.

دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه :ریاضی محض

بهترین تقریب روی مجموعه‌های خاص نامحدب وکاربرد آنها

استاد راهنما:
دکترمهدی ایرانمنش

استادمشاور:
دکتر کامران شریفی

توسط:
فاطمه سلیمانی

شهریور ۱۳۸۹

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
به عنوان بخشی از فعالیتهای لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

تـقـد یــم بـــه

روح بلند شهدای گمنام و کلیهٔ اشخاصی که بدون هیچ شهرتی صادقانه در عرصه های مختلف فعالیت می کنند.

به نام خدا

شکر خدای بزرگ به جا می‌آورم که به من توفیق داد تا دورهٔ کارشناسی ارشد را به پایان برسانم. برخود لازم می‌دانم که از استاد ارجمند جناب آقای دکتر مهدی ایران منش که در تمامی مراحل نوشتن این پایان نامه و مقاله ها، به عنوان استاد راهنما بنده را یاری فرمودند، قدردانی نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر کامران شریفی استاد مشاور و تمامی اساتید دانشکدهٔ ریاضی که مفتخر این بودم در دوره کارشناسی و ارشد دانشجوی آنها باشم، تشکر می کنم .

در خاتمه ازپدر و مادر عزیزم به‌خاطرتمام زحماتی که به خاطر بنده متحمل شدند تشکر و قدر دانی می‌نمایم.

فاطمه سلیمانی
شهریور۸۹

مقالات مستخرج ازپایان نامه

[1] M. Iranmanesh, F. Solimany. "I_m-Quasi upward sets, with their best approximations" *J. Numerical functional analysis and optimization* . Accepted August 2010 .
[۲] M. Iranmanesh, F. Solimany. " M-Quasi downward sets and their best approximations in direct sum space " 3th Matamatices Annual Natioal Conference of PNU 19-20 May 2010, Mashhad.

[3] ایرانمنش م، سلیمانی ف، " بهترین تقریب روی مجموعه های خاص نامحدب " ، چهل ویکمین کنفرانس ریاضی ، ارومیه. شهریور ۱۳۸۹.
[4] مولایی م ، سلیمانی ف، " بهترین تقریب توسط مجموعه های ستاره گون " ، سومین همایش ملی ریاضی، مشهد.اردیبهشت ۱۳۸۹ .

مقدمه

بهترین تقریب همواره نقش مهمی دربخش های مختلفی از ریاضیات ازجمله بهینه سازی واقتصاد و..ایفا می کند. در این زمینه اگرچه بحث بهترین تقریب به وسیله عناصرمجموعه های محدب در فضاهای نرمدار کاربرد زیاد و مهمی در ریاضیات و دیگرعلوم داشته است، اما گاهی اوقات محدب بودن از شرایط محدود کننده مسئله می باشد. لذا محققان به دنبال شرایطی هستند که بتوانند قضایا ومسائل مطرح شده دربحث بهترین تقریب روی مجموعه های محدب را به نوعی روی مجموعه های نامحدب تعمیم وگسترش دهند. دراین راستا ابتدا افرادی چون Rubinov,Singer به معرفی مجموعه های دانوارد و آپوارد درفضای R^n پرداختند و درسالهای بعد دکتر محبی این مجموعه هارا درفضای لاتیس مطرح ساخت. ما در این پایان نامه ابتدا به گوشه هایی ازاین اقدامات انجام شده خواهیم پرداخت.

این پایان نامه دارای چهار فصل می باشد. فصل اول شامل مقدماتی ازمباحث اساسی از آنالیز وجبرخطی وتعاریف ابتدایی بهترین تقریب می باشد. درفصل دوم معرفی مجموعه های دانوارد و مشخصه های آن و بررسی پروکسیمینال بودن این مجموعه‌ها را مورد مطالعه قرار دادیم. درفصل سوم بحث مجموعه های نرمال و پوسته دانوارد رامطرح می سازیم و کاربردی از مجموعه های فوق رابیان می کنیم.

درفصل چهارم به بحث بهترین تقریب روی مجموعه های دانوارد در فضای R^n می پردازیم و دراین فضا مجموعه های جدید نامحدبی را معرفی می کنیم که به نوعی قابلیت تبدیل شدن به مجموعه فوق را دارا هستند و به کمک نگاشت های حافظ نرم از این بحث به نوعی در یافتن بهترین تقریب مجموعه های خاص در فضای لاتیس که توسط نگاشت های حافظ نرم به این مجموعه ها نگاشته می شوند استفاده خواهیم کرد.

چکیـده

بحث بهترین تقریب درسالهای اخیر به طور گسترده ای در بخش های مختلف ریاضی‌ازجمله مسائل بهینه سازی ,عددی وحتی برنامه نویسی به کاربرده می شود.مثال ساده و شهودی آن بحث یافتن نقاطی ازیک مجموعه که نسبت به نقطه ای در همان فضا دارای کمترین فاصله باشند که کاربردهای زیادی در زندگی وبه خصوص مسائل اقتصادی به همراه داشته است.

هدف اصلی مادر این پایان نامه ابتدا معرفی مجموعه های خاص در فضای لاتیس می باشد که‌دارای این ویژگی اند، که لزوماً مجموعه های محدبی نیستند. سپس شرایطی که تحت آنها نقاطی از این مجموعه، به عضویت مجموعه نقاط بهترین تقریب در می آیند را موردمطالعه قرار می دهیم. در ادامه به زیر مجموعه‌های خاصی ازاین مجموعه ها و ارتباط بین آنهامی پردازیم. همچنین اشاره ای به کاربرد این مجموعه ها به منظور نشان دادن پروکسیمینال بودن برخی مجموعه های بسته در این فضاخواهیم داشت. بحث بهترین تقریب همزمان این مجموعه رانیز مورد مطالعه قرار می دهیم . درپایان نیز از نتایج بدست آمده برای بهترین تقریب مجموعه های جدید وارائه راهکاراستفاده خواهیم کرد .

کلمات کلیدی: مجموعه پروکسیمینال ، بهترین تقریب، مجموعه دانوارد، فضای لاتیس .

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی

این بخش شامل دو قسمت اساسی، مقدماتی راجع به، آنالیز حقیقی ، بحث بهترین تقریب می باشد. اما چون انتظار می رود خواننده با آنها آشنایی داشته باشد، از بیان جزئیات و اثبات آنها خودداری می‌کنیم. مطالب این بخش از مراجع [۹]، [۱۸] و [۱۹] گرفته شده است.

تعریف. ۱ .۱ .۱ فرض کنید S یک مجموعه دلخواه باشد. یک ترتیب بر S رابطه ای است مانند $\leq$ که درشرایط زیر صدق کند:

۱) انعکاسی (برای هر $x \in S$، $x \leq x$ $x \in S$)

۲) پادمتقارن (به‌ازای هر $x, y \in S$، $x \leq y\ , y \leq x \Rightarrow y = x$)

۳) متعدی (به‌ازای هر $x, z, y \in S$، $x \leq y\ , y \leq z\ \Rightarrow x \leq z$)

تعریف. ۱ .۱ .۲ مجموعه S را یک مجموعه مرتب می نامیم در صورتیکه بر روی S یک ترتیب مانند $\leq$ تعریف شده باشد.

فضای نرمدار

تعریف. ۱. ۳.۱ فرض کنید $(X,+)$ یک گروه آبلی باشد و برای هر عدد حقیقی λ و هر $x \in X$، $\lambda x \in X$. در اینصورت X را یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی گوییم هرگاه، برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda, \mu \in R$،

۱) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

۲) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

۳) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

۴) $1x = x$؛

تعریف. ۱. ۴.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ را یک نرم روی X نامیم هرگاه:

۱) به‌ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$؛

۲) $\|x\| = 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۳) به‌ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۴) به‌ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را فضای برداری نرم دار می‌نامیم و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نمایش می‌دهیم.

مثال . ۱. ۱.۱ فرض کنیم R^n فضای تمام n تایی های مرتب ازاعداد حقیقی باشد دراین صورت $\| x \| = \max_{i \in I} | x_i |$ یک نرم روی R^n می باشد

فرض کنید X فضای نرمدار باشد. در این صورت ما از نماد های زیر در طول این پایان نامه استفاده می کنیم :

$$x^+ = \max(x, 0)\ ,\ \ x^- = -\min(x, 0)$$

$$| x |= \sup\{x, -x\}$$

همچنین بدیهی است که $x = x^+ - x^-$

تعریف. ۱ . ۱ .۵ یک دنباله مانند x_n از فضای نرمدار X همگرا به نقطهx گفته می شود در صورتیکه :

$$\forall \varepsilon \geq \circ \quad \exists N_\circ \in N \ \forall n \in N \ n \geq N_\circ \Rightarrow \ \| x_n - x \| \leq \varepsilon$$

که ما آن را به صورت $x_n \to x$ نمایش می دهیم.

تعریف. ۱ . ۱ .٦ فضای برداری $(X, \| \cdot \|)$ را فضای باناخ گوییم، هرگاه $\| \cdot \|$ یک نرم کامل روی X باشد. یعنی نسبت به متر $d(x, y) = \|x - y\|$، هر دنبالهٔ کوشی در X همگرا باشد.

تعریف. ۱ . ۱ .۷ یک زیر مجموعه مانند K از فضای نرمدارX را بسته می نامیم اگر به ازای هر $x_n \in K$ به قسمی که $x_n \to x$ آنگاه$x \in K$. به عبارت دیگر K شامل تمام نقاط حدی خود باشد.

یک زیر مجموعه مانند A باز نامیده می شود درصورتیکه متمم آن یک مجموعه بسته باشد.

تذکر. ۱ . ۱ .۱ ما در این پایان نامه ازنمادهای $bdA, A^- \ , \ A^\circ$ به ترتیب برای درون و بستارو نقاط مرزی مجموعه A استفاده خواهیم کرد.

تعریف. ۱ . ۱ .۸ یک مجموعه مانند $A \subseteq X$ را همبند می نامیم، در صورتیکهA به صورت اجتماع دو مجموعه از هم جدا نباشد. (دو مجموعهB, C را در فضای نرمداری X از هم جدا گوییم هرگاه $B^- \cap C = \phi$ و $C^- \cap B = \phi$.)

تعریف. ۱ . ۱ .۹ یک زیر مجموعه غیر تهی مانند K را مخروط می نامند در صورتیکه برای هر دونقطه دلخواه $x, y \in K$ و هر $\alpha, \beta \geq \circ$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in K$.

یک زیر مجموعه غیر تهی مانند A را محدب می نامند در صورتیکه برای هر دونقطه

دلخواه $x,y \in A$ و هر $0 \leq \beta \leq 1$ داشته باشیم $(1-\beta)x+\beta y \in A$.(یک مجموعه را نامحدب می گوییم در صورتیکه محدب نباشد).

توابع پیوسته –صعودی –خطی

تعریف. ۱.۱.۱۰ فرض کنیم $(X, \|\ .\ \|_1), (Y, \|\ .\ \|_2)$ دو فضای نرمدار باشند. و f یک نگاشت ازX به Y باشد. گوییم f یک نگاشت پیوسته است در صورتیکه برای هر $\varepsilon \geq 0$ وجود داشته باشد یک $\delta \geq 0$ به طوریکه :

$$\| y-x \|_1 \leq \delta \Rightarrow \| f(y)-f(x) \|_2 \leq \varepsilon$$

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. تابع دو سویی $f : X \to Y$ را هومئومرفیسم گوییم، هرگاه f و تابع معکوس آن $f^{-1} : Y \to X$ هر دو پیوسته باشند.

تعریف. ۱.۱.۱۱ فرض کنیم $(X, \|\ .\ \|_1), (Y, \|\ .\ \|_2)$ دو فضای نرمدارباشند. نگاشت $f : X \to Y$ را یک نگاشت لیپ شیتز گوییم هر گاه ثابتی مانند $M > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر$x,y \in X$ داشته باشیم:

$$\| f(y)-f(x) \|_2 \leq M \| y-x \|_1$$

تعریف. ۱.۱.۱۲ نگاشت $f : X \to Y$ را یک نگاشت صعودی گوییم هرگاه :

$$\forall\, x,y \in X \quad x \leq y \quad \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

نگاشت صعودی f رایک نگاشت همگن جمعی گوییم درصورتیکه دارای ویژگی زیر باشد :

$$\forall \lambda \in R \,, 1 \in X \quad f(x+\lambda 1) = f(x)+\lambda$$

تعریف. ۱ . ۱ .۱۳ یک تبدیل خطی از فضای برداری V به توی فضای برداری V_1، نگاشتی است مانند $f : V \to V_1$ به طوری که به ازای هر $x, y \in V$ و جمیع اسکالرهای β و α،

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

در حالت خاص که V_1 میدان اسکالرهاست، f یک تابعک خطی نام دارد.
فضای دوگان یک فضای برداری توپولوژیک مانند X، عبارت است از فضای برداری X^*، که اعضای آن تابعکهای خطی و پیوسته روی X می باشند.

تعریف. ۱ . ۱ .۱۴ به ازای هر زیرمجموعه مانند A قطب آن مجموعه را به صورت زیر تعریف می کنند :

$$A^{\cdot} = \{f \in X^* : f(a) \leq 0 \ \forall a \in A \ \}$$

۱.۱.۱ بهترین تقریب

تعریف. ۱ . ۱ .۱۵ فرض کنیم $(X, \| \ . \ \|)$ یک فضای نرمدار باشد و $y \in X$ یک نقطه دلخواه باشد دراین صورت تابع $d : X \times X \to R$ با ضابطه $d(x,y) = \| y - x \|$ را تابع فاصله می گویند.
به ازای هر زیر مجموعه غیرتهی مانند G از X فاصله تا نقطه x را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$d(x, G) = \inf_{g \in G} \ d(x, g)$$

البته از نماد $d_G(x)$ نیز استفاده می شود. .

قضیه. ۱ . ۱ .۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد دراین صورت :

$$\forall \ \ z, x, y \in X \quad d(x + y, z + y) = d(x, z),$$

$$\forall \ \ \alpha \in R \qquad d(\alpha x, \alpha y) = \mid \alpha \mid d(x, y).$$

تعریف. ۱. ۱. ۱۶ فرض کنیم $G \subseteq X$ و $x \in X$ عنصر $g_\circ \in G$ را بهترین تقریب G از نقطه x گوییم در صورتیکه :

$$d(x, g_\circ) = d(x, G)$$

مجموعه تمام عناصر بهترین تقریب G از x را با نماد $P_G(x)$ نشان می دهیم به عبارت دیگر:

$$P_G(x) = \{g' \in G : \quad d(x, g') = d(x, G)\}$$

تعریف. ۱. ۱. ۱۷ یک زیر مجموعه غیر تهی مانند G از X را یک مجموعه پروکسیمینال می نامند در صورتیکه به ازای $x \in X$ مجموعه $P_G(x) \neq \phi$ باشد.

درصورتیکه $P_G(x)$ شامل تنها یک نقطه باشد مجموعه G را چبیشیف می گویند.

قضیه. ۱. ۱. ۲ فرض کنیم $G \subseteq X$ دراین صورت :

$$\forall \;\; x, y \in X \;\; P_{G+y}(x+y) = P_G(x) + y,$$

$$\forall \;\; \alpha \in R \qquad P_{\alpha G}(\alpha x) = \mid \alpha \mid P_G(x),$$

که در آن $G + y$ و αG به صورت زیر تعریف می شوند:

$$G + y = \{g + y : g \in G\},$$

$$\alpha G = \{\alpha g : g \in G\}.$$

برهان . مرجع [٦] را ملاحظه کنید. □

نتیجه . ۱. ۱. ۱

۱) مجموعه $G \subseteq X$ پروکسیمینال است اگر وتنها اگر به ازای هر $y \in X$، $G + y$ پروکسیمینال باشد.

۲) مجموعه $G \subseteq X$ پروکسیمینال است اگر وتنها اگر به ازای هر $\alpha \in R$، αG پروکسیمینال باشد.

قضیه. ۱ . ۱ .۳ فرض کنیم $G \subseteq X$ یک مجموعه پروکسیمینال باشد دراین صورت G یک مجموعه بسته می باشد .

برهان . مرجع [٦] را ملاحظه کنید. □

تذکر. ۱ . ۱ .۲ عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست. (مرجع [٦] را ملاحظه کنید)

قضیه. ۱ . ۱ .۴ فرض کنیم $G \subseteq X$ یک مجموعه فشرده باشد، دراین صورت G یک مجموعه پروکسیمینال می باشد.

برهان . مرجع [٦] را ملاحظه کنید. □

قضیه. ۱ . ۱ .۵ هرزیر مجموعه بسته مانند G از زیر فضای متناهی البعد از فضای نرمدار X، یک مجموعه پروکسیمینال می باشد.

برهان . فرض کنیم $x \in X \backslash G$ و $r_\circ = d(x,G)$ اگر $r \geq r_\circ$ پس وجود دارد یک $y \in G$ به طوریکه $\| y - x \| \leq r$ بنابراین $y \in B(x,r) \cap G$ لذا $B(x,r) \cap G \neq \phi$ حال $B_n = B^-(x, r_\circ + \frac{1}{n}) \cap G$ را در نظر بگیریم بدیهی است که $B_{n+1} \subseteq B_n$ و B_n ها مجموعه های فشرده می باشند لذا وجود دارد یک $y_\circ \in G$ به طوریکه $y_\circ \in \cap B_n$ اما $\| y_\circ - x \| \leq r_\circ + \frac{1}{n}$ از طرفی $r_\circ = d(x,G)$ و داریم $\| y_\circ - x \| = r_\circ$ لذا $y_\circ$ یک نقطه تقریب برای مجموعه G می باشد .در نتیجه G پروکسیمینال می باشد. □

فصل ۲

بهترین تقریب روی مجموعه های دانوارد

پس از آن که مجموعه های دانوارد برای اولین بار توسط ربینو[1] وسینگر[2] در فضای R^n معرفی شدند، دکتر محبی این مفهوم را درفضاهای لاتیس مطرح ساخت . معرفی مجموعه های دانوارد، مشخصه های این مجموعه ها و تقریبشان در فضاهای لاتیس دار بحث اصلی این فصل خواهد بود. لازم به ذکر است که تعاریف و نتایج ارائه شده در این فصل، درفصل های بعدی نقش اساسی ایفا می‌کنند.

تمامی تعاریف، تذکرها، لم و قضایای ارائه شده در این فصل از مراجع[۱۱ ،۱۰ ،۴ ،۱] گرفته شده است.

