. به واسطه مجموعه‌ای از  $r$  دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک با بازده مشخص  $\mu_0$  که نرخ بهره در بازار پول را نشان می‌دهند، یک مرز کارایی پرتفوی بهین می‌تواند ساخته شود. پرتفوی‌ها در مرز کارایی حداکثر بازده احتمالی مورد انتظار را برای یک سطح معینی از ریسک ارائه می‌دهد. مدل اصلی مارکوویتز فرض می‌کند که بازده‌های مورد انتظار  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^r$  از دارایی‌های ریسکی و ماتریس واریانس-کوواریانس  $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$  از بازده‌ها شناخته شده هستند. یکی از فرمول‌بندی‌های چندگانه مسائل انتخاب پرتفوی میانگین-واریانس شامل ایجاد پرتفوی با حداقل ریسک است، به شرطی که سطح بازده مجاز  $R$  بدست

آید. این مدل با برنامه‌ریزی ریاضی زیر فرمول‌بندی شده است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && w^T \Sigma w \\ & \text{subject to} && \mu_0 w_0 + \bar{\mu}^T w \geq R, \\ & && \sum_{j=0}^r w_j = 1, \\ & && w \in \mathbb{R}^{r+1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

در مسئله بالا متغیرهای تصمیم‌گیری  $w_j$ ،  $j = 0, \dots, r$  نشان دهنده نسبت سرمایه سرمایه‌گذاری شده در دارایی ریسکی  $j$  است در حالیکه  $w_0$  نسبت سرمایه سرمایه‌گذاری شده در بازار پول است. هدف تابع هدف، به حداقل رساندن واریانس پرتفوی  $w^T \Sigma w$  است. محدودیت

$$w_0 + \sum_{j=1}^r w_j = 1 \quad (2.4)$$

تاکید می‌کند که مجموعه سرمایه‌گذاری برابر یک است. واضح است که سرمایه‌گذار می‌تواند بخشی از  $K$  سرمایه خود را به بازار پول  $w_0$  اختصاص دهد. در دهه گذشته، برای گسترش کار مارکوویتز تلاش‌های زیادی انجام شده و نظریه پرتفوی مدرن‌تر شده است. در این پایان‌نامه ما مدلی پیشنهاد می‌کنیم که به دو محدودیت مرتبط با روش میانگین-واریانس می‌پردازد:

- تصادفی بودن پارامترهای توصیف مدل

- برخی از محدودیت‌های معاملاتی بازار سهام.

چارچوب کلاسیک میانگین-واریانس به دانش کامل در مورد بازده مورد انتظار دارایی‌ها و ماتریس واریانس-کوواریانس متکی است. با این حال، این بازده غیر قابل مشاهده و ناشناخته است. حتی برآورد دقیق آن بسیار پیچیده است. در واقع بسیاری از منابع احتمالی خطاها (به عنوان مثال، عدم امکان جمع‌آوری داده کافی، بی ثباتی داده‌ها و ...) بر برآورد آن‌ها تاثیر می‌گذارد که به آن اصطلاحاً برآورد ریسک در انتخاب پرتفوی می‌گوییم. ترکیب پرتفوی‌های بهینه به میانگین و ماتریس کوواریانس بازده دارایی‌ها بسیار حساس هستند و اختلالات جزئی در زمان بازده‌های تصادفی می‌تواند به ایجاد پرتفوی‌های بسیار متفاوت منجر شود. تصمیم‌گیرندگان اغلب ترجیح می‌دهند که روی برخی از بازده پرتفوی کارآمدتر ایمن که تحت مجموعه گسترده‌ای از درک متغیرهای تصادفی انجام می‌شود، مبادله کنند.

در اینجا تمرکز روی عدم اطمینان مربوط به برآورد بازده مورد انتظار می‌باشد. درواقع یک باور عمومی در میان مدیران پرتفوی وجود دارد که برآورد ریسک پرتفوی ناشی از خطا در برآورد بازده مورد انتظار است و زیاد به خطاهای برآورد ماتریس واریانس-کوواریانس بستگی ندارد. در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که بازده مورد انتظار تصادفی است و با توزیع احتمال مشخص می‌شود. در واقع بازده مورد انتظار از پرتفوی‌ها باید بزرگ‌تر از یک سطح اطمینان بالا باشد. حال نشان می‌دهیم که مسئله مربوط به آن یک

مسئله احتمالی محدود با ماتریس تکنولوژی تصادفی است که می‌تواند به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی (نه لزوماً محدب) فرموله شود. تحت شرایطی بیان می‌کنیم که برای کدام توزیع احتمالی مسئله معادل قطعی محدب است و شکل یک مسئله مخروطی مرتبه دوم می‌گیرد.

