

الحمد لله  
الذي هدانا لهذا  
الذي كنا لنهتدي لہ  
لو اننا لم نكن  
نؤمن بالله  
واليوم الآخر  
لكن الحمد لله  
الذي هدانا لهذا  
الذي كنا لنهتدي لہ



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضی مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# مدل‌های ریسک بیمه با حق بیمه‌های وابسته به سرمایه‌ی شرکت بیمه

نگارنده: محمد رامشگر

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

استاد مشاور

دکتر مجتبی غیاثی

بهمن ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



دانشگاه تهران

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد رامشگر  
با شماره دانشجویی ۹۳۰۷۸۲۴ رشته ریاضی گرایش مالی  
تحت عنوان مدل های ریسک بیمه با حق بیمه های وابسته به سرمایه ی شرکت بیمه که در تاریخ  
۹۶/۱۱/۰۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام  
می گردد:

قبول ( با امتیاز ۱۸/۵ درجه یک ) ☐ مردود ☐  
نوع تحقیق: نظری ☐ عملی ☐

| عضو هیأت داوران           | نام و نام خانوادگی     | مرتبه علمی | امضاء |
|---------------------------|------------------------|------------|-------|
| ۱- استاد راهنمای اول      | دکتر الهام دسترنج      | استادیار   |       |
| ۲- استاد راهنمای دوم      |                        |            |       |
| ۳- استاد مشاور            | دکتر مجتبی غیائی       | استادیار   |       |
| ۴- نماینده تحصیلات تکمیلی | دکتر مهدی رضا خورسندی  | استادیار   |       |
| ۵- استاد ممتحن اول        | دکتر احمد نزاکتی       | دانشیار    |       |
| ۶- استاد ممتحن دوم        | دکتر سید مجتبی میرلوحی | استادیار   |       |



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم رامشگر

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



سپاس مخصوص خداوندی است که هرچه دارم از اوست، به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.  
لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را  
از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یار یکرشان نبود، این پایان نامه به انجام نمی رسید. ابتدا از استاد گرانقدرم سرکار  
خانم دکتر الهام دسترنج که زحمات راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.  
سپاس آخر را به مهربانترین همراهن زندگیم، به پدر و مادر تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت  
بوده است.

محمد رامشگر

بهمن ۱۳۹۶

## تعهد نامه

اینجانب محمد رامشگر دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان مدل های ریسک بیمه با حق بیمه های وابسته به سرمایه ی شرکت بیمه ، تحت راهنمایی الهام دسترنج متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمد رامشگر

بهمن ۱۳۹۶

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.



## چکیده

در اقتصاد امروز، ریاضیات مالی نقش مهمی را در پیش‌بینی مدل‌های دقیق برای آینده سرمایه‌گذاری در بخش‌های مختلف، ایفا می‌کند. خصوصاً در بازارهای مالی می‌توان کاملاً این تأثیر را در گذشته و اکنون لمس کرد. در واقع ریاضیات مالی میزان ریسک و نرخ بازگشت سرمایه را تعیین می‌کند.

امروزه شرکت‌های بیمه نقش مهم و ویژه‌ای در سرمایه‌گذاری بخش‌های مختلف جامعه (چه اجتماعی و چه اقتصادی) دارند. از جمله آن می‌توان به مسائلی چون سلامت، صنعت، تجارت و ... اشاره نمود.

در این پایان‌نامه ما ابتدا تعاریف پایه و همچنین تعاریفی در مورد سرمایه شرکت بیمه، حق بیمه و احتمال ورشکستگی آن بیان کرده و سپس نتایج آن را بررسی می‌کنیم. با استفاده از نتایج به‌دست آمده روشی را برای به‌دست آوردن میزان ریسک شرکت بیمه ارائه می‌کنیم. در واقع براساس مسئله‌ی مقدار مرزی، با استفاده از روش اپراتور گرین، راه‌حل‌های رسیدن به میزان ریسک شرکت بیمه را توسعه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: مدل‌های تصادفی، احتمال شکست، سرمایه شرکت بیمه، ریسک



## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. سیدحسن اسحق، الهام دسترنج و محمد رامشگر (۱۳۹۴)، مدلسازی بازارهای فصلی، چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه یزد، ۴۷۳-۴۷۰، شهریور ۱۳۹۴.





# فهرست مطالب

س فهرست تصاویر

ف فهرست جداول

|    |                                                        |    |
|----|--------------------------------------------------------|----|
| ۱  | مقدمه                                                  | ۱  |
| ۱  | ۱.۱ اندازه و اندازه پذیری                              | ۱  |
| ۶  | ۲.۱ نظریه احتمال                                       | ۶  |
| ۹  | ۱.۲.۱ فرآیند تصادفی                                    | ۹  |
| ۹  | ۲.۲.۱ امید شرطی                                        | ۹  |
| ۱۰ | ۳.۲.۱ تابع چگالی                                       | ۱۰ |
| ۱۰ | ۴.۲.۱ خاصیتی از تابع توزیع                             | ۱۰ |
| ۱۸ | ۵.۲.۱ انتگرال گیری تصادفی                              | ۱۸ |
| ۲۰ | ۶.۲.۱ زمان توقف                                        | ۲۰ |
| ۲۲ | ۷.۲.۱ تابع پنالتی تنزیل شده‌ی مورد انتظار              | ۲۲ |
| ۲۵ | ۲ بازارهای مالی و سرمایه گذاری های ریسکی               | ۲۵ |
| ۲۵ | ۱.۲ مقدمه                                              | ۲۵ |
| ۲۵ | ۱.۱.۲ تاریخچه پیدایش بورس اوراق بهادار در جهان و ایران | ۲۵ |
| ۲۹ | ۲.۱.۲ تاریخچه فرابورس (OTC)                            | ۲۹ |
| ۳۱ | ۳.۱.۲ قراردادهای مشتقه (Derivatives)                   | ۳۱ |
| ۳۹ | ۲.۲ ارائه مدل برای بازارهای فصلی                       | ۳۹ |
| ۴۰ | ۳.۲ اهمیت ارائه مدل های تناوبی                         | ۴۰ |
| ۴۰ | ۴.۲ روابط مدل فصلی ارائه شده                           | ۴۰ |
| ۴۷ | ۳ بررسی و نتایج دارایی شرکت بیمه                       | ۴۷ |
| ۴۷ | ۱.۳ ریسک شرکت بیمه                                     | ۴۷ |

|    |                                        |
|----|----------------------------------------|
| ۶۱ | مراجع                                  |
| ۶۵ | آ پیوست آ                              |
| ۶۵ | آ.۱. لمها و قضایای مورد نیاز . . . . . |
| ۷۱ | واژه‌نامه فارسی به انگلیسی             |
| ۷۳ | واژه‌نامه انگلیسی به فارسی             |

# فهرست تصاویر

|    |                                                                           |     |
|----|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| ۱۳ | تابع چگالی احتمال توزیع نمایی . . . . .                                   | ۱.۱ |
| ۱۳ | تابع چگالی احتمال توزیع پواسون . . . . .                                  | ۲.۱ |
| ۱۴ | تابع چگالی احتمال توزیع ارلانگ . . . . .                                  | ۳.۱ |
| ۱۵ | فرآیند تجدید با زمان‌های نگهداری شده $S_i$ و زمان‌های پرش $J_n$ . . . . . | ۴.۱ |
| ۱۶ | تابع چگالی احتمال توزیع نمایی . . . . .                                   | ۵.۱ |
| ۱۷ | شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد . . . . .                                 | ۶.۱ |
| ۴۰ | مدل تناوبی . . . . .                                                      | ۱.۲ |



# فهرست جداول

|     |                            |    |
|-----|----------------------------|----|
| ۱.۲ | گزارش نرخ مبادلات نقدی ارز | ۳۵ |
|-----|----------------------------|----|



# فصل ۱

## مقدمه

### ۱.۱ اندازه و اندازه پذیری

مفاهیمی که در این بخش و بخش بعد آمده از مراجع [۲۶] و [۱] و [۲۷] و [۷] است. فرض می‌کنیم  $X$  مجموعه‌ای ناتهی و  $C$  دسته‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی مرد نظر  $X$  باشد.

۱.  $C$  را یک نیم حلقه از زیر مجموعه‌های  $X$  در نظر می‌گیریم اگر  $C$  تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو  $C$  برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای  $C$  باشد.

۲.  $C$  را یک حلقه از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی  $X$  در نظر می‌گیریم اگر  $C$  تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳.  $C$  را یک نیم میدان (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی  $X$  در نظر می‌گیریم اگر  $C$  تحت اشتراک‌های متناهی بسته بوده و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای  $C$  باشد.

۴.  $C$  را یک  $\sigma$ -میدان از زیر مجموعه‌های  $X$  در نظر می‌گیریم اگر  $C$  تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر (شمارا) و مکمل هر عضو بسته باشد.

فرض کنیم  $C$  دسته‌ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه‌ها باشد منظور از یک اندازه روی  $C$  تابعی مانند  $\mu$  با دامنه  $C$  است به گونه‌ای که در شرایط زیر صدق کند.

$$(1) \text{ برای هر } A \text{ در } C, 0 \leq \mu(A) \leq \infty,$$

(۲) هرگاه  $\{A_n, n \geq 1\}$  دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبدو مجزای  $C$  باشد به طوری که  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in C$  آنگاه  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

فرض کنیم  $C$  دسته‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های  $X$  باشد. (طبق رابطه‌ی شمول) کوچکترین  $\sigma$ -میدان شامل  $C$  از زیر مجموعه‌های  $X$  را  $\sigma$ -میدان تولید شده توسط  $C$  می‌نامیم و به صورت  $\sigma(C)$  نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که  $\sigma(C)$  اشتراک تمام  $\sigma$ -میدان‌های شامل  $C$  است. فرض کنیم  $X = \mathbb{R}$  (یا  $\mathbb{R}^n$ ) و  $C$  دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد.  $\sigma$ -میدان تولید شده توسط  $C$  را  $\sigma$ -میدان بورل گوییم و با  $B$  نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت  $[a, b)$  یا  $[a, b]$  یا  $(a, b)$  که در آن  $a, b$  اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند، همگی مولد  $B$  اند.

**ملاحظه ۱.۱.۱. الف)** در یک فضای توپولوژیکی،  $\sigma$ -میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز را  $\sigma$ -میدان بورل می‌نامیم و با  $B$  نشان می‌دهیم.

**ب)** دسته‌ی مجموعه‌های بورل، کوچکترین  $\sigma$ -میدانی است که حاوی همه‌ی مجموعه‌های باز است.

اگر  $C$  مجموعه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های  $X$  و  $\mu$  اندازه‌ای روی  $C$  باشد. **اندازه  $\mu$  را روی  $C$ ، متناهی گوییم** هرگاه برای هر  $A$  در  $C$ ،  $\mu(A) < \infty$  و  $\sigma$ -متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند  $\{A_n, n \geq 1\}$  از اعضای  $C$  وجود داشته باشد به طوری که  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  و برای هر  $n$ ،  $\mu(A_n) < \infty$ .

فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای ناتهی و  $\mathcal{H}$  نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های  $X$  و  $\mu$  اندازه‌ای  $\sigma$ -متناهی روی  $\mathcal{H}$  باشد. برای زیر مجموعه‌ی دلخواه  $A$  از  $X$  **اندازه خارجی  $A$**  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n \right\}$$

**ملاحظه ۲.۱.۱. الف)** برای  $I \in \mathcal{H}$ ،  $\mu^*(I) = \mu(I)$ .

**ب)** اگر  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  دنباله‌ای دلخواه باشد آنگاه

$$\mu^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n).$$

زیر مجموعه‌ی  $A$  از  $X$  را نسبت به  $\mu^*$  (یا  $\mu$ ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر  $I$  در  $\mathcal{H}$  داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$$

فرض کنیم  $C$  سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های  $X$  و  $\mu$  اندازه‌ای روی  $C$  باشد. **اندازه  $\mu$  را روی سازه  $C$ ، متناهی گوییم** هرگاه برای هر  $A$  در  $C$ ،  $\mu(A) < \infty$  و  $\mu - \sigma$  متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند  $\{A_n, n \geq 1\}$  از اعضای  $C$  وجود داشته باشد به طوری که  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  و برای هر  $n$ ،  $\mu(A_n) < \infty$ .  
زیر مجموعه‌ی  $A$  از  $X$  را نسبت به  $\mu^*$  (یا  $\mu$ ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر  $I$  در  $\mathcal{H}$  داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$$

**ملاحظه ۳.۱.۱. (الف)** هر عضو  $\mathcal{H}$  و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط  $\mathcal{H}$  اندازه‌پذیراند.

**(ب)** اگر  $A$  نسبت به  $\mu^*$  اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه  $B$  از  $X$  داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

منظور از یک **فضای اندازه‌پذیر** عبارت است از زوج  $(X, \mathcal{A})$ ، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند  $X$  و  $\sigma$ -میدان  $\mathcal{A}$  از زیر مجموعه‌های  $X$  می‌باشد. هر عضو  $A$  را یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر می‌نامیم. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  است که  $(X, \mathcal{A})$  یک فضای اندازه‌پذیر و  $\mu$  یک اندازه روی  $\sigma$ -میدان  $\mathcal{A}$  است.

گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌ی  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  تعریف شده است، **تقریباً همه جا یا <sup>۱</sup>** برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه‌پذیر و دارای اندازه‌ی  $\mu$  صفر باشند.

فرض کنید  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  یک فضای اندازه باشد، تابع  $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$  را اندازه‌پذیر یا  $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر گوییم هرگاه

$$f^{-1}(U) := \{x \in X; f(x) \in U\} \in \mathcal{A}, \quad U \in \mathcal{B}.$$

تابع  $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$  را در نظر بگیرید.  $\sigma$ -میدان  $\mathcal{F}_Y$  تولید شده توسط  $Y$ ، کوچکترین  $\sigma$ -میدان روی  $\Omega$  شامل مجموعه‌های

$$Y^{-1}(B); \quad B \in \mathcal{B},$$

می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\mathcal{F}_Y = \{Y^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}.$$

به وضوح  $Y$  نسبت به  $\mathcal{F}_Y$ ، اندازه‌پذیر است.

<sup>۱</sup>Almost everywhere

## انتگرال

اگر  $A$  مجموعه ای دلخواه از  $\sigma$ -میدان  $\mathcal{A}$  باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی  $A$  را با  $\chi_A$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تابع ساده تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم  $\varphi$  تابعی ساده روی فضای اندازه  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  با مقادیر متمایز  $a_1, a_2, \dots, a_n$  باشد. می‌توان نوشت  $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$  که در آن  $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$  روشن است که  $A_i$  ها مجزا هستند.

اندازه پذیری  $\varphi$  معادل است با اینکه بگوییم  $A_i$  ها اندازه‌پذیراند. انتگرال  $\varphi$  نسبت به اندازه‌ی  $\mu$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم  $0 \times \infty = 0$ .

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض می‌کنیم  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  یک فضای اندازه و  $f$  تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد. انتگرال  $f$  روی هر  $A \in \mathcal{A}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A \varphi d\mu : \varphi \leq f \right\},$$

که در آن  $\varphi$  تابعی ساده و نامنفی است.

**ملاحظه ۴.۱.۱.** فرض کنیم  $f$  تابع اندازه‌پذیر روی  $X$  و  $A_1, A_2, \dots$  دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای  $A$  باشد و  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . در این صورت خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

**قرارداد ۲.۱.۱.** تابع اندازه‌پذیر و نامنفی  $f$  روی مجموعه اندازه‌پذیر  $A$ ، انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

**تعریف ۳.۱.۱.** اگر  $f$  تابعی حقیقی با دامنه دلخواه باشد، متناظر با  $f$  برای هر  $x$  از دامنه  $f$  توابع  $f^+$  و  $f^-$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad , \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

$f^+$  و  $f^-$  را به ترتیب جزء منفی و جزء مثبت  $f$  می نامیم. در این صورت  $f = f^+ - f^-$ ، یعنی هر تابع اندازه پذیر را می توان به صورت تفاضل دو تابع اندازه پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم  $|f| = f^+ + f^-$ . روشن است اگر  $f$  اندازه پذیر باشد، آن گاه  $f^+$  و  $f^-$  نیز اندازه پذیرند.