---

[1] Rubinove

[2] Singer

۱.۲ مقدمات

فرض کنید X فضای مرتبی باشد دراین صورت فضای X را یک فضای لاتیس می گویند، در صورتیکه به ازای هر دو عنصر دلخواهx, y متعلق به X مقادیر $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ نیز موجود باشد.

مثال . ۲. ۱.۱ فضای اقلیدسی R^n با ترتیب استاندارد.

مثال . ۲. ۱.۲ فرض کنید X فضای تمام توابع حقیقی کراندار روی مجموعهS باشد. رابطه ترتیبی با توجه به مرجع [۵] به صورت زیرروی فضای X در نظر گرفته می شود :

$$f < g \ \ \forall f, g \ \in X \quad \Leftrightarrow \ f(s) < g(s) \ \forall s \in S$$

آشکار است که به ازای هر x مقادیر $Q(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$, $\phi(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ حقیقی اند. لذا توابع ϕ, Q حقیقی کراندار هستند . بنابراین فضای X مثالی از فضای لاتیس می باشد.

تعریف. ۲. ۱.۱ عنصر$X \in ۱$ را یک عنصر یکه نامند. درصورتیکه برای هر$x \in X$ وجود داشته باشد یک $۰ < \lambda \in R$ به طوریکه $x \leq \lambda.۱$

درمثال (۲. ۱.۱) عنصر یکه را معمولاً $(۱, ..., ۱, ۱) = ۱$ در نظر می گیرند. درمثال (۲. ۱.۲) می توان عنصر یکه فضای X را تابع ثابت یک در نظر گرفت.

فرض کنیم X یک فضای لاتیس با عنصر یکه قوی باشد. دراین صورت می توان یک نرم را با توجه به عنصر یکه به صورت زیر روی فضای X تعریف کنیم:

$$\| x \| = \inf\{\lambda \geq ۰ : | x | \leq \lambda ۱\} \qquad (۲.۱)$$

آشکارا است که $\mid x \mid \leq \mid y \mid \Rightarrow \parallel x \parallel \leq \parallel y \parallel$

با توجه به نرم فوق گوی باز به مرکزx وشعاع r را می توان به صورت زیر در نظر گرفت :

$$B(x,r) = \{y \in X : \parallel y - x \parallel \leq r\}$$

$$B(x,r) = \{y \in X : \quad -r\mathbf{1} \leq y - x \leq r\mathbf{1}\} \tag{۲.۲}$$

نتیجه . ۲. ۱.۱ فرض کنیم $x, y \in X$ دراین صورت وجود دارد یک $\alpha > 0$ و $\beta < 0$ به قسمی که :

$$y \leq x + \alpha\mathbf{1}, \qquad x + \beta\mathbf{1} \leq y$$

برهان . فرض کنیم $\parallel x \parallel = r$ در این صورت بنا به تعریف نرم داریم :

$$\mid x - y \mid \leq \parallel x \parallel \mathbf{1} = r\mathbf{1}$$

که این ایجاب می کند $-r\mathbf{1} \leq y - x \leq r\mathbf{1}$ ، با قرار دادن $\beta = -r$ و $\alpha = r$ حکم ثابت می شود. □

تذکر. ۲. ۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. و $K \subseteq X$ یک مخروط بسته باشد به طوریکه $K \bigcap -K = \{0\}$ و $intK \neq \phi$. در این صورت به کمک K می توان X را به فضای مرتبی تبدیل نمود. در واقع یک رابطه ترتیبی به صورت زیر رویX به وسیلهK تعریف می کنیم :

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

وجود این رابطه نه تنها سبب ایجاد فصل جدیدی در باب تقریب شده، بلکه در بحث نقاط ثابت و فضاهای مخروطی نیز باعث ایجاد ایده ها و نوشتن مقالات زیادی شده است. (رجوع شود به[۱۰])

۱.۱.۲ دانواردها و مشخصه های آن

قبل از آنکه به بحث اصلی بپردازیم. به دلیل اهمیت و کاربرد بحث بهترین تقریب روی مجموعه های محدب درفضای لاتیس به این موضوع اشاره می کنیم

قضیه. ۲. ۱.۱ فرض کنیم $A \subseteq X$ یک مجموعه محدب و بسته باشد . $x \in X \backslash A$ دراین صورت عبارات زیر معادل هستند .

۱) $a_{\circ} \in P_A(x)$

۲) یک $f \in (A - a_{\circ})^{\cdot}$ وجود دارد به طوریکه:

$$\| f \| = 1$$

و

$$f(x - a_{\circ}) = \| x - a_{\circ} \|$$

برهان . (رجوع شود به[۱۴]). □

تعریف. ۲. ۱.۲ فرض کنیم X یک فضای لاتیس با عنصر یکه باشد. $W \subseteq X$ را یک مجموعه دانوارد [۳] می گوییم درصورتیکه:

$$\forall\, w \in W \;, x \in X \quad x \leq w \Rightarrow x \in W$$

مثال . ۲. ۱.۳ فرض کنیم $X = R^2$ در این صورت مجموعهW، که

$W = \{(x, y) \in R^2 : x \leq 1, y \leq 1\}$ دانوارد می باشد.

گزاره. ۲. ۱.۱ فرض کنیم g یک تابع صعودی حقیقی مقدار روی فضای X باشد در این صورت مجموعه $G = \{x \in X : g(x) \leq \circ\}$ دانوارد است. و برعکس به ازای هر مجموعه دانوارد مانند $G \subseteq X$ تابع صعودی مانند $g : X \to R$ وجود دارد به طوریکه $G = \{x \in X : g(x) \leq \circ\}$.

---

[۳] Downward

برهان . اثبات اینکه G دانوارد است ، بدیهی می باشد. اثبات عکس آن. تعریف می کنیم $g(x) = \min\{\beta \in R : x - \beta 1 \in G\}$. اولاً نشان می دهیم g تابع صعودی می باشد. لذا فرض کنیم $x \leq x'$ پس برای هرβ داریم $x - \beta 1 \leq x' - \beta 1$ از اینکه $x' - \beta 1 \in G$ و G دانوارد است لذا $x - \beta 1 \in G$ بنابراین $g(x) \leq g(x')$ وحکم ثابت می شود. ثانیاً نشان می دهیم $G = \{x \in X : g(x) \leq 0\}$. فرض کنیم $x \in G$ دراین صورت $x - 0.1 \in G$ لذا $g(x) \leq 0$ بنابراین $G \subseteq \{x \in X : g(x) \leq 0\}$. حال نشان می دهیم اگر $x \notin G$ آنگاه $g(x) > 0$ برهان. فرض کنیم این طور نباشد، به عبارت دیگر $g(x) \leq 0$. در این صورت بنا به تعریف تابع g داریم $x - g(x)1 \in G$ از طرفی $x \leq x - g(x)1$ وچون G دانوارد است لذا $x \in G$ که این متناقض است با فرض $x \notin G$. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. $\square$

گزاره. ۲. ۱. ۲ اگر$W \subseteq X$ یک مجموعه دانوارد باشد و $x \in X$ آنگاه عبارات زیر درست هستند:

۱) اگر $x \in W$ آنگاه برای هر $\varepsilon \geq 0$, $\quad x - \varepsilon 1 \in intW$

۲) $intW = \{x \in X : x + \varepsilon 1 \in W \quad ,\varepsilon \geq 0$ به ازای یک $\}$

برهان . فرض کنیم $\varepsilon \geq 0$ داده شده باشد و $x \in W$ در این صورت قرار می دهیم $V = \{y \in X : \| y - (x - \varepsilon 1) \| \leq \varepsilon\}$ که یک همسایگی حول نقطه$(x - \varepsilon 1)$ است. حال بنا به تعریف گوی (۲.۲) داریم

$$V = \{y \in X \quad x - 2\varepsilon 1 \leq y \leq x\}$$

ازاینکه $x \in W$ وW یک مجموعه دانوارد می باشد، نتیجه می شود $y \in W$ و لذا $V \subseteq W$ پس $x - \varepsilon 1 \in intW$.

(۲) فرض کنیم $x \in intW$ لذا وجود دارد یک $\varepsilon \geq 0$ به طوریکه $B(x,\varepsilon) \subseteq W$ بنابراین بنا به تعریف گوی (۲.۲) داریم $x + \varepsilon 1 \in W$. برعکس فرض کنیم وجود داشته باشد $\varepsilon \geq 0$ به طوریکه $x + \varepsilon 1 \in W$ بنا به قسمت اول $x = x + \varepsilon 1 - \varepsilon 1 \in intW$. □

نتیجه . ۲. ۱.۲ اگر $W \subseteq X$ یک مجموعه دانوارد باشد. آنگاه $w \in bdW$ اگر وتنها اگر برای هر $\lambda > 0$، $w + \lambda 1 \notin W$

تابع جفت ساز

تابع $\phi : X \times X \to R$ با ضابطه زیر رادر نظر بگیرید

$$\forall x,y \in X \qquad \phi(x,y) = \sup\{\lambda \in R : \lambda.1 \leq x + y\} \tag{۲.۳}$$

باتوجه به تعریف نگاشت می توان خواص زیر را برای ϕ برشمرد.

۱) $\forall x,y \in X \qquad -\infty \leq \phi(x,y) \leq \| x + y \|$

۲) $\phi(x,y).1 \leq x + y$

۳) $\phi(x,y) = \phi(y,x)$

۴) $\phi(x,-x) = 0$

۵) تابع ϕ یک تابع همگن جمعی می باشد.

برهان . فرض کنیم y یک مقدارثابت باشد. ابتدا نشان می دهیم این تابع صعودی است .برای این منظور اگر $z > x$ دراین صورت $x + y < z + y$ حال اگر $\lambda = \phi(x,y)$ در این صورت $\lambda.1 \leq x + y < z + y$ لذا $\phi(x,y) \leq \phi(z,y)$. حال نشان می دهیم $\phi(x + \beta 1, y) = \phi(x,y) + \beta$ بنا به تعریف تابع ϕ خواهیم داشت :

$$\phi(x+\beta.1,y)=\sup\{\lambda\in R:\ \ \lambda.1\leq x+\beta.1+y\ \}$$

$$=\sup\{\lambda\in R:\lambda.1-\beta.1\leq x+y\}$$

$$=\sup\{\lambda\in R:(\lambda-\beta).1\leq x+y\}$$

$$=\sup\{\alpha+\beta\in R:\alpha.1<x+y\}$$

$$=\sup\{\alpha\in R:\alpha 1\leq x+y\}+\beta$$

$$=\phi(x,y)+\beta$$

□

قضیه. ۲. ۱. ۲ تابع ϕ یک تابع پیوسته می باشد. □

برهان . فرض کنیم y یک مقدارثابت باشد و x عضو دلخواه متعلق به X باشد با توجه به تعریف نرم داریم $\|x-z\|.1\ |\leq| x-z\ |$ بنابراین

$$-\parallel x-z\parallel .1\leq x-z\leq\parallel x-z\parallel .1$$

$$z-\parallel x-z\parallel .1\ \leq x\leq z+\parallel x-z\parallel .1$$

$$\Rightarrow\phi(z-\parallel x-z\parallel .1,y)\leq\phi(x,y)\leq\phi(z+\parallel x-z\parallel .1,y)$$

از طرفی بنا به ویژگی (۵) داریم $\phi(z+\parallel x-z\parallel .1,y)=\phi(z,y)+\parallel x-z\parallel$ بنابراین $|\ \phi(z,y)-\phi(x,y)\ |\leq\parallel x-z\parallel$ پس ϕ یک تابع لیپشتیز ولذا پیوسته می باشد. □

قضیه. ۳. ۱. ۲ فرض کنیم $W\subseteq X$ و ϕ همان نگاشت تعریف شده با ضابطه (۳.۲) باشد در این صورت عبارات زیر معادل هستند:

۱) W یک مجموعه دانوارد است

۲) برای هر $x\in X\backslash W$ وهر $w\in W$, $\phi(w,-x)\leq 0$

۳) برای هر $x \in X\backslash W$ وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه :

$$\phi(w,l) \leq \circ \leq \phi(x,l)$$

برهان . (۲ $\rightarrow$ ۱) فرض کنیم W یک مجموعه دانوارد باشد و وجود داشته باشد یک $x \in X\backslash W$ و $w \in W$ به طوریکه $\phi(w,-x) > \circ$ بنا به تعریف نگاشت (۳.۲) داریم $x - w \leq ۱.(\phi(w,-x) \leq \circ$ لذا $w \geq x$ ازطرفی طبق فرض W یک مجموعه دانوارد است لذا $x \in W$ ، که این متناقض است با انتخابx ولذافرض خلف باطل ورابطه (۲) برقراراست .

(۳ $\rightarrow$ ۲)فرض کنیم رابطه (۲) برقرار باشد و $x \in X\backslash W$ یک نقطه دلخواه باشد. قرار می دهیم $l = -x$ پس طبق فرض و بنا به ویژگی (۴) تابع ϕ داریم

$$\phi(w,l) = \phi(w,-x) \leq \circ \leq \phi(x,-x) = \phi(x,l)$$

(۱ $\rightarrow$ ۳) فرض کنیم رابطه (۳) برقرار باشد. ولی W یک مجموعه دانوارد نباشد. پس وجود دارد $w' \in W$ ، $x_\circ \in X$ به طوریکه $x_\circ < w'$ و $x_\circ \notin W$. طبق فرض به ازای هر $x \in X$ وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه $\phi(w',l) \leq \circ \leq \phi(x_\circ,l)$، اما بنا به ویژگی (۵) تابع ϕ داریم $\phi(w',l) > \circ \geq \phi(x_\circ,l) \geq \circ$ که این رابطه غیرممکن است لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود. $\square$

قضیه. ۲. ۱. ۴ فرض کنیم $W \subseteq X$ و ϕ همان نگاشت تعریف شده‌با ضابطه (۳.۲) باشد در این صورت عبارات زیر معادل هستند:

۱) W یک مجموعه بسته و دانوارد است .

۲) W یک مجموعه دانوارد است و برای هر $x \in X$

مجموعه$H = \{\lambda \in R : x + \lambda.۱ \in W\}$ یک مجموعه بسته در R می باشد.

۳) برای هر $x \in X\backslash W$ وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه :

$$\phi(w,l) < 0 \leq \phi(x,l)$$

۴) برای هر $x \in X\backslash W$ وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه :

$$\sup_{w\in W} \phi(w,l) < \phi(x,l)$$

برهان . $(2 \to 1)$ فرض کنیم W یک مجموعه بسته و دانوارد باشد وفرض کنیم $\lambda_k \to \lambda$ دنباله ای از R باشد به طوریکه: $x + \lambda_k.1 \in W$ نشان می دهیم $\lambda \in H$.

$$\| x + \lambda_k.1 - (x + \lambda.1) \| = \| (\lambda_k - \lambda).1 \| = | \lambda_k - \lambda | \to 0$$

لذا دنباله $x + \lambda_k.1 \to x + \lambda.1$ و چون $x + \lambda_k.1 \in W$ و W یک مجموعه بسته ای هست لذا شامل نقاط حدی خود می باشد $x + \lambda.1 \in W$ بنابراین $\lambda \in H$ و حکم ثابت می شود.

$(3 \to 2)$ فرض کنیم رابطه (۲) برقرار باشد . و $x \in X - W$ یک نقطه دلخواه باشد ابتدا نشان می دهیم وجود دارد یک $\lambda_0 \geq 0$ به طوریکه $-\lambda_0 \notin H$. (اگر برای هر λ داشته باشیم $-\lambda_0 \in H$ پس صفر یک نقطه حدی برای مجموعه H وچون طبق فرض H بسته است لذا $0 \in H$ بنابراین $x = x + 0 \in W$ که این متناقض است با انتخاب x) اینک قرار می دهیم $l = \lambda_0 - x$ نشان می دهیم $\phi(w,l) < 0$

فرض کنیم وجود داشته باشد یک $w' \in W$ به طوریکه $\phi(w',l) \geq 0$ بنا به تعریف نگاشت ϕ $0 \leq \phi(w',l).1 \leq w' + l,$ لذا $x - \lambda_0.1 = -l < w'$ از اینکه $w' \in W$ W یک مجموعه دانوارد می باشد لذا $x - \lambda_0 \in W$. پس $-\lambda_0 \in H$ که متناقض است با انتخاب λ_0 بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. از طرفی طبق تعریف تابع ϕ ما داریم

$$\phi(x,l) = \sup\{\lambda \in R : \quad \lambda.1 \leq x + l \quad\}$$

$$= \sup\{\lambda \in R : \lambda.1 \leq x - x + \lambda_0\}$$

$$= \sup\{\lambda \in R : (\lambda - \lambda_\circ).\text{۱} \leq \circ\}$$

$$= \sup\{\alpha + \lambda_\circ \in R : \alpha.\text{۱} < \circ\}$$

$$= \sup\{\alpha \in R : \alpha\text{۱} \leq \circ\} + \lambda_\circ$$

$$= \circ + \lambda_\circ \geq \circ$$

(۳ $\rightarrow$ ۴) بنا به تعریف sup بدیهی است .

(۴ $\rightarrow$ ۱) فرض کنیم رابط (۴) برقرار باشد ولی W یک مجموعه دانوارد نباشد. پس وجود دارد $w' \in W$ و $x_\circ \in X$ به طوریکه $x_\circ \leq w'$ و $x_\circ \notin W$ از طرفی طبق فرض به ازای $x \in X$ وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه $\sup_{w\in W} \phi(w,l) < \phi(x_\circ, l)$ اما بنا به ویژگی (۴) تابع ϕ داریم $\circ \leq \phi(x_\circ, l) \leq \phi(w', l) \leq \sup_{w\in W} \phi(w,l) < \phi(x_\circ, l)$ که این رابطه غیرممکن است لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود.