دانشمندان چارچوب میانگین-واریانس را در یک زمینه قوی بررسی کرده‌اند. فرض بر این است که بازده مورد انتظار تصادفی است. آن‌ها پارامترهای مبهم در میانگین و ماتریس واریانس-کوواریانس را با انواع خاص (چندجمله‌ای، جعبه و بیضوی) از عدم قطعیت مشخص می‌کنند و برنامه‌های مخروطی مرتبه دوم را طراحی می‌کنند. روش ریسک‌پذیری برای فرمول‌بندی ارزش در معرض ریسک بهینه‌سازی استفاده می‌شود که تنها اطلاعات جزئی درباره توزیع احتمال به ما می‌دهد. معیار عملکردی که در اینجا استفاده می‌شود در چارچوب مارکوویتز قرار دارد که در آن مبادله بین بازده مورد انتظار و واریانس تحلیل می‌شود. معیار ریسک ابتدایی ایمنی روی<sup>۱</sup> [۴۲] است که به عنوان پرتفوی بهینه، احتمال اینکه بازده زیر آستانه مجاز به حداقل برسد را تعیین می‌کند. معیار ریسک روی، که توسط لی<sup>۲</sup> [۲۸] و همکارانش گسترش یافت برای مسائل انتخاب پرتفوی چند هدفه، نزدیک به نسبت شارپ<sup>۳</sup> [۴۵] است که نسبت بازده اضافی به ریسک را به حداکثر می‌رساند. بسیاری از معیارهای ریسک دیگر مانند ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک مشروط، تسلط تصادفی و غیره وجود دارد. معیارهای انتخاب معیار ریسک، موضوعی است که به طور گسترده مورد بحث قرار گرفته است و بر اساس زوایای مختلفی (از جمله همبستگی ریسک، دارایی‌های پرتفوی، خواص تحدب و ردیابی محاسباتی) تحلیل می‌شود. همانطور که می‌دانید با ارائه انواع معیارها و اهداف، هیچ معیار ریسکی قابل توصیه در سطح جهانی وجود ندارد. گزارش بازار سهام، پیچیدگی مسئله انتخاب پرتفوی را تشدید می‌کند. محدودیت‌های تجاری واقعی، مانند حداقل سرمایه‌گذاری در یک دارایی، الزامات خرید دارایی‌ها در بخش‌های بزرگ یا خرید دارایی‌ها در حداقل تعداد صنایع، در مدل‌های واریانس کلاسیک در نظر گرفته نمی‌شوند. در اینجا این الزامات را به ترتیب آستانه خرید، گرد کردن سهم، تنوع محدودیت‌های تجاری در نظر می‌گیریم. مدل‌سازی چنین محدودیت‌هایی شامل معرفی متغیرهای صحیح است و بیشتر به دنبال ردیابی محاسباتی مسائل مرتبط است.

## ۲.۴ فرمول‌بندی مسئله و خواص

### ۱.۲.۴ مدل بهینه‌سازی پرتفوی احتمالی

مدل بهینه‌سازی پرتفوی پیشنهادی به فرم یک مدل بهینه‌سازی مقید احتمالی با ماتریس تکنولوژی تصادفی، می‌باشد. در این قسمت خواننده را برای یک پیش مطالعه درباره محدودیت‌های احتمالی با ماتریس تکنولوژی تصادفی در برنامه‌های مرتبط با مسئله‌های حمل و نقل، به [۲۳] ارجاع می‌دهیم. بردار تصادفی از بازده‌های مورد انتظار  $r$  دارایی ریسکی را با  $\xi$  نشان می‌دهیم،  $\xi$  دارای توزیع  $r$ -متغیر

<sup>۱</sup>Roy's

<sup>۲</sup>Li

<sup>۳</sup>Sharpe

با میانگین برداری:

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)^T, \quad \mu_j = E(\xi_j), \quad j = 1, \dots, r,$$

و ماتریس واریانس-کوواریانس

$$\Sigma = E[(\xi - \mu)(\xi - \mu)^T]$$

است.

محدودیت احتمالی

$$\mathbb{P}(\mu_0 w_0 + \sum_{j=1}^r \xi_j w_j \geq R) \geq p,$$

که در آن ضریب  $\xi$  در متغیرهای تصمیم‌گیری  $w$ ، تصادفی هستند، تضمین می‌کند که بازده مورد انتظار پرتفوی  $\mu_0 w_0 + \sum_{j=1}^r \xi_j w_j$  بالاتر از سطح حداقل مجاز بازده  $R$  با احتمال بالای  $p$ ، که معمولاً در بازه  $[0, 1]$  تعریف می‌شود، است.

نسخه تصادفی مسئله بهینه‌سازی پرتفوی میانگین-واریانس مارکوویتز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{minimize} \quad w^T \Sigma w$$

$$\text{subject to} \quad \mathbb{P}(\mu_0 w_0 + \sum_{j=1}^r \xi_j w_j \geq R) \geq p,$$

(۳.۴)

$$w_0 + \sum_{j=1}^r w_j = 1,$$

$$w \in \mathbb{R}_+^{r+1}.$$

متغیرهای تصمیم توسط بردار  $[r+1]$ -بعدی  $w$ ، از موقعیت پرتفوی مشخص شده است. می‌دانیم که  $w_0$  نسبت سرمایه‌گذاری سرمایه  $K$  در بازار پول با بازده ثابت  $\mu_0$ ،  $j = 1, \dots, r$ ،  $w_j$  نسبت سرمایه‌گذاری سرمایه  $K$  در دارایی ریسکی  $j$  و تابع هدف  $w^T \Sigma w$  واریانس پرتفوی را نشان می‌دهد. در این مدل فرض می‌کنیم که متغیرها مثبت هستند و موقعیت فروش کوتاه مدت را اجازه نمی‌دهند. این محدودیت می‌تواند بدون تاثیر بر ماهیت مسئله برطرف شود.