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنید  $(X, A, \mu)$  یک فضای اندازه باشد. تابع  $f$  که روی  $X$  تعریف شده است را انتگرال پذیر گوییم، هرگاه  $\int f^+$  و  $\int f^-$  هر دو متناهی باشند. در این صورت برای هر  $A \in \mathcal{A}$  تعریف می کنیم

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

**تعریف ۵.۱.۱.** تابع  $G$  را تابع اولیه ی  $f$  روی  $[a, b]$  گویند اگر و فقط اگر  
(۱)  $G$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد  
(۲) برای هر  $x$  در  $(a, b)$  رابطه زیر را داشته باشیم.

$$G'(x) = f(x)$$

**قضیه ۱.۱.۱.** قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. اگر تابع  $f$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد و  $G$  یک تابع اولیه  $f$  روی  $[a, b]$  باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

**تعریف ۶.۱.۱.** در ریاضیات، **رونسکین**، دترمینانی است که به اسم ریاضیدان لهستانی ژوزف هونه رونسکی نام گذاری شده است و در معادلات دیفرانسیل برای تعیین استقلال خطی چند تابع به کار می رود.

برای  $n$  تابع  $f_1, \dots, f_n$  که دارای مشتق تا مرتبه  $n - 1$  روی بازه  $I$  هستند، رونسکین یا  $W(f_1, \dots, f_n)$  را تعریف می کنیم که برابر است با حاصل دترمینان ماتریس زیر

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

در صورت مخالف صفر بودن مقدار رونسکین در بازه  $I$ ، توابع  $f_1, \dots, f_n$  در آن بازه مستقل خطی هستند.

اشتباه رایج آن است که  $W = 0$  در یک بازه به معنای وابستگی خطی در نظر گرفته شود. در حالی که جوزپه پینو در سال ۱۸۸۹ با اشاره به دو تابع  $|X|$ ،  $X^2$  نشان داد که رونسکین این دو تابع در همه نقاط برابر صفر است، اما در هیچ همسایگی  $0$  وابسته خطی یکدیگر نیستند.

## ۲.۱ نظریه احتمال

**تعریف ۱.۲.۱.** فضای احتمال عبارت است از فضای اندازه‌ی  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  به طوری که  $P(\Omega) = 1$ ،  $\Omega$  را فضای نمونه، اعضای  $\mathcal{F}$  را پیشامد و  $P$  را اندازه احتمال می‌نامیم.

### تعریف ۲.۲.۱.

**توجه ۳.۲.۱.** مجموعه‌ی  $A \in \mathcal{F}$  را **P-پوچ** می‌نامیم هرگاه  $P(A) = 0$ . فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  را **کامل** یا **تام** می‌نامیم هرگاه  $\mathcal{F}$  شامل تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی  $P$ -پوچ باشد.

به روشنی، هر فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  را می‌توان با اضافه کردن زیر مجموعه‌های هر مجموعه‌ی  $P$ -پوچ به  $\mathcal{F}$  کامل نمود.

**قرارداد ۴.۲.۱.** اگر  $P(A) = 1$  می‌گوییم پیشامد  $A$  با احتمال ۱ رخ می‌دهد یا  $A$  قریب به یقین (a.s.)<sup>۲</sup> رخ می‌دهد.

**تعریف ۵.۲.۱.** فرض کنید  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n)$  فضاهای اندازه پذیر باشند. زیر مجموعه‌های  $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$  از  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$  را برای  $F_1 \subseteq \Omega_1, F_2 \subseteq \Omega_2, \dots, F_n \subseteq \Omega_n$  راست گوشه و برای  $F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}_n$  راست گوشه اندازه پذیر می‌نامیم. دسته راست گوشه‌های اندازه پذیر، یک نیم میدان روی  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$  است.  $\sigma$ -میدان تولیدشده در  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$  توسط نیم میدان راست گوشه‌های اندازه پذیر را  $\sigma$ -میدان حاصلضربی نامیده و با نماد  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$  نشان می‌دهیم. اگر برای هر  $i, 1 \leq i \leq n$  یک اندازه روی  $\mathcal{F}_i$  باشد، اندازه  $P$  روی نیمحلقه راست گوشه‌های اندازه‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n) = P_1(F_1) \times P_2(F_2) \times \dots \times P_n(F_n).$$

**تعریف ۶.۲.۱.** گیریم  $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$  دسته‌ای از زیر- $\sigma$ -میدان‌های  $\mathcal{F}$  باشد.  $\sigma$ -میدان الحاقی این دسته از  $\sigma$ -میدان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bigvee_{\alpha \in I} U_\alpha = \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)$$

**توجه ۷.۲.۱.** از این پس، در این رساله، منظور از  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی استاندارد و  $\sigma$ -میدان مفروض روی آن  $\sigma$ -میدان بورل است که  $B$  نماد نشانگر  $\sigma$ -میدان بورل روی  $\mathbb{R}$  است.

<sup>۲</sup>almost surely

**تعریف ۸.۲.۱.** فرض کنید  $\mu_1$  و  $\mu_2$  دو اندازه روی  $\mathcal{A}$  باشند. اندازه  $\mu_1$  را نسبت به اندازه  $\mu_2$  مطلقاً پیوسته گوئیم و می‌نویسیم  $\mu_1 \ll \mu_2$ ، هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{A}; \mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0.$$

**قضیه ۱.۲.۱ (مشتق رادن نیکودیم).**<sup>۳</sup> فرض کنید  $\mu_1$  و  $\mu_2$  دو اندازه  $\sigma$ -متناهی روی  $(X, \mathcal{A})$  باشند به طوری که  $\mu_1 \ll \mu_2$ . تابع  $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر و  $\mu_2$ -انتگرال‌پذیر  $f$  روی  $X$  وجود دارد که  $f \geq 0$  و

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_1(A) = \int_A f d\mu_2.$$

**تعریف ۹.۲.۱.** اگر  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  فضایی احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه‌پذیر روی  $(\Omega, \mathcal{F})$  متغیر تصادفی نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** اگر  $X$  متغیری تصادفی روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  باشد. تابع توزیع  $X$  که آن را با  $F_X$  نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی  $x$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

که در آن  $P_X$  اندازه‌ی القاشده توسط  $X$  روی  $B$  است که توزیع متغیر تصادفی نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** فرض کنیم  $X$  یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  باشد.  $\int_{\Omega} X dP$  را امید ریاضی  $X$  می‌گوییم و با نماد  $E(X)$  نشان می‌دهیم.

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی، مثل  $g(X)$  به‌طور طبیعی به‌صورت تعریف می‌شود

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP.$$

**واریانس** متغیر تصادفی  $X$  را با  $\sigma^2(X)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma^2(X) = E[(X - E(X))^2].$$

به طور کلی اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  اندازه‌پذیر باشد و  $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| dP(\omega) < \infty$  آن‌گاه

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) P_X(x) dx.$$

<sup>۳</sup>Radon-Nikodym Derivation

**تعریف ۱۲.۲.۱.** اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را **کواریانس** می‌نامیم. (اگر دو متغیر یکی باشند کواریانس برابر واریانس خواهد شد) برای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  که امید ریاضی آنها  $E[X] = \mu$  و  $E[Y] = \nu$  هستند کواریانس برابر است با

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[(X - \mu)(Y - \nu)]$$

چنان‌که دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند کواریانس آنها صفر می‌شود.

### خواص کواریانس

$$1. \text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$2. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$3. \text{برای هر } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{cov}(X, a) = 0$$

$$(ب) \text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$$

$$(ج) \text{cov}(X + a, Y + b) = \text{cov}(X, Y)$$

**تعریف ۱۳.۲.۱.** اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع احتمال  $f_X(x)$  باشد، آنگاه  $E(X^r)$  (که  $r$  یک عدد طبیعی است) را **گشتاور مرتبه  $r$ -ام** پیرامون مبدا می‌گوییم.

**تعریف ۱۴.۲.۱.** اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع احتمال  $f_X(x)$  باشد **تابع مولد گشتاور  $X$**  را با علامت  $M_X(t)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

**تعریف ۱۵.۲.۱.** دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای احتمال مفروض  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  **مستقل** است هرگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

**تعریف ۱۶.۲.۱.** دو متغیر تصادفی  $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  را **مستقل** گوییم هرگاه  $\sigma$ -میدان‌های تولید شده توسط  $X$  و  $Y$  یعنی  $\mathcal{F}_X$  و  $\mathcal{F}_Y$  مستقل باشند، به این معنا که برای هر  $A \in \mathcal{F}_X$  و  $B \in \mathcal{F}_Y$  داشته باشیم.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$(\mathcal{F}_X = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\})$$

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**تعریف ۱۷.۲.۱.** هرگاه خاصیتی در همه جا برقرار باشد، مگر جاهایی که احتمال وقوع آنها صفر است، در این صورت گوییم برقراری خاصیت مورد نظر تقریباً محتمل است. اگر خاصیت بالا برقرار باشد آن را با نماد " $a.s.$ " (قریب به یقین) نمایش می‌دهیم.

## ۱.۲.۱ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش فضای احتمال مفروض  $(\Omega, F, P)$  است. همچنین  $\sigma$  - میدان مفروض روی فضاهای اقلیدسی  $\sigma$  - میدان بورل است.

همچنین خانواده‌ی  $\{X_t\}_{t \in I}$  از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک  $(\Omega, F, P)$  را **فرآیند تصادفی**<sup>۴</sup> می‌نامیم (مجموعه‌ی اندیس گذار  $I$  می‌تواند شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد).

یک فرآیند تصادفی  $\{X(t), t \in T\}$  خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است. یعنی، به ازاء هر  $X(t), t \in T$  یک متغیر تصادفی است. مجموعه اندیس گذار  $T$  را به‌طور معمول زمان نامیده و  $X(t)$  را حالت فرآیند<sup>۵</sup> در زمان  $t$  می‌خوانیم. اگر مجموعه اندیس گذار  $T$  شمارا باشد، فرآیند را گسسته زمان<sup>۶</sup> نامیده، و اگر  $T$  پیوسته باشد فرآیند را پیوسته زمان<sup>۷</sup> می‌نامیم. مقادیری که متغیر تصادفی  $X(t)$  اختیار می‌کند را فضای حالات<sup>۸</sup> نامیده و این فضا می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. گوییم فرآیند دارای نمونه‌های مستقل<sup>۹</sup> است، هرگاه به ازاء هر دنباله از اندیس‌ها مانند  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ، متغیرهای تصادفی  $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$  مستقل از هم بوده، و گوییم دارای نمونه‌های ایستا<sup>۱۰</sup> است اگر  $X(t+s) - X(t)$  برای تمامی  $t$  های متعلق به  $T$  دارای توزیع ثابت باشد.

## ۲.۲.۱ امید شرطی

فرض کنید  $(\Omega, F, P)$  فضایی احتمال باشد و فرض کنید  $D$  زیر  $\sigma$  - میدانی از  $F$  و  $Y$  متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال پذیر باشد. **امید  $Y$  به شرط  $D$**  یک متغیر تصادفی  $D$  - اندازه‌پذیر روی  $(\Omega, F)$  است که آن را با  $E(Y|D)$  نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in D, \quad \int_D E(Y|D) dP = \int_D Y dP.$$

برای متغیر تصادفی انتگرال پذیر دلخواه  $Y$ ، امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(Y|D) = E(Y^+|D) - E(Y^-|D),$$

که در آن برای هر  $\omega$ ،  $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), 0\}$  و  $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), 0\}$ .

### خواص امید شرطی

<sup>۴</sup> Stochastic Process

<sup>۵</sup> Process State

<sup>۶</sup> Discrete-Time

<sup>۷</sup> Continuous-Time

<sup>۸</sup> State Space

<sup>۹</sup> Independent Increment

<sup>۱۰</sup> Stationary Increment

۱. اگر  $X \geq 0$  آن گاه

$$E(X|D) \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

$$E(X + Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \quad \text{a.s.} \quad ۲.$$

۳. برای هر  $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \quad \text{a.s.}$$

۴. اگر  $D = \{\Omega, \emptyset\}$  آنگاه

$$E(X|D) = E(X), \quad \text{a.s.}$$

۵. اگر  $D_1 \subseteq D_2$

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \quad \text{a.s.}$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X), \quad \text{a.s.}$$

## ۳.۲.۱ تابع چگالی

**تعریف ۱۸.۲.۱.** در آمار و احتمالات تابع چگالی احتمال به تابعی اطلاق می‌شود که توزیعی آماری را به شکل انتگرالی نمایش دهد. مقدار این تابع نامنفی است که تعریف ریاضی آن به صورت زیر است. متغیر تصادفی  $X$  را در نظر بگیرید که مقدار آن در فضای اندازه  $(X, \mathcal{A})$  تعریف شده است و توزیع احتمال آن اندازه  $X * P$  در  $(X, \mathcal{A})$  است، آنگاه چگالی  $X$  نسبت به اندازه مرجع  $\mu$  در  $(X, \mathcal{A})$  به واسطه مشتق رادون-نیکودیم به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$f = \frac{dX * P}{d\mu}.$$

به عبارتی دیگر، به ازای هر مجموعه اندازه پذیر  $A \in \mathcal{A}$ ،  $f$  می‌تواند هر تابع قابل اندازه گیری با ویژگی زیر باشد.

$$P[X \in A] = \int_{X^{-1}A} dP = \int_A f d\mu.$$

بر خلاف احتمالی که به یک متغیر تصادفی گسسته نسبت داده می‌شود، تابع چگالی احتمال می‌تواند مقادیر بیشتر از ۱ را نیز اختیار کند.

## ۴.۲.۱ خاصیتی از تابع توزیع

**تعریف ۱۹.۲.۱.** فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مجموع این دو متغیر تصادفی را با  $S = X + Y$  نشان می‌دهیم. فرض کنیم  $F_S(s)$  نشان دهنده تابع

توزیع  $S$  باشد. طبق تعریف تابع توزیع داریم

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X + Y \leq s).$$

اگر فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی گسسته با مقادیر نامنفی باشند، طبق قانون احتمال کل داریم.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{Y \leq s} P(X + Y \leq s \mid Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_{Y \leq s} P(X \leq s - y \mid Y = y)P(Y = y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

با توجه به استقلال  $X$  و  $Y$  می‌توانیم مجموع اخیر را به صورت زیر بنویسیم.

$$F_S(s) = \sum_{Y \leq s} F_X(s - y)f_Y(y). \quad (2.1)$$

تابع احتمال نظیر این تابع توزیع را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد.

$$f_S(s) = \sum_{Y \leq s} f_X(s - y)f_Y(y).$$

حال اگر فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی باشند به‌طور مشابه برای این حالت داریم.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s P(X \leq s - y \mid Y = y)f_Y(y)dy \\ F_S(s) &= \int_0^s F_X(s - y)f_Y(y)dy \\ f_S(s) &= \int_0^s f_X(s - y)f_Y(y)dy. \end{aligned} \quad (3.1)$$

در احتمال روابط (۲.۱) و (۳.۱) پیچش<sup>۱۱</sup> دوتایی توابع توزیع  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$  نامیده می‌شوند و از نماد  $F_X * F_Y$  به جای  $F_S(s)$  استفاده می‌کنیم. پیچش را می‌توان برای یک جفت از توابع احتمال یا توابع چگالی احتمال تعریف کرد. حال اگر مجموع  $n$  متغیر تصادفی مستقل را به صورت  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  در نظر بگیریم و فرض کنیم  $F_i$  تابع توزیع  $X_i$  و  $F^{(k)}$  تابع توزیع  $X_1 + X_2 + \dots + X_k$  باشد، رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} \\ F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\ F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

<sup>۱۱</sup>Convolution

حال اگر  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  مجموع  $n$  متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع  $F$  باشد، رابطه زیر را داریم.

$$F^{(n)}(S) = F^{n*}(S)$$

$F^{n*}(S)$  پیچش  $n$  ام  $F(x)$  با خودش را نمایش می‌دهد.

**تعریف ۲۰.۲.۱.** توزیع نمایی توزیعی پیوسته است که دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد.

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

که پارامتر  $\lambda$  در آن وارون میانگین (امید ریاضی) توزیع می‌باشد. توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع گاما<sup>۱۲</sup> است که در آن پارامتر شکل برابر  $k = 1$  و پارامتر مقیاس برابر  $\theta = \frac{1}{\lambda}$  می‌باشد. از توزیع نمایی بیشتر در تخمین زدن مدت زمان لازم برای رخداد یک پیشامد خاص استفاده می‌شود. برای نمونه، مدت زمان لازم (از هم اکنون) تا رخداد یک زمین لرزه، آغاز یک جنگ، دریافت یک تماس تلفنی اشتباه، متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی می‌باشند. هرگاه پدیده‌ای از فرآیند پواسون همگن پیروی کند توزیع نمایی به‌عنوان توصیف کننده زمان بین دو رویداد در فرآیند پواسون به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که خاصیت بی‌حافظگی دارد و از این رو بیشتر در حل مسائل احتمال به‌کار گرفته می‌شود. همچنین از این توزیع برای مدل‌سازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی استفاده می‌کنند. این ویژگی تابع را می‌توان این‌طور تفسیر کرد که رویدادهایی را که در گذشته اتفاق افتاده، می‌توانیم در نظر نگیریم و از زمان حال به بعد را مبدا زمان قرار بدهیم. شکل زیر تابع چگالی احتمال توزیع نمایی را نشان می‌دهد.