حال نشان می دهیم W یک مجموعه بسته می باشد . فرض کنیم W یک مجموعه بسته نباشد. پس دنباله ای مانند w_n متعلق W وجود دارد $w_n \rightarrow x_\circ$ به قسمی که $x_\circ \notin W$، از اینکه $x_\circ$ متعلق نیست به W لذا طبق فرض وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه $\phi(w_n, l) \leq \sup_{w\in W} \phi(w,l) < \phi(x_\circ, l)$ از طرفی ϕ پیوسته می باشد $\phi(x_\circ, l) \leq \sup_{w\in W} \phi(w,l)$ واین غیر ممکن است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

□

لم. ۲. ۱. ۱ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه بسته و دانوارد باشد $w_\circ \in bdW$ و ϕ همان نگاشت تعریف شده با ضابطه (۳.۲) باشد، آنگاه:

$$\phi(w, -w_\circ) \leq \circ \quad \forall w \in W$$

برهان . فرض کنیم وجود داشته باشد $y_\circ \in W$ به طوریکه $\phi(y_\circ, -w_\circ > \circ$. بنابراین بنا

به تعریف نگاشت ϕ، وجود دارد یک $\lambda_\circ > \circ$ به طوریکه $y_\circ < w_\circ + \lambda_\circ \mathbf{1}$ ، چون W دانوارد می باشد. لذا $w_\circ + \lambda_\circ \mathbf{1} \in W$، بنا به گزاره (۲. ۱. ۲) داریم $w_\circ \in intW$ که متناقض است با انتخاب $w_\circ \in bdW$. لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود. □

لم. ۲. ۱. ۲ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه بسته و دانوارد باشد $w_\circ \in bdW$ و ϕ همان نگاشت تعریف شده‌با ضابطه (۳.۲) باشد در این صور ت وجود دارد یک $l \in X$ به طوریکه :

$$\phi(w,l) \leq \circ = \phi(w_\circ,l) \ ,$$

برهان . قرار می دهیم $l = -w_\circ$ بنا به لم قبل $\phi(w,l) \leq \circ$. حال نشان می دهیم $\phi(w_\circ,l) = \circ$، با توجه به تعریف نگاشت ϕ داریم :

$$\phi(w_\circ,l) = \sup\{\lambda \in R : \lambda.\mathbf{1} \leq w_\circ + l\}$$

$$= \sup\{\lambda \in R : \lambda.\mathbf{1} \leq w_\circ - w_\circ = \circ\} = \circ$$

□

۲.۲ مجموعه های اکیداً دانوارد

تعریف. ۲. ۲. ۱ یک زیر مجموعه‌مانند $W \subseteq X$ را اکیداً دانوارد نامیم، اگر به ازای هر نقطه مرزی دلخواه مانند $w_\circ \in bdW$ اگر یک $w \in X$ ای یافت شود به طوری که در نامعادله $w_\circ < w$ صدق کند آنگاه $w \notin W$.

مثال . ۲. ۲. ۱ فرض کنیم $f : X \to R$ یک تابع اکیداً صعودی باشد آنگاه به ازای هر $c \in R$ مجموعه $S_c(f) = \{x \in X : f(x) \leq c\}$ یک مجموعه‌اکیداً دانوارد است.

برهان . می دانیم $bdS_c(f) = \{x \in X : f(x) = c\}$. فرض کنیم $x \in bdS_c(f)$ یک نقطه دلخواه و $y \in X$,$x < y$ باشد از اینکه f یک تابع‌اکیداً صعودی می باشد $c = f(x) < f(y)$ بنابراین $y \notin S_c(f)$ لذا $S_c(f)$ یک مجموعه اکیداً دانوارد است. □

تعریف. ۲. ۲.۲ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه دانوارد باشد. گوییم w' یک نقطه اکیداً دانوارد است، اگر برای هر $w_\circ \in bdW$ که $w_\circ \leq w'$ اگر $w \in X$ ای یافت شود به طوریکه در نا مساوی $w_\circ < w$ صدق کند آنگاه $w \notin W$.

گزاره. ۲. ۳.۲ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه دانوارد وبسته ای باشد.در این صورت $w' \in bdW$ یک نقطه‌اکیداً دانوارد است اگر وتنها اگر:

۱) $w' < w \Rightarrow w \notin W$

۲) $w_\circ \leq w', \;\; w_\circ \in bdW \Rightarrow w_\circ = w'$

برهان . فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه دانوارد و بسته ای باشد. و w' نقطه‌اکیداً دانوارد طبق تعریف (۲. ۲.۲) رابط (۱) برقرار است. پس کافی است درستی گزاره (۲) را نشان بدهیم. برای این منظور فرض کنیم رابطه (۲) برقرار نباشد یعنی $w_\circ \neq w'$ پس $w_\circ < w'$ اما طبق تعریف (۲. ۲.۲) داریم $w' \notin W$ که این متناقض با انتخاب w' است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم رابطه (۱) و (۲) برقرار باشند نشان می دهیم w' نقطه‌اکیداً دانوارد می باشد لذا فرض کنیم $w_\circ \leq w', \;\; w_\circ \in bdW$ پس طبق (۲) داریم $w_\circ = w'$ و رابطه (۱) ایجاب می کند اگر $w \geq w'$ آنگاه $w \notin W$ بنا به تعریف (۲. ۱.۲) w' یک نقطه‌اکیداً دانوارد می باشد. $\square$

گزاره. ۲. ۴.۲ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه دانوارد و بسته ای باشد. در این صورت W مجموعه‌اکیداً دانوارداست، اگر وتنها اگر هر نقطه‌مرزی آن اکیداً دانوارد باشد.

گزاره. ۲. ۵.۲ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه‌ای دانوارد و بسته وϕ همان نگاشت تعریف شده باضابطه (۳.۲) و $w' \in bdW$، یک نقطه‌اکیداً دانوارد باشد. دراین صورت وجود دارد یک $l \in X$ منحصر به فردی به طوریکه

$$\phi(w,l) \leq \circ = \phi(w',l)$$

برهان . قرار می دهیم $l=-w'$ پس طبق لم (۲. ۲.۱) داریم $\phi(w,l)\leq \circ=\phi(w',l)$
حال نشان می دهیم این l یکتا ست. فرض کنیم وجود داشته باشد $l'\in X$ به طوریکه:

$$\phi(w,l')\leq \circ=\phi(w',l') \qquad (*)$$

بنا به تعریف (۳.۲) داریم $\phi(w',l').\text{۱}\leq w'+l'$ بنابراین $-l'\leq w'$ وچون W یک مجموعه دانوارد است لذا $-l'\in W$. فرض کنیم $\varepsilon\geq\circ$ باشد قرار می دهیم $l_\varepsilon=-l'+\varepsilon.\text{۱}$ بنابراین

$$\phi(l_\varepsilon,l')=\sup\{\lambda\in R:\ \ \lambda.\text{۱}\leq l_\varepsilon+l'\ \}$$
$$=\sup\{\lambda\in R:\lambda.\text{۱}\leq -l'+\varepsilon.\text{۱}+l'\}$$
$$=\sup\{\lambda\in R:(\lambda-\varepsilon).\text{۱}\leq\circ\}$$
$$=\sup\{\alpha+\varepsilon\in R:\alpha.\text{۱}<\circ\}$$
$$=\sup\{\alpha\in R:\alpha\text{۱}<\circ\}+\varepsilon>\circ$$

بنابراین با توجه به رابطه(*) به ازای هر ε، $l_\varepsilon=-l'+\varepsilon.\text{۱}\notin W$ لذا طبق نتیجه (۲. ۲.۱) داریم:

$$-l'\in bdW \qquad (**)$$

از طرفی طبق فرض w' یک نقطه‌اکیداً دانوارد است لذارابطه (**) نتیجه می دهد که $l=l'=-w'$ و حکم ثابت می شود. □

گزاره. ۲. ۶.۲ فرض کنیم $W\subseteq X$ یک مجموعه دانوارد و بسته ای وϕ همان نگاشت تعریف شده‌باضابطه (۳.۲) باشد. در این صورت عبارات زیر معادل هستند:

۱) W یک مجموعه‌اکیداً دانوارد است

۲) برای هر $w'\in bdW$ وجود داشته باشد یک $l\in X$ منحصر به فردی به طوریکه

$$\forall w\in W\quad \phi(w,l)\leq\circ=\phi(w',l)$$

برهان . فرض کنیم که عبارت (۱) برقرار باشد، دراین صورت طبق قضیه قبل عبارت (۲) برقرار می باشد. (۱ $\rightarrow$ ۲) فرض کنیم که عبارت (۲) برقرار باشد، نشان می دهیم W یک مجموعهاکیداً دانوارد است.برهان خلف فرض کنیم این طور نباشد. به عبارت دیگر وجود داشته باشد $w_\circ \in bdW, y \in X$ به طوریکه $y > w_\circ$ و $y \in W$ از اینکه $y > w_\circ$ بنابراین به ازای هر

$$\lambda > \circ \qquad (*) \qquad w_\circ < y + \lambda.\text{۱}$$

حال ادعا می کنیم به ازای هر $\lambda > \circ$، $y + \lambda.\text{۱} \notin W$ در نتیجه بنا به نتیجه (۳.۲) $y \in bdW$. فرض کنیم وجود داشته باشد $\lambda_\circ$ به طوریکه $y + \lambda_\circ.\text{۱} \in W$ در این صورت قرار می دهیم $V = \{x \in X : \| x - w_\circ \| \leq \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\lambda_\circ\}$ یک همسایگی حول نقطه $w_\circ$ طبق تعریف گوی داریم:

$$V = \{x \in X : w_\circ - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\lambda_\circ \leq x \leq w_\circ + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\lambda_\circ\}$$

از طرفی W مجموعه دانوارد می باشد و چون $y + \lambda_\circ.\text{۱} \in W$ لذا بنا به رابطه $(*)$ ، به ازای هر $x \in V$آنگاه $x \in W$ خواهد بود. بنابراین $V \subseteq W$ پس $w_\circ \in intW$ که این متناقض است با فرض اولیه بنابراین فرض خلف باطل و ادعا ثابت می شود.

حال قرار می دهیم $l = -y$ پس طبق لم (۲.۱.۲) داریم :

$$\forall w \in W \quad \phi(w, l) \leq \circ = \phi(y, l) \qquad (*)$$

حال با به کار بردن دوباره همان لم برای $l' = -w_\circ$ داریم:

$$\forall w \in W \quad \phi(w, l') \leq \circ = \phi(w_\circ, l') \qquad (**)$$

ازاینکه$y > w_\circ$ بنا به ویژگی (۵) تابع ϕ، $\phi(w_\circ, l') \leq \phi(y, l')$ از طرفی بنا به$(**)$ داریم، به ازای هر $w \in W$، $\phi(w, l') \leq \phi(w_\circ, l') < \phi(y, l')$ ، با توجه به اینکه $y \neq w_\circ$ لذا $l \neq l'$ که این تناقض دارد با یکتایی l. لذا فرض $y \in W$ باطل و حکم ثابت می شود. □

۳.۲ وجود بهترین تقریب درمجموعه های دانوارد

قضیه. ۲. ۳. ۱ فرض کنیم $W \subseteq X$ یک مجموعه‌ای دانوارد وبسته باشد. در این صورت W یک مجموعه پروکسیمینال است.

برهان . فرض کنیم $x_\circ \in X \backslash W$ و $r := \inf_{w \in W} \parallel x_\circ - w \parallel = d(x, W)$ در این صورت بنا به تعریف inf برای هر $\varepsilon \geq \circ$ وجود دارد، یک $w_\varepsilon \in W$ به طوریکه $\parallel x_\circ - w_\varepsilon \parallel < r + \varepsilon ۱$. بنا به تعریف نرم داریم

$$-(r+\varepsilon).۱ \leq w_\varepsilon - x_\circ \leq (r+\varepsilon).۱$$

قرار می دهیم $w_\circ = x_\circ - r.۱$ از اینکه $w_\circ - \varepsilon ۱ = x_\circ - r.۱ - \varepsilon ۱ \leq w_\varepsilon$ و W یک مجموعه دانوارد می باشد، نتیجه می شود که به ازای هر ε، $w_\circ - \varepsilon ۱ \in W$. ازطرفی W مجموعه بسته ای است، لذا $w_\circ \in W$ با توجه به اینکه $\parallel x_\circ - w_\circ \parallel = r = d(x, W)$ بنابراین $w_\circ \in P_W(x_\circ)$ وحکم ثابت می شود. □

نتیجه . ۲. ۳. ۱ اگر $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد و بسته باشد و $x_\circ \in X \backslash W$ دراین صورت $\min P_W(x_\circ)$ موجود و برابربا $w_\circ = x_\circ - r.۱$ می باشد.

برهان . فرض کنیم $w \in P_W(x_\circ)$ در این صورت $\parallel x_\circ - w \parallel = r = d(x, W)$ لذا $w \in B(x_\circ, r)$ از طرفی به ازای هر $x \in B(x_\circ, r)$ داریم $x_\circ - r.۱ \leq x$ لذا به ازای هر $w \in P_W(x_\circ)$، $w_\circ \leq w$ بنابراین $w_\circ = \min P_W(x_\circ)$. □

نتیجه . ۲. ۳. ۲ اگر $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد وبسته باشد و $x \in X$ دراین صورت :

$$d(x, W) = \min\{\lambda \geq \circ : x - \lambda.۱ \in W\}$$

برهان . قرار می دهیم $A=\{\lambda\geq \circ : x-\lambda.\text{۱}\in W\}$ اگر $x\in W$ در این صورت $x-\circ.\text{۱}\in W$ لذا $\min A=\circ=d(x,W)$. پس فرض کنیم $x\notin W$ در این صورت $d(x,W)\geq\circ$. حال فرض کنیم $\lambda\geq\circ$ مقدار دلخواهی باشد به قسمی که $x-\lambda.\text{۱}\in W$:

$$\lambda=\| x-(x-\lambda.\text{۱})\|\geq d(x,W)=r$$

از طرفی بنا به نتیجه قبل داریم $x-r.\text{۱}\in W$ پس $r\in A$ بنابراین $\min A=r=d(x,W)$. $\square$

تعریف. ۲. ۳. ۱ فرض کنیم $W\subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد وبسته باشد و $x_\circ\in X\backslash W$. نقطه $w'\in bdW$ را نقطه چبیشیف می گویند اگر برای هر $w_\circ\in bdW$ که $w_\circ\in P_W(x_\circ)$, $w_\circ\leq w'$ آنگاه $P_W(x_\circ)=\{w_\circ\}$.

قضیه. ۲. ۳. ۲ فرض کنیم $W\subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد وبسته باشد و $w'\in bdW$ در این صورت عبارات زیر معادل هستند:

۱) w' یک نقطه چبیشیف است .

۲) w' یک نقطه اکیداً دانوارد است .

برهان . فرض کنیم (۱) برقرار باشد. و w' یک نقطه اکیداً دانوارد نباشد. بنابراین $w\in W$ و $w_\circ\in bdW$ ای وجود دارند به طوریکه $w_\circ\neq w$ و $w_\circ<w$ حال فرض کنیم $r\in R$ به قسمی باشد که $\circ<\| w_\circ-w\|\leq r$ بنا به تعریف نرم داریم :

$$w-w_\circ\leq| w-w_\circ|\leq\| w_\circ-w\| .\text{۱}\leq r.\text{۱}$$

$$w\leq w_\circ+r.\text{۱}\quad(*)$$

قرار می دهیم $x_\circ=w_\circ+r.\text{۱}$ بنابراین $\| w_\circ-x_\circ\|=r$ ادعا می کنیم $d(x_\circ,W)=r$ فرض کنیم این طور نباشد. بنابراین وجود دارد یک $y\in W$ به طوریکه $\| y-x_\circ\|\leq r_\circ<r$ لذا

بنا به تعریف نرم داریم $x_\circ \leq y + r.1$ با جایگذاری مقدار $x_\circ$ داریم $w_r = w_\circ + (r - r_\circ).1 \leq y,$ از اینکه $y \in W$ و W یک مجموعه دانوارد می باشد لذا $w_r \in W$ بنا به گزاره (۲. ۱. ۲) داریم $w_\circ \in intW$ که این تناقض است با فرض $w_\circ \in bdW$ لذا فرض خلف باطل وادعا ثابت می شود. بنابراین $w_\circ \in P_W(x_\circ)$ و $d(x_\circ, W) = r$

حال باتوجه به اینکه $w_\circ < w$ لذا $x_\circ - w < x_\circ - w_\circ = r.1$ درنتیجه

$$\| x_\circ - w \| \leq \| r.1 \| = r = d(x_\circ, W) \leq \| x_\circ - w \|$$

بنابراین $\| x_\circ - w \| = d(x_\circ, W)$ درنتیجه $w \in P_W(x_\circ)$ واین درحالی است که $w \neq w'$ که این متناقض است با چبیشیف بودن نقطه w' .

($1 \rightarrow 2$) فرض کنیم w' یک نقطه اکیداً دانوارد باشد. پس برای هر $w_\circ \in bdW$ که $w_\circ \leq w'$ طبق (۲. ۲.۳) داریم: $\quad (*) \quad w_\circ = w'$

حال برای آن که نشان دهیم w' یک نقطه چبیشیف است، باید نشان دهیم برای $\forall x_\circ \notin W,$ اگر $w' \in P_W(x_\circ)$ آنگاه $P_W(x_\circ) = \{w'\}$ فرض کنیم $x_\circ \in X$. با توجه به قضیه (۲. ۳. ۱) $w'_\circ = \min P_W(x_\circ)$ موجود، لذا به ازای هر w , $w \in p_W(x_\circ)$ داریم $w \geq w'_\circ$ حال با توجه به‌اینکه $w' \in P_W(x_\circ)$ پس $w' \geq w'_\circ$ وطبق رابطه (*) داریم $w'_\circ = w'$ بنابراین $P_W(x_\circ) = \{w'\}$. □

۴.۲ مجموعه های آپوارد

تعریف. ۲. ۴.۱ فرض کنیم $W \subseteq X$ باشد، مجموعه W را آپوارد [۴] (رو به بالا) می گوییم درصورتیکه:

$$\forall w \in W \ , x \in X \ if \ \ x \geq w \Rightarrow x \in W$$

به عبارت دیگر مجموعه W آپوارد است در صورتیکه $-W$ مجموعه‌ای دانوارد باشد.

[۴] Upward

مثال . ۲. ۱.۴ فرض کنیم $X = R^3$ در این صورت مجموعه U،

$U = \{(x, y, z) : x \geq 1, y \geq 3, z \geq 0\}$ یک مجموعه آپوارد درفضای R^3 می باشد

قضیه. ۲. ۱.۴ فرض کنیم $W \subseteq X$ مجموعه‌ای آپوارد و بسته باشد، در این صورت W مجموعه‌ای پروکسیمینال است .

نتیجه . ۲. ۱.۴ اگر $W \subseteq X$ مجموعه‌ای آپوارد وبسته باشد و $x_0 \in X \backslash W$ دراین صورت $\max P_W(x_0)$ موجود و برابربا $w_0 = x_0 + r.1$ می باشد.