## ۲.۲.۴ معادل قطعی

ابتدا نشان می‌دهیم که معادل قطعی مدل بهینه‌سازی نمونه احتمالی یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی است. متغیر تصادفی  $\psi = (\xi^T w - \mu^T w)$  را با میانگین صفر و واریانس ۱ تعریف می‌کنیم که به عنوان بازده پرتفوی عادی در نظر گرفته می‌شود. این به این معنی است که:

$$\begin{aligned} P(\xi^T w \geq R) &= P(\psi \geq \frac{R - \mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}) \\ &= 1 - F_{(w)}(\frac{R - \mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}), \end{aligned} \quad (۴.۴)$$

که در آن  $F_{(w)}$  توزیع احتمال تجمعی از بازده پرتفوی است و  $F_{(w)}^{-1}$  معکوس آن است. توجه داشته باشید که فرم دقیق توزیع احتمال  $F$  به دارایی  $w$  در پرتفوی و همچنین میانگین صفر و انحراف استاندارد یک بستگی دارد. بنابراین محدودیت احتمالی (۴.۴) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} 1 - F_{(w)}\left(\frac{R - \mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}\right) &\geq p \\ \Leftrightarrow F_{(w)}\left(\frac{R - \mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}\right) &\leq 1 - p, \\ \Leftrightarrow \mu^T w + F_{(w)}^{-1}(1 - p) \sqrt{w^T \Sigma w} &\geq R; \end{aligned} \quad (5.4)$$

که در آن  $F_{(1-p)}^{-1}$ ،  $-(1-p)$  - چارک از  $F_{(w)}$  است. معادله قطعی (۳.۴) مسئله بهینه‌سازی غیرخطی زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad w^T \Sigma w \\ &\text{subject to} \quad \mu^T w + F_{(w)}^{-1}(1 - p) \sqrt{w^T \Sigma w} \geq R, \\ &\quad \quad \quad w_{\circ} + \sum_{j=1}^r w_j = 1, \\ &\quad \quad \quad w \in \mathbb{R}_+^{r+1}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

مسئله فوق یک مسئله بهینه‌سازی مخروطی مرتبه دوم است (محدب و در زمان چندجمله‌ای قابل حل).

اکنون یک مدل شبکه عصبی برای حل مسأله (۶.۴) بعنوان یک مسأله مخروطی مرتبه دوم ارائه می‌دهیم.

از تحلیل بالا، واضح است که مدل بهینه‌سازی پرتفوی تصادفی مارکوویتز قابل تبدیل به مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دو محدب است. بنابراین، ما فرم کلی از مسائل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دو محدب را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(x) \\ &\text{subject to} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$Ex + d \succeq_{\mathcal{K}} 0, \quad (8.4)$$

$$x \succeq 0. \quad (9.4)$$

وقتیکه  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ، تابع سره بسته محدب،  $E$  یک ماتریس  $m \times n$  با  $m \geq n$ ،  $d$  برداری در  $\mathbb{R}^m$  و  $x \in \mathcal{K}$  یعنی  $x \succeq_{\mathcal{K}} 0$  حاصل ضرب دکارتی از مخروط‌های مرتبه دوم که مخروط‌های لورنتس یا مخروط بستنی هم نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر،

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{m_1} \times \mathcal{K}^{m_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{m_r},$$

که در آن  $m_1 + \dots + m_r = n$  با  $r, m_1, \dots, m_r \geq 1$  و

$$\mathcal{K}^{m_i} := \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i-1} \mid x_1 \geq \|x_2\|\}, \quad (10.4)$$

که در آن  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی و  $\mathcal{K}^1$  مجموعه از  $\mathbb{R}_+$  حقیقی نامنفی است. در قسمت بعد یک مدل شبکه عصبی با عملکرد بالا برای حل مسأله (۷.۴)–(۹.۴) پیشنهاد میکنیم.

### ۳.۲.۴ مدل شبکه عصبی

ما قیود غیرهموار مخروط مرتبه دوم  $x \succeq_{\mathcal{K}^{m_i}}$  را برای  $(i = 1, \dots, r)$  با یک هموار سازی به صورت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\sqrt{\epsilon^2 + \|x_2\|^2} \leq x_1, \quad (11.4)$$

که در آن  $\epsilon$  ثابت کوچکی است که اغلب حدود  $10^{-6}$  انتخاب می‌شود. اغتشاش به دست آمده در قید مخروط مرتبه دوم، باعث می‌شود قیود مسأله (۷.۴)–(۹.۴) محدب و هموار شود. بنابراین مسأله محدب و غیر هموار (۷.۴)–(۹.۴) می‌تواند به یک مسأله بهینه‌سازی محدب هموار معادل به صورت زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad f(x) \\ & \text{subject to} \quad g(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

که در آن  $g(x) \in \mathbb{R}^m$  یک هموار سازی از  $Ex + d \succeq_{\mathcal{K}}$  با روش  $\epsilon$ -اغتشاش است. واضح است که توابع برداری  $g(x)$  محدب و دوبار مشتق پذیر هستند. از می‌دانیم که  $x^* \in \mathbb{R}^n$  یک جواب بهینه از (۱۲.۴) اگر و تنها اگر بردار  $u^* \in \mathbb{R}^m$  وجود داشته باشد به طوری که  $(x^{*T}, u^{*T})^T$  در سیستم  $K.K.T$  زیر صدق کند:

$$\begin{cases} u^* \geq 0, \quad g(x^*) \leq 0, \quad u^{*T} g(x^*) = 0, \\ \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^* = 0. \end{cases} \quad (13.4)$$