**تعریف ۲۱.۲.۱.** فرآیند شمارشی  $\{N(t), t \geq 0\}$  را یک فرآیند پواسون با پارامتر  $\lambda \geq 0$  گوئیم هرگاه داشته باشیم

$$N(0) = 0 \quad (1)$$

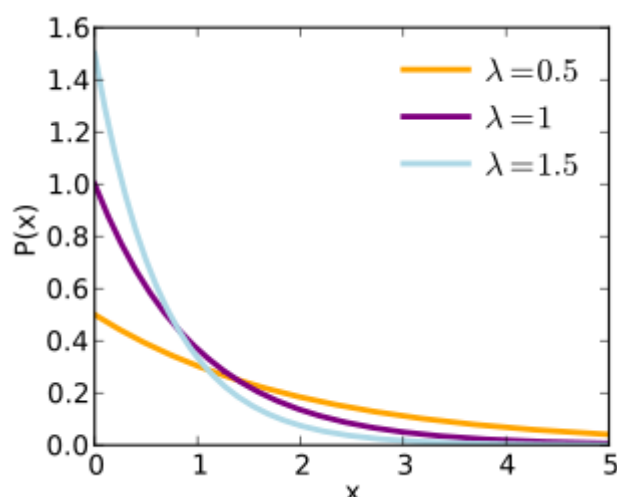
(۲) فرآیند  $N_t$  دارای نمونه‌های مانا باشد یعنی برای هر مقدار صحیح  $k$  و هر مقدار زمانی  $s \leq t$  و  $\Delta > 0$  داشته باشیم،

$$P[N(t + \Delta) - N(t) = k] = P[N(s + \Delta) - N(s) = k]$$

(۳) فرآیند  $N_t$  دارای نمونه‌های مستقل باشد یعنی برای هر مقدار صحیح  $k > 0$  و مقادیر زمانی  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$  متغیرهای تصادفی  $N(t_1) - N(t_0)$  و  $N(t_2) - N(t_1)$  و ... و  $N(t_k) - N(t_{k-1})$  از هم مستقل باشند.

<sup>۱۲</sup> Gamma Distribution

<sup>۱۳</sup>توزیع گاما یکی از توزیع‌های احتمالی پیوسته است و دارای دو پارامتر مقیاس  $\theta$  و پارامتر شکل  $k$  می‌باشد. اگر  $k$  عددی طبیعی باشد آنگاه توزیع گاما معادل است با مجموع  $k$  متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر  $\frac{1}{\theta}$ .



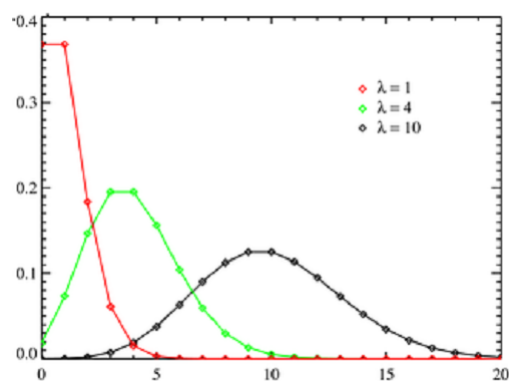
شکل ۱.۱: تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

نتیجه ۱.۲.۱. دو خاصیت مهم فرآیند پواسون به شرح زیر است.

(۱) در هر فرآیند پواسون  $\{N(t), t \geq 0\}$  تعداد پیشامدها در فاصله زمانی به طول  $t$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda t$  می باشد یعنی برای هر  $s, t \geq 0$  رابطه زیر را داریم.

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(۲) فرض کنیم  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  به ترتیب نشان دهنده‌ی زمان‌های وقوع اولین، دومین و... پیشامد باشند در این صورت ثابت می‌شود که متغیر تصادفی زمان‌های بین دو پیشامد یعنی  $W_i = T_i - T_{i-1}$  در هر فرآیند پواسون با پارامتر  $\lambda$ ، مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda}$  هستند.



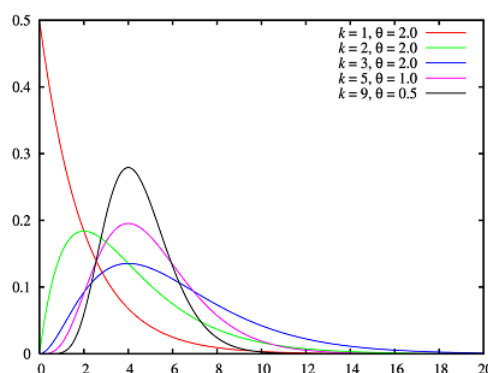
شکل ۲.۱: تابع چگالی احتمال توزیع پواسون

**تعریف ۲۲.۲.۱.** فرآیند تصادفی  $\{X(t), t \geq 0\}$  را یک **فرآیند پواسون مرکب**<sup>۱۴</sup> گوییم، هرگاه بتوان آن را به ازاء هر  $t \geq 0$  به صورت  $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$  نشان داد، که در آن  $\{N(t), t \geq 0\}$  یک فرآیند پواسون و  $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$  خانواده‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع هستند، و فرآیند  $\{N(t), t \geq 0\}$  و دنباله  $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$  مستقل فرض می‌شوند. میانگین و واریانس  $X(t)$  به ترتیب عبارتند از  $E[X(t)] = \lambda t E[Y]$  و  $Var[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$ .

**تعریف ۲۳.۲.۱.** توزیع ارلانگ توزیع احتمالی پیوسته‌ای است که مدت زمان لازم برای وقوع  $n$  واقعه کاملاً تصادفی (حاصل جمع  $n$  نمایی مستقل از هم) را نشان می‌دهد. به دلیل ارتباط آن با توزیع‌های نمایی و گاما دارای کاربردهای بسیاری است. این توزیع دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}.$$

همچنین نمودار تابع چگالی آن در زیر نمایش داده شده است.



شکل ۳.۱: تابع چگالی احتمال توزیع ارلانگ

## نظریه تجدید

**تعریف ۲۴.۲.۱.** نظریه تجدید<sup>۱۵</sup> شاخه‌ای از نظریه احتمال است که فرآیندهای پواسون را به زمان‌های نگهداری اختیاری عمومیت می‌دهد.

فرآیند تجدید<sup>۱۶</sup>، تعمیم یافته فرآیند پواسون است. فرآیند پواسون ذاتاً یک فرآیند پیوسته مارکوف می‌باشد که توزیع مستقل یکسان از زمان‌های نگهداری شده از هر عدد صحیح  $i$  با توزیع نمایی قبل از رسیدن به عدد صحیح بعدی  $i+1$  با احتمال یک است. در رویه غیر رسمی ممکن است نظریه تجدید را به همین صورت تعریف کنیم به جز اینکه زمان‌های

<sup>۱۴</sup>Compound Poisson Process

<sup>۱۵</sup>Renewal Theory

<sup>۱۶</sup>Renewal Process

نگهداری شده از توزیع عمومی تری گرفته شده اند. توجه داشته باشید که مشخصات توزیع های مستقل و یکسان (متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان) از زمان های نگهداری شده حفظ می شوند.

می دانیم که زمان های بین دو ورود در فرآیند پواسون متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی هستند. یک تعمیم طبیعی آن است که فرآیندی شمارشی را در نظر بگیریم که در آن زمان های بین دو ورود، مستقل و هم توزیع و با توزیع دلخواه باشند. چنین فرآیند شمارشی را یک فرآیند تجدید می نامند.

**تعریف ۲۵.۲.۱.** فرض کنید  $S_1, S_2, S_3, \dots$  دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و توزیع شده یکسان باشد مثل  $0 < E[S_i] < \infty$ . فرض می کنیم متغیر تصادفی  $S_i$  به عنوان  $i$  امین زمان ثبت شده باشد که برای هر  $n > 0$  به صورت زیر تعریف می کنیم.

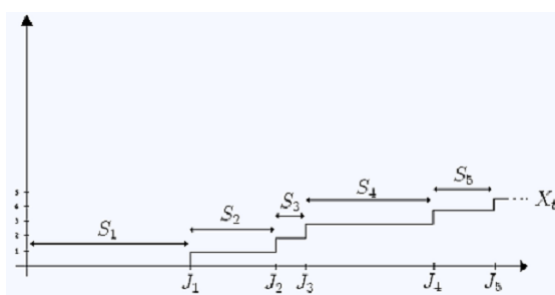
$$J_n = \sum_{i=1}^n S_i.$$

هر  $J_n$  مربوط به  $n$  امین پرش زمانی است و بازه  $[J_n, J_{n+1}]$  به عنوان بازه تجدید شناخته می شود پس متغیر تصادفی  $(X_t)_{t \geq 0}$  به صورت زیر داده می شود.

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_{J_n \leq t} = \sup\{n : J_n \leq t\}.$$

به طوری که  $\mathcal{I}$  تابع شاخص مطرح بوده و بیان کننده تعداد پرش است که تا زمان  $t$  رخ داده است و به عنوان فرآیند تجدید خوانده می شود.

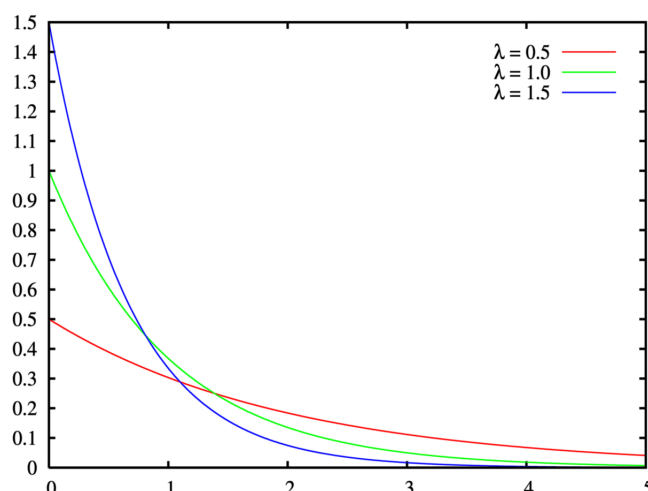
شکل زیر فرآیند تجدید را با زمان های نگه داری شده  $S_i$  و زمان های پرش  $J_n$  نشان می دهد.



شکل ۴.۱: فرآیند تجدید با زمان های نگهداری شده  $S_i$  و زمان های پرش  $J_n$

**تعریف ۲۶.۲.۱.** متغیر تصادفی  $\chi$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda > 0$  است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \Rightarrow \chi : Exp(\lambda)$$



شکل ۵.۱: تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

اگر تعداد دفعات وقوع پیشامدی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  پیروی کند، آنگاه فاصله زمانی بین وقوع هر دو اتفاق متوالی از این متغیر تصادفی پواسون، دارای توزیع نمایی با تابع چگالی

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

خواهد بود. (همچنین از لحظه صفر تا زمان وقوع اولین اتفاق نیز از توزیع نمایی پیروی می‌کند.)

حرکت براونی<sup>۱۷</sup> به‌عنوان مثالی از فرآیند تجدید یک فرآیند تصادفی است. یعنی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی که با مجموعه اعداد حقیقی نامنفی اندیس‌گذاری شده است و همگی روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده‌اند. این فرآیند دارای خاصیت مارکوفی با نمونه‌های ایستا و مستقل است. همچنین دارای مسیرهای پیوسته‌ای است که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

**تعریف ۲۷.۲.۱.** فرآیند تصادفی  $\{W(t), t \geq 0\}$  را یک حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر) گوییم اگر

$$(1) \quad W(0) = 0$$

(۲)  $W(t) - W(s)$  برای  $s \leq t$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $t - s$  باشد؛

(۳) متغیرهای تصادفی  $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  برای  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  مستقل باشند (گوییم  $W(t)$  دارای نمونه‌های مستقل است).

<sup>۱۷</sup>Brownian Motion

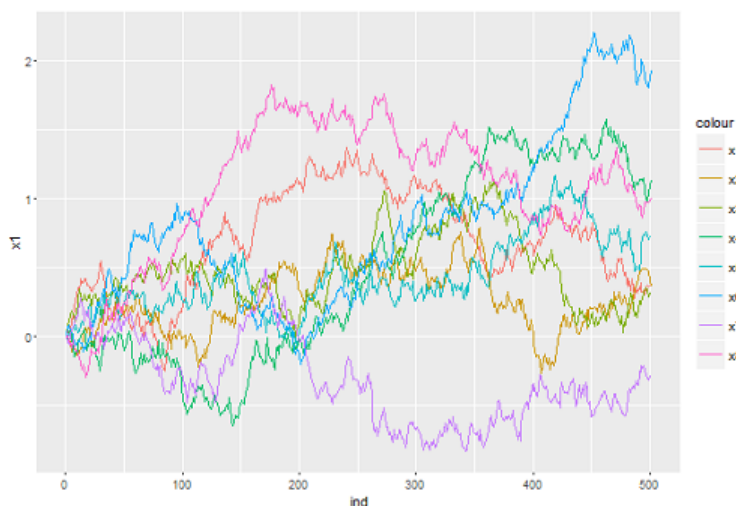
با تعریف فوق برای  $s < t$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= E[(W(t) - W(s) + W(s))W(s)] \\ &= E[(W(t) - W(s))E[W(s)] + E[W(s)^2]] = 0 + s = s \end{aligned}$$

بنابراین  $E[W(t)W(s)] = t \wedge s$  که در آن  $t \wedge s = \min\{t, s\}$  می‌نویسیم.

تعریف فوق از مرجع [۱] آورده شده است.

شکل زیر شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد را با تکرار ۸ نشان می‌دهد که هر بار یک فرآیند جدید تولید می‌شود و همه آن‌ها از نقطه صفر شروع به حرکت می‌کنند.



شکل ۶.۱: شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد

## فرآیند مارکف

**تعریف ۲۸.۲.۱.** فرآیندهای مارکف رده‌ای مهم از فرآیندهای تصادفی هستند. یک فرآیند تصادفی را مارکف گویند هرگاه آینده فرآیند به گذشته آن بستگی نداشته باشد و اصطلاحاً آن را فرآیند بی‌حافظه می‌گوییم.

شرط مارکف را برای  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

برای هر مقدار  $n$  و  $j$  و  $i$  و  $i_{n-1}$  و  $\dots$  و  $i_0$ . این احتمال که به آن احتمال تغییر وضعیت از  $i$  به  $j$  در یک گام (یا احتمال انتقال یک مرحله ای) گفته می‌شود، در حالت کلی به  $n$  بستگی دارد.

## فرآیند انتشار

**تعریف ۲۹.۲.۱.** به جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی  $dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dX_t$  دارای یک مسیر پیوسته باشد فرآیند انتشار<sup>۱۸</sup> گوئیم. فرآیندهای مارکف، حرکت براونی و فرآیند اورنشتاین – اولن‌بک چند نمونه از فرآیندهای انتشار هستند.

**تعریف ۳۰.۲.۱.** تبدیل لاپلاس<sup>۱۹</sup> در ریاضیات یک تبدیل انتگرالی است که بسیار کاربرد است. تبدیل لاپلاس با نماد  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  در واقع عملگری از تابع  $f(t)$  با آرگومان حقیقی  $t$ ،  $(t \geq 0)$  به تابع  $F(s)$  با آرگومان مختلط  $s$  است. ویژگی مهم این تبدیل آن است که در بسیاری از رابطه‌ها و تغییراتی که بر روی تابع اصلی  $f(t)$  برقرار هستند، در تبدیل یافته آن  $F(s)$  نیز با رابطه‌ای ساده و منطقی برقراراند. اگر سامانه‌ای را در نظر بگیریم که توصیف ریاضی یا تابع ورودی و خروجی آن را داشته باشیم، تبدیل لاپلاس آن به ما کمک می‌کند تا تابع جایگزینی را پیدا کنیم که تحلیل رفتار این تابع را آسان‌تر می‌کند. روش تبدیل لاپلاس، روش عملیاتی است که می‌تواند در حل معادلات دیفرانسیلی خطی سودمند باشد. به کمک تبدیل‌های لاپلاس می‌توان بسیاری از توابع متداول نظیر توابع سینوسی و توابع نمایی را به توابع جبری با یک متغیر مختلط تبدیل کرد. عملیات جبری در صفحات مختلط می‌توانند جای عملیاتی مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را بگیرند. از این رو یک معادله دیفرانسیل خطی را می‌توان به یک معادله جبری با یک متغیر مختلط تبدیل کرد. آن‌گاه جواب معادله دیفرانسیل را می‌توان به کمک جدول تبدیل لاپلاس یا روش تجزیه به کسرهای ساده به‌دست آورد. تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  در مجموعه اعداد حقیقی برای  $t \geq 0$  تابع  $F(s)$  است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

پارامتر  $s$  عددی مختلط است که  $s = \sigma + i\omega$  که  $\sigma$  و  $\omega$  حقیقی‌اند.