برهان . فرض کنیم$w \in P_W(x_0)$ در این صورت $\| x_0 - w \| = r = d(x, W)$ لذا $w \in B(x_0, r)$ از طرفی به ازای هر$x \in B(x_0, r)$ داریم $x \leq x_0 + r.1$ لذا به ازای هرw نیز $w \leq w_0$ بنابراین $.w_0 = \max P_W(x_0)$ $\square$

نتیجه . ۲. ۲.۴ اگر $W \subseteq X$ مجموعه‌ای آپوارد وبسته باشد و $x \in X$ دراین صورت :

$$d(x, W) = \min\{\lambda \geq 0 : x + \lambda.1 \in W\}$$

۵.۲ برخی ویژگی های مجموعه های دانوارد

۱) فرض کنیم $A \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد باشد در این صورت A°, A^- نیز مجموعه های دانوارد می باشند.

برهان . فرض کنیم $a \in A^-$ در این صورت دنباله ای مانند $a_n \in A$ وجود دارد، به طوریکه $a_n \to a$. حال اگر وجود داشته باشد $b \in X$ به طوریکه$b \leq a$ نشان می دهیم $b \in A^-$. برای این منظور قرار می دهیم $a_n^{'} = \min(b, a_n)$ در نتیجه $a_n^{'} \leq a_n$

از اینکه $a_n \in A$ و A دانوارد است، لذا $a_n' \in A$ و با توجه به اینکه $a_n' \to \min(b,a) = b$ بنابراین $b \in A^-$. $\square$

۲) اگر A مجموعه‌ای دانوارد باشد و $B \subseteq X$ در این صورت $A+B$ مجموعه‌ای دانوارد است. به طور خاص هر انتقال آن یعنی $A+x$ نیز مجموعه‌ای دانوارد است. (در صورتیکه A مجموعه‌ای آپوارد باشد $A+B$ مجموعه آپوارد می باشد.)

۳) فرض کنیم T یک مجموعه از اندیس باشد و $(A_t)_{t\in T}$ خانواده‌ای از مجموعه های بسته دانوارد باشد. در این صورت $\bigcap A_t, \bigcup A_t$ نیز مجموعه های دانوارد هستند.

تذکر. ۲. ۱.۵ فرض کنیم X یک فضای نرمداری باشد و $S,R \subseteq X$ و $x \in X$. یک سوال مطرح می باشد، که آیارابطه زیر همواره برقرار است :

$$d(x,R\cap S) = max\{d(x,R), d(x,S)\}$$

به طور قطع جواب منفی است. به طور مثال اگر $X = R^۲$ و نرم اقلیدیسی راروی این فضا در نظر بگیریم. می بینید به وضوح این رابطه در در مورد مجموعه های $A = \{(۱,۱),(۱,۵)\}$ و $B = \{(۱,۵),(۲,۲)\}$ ونقطه $x = (۱,۳)$ درست نیست. ما طی گزاره های زیر نشان می دهیم در مورد مجموعه های دانوارد این مطلب صادق است .

گزاره. ۲. ۷.۵ فرض کنیم T مجموعه‌ای از اندیس باشد و $(A_t)_{t\in T}$ خانواده ای از مجموعه های بسته دانوارد و $A = \bigcap A_t$ در این صورت :

$$d_A(x) = \sup_{t\in T} d_{A_t}(x)$$

برهان . فرض کنیم $x \in X$ و $r_t = d_{A_t}$ از اینکه $A \subseteq A_t$ لذا به ازای هر $t \in T$ ، $r_t \le d_A(x)$ بنابراین $s = \sup r_t \le d_A(x)$. اگر $s = \infty$ پس $d_A(x) = \infty$ و حکم ثابت می شود. بنابراین فرض

کنیم $s < \infty$. از اینکه $r_t \leq s$ لذا $\quad (*) \quad x - s.1 \leq x - r_t.1$

از طرفی بنا به‌قضیه (۲. ۳. ۱) $x - r_t.1 \in A_t$، بنا به رابطه$(*)$ واینکه A_t ها مجموعه های دانوارد می باشند لذا $x - s.1 \in A_t$ در نتیجه $x - s.1 \in A$ از طرفی داریم $d_A(x) \leq s = \| x - (x - s.1) \|$، بنابراین $d_A(x) = \sup_{t \in T} d_{A_t}(x)$. $\square$

گزاره. ۲. ۸.۵ فرض کنیم T مجموعه‌ای از اندیس باشد و $(A_t)_{t \in T}$ خانواده ای از مجموعه های بسته و دانوارد باشد و $A = \bigcup A_t^-$ در این صورت :

$$d_A(x) = \inf_{t \in T} d_{A_t}(x)$$

برهان . با توجه به تعریف تابع فاصله داریم:

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} \| x - a \| = \inf_{a \in A} \inf_{a_t \in A_t} \| x - a_t \| = \inf_{t \in T} d_{A_t}(x)$$

$\square$

۲.۶ یافتن فاصله

تابع $\psi : X \times X \to R$ با ضابطه زیر رادر نظر بگیرید

$$\forall x, y \in X \qquad \psi(x, y) = \sup\{\lambda \in R : x - y \geq \lambda.1\} \qquad (۲.۴)$$

گزاره. ۲. ۹.۶ فرض کنیم $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد باشد. و $y \notin W$. در این صورت :

$$\psi(w, y) \leq 0 \qquad \forall\, w \in W$$

برهان . برهان خلف. فرض کنیم وجود داشته باشد $w \in W$ به قسمی که $\psi(w,y) > 0$. نگاشت $k : R \to X$ با ضابطه زیر را :

$$k(\lambda) = \lambda 1$$

در نظر بگیرید. قرار می دهیم $D = \{\lambda \in R : w - y \geq \lambda.1\}$ بدیهی است، $k(\sup D) = \sup\{k(\lambda) : \lambda \in D\}$ در نتیجه بنا به تعریف (۴.۲) خواهیم داشت :

$$w - y \geq k(\sup D) = k(\psi(w,y)) = \psi(w,y)1 \Rightarrow w \geq y + \psi(w,y)1 > y$$

از اینکه W مجموعه‌ای دانوارد می باشد، لذا $y \in W$ که این متناقض است با فرض اولیه. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. □

فرض کنیم $y \in X$ مجموعه W_y را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$W_y = \{x \in X : \psi(x,y) \leq 0\}$$

نتیجه . ۲. ۱.۶ فرض کنیم $y \in X$ در این صورت W_y مجموعه دانوارد است.

گزاره. ۲. ۱۰.۶ فرض کنیم $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد باشد. در این صورت :

$$W = \cap_{y \in bdW} W_y$$

برهان . ابتدا فرض کنیم $bdW = \phi$ و y عضو دلخواه متعلق به X باشد، با توجه به اینکه $bdW = \phi$ لذا مجموعه $B_y = \{\lambda \in R : y + \lambda 1 \in W\} \neq \phi$ در واقع به ازای هر $z \in W$ بنا به نتیجه (۲. ۱.۱) وجود دارد $R \ni \lambda > 0$ به قسمی که $z \leq y + \lambda 1$. همچنین به ازای هر $\lambda \leq \lambda'$ خواهیم داشت: $\lambda' \in B_y \quad (*)$

فرض کنیم $b = \sup B_y$ اگر $b < \infty$ آنگاه $y + b1 \in W$ لذا به ازای هر $\lambda > 0$ ، $y + b1 + \lambda 1 \notin W$، در این صورت $y + b1 \in bdW$ که این متناقض است با $bdW = \phi$. بنابراین $b = \infty$ و با توجه به

رابطه$(*)$ لذا$B_y=(-\infty,\infty)$. واین عبارت به این معنا است که W شامل تمام ترکیبات خطی $y+\lambda 1$ می باشد، وچون به ازای هر$y\in X$ وهرλ این نتیجه برقرار است، لذا $W=X$ و رابطه درست است.

حال فرض کنیم $bdW\neq\phi$، $y\in bdW$ پس به ازای هر$\varepsilon\geq 0$ داریم $y+\varepsilon 1\notin W$ بنا به گزاره (۲. ۹.٦) $\psi(x,y+\varepsilon 1)\leq 0$ و چون این رابطه به ازای هر$\varepsilon>0$ وبه ازای هر$y\in bdW$ لذا $W\subseteq\cap_{y\in bdW}W_y$.

حال طرف دیگر تساوی، برای نشان دادن طرف دوم ثابت می کنیم اگر$x\notin W$ آنگاه $x\notin\cap_{y\in bdW}W_y$.

اثبات. از اینکه $x\notin W$ بنا به گزاره (۱.۱.۲) داریم $g(x)>0$ که $(g(x)=\min\{\beta\in R: x-\beta 1\in W\})$. بنا به ویژگی افزایشی تابع g به ازای هر $\alpha>0$ داریم

$g(x+\alpha 1)>0$

از اینکه W یک مجموعه دانوارد غیر تهی می باشد، پس بنا نتیجه (۲. ۱.۱) وجود دارد یک $\alpha_0<0$ به قسمی که $x+\alpha_0 1\in W$ و $g(x+\alpha_0 1)\leq 0$

تعریف می کنیم $f:R\to R$ با ضابطه زیر را :

$$f(\alpha)=g(x+\alpha 1)$$

قرار می دهیم $M=\{\alpha\in R: f(\alpha)=0\}$. بنا به قضیه مقدار میانی مجموعه$M\neq\phi$ و با توجه به اینکه g تابع از پایین پیوسته است لذاM متشکل از$[v,\beta]$ یا$(-\infty,\beta]$ می باشد. قرار می دهیم $y_0=x+\beta 1$، و نشان می دهیم $y_0\in bdW$

به ازای هر$\lambda>0$ داریم $\beta+\lambda\notin M$، بنابراین $g(x+\beta 1+\lambda 1)>0$ پس $y_0+\lambda 1\notin W$ لذا $y_0\in bdW$ از طرفی $\psi(x,y)=\sup\{\alpha\in R: x-y_0\geq\alpha 1\}=-\beta>0$ لذا $x\notin W_{y_0}$ در نتیجه $x\notin\cap_{y\in bdW}W_y$. حکم ثابت می شود. □

نتیجه . ۲. ۲.٦ فرض کنیم $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد باشد و $x \notin W$. در این صورت :

$$d(x,W) = \sup_{y \in bdW} d(x,W_y)$$

برهان . بنا به گزاره (۲. ۱۰.٦) و (۲. ۷.۵) نتیجه حاصل می شود. □

۱.٦.۲ الگوریتم

برای یافتن فاصله نقطه x تا مجموعه دانوارد W می توان الگویتم زیر را با توجه به نتیجه (۲. ۲.۳) به کار برد:

(۱). $k = 0$, α_k, β_k را طوری انتخاب کن که $x - \alpha_k 1 \in W$ و $x - \beta_k 1 \notin W$

(۲). قرار بده $\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$ وبرو به گام ۳

(۳). اگر $x - \gamma_k 1 \in W$ در این صورت قرار بده:

$k = k + 1$, $\alpha_k = \gamma_{k-1}$ و $\beta_k = \beta_{k-1}$ و برو به گام ۵ وگرنه برو به گام ۴

(۴). $k = k + 1$, $\alpha_k = \alpha_{k-1}$ و $\beta_k = \gamma_{k-1}$ و برو به گام ۵

(۵). اگر $| \alpha_k - \beta_k | \leq \varepsilon$ برو به گام ٦ وگرنه برو به گام ۲

(٦). $r \cong \alpha_k \cong \beta_k$ پایان.

مثال . ۲. ۱.٦ فرض کنیم $X = R^2$ و $G = G_1 \cup G_2$ که در آن $G_1 = \{(x,y) \in R^2 : x \leq 1, y \leq 2\}$ و $G_2 = \{(x,y) \in R^2 : x \leq 5, y \leq 1\}$ و نقطه $x = (7, 11)$ را در نظر بگیرید می خواهیم بااستفاده از الگوریم فوق مقدار تقریبی فاصله نقطه x تا مجموعه G را تا دقت ۳رقم اعشار بدست آوریم.

k	α_k	β_k	$\gamma = \frac{۱}{۲}(\alpha_k + \beta_k)$
۰	۱	۱۵	۸
۱	۸	۱۵	۱۱.۵
۲	۸	۱۱.۵	۹.۷۵
۳	۹.۷۵	۱۱.۵	۱۰.۶۲
۴	۹.۷۵	۱۰.۶۲	۱۰.۱۸
۵	۹.۷۵	۱۰.۱۸	۹.۹۶
۶	۹.۹۶	۱۰.۱۸	۱۰.۰۱۵
۷	۹.۹۶	۱۰.۰۱۵	۹.۹۸
۸	۹.۹۸	۱۰.۰۱۵	۱۰.۰۰۱۲
۹	۹.۹۸	۱۰.۰۰۱۲	۹.۹۹۹۹
۱۰	۹.۹۹۹۹	۱۰.۰۰۱۲	۱۰.۰۰۰۴

جدول ۱.۲: جدول مقدار تقریبی فاصله

فصل ۳

مجموعه های نرمال و پوستهٔ دانوارد

مجموعه های نرمال در سال ۱۹۹۵ توسط ربینو[۱]در فضای R^n_+ مطرح شد و در سال های اخیردرفضای مختلف ازجمله فضاهای باناخ تعمیم یافته است.

هدف اصلی ما در این فصل، معرفی مجموعه های نرمال وبررسی ارتباط این مجموعه ها با مجموعه های دانوارد از طریق معرفی مجموعه های پوستهٔ دانوارد می باشد. در ادامه از این بحث جهت تقریب این مجموعه ها و مجموعه های بسته ای که بر روی آنها شرایطی وضع می شود، یاری خواهیم جست .

تمامی تعاریف، تذکرها، لم و قضایای ارائه شده در این فصل از مراجع[۹ ،۸ ،۱۲ ،۳ ،۲] گرفته شده است.

---

[۱] rubinov

۱.۳ پوسته دانوارد و مجموعه های نرمال

در این فصل ماابتدا به‌معرفی زیر مجموعه خاص از مخروط X^+ در فضای لاتیس می پردازیم وسپس وجود بهترین تقریب دراین مجموعه ها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

تذکر. ۳. ۱.۱ فرض کنیم X فضای نرمدار لاتیس باشد، در این صورت مخروط X^+ را مجموعه زیر در نظر می گیرند:

$$X^+ = \{x \in X : \ x \geq \circ \ \}$$

تعریف. ۳. ۱.۱ فرض کنیم $W \subset X^+$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد. اشتراک تمام مجموعه های دانوارد شامل W را پوستهٔ دانوارد مجموعه W می گویند و آن را با نماد W_* نمایش می دهند. به طور مشابه برای مجموعه‌ای مانند W می توان پوستهٔ آپوارد را تعریف نمود. در واقع این مجموعه اشتراک تمام مجموعه های آپوارد شامل W می باشد که آن را با W^* نمایش می دهند.

قضیه. ۳. ۱.۱ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ یک مجموعه غیر تهی باشد. در این صورت:

$$W_* = W - X^+$$

که در آن $W - X^+$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$W - X^+ = \{w - x : w \in W, x \in X^+ \ \}$$

برهان . برای اثبات قضیه فوق کافی است تساوی مجموعه های زیر را نشان بدهیم.

$$W - X^+ = \{x \in X : \exists w \in W \quad S.t. \ \ x \leq w\} = W_*$$

قرار می دهیم $A = \{x \in X : \exists w \in W \quad S.t. \ \ x \leq w\}$ ونشان می دهیم $A \subseteq W_*$ فرض کنیم $\hat{W}$ مجموعهٔ دانوارد دلخواه شامل W باشد و$a \in A$ دراین صورت بنا به تعریف مجموعهA وجود دارد $w \in W$ به طوریکه $x \leq w$. از اینکه $w \in W$ و $W \subseteq \hat{W}$ لذا $w \in \hat{W}$ وچون $\hat{W}$ مجموعهٔ

دانوارد دلخواهی است، لذا $a \in W_*$ بنابراین $A \subseteq W_*$.

$(\Rightarrow)$ حال نشان می دهیم $A \subseteq W_*$. فرض کنیم $a \in W_*$ ولی $a \notin A$ مجموعه $M_a = \{x \in X : x < a\}$ را در نظر بگیرید، M_a مجموعه ای دانوارد و شامل W می باشد. که $a \notin M_a$، و این متناقض است با $a \in W_*$ لذا فرض خلف باطل و $W_* \subseteq A$ بنابراین $A = W_*$ وحکم ثابت می شود.

اثبات $A = W - X^+$ بدیهی است. □

نتیجه . ۳. ۱.۱ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد . در این صورت $W^* = W + X^+$

نتیجه . ۳. ۲.۱ فرض کنیم $B, A \subseteq X$ دو مجموعه غیر تهی باشند در این صورت :

$$(A+B)_* = A_* + B_*$$

برهان . فرض کنیم $x \in (A+B)_*$ در این صورت بنا به قضیه (۳. ۱.۱) وجود دارد $z \in A+B$ به طوریکه $x \leq z$ ازاینکه $z \in A+B$ لذا $a \in A, b \in B$ وجود دارند به قسمی که $z = a+b$. ازاینکه $x - b \leq a$ بنابراین بنا به همان قضیه (۳. ۱.۱) داریم $x - b \in A_*$. ازطرفی $b \in B \subseteq B_*$ در نتیجه $x = x - b + b \in A_* + B_*$. بنابراین $(A+B)_* \subseteq A_* + B_*$. به طور مشابه می توان طرف دیگر تساوی را نیز اثبات نمود. □

نتیجه . ۳. ۳.۱ فرض کنیم $B, A \subseteq X$ دو مجموعه غیر تهی باشند. در این صورت :

۱) اگر $A \subseteq B$ در این صورت: $A_* \subseteq B_*$

۲) $(A \cup B)_* = A_* \cup B_*$

۳) $(A \cap B)_* \subseteq A_* \cap B_*$

در عبارت فوق حالت تساوی در موارد زیر برقرار است

۱. $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

۲. A, B مجموعه های دانوارد باشند.

قضیه. ۳. ۱. ۲ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ مجموعه همبندی باشد. در این صورت W_* همبند است

برهان . فرض کنیم x, y دونقطه دلخواه متعلق به W_* باشند. در این صورت بنا به قضیه (۳. ۱. ۱) وجود دارند x_1, y_1 متعلق به مجموعه W به طوریکه $x \leq x_1, y \leq y_1$ از اینکه همبند W است، لذا یک مسیر ازx_1 به y_1 وجود دارد وچون $W \subseteq W_*$ لذا این مسیر درW_* نیز موجود می باشد حال این مسیر همراه با مسیر های ازx به x_1 و y به y_1 تشکیل یک مسیر از x به y را می دهند لذا W_* همبند می باشد. $\square$

گزاره. ۳. ۱. ۱۱ فرض کنیم دو نقطه x, y مجزا درX باشند و $W = \{x, y\}$ آنگاه یک مسیر ازx بهy در W_* وجود دارد.