$x^*$  را نقطه  $K.K.T$  از (۱۲.۴) و  $u^*$  را بردار ضریب لاگرانژ متناظر با  $x^*$  نامیم. واضح است که  $x^*$  جواب بهینه از (۱۲.۴) است، اگر و تنها اگر  $x^*$  نقطه  $K.K.T$  از (۱۲.۴) باشد. اکنون فرض کنید که  $x(\cdot)$  و  $u(\cdot)$  متغیرهای وابسته به زمان باشند. هدف ما بیان یک ساختار دینامیکی زمان پیوسته است که به نقطه  $K.K.T$  مسأله (۱۲.۴) و دوگان آن هدایت شود. ما مدل شبکه عصبی بازگشتی برای حل (۱۲.۴) و دوگان آن را با معادله دینامیکی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = -(\nabla f(x) + \nabla g(x)^T (u + g(x))^+), \quad (14.4)$$

$$\frac{du}{dt} = (u + g(x))^+ - u, \quad (15.4)$$

با نقطه آغازین  $y_0 = (x_0^T, u_0^T)^T$  که در آن

$$\begin{aligned} (u + g(x))^+ &= ([u_1 + g_1(x)]^+, [u_2 + g_2(x)]^+, \dots, [u_m + g_m(x)]^+)^T, \\ [u_k + g_k(x)]^+ &= \max\{u_k + g_k(x), 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

برای سادگی تعریف می‌کنیم،  $y = (x^T, u^T)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ ،  $D^*$  مجموعه نقاط بهینه از (۱۲.۴) و دوگان آن،

$$\Phi(y) = \begin{bmatrix} -(\nabla f(x) + \nabla g^T(u + g(x))^+) \\ (u + g(x))^+ - u \end{bmatrix}. \quad (۱۶.۴)$$

بنابراین شبکه عصبی (۱۴.۴)–(۱۵.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dy}{dt} = \kappa \Phi(y), \quad (۱۷.۴)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (۱۸.۴)$$

که در آن  $\kappa$  پارامتر اسکالر<sup>۴</sup> است و نرخ همگرایی شبکه عصبی (۱۷.۴)–(۱۸.۴) را نشان می‌دهد. برای سادگی،  $\kappa = ۱$  در نظر می‌گیریم.

## ۴.۲.۴ تحلیل پایداری و همگرایی

در این قسمت پایداری و همگرایی شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۷.۴)–(۱۸.۴) بررسی می‌شود.

**قضیه ۱.۲.۴.** فرض کنید  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ ، نقطه تعادل از شبکه عصبی (۱۷.۴)–(۱۸.۴) باشد. آنگاه  $x^*$  نقطه  $K.K.T$  از مسأله (۱۲.۴)، برعکس اگر  $x^* \in \mathbb{R}^n$  جواب بهینه مسأله (۱۲.۴) باشد، آنگاه بردار  $u^* \in \mathbb{R}^m$  وجود دارد به طوری که  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$  نقطه تعادل از شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۷.۴)–(۱۸.۴) است.

برهان. فرض کنید  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$  نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۷.۴)–(۱۸.۴) باشد، آنگاه

$$\frac{dx^*}{dt} = 0 \text{ و } \frac{du^*}{dt} = 0$$

. در نتیجه

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T(u^* + g(x^*))^+ = 0, \quad (۱۹.۴)$$

$$(u^* + g(x^*))^+ = u^*. \quad (۲۰.۴)$$

همچنین، داریم  $u^* = (u^* + g(x^*))^+$  اگر و تنها اگر

$$u^* \geq 0, \quad g(x^*) \leq 0, \quad u^{*T}g(x^*) = 0. \quad (۲۱.۴)$$

بنابراین، با جایگذاری (۲۰.۴) در (۱۹.۴) داریم

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^* = 0 \quad (۲۲.۴)$$

از (۲۱.۴) و (۲۲.۴)، نتیجه می‌شود که  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$  در شرایط  $K.K.T$  صدق می‌کند و این اثبات را کامل می‌کند.  $\square$

<sup>۴</sup>Scale

لم ۲.۲.۴. نقطه تعادل مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۷.۴) – (۱۸.۴) یکتاست.

برهان. چون مسأله (۱۲.۴) دارای جواب بهینه یکتای  $x^*$  است، شرایط لازم و کافی  $K.K.T$  دارای جواب یکتای  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$  هستند، بنابراین از قضیه (۱.۲.۴) می‌بینیم که نقطه تعادل مدل پیشنهاد شده (۱۸.۴) – (۱۷.۴) در سیستم  $K.K.T$ ، (۱۳.۴) صدق می‌کند. بنابراین نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۸.۴) – (۱۷.۴) یکتاست.  $\square$

لم ۳.۲.۴. برای هر نقطه آغازین  $y(t_0) = (x(t_0)^T, u(t_0)^T)^T$ ، سیستم (۱۸.۴) – (۱۷.۴) دارای جواب یکتای پیوسته  $y(t) = (x(t)^T, u(t)^T)^T$  است.

برهان. چون  $\nabla f(x)$  و  $\nabla g_k(x)$ ،  $(k = 1, \dots, m)$  توابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر روی مجموعه باز  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  هستند، بنابراین  $\nabla f(x) + \nabla g(x)^T (u + g(x))^+ - u$  و لیب شیتز محلی پیوسته روی مجموعه باز  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m+l}$  هستند، با توجه به قضیه .....، شبکه عصبی (۱۸.۴) – (۱۷.۴) دارای جواب یکتای پیوسته  $y(t)$  برای  $t \in [t_0, \tau)$  وقتی  $\tau \rightarrow \infty$  است.  $\square$

لم ۴.۲.۴. ماتریس ژاکوبی  $\nabla \Phi(y)$  از نگاشت  $\Phi$  تعریف شده در (۱۶.۴) نیمه معین منفی است.