## ۵.۲.۱ انتگرال‌گیری تصادفی

در سراسر این پایان‌نامه  $\sigma$  – میدان مفروض روی فضاها، اقلیدسی،  $\sigma$  – میدان بورل و توپولوژی مفروض روی آن توپولوژی استاندارد است همچنین  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  فضای احتمال مفروض ما است.

**تعریف ۳۱.۲.۱.** رده  $\mathcal{P}_2$  از توابع  $f(t, w)$  روی مجموعه  $\Omega \times [0, +\infty)$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است.

۱ – تابع  $(t, w) \rightarrow f(t, w)$  یک تابع  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$  – اندازه پذیر باشد.

<sup>۱۸</sup>Diffusion Process

<sup>۱۹</sup>Laplace Transform

۲- به ازای هر  $t$  تابع  $f(t, \circ)$ ، یک تابع  $\mathcal{F}_t$  - اندازه پذیر باشد.

۳- برای هر  $T \geq 0$

$$E \left( \int_0^T f^2(s, w) ds \right) < +\infty$$

یعنی ردهای اندازه پذیر، ناپیشی گیرنده و مربع - انتگرال پذیر باشد.

**قضیه ۲.۲.۱.** اگر تابع  $\phi(t, w)$  کران دار و ابتدایی باشد آنگاه

$$E \left[ \left( \int_0^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left( \int_0^T \phi^2(t, w) dt \right)$$

**قضیه ۳.۲.۱.** اگر  $f \in \mathcal{P}_T$  باشد آنگاه دنباله‌ای از توابع ساده مانند  $f_n$  ها موجود هستند به طوری که برای هر  $T$ ، رابطه زیر برقرار است.

$$E \left( \int_0^T (f(s) - f_n(s))^2 ds \right) \rightarrow 0$$

**قضیه ۴.۲.۱.** فرض کنید توابع  $f, g \in \mathcal{P}_T$  باشد و  $0 \leq s \leq u < T$  باشد آنگاه

۱- بازه انتگرال را می توان افزاز کرد.

$$\int_s^T f dB_t = \int_s^u f dB_t + \int_u^T f dB_t$$

۲- برای انتگرال تصادفی جمع دو تابع و انتگرال تصادفی ضرب عدد ثابت در تابع رابطه زیر را داریم.

$$\int_s^t (cf + g) dB_t = c \int_s^t f dB_t + \int_s^t g dB_t$$

۳-

$$E \left( \int_s^t f dB_t \right) = 0$$

## فرمول یک بعدی ایتو

**قضیه ۵.۲.۱.** برای محاسبه مشتق یک رابطه تصادفی که فرآیند انتشار آن را داریم، به شکل زیر است. فرض کنید  $dX_t = u dt + v dB_t$  و  $Y_t = g(t, X_t)$  باشد. آنگاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

که در اینجا

$$(dB_t)^2 = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$$

است. [۲۸]

## فرمول n-بعدی ایتو

**قضیه ۶.۲.۱.** فرض کنید  $dX_t = udt + vdB_t$  یک انتگرال  $n$ -بعدی و  $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  یک نگاشت  $C^2$  باشد. آن گاه  $Y(t, w) = g(t, X_t)$  یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

که در اینجا  $dB_i dB_j = \delta_{i,j}$  و  $dt \cdot dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0$  است. [۲۸]

**قضیه ۷.۲.۱.** (نتیجه قضیه ایتو)

## فرمول لایبنیتس برای دترمینان

فرمول لایبنیتس، دترمینان یک ماتریس مربعی  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  را نشان می‌دهد. این فرمول به افتخار گوتفرد لایبنیتس ریاضی‌دان آلمانی نام‌گذاری شده است و عبارت است از:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)},$$

برای یک ماتریس  $n \times n$  که  $\text{sgn}$  تابع علامت مخصوص جایگشت‌ها در گروه جایگشت‌های  $S_n$  است که مقدار  $1$  یا  $-1$  را به ترتیب برای جایگشت‌های زوج یا جایگشت‌های فرد برمی‌گرداند. یک شیوهی رایج دیگر از نشان‌گذاری آن، استفاده از نماد لوی-چیویتا است که با قرارداد جمع‌زنی اینشتین به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\det(A) = \epsilon^{i_1 \dots i_n} A_{i_1} \dots A_{i_n},$$

که فرمول دوم در بین فیزیک‌دانان کاربرد بیشتری دارد.

## ۶.۲.۱ زمان توقف

مفاهیم تعریف شده زیر از مراجع [۳۱] و [۳۲] تهیه و جمع‌آوری شده است. در مبحث احتمال، به خصوص در مطالعه‌ی فرآیند تصادفی، زمان توقف<sup>۲</sup> (زمان مارکفی) یک نوع خاص از زمان تصادفی است. متغیر تصادفی که بر حسب زمان در نظر گرفته می‌شود، در یک فرآیند تصادفی تغییرات مشخصی از سود (بهره) را نشان می‌دهد. زمان توقف را معمولاً برای حالت متوقف شدن فرض می‌کنند. به عنوان مثال فرض کنید که یک شرکت سرمایه‌گذاری در زمینه‌های مختلفی سرمایه‌گذاری می‌کند، این شرکت در هر

<sup>۲</sup> Stopping Time

سرمایه‌گذاری ممکن است شکست بخورد و سرمایه خود را از دست دهد. به زمانی احتمالی که این شرکت ممکن است ورشکسته شود زمان توقف گفته می‌شود. همانطور که حدس می‌زنید، زمان توقف می‌تواند لحظه‌ی بعدی باشد یا اصلاً اتفاق نیافتد که اصطلاحاً به آن رخداد در زمان بی‌نهایت می‌گوییم. در واقع اگر زمان حال را صفر در نظر بگیریم بازه زمان توقف به صورت  $t \in 1, 2, \dots$  خواهد بود. زمان توقف اغلب در اثبات‌های کتاب «تداوم پیوستگی زمان» از چانگ (۱۹۸۲) استفاده شده است.

**تعریف ۳۲.۲.۱.** متغیر تصادفی  $\tau$  با مقادیر  $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  زمان توقف نامیده می‌شود (با فیلتر  $\mathcal{F}$ ) اگر برای هر  $n = 1, 2, \dots$

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n. \quad (۶.۱)$$

## ۷.۲.۱ تابع پنالتی تنزیل شدهی مورد انتظار

تعریف ۳۳.۲.۱. تعریف می‌کنیم زمان توقف را به صورت

$$\tau_o^- = \inf\{t \geq 0 : X_t < 0\},$$

به طوری که  $\tau$  زمان توقف و  $X_t$  ادعای ما (سود یا کسری در زمان روین) است.

قضیه ۸.۲.۱. فرض می‌کنیم که  $\lambda/\mu$  به ازای همه‌ی  $x \geq 0$  موجود باشد، داریم

$$1 - \mathbb{P}(\tau_o^- < \infty) = (1 - p) \sum_{k \geq 0} p^k \eta^{*k}(x),$$

به طوری که  $p = \frac{\lambda\mu}{c}$  و  $x \geq 0$ ،

$$\eta(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - f(y)] dy,$$

و برای  $k \geq 0$ ، ما می‌دانیم که  $\eta^{*k}$ ، حلقه‌ی  $k$ -fold  $x^{*n} = x * x * x * \dots * x$  (به تعداد  $n$ ) با این فرض که  $\eta^{*0}(dx) = \delta_0(dx)$  از  $\eta$  (تابع توزیع دیراک) است.

به دنبال قضیه‌ی (۸.۲.۱) با کمی دقت می‌توان دید که توزیع مشترک از  $\tau_o^-$  و  $-X_{\tau_o^-}$  (بدیهی است که) دارای توزیع مشترک هستند. این سه کمیت به ترتیب می‌توانند زمان روین، کسری در زمان روین و مازاد قبل از روین نامیده شوند. دو دانشمند بزرگ، آقایان Gerber و Shiu با بهترین مقاله‌یشان در سال ۱۹۹۸، تابع پنالتی تنزیل شدهی مورد انتظار<sup>۲۱</sup> را که به صورت زیر معرفی می‌شود ارائه دادند.

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض می‌کنیم که تابع  $f : (0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$  کراندار و اندازه‌پذیر است. سپس تابع پنالتی تنزیل شدهی مورد انتظار با بهره‌ی  $q \geq 0$ ، و وقتی که مازاد اولیه برابر با  $X \geq 0$  باشد، به صورت زیر خواهد بود

$$GS(x, q) = \mathbb{E}_x[e^{-q\tau_o^-} f(-X_{\tau_o^-}, X_{\tau_o^- -}) \mathbf{1}_{(\tau_o^- < \infty)}] \quad (7.1)$$

در نهایت بهره‌ی واقعی ما، Gerber - Shiu measure است. برای مثال قانون (حق) تنزیل شده‌ی نمایی پیوسته از زوج داده‌های  $(-X_{\tau_o^-}, X_{\tau_o^- -})$  نوشته می‌شود به صورت

$$K^{(q)}(x, dy, dz) = \mathbb{E}_x[e^{-q\tau_o^-}; -X_{\tau_o^-} \in dy, X_{\tau_o^- -} \in dz], \quad x, y, z \geq 0. \quad (8.1)$$

برای Gerber - Shiu measure رابطه‌ی ساده زیر را خواهیم داشت

<sup>۲۱</sup> expected discounted penalty function

$$GS_f(x, q) = \int_{[\circ, \infty)} \int_{[\circ, \infty)} f(y, z) K^{(q)}(x, dy, dz). \quad (9.1)$$



## فصل ۲

# بازارهای مالی و سرمایه‌گذاری‌های ریسکی

### ۱.۲ مقدمه

در ابتدای این بخش برای اینکه بیشتر با بازارهای مالی بورس آشنا شویم، ابتدا توضیح کوتاهی در مورد تاریخچه این نوع از بازارها و سرمایه‌گذاری در آنها، بعضی از مدل‌های پیش‌بینی برای این بازارها و سرمایه‌گذاری‌های شرکت‌های بیمه بیان می‌شود. مطالب بیان شده در این فصل اغلب از منابع [۲۸، ۳۰، ۲۶، ۳۳] بوده و در بعضی موارد هم در ابتدای قضیه، منبع مورد نظر آمده است.

### ۱.۱.۲ تاریخچه پیدایش بورس اوراق بهادار در جهان و ایران

تنظیم اقتصاد جهانی و دفع شوک‌های وارده به واسطه انعطاف‌پذیری و استحکام بازارهای پیشرفته میسر است. این بازارها (اعم از متمرکز و غیر متمرکز) بخش اعظم فعالیت‌های تولیدی، تجاری و مالی بشر را در قبضه خود گرفته‌اند. سهام، ارز، اوراق قرضه، اوراق رهنی، وام، بیمه‌نامه، طلا، فلزات اساسی، (انرژی نفت، گاز و برق) محصولات کشاورزی و ... و مشتقات بسیار متنوع آنها موضوع فعالیت این بازارهاست. حتی به طور مثال کالای

نامتعارفی چون گرمی و سردی هوا نیز خریداران خود را دارد. عرضه کنندگان و متقاضیان اصلی (*Hedgers*) ریسک خود را در این بازارها پوشش می‌دهند و سفته‌بازان (*Speculators*) با ایجاد نقدینگی در بازار و پذیرش ریسک گروه اول به دنبال کسب سود می‌باشند. گروه سوم از عناصر فعال بازار، آربیتراژگران (*Arbitrageurs*) هستند که در حرفه کم‌خطر خود ضمن بهره‌برداری از تفاوت نرخ یک کالا در دو بازار به سرعت موجب بازگشت تعادل به بازارها می‌شوند.

در علم اقتصاد، بورس به بازاری اطلاق می‌شود که قیمت‌گذاری و خرید و فروش کالا و اوراق بهادار در آن انجام می‌پذیرد و در یک طبقه بندی کلی شامل بورس کالا و اوراق بهادار است.

واژه بورس (*Bourse*) در زبان فرانسوی به معنای کیف پول است. علاوه بر این، چنین بیان شده که در اوایل قرن پانزدهم میلادی در شهر بروژ بلژیک مردی به نام ”واندر بورس” زندگی می‌کرده که صرافان شهر در مقابل خانه او به داد و ستد کالا و اوراق بهادار می‌پرداختند. از این رو، بعدها به کلیه مکان‌هایی که داد و ستد پول، کالا و اسناد مالی و تجاری در آن صورت می‌گرفت، **بورس** گفته شد.

تفاوت بازار بورس – به عنوان یک بازار مالی – با بازار فیزیکی، در آن است که در این بازار سهام و اوراق قرضه به جای کالا، مورد معامله قرار می‌گیرد. بازار بورس تابع مقرراتی است که توسط نهادهای قانون‌گذار تعیین می‌شود و به منظور جلوگیری از بی‌نظمی و رعایت حقوق طرفین عرضه و تقاضا، رعایت آن‌ها الزامی است. امروزه بازارهای بورس و اوراق بهادار، شاهراه سرمایه‌گذاری و انجام معاملات در حوزه بورس کالا و اوراق بهادار در جهان محسوب می‌شود.

سال ۱۴۶۰ میلادی اولین مرکز بورس اوراق بهادار جهان، در شهر انورس کشور بلژیک تأسیس شد. اما رسمیت بورس اوراق بهادار با انتشار سهام کمپانی هند شرقی هلند در اوایل قرن هفدهم میلادی یعنی سال ۱۶۰۲ میلادی در بورس آمستردام هلند شکل گرفت. البته کمپانی هند شرقی اولین شرکت سهامی به شمار نمی‌آید، بلکه اولین شرکت سهامی در سال ۱۵۵۳ میلادی با نام ”ماسکوی” (*muscovy*) در روسیه ایجاد شد.

دگرگونی اقتصاد جهانی طی دهه‌های اخیر و توسعه اقتصادی موجب ابداع یا تکامل ابزارهای متعدد مالی گردیده است. علاوه بر گسترش معاملات سنتی دارایی‌های فیزیکی و مالی، مبادلات ابزار مشتقه شامل قرارداد آتی (*Futures*)، قراردادهای اختیار معامله (*Options*)، و قراردادهای معاوضه‌ای (*Swaps*) شتاب روزافزونی یافته است. به نحوی که ارزش جاری قراردادهای مشتقه منتشر شده در بازار که دارای موقعیت باز می‌باشند، در طی سال ۲۰۰۴ در حدود ۵۰ تریلیون دلار برآورد شده است.

## بورس‌های معتبر دنیا

بورس نیویورک و تعدادی از بورس‌های مهم دیگر در خیابانی به نام وال استریت (*Wall Street*)، در شهر نیویورک قرار دارد. در قرن ۱۷ میلادی استعمارگران هلندی برای ایجاد مانعی در برابر حملات سرخپوستان و دزدان دریایی این منطقه، دیواری ساختند، از این جهت خیابانی که بعدها در این محل ایجاد شده وال استریت نامیده شد. پس از آن مراکز تجاری و مغازه‌ها در آن ساخته شد. توافق‌نامه “باتن وود” که در سال ۱۷۹۲ توسط ۲۴ تن از کارگزاران بازار وال استریت امضا شد، پایه تاسیس بازار بورس نیویورک به طور رسمی شد. این بازار در ساختمانی اجاره‌ای، واقع در پلاک ۴۰ وال استریت شروع به کار کرد. ریاست این بازار به عهده فردی به نام آنتونی استکهلیم بود. معتبرترین و بزرگترین بورس دنیا، بازار بورس نیویورک (*NYSE*) محسوب می‌شود که در سال ۱۷۹۲ بنانهاده شد. شاخص اصلی اقتصادی بازار نیویورک، *Dow Jones* (داوجونز) است. معاملات و مبادلات این بازار به صورت الکترونیکی انجام می‌پذیرد و به لحاظ سرمایه‌گذاری در بازار و ارزش معاملات بزرگترین بازار بورس جهان به حساب می‌آید. این بازار تلفیقی از ۹۰ درصد میانگین صنعتی داوجونز و ۸۲ درصد حجم بازار *SP* است. بازار بورس نزدک (*NASDAQ*) نیز به عنوان بزرگترین بازار معامله سهام در آمریکا در سال ۱۹۷۱ توسط انجمن ملی معامله‌گران اوراق بهادار بورس نیویورک تاسیس شد. بورس لندن (*LSE*) که در سال ۱۸۰۱ میلادی فعالیت خود را آغاز نمود، بورس توکیو (*TSE*)، بورس فرانکفورت و بورس پاریس از دیگر بازارهای مهم بورس در دنیا به حساب می‌آیند که نقش مهمی را در اقتصاد ایفا می‌کنند.