برهان . بنا به قضیه (۳. ۱. ۱) مجموعه پوسته دانوارد W برابر است با $W_* = (x - X^+) \cup (y - X^+)$ وچون $(x - X^+)$ و $(y - X^+)$ مجموعه های همبندی می باشند لذا کافی است نشان دهیم $(x - X^+) \cap (y - X^+) \neq \phi$. از اینکه $\| y - x \| \leq \infty$ در این صورت وجود دارد $\beta_0 \geq 0$ به طوریکه $\| y - x \| = \beta_0$ لذا بنا به تعریف نرم داریم $y - x \leq \beta_0 1$ ویا به عبارت دیگر $x - y \geq \beta_0 1$. حال اگر $z = y - \beta_0 1$ در نظر بگیریم. با توجه به اینکه $x \geq z$ و$y \geq z$ لذا $z \in (x - X^+) \cap (y - X^+)$ و حکم ثابت می شود. $\square$

نتیجه. هر مجموعه دانوارد یک مجموعه همبند می باشد.

قضیه. ۳. ۱. ۳ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ مجموعه فشرده ای باشد. در این صورت W_* مجموعه ای بسته‌است.

برهان . می دانیم $W_* \subseteq W_*^-$. لذا کافی نشان دهیم $W_*^- \subseteq W_*$. فرض کنیم $x \in W_*^-$ برای آنکه $x \in W_*$ بنا به قضیه (۳. ۱.۱) باید نشان دهیم وجود دارد $y \in W$ به طوریکه $x \in y - X^+$ **اثبات.** فرض کنیم این طور نباشد یعنی $W \cap (x + X^+) = \phi$. ازاینکه یک مجموعه فشرده و X^+ یک مخروط بسته ای است بنا به قضیه (۲۱.۱ مرجع[۱۷]) وجود دارد یک همسایگی مانند V به طوریکه

$$(W + V) \cap (x + X^+ + V) = \phi \qquad (*)$$

طبق فرض $x \in W_*^-$ لذا هر همسایگی حول x شامل برخی نقاط W_* می باشد. در نتیجه به طور خاص همسایگی $x + V$ نیز شامل نقطه ای مانند $z \in W_*$ می باشد. از اینکه $z \in W_*$ لذا وجود دارد $y \in W$ به طوریکه $y \in z + X^+$. از طرفی $z \in x + V$ بنابراین $y \in z + X^+ + V$. همچنین $y \in W + V$ لذا $y \in (W + V) \cap (x + X^+ + V)$ که‌این متناقض است با رابطه(*). لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود. □

گزاره. ۳. ۱.۱۲ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ یک مجموعه از بالا کراندار باشد در این صورت W_* مجموعه‌ای ازبالا کراندار می باشد.

۳.۱.۱ بهترین تقریب روی مجموعه های نرمال

تعریف. ۳. ۱. ۲ فرض کنیم X فضای نرمدار لاتیس باشد، $W \subseteq X^+$ را یک مجموعه نرمال می گویند در صورتیکه: $w \in W\ , x \in X^+ \quad x \leq w \Rightarrow x \in W$

مثال . ۳. ۱. ۱ فر ض کنیم $X = R^۲$ در این صورت مجموعه W،

$W = \{(x_۱, x_۲) \in R^۲_+ : \min(x_۱, x_۲) \leq ۱\}$ یک مجموعه نرمال است .

قضیه. ۳. ۱. ۴ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ مجموعه ای نرمال باشد. در این صورت عبارات زیر درست می باشند:

۱) $W_* = \{x \in X : x^+ \in W\}$

۲) $W = W_* \bigcap X^+$

۳) W بسته‌است اگر وفقط اگر W_* بسته باشد.

۴) $(W_*)^+ = W$

برهان . (۱). فرض کنیم $x \in W_*$ بنا به قضیه قبل وجود دارد $w \in W$ به طوریکه $x \leq w$. ازاینکه $W \subseteq X^+$ لذا $w = w^+ \geq x^+ \geq \circ$ طبق فرض W نرمال است، بنابراین $x^+ \in W$ عکس تساوی فرض کنیم $x^+ \in W$. از اینکه $x^+ \in W \subseteq W_*$ و $x \leq x^+$ لذا $x \in W_*$.

(۲). بدیهی است که $W \subseteq W_* \bigcap X^+$. نشان می دهیم $W_* \bigcap X^+ \subseteq W$ برای این منظور فرض کنیم $x \in W_* \bigcap X^+$ از اینکه $x \in X^+$ لذا $x = x^+$. واز اینکه $x \in W_*$ بنا به گزاره(۱) $x^+ \in W$ بنابراین $x \in W$ در نتیجه $W_* \bigcap X^+ \subseteq W$ بنابراین $W = W_* \bigcap X^+$.

(۳).فرض کنیم W مجموعهٔ بسته ای باشد و w_k دنباله دلخواه متعلق به W_* به قسمی که $w_k \to w$. از اینکه $w_k \in W_*$ بنا به گزاره(۱) $w_k^+ \in W$. از طرفی $w_k^+ \to w^+$ و چون W بسته است. لذا $w^+ \in W$ و مجدداً بنا به گزاره (۱) داریم $w \in W_*$ بنابراین W_* بسته می باشد.

برعکس فرض کنیم W_* بسته باشد. بنا به گزاره (۲) داریم $W = W_* \bigcap X^+$ با توجه به قضیه ای در توپولوژی لذا W بسته است .

(۴).فرض کنیم $x^+ \in (W_*)^+$ در این صورت بنا به گزاره (۱) $x \in W_*$ مجدداً بنا به همان گزاره $x^+ \in W$ درنتیجه $(W_*)^+ \subseteq W$. طرف دیگر تساوی بدیهی است. بنابراین $(W_*)^+ = W$. □

گزاره. ۳. ۱۳.۱ فرض کنیم $x_\circ \in X^+,\ y \in X$ در این صورت :

$$\| y - x_\circ \| \geq \| y^+ - x_\circ \|$$

برهان . می دانیم برای هر $y \in X$ داریم $y = y^+ - y^-$ از اینکه $x_\circ \in X^+$ لذا $x_\circ = x_\circ^+$ بنابراین $x_\circ - y = x_\circ - (y^+ - y^-)$. بنا به تعریف قدر مطلق داریم

$$| x_\circ - y | = (x_\circ - y)^+ + (x_\circ - y)^-$$

$$= x_\circ + y^+ - y^- \geq x_\circ + y^+ = | x_\circ + y^+ |$$

$$\Rightarrow \| y - x_\circ \| \geq \| y^+ - x_\circ \|$$ □

قضیه. ۳. ۵.۱ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ مجموعه نرمال و $x_\circ \in X^+$ آنگاه:

$$d(x_\circ, W) = d(x_\circ, W_*)$$

برهان . از اینکه $W \subseteq W_*$ لذا $d(x_\circ, W) \geq d(x_\circ, W_*)$. حال طرف دیگر، تساوی فر ض کنیم $y \in W_*$ دراین صورت بنا به قضیه (۳. ۴.۱) $y^+ \in W$ و طبق قضیه قبل داریم:

$$\| y - x_\circ \| \geq \| y^+ - x_\circ \| \geq d(x_\circ, W) \qquad (**)$$

از رابطه (*) و(**) نتیجه می گیریم $d(x_\circ, W) = d(x_\circ, W_*)$ □

قضیه. ۳. ۶.۱ فرض کنیم $W \subseteq X^+$ مجموعه‌نرمال و بسته ای باشد. و $x_\circ \in X^+$ پس $\min P_W(x_\circ) = g_\circ$ موجود واگر $\min P_{W_*}(x_\circ) = w_\circ$ باشد، آنگاه: $g_\circ = (w_\circ)^+$.

برهان . با توجه به اینکه W مجموعه‌نرمال و بسته ای هست لذا طبق گزاره (۳) قضیه (۳. ۴.۱) W_* بسته می باشد. حال‌اگر فرض کنیم $r = d(x_\circ, W_*)$ در این صورت بنا به قضیه (۲. ۱.۳) داریم $w_\circ = \min P_{W_*}(x_\circ) = x_\circ - r.۱$.

از اینکه $w_\circ \in W_*$ بنا به قسمت (۱) قضیه (۳. ۴.۱) $w_\circ^+ \in W$، طبق قضیه قبل و گزاره (۳. ۱۳.۱) داریم $d(x_\circ, W) = d(x_\circ, W_*) = r$، در نتیجه $w_\circ^+ \in P_W(x_\circ)$ حال فرض کنیم $g \in P_W(x_\circ)$ دلخواه باشد، در این صورت $g \in P_{W_*}(x_\circ)$ لذا $g \geq w_\circ$ از طرفی $g \geq \circ$ بنابراین داریم $g \geq w_\circ^+$ وچون g دلخواه است، لذا $\min P_W(x_\circ) = g_\circ = (w_\circ)^+$ □

قضیه. ۳. ۷.۱ فرض کنیم T مجموعه‌ای از اندیس باشد و $(A_t)_{t\in T}$ خانواده‌ای از مجموعه های بسته و نرمال باشد و $A = \bigcap A_t$ در این صورت :

$$d_A(x) = \sup_{t\in T} d_{A_t}(x)$$

برهان . با توجه به اینکه $A_* = \bigcap (A_t)_*$ وبنا به قضیایا (۳. ۵.۱) و (۲. ۷.۵) داریم $d_A(x) = d_{A_*}(x)$ و $d_{A_*}(x) = \sup_{t\in T} d_{(A_*)_t}(x)$ در نتیجه $d_A(x) = \sup_{t\in T} d_{A_t}(x)$. □

۲.۳ کاربرد دانوارد ها

در این بخش می خواهیم به کمک مجموعه دانوارد ومتمم آن آپوارد پروکسیمینال بودن برخی مجموعه ها بسته را بررسی کنیم و سپس مشخصه هایی برای نقاط تقریبشان بیان کنیم

نگاشت $p : X \to R$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید :

$$p(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda.۱\}$$

با توجه به تعریف فوق داریم $x \leq p(x).۱$

حال اگر مقایسه ای باتعریف نرم (۱.۲) داشته باشیم مشاهده می کنید:

$$\| x \| = \max(p(x), p(-x))$$

از دیگر ویژگی های این تابع می توان به موارد زیر اشاره کرد

۱) p نگاشت نیم خطی است. به عبارت دیگر:

$$\forall x, y \in X \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

۲) p نگاشت همگن جمعی است .

تذکر. ۳. ۲. ۱ مجموعه های زیر نقش اساسی در بررسی پرو کسیمینال بودن مجموعه های دلخواه بسته دارند

$$Z = \{z \in X : \ p(z) \geq p(-z)\}$$

$$-Z = \{z \in X : \ p(-z) \geq p(z)\}$$

برخی ویژگی های این مجموعه به شرح زیر است :

۱) $X = Z \bigcup -Z$

۲) $Z \bigcap -Z = \{z \in X : \ p(z) = p(-z)\}$

۳) مجموعه Z یک مجموعه آپوارد می باشد

برهان. فرض کنیم $z \in Z$ و $x \in X$ به قسمی که $z \leq x$ در این صورت بنا به ویژگی صعودی تابع p داریم :

$$p(x) \geq p(z) \geq p(-z) \geq p(-x) \Rightarrow x \in Z$$

گزاره. ۳. ۲. ۱۴ فرض کنیم U مجموعه‌ای بسته و $x_\circ - U \in Z, \ x_\circ \in X$ باشد. در این صورت

$$d(x_\circ, U) = d(x_\circ, U_*)$$

برهان . فرض کنیم $d(x_\circ, U_*) = r$ چون $U \subseteq U_*$ لذا $(*) \quad r \leq d(x_\circ, U)$. اینک طرف دیگر

نا مساوی را نشان می دهیم . فرض کنیم $u_* \in U_*$ بنا به قضیه (۳. ۱.۱) وجود دارد $v \in X^+$ به طوریکه $u_* = u - v$ بنابراین $x_\circ - u_* = x_\circ - (u-v)$ حال اگر $x_۱$ را مقدار $x_۱ = x_\circ + v$ اختیار کنیم در این صورت $x_۱ > x_\circ$ از طرفی $x_\circ - u \in Z$ و چون Z مجموعه آپوارد می باشد. لذا $x_۱ - u \in Z$ بنابراین

$$\| x_\circ - u_* \| = \| x_۱ - u \| = p(x_۱ - u) \geq p(x_\circ - u) = \| x_\circ - u \|$$

لذا $d(x_\circ, U_*) \geq d(x_\circ, U)$. با توجه به رابطه (*) داریم $d(x_\circ, U) = d(x_\circ, U_*)$ □

قضیه. ۳. ۲.۱ فرض کنیم $U \subseteq X$ و $x_\circ \in X,\ x_\circ - U \in Z$ باشد. همچنین U_* مجموعه‌ای بسته باشد، در این صورت مجموعه U نسبت به نقطه $x_\circ$ مجموعه‌ای پروکسیمینال است .

برهان . از اینکه U_* مجموعه‌ای بسته می باشد، لذا طبق قضیه (۲. ۳.۱) $w_\circ = \min p_{U_*}(x_\circ)$ موجود واگر $r = d(x_\circ, U_*)$ آنگاه $w_\circ = x_\circ - r.۱$. از طرفی بنا به‌قضیه (۳. ۱.۱) وجود دارد $v \in X^+$ و $u \in U$ به طوریکه $w_\circ = u - v$ بنابراین $x_\circ - u = r.۱ - v \leq r.۱$

بنا به ویژگی صعودی بودن تابع p داریم: $p(x_\circ - u) = p(r.۱ - v) \leq p(r.۱) = r$. از طرفی طبق فرض داریم $x_\circ - u \in Z$ درنتیجه $\| x_\circ - u \| = p(x_\circ - u) \leq r$. همچنین برای هر $u' \in U$ از جمله u داریم $\| x_\circ - u \| \geq d(x_\circ, U) = r$، از این دو نامساوی ثابت می شود که $u \in P_U(x_\circ)$.

□

نتیجه . ۳. ۲.۱ فرض کنیم $U \subseteq X$ و $x_\circ \in X,\ x_\circ - U \in -Z$ همچنین U^* مجموعه‌ای بسته باشد در این صورت مجموعه U نسبت به نقطه $x_\circ$ مجموعه‌ای پروکسیمینال است .

مثال . ۳. ۲.۱ فرض کنیم $U \subseteq X$ مجموعه‌ای از بالا کراندار و U_* مجموعه ای بسته باشد و $x \in X$ به مقدار کافی بزرگ باشد، در این صورت U نسبت به نقطه x پروکسیمینال است .

اثبات: از اینکه U از بالا کراندار است لذا $-U$ از پایین کراندار می باشد و به ازای هر $x \in X$ به مقدار کافی بزرگ داریم $x - u \geq \circ$ لذا $p(x-u) \geq p(-(x-u))$ بنابراین $x - u \in Z$ در نتیجه $x - U \subseteq Z$ ، بنا به قضیه قبل حکم ثابت می شود.

تذکر. ۳. ۲.۲ فرض کنیم $U \subseteq X$ باشد. تحت شرایط زیر U_* مجموعه ای بسته می باشد :

۱. U یک مجموعه ای فشرده باشد.

۲. مجموعه مانند V وجود داشته باشد به طوریکه $V \subseteq U \subseteq V_*$ و V_* مجموعه ای بسته باشد

برهان. $V \subseteq U \subseteq U_* \subseteq V_*$ بنابراین داریم $U_* \subseteq V_*, V_* \subseteq U_*$ لذا $U_* = V_*$

U.۳ مجموعه‌ای نرمال و بسته باشد.

مشخصهٔ عنصر بهترین تقریب

قضیه. ۳. ۲.۲ فرض کنیم مجموعه U نسبت به نقطه $x_\circ$ یک مجموعه پروکسیمینال باشد. و $x_\circ - U \in Z$ همچنین فرض کنیم $u_\circ \in U, r = \| x_\circ - u_\circ \|$ و ϕ همان نگاشت (۳.۲) باشد در این صورت عبارات زیر معادل هستند:

۱) $u_\circ \in P_U(x_\circ)$

۲) وجود دارد $l \in X$ به طوریکه:

$$\phi(u,l) \leq \circ = \phi(y,l) \quad \forall u \in U, \ \forall y \in B(x_\circ, r)$$

در حالت خاصی که $l = -u_\circ$ در این صورت $u_\circ = \min P_U(x_\circ)$

برهان . فرض کنیم $u_\circ \in P_U(x_\circ)$ و $r = \| x_\circ - u_\circ \|$. بستارپوستهٔ دانوارد مجموعه U را در نظر بگیرید در این صورت با توجه به گزاره (۳. ۱۴.۲) داریم $d(x_\circ, U) = d(x_\circ, U_*) = d(x_\circ, U_*^-)$ لذا $u_\circ \in P_{U_*^-}(x_\circ)$. بنا به نتیجه (۲. ۱.۳) $\min P_{U_*}(x_\circ)$ موجود و برابر با $w_\circ = x_\circ - r.۱$

قرار می دهیم $l=-w_\circ$، همچنین فرض می کنیم $y\in B(x_\circ,r)$ بنا به تعریف نرم خواهیم داشت $-r.\text{۱}\leq y-x_\circ$ بنابراین $-r\in\{\alpha\in R:\alpha.\text{۱}\leq y-x_\circ\}$ لذا

$$\begin{aligned}\phi(y,l)&=\sup\{\lambda\in R:\lambda.\text{۱}\leq y+l\}\\&=\sup\{\lambda\in R:\lambda.\text{۱}\leq y-w_\circ\}\\&=\sup\{\lambda\in R:\lambda.\text{۱}\leq y-(x_\circ-r.\text{۱})\}\\&=\sup\{\lambda\in R:\lambda.\text{۱}-r.\text{۱}\leq y-x_\circ\}\\&=\sup\{\alpha\in R:\alpha.\text{۱}\leq y-x_\circ\}+r\\&\geq -r+r=\circ\end{aligned}$$

از اینکه $w_\circ\in P_{U_*^-}(x_\circ)$ لذا $w_\circ\in bdU_*^-$ بنا به لم (۲. ۱. ۲) داریم $\phi(u_*,l)\leq\circ$ برای هر $u_*\in U_*^-$ لذا برای هر $u\in U$ نیز خواهیم داشت : $\phi(u,l)\leq\circ$