برهان. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم  $0 < p < m$  وجود دارد به‌طوری که

$$(u + g)^+ = (u_1 + g_1(x), u_2 + g_2(x), \dots, u_p + g_p(x), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-p})^T \geq 0.$$

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که

$$\nabla \Phi(y) = \begin{bmatrix} -(\nabla^2 f(x) + \sum_{k=1}^p ((u_k + g_k) \nabla^2 g_k(x)) + \nabla g^p(x)^T \nabla g^p(x)) & -\nabla g^p(x)^T \\ \nabla g^p(x) & S_{m \times m} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\nabla g^p(x) = \begin{bmatrix} U_{p \times n} \\ O_{(m-p) \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{p-1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{p-1}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} & \frac{\partial g_2}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_{p-1}} & \frac{\partial g_p}{\partial x_p} & \frac{\partial g_p}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

و  $\nabla^2 g_k(x)$  ماتریس هسین از  $g_k(x)$  است و

$$S_{m \times m} = \begin{bmatrix} O_{p \times p} & O_{p \times (m-p)} \\ O_{(m-p) \times p} & -I_{(m-p) \times (m-p)} \end{bmatrix},$$



که در آن  $O$  ماتریس صفر است. ماتریس  $\nabla g^p(x)^T \nabla g^p(x)$ ، ماتریس نیمه معین مثبت است. چون توابع  $f, g_1, \dots, g_m$  محدب و دوبار مشتق پذیر فرض شده، بنابراین ماتریس های هسین  $\nabla^2 f(x)$  و  $\nabla^2 g_k(x)$  برای  $(k = 1, 2, \dots, p)$ ، ماتریس های نیمه معین مثبت هستند. به علاوه از معین مثبت بودن  $\nabla^2 g_k(x)$  می توان گفت که ماتریس های  $\nabla^2 g_k^p(x)$  نیمه معین مثبت هستند. همچنین واضح است که ماتریس  $S_{m \times m}$ ، نیمه معین منفی است.

طبق توضیحات گفته شده، ما می توانیم نتیجه بگیریم ماتریس ژاکوبی  $\nabla \Phi(y)$ ، نیمه معین منفی است.

اگر  $p = m$  یعنی  $(u + g)^+ = (u_1 + g_1(x), u_2 + g_2(x), \dots, u_m + g_m(x))^T$ ، آنگاه داریم:

$$\nabla \Phi(y) = \begin{bmatrix} -(\nabla^2 f(x) + \sum_{k=1}^m ((u_k + g_k) \nabla^2 g_k(x)) + \nabla g(x)^T \nabla g(x)) & -\nabla g(x)^T \\ \nabla g(x) & O_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

که در آن  $\nabla g(x) = \nabla g^m(x)$  ماتریس ژاکوبی از توابع برداری  $g(x)$  و  $\nabla^2 g_k(x) = \nabla^2 g_k^m(x)$  هسین از  $g_k(x)$  برای  $(k = 1, 2, \dots, m)$  هستند. مشابه حالت قبلی، می توان بسادگی نشان داد که  $\nabla \Phi(y)$  ماتریس نیمه معین منفی است.

سرانجام، اگر  $p = 0$  یعنی  $(u + g)^+ = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m)^T$ ، آنگاه داریم:

$$\nabla \Phi(y) = \begin{bmatrix} -\nabla^2 f(x) & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & -I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

در این حالت هم، می توان نشان داد که  $\nabla \Phi(y)$  ماتریس نیمه معین منفی است، این اثبات را کامل می کند.  $\square$

**قضیه ۵.۲.۴.** مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده در (۱۷.۴)–(۱۸.۴)، پایدار مجانبی به مفهوم لیاپانوف و همگرایی سراسری به  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ ، وقتی  $x^*$  جواب بهینه از (۱۲.۴) است.

برهان. تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$E(y) = \|\Phi(y)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2. \quad (23.4)$$

از (۱۶.۴)، داریم:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \nabla \Phi(y) \Phi(y).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{dE(y(t))}{dt} &= \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^T \Phi + \Phi^T \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) + (y - y^*)^T \frac{dy(t)}{dt} = \\ &= \Phi^T (\nabla \Phi(y)^T + \nabla \Phi(y)) \Phi + (y - y^*)^T \Phi(y). \end{aligned}$$

با بکار بردن لم ۴.۲.۴ داریم:

$$\Phi^T(y) (\nabla \Phi(y)^T + \nabla \Phi(y)) \Phi(y) \leq 0, \quad \forall y \neq y^*. \quad (24.4)$$

با استفاده از قضیه ۱.۲.۴ داریم:

$$(y - y^*)^T (\Phi(y) - \Phi(y^*)) = (y - y^*)^T \Phi(y) \leq 0, \quad \forall y \neq y^*.$$

بنابراین

$$\frac{dE(y(t))}{dt} \leq 0. \quad (25.4)$$

این بدان معنی است که شبکه عصبی (۱۸.۴)–(۱۷.۴)، پایدار مجانبی به مفهوم لیاپانوف است. در ادامه چون

$$E(y) \geq \frac{1}{4} \|y - y^*\|^2, \quad (26.4)$$

زیردنباله‌های همگرای

$$\{(x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T | t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}\},$$

وقتی  $t_k \rightarrow \infty$  از  $k \rightarrow \infty$  وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T = (\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T,$$

وقتی  $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = 0,$$

این نشان می‌دهد که  $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T$ ، یک نقطه  $\omega$ -حدی از  $\{(x(t)^T, u(t)^T)^T | t \geq t_0\}$  است. همچنین می‌دانیم:  $\{(x(t)^T, u(t)^T)^T \rightarrow M\}$  برای  $t \rightarrow \infty$ ، که در آن  $M$  بزرگترین مجموعه ناوردا در  $K = \{(x(t)^T, u(t)^T)^T | \frac{dE(y(t))}{dt} = 0\}$  است. از (۱۷.۴)–(۱۸.۴) و (۲۵.۴) داریم

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dE(y(t))}{dt} = 0.$$

بنابراین  $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T \in D^*$  با  $M \subseteq K \subseteq D^*$ .