## بورس ایران

اولین تلاش‌ها برای تشکیل بورس و اوراق بهادار در ایران به سال ۱۳۱۵ همزمان با سفر کارشناسان هلندی و بلژیکی برای تنظیم مقررات قانونی این بازار باز می‌گردد؛ البته این تلاش به علت شروع جنگ جهانی دوم به حال تعلیق درآمد تا آنکه ادامه فعالیت در سال ۱۳۳۳ به اتاق بازرگانی و صنایع و معادن وقت واگذار گردید. پس از ۱۲ سال تحقیقات گسترده، سرانجام در سال ۱۳۴۵ قوانین و مقررات تشکیل بورس اوراق بهادار آماده و در اردیبهشت همان سال لایحه آن به تصویب مجلس شورای ملی رسید. بورس تهران در بهمن ماه ۱۳۴۶ فعالیت خود را با انتشار سهام بانک توسعه صنعتی و معدنی آغاز کرد و پس از آن با انتشار سهام شرکت‌های نفت پارس، اوراق قرضه دولتی، اسناد خزانه، اوراق قرضه سازمان گسترش مالکیت صنعتی و اوراق قرضه عباس آباد فعالیت خود را ادامه داد. ارزش مبادلات بورس تا پیش از انقلاب ۱۳۵۷ به بیش از ۳۴ میلیارد ریال رسید و تعداد شرکت‌های پذیرفته‌شده از ۶ بنگاه به ۱۰۵ بنگاه (با سرمایه بیش از ۲۳۰ میلیارد ریال) افزایش یافت. پس از انقلاب با ادغام و ملی شدن ۹ بانک، ادغام و دولتی شدن چند شرکت بیمه و در نهایت تصویب قانون حفاظت و توسعه صنایع ایران،

تعداد شرکت‌های پذیرفته شده در بورس به ۵۶ شرکت در سال ۱۳۶۷ کاهش یافت. از طرفی بروز جنگ تحمیلی و ابهامات موجود ناشی از آن در اقتصاد ایران سبب شد تا حجم معاملات سهام از ۳۴/۲ میلیارد ریال در سال ۱۳۵۷ به ۹/۹ میلیارد ریال در سال ۱۳۶۷ کاهش یابد. این آمار کمترین میزان در طول مدت عمر بورس تهران محسوب می‌شود.

پس از پایان جنگ تحمیلی و توجه به تجدید فعالیت بورس در برنامه‌های پنج ساله توسعه اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی کشور، احیای فعالیت بورس اوراق بهادار، سبب فراهم سازی بستری مناسب به منظور اجرای سیاست‌های خصوصی سازی گردید، به طوری که حجم معاملات بورس از ۹/۹ میلیارد ریال در سال ۱۳۶۷ به ۱۰۴/۲۰۲ میلیارد ریال در پایان سال ۱۳۸۳ رسید. در همین دوره شرکت‌های پذیرفته شده در بورس نیز از ۵۶ شرکت به ۲۴۹ شرکت در سال ۱۳۷۵ و پس از آن به ۴۲۲ شرکت در سال ۱۳۸۳ افزایش یافت. به موجب ماده ۹۴ قانون برنامه سوم توسعه (۱۳۷۹ - ۱۳۸۳) شورای بورس موظف شد تا کارهای لازم را برای ایجاد شبکه رایانه‌ای بازار سرمایه ایران به منظور انجام گرفتن داد و ستد الکترونیک اوراق بهادار و پوشش دادن خدمات اطلاع‌رسانی در سطح ملی و بین‌المللی انجام دهد. همچنین بر اساس ماده ۹۵ برنامه سوم توسعه، شورای بورس مجاز شد تا دست به راه‌اندازی بورس‌های منطقه‌ای در سطح کشور بزند و راهکارهای لازم را برای قابل معامله شدن دیگر ابزارهای مالی در بورس اوراق بهادار فراهم نماید. از دیگر اتفاقات مهم در سال ۱۳۶۹، می‌توان به محاسبه شاخص بهای سهام در بورس اوراق بهادار تهران اشاره کرد. این شاخص از ۴۷۲ واحد در سال ۱۳۷۰ به ۱۲۱۱۳ واحد در سال ۱۳۸۳ رسید.

فعالیت بورس اوراق بهادار در سال ۱۳۸۴ با تاثیرپذیری از سلسله عوامل مختلف داخلی و خارجی، با یک روند کاهشی مواجه گردید که با تلاش‌های دولت وقت و سازمان بورس، شیب نزولی آن کاهش پیدا کرد. شاخص بازار بورس در پایان سال ۱۳۸۴ به ۹۴۵۹ واحد رسید اما توانست در سال ۱۳۸۵ از مرز ۱۰۰۰۰ واحد بگذرد و در پایان همان سال به مقدار ۹۸۲۱ واحد رسید. با تشدید تحریم‌ها علیه ایران و بروز مشکلات اقتصادی از سال دی ماه ۱۳۹۲ بورس اوراق بهادار تهران با فراز و فرودهای بسیار همراه بوده است. شاخص این بازار در ۳ ماهه منتهی به ۳۱ خرداد ۱۳۹۴ به ۶۳۸۱۰/۳ واحد رسید.

استفاده از ابزارهای مشتقه در ایران از سر تفنن یا تصنع نیست. بازار سرمایه کشور به درجه‌ای از بالندگی رسیده است که انتشار متن‌های مالی پیشرفته‌ای را طلب می‌کند. این‌جا هر دارایی مالی به نیازی پاسخ می‌دهد؛ مشکلی را حل می‌کند؛ تنوعی را ارائه می‌دهد، یعنی حق انتخاب می‌دهد؛ ریسکی را کاهش می‌دهد؛ منابعی را تجهیز می‌کند؛ بنابراین طراحی هر یک از ابزارهای مالی مشتقه برای بازار سرمایه کشور می‌باید به نیاز روشنی در اقتصاد ایران پاسخ دهد. این نیاز مثلاً در بورس فلزات کشور کاملاً احساس می‌شود. برای مثال در بورس اوراق بهادار ارائه اختیار معامله نهفته (*EmbeddedOption*) توسط مالکان بعضی از شرکت‌ها پذیرفته شده در بهمن ماه ۱۳۸۳ بیانگر نیاز به انتشار اوراق مشتقه جدید است تا ریسک بازار در دوران رکودی آن کاهش یابد.

## ۲.۱.۲ تاریخچه فرابورس (OTC)

تأسیس و راه‌اندازی بازارهای خارج از بورس در قانون بازار اوراق بهادار (مصوب ۱۳۸۴/۹/۱) پیش‌بینی شده است و بر اساس بند ۸ از ماده یک قانون بازار اوراق بهادار، بازار خارج از بورس، بازاری در قالب شبکه ارتباط الکترونیک یا غیر الکترونیک برای معاملات اوراق بهادار بر پایه مذاکره، معرفی شده است. طبق ماده ۴ قانون بازار اوراق بهادار، صدور تعلیق و لغو فعالیت‌های بازارهای خارج از بورس بر عهده شورای عالی بورس نهاده شده است و در ماده ۲۸ این قانون نیز تأسیس بازارهای خارج از بورس همانند تأسیس بورس‌ها و نهادهای مالی منوط به ثبت نزد سازمان بورس و اوراق بهادار است و فعالیت آن‌ها تحت نظارت سازمان انجام می‌شود. بدین ترتیب، به موجب دستورالعمل فعالیت بازارهای خارج از بورس، مصوب ۱۳۸۶/۶/۱۲ شورای عالی بورس و در اجرای بند ۵ ماده ۴ قانون بازار اوراق بهادار جمهوری اسلامی ایران مصوب آذرماه ۱۳۸۴ و مجوز شماره ۵۲۹۴۶/۱۲۱ مورخ ۱۳۸۷/۷/۱۹ سازمان بورس و اوراق بهادار، شرکت فرابورس ایران در تاریخ ۱۳۸۷/۸/۲۲ تحت شماره ۳۳۲۴۸۳ در اداره ثبت شرکت‌ها و مؤسسات غیرتجاری تهران به ثبت رسید و فعالیت خود را آغاز کرد. پس از تدوین و تصویب دستورالعمل‌های مورد نیاز جهت پذیرش و دستورالعمل اجرایی نحوه انجام معاملات فرابورس و ایجاد زیرساخت‌های لازم، بازار فرابورس ایران در تاریخ ۶ مهرماه ۱۳۸۸ به طور رسمی فعالیت خود را آغاز کرد.

## فرابورس چیست؟

فرابورس، بازار اوراق بهادار جدیدی است که با هدف پوشش خلاء موجود در بازار سرمایه تشکیل شده و دارای کارکردهای مختلفی است.

این بازارها، به صورت شبکه‌ای مبتنی بر ارتباطات تلفنی و رایانه‌ای هستند که معامله‌گرانی را به همدیگر مرتبط می‌سازند که نمی‌توانند به طور حضوری با هم ارتباط برقرار کنند. در بازار فرابورس (OTC)<sup>۱</sup>، بیشتر معاملات بین مؤسسات مالی و یا بین یک مؤسسه مالی و شرکت مشتری آن، صورت می‌گیرد. مؤسسات مالی با عرضه قیمت‌های پیشنهادی خرید یا فروش، نقش «بازارساز» را ایفا می‌کنند.

معمولاً، مکالمات تلفنی در بازارهای فرابورس ضبط می‌شوند و در دعاوی حقوقی یا در موارد اختلاف برانگیز بین معامله‌کنندگان، مورد استناد قرار می‌گیرند. معمولاً در مقایسه با بازارهای بورس، معامله‌گران در بازارهای (OTC)، بسیار بزرگتر از معامله‌گران در بورس هستند. مهم‌ترین مزیت بازارهای فرابورس، عرضه تسهیلات بیشتر در بازار معاملات است؛ زیرا شرایط قرارداد را بورس تعیین نمی‌کند و معامله‌گران به راحتی می‌توانند، در گفتگوی

<sup>۱</sup>بازارهای فرابورس: *overthecountermarket*.

مستقیم با یکدیگر، در رفع نیازهای خود به راه حل‌های بهینه برسند. تنها مسأله‌ای که به صورت جدی در بازارهای فرابورس مطرح است، ریسک اعتبار طرفین معامله است؛ یعنی این احتمال وجود دارد که طرفین به تعهدات خود عمل نکنند. بورس‌ها تدابیری اتخاذ کرده‌اند، که معمولاً طرفین معامله، از ریسک اعتباری نگرانی نداشته باشند.

## آشنایی با بازارهای فرابورس:

دستورالعمل پذیرش و عرضه اوراق بهادار در فرابورس ایران، فعالیت آن را در قالب چهار بازار مجزا تبیین کرده است که در بازار اول، دوم و اوراق مشارکت، انواع اوراق بهادار پذیرفته و در بازار سوم، تنها عرضه اوراق بهادار انجام می‌شود.

### بازار اول

در بازار اول فرابورس علاوه بر سهام شرکت‌ها، واحدهای صندوق‌های سرمایه‌گذاری با نام هم، پذیرش و معامله می‌شوند. همچنین نوسان سهام شرکت‌ها و اوراق پذیرفته شده در بازار اول فرابورس ۵ درصد بدون حجم مینا پیش‌بینی شده است. در این بازار، سهام شرکت‌هایی معامله می‌شود که آخرین سرمایه ثبت شده آن حداقل ده میلیارد ریال و یک سال از زمان بهره‌برداری آن گذشته و زیان انباشته نداشته باشد. در این بازار واحدهای سرمایه‌گذاری صندوق‌های سرمایه‌گذاری قابل معامله و واحدهای سرمایه‌گذاری صندوق‌های زمین و ساختمان که نزد سازمان بورس ثبت شده‌اند به شرطی امکان معامله را دارند، که حداقل سرمایه صندوق‌های سرمایه‌گذاری قابل معامله ۵۰ میلیارد ریال و حداقل سرمایه صندوق‌های زمین و مسکن ۲۰۰ میلیارد ریال و با نام باشند.

### بازار دوم

در این بازار، صرفاً سهام شرکت‌های سهام عام پذیرفته می‌شوند. در این بازار سهام شرکت‌های زیان دیده، تازه تأسیس، شرکت‌های سهامی خاص که قصد اجرای افزایش سرمایه و تبدیل به سهامی عام را دارند و شرکت‌های کوچک پذیرفته شده مورد مبادله قرار می‌گیرند. در بازار دوم سهام شرکت‌هایی معامله می‌شوند که آخرین سرمایه ثبت شده آن حداقل یک میلیارد ریال و مشمول ماده ۱۴۱ لایحه قانونی اصلاح قسمتی از قانون تجارت نباشد.

### بازار سوم (بازار عرضه)

بازار عرضه محلی ایمن، شفاف و سودمند برای انجام معاملات عمده اوراق بهاداری است که امکان یا شرایط پذیرش در فرابورس را ندارد. انجام پذیرهنویسی انواع اوراق بهادار از جمله سهام شرکت‌های سهامی عام در شرف تأسیس، دیگر ویژگی مهم بازار عرضه به حساب می‌آید. انجام عرضه در این بازار مستلزم گذاردن فرایند پذیرش نبوده و با انجام تشریفات اداری در فرابورس، امکان‌پذیر است. در بازار عرضه فرابورس بلوک‌های سهام شرکت‌های سهامی (عام، خاص، تعاونی و ...) حق تقدم خرید سهام شرکت‌های سهامی عام، سهام ناشی از افزایش

سرمایه شرکت‌های سهامی عام، پذیرهنویسی سهام و اوراق مشارکت، پذیرهنویسی گواهی سپرده سرمایه‌گذاری بانک‌ها، املاک و مستغلات، امتیاز بهره‌برداری و حق ثبت اختراعات در قالب سهام شرکت‌های سهامی خاص می‌تواند مورد معامله قرار بگیرد.

### بازار چهارم (اوراق مشارکت)

انواع اوراق با درآمد تضمین شده از جمله اوراق مشارکت، گواهی سپرده بانکی و ... که در زمان پذیرش حداقل سه ماه تا سر رسید آن‌ها باقی مانده باشد، قابل پذیرش در این بازار بوده به شرطی که بعد از پذیرش، معاملات دست دوم آن‌ها منحصر از طریق فرابورس انجام شود. امکان صدور اوراق مشارکت شرکتی و اوراق مشارکت قابل تعویض سهام از جمله اوراق بهادار قابل معامله در بازار اوراق مشارکت محسوب می‌شوند که در کنار اوراق مشارکت رهنی، اوراق مشارکت اجاره، صکوک و گواهی سپرده بانکی سرمایه‌گذاری عام و خاص در بازار چهارم امکان معامله را دارند.

### بازار پایه

بازار پایه شامل شرکت‌هایی است که صرفاً در فرابورس درج شده‌اند و مراحل پذیرش در فرابورس را طی نکرده‌اند. فرابورس صرفاً تسهیلات معاملاتی آن‌ها را فراهم می‌کند. این شرکت‌ها الزام چندانی به ارائه گزارش‌های مربوطه به فرابورس را ندارند و صرفاً بنا به اجبار قانون برنامه پنجم توسعه در بازار پایه درج شده‌اند.

## مزایای پذیرش شرکت‌ها در فرابورس ایران

- ۱- تأمین مالی آسان و ارزان
- ۲- افزایش نقدشوندگی سهام
- ۳- بهره‌مندی از معافیت مالیاتی شرکت‌های پذیرفته شده در فرابورس
- ۴- نقل و انتقال سهام بصورت آسان، سریع و کم هزینه
- ۵- اطلاع رسانی هماهنگ و عادلانه به سرمایه‌گذاران بالفعل و بالقوه
- ۶- بهره‌گیری از امکان وثیقه‌گذاری سهام و اخذ ساده‌تر تسهیلات بانکی
- ۷- معرفی شرکت و محصولات به طیف وسیعی از اقشار جامعه و افزایش اعتبار شرکت
- ۸- صدور اوراق مشارکت و گواهی سپرده

### ۳.۱.۲ قراردادهای مشتقه (Derivatives)

قراردادهای مشتقه به نوعی از قراردادهای مالی اطلاق می‌شود که ارزش خود را از کالای فیزیکی (دارایی پایه) می‌گیرند. دارایی پایه می‌تواند به شکل سهام، کالا، نرخ‌های بهره، صنعت ساخت و ساز یا هر نوع دارایی دیگر باشد.