($\text{۱}\to\text{۲}$) فرض کنیم وجود دارد $l\in X$ به طوریکه:

$$\phi(u,l)\leq\circ=\phi(y,l)\quad\forall u\in U,\ \forall y\in B(x_\circ,r)$$

با توجه به اینکه $x_\circ-r.\text{۱}\in B(x_\circ,r)$ پس طبق فرض داریم: $\phi(x_\circ-r.\text{۱},l)\geq\circ$ وبنا به ویژگی همگن جمعی بودن تابع ϕ داریم $\phi(x_\circ-r.\text{۱},l)=\phi(x_\circ,l)-r$ در نتیجه $\phi(x_\circ,l)\geq r$ همچنین بنا به تعریف نگاشت ϕ خواهیم داشت :

$$r.\text{۱}\leq\phi(x_\circ,l).\text{۱}\leq x_\circ+l\Rightarrow r.\text{۱}\leq x_\circ+l\quad(*)$$

فرض کنیم $u\in U$ یک عضو دلخواهی باشد، بنا به فرض $x_\circ-u\in Z$ بنابراین $\|x_\circ-u\|=p(x_\circ-u)$ و $\phi(-x_\circ,u)=-p(x_\circ-u)$ در نتیجه بنا به رابطه (*) و ویژگی صعودی تابع ϕ داریم :

$$-\|x_\circ-u\|=\phi(-x_\circ,u)\leq\phi(l-r.\text{۱},u)=\phi(l,u)-r\leq\circ-r=-r$$

$$\Rightarrow\|x_\circ-u\|\geq r\quad\forall u\in U$$

از طرفی طبق فرض داریم $r = \| x_\circ - u_\circ \|$ لذا $d(x_\circ, U) = r$ و $u_\circ \in P_U(x_\circ)$
اثبات نتیجه. فرض کنیم $l = -u_\circ$ باشد و $u \in P_U(x_\circ)$ عنصری دلخواهی باشد بنابه فرض داریم
$\phi(u, -u_\circ) \geq \circ$ در نتیجه بنا به تعریف تابع ϕ داریم $u - u_\circ \leq \phi(u, -u_\circ).۱$ لذا $\circ \leq$ $u \geq u_\circ$
بنابراین $u_\circ = \min P_U(x_\circ)$. □

قضیه. ۳. ۳.۲ فرض کنیم مجموعه U نسبت به نقطه $x_\circ$ یک مجموعه پروکسیمینال باشد و $x_\circ - U \in Z$ همچنین فرض کنیم U_* مجموعه ای بسته باشد. عبارات زیر را درنظر بگیرید:

۱) U_* نسبت به نقطه $x_\circ$ چبیشیف است

۲) U نسبت به نقطه $x_\circ$ چبیشیف است

در اینصورت (۱) همواره (۲).رانتیجه می دهد و رابطه (۲)زمانی (۱) را نتیجه می دهد که هر نقطه مرزی U_* یک نقطه چبیشیف باشد.

برهان . فرض کنیم U نسبت به نقطه $x_\circ$ چبیشیف باشد وهر نقطه‌مرزی U_* یک نقطهٔ چبیشیف باشد. ولی U_* نسبت به نقطه $x_\circ$ چبیشیف نباشد. یعنی وجود داشته باشد $u_*, v_* \in P_{U_*}(x_\circ)$ به طوریکه $u_* \neq v_*$، بنا به قضیه (۳. ۱.۱) وجود دارند $u, v \in U$ به طوریکه $v_* \leq v, u_* \leq u$. بنا به گزاره (۳. ۱۴.۲) داریم $d(x_\circ, U) = d(x_\circ, U_*)$ بنابراین :

$$d(x_\circ, U) \leq \| x_\circ - u \| = P(x_\circ - u) \leq P(x_\circ - u_*) = \| x_\circ - u_* \| = d(x_\circ, U)$$

$$\Rightarrow u \in P_U(x_\circ)$$

به طور مشابه می توان نتیجه گرفت که $v \in P_U(x_\circ)$ لذا $u, v \in P_U(x_\circ) \subseteq P_{U_*}(x_\circ)$. حال نشان می دهیم $u \neq v$ از اینکه $u, v \in P_{U_*}(x_\circ)$ بنابراین $v, u \in bdU_*$ وچون $u_* \leq u$ وطبق فرض هر نقطه مرزی U_* یک نقطهٔ چبیشیف است لذا طبق گزاره (۲. ۳.۲) $u = u_*$. به طور مشابه $v = v_*$. در نتیجه از اینکه $v_* \neq u_*$ لذا $u \neq v$ که این متناقض است با فرض چبیشیف بودن U نسبت به

نقطه $x_\circ$ پس فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود. □

۱.۲.۳ یک نتیجه

در قضیه زیر نشان می دهیم هر مجموعه بسته را میتوان به صورت اجتماع دو مجموعه‌ای نوشت که در شرایط گزاره (۳. ۱۴.۲) صدق می کنند و با استفاده از قضایا بیان شده در این فصل می توان روشی جهت یافتن نقاط بهترین تقریب البته با محدویتهای بیان نمود.

قضیه. ۳. ۲. ۴ فرض کنیم $U \subseteq X$ مجموعه بسته ای باشد و $x \in X$. مجموعه های زیر را در نظر بگیرید:

$$U_x^+ = U \cap (x - Z) \quad U_x^- = U \cap (x + Z)$$

در این صورت عبارات زیر درست اند:

۱) $x - U_x^+ \subseteq Z, \;\; x - U_x^- \subseteq -Z$

۲) $U_x^+ \cup U_x^- = U$

۳) U_x^-, U_x^+ مجموعه های بسته می باشند .

نتیجه . ۳. ۲. ۲ با توجه به قسمت دوم قضیه قبل داریم :

$$\inf_{u \in U} \parallel x - u \parallel = \min\{\inf_{u^+ \in U_x^+} \parallel x - u^+ \parallel, \inf_{u^- \in U_x^-} \parallel x - u^- \parallel\}$$

با فرض $r = \inf_{u \in U} \parallel x - u \parallel$ و$r^+ = \inf_{u^+ \in U_x^+} \parallel x - u^+ \parallel$ و $r^- = \inf_{u^+ \in U_x^-} \parallel x - u^- \parallel$.
در این صورت برای پیدا کردن فاصله r می توان از الگوریتم بیان شده در فصل قبل استفاده نمود. به این صورت که، چون بنا به تعریف $U_x^- \subseteq x + Z$, $U_x^+ \subseteq (x - Z)$ لذا بنا به گزاره (۳. ۱۴.۲) داریم $r^+ = d(x, U_x^+) = d(x, (U_x^+)_*)$ و$r^- = d(x, U_x^-) = d(x, (U_x^-)^*)$ حال اگر

مجموعه های $(U_x^+)_*, (U_x^-)^*$ بسته باشند، می توان الگوریتم گفته شده در فصل قبل را جهت یافتن فواصل r^-, r^+ به کار بست. اگر $r^+ \leq r^-$ در این صورت $r = r^+$ و $P_U(x) = P_{U_x^+}(x)$ اگر $r^- \leq r^+$ در این صورت $r = r^-$ و $P(x)_U = P_{U_x^-}(x)$. در حالتی که $r^+ = r^-$ آنگاه $P_U(x) = P_{U_x^-}(x) = P_{U_x^+}(x)$.

۳.۳ دانوارد ها و توابع حافظ ترتیب

در این بخش قصد داریم به توابعی بپر دازیم که حافظ ترتیب می باشند و باداشتن این ویژگی و شرایط که بعداً خواهیم گفت حافظ نرم نیز می باشند. (رجوع شود به [۱۴])

تعریف. ۳. ۱.۳ نگاشت خطی $T : X \to Y$ را حافظ ترتیب نامیم در صورتیکه :

$$\forall x, y \in X \qquad x \leq y \Rightarrow T(x) \leq T(y)$$

تذکر. ۳. ۱.۳ با توجه به اینکه به ازای هر $x \in X$ داریم $x = x^+ - x^-$ لذا رابطه زیر همواره به ازای هر تابع حافظ ترتیب برقرار است :

$$| T(x) | \leq | T(x^+) | + | T(x^-) | = T(| x |)$$

لم. ۳. ۱.۳ فرض کنیم X, Y دو فضای برداری لاتیس و $T : X \to Y$ به طوریکه T, T^{-1} توابع حافظ ترتیب باشند. در این صورت $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد است اگر وفقط اگر $T(W) \subseteq Y$ مجموعه‌ای دانوارد باشد.

برهان . فرض کنیم $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد باشد و $y \in Y, w \in W$ به طوریکه $y \leq T(w)$ از اینکه T^{-1} حافظ ترتیب است. بنابراین $T^{-1}(y) \leq T^{-1}T(w) = w$ از اینکه $w \in W$ و W دانوارداست، لذا $T^{-1}(y) \in W$ بنابراین $y \in T(W)$ پس $T(W)$ دانوارد است . $(\Rightarrow)$ به طور مشابه ثابت می شود . □

قضیه. ۳. ۱.۳ فرض کنیم X,Y دو فضای برداری لاتیس با عنصرهای یکه $\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_Y$ و $T : X \to Y$ به طوریکه:

۱) T, T^{-1} حافظ ترتیب باشند

۲) $T(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_Y$

آنگاه T یک نگاشت ایزومتر یا حافظ نرم می باشد($\| T(x) \| = \| x \|$)

برهان . بنابه ویژگی نرم و حافظ ترتیب بودن T داریم:

$$| x | \leq \| x \| .\mathbf{1}_X \Rightarrow T(| x |) \leq \| x \| T(\mathbf{1}_X) = \| x \| .\mathbf{1}_Y$$

$$\Rightarrow \| T(x) \| \leq \| x \|$$

با به کار بردن این روش برای T^{-1} داریم $\| x \| \leq \| T(x) \|$ لذا T یک نگاشت ایزومترمی باشد. □

نتیجه . ۳. ۱.۳ اگر عملگر خطی $T : X \to Y$ دارای شرایط قضیه قبل باشد در این صورت گزاره های زیر درست می باشند :

۱) W مجموعه پروکسیمینال و دانوارد است، اگر وفقط اگر $T(W)$ مجموعه‌ای پروکسیمینال و دانوارد باشد.

۲) W مجموعه‌ای دانوارد وچبیشیف است، اگر وفقط اگر $T(W)$ یک مجموعه چبیشیف و دانوارد باشد.

۴.۳ بهترین تقریب همزمان دانوارد ها

بحث تقریب همزمانی مورد توجه بسیاری نظریه پر دازان تقریب می باشد از جمله می توان به اشخاصی چون چنگ[۲] وواتسون [۳] و میلمن[۴] و.. اشاره‌کرد

در این بخش مانیز بحث تقریب همزمان راروی مجموعه های دانوارد برگرفته از مرجع [۱۲] را مورد مطالعه قرار داده ایم .

تعریف. ۳. ۴. ۱ فرض کنید X یک فضای مرتب باشد $W \subseteq X$ وS یک مجموعه کراندار باشد در این صورت فاصله S تامجموعه W را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$d(S,W) = \inf_{w\in W} \sup_{s\in S} \parallel s-w \parallel$$

نقطه $w_\circ$ را بهترین تقریب همزمان W از S می گوییم در صورتیکه :

$$\parallel s-w \parallel = d(S,W)$$

مجموعه همه نقاط بهترین تقریب همزمان را با نماد $S_W(S)$ نمایش می دهیم به عبارت دیگر:

$$S_W(S) = \{w \in W : \sup_{s\in S} \parallel s-w \parallel = d(S,W)$$

تذکر. ۳. ۴. ۱ فرض کنیم $(X, \parallel . \parallel)$ فضای نرمدار لاتیس باشد که در آن($\parallel \parallel$) همان نرم تعریف شده درفصل قبل باشد .در این صورت ما گوی به مرکز S و شعاع r را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$B(S,r) = \{y \in X : sup_{s\in S} \parallel s-y \parallel \leq r\} = \{y \in X : \sup S - r.۱ \leq y \leq \inf S + r.۱\}$$

به طور مشابه قصد داریم به بحث تفریب همزمان روی مجموعه های دانوارد بپردازیم .

[۲] chong
[۳] watson
[۴] milman

قضیه. ۳. ۱.۴ فرض کنیم $W \subseteq X$ و S یک مجموعه کراندار باشد به طوریکه $S \bigcap W = \phi$ در این صورت $S_W(S) \subseteq bdW$

برهان . فرض کنیم $w \in S_W(S)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، پس $sup_{s\in S} \parallel s-w \parallel = d(S,W) = r$ از اینکه $S \bigcap W = \phi$ لذا $r > ۰$. حال فرض کنیم $w \notin bdW$ پس وجود دارد یک $\varepsilon > ۰$ به طوریکه:

$$V = \{y \in X : \sup_{s\in S} \parallel s-w \parallel \leq \varepsilon\} \subseteq W$$

فرض کنیم $\varepsilon_\circ = \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}$ و $s \in S$ قرار می دهیم $w_s = w + \varepsilon_\circ(s-w)$ در این صورت

$$\parallel w - w_s \parallel = \varepsilon_\circ \parallel s-w \parallel \leq \varepsilon_\circ r \leq \varepsilon$$

بنابراین $w_s \in V \subseteq W$ لذا برای هر $s,t \in S$ داریم

$$r = d(S,W) \leq \sup_{t\in S} \parallel t - w_s \parallel$$

$$\Rightarrow r \leq \inf_{s\in S} \sup_{t\in S} \parallel t - w_s \parallel$$

از طرفی $\parallel t - w_s \parallel = \parallel t - w - \varepsilon_\circ(s-w) \parallel$ در نتیجه برای هر $s,t \in S$ داریم :

$$r \leq \inf_{s\in S} \sup_{t\in S} \parallel t - w - \varepsilon_\circ(s-w) \parallel$$

حال اگر $t = s$ اختیار کنیم $\quad r \leq (۱-\varepsilon_\circ) \sup_{t\in S} \parallel t-w \parallel = (۱-\varepsilon_\circ).r < r$

این رابطه نادرست است، پس فرض خلف باطل و $w \in bdW$. □

گزاره. ۳. ۱۵.۴ فرض کنیم $W \subseteq X$ و S یک مجموعه کراندار باشد به طوریکه $S \bigcap W = \phi$ آنگاه W یک مجموعه همزمان پروکسیمینال می باشد.

برهان . فرض کنیم $S \bigcap W = \phi$ و $r := d(S,W)$ در این صورت بنا به تعریف inf برای هر $\varepsilon \geq ۰$ وجود دارد یک $w_\varepsilon \in W$ به طوریکه $\sup_{s\in S} \parallel s - w_\varepsilon \parallel < r + \varepsilon$ بنا به تعریف نرم داریم:

$$-(r+\varepsilon).۱ \leq w_\varepsilon - \sup S \leq (r+\varepsilon).۱$$

قرار می دهیم $w_\circ = \sup S - r.\mathbf{1}$ از اینکه $w_\circ - \varepsilon\mathbf{1} = \sup S - r.\mathbf{1} - \varepsilon\mathbf{1} \leq w_\varepsilon$ و W یک مجموعه دانوارد می باشد نتیجه می شود که به ازای هرε داریم $w_\circ - \varepsilon\mathbf{1} \in W$ ازطرفی W یک مجموعه بسته ای هست. لذا$w_\circ \in W$ با توجه به اینکه $\sup_{s\in S} \parallel s - w_\circ \parallel = r = d(x,W)$ بنابراین $w_\circ \in S_W(S)$ و حکم ثابت می شود. $\square$

نتیجه . ۳. ۱.۴ اگر $W \subseteq X$ مجموعه‌ای دانوارد وبسته باشد و $S \bigcap W = \phi$ دراین صورت $\min S_W(S)$ موجود و برابربا $w_\circ = \sup S - r.\mathbf{1}$ است.

برهان . فرض کنیم$w \in S_W(S)$ در این صورت $sup_{s\in S} \parallel s - w \parallel = r = d(x,W)$ لذا $w \in B(S,r)$ از طرفی به ازای هر$x \in B(S,r)$ داریم $\sup S - r.\mathbf{1} \leq x$ پس $w_\circ \leq w$ بنابراین $w_\circ = \min S_W(S)$ $\square$

گزاره. ۳. ۱۶.۴ فرض کنیم$X \supseteq W$ مجموعه ای دانوارد وبسته باشد و$R_+ = \{\beta \in R : \beta \geq \circ\}$ در این صورت خواهیم داشت :

$$bdW + R_+\mathbf{1} = \{\sup S : S \subseteq X - W\}$$

برهان . فرض کنیم وجود داشته باشد مجموعهٔ کرانداری مانند $S_\circ \subseteq X - W$ به طوریکه $t = \sup S_\circ$ همچنین $r = d(S_\circ, W)$ از اینکه $S_\circ \cap W = \phi$ لذا $r > \circ$ حال قرار می دهیم $w_\circ = \sup S_\circ - r\mathbf{1}$ بنا به نتیجه (۳. ۱.۴) $w_\circ \in S_W(S_\circ)$ بنابراین $w_\circ \in bdW$ پس $t = w_\circ + r\mathbf{1} \in bdW + R_+\mathbf{1}$. برعکس فرض کنیم $t \in bdW + R_+\mathbf{1}$ لذا وجود دارد $w \in bdW$ و$\beta \in R_+$ به طوریکه $t = w + \beta\mathbf{1}$. حال ما قرار می دهیم $S_\circ = \{y \in X : w + \frac{1}{2}\beta\mathbf{1} \leq y \leq t\}$ آشکارا است که $S_\circ$ مجموعه‌ای کراندار و $t = \sup S_\circ$ می باشد. حال نشان می دهیم $S_\circ \cap W = \phi$. فرض کنیم این طور نباشد یعنی وجود داشته باشد $y \in S_\circ \cap W$ در این صورت $w + \frac{1}{2}\beta\mathbf{1} \leq y$ و $y \in W$ از اینکه W یک مجموعه دانوارد است لذا $w + \frac{1}{2}\beta\mathbf{1} \in W \quad (*)$

مجموعه $V = \{z \in X :\parallel z - w \parallel \leq \frac{1}{2}\beta\}$ را درنظر بگیریم با توجه به‌تعریف نرم $V = \{z \in X : w - \frac{1}{2}\beta 1 \leq z \leq w + \frac{1}{2}\beta 1\}$ و بنا به رابطه $(*)$ خواهیم داشت $V \subseteq W$. بنابراین $w \in intW$ که این متناقض است با انتخاب w. پس فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود . □

فصل ۴

مجموعه های دانوارد درفضا های مختلف لاتیس

۱.۴ مجموعه های دانوارد در فضای R^n

ما در این بخش ابتدا قصد داریم به طور خاص بحث بهترین تقریب روی مجموعه های دانوارد را در فضای R^n به عنوان یک فضای لاتیس عام مطرح سازیم. وسپس با استفاده از قضایا اثبات شده در این فضای توانستیم بحث را به نوعی گسترش بد هیم. (رجوع شود به [۳ ،۲])

فرض کنیم $I = \{۱, ۲, ۳....\}$ یک مجموعه‌متناهی از اندیس باشد و فضای برداری R^I متشکل شده باشداز بردارهای $(x_i)_{i\in I}$ به طوریکه $x_i \in R$.