با جایگذاری  $x^* = \bar{x}$  و  $u^* = \bar{u}$  در (۲۳.۴)، ما تابع لیاپانوف دیگری به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\bar{E}(y) = \|\Phi(y)\|^2 + \frac{1}{4} \|y - \bar{y}\|^2. \quad (27.4)$$

آنگاه  $\bar{E}(y)$  به‌طور پیوسته مشتق پذیر و  $\bar{E}(\bar{y}) = 0$  از طرفی

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T = (\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T,$$

از اینرو داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{E}(x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T = \bar{E}(\bar{x}, \bar{u}).$$

بنابراین، به ازای هر  $\epsilon > 0$ ،  $q > 0$  وجود دارد به طوری که برای هر  $t \geq t_q$ ، داریم  $\bar{E}(y(t)) < \epsilon$ .  
 مشابه می‌توانیم به دست بیاوریم  $\frac{d\bar{E}(y(t))}{dt} \leq 0$  برای  $t \geq t_q$  داریم،

$$\frac{1}{4} \|y(t) - \bar{y}\|^2 \leq \bar{E}(y(t)) \leq \epsilon.$$

در نتیجه  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \bar{y}\| = 0$  یا  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$ . بنابراین، شبکه عصبی پیشنهاد شده در (۱۷.۴)–(۱۸.۴) همگرایی سراسری به نقطه تعادل  $\bar{y} = (\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T$  است که در آن جواب بهینه از (۱۲.۴) است.  $\square$

ما از قضیه (۵.۲.۴)، گزاره زیر را نتیجه می‌گیریم.

گزاره ۶.۲.۴. اگر  $D^* = \{(x^{*T}, u^{*T})^T\}$ ، آنگاه شبکه عصبی (۱۷.۴)–(۱۸.۴) برای حل کردن (۱۲.۴)، پایدار مجانبی سراسری به نقطه تعادل یکتای  $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$  است.

## ۵.۲.۴ مثال‌های عددی

در این بخش برای روشن شدن مطالب شرح داده شده و به منظور نشان دادن کارایی و تأثیر شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۷.۴)–(۱۸.۴)، ما به ذکر یک مثال از مسأله انتخاب پرتفوی تصادفی مارکوویتز می‌پردازیم. در شبیه‌سازی از دستور *ode45* در نرم افزار *Matlab* استفاده شده و جواب واقعی نیز توسط نرم افزار *Lingo ۱۱* محاسبه شده است.

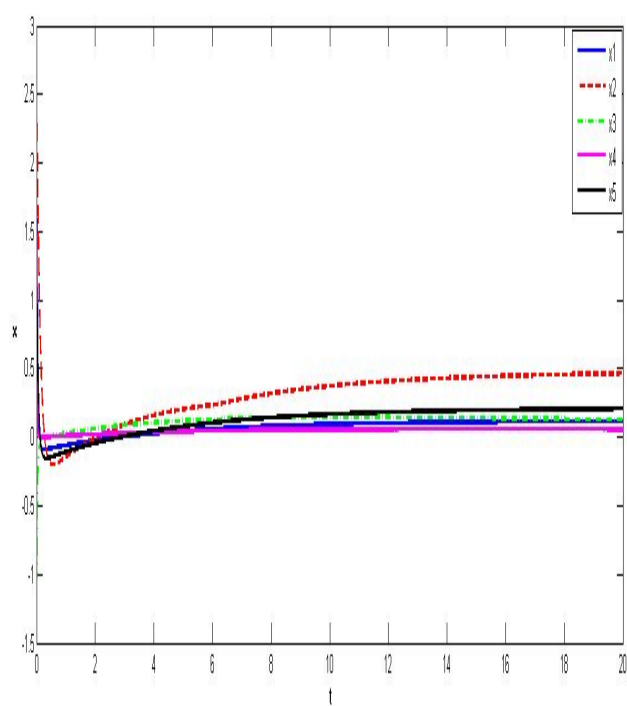
مثال ۷.۲.۴. مسأله انتخاب پرتفوی بهینه تصادفی مارکوویتز ۶.۴ را در نظر بگیرید که در آن:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} ۳۶ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۶ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}, \quad R = ۱۰, \quad w_0 = ۰, \quad p = ۰/۹۹,$$

مدل قطعی آن بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad ۱۶x_1^2 + ۴x_2^2 + ۱۶x_3^2 + ۴۹x_4^2 + ۹x_5^2 \\ &\text{subject to} \quad ۴x_1 + x_2 + ۵x_3 + ۱۰x_4 + ۱/۵x_5 \\ &\quad + ۲/۳۳(\sqrt{۱۶x_1^2 + ۴x_2^2 + ۱۶x_3^2 + ۴۹x_4^2 + ۹x_5^2}) \geq ۱۰, \quad (۲۸.۴) \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۱, \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq ۰. \end{aligned}$$

جواب بهینه مسأله  $x^* = (۰/۱۲, ۰/۴۹, ۰/۱۲, ۰/۰۵, ۰/۲۱)^T$  است. ما برای حل این مسأله شبکه عصبی پیشنهادی (۱۷.۴)–(۱۸.۴) را به کار می‌بریم. مسیرها در شکل ۱۰.۴ نشان داده می‌شود.