### انواع قراردادهای مشتقه

امروزه اوراق مشتقه در قالب چهار نوع قرارداد اصلی مورد معامله قرار می‌گیرند، که عبارت‌اند از:

- قراردادهای آتی (*Futures*)
- قراردادهای سلف (*Forwards*)
- قراردادهای اختیار معامله (*Options*)
- قراردادهای معاوضه (*Swaps*)

قراردادهای مشتقه فوق در مکان‌های زیر قابل معامله هستند:

- ۱- بورس اوراق بهادار
- ۲- بورس کالا
- ۳- بازار فرا بورسی
- ۴- بازار معاملاتی سنتی
- ۵- بازار معاملاتی الکترونیکی
- ۶- بازار معاملاتی بهینه

### تشریح انواع قراردادهای مشتقه:

#### قرارداد آتی (*Futures Contracts*)

قراردادی است که در آن دو طرف تعهد می‌کنند که در یک تاریخ مشخص (تعیین شده طبق ضوابط بازار رسمی بورس) و با یک قیمت مشخص (تعیین شده طبق ضوابط بازار رسمی بورس) یک کالا با کیفیت مشخص (تعیین شده طبق ضوابط بازار رسمی بورس) را مبادله نمایند. در این قرارداد دو طرف متعهد هستند که طبق ضوابط قرارداد عمل کنند. خریدار معمولاً نگران است که قیمت کالا در آینده بالا رود و فروشنده نگران است که قیمت کالا ثابت مانده یا پایین بیاید. این قراردادها در بازارهای رسمی یا بورس انجام می‌گیرند و به نوعی نوسان‌های شدید قیمت کالا در آینده را کاهش می‌دهند. در این نوع قرارداد، پول کالای مورد معامله تا زمان تحویل پرداخت نمی‌شود؛ ولی هر دو طرف معامله جهت حسن انجام معامله هنگام عقد قرارداد، ودیعه‌ای به اتاق پایاپای به عنوان وجه تضمین حسن انجام قرارداد می‌سپارند. برخی از قراردادهای آتی قابل معامله و واگذاری به دیگران در بورس (بازار دست دوم) هستند. بنابراین این نوع قراردادها به عنوان ابزارهای سفته بازی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. در کشورهای مختلف، بورس‌های زیادی برای معامله قراردادهای آتی وجود دارد. بورس شیکاگو (*CBOT*) و بورس تجاری شیکاگو (*CME*) در آمریکا، دو نمونه از بزرگترین بورس‌های آتی در آمریکا هستند. از بزرگترین بورس‌های آتی در اروپا «بورس قراردادهای

آتی و اوراق اختیار معامله بینا لملی لندن» (LIFFOE) و بورس یورکس (Eurex) است. سایر بورس‌های بزرگ، شامل *BolsadeMercadoriasFutures* در سائو پائولو (Sao Paulo)، «بورس آتی مالی بین‌المللی توکیو»، «بورس بینا لملی سنگاپور» و «بورس آتی سیدنی» است. برای توضیح نحوه پیدایش قراردادهای آتی، نوعی از قراردادهای آتی که موضوع آن «ذرت» است و در بورس تجاری شیکاگو (CME) معامله می‌شود، اشاره می‌کنیم. یک سرمایه‌گذار ممکن است، در ماه مارس<sup>۲</sup> به کارگزار خود خرید ۵,۰۰۰ بوشل<sup>۳</sup> ذرت را به تحویل در ماه ژوئیه سفارش دهد. این دستور باید فوراً به یک معامله‌گر بورس شیکاگو (CBOT) منتقل شود. امکان دارد، همزمان سرمایه‌گذار دیگری در کنزاس (Kensas) به کارگزار خود، فروش ۵,۰۰۰ بوشل ذرت را به تحویل ماه ژوئیه سفارش دهد. این سفارشات نیز باید به معامله‌گر بورس شیکاگو منتقل شود. با ملاقات حضوری دو معامله‌گر و توافق بر سر قیمت معین، این معامله انجام می‌شود. در این حالت گفته می‌شود، سرمایه‌گذار نیویورکی که توافق کرده است، تا غلات تحویل ماه ژوئیه را بخرد، به اصطلاح «موقعیت یا موضع معاملاتی خرید»<sup>۴</sup> و سرمایه‌گذار دیگر که توافق کرده است، تا غلات تحویل ماه ژوئیه را بفروشد، اصطلاحاً «موضع معاملاتی فروش»<sup>۵</sup> اتخاذ کرده است. قیمت مورد توافق طرفین را «قیمت قرارداد آتی» می‌گویند. ما قیمت را برای هر بوشل ذرت در این مثال، ۱۷۰ سنت فرض می‌کنیم. این تعیین قیمت، مانند سایر سازوکارهای تعیین قیمت، از قانون عرضه و تقاضا تبعیت می‌کند. به این معنا که با افزایش تعداد فروشندگان قرارداد آتی نسبت به تعداد خریداران آن در زمان معین، قیمت کاهش پیدا می‌کند، تا اینکه خریداران جدیدی وارد بازار شده، تعادل در تعداد خریداران و فروشندگان برقرار شود. به همین سان،

<sup>۲</sup>مبنای محاسبات در بورس بین‌المللی معمولاً دلار است و نه تنها، تاریخ انجام معاملات برحسب تاریخ میلادی بیان می‌شود، بلکه در مواردی انجام معاملات فقط در ماه‌های معینی از سال که برحسب تاریخ میلادی بیان شده، امکان‌پذیر است.

<sup>۳</sup> Bushel: واحد حجمی اندازه‌گیری غلات در ایالات متحده (معادل ۸ گالن انگلیسی) و در حدود ۳۶/۴ لیتر است.

<sup>۴</sup> Long Position: یک معامله‌گر در شروع کار وزانه که هنوز هیچگونه معامله‌ای انجام نداده، هیچ موضعی (Position) اتخاذ نکرده است؛ به عبارت دقیق‌تر هیچ تعهدی ندارد، ولی به محض آنکه وارد بازار شد و شروع به انجام معامله نماید، (مثلاً پنج میلیون دلار غلات خریداری کند) این معامله‌گر بر این مقدار غلات «فزونی» Long دارد. واژه Long در زبان انگلیسی دقیقاً به معنای مالکیت است و در واژگان بورس به موقعیت فردی اطلاق می‌شود که اوراق بهادار، کالا، ارز و مانند این‌ها را خریداری کرده (و یا نگهداری می‌کند)، امید دارد که قیمت آنها افزایش یابد. در بازار آتی، افرادی که مبادرت به خرید قرارداد آتی کنند، به گونه‌ای که متعهد شوند، در تاریخ انقضا دارایی پایه را تحویل بگیرند، اصطلاحاً می‌گوییم در موقعیت Long قرار گرفته‌اند.

<sup>۵</sup> Short Position: به موقعیت فردی که قرارداد فروش اوراق بهادار، کالا، ارز و مانند این‌ها را منعقد کرده، در حالی که فاقد آن است، اصطلاحاً Short می‌گویند. در بازار آتی اصطلاحاً Short به کسی گفته می‌شود، که تعدادی قرارداد آتی در بازار آتی به فروش رسانده و هنوز از طریق یک معامله جبرانی (خرید قرارداد آتی) موقعیت خود را در بازار مسدود نکرده است.

اگر معامله‌گران بیشتری بخواهند ذرت تحویل ماه ژوئیه را بخرند، قیمت افزایش خواهد یافت. در اینجا می‌توان گفت نتیجه همه اقدامات مزبور، این خواهد بود که سرمایه‌گذار نیویورکی توافق می‌کند، تا ۵,۰۰۰ بوشل ذرت، با قیمت ۱۷۰ سنت بابت هر بوشل، تحویل ماه ژوئیه بخرد و سرمایه‌گذار کنزاسی (*Kansas*) موافقت می‌کند، که در همان زمان، ۵,۰۰۰ بوشل ذرت، با قیمت ۱۷۰ سنت برای هر بوشل، بفروشد. واضح است که هر دو طرف معامله‌کننده در یک قرارداد تعهدآور وارد شده‌اند.

### پیمان آتی (*Forward Contracts*)<sup>۶</sup>

قراردادی است که در آن دو طرف تعهد می‌کنند که در یک تاریخ مشخص (توافقی است طبق ضوابط بازار غیر رسمی بورس) با یک قیمت مشخص (توافقی است طبق ضوابط بازار غیر رسمی بورس) یک کالا با کیفیت مشخص (توافقی است طبق ضوابط بازار غیر رسمی) را مبادله کنند. در این قرارداد دو طرف متعهد هستند که طبق ضوابط قرارداد عمل کنند. خریدار معمولاً نگران است که قیمت کالا در آینده بالا رود و فروشنده نگران است که قیمت کالا ثابت مانده یا پایین بیاید. این قراردادها در بازارهای غیر رسمی یا خارج از بورس صورت می‌گیرند و معمولاً به علت اعتبار بالای دو طرف معامله کل مبلغ در زمان تحویل کالا در سررسید پرداخت می‌شود. پیمان‌های آتی شبیه قرارداد آتی است. اما وجه تمایز این دو در آن است، که قراردادهای آتی در بورس معامله می‌شوند و پیمان‌های آتی در بازارهای فرابورس. مورد معامله، در پیمان‌های آتی اغلب، ارزهای خارجی هستند. بیشتر بانک‌های بزرگ در اتاق مبادلات ارزهای خارجی، میز مخصوصی با عنوان «میز پیمان آتی» تدارک دیده‌اند، که مختص معاملات پیمان‌های آتی است. جدول (۱.۲) نرخ مبادلات پوند انگلیس (*GBP*) و دلار آمریکا (*USD*) را، که یک بانک بین‌المللی بزرگ ارائه کرده است، نشان می‌دهد. ردیف اول نشان می‌دهد که بانک حاضر است، پوند انگلیس را در بازار نقدی<sup>۷</sup> با نرخ ۱/۵۱۱۸ دلار، برای هر پوند بخرد و با نرخ برابری ۱/۵۱۲۲ دلار برای هر پوند بفروشد. ردیف دوم نشان می‌دهد که بانک حاضر است، پوند یک ماه آتی را با نرخ برابری ۱/۵۱۲۷ دلار بخرد و با نرخ برابری ۱/۵۱۳۲ دلار حاضر به فروش است. ردیف سوم نشان می‌دهد که حاضر است، پوند سه ماه آتی را با نرخ برابری ۱/۵۱۴۴ دلار بخرد و با نرخ برابری ۱/۵۱۴۹ دلار بفروشد. پس از ملاحظه جدول (۱.۲)، یک شرکت بزرگ ممکن است، در راستای برنامه پوشش ریسک خود توافق کند، ۱۰۰ میلیون پوند انگلیس را در ۶ ماه آتی به قیمت ۱۵۱/۷۲ میلیون دلار بفروشد.

<sup>۶</sup> *Forward Contracts* : *Futures Contracts* را به قرارداد آتی و *Forward Contracts* را پیمان آتی ترجمه کرده‌ایم. گاهی *Future* را به قراردادهای یکسان یا همسان و *Forward* را به قراردادهای خاص ترجمه کرده‌اند.

<sup>۷</sup> *Spot markets*: این اصطلاح به بازارهای تک محموله، بازارهای فوری، بازارهای لحظه‌ای، بازارهای نقدی و بازارهای آزاد ترجمه شده است. به نظر می‌رسد «بازار نقدی» نزدیک‌ترین ترجمه برای «اسپات» باشد.

## جدول ۱.۲: گزارش نرخ مبادلات نقدی ارز

| گزارش نرخ مبادلات نقدی و آتی ارز به مورخه ۱۹ ژوئن ۲۰۰۰ |                   |                   |
|--------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|
| نرخ پیشنهادی خرید                                      | نرخ پیشنهادی فروش |                   |
| ۱'۵۱۱۸                                                 | ۱'۵۱۲۲            | معامله نقدی       |
| ۱'۵۱۲۷                                                 | ۱'۵۱۳۲            | پیمان آتی یک ماهه |
| ۱'۵۱۴۴                                                 | ۱'۵۱۴۹            | پیمان آتی سه ماهه |
| ۱'۵۱۷۲                                                 | ۱'۵۱۷۸            | پیمان آتی شش ماهه |

سه گروه معامله‌گران وجود دارند که در بازارهای اختیار معامله و پیمان‌های آتی تجارت می‌کنند. این سه گروه مهم از معامله‌گران در بازارها عبارت‌اند از: پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران. پوشش‌دهندگان ریسک در موقعیتی هستند که در معرض ریسک مرتبط با تغییر قیمت دارایی‌اند. آنها از قراردادهای فوق برای کاهش یا حذف این ریسک استفاده می‌کنند. سفته‌بازان تمایل دارند که حرکت آتی قیمت دارایی را پیش‌بینی کنند. قراردادهای و پیمان‌های آتی و اختیار معاملات نوعی اهرم ایجاد می‌کند. بنابراین سود یا زیان بالقوه آنها افزایش می‌یابد. آربیتراژگران از مزایای تفاوت قیمت بین دو یا چند بازار مختلف استفاده می‌کنند. برای مثال، اگر مشاهده کنند که قیمت آتی يك دارایی با قیمت نقدی آن نامتوازن است، با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در بازار درصدد کسب سود برمی‌آیند.

قراردادهای سلف (*Bai – Salaf*)

قراردادی است که در آن دو طرف تعهد می‌کنند که در یک تاریخ مشخص (توافقی است) و با یک قیمت مشخص (توافقی است) یک کالا با کیفیت مشخص (توافقی است) را مبادله کنند. در این قرارداد دو طرف متعهد هستند که طبق ضوابط قرارداد عمل کنند. خریدار نگران است که قیمت کالا در آینده بالا رود و فروشنده نگران است که قیمت کالا ثابت مانده یا پایین بیاید. این قراردادها در بازار غیررسمی (خارج از بورس) در کشورهای اسلامی صورت می‌گیرند. در این قراردادها کل مبلغ مورد معامله ابتدا به تحویل دهنده کالا پرداخت می‌شود، یعنی تحویل دهنده کالا در ابتدا پول را می‌گیرد و در سررسید، کالا را تحویل می‌دهد. معاملات سلف به نوعی در شمار قراردادهای آتی قرار می‌گیرند. البته میان معاملات سلف و قراردادهای آتی تفاوت‌هایی وجود دارد. از آنجا که معاملات سلف در اغلب کشورها در خارج از بورس انجام می‌شود، فاقد استانداردهای لحاظ شده در قراردادهای آتی هستند. بنابراین دو طرف معامله می‌توانند قرارداد را به نحو دلخواه و براساس نیاز خود به صورت توافقی تنظیم کنند. در معاملات آتی، اتاق پایاپای (نهاد تسویه) وجود دارد که مبلغی را به عنوان ودیعه از هر دو طرف در هنگام عقد قرارداد دریافت می‌کند، در حالی که در قرارداد سلف اتاق پایاپای موجود

نیست و هر طرف مستقیماً نسبت به دیگری مسوول است. قراردادهای آتی در بورس کالا، تحت مقررات و نظارت کمیته معاملات است، اما بازارهای سلف تحت مقررات و ضوابط خاصی نیستند.

#### قراردادهای استصناع (Bai – Istisna)

قراردادی است که در آن دو طرف تعهد می‌کنند که در یک تاریخ مشخص (توافقی است) و با یک قیمت مشخص (توافقی است) یک کالا با کیفیت مشخص (توافقی است) را مبادله کنند. در این قرارداد دو طرف متعهد هستند که طبق ضوابط قرارداد عمل کنند. خریدار معمولاً نگران است که قیمت کالا در آینده بالا رود و فروشنده نگران است که قیمت کالا ثابت مانده یا پایین بیاید. این قرارداد در بازار غیررسمی (خارج از بورس) در کشورهای اسلامی صورت می‌گیرد. در این قرارداد کل مبلغ مورد معامله به صورت قسطی تا سررسید به تحویل دهنده کالا پرداخت می‌شود.

#### قراردادهای معاوضه‌ای (SwapContracts)

قراردادی است که در آن دو طرف متعهد هستند که برای مدت مشخص (توافقی است)، دو دارایی یا منافع حاصله از دو دارایی را با کیفیت مشخص (توافقی است) به نسبت تعیین شده، معاوضه کنند. پس از سررسید قرارداد دو دارایی یا منافع این دو دارایی به صاحبان اولیه آن‌ها برمی‌گردد. این دارایی‌ها می‌توانند فیزیکی مثل گندم، طلا، نفت، چوب و غیره یا مالی مثل اوراق قرضه، مشارکت، وام و غیره باشند. در این قرارداد دو طرف متعهد هستند که طبق ضوابط قرارداد عمل کنند. این قرارداد به صورت غیررسمی (خارج از بورس) انجام می‌گیرند.

#### قراردادهای اختیار معامله (OptionContracts)

به طور کلی، می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد؛ «اختیار خرید»<sup>۸</sup> و «اختیار فروش»<sup>۹</sup>. یک اختیار خرید در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد. به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، «قیمت توافقی» یا «قیمت اعمال»<sup>۱۰</sup> و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحاً «تاریخ انقضا» یا «سررسید اختیار معامله»<sup>۱۱</sup> می‌گویند. اختیار خرید یا فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شوند. قرارداد «اختیار اروپایی»<sup>۱۲</sup> فقط در تاریخ سررسید قابلیت

<sup>۸</sup> Call Option

<sup>۹</sup> Put Option

<sup>۱۰</sup> Exercise price (strike price)

<sup>۱۱</sup> Exercise date or expiration date or maturity

<sup>۱۲</sup> European option

اعمال دارد. در حالی که قرارداد «اختیار آمریکایی»<sup>۱۳</sup>، در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است.