تذکر. ۴. ۱.۱ ما از نماد R^I به جای R^n استفاده می کنیم چرا که بیشتر توابع و روابط تعریف شده در این فضا به اندیس مرتبط می شوند.

همان طور که می دانید روی فضای R^I می توان ترتیب های مختلفی را تعریف نمود در این پایان نامه ترتیب استاندارد یا معمول را که به صورت زیر تعریف می شود روی فضای R^I اتخاذ شده است :

$$\forall x, y \in R^I \quad x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \ \forall i \in I$$

همچنین نرمی که روی این فضا درنظر گرفته شده است نرم مربعی یا به عبارت دیگر: $\| x \| = \max_{i\in I} | x_i |$

تذکر. ۴. ۲.۱ توجه می نماید که به ازای هر $x \in R^I$ مقدار نرم مربعی فوق بامقدار نرم تعریف شده توسط عنصر یکه فضای R^I یکسان می باشد.

تذکر. ۴. ۳.۱ فرض کنیم $A \subseteq R^I$ مجموعهٔ دانوارد باشد. ضمن اینکه تمام قضایا ثابت شده در فصول قبل در مورد A صادق می باشد قصد داریم قضایا جدیدی راجهت شناسایی هر چه بهتر تقریب این مجموعه ها ارائه دهیم .

تابع مینکو فسکی و تابع جفت ساز

فرض کنیم $A \subseteq R^I$ مجموعه‌ای دانوارد باشد. در این صورت تابع $M_A : R^I \to R$ با ضابطه‌زیر را مینکو فسکی جمعی متناظر با مجموعه A می گویند:

$$M_A(x) = \inf\{\lambda \in R : x \in \lambda.۱ + A\}$$

مثال . ۴. ۱.۱ فرض کنیم $A = \{x \in R^I : x \leq v\}$ در این صورت :

$$M_A(x) = \max_{i \in I}(x_i - v_i)$$

برهان .

$$M_A = \inf\{\lambda \in R : x - \lambda.۱ \leq v\}$$

$$= \inf\{\lambda \in R : \forall i \in I \;\; x_i - \lambda \leq v_i\}$$

$$= \inf\{\lambda \in R : \forall i \in I \;\; x_i - v_i \leq \lambda\}$$

$$= \max_{i \in I}(x_i - v_i)$$

□

قضیه. ۴. ۱.۱ فرض کنیم $A \subseteq R^I$ یک مجموعه دانوارد باشد. در این صورت

$$d_A = M_A^+ = \max(\circ, M_A):$$

برهان . فرض کنیم $x \in R^I$ بنا به نتیجه (۲. ۱.۳) داریم :

$$d_A = \min\{\lambda \in R : x - \lambda.۱ \in A\}$$

$$= \max(\circ, \min\{\lambda \in R : x - \lambda.۱ \in A\})$$

$$= M_A^+$$

□

نتیجه . ۴. ۱.۱ فرض کنیم $A \subseteq R^I$ یک مجموعه دانوارد باشد در این صورت:

$$intA = \{x \in R^I : M_A(x) < \circ\}$$

$$R^I \backslash intA = \{x \in R^I : M_A(x) \geq \circ\}$$

$$bdA = \{x \in R^I : M_A(x) = \circ\}$$

همان طور که در فصل (۲) برای مجموعه های دانوارد مشخصه های توسط تابع جفت ساز با ضابطه تعریف شد. در فضای R^I این ضابطه با تعیین همان مقادیر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(x,y) = \min_{i\in I}(x_i - y_i)$$

تعریف. ۴. ۱.۱ فرض کنیم $x \in R^I$، $c \in R$. در این صورت مجموعه D، $D = \{y \in R^I : \ \phi(y,-x) \le c\ \}$ را ابر فضای پایینی وابسته به بردار x می نامند.

قضیه. ۴. ۲.۱ فرض کنیم $A \subseteq R^I$ مجموعه‌ای بسته و دانوارد باشد، $x \in R^I$ در این صورت :

$$d_A(x) = \sup_{D\in H} d_D(x)$$

که در آن H مجموعهٔ تمام ابر فضاهای پایینی D وابسته به بردار x و شامل A می باشد.

برهان . از اینکه به ازای هر $D \in H$, $A \subseteq D$ لذا (۱) $d_A(x) \le \sup_{D\in H} d_D(x)$. برای نشان دادن عکس تساوی کافی است نشان دهیم وجود دارد یک ابر فضای پایینی مانند D به قسمی که $d_A(x) \ge \sup_{D\in H} d_D(x)$.

قرار می دهیم $a^\circ = \min P_A(x)$. مجموعه D را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$D = \{y \in R^I : \ \phi(y, -a^\circ) \le \circ\ \}$$

اولاً نشان می دهیم $A \subseteq D$، ثانیاً $d_A(x) \ge \sup_{D\in H} d_D(x)$. فرض کنیم وجود داشته باشد $a \in A$ به قسمی که $a \notin D$. به عبارت دیگر به ازای هر $i \in I$ داریم $(*) \quad a_i > a_i^\circ$.

بردار a^- را که به ازای هر $i \in I$، مولفه iام آن به صورت $a_i^- = \min(a_i, x_i)$ تعریف می شود را در نظر بگیرید . با توجه به ترتیب استاندارد داریم $a^- \le a$. از اینکه A مجموعه دانواردی لذا

$a^- \in A$. با توجه به اینکه $\circ < d_A(x)$ در نتیجه به ازای هر $i \in I$، $(**) \quad x_i > a_i^\circ$. با توجه به رابطه $(*), (**)$ داریم $a^- > a_i^\circ$. بنا به تعریف نرم

$$\| x - a^- \| = \max_{i \in I} | x_i - a_i^- | < \max_{i \in I} | x_i - a_i^\circ | = \| x - a^\circ \|$$

که این متناقض است با انتخاب a°. لذا فرض خلف باطل وحکم ثابت می شود. اینک شرط دوم را نیز نشان می دهیم .

از اینکه D مجموعهٔ بسته ای است بنا به قضیه (۱. ۵.۱) وجود دارد x°، به قسمی که $\| x - x^\circ \| = d_D(x)$. ازاینکه $x^\circ \in D$، لذا وجود دارد حداقل یک اندیس مانند $j \in I$،به طوریکه $x_j^\circ < a_j^\circ$. همچنین بنا به تعریف نرم داریم :

$$d_D(x) = \| x - x^\circ \| = \max_{i \in I} | x_i - x_i^\circ | > | x_j - x_j^\circ | > | x_j - a_j^\circ | = d_A(x) \quad (۲)$$

. از روابط (۱) و (۲) حکم ثابت می شود. □

۲.۴   m —شبه دانوارد ها

در این بخش توانستیم مجموعه های را معرفی کنیم که لزوماً دانوارد یا آپوارد نیستند ولی این قابلیت را دارند که تحت نگاشتی هومئومرفیسم به این مجموعه ها تبدیل شوند.

فرض کنیم $I = \{۱, ۲, ۳, ...N\}$ مجموعه‌ای از اندیس باشد و $I_m = \{i_۱, i_۲, ..i_m\}$ یک زیر مجموعه دلخواه ازI . در این صورت برای هر $x \in R^I$ ما استفاده می کنیم از نماد $R_x^{I_m}$ برای مجموعه های که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_x^{I_m} = \{y = (y_i)_{i \in I} \in R^I : \forall i \in I_m \; y_i \le x_i \; and y_i \ge x_i \;\; \forall i \in I - I_m\} \qquad (۴.۱)$$

همچنین استفاده می کنیم از نماد 1_{I_m} برای برداری که مولفه های آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \in I_m \\ -1 & i \notin I_m \end{cases}$$

فرض کنیم $x = (x_i)_{i\in I} \in R^I$، نگاشت $T_m : R^I \to R^I$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید :

$$T_m(x) = y = (y_i)_{i\in I} \tag{۴.۲}$$

که :

$$y_i = \begin{cases} x_i & i \in I_m \\ -x_i & i \notin I_m \end{cases}$$

لم. ۴. ۲. ۱ نگاشت T_m نگاشتی هومئومرفیسم است .

برهان . چون T_m یک نگاشت یک به یک و پوشا می باشد، لذا T_m^{-1} موجود وچون هریک از مولفه های نگاشت و وارون آنها نگاشت های پیوسته می باشند لذا T_m یک نگاشت هومئومرفیسم است . □

تعریف. ۴. ۲. ۲ فرض کنیم $G \subseteq R^I$ باشد در این صورت G را m —شبه دانوارد می نامیم، اگربه ازای هر$g \in G$، $R_g^{I_m} \subseteq G$

قضیه. ۴. ۲. ۳ فرض کنیم $G \subseteq R^I$ مجموعه ای m —شبه دانوارد باشد. در این صورت $T_m(G)$ مجموعه‌ای دانوارد است .

برهان . برای آنکه نشان دهیم $T_m(G)$ مجموعه‌ای دانوارد می باشد، باید ثابت کنیم به ازای هر $h \in T_m(G)$ اگر $x \in R^I$ یافته شود به طوریکه $x \leq h$ آنگاه$x \in T_m(G)$. با توجه به لم

(۴. ۱.۲) به ازای هر$T_m(G)$ $h\ \in T_m(G)$ وجود دارد $g=(g_i)_{i\in I}\in G$ به طوریکه$T_m(g)=h$ بنا به تعریف (۲.۴) داریم:

$$h_i=\begin{cases} g_i & i\in I_m\\ -g_i & i\notin I_m\end{cases}$$

ازاینکه $x\leq h$ می باشد، به ازای هر$i\in I$ داریم $x_i\leq h_i$. لذا به ازای هر $i\in I-I_m$ ، $x_i\leq -g_i$ و$x_i\leq g_i$ به ازای هر $i\in I_m$.

حال اگر $w=w_i$ کهw_i به صورت زیر تعریف می شوند:

$$w_i=\begin{cases} x_i & i\in I_m\\ -x_i & i\notin I_m\end{cases}$$

را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه $g\in G$ و G مجموعه ای m —شبه دانوارداست، نتیجه می شود که $x=T_m(w)\in T_m(G)$ و حکم ثابت می شود. □

قضیه. ۴. ۲.۴ فرض کنیم $G\subseteq R^I$ یک m —شبه دانوارد باشد و$x\in R^I$، $r=dist(x,G)$ و$r^{\cdot}=dist(T_m(x),T_m(G))$ در این صورت $r=r^{\cdot}$

برهان . با توجه به نرم در نظر گرفته شده یعنی نرم مربعی و با توجه به اینکه $|x|=|-x|$ خواهیم داشت

$$\| T_m(x)-T_m(g)\| = \max_{i\in I}| T_m(x)_i - T_m(g)_i|$$

$$=\max\{\max_{i\in I_m}|g_i-x_i|, \max_{i\in I-I_m}|g_i-x_i|\}$$

$$=\| x-g\|$$

در نتیجه با گرفتن inf داریم

$$\inf_{g\in G}\| T_m(x)-T_m(g)\| = \inf_{g\in G}\| x-g\|$$

$$\Rightarrow dist(x,G)=dist(T_m(x),T_m(G)$$ □

نتیجه . ۴. ۲.۲ فرض کنیم $G \subseteq R^I$ m —شبه دانوارد و بسته باشد. آنگاه

$$P_G(x) = \{g \in G : T_m(g) \in P_{T_m(G)}T_m(x)\}$$

به طور خاص $x - r۱_m \in P_G(x)$ می باشد.

برهان . به وسیله لم (۴. ۲.۱) و قضیه (۴. ۲.۴) نتیجه حاصل است . □

نتیجه . ۴. ۳.۲ فرض کنیم $G \subseteq R^I$ m —شبه دانوارد و بسته باشد و$T_m(G)$ یک مجموعه اکیداً دانوارد باشد در این صورت G مجموعه چبیشف می باشد .

قضیه. ۴. ۵.۲ فرض کنیم T مجموعه‌ای از اندیس باشد و $(A_t)_{t\in T}$ یک خانواده از مجموعه های بسته و m —شبه دانوارد باشد و $A = \bigcap A_t$ در این صورت :

$$d_A(x) = \sup_{t\in T} d_{A_t}(x)$$

برهان . فرض کنیم $x \in X$ و $r_t = d_{A_t}$ از اینکه $A \subseteq A_t$ لذا $\forall\ t \in T,\ r_t \leq d_A(x)$ بنابراین $s = \sup r_t \leq d_A(x)$ حال اگر $s = \infty$ در نتیجه $d_A(x) = \infty$ وحکم ثابت می شود .بنابراین فرض کنیم $s < \infty$. از اینکه $r_t \leq s$ لذا به ازای هر $i \in I_m$، $(x - s.۱)_i \leq (x - r_t.۱_m)_i$ و به ازای هر$i \in I - I_m$، $(x - s.۱)_i \geq (x - r_t.۱_m)_i$ از طرفی بنا به نتیجه (۴. ۲.۲) $x - r_t.۱_m \in A_t$ و چون A_t به ازای هر $t \in T$ مجموعه‌های m —شبه دانوارد می باشند لذا $x - s.۱_m \in A_t$ در نتیجه $x - s.۱_m \in A$ از طرفی داریم $\| x - (x - s۱_m) \| = s \geq d_A(x)$ لذا $d_A(x) = \sup_{t\in T} d_{A_t}(x)$.

□

m-شبه دانوارد مثبت

فرض کنیم $W \subset R^+$ در این صورت گوییم W یک m-شبه دانوارد مثبت است هرگاه $W \subseteq (R_g^m)^+$ که در آن $(R_g^m)^+$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$(R_g^m)^+ = R_g^m \cap R^+ \qquad (۴.۳)$$

تعریف. ۴. ۲. ۳ فرض کنیم $W \subset R^+$ m-شبه دانوارد مثبت باشد. اشتراک تمام مجموعه های m-شبه دانوارد شامل W را پوسته m-شبه دانوارد مجموعه W می گویند و آن را با نماد W_{*_m} نمایش می دهند.

تعریف. ۴. ۲. ۴ فرض کنیم $I = \{۱, ۲, ۳, ...N\}$ مجموعه‌ای از اندیس باشد و $I_m = \{i_۱, i_۲, ..i_m\}$ یک زیر مجموعه دلخواه از I. در این صورت برای هر $x \in R^I$ ما متمم تصویر نقطه x رانسبت به فضای R^{I_m} را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$copr_m(x) = copr_m(x)_i$$

که:

$$copr_m(x)_i = \begin{cases} ۰ & i \in I_m \\ x_i & i \notin I_m \end{cases}$$

قضیه. ۴. ۲. ۶ فرض کنیم $W \subseteq R^+$ مجموعه‌ای m-شبه دانوارد مثبت باشد. در این صورت عبارات زیر درست می باشند:

۱) $W_{*_m} = \{x \in R : \ copr_m(x), x^+ \in W\}$

۲) $W = W_{*_m} \bigcap R^+$

برهان . قرار می دهیم $A=\{x\in R:\ copr_m(x), x^+\in W\}$ نشان می دهیم A یک مجموعهm-شبه دانوارد می باشد. فرض کنیم $a=(a_i)_{i\in I}\in A$ و وجود داشته باشد $x\in R_a^{I_m}$ در این صورت باید نشان دهیم $x\in A$. بنا به تعریف (۳.۴) داریم:

$$\begin{cases} x_i \le a_i & i\in I_m \\ a_i \ge x_i & i\notin I_m \quad (*) \end{cases}$$

حال از اینکه $a=(a_i)i\in I\in A$ لذا نقطه $copr_m(a)$ متعلق به مجموعه W می باشد. نقطه $y=copr_m(x)$ را درنظر بگیریم در این صورت بنا به تعریف تابع (۴. ۴.۲) و (*) رابطه زیر برقرار است :

$$\begin{cases} y_i \le a_i & i\in I_m \\ a_i = y_i = \circ & i\notin I_m \end{cases}$$

از آن جا که W یک مجموعهm-شبه دانوارد است، لذا $copr_m(x)\in A$ و با توجه به‌اینکه $a^+\in A$ و رابطه (*) داریم

$$\begin{cases} x_i^+ \le a_i^+ & i\in I_m \\ x_i^+ \ge a_i^+ & i\notin I_m \end{cases}$$

لذا $x^+\in W$ بنابراین $x\in A$ لذا A یک m-شبه دانوارد می باشد . برعکس نشان می دهیم $A\subseteq W_{*m}$. فرض کنیم $x\in A$ در این صورت $x^+\in W\subseteq W_{*m}$ از طرفی داریم $copr_m(x)=copr_m(x^+)$, و برای هر $i\in I_m$ داریم $x_i^+\ge x_i$. حال از اینکه W_{*m} یک m-شبه دانوارد است لذا $x\in W_{*m}$ در نتیجه $A\subseteq W_{*m}$ و حکم ثابت می شود. □

قضیه. ۴. ۲. ۷ فرض کنیم $W\subseteq R^+$ یک m-شبه دانوارد مثبت باشد و $x^\circ\in R^+$ آنگاه:

$$d(x^\circ, W) = d(x^\circ, W_{*m})$$

برهان . از اینکه $W\subseteq W_{*m}$ لذا $(*)\quad d(x^\circ,W)\ge d(x^\circ,W_{*m})$. حال طرف دیگر تساوی فرض کنیم $y\in W_{*m}$ بنا به تعریف نرم داریم :

$$\| y - x^\circ \| = \max_{i \in I} | y_i - x_i^\circ |$$
$$= \max\{\max_{i \in I_m} | y_i - x_i^\circ |, \max_{i \in I - I_m} | y_i - x_i^\circ |\}$$
$$\geq \max\{\max_{i \in I_m} | y_i^+ - x_i^\circ |, \max_{i \in I - I_m} | y_i^+ - x_i^\circ |\}$$
$$= \| y^+ - x_\circ \| \geq d(x^\circ, W) \qquad (**)$$

از رابط (*) و (**) خواهیم داشت $d(x^\circ, W) = d(x^\circ, W_*)$ □

۱.۲.۴ m —شبه دانواردها در فضای حاصل جمع مستقیم

ما توانستیم تمام مطالب گفته شده در مورد m —شبه دانواردها در فضای R^n را نیز در فضای حاصل جمع مستقیم متشکل از فضای های لاتیس تعمیم دهیم. لذا با یک مدلسازی به نحو زیر به این هدف دست یافتیم .