شکل ۱.۴: رفتار گذرا شبکه عصبی با ۵۰ نقطه آغازین دلخواه.

## مراجع

- [۱] لحیم گرزاده. ا، و مرادی. ع، (۱۳۹۵)، ”مدیریت پورتنفوی با رویکرد کاربردی” چاپ اول، موسسه آراد کتاب تهران، صفحه ۲۳۵.
- [۲] طالبیان. ب، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد: ”نشدنی بودن ابرکارایی و داده های صفر در DEA”. دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی.
- [3] Arnott, R. D., and Wagner, W. H., (1990), The measurement and control of trading costs. *Financial Analysts Journal*, 46(6), 73-80. Bazaraa, M.S., and Shetty, C.M., (1979), *Nonlinear Programming* (New York: Wiley).
- [4] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M., (1993). ”**Nonlinear Programming Theory and Algorithm**”, 2nd ed., Wiley, New York.
- [5] Bazaraa, M.S., and Shetty, C.M., (1979), *Nonlinear Programming* (New York: Wiley).
- [6] Brennan, M. J., (1975), The optimal number of securities in a risky asset portfolio when there are fixed costs of transaction: theory and some empirical results. *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 10, 483-496.
- [7] Chen, A.H.Y., Jen, F.C., and Zions, S., (1971), The optimal portfolio revision policy. *Journal of Business*, 44, 51-61.
- [8] Chen, Y., Jiao, Y., Gao, X., Leung, K., (2001). ”A new gradient-based neural network for solving linear and quadratic programming problems”, **IEEE Transactions on Neural Networks**, No. 12(5), 1074–1083
- [9] Cheng, L., Hou, Z., Tan, M., (2009). ”A delayed projection neural network for solving linear variational inequalities”, **IEEE Transactions on Neural Networks**, No. 20(6), 915–925.

- 
- [10] Dantzig, G.B., and Infanger, G., (1993), Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization. *Annals of Operations Research*, 45, 59-76.
- [11] Effati, S., Baymani, M., (2005). "A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems", **Applied Mathematics and Computation**, 168, 1370-1379
- [12] Effati, S., Nazemi, A. R. (2006). Neural network models and its application for solving linear and quadratic programming problems, **Applied mathematics and Computation**, 172(1), 305-331.
- [13] Effati, S., Ranjbar, M., (2011). "A novel neural network for solving quadratic programming problems", **Applied Mathematics and Computation**, Model, No. 35(4), 1688-1695.
- [14] Gao, X. B. (2004). A novel neural network for nonlinear convex programming. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 15(3), 613-621.
- [15] Gao, X., Liao, L. Z. (2010). A new one-layer neural network for linear and quadratic programming. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 21(6), 918-929.
- [16] Gennotte, G., and Jung, A., (1994), Investment strategies under transaction costs: the finite horizon case. *Management Science*, 40, 385-404.
- [17] Ghasabi-Oskoei, H., Mahdavi-Amiri, N. (2006). An efficient simplified neural network for solving linear and quadratic programming problems. **Applied Mathematics and Computation**, 175(1), 452-464.
- [18] Ghasabi-Oskoei, H., Malek, A., Ahmadi, A. (2007). Novel artificial neural network with simulation aspects for solving linear and quadratic programming problems. **Computers and Mathematics with Applications**, 53(9), 1439-1454.
- [19] Hopfield, J.J., Tank, D.W., (1985). "Neural computation of decisions in optimization problems", **Biological Cybernetics**, 533-541.
- [20] Hu, X.L., (2009). "Applications of the general projection neural network in solving extended linear-quadratic programming problems with linear constraints", **Neurocomputing**, No. 72, 1131-1137.

- [21] Hu, X., Wang, J. (2008). An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its  $k$ -winners-take-all application. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 19(12), 2022-2031.
- [22] Jacob, N. L., (1974), A limited-diversification portfolio selection model for the small investor. *Journal of Finance*, 29, 847-856.
- [23] Kataoka, S. 1963. A stochastic programming model. *Econometrica* 31(1-2) 181-196.
- [24] Kunzi, H. P., and Krelle, W., (1966), *Nonlinear Programming* (Waltham, Massachusetts: Blaisdell).
- [25] Kennedy, M. P., Chua, L. O. (1988). neural networks for nonlinear programming. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 35(5), 554-562.
- [26] Levy, H. (2006) " **Stochastic dominance: investment decision making under uncertainty**, Vol. 3, Springer, New York, pp 505.
- [27] Li, Z. F., Wang, S. Y., and Deng, X. T. (2000). A linear programming algorithm for optimal portfolio selection with transaction costs. *International Journal of Systems Science*, 31(1), 107-117.
- [28] Li, D., T. F. Chan, W. L. Ng. (1998). Safety-first dynamic portfolio selection. *Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 4 585-600.
- [29] Liu, S., Wang, J. (2006). A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTa application. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 17(6), 1500-1510.
- [30] Liu, Q., Wang, J. (2008). A one-layer recurrent neural network with a discontinuous hard-limiting activation function for quadratic programming. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 19(4), 558-570.
- [31] Liu, Q., Wang, J. (2008, November). A one-layer recurrent neural network for non-smooth convex optimization subject to linear equality constraints. **In International Conference on Neural Information Processing** (1003-1010). Springer Berlin Heidelberg.
- [32] Levy, H., (1978), Equilibrium in an imperfect market: a constraint on the number of securities in the portfolio. *American Economics Rev.*, 68, 643-658.