### الف) اختیار خرید (Call Option)

قراردادی است که صاحب اختیار (خریدار اختیار خرید) پس از پرداخت مبلغی مشخص (تعیین شده توسط بازار رسمی بورس) به فروشنده اختیار، این حق را پیدا می‌کند که تا زمانی مشخص (تعیین شده توسط بازار رسمی بورس)، دارایی رسمی مشخص را با کیفیت مشخص با قیمت مشخص (تعیین شده توسط بازار رسمی بورس) اگر بخواهد از فروشنده اختیار، خریداری کند؛ این تنها یک حق یا امتیاز خرید است نه اجبار. فروشنده اختیار خرید تا زمانی که خریدار اختیار خرید حق خود را اجرا نکرده، هیچ تعهدی در این قرارداد ندارد. زمانی که خریدار اختیار خرید حق خود را اجرا کند، فروشنده اختیار خرید اجبار دارد که تعهد را طبق قرارداد انجام دهد. به عبارتی دیگر، خریدار اختیار خرید دارای یک حق است و فروشنده اختیار خرید در زمان اجرای این حق دارای تعهد می‌شود، این یک نوع تعهد احتمالی برای فروشنده اختیار خرید تلقی می‌شود. صاحب اختیار خرید (خریدار) فکر می‌کند که قیمت دارایی بالا می‌رود و فروشنده اختیار خرید فکر می‌کند که قیمت دارایی پایین می‌آید. این قرارداد به صورت رسمی در بورس‌های دنیا به روی دارایی‌های واقعی و مالی معامله می‌شوند. چنانچه صاحب اختیار به دلایل قیمت‌های بازار، از حق خود استفاده کند، حالتی ایجاد می‌شود که به آن درون پولی (*in The money*) اطلاق می‌شود.

### ب) اختیار فروش (Put option)

قراردادی است که صاحب اختیار (خریدار اختیار فروش) پس از پرداخت مبلغی مشخص (تعیین شده توسط بازار رسمی بورس) به فروشنده اختیار این حق را پیدا می‌کند که تا زمان مشخص (تعیین شده توسط بازار رسمی بورس) دارایی مشخص را با کیفیتی مشخص با قیمتی مشخص (تعیین شده توسط بازار رسمی بورس) اگر بخواهد به فروشنده اختیار بفروشد. این تنها یک حق یا امتیاز فروش است نه اجبار. فروشنده اختیار فروش تا زمانی که خریدار اختیار فروش حق خود را اجرا نکرده، هیچ تعهدی در این قرارداد ندارد. زمانی که خریدار اختیار فروش حق خود را اجرا کند، فروشنده اختیار فروش اجبار دارد که تعهد را طبق قرارداد انجام دهد.

اگر قرارداد اختیار معامله به گونه‌ای بسته شود که دارنده برگه بتواند در هر زمان (پیش از سررسید نهایی) از حق خود استفاده کند، آن را «اوراق آمریکایی» و اگر در برگ قرارداد این جمله قید شده باشد که دارنده تنها در زمان انقضا می‌تواند از آن حق استفاده کند، آن را «اوراق اروپایی»، می‌نامند. گواهی اختیار معامله قابل معامله در بازار دست دوم (بورس) نیز هست.

<sup>۱۳</sup> American option

لازم است بر این نکته تأکید کنیم، که یک «ورقه اختیار معامله» به دارنده آن «حق» یا «اختیار» انجام کاری را می‌دهد؛ نه اینکه او را «ملزم» به انجام کاری کند. این ویژگی، وجه تمایز ورقه اختیار معامله از قراردادهای آتی است. دارنده قرارداد آتی با «موضع پیش خرید» به خرید دارایی با قیمت معین و در زمان مشخصی در آینده متعهد می‌شود. ولی دارنده «اختیار خرید» امکان این انتخاب را دارد که دارایی پایه را با قیمت معین و در زمان معین در آینده بخرد. انعقاد یک قرارداد آتی هیچ هزینه‌ای در بر ندارد به جز الزاماتی که درباره «حساب ودیعه» وجود دارد، ولی یک سرمایه‌گذار باید هزینه حق اختیار معامله یا «قیمت قرارداد اختیار» راپردازد.

### محاسبه نرخ بهره

برای توضیح چگونگی محاسبه نرخ بهره بهتر است با مثال شروع کنیم تا موضوع به سادگی قابل فهم باشد. وقتی که بانک نرخ بهره سپرده‌های یک ساله را برای مثال سالیانه ۲٪ اعلام می‌کند، به خاطر فرمول اندازه‌گیری نرخ بهره که روشی ساده و دقیق است، معمولاً هیچ ابهامی در مورد محاسبه بهره سپرده بانکی وجود نخواهد داشت. نرخ بهره مرکب سالیانه ۲٪ بدین معناست، که بهره به صورت یک بار در سال محاسبه می‌شود و یک سپرده ۱۰۰ دلاری بعد از یک سال به ۱۲۰ دلار می‌رسد.

$$120 = 100 \times 1/20$$

وقتی نرخ بهره مرکب به صورت شش ماهه بیان می‌شود؛ یعنی سود حاصل از سرمایه‌گذاری برابر ۱٪ در هر شش ماه است. البته با این شرط، که بهره شش ماهه اول مجدداً در شش ماه دوم سرمایه‌گذاری شده باشد. بنابراین خواهیم داشت

$$121 = 100 \times 1/1 \times 1/1 = \text{ارزش سرمایه‌گذاری در پایان دوره}$$

هنگامی که نرخ بهره مرکب به صورت فصلی بیان می‌شود؛ یعنی سود حاصل از سرمایه‌گذاری برای هر سه ماه ۵٪ است. که البته بهره‌های حاصل، مجدداً در دوره‌های بعد سرمایه‌گذاری می‌شوند. لذا خواهیم داشت

$$121/55 = 100 \times (1/5)^4 = \text{ارزش سرمایه‌گذاری در پایان دوره}$$

در حالت کلی، با فرض سرمایه‌گذاری مبلغ  $A$  برای  $n$  سال با نرخ بهره مرکب سالیانه  $R\%$ ، در صورتی که نرخ بهره به صورت یکبار در سال محاسبه شود، ارزش نهایی این سرمایه‌گذاری در پایان سال برابر است با

$$A(1 + R)^n$$

و هرگاه نرخ بهره به صورت  $m$  بار در سال محاسبه شود، ارزش نهایی سرمایه‌گذاری در پایان دوره از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$A\left(1 + \frac{R}{m}\right)^{mn}$$

هرگاه متغیر  $m$  به سمت بی‌نهایت میل کند، یعنی تعداد دفعات پرداخت بهره مرکب بیشتر شود و سرانجام به بی‌نهایت میل کند، اصطلاحاً می‌گویند بهره به صورت پیوسته محاسبه شده است. می‌توان نشان داد که در حالت کلی، برای مبلغ  $A$  که برای  $n$  سال با نرخ  $R$  به صورت پیوسته سرمایه‌گذاری شده باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$\text{ارزش سرمایه‌گذاری در پایان دوره} = Ae^{Rn}$$

که در آن  $e \simeq 2.71828$  است.

## ۲.۲ ارائه مدل برای بازارهای فصلی

در بازار برای قیمت‌گذاری کالاهایی که روندی نمایی (صعودی یا نزولی) دارند، مدل بلک-شولز مدل مناسبی است. در این مقاله بازارهای فصلی را که روند تناوبی دارند بررسی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم معادله دیفرانسیل تصادفی زیر مدل مناسبی برای آنها است.

$$dX_t = \alpha \sin(t)X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

در ریاضیات مالی یکی از اهداف مهم، ارائه یک مدل مناسب برای بازار است که یکی از شناخته شده‌ترین مدل‌ها مدل براونی هندسی است که در بازار به مدل بلک-شولز شهرت دارد. در این مدل فرض می‌شود قیمت کالای بدون ریسک در معادله دیفرانسیل عادی  $dS_t = rS_t$  صدق کند که در آن عدد ثابت  $r$ ، نرخ بهره را مشخص می‌کند و قیمت کالای ریسکی با معادله دیفرانسیل تصادفی  $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$  توصیف می‌شود.  $W_t$  فرآیند براونی استاندارد روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  است.  $\alpha$  و  $\sigma > 0$  اعداد ثابت هستند و  $\sigma$  تلاطم بازار را نشان می‌دهد. از محاسن مدل بلک-شولز این است که برای بسیاری از اختیارات معادله می‌توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی به دست آورد. اما شواهد تجربی نشان می‌دهد که این مدل در هم‌خوانی با واقعیت‌های بازار چندان موفق نیست. به همین علت در بسیاری از موارد تعمیم‌هایی از این مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد. روشن است که روند مدل بلک-شولز که در حقیقت امیدریاضی  $X_t$  در معادله‌ی زیر است، نمایی است. زیرا داریم

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

در نتیجه از قضیه (۵.۲.۱) رابطه زیر را داریم

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s$$

حال با گرفتن امیدریاضی از طرفین معادله فوق داریم

$$E(X_t) = E(X_0) + E\left(\int_0^t \alpha X_s ds\right) + E\left(\int_0^t \sigma X_s dW_s\right)$$

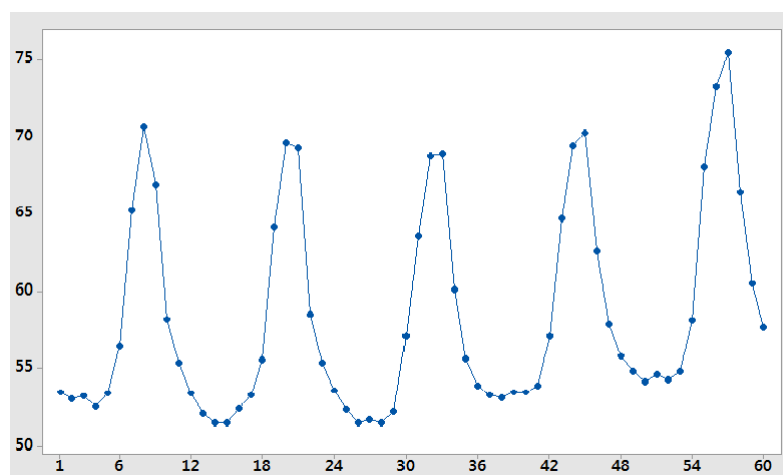
و در نتیجه

$$E(X_t) = x_0 e^{\alpha t}$$

پس در مدل بلک-شولز روند بازار نمایی است که با توجه به مقدار  $\alpha$  صعودی یا نزولی می‌شود.

## ۳.۲ اهمیت ارائه مدل‌های تناوبی

بعضی مواقع با بازارهای مالی مواجه می‌شویم که در مدت زمان مشخصی، نه روند صعودی دارند و نه نزولی. در حقیقت روندی تناوبی دارند. بازارهای فصلی از این‌گونه‌اند. در این بازارها فرآیند قیمت مشابه شکل (۱.۲) ابتدا روندی صعودی داشته و در انتهای فصل روندی نزولی را طی می‌کند و این روند همواره تکرار می‌شود.



شکل ۱.۲: مدل تناوبی

حال به دنبال یافتن مدل مناسبی برای این‌گونه بازارها هستیم.

## ۴.۲ روابط مدل فصلی ارائه شده

قضیه ۱.۴.۲. \* یکی از مدل‌های تصادفی مناسب برای فرآیند قیمت سهام ریسکی در بازارهای فصلی به فرم زیر است.

$$dX_t = \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t. \quad (1.2)$$

اکنون روند کلی بازار را برای مدل مفروض بدست می‌آوریم. از (۱.۲) و قضیه (۵.۲.۱) رابطه زیر را داریم

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha \sin(s) X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s.$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین معادله داریم

$$E(X_t) = E(X_0) + E\left(\int_0^t \alpha \sin(s) X_s ds\right) + E\left(\int_0^t \sigma X_s dW_s\right) \quad (2.2)$$

حال برای به دست آوردن امید  $X_t$  ابتدا خود  $X_t$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم فرآیند تصادفی  $Z$  را به شکل  $Z_t = \ln X_t$  در نظر می‌گیریم بطوری که  $X_t$  اکیدا مثبت است و اگر از  $Z_t$  دیفرانسیل بگیریم، داریم

$$dZ = \frac{1}{X} dX + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{X^2} \right\} [dX]^2$$

حال با جاگذاری رابطه (۱.۲) معادله فوق داریم

$$dZ = \frac{1}{X} \{ \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{X^2} \right\} \{ \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \} \{ \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \}$$

$$dZ = \frac{1}{X} \{ \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{X^2} \right\} \{ \alpha^2 \sin^2(t) X_t^2 (dt)^2 + (\alpha \sin(t) X_t dt)(\sigma X_t dW_t) + \sigma^2 X_t^2 (dW_t)^2 \}$$

از فصل چهارم [۲۸] می‌دانیم که

$$\begin{cases} dt \cdot dt = 0 \\ dW_t \cdot dt = 0 \\ dW_t \cdot dW_t = dt \end{cases}$$

با در نظر گرفتن موارد بالا معادله دیفرانسیل را بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{1}{X} \{ \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{X^2} \right\} \sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \{ \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma dW_t \} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

در نهایت فرمول زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} dZ &= (\alpha \sin(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t, \\ Z_0 &= \ln x_0. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۲.۲) داریم

$$Z_t = \ln x_0 + (\alpha \sin(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \quad (3.2)$$

با توجه به فرض اولیه، حال به جای  $Z_t$ ،  $\ln X_t$  قرار می‌دهیم و سپس از معادله امید می‌گیریم

$$\ln X_t = \ln x_0 + (\alpha \sin(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

$$X_t = x_0 e^{(\alpha \sin(t) - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

$$\Rightarrow E(X_t) = x_0 e^{-\alpha \cos(t)}$$

بنابراین روند کلی بازار فصلی، تناوبی است.

**قضیه ۲.۴.۲.** فرض کنید  $\{X_u\}_{u \in [s, t]}$  جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد.

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

همچنین فرض کنید  $p(s, y; t, x)$  تابع چگالی انتقال  $\{X_u\}_u$  باشد. آنگاه  $p$  در معادله زیر که به معادله فوکر-پلانک معروف است، صدق می‌کند [۲۸، ۳۰].

$$\begin{aligned} p_t(s, y; t, x) &= \mathcal{A}^* p(s, y; t, x), & (t, x) &\in (0, T) \times \mathbb{R} \\ p(s, y; t, x) &\rightarrow \delta_y, & t &\downarrow s \end{aligned} \quad (4.2)$$

در رابطه (۴.۲) عملگر  $\mathcal{A}^*$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\mathcal{A}^* f)(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(t, x) f(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [C_{ij}(t, x) f(t, x)].$$

با توجه به قضیه بالا، برای معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۲) معادله‌ی فوکر-پلانک به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial p}{\partial t}(s, y; t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 p(s, y; t, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha \sin(t) x p(s, y; t, x)].$$

در نتیجه

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (\sigma^2 - \alpha \sin(t)) x \frac{\partial p}{\partial x} + (\sigma^2 - \alpha \sin(t)) p.$$

قضیه ۳.۴.۲. (Kac – Feynman)

فرض کنیم  $F$  جواب معادله‌ی زیر باشد [۲۸، ۳۰]

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ F(T, x) = \phi(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

معادله‌ی فوق هم ارز است با

$$\equiv F_t + \mu F_x + \frac{1}{2} \sigma^2 F_{xx} = 0$$

اگر  $\sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial X}(s, X_s)$  عضو  $L^2$  باشد و داشته باشیم

$$\begin{cases} dX_s = \mu(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dW_s \\ X_t = x \end{cases} \quad (6.2)$$

آنگاه  $F$  دارای فرمی به صورت زیر است

$$F(t, X_t) = \mathbb{E}_{t,x}[\phi(X_t)] \quad (7.2)$$

اثبات

فرآیند  $\{X_t\}_t$  را در نظر می‌گیریم که در شرط  $X_t = x$  صدق کند؛ عملگر ایتو یا دینکین را برای  $\{X_t\}_t$  محاسبه می‌کنیم، داریم

$$\mathcal{A} = \mu(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (8.2)$$

سیس معادله‌ی ۵.۲ به فرم زیر در می‌آید

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}F = 0 \\ F(T, x) = \phi(x) \end{cases} \quad (9.2)$$

$$F(T, X_T) = F(t, X_t) + \int_t^T \left[ \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) + \mu \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right] ds + \int_t^T \sigma \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s \quad (10.2)$$

از طرفی طبق فرمول ایتو داریم

$$F(T, X_T) \stackrel{?}{=} F(t, X_t) + \int_t^T \left[ \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) + \mathcal{A}F(s, X_s) \right] ds + \int_t^T \sigma \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s \quad (11.2)$$

از رابطه‌ی ۹.۲ داریم

$$F(T, X_T) = F(t, X_t) + \int_t^T \sigma \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s$$

$$\xrightarrow{\text{امید می‌گیریم}} \mathbb{E}(F(T, X_T)) = \mathbb{E}(F(t, X_t)) + \overbrace{E}^0$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(\phi(X_T)) = \mathbb{E}_{(t,x)}(F(t, X_t)) \stackrel{X_t=x}{=} F(t, X_t)$$

به طوری که می‌دانیم  $x$  یک عدد است پس  $F(t, X_t)$  نیز یک عدد است.

**قضیه ۴.۴.۲ (Kac – Feynman ۲)**

فرض می‌کنیم که  $F$  در مسئله مرزی زیر صدق کند [۲۸، ۳۰]

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0 \\ F(T, x) = \phi(x) \end{cases}$$

همچنین  $\{X_s\}_s$  جواب  $SDE$  زیر است

$$\begin{cases} dX_s = \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s \\ X_t = x \end{cases} \quad (12.2)$$

همچنین فرض می‌کنیم که فرآیند  $e^{-rs}\sigma(s, X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \in \mathcal{L}^2$  باشد، به طوری که  $X$  یک فرآیند تصادفی است. آنگاه امید  $F$  به صورت زیر خواهد بود

$$F(t, X) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{t,x}[\phi(X_T)] \quad (۱۳.۲)$$

حال  $PDE$  زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ F(T, x) = X^2 \end{cases} \quad (۱۴.۲)$$

طبق قضیه (۴.۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} F(t, X) &= \mathbb{E}[\phi(X_T)] \\ &= \mathbb{E}(X_T^2) \end{aligned}$$

طبق معادله (۱۴.۲)،  $\mu = 0$  و  $\sigma(t, x) = \sigma$  پس

$$\begin{cases} dx_s = 0ds + \sigma dW_s \\ X_t = x \end{cases} \quad (۱۵.۲)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$X_T = x + \int_t^T \sigma dW_s = x + \sigma(W_T - W_t)$$

با توجه به اینکه  $(W_T - W_t)$  دارای توزیع نرمال  $N(0, T-t)$  است پس  $X_T$  نیز دارای توزیع نرمال با میانگین  $x$  و واریانس  $\sigma^2(T-t)$  است.

**قضیه ۵.۴.۲.** \* فرض می‌کنیم بازار داده شده در مدل (۱.۲) صدق کند. اگر بازار فاقد آربیتراژ باشد تابع قیمت‌گذاری اختیار یعنی  $F(t, S_t)$  جواب معادله‌ی زیر خواهد بود.

$$F_t(t, s) + F_s(t, s) + \frac{1}{2}s^2\sigma^2(t, s)F_{ss}(t, s) - rF(t, s) = 0 \quad (۱۶.۲)$$

$$F(T, S_T) = \phi(s).$$

در مساله مقدار مرزی بالا مقصود از  $r$  نرخ بهره دارایی بدون ریسک است.

به موجب قضیه قبل با روش  $Feynman - kac$  می‌توان تابع قیمت‌گذاری را به صورت زیر بدست آورد.

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E[\phi(s)] \quad (17.2)$$

$$\Rightarrow F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(se^z) f(z) dz. \quad (18.2)$$

در عبارت اخیر  $f$  تابع چگالی احتمال فرآیند نرمالایز شده قیمت سهام ریسکی  $(Z)$  است که با توجه به توزیع  $X_T$  به دست آمده قبل از این قضیه و رابطه (۳.۲) ، پس  $(Z)$  از توزیع زیر پیروی می‌کند.

$$N[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}]. \quad (19.2)$$

## فصل ۳

# بررسی و نتایج دارایی شرکت بیمه

### ۱.۳ ریسک شرکت بیمه

در این فصل روشی را برای به دست آوردن میزان ریسک شرکت بیمه ارائه می‌دهیم. در واقع درآمد حق بیمه بستگی به مازاد پرتفوی بیمه دارد و تجزیه و تحلیل مدل آن برپایه مسئله‌ی مرزی روی معادله دیفرانسیل خطی عادی با ضرایب متغیر انجام می‌شود. با توجه به این موضوع، ساختار جبری اپراتور گرین به ما اجازه می‌دهد تا یک راه بصری را درمقابل روشی دیگر از راه حل‌های نوع نمایی و کرامر مجانبی توسعه دهیم. این مطالعه روی یک پیشامد از نوع کلاسیک از تئوری ریسک است و قسمت‌هایی از آن به بخش‌هایی از آنالیز حقیقی و مختلط، آنالیز تابعی، آنالیز مجانبی و همچنین جبر نیازمند است. [۵، ۳۷] در تئوری حق بیمه‌ی کلاسیک، مدل ریسک عمومی میزان حق بیمه‌ی  $U(t)$  از یک سبد بیمه در زمان  $t$  به شکل زیر توصیف می‌شود

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (1.3)$$

به طوری که  $c$  یک نرخ ثابت از حق بیمه‌ی دریافتی،  $N(t)$  یک فرآیند تجدید است که شمارش تعداد ادعاهای وارده در طول فاصله‌ی زمانی  $[0, T]$ .  $(k \geq 0)$  دنباله‌ای از توزیع‌های مستقل و هم‌توزیع ( $iid$ ) است که اندازه‌ی ادعای آن تابع توزیع  $F_X$  با تابع چگالی  $f_X$  می‌باشد.

$T_k (k \geq 0)$  را دنباله‌ای از ادعاهای زمان قرار می‌دهیم. یکی از نکات مهم در زمینه‌ی بررسی احتمال این است که در زمان برخی نقاط در حق بیمه‌ی موجود در پرتفوی، ادعا را پوشش نخواهد داد، که آن را احتمال روین (ورشکستگی) می‌نامند.

$$\psi(u) = P(T_u < \infty \mid U(0) = u) \quad (2.3)$$

به طوری که  $U(0) = u \geq 0$  سرمایه‌ی اولیه پرتفوی است و

$$T_u = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0 \mid U(0) = u\} \quad (3.3)$$

در این رابطه، مقدار کلی‌تر  $(\psi)$ ، تابع جریمه‌ی (پنالتی) تنزیل شده مورد انتظار است، که برای هر دوی کسری بودجه در روین و مازاد قبل از تاوان روین (حاصل ورشکستگی) اتفاق می‌افتد.

$$\Phi(u) = \mathbb{E} \left( e^{-\delta T_u} \omega(U(T_u-), |U(T_u)|) \mathbf{1}_{T_u < \infty} \mid U(0) = u \right),$$

به طوری که  $\delta \geq 0$  نرخ تنزیل (تخفیف) و تابع پنالتی  $\omega(x, y)$  تابعی دو متغیره است. همچنین  $\Phi(u)$  تابعی است که اغلب همان تابع  $Gerber - Shiu$  در نظر گرفته می‌شود. [۹]  
مدل ریسک جمعی کلاسیک روی حق بیمه با نرخ ثابت  $c$  بنا شده است. اگرچه این واضح است که اگر با مقدار حق بیمه‌ی وابسته روی سطح مازاد رایج در نظر گرفته شود، اغلب واقعی‌تر خواهد بود. در این مورد، فرآیند ریسک (۱.۳) به شکل زیر نشان داده می‌شود.

$$U(t) = u + \int_0^t p(u(s)) ds - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (4.3)$$

بنابراین، در این پرش‌ها (ادعاها)، فرآیند ریسک با قطعیت در امتداد منحنی  $\varphi(u, t)$  حرکت می‌کند، که از معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = p(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad ; \quad \varphi(u, 0) = u. \quad (5.3)$$

تنها حالت‌های کمی وجود دارد برای اینکه شکل درست  $\psi(u)$  برای حق بیمه‌ی وابسته به مازاد اتفاق بیافتد. مدل ریسک کرامر-لاندبرگ (جایی که  $N(t)$  یک فرآیند پواسون همگن با شدت  $\lambda$  است) و تابع حق بیمه‌ی خطی  $p(u) = c + \varepsilon u$ ، که تفسیر آن یعنی نرخ بهره‌ی  $\varepsilon$  روی مازاد موجود، وجود دارد. در مورد ادعاهای نمایی، قبلا در [۲۲] نشان داده شده که شکل احتمال روین آن به صورت زیر خواهد بود

$$\psi(u) = \frac{\lambda \varepsilon^{\lambda/\varepsilon-1}}{\mu^{\lambda/\varepsilon} c^{\lambda/\varepsilon} \exp(-\mu c/\varepsilon) + \lambda \varepsilon^{\lambda/\varepsilon-1} \Gamma(\frac{\mu c}{\varepsilon}, \frac{\lambda}{\varepsilon})} \Gamma(\frac{\mu(c + \varepsilon u)}{\varepsilon}, \frac{\lambda}{\varepsilon}), \quad (6.3)$$

به طوری که  $\Gamma(\eta, x) = \int_x^\infty t^{\eta-1} e^{-t} dt$  تابع گامای ناقص است (برای توسعه‌هایی با زمان محدود احتمال روین، که می‌بینید در [۱۲، ۱۳] و [۴]). در حقیقت، مدل ریسک کرامر-لاندبرگ با ادعاهای نمایی تابع حق بیمه‌ی یکنواخت عمومی  $p(u)$ ، به صورت زیر است

$$\psi(u) = \int_u^\infty \frac{\gamma_0 \lambda}{p(x)} \exp\{\lambda q(x) - \mu x\} dx, \quad (7.3)$$

به طوری که  $q(x) \equiv \int_0^x \frac{1}{p(y)} dy$  و  $1/\gamma_0 \equiv 1 + \lambda \int_0^\infty p(x)^{-1} \exp\{\lambda q(x) - \mu x\} dx$  چون برای حق بیمه‌ی وابسته به مازاد، رویکرد احتمالی ساخته شده، روی معادلات تصادفی کار نمی‌کند، و اگرچه روش‌های تجزیه‌ای معمول نیز به سختی حل می‌شوند زیرا معادلات پیچیده می‌شوند، بنابراین با یک چالش رو به رو خواهیم بود که در آن باید راه حل بهتر را از معادلات فوق استخراج کنیم.

در این رساله ما می‌خواهیم روشی را به کمک مسئله مرزی و اپراتور گرین برای رسیدن به پاسخ سؤال‌هایمان مطرح کنیم، که این روش، جزئی از روش‌های کلی‌تر است. به این منظور ما استخراج خواهیم کرد روش اپراتور جبری رشد یافته را از [۳]. اگرچه، بعد از آنکه روش به وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل خطی عمومی (LODE) با ضرایب ثابت محصور می‌شود، ما معادلات به دست آمده با ضرایب متغیر را با توجه به مفاهیم کنونی، گسترش خواهیم داد.

در این بخش ما مسئله‌ی مرزی را برای تابع  $\Phi(u)$  (Gerber - Shiu) در یک مدل ریسک تجدید با توزیع ادعاهایی که تبدیل لاپلاس منطقی دارند، به دست می‌آوریم. برای حل آن، یک روش نمادین جدید را استخراج می‌کنیم که در ادامه توصیف شده است. این روش به ما اجازه می‌دهد تا انتگرال‌هایی را برای حل LODE های ناهمگن با ضرایب متغیر، برای مقادیر اولیه‌ی داده شده، تحت یک حالت پایدار بسازیم. و در نهایت ما یک بسط مجانبی عمومی برای تابع پنالیتی تنزیل شده در چارچوب مدل تجدید استخراج می‌کنیم.

## مسئله مرزی مشتق شده

فرض می‌کنیم که توزیع با زمان ادعاهای ورودی از فرآیند تجدید  $N(t)$  دارای تبدیل لاپلاس منطقی است. برای ساده سازی این مطلب، ما فرض می‌کنیم که تبدیل لاپلاس منطقی (گویا) یک شمارنده‌ی ثابت دارد، به طوری که تابع چگالی آن یک LODE با ضرایب ثابت را به شکل زیر نتیجه می‌دهد

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right) f_\tau(t) = 0 \quad (8.3)$$

و حالت‌های اولیه‌ی همگن به صورت  $f_{\tau}^{(k)}(t) = \circ (k = \circ, \dots, n-2)$ ، است به‌طوری که

$$\mathcal{L}_{\tau}(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_{\circ}. \quad (9.3)$$

همین طور در حالت کلی می‌توان گفت که برای زمان‌های ورود  $\tau_k$  (زمان‌های بین وقوع هر ادعا که بین  $T_k$  ها اتفاق می‌افتند) دارای تابع چگالی  $f_{\tau}$  هستند که در معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت صدق می‌کند. همچنین می‌توانیم این معادلات را به حاصل ضرب فاکتورهای اول تجزیه کنیم، یعنی برای هر معادله دیفرانسیل مرتبه بالا رابطه زیر را داریم.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right)f_{\tau}(t) = \sum_{j=\circ}^n \alpha_j \frac{d^j}{dt^j} f_{\tau}(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \beta_i\right) f_{\tau}(t) = \circ. \quad (10.3)$$

و شرایط اولیه همگن، یعنی رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} f_{\tau}^{(k)}(\circ) = \circ, & (k = \circ, 1, 2, \dots, n-2) \\ f_{\tau}^{(n-1)}(\circ) = \alpha_{\circ} \end{cases} \quad (11.3)$$

یا شرایط اولیه ناهمگن که در زیر آورده شده است.

$$\begin{cases} f_{\tau}^{(k)}(\circ) = M_k, & (k = \circ, 1, 2, \dots, n-2) \\ f_{\tau}^{(n-1)}(\circ) = \alpha_{\circ} \end{cases} \quad (12.3)$$

که  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  و  $\alpha_n = 1$  و  $\beta_i \in \mathbb{C}$ ، که لزومی ندارد  $\beta_i$  ها متمایز باشند. (۱۱.۳) را شرایط همگن گوئیم، چون تنها مقدار ناصفر آن در شرایط اولیه  $f_{\tau}^{(n-1)}$  است. همچنین  $f_{\tau}$  یک تابع چگالی است، یعنی انتگرال آن برابر یک است. اگر تابع چگالی در (۱۰.۳) صدق کند، معادل با این است که بگوئیم تبدیل لاپلاس آن دارای یک تابع گویا است. استفاده می‌کنیم از [۷] و معادله‌ی انتگرال - دیفرانسیل زیر را برای  $\Phi(u)$  استخراج می‌کنیم.

$$\mathcal{L}_{\tau}^*(p(u) \frac{d}{du} - \delta) \Phi(u) = \alpha_{\circ} \left( \int_{\circ}^u \Phi(u-y) dF_X(y) + \omega(u) \right), \quad (13.3)$$

به‌طوری که  $\mathcal{L}_{\tau}^*$  اپراتور کمکی از  $\mathcal{L}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}_{\tau}^*(x) = \mathcal{L}_{\tau}(-x) = (-x)^n + \alpha_{n-1}(-x)^{n-1} + \dots + \alpha_{\circ} \quad (14.3)$$

فرض می‌کنیم که اندازه توزیع ادعا یک تبدیل لاپلاس منطقی دارد، در این صورت با تابع چگالی  $f_X$ ، معادله  $LODE$  زیر را خواهیم داشت

$$\mathcal{L}_X\left(\frac{d}{dy}\right)f_X(y) = 0 \quad (15.3)$$

در حالی که  $f_X^{(k)}(x) = 0$  ( $k = 0, \dots, m-2$ )، به طوری که

$$\mathcal{L}_X(x) = x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \dots + \beta_0.$$

وقتی که معادله دیفرانسیل-انتگرال (۱۲'۳) با ضرایب تصادفی باشد، یک  $LODE$  با مرتبه‌ی  $m+n$  به شکل زیر می‌شود

$$T\Phi(u) = g(u) \quad (16.3)$$

به طوری که اپراتور دیفرانسیل  $T$  به شکل زیر است

$$T = \mathcal{L}_X\left(\frac{d}{du}\right)\mathcal{L}_\tau^*(p(u)\frac{d}{du} - \delta) - \alpha_0\beta_0 \quad (17.3)$$

و البته طرف راست معادله‌ی (۱۶.۳) برابر است با

$$g(u) = \alpha_0\mathcal{L}_X\left(\frac{d}{du}\right)\omega(u), \quad (18.3)$$

به طوری که در فرمول بالا  $\omega(u) = \int_0^\infty \omega(u, y-u)f_X(y)dy$  است. اگر  $\delta = 0$  و  $\omega = 1$  باشد آنگاه معادله‌ی (۱۶.۳) به معادله‌ی بسیار مدرنی برای احتمال روین تبدیل می‌شود. لازم به ذکر است که معادلات فوق برای توابع معین  $p$  حالت‌های مختلفی را به خود می‌گیرند. برای مثال در مورد خاص،  $p(u) \equiv c$  معادله را به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند، به طوری که چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن از درجه‌ی  $m+n$  و در واقع همان معادله‌ی لاندبرگ است. این نشان می‌دهد که برای  $\delta > 0$  این چندجمله‌ای دارای  $m$  راه حل  $\sigma_