فرض کنیم $(X_i, \| . \|_i)$ فضای لاتیس نرمدار با عنصر یکه ۱_i باشند. و $\sum_i^n X_i$ حاصل جمع مستقیم این فضا ها باشد همان طور که می دانید عمل جمع روی این فضا به صورت مولفه به مولفه به صوت زیر تعریف می شود :

$$\forall \ z = \sum_i^n y_i \ , \ w = \sum_i^n x_i \in \sum_i^n X_i \qquad z + w = \sum_i^n (x_i + y_i)$$

ما این فضا را به نرم زیر مجهز کردیم :

$$\forall \ z = \sum_i^n x_i \in \sum_i^n X_i \qquad \| z \| = \max(\| x_i \|_i)$$

همچنین رابطه ترتیبی زیر را مشابه ترتیب استاندارد فضای R^n تعریف نمودیم :

$$w = \sum_i^n x_i, \ z = \sum_i^n x_i \in \sum_i^n X_i \quad w \leq z \Leftrightarrow y_i \leq x_i \ \ \forall \ i \in I$$

و به طور مشابه عنصر های $۱_{\bigoplus} = (۱_۱, ۱_۲, ..۱_n)$ و $۱_{\bigoplus}^{I_m}$ راتشکیل دادیم .

همان طور که مشاهده می کنید، اعمال تعریف شده روی این فضا، مشابه به فضای R^n طراحی شده است. لذا خیلی مطالب گفته شده تکرار خواهند شد. که ما از بیان آنها خود داری می کنیم .

۳.۴   بهترین تقریب در فضای ضرب تانسوری

بحث بهترین تقریب روی مجموعه های محدب در فضای تانسوری در سال های اخیر مورد مطالعه افراد بسیاری چون چنی [۱] بوده است. مانیز در پی اقدامات انجام شده در مورد مجموعه های دانوارد در فضای لاتیس دار تصمیم گرفتیم اولاً یک ترتیب را روی این فضا تعریف نمایم. ثانیاً نرمی جدیدی را روی این فضا تعریف نموده وسپس بحث های انجام شده در فضای لاتیس ها را نیز در این فضا مطرح سازیم .

ابتدا به مقدماتی از تعریف این فضا برگرفته ازمرجع [١٦] می پردازیم.

فضای تانسوری

فرض کنیم Y, X فضاهای باناخ باشند همچنین فرض کنیم X^* فضای دوگان متناظر با فضای X باشد.

عملگر $A : X^* \to Y$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$A(\phi) = \sum_{i}^{n} \phi(x_i)y_i \quad \phi \in X^*$$

همان طور که می بینید متناظر با $n \in N$ و $x_i \in x,\ y_i \in Y$ ، عملگرهای متفاوتی روی فضای X^* تعریف می شود، ما جهت تمایز این عملگرها عبارت $\sum_i^n x_i \otimes y_i$ را به کار خواهیم برد.

همچنین با توجه به این عملگرها یک رابطه هم ارزی به صورت زیر تعریف می شود :

$\sum_i^n x_i \otimes y_i \sim \sum_i^m v_i \otimes u_i$ اگر و فقط اگر این دو عبارت عملگر یکسانی را تعریف کنند .

مجموعه تمام کلاس های هم ارزی ایجاد شده از این رابطه هم ارزی را فضای تانسوری و آن را با نماد $X \bigotimes Y$ نمایش می دهند.

[۱] cheney

عمل جمع و ضرب اسکالر روی این فضا به صورت زیرتعریف می شود:

$$\sum_k^n x_k \otimes y_k + \sum_j^m v_j \otimes u_j = \sum_i^{n+m} a_i \otimes b_i$$

که در آن $a_i = x_k, b_i = y_k$ برای $i = ۱..n$ و $a_i = v_j, b_i = u_j$ برای $i = n + j$

همچنین به ازای هر $\lambda \in R$ داریم :

$$\lambda \sum_k^n x_k \otimes y_k = \sum_k^n \lambda x_k \otimes y_k = \sum_k^n x_k \otimes \lambda y_k$$

به طور خاص :

$$۰ \otimes x = ۰ \otimes y = ۰ \otimes ۰ = ۰$$

لم. ۴. ۳. ۱ درفضای $X \otimes Y$ هر عبارت درصورتیکه هم ارز $۰ \otimes ۰$ نباشد هم ارز با یک عبارت مانند $\sum_k^n x_k \otimes y_k$ می باشد که در آن مجموعه های $\{x_۱...x_n\}$ و $\{y_۱,..y_n\}$ مستقل خطی می باشند .

برهان . رجوع شود به [۱٦]. □

مجموعه های $\phi-$ دانوارد

فرض کنیم Y یک فضای نرمدار لاتیس با عنصر یکه ۱_Y باشد و $\phi \in X^*$ در این صورت رابطه‌ای ترتیبی متناظر با تابع ϕ را روی فضا $X \otimes Y$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\sum_i^n x_i \otimes y_i \leq_\phi \sum_i^m v_i \otimes u_i \Leftrightarrow \sum_i^n \phi(x_i) y_i \leq \sum_i^m \phi(v_i) u_i$$

با توجه به این رابطه نرم جدیدی را به صورت زیر روی این فضا اتخاذ می کنیم :

$$\| \sum_i^n x_i \otimes y_i \|_\phi = \inf\{\lambda \geq ۰ : | \sum_i^n \phi(x_i) y_i | \leq \lambda ۱_Y\}$$

تذکر. ۴. ۳. ۱ فرض کنیم $x \in X$ و $\phi \in X^*$ بدیهی است که $\phi(\frac{x}{\phi(x)}) = ۱$ ، ما برای نمایش عنصر $\frac{x}{\phi(x)}$ درقضایااین بخش نماد e را به کار می بریم .

تعریف. ۴. ۳. ۱ فرض کنیم $W \subseteq X \bigotimes Y$ باشد در این صورت W را $\phi -$ دانوارد می نامیم. درصورتیکه:

$$w \in W \ , z \in X \bigotimes Y, \quad z \leq_\phi w \Rightarrow z \in W$$

قضیه. ۴. ۳. ۱ فرض کنیم $W \subseteq X \bigotimes Y$ مجموعه ای $\phi -$ دانوارد باشد. در این صورت W مجموعهٔ پروکسیمینال است .

برهان . فرض کنیم $z_\circ = \sum_i^n x_i \otimes y_i \in X \bigotimes Y - W$ و $r = d(z_\circ, W) = \inf_{w \in W} \parallel z_\circ - w \parallel_\phi$ در این صورت بنا به تعریف inf برای هر $\varepsilon \geq ۰$ وجود دارد یک $w_\varepsilon = \sum_i^n u_i^\varepsilon \otimes v_i^\varepsilon \in W$ به طوریکه $\parallel z_\circ - w_\varepsilon \parallel_\phi < r + \varepsilon$ بنا به تعریف نرم داریم:

$$| \sum_i^n \phi(x_i) y_i - \sum_i^n \phi(u_i^\varepsilon) u_i^\varepsilon | \leq \lambda ۱_Y$$

$$-(r+\varepsilon).۱_Y \leq \sum_i^n \phi(x_i) y_i - \sum_i^n \phi(u_i^\varepsilon) u_i^\varepsilon \leq (r+\varepsilon).۱_Y$$

قرار می دهیم $w_\circ = z_\circ - re \otimes ۱_Y$ از اینکه $w_\circ - \varepsilon e \otimes ۱_Y = x_\circ - (\varepsilon + r) e \otimes ۱_Y \leq_\phi w_\varepsilon$ و W یک مجموعه$\phi -$ دانوارد می باشد نتیجه می شود که به ازای هرε، $w_\circ - \varepsilon e \otimes ۱_Y \in W$ ازطرفی W یک مجموعه بسته ای هست در نتیجه $w_\circ \in W$ و با توجه به اینکه $\parallel x_\circ - w_\circ \parallel_\phi = r = d(z_\circ, W)$ بنابراین $w_\circ \in P_W(z_\circ)$ وحکم ثابت می شود. □

نتیجه . ۴. ۳. ۱ فرض کنیم $W \subseteq X \bigotimes Y$ مجموعه ای $\phi -$ دانوارد باشد. همچنین $z = \sum_i^n x_i \otimes y_i \in X \bigotimes Y$ و $r = d_W(z)$ در این صورت:

$$\sum_i^n x_i \otimes y_i - re \otimes ۱_Y = \min P_W(z)$$

نتیجه . ۴. ۳. ۲ فرض کنیم $W \subseteq X \bigotimes Y$ مجموعه ای $\phi -$ دانوارد باشد و $z = \sum_i^n x_i \otimes y_i$ آنگاه:

$$d_W(z) = \min\{\lambda \geq ۰ : z - \lambda e \otimes ۱_Y \in W\}$$

برهان . قرار می دهیم $A = \{\lambda \geq ۰ : z - \lambda e \otimes ۱_Y \in W\}$. اگر $z \in W$ در این صورت $z - ۰e \otimes ۱_Y \in W$ لذا $\min A = ۰ = d(z, W)$. پس فرض کنیم $z \notin W$ در این صورت $d(z, W) \geq ۰$ حال فرض کنیم $\lambda \geq ۰$ مقدار دلخواهی باشد به قسمی که $z - \lambda.e \otimes ۱_Y \in W$ دراین صورت :

$$\lambda = \| z - (z - \lambda.e \otimes ۱_Y) \|_\phi \geq d(z, W) = r$$

از طرفی بنا به نتیجه قبل داریم $z - r.e \otimes ۱_Y \in W$ پس $r \in A$ بنابراین $\min A = r = d(z, W)$

$\square$

نتایج کلی

ما دراین پایان نامه سعی کردیم در یک سیر منظم به بررسی بهترین تقریب توسط مجموعه های خاص به نام دانوارد ها وآپوارد ها بپردازیم . در این راستا ابتدا به معرفی این مجموعه هاو مشخصه های آنها در فضای لاتیس پرداختیم. سپس ثابت کردیم که هر مجموعه بسته از این نوع مجموعه ها پروکسیمینال می باشد. در طی اثبات این قضیه مینیم عناصر بهترین نقاط تقریب به عنوان یکی از این نوع نقاط یافته شد، که نقش اساسی در پیدا کردن فاصله ایفا می کرد. در واقع با استفاده از این نقطه و قضایای موجود توانستیم یک الگوریتم را جهت یافتن فاصله مطرح سازیم. در این بین مجموعه های اکیداً دانوارد را معرفی کردیم ونشان دادیم این مجموعه‌ها چبیشف می باشند. در ادامه مباحث به ارتباط بین مجموعه ای مانند A وپوسته دانوارد آن پرداختیم . همچنین برخی خواص توپولوژیک این مجموعه را مورد بررسی قرار دادیم به طور مثال نشان دادیم هر مجموعه دانوارد همبند می باشد در قضیه مهمی نشان دادیم به ازای هر نقطه دلخواه مانند x فاصله مجموعه A تا این نقطه برابر فاصله‌این نقطه تا پوسته دانوارد این مجموعه یعنی A_* می باشد. از این قضیه جهت بدست آوردن جواب های مسئله تقریب مجموعه های بسته (البته با محدودیت ها وشرایط) استفاده کردیم. در ادامه مشخصه هایی برای نقاط تقریب بیان کردیم. همچنین این مباحث را به طور مشابه برای بحث تقریب همزمانی به کار بستیم .

در فضای R^n با مطرح ساختن m- شبه دانوارد ها و تعمیم آنها در فضای حاصل جمع مستقیم خواستیم مجموعه های جدید نه لزوماً محدب را معرفی نمایم و بهترین تقریبشان را مورد مطالعه قرار دهیم. همچنین کوشیدیم تا این مباحث را نیز در فضای تانسوری مطرح سازیم. لذا برای این فضا که تا این زمان ترتیبی تعریف نشده بود یک رابطه ترتیبی بیان نمودیم و با تعریف نرمی جدید در این فضاسعی کردیم آنچه را که آموخته بودیم در مورد این فضانیز به کار بندیم .

مراجع

کتاب‌نامه

[1] A. M. Rubinov, I. Singer . "Donward set and their sepreation and approximation properties ." *J.Global optimiztion* , (2002) , 23, pp 117-137.

[2] A. M. Rubinov, I. Singer "Best approximation by normal and conrmal set" *J.of. Approximation theory* , (2002) 107, pp 212-243.

[3] A. M. Rubinov, "*Abstraact convexity and global optimization*" .Kluwer academic publisher,Buston (2002).

[4] A. M. Rubinov, "Topicul and Sup-Topical function, downward sets, abstract convexity" *J. Optimiztion*, (2001) vol 50, pp 307-351.

[5] A. M. Rubinov and A. J. Zalvaski, "Tow Proposisity ersults in monotonic analysis" *J. Numerical function analysis and optimizatio* ,(2003) no 23, pp 651-668.

[6] F.Deutch, "Best approximation in inner product spaces ", Springer - verlag,2002.

[7] H. Mazaheri, M. Hossein Zadeh" The pereserving approximation ",*J. International mathematical* (2007), 2(17), pp 905-909.

[8] H. Mohebei, "Donward set and their simultaneous approximation properties whith application "*J. Numerical functional analysis and optimization* . (2004) vol 25, pp 685-705 .

[9] H. Mohebei, and Momeneaei. Kermani ," A study of Donward set wiht p-functions " *J. Numerical functional analysis and optimization*,(2009), 30(3-4), pp 322-336.

[10] H. Mohebei, A. M. Rubinov, H. sadeghi ," Best approximation in a class of normed space whit star-shaped cones ",*J. Numerical functional analysis and optimization* ,(2006) 27 (3-4), pp 411-436.

[11] H. Mohebei and E. Naraghirad , " Distance from apoint to downward set in a banach lattice " *J. optimization* , (2008) vol.4, no 27, pp 641-649.

[12] I. Singer,*" Abstraact convex analysis "*, Wieky- Interscience, Newyork,(1987).

[13] I. Singer," The Theory of best approximation and function analysis " *J.Reginal confeereence series in applied mathematics*, (1974) , No 13 PP 201-225 .

[14] I. Singer, *" Best approximation in normed linear space by elementes of linear subspace"*, Springer -verlag (1970).

[15] S. M. S. Modares , M. deghaei ," New results for best approximation on banach lattice " *J.Nonlinear analysis* , (2009) 70, pp 3342-3347.

[16] W. A. Light and E. W. Cheney "Approximation theory in tensor product ,space" Lecture Note in Matamatics 1169, (1985).

[17] W. Rudin, "Functional analysis", 2nd ed. McGraw-Hill Inc, New York (1991).

[۱۸] رودین والتر ، آنالیز ریاضی، ترجمه عالم زاده علی اکبر ، چاپ هشتم، انتشارات جهاد دانشگاهی تهران (۱۳۷٦).

[۱۹] کنت هافمن و ری کنزی ، جبرخطی . ترجمه فرشیدی جمشید، چاپ یازدهم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۸۳).

پیوست ۱

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

اجتماع	Union
اشتراک	Intersection
اکیداً	Strongly
باناخ	Banach
بستار	Closure
بهترین تقریب	Best approximation
پوستهٔ دانوارد	Downward hall
پیوسته	Continuous
تام	Complete
تبدیل	Translation
تهی	Empty
ثابت	Constant
جدایی ساز	separation

جفت ساز .... Coupling

چبیشف .... Chebyshev

حافظ .... Preserving

درون .... Interior

رابطه .... relation

زیرمجموعه سره .... Proper subset

شبه دانوارد .... Quasi downward

صعودی .... Increasing

فشرده .... Compact

فضای باناخ .... Banach space

لیپ‌شیز .... Lipschitz

متر هاسدورف .... Hausdorff metric

متمم .... Complement

محدب .... Convex

مخروط .... Conic

مرجع .... Universal

مرزی .... Boundary

نزولی .... Decreasing

نگاشت .... Mapping

نیمه پیوسته .... Semicontinuous

همگرایی .... Convergence

همگن .... Hoogeneous

واحد .... Unit

وجود .... Existence

یکتا .... Unique

یکنواخت .... Uniform

یکنوایی .... Monotonic

پیوست ۲

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

فضای باناخ	Banach space
بهترین تقریب	Best approximation
مرزی	Boundary
بسته و کراندار	Bounded closed
بستار	Closure
چبیشف	Cebyshev
فشرده	Compact
متمم	Complement
تام	Complete
ثابت	Constant
پیوسته	Continuous
همگرایی	Convergence
محدب	Convex

مخروط .... Cone

هم‌ارزی .... Correspond

جفت ساز .... Coupling

نزولی .... Decreasing

رو به پایین .... Downward

پوستهٔ دانوارد .... Downward hall

تهی .... Empty

درون .... Interrior

اشتراک .... Intersection

فضای لاتیس .... Lattic space

لیپشیتز .... Lipschitz

نگاشت .... Mapping

یکنوایی .... Monotonic

حافظ .... Preserving

نقطه .... Pointe

زیرمجموعه سره .... Proper subset

شبه دانوارد .... Quasi downward

رابطه .... Relation

نیمه پیوسته .... Semicontinuous

جدایی ساز .... separation

هم زمانی .... Simultaneous

حاصل ضرب تانسوری .... Tensor product

تبدیل	Translation
یکنواخت	Uniform
اجتماع	Union
یکتا	Unique
واحد	Unit
رو به بالا	Upward

Abstract

The purpoose of this thesis is to introduce particuler subsets of a lattice normed space X , which is not necessarily convex. We call them downward sets. We discuss about the conditions for best approximation by elements of downward sets. Then we introduce particuler subsets of X^+ positive cone of X, which we call them normal set. Also connection between normal set , downward set , their best approximation. We use of discusses for show the proximinalitibity some other closed sets of X space . We use these results to obtained in downward sets as a tool for found best approximation of new sets .

Keywords:*Best apprximation , Downward set, Proximinal set ,Lattice space.*

SHAHROOD UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Faculty : MATHEMATIC

BEST APPROXIMATION ON SPICIAL NONCONVEX SETS AND APPLICATIONS

SUPERVISOR :

MAHDI IRANMANESH

BY

FATEMH SOLIMANY

SEP 2010