- [33] Loeb,T.F., (1983), Trading costs: the critical link between investment information and results. *Financial Analysts Journal*, 39(3), 39-44.
- [34] Mao, J. C. T., (1970), Essentials of portfolio diversification strategy. *Journal of Finance*, 25, 1109-1121.
- [35] Markowitz,H., (1952), Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77-91; (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (New York: Wiley); (1987), *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets* (New York: Basil Blackwell).
- [36] Mulvey,J.M., and Vladimirou, H.,(1992), Stochastic network programming for financial planning problems. *Management Science*, 38, 1642-1664.
- [37] Malek, A., Alipour, M. (2007). Numerical solution for linear and quadratic programming problems using a recurrent neural network. **Applied Mathematics and Computation**, 192(1), 27-39.
- [38] Miller, R. K., Michel, A. N., (1981). "Ordinary Differential Equations", **Academic Press, New York**.
- [39] Patel,N.R., and Subrahmanyam, M. G.,(1982), A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs. *Management Science*, 28, 303-314.
- [40] Perold, A. F., (1984), Large-scale portfolio optimization. *Management Science*, 30, 1143-1160.
- [41] Pogue, G. A.,(1970), An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes. *Journal of Finance*, 25, 1005-1028.
- [42] Roy, A. D. (1952). Safety first and the holding assets. *Econometrica* 20 431-449.
- [43] Schreiner, J., and Smith, K.,(1980), The impact of mayday on diversification costs. *Journal of Portfolio Management*, 6, 28-36.
- [44] Schreiner, J., and Smith, K.,(1980), The impact of mayday on diversification costs. *Journal of Portfolio Management*, 6, 28-36.
- [45] Sharpe, W. (1966). Mutual fund performance. *J. Bus.* 39 119-138.



- [46] Sharpe, W. F., (1967), A linear programming algorithm for mutual funds portfolio selection. *Management Science*, 13, 499-510.
- [47] Tank, D., Hopfield, J. J. (1986). Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 33(5), 533-541.
- [48] Tao, Q., Cao, J., Xue, M., Qiao, H. (2001). A high performance neural network for solving nonlinear programming problems with hybrid constraints. **Physics Letters A**, 288(2), 88-94.
- [49] Wu, X., Xia, Y., Li, J., Chen, W., (1996). "A high-performance neural network for solving linear and quadratic programming problems", **IEEE Transactions on Neural Networks**, No. 7(3), 643–651.
- [50] Xia, Y. (1996). A new neural network for solving linear and quadratic programming problems. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 7(6), 1544-1548.
- [51] Xia, Y. (2004). An extended projection neural network for constrained optimization. **Neural Computation**, 16(4), 863-883.
- [52] Xia, Y., Feng, G., Wang, J. (2004). A recurrent neural network with exponential convergence for solving convex quadratic program and related linear piecewise equations. **Neural Networks**, 17(7), 1003-1015.
- [53] Yang, Y., Cao, J., Xu, X., Hu, M., Gao, Y. (2014). A new neural network for solving quadratic programming problems with equality and inequality constraints. **Mathematics and Computers in Simulation** 101, 103-112.
- [54] Yang, Y., Cao, J. (2006). Solving quadratic programming problems by delayed projection neural network. **IEEE Transactions on Neural Networks**, 17(6), 1630-1634.
- [55] Yang, Y., Cao, J. (2008). A feedback neural network for solving convex constraint optimization problems. **Applied Mathematics and Computation**, 201(1), 340-350.
- [56] Yoshimoto, A., (1996), The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs. *Journal of the Operational Research Society of Japan*, 39, 99-117.

- 
- [57] Zhang, Y., Li, Z. (2009). Zhang neural network for online solution of time-varying convex quadratic program subject to time-varying linear-equality constraints. **Physics Letters A**, 373(18), 1639-1643.
- [58] Zhang, S., Constantinides, A. G. (1992). Lagrange programming neural networks. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing**, 39(7), 441-452.
- [59] Zhang, Y., Wang, J. (2002). A dual neural network for convex quadratic programming subject to linear equality and inequality constraints. **Physics Letters A**, 298(4), 271-278.

## **Aabstract**

In this thesis, a numerical method based on neural networks is presented to solve the optimization problems in financial mathematics. To do this, we first write the optimization conditions for the optimization problem. Then we design a neural network with it. We prove that the trust point of the corresponding neural network is the main optimal answer. Prove the basis and global convergence of the proposed model by presenting an appropriate Lipanov function. first, definitions of financial concepts in mathematics and preparatory optimization and neural networks are presented. In the following provide a neural network approach for solving linear programming problems for selecting optimal portfolio with transaction costs and the end, we present an accurate method for solving portfolio optimization problems under random constraints.

Keywords: portfolios, efficient frontier, transaction costs, neural network, random constraints.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Financial Mathematics**

**A mathematical programming scheme for  
optimal portfolio selection with transaction  
costs**

**By: Elham Sadeghi rad**

**Supervisors**

**Dr. Alireza Nazemi**

**Dr. Seyed Mojtaba Mirlohi**

**January 2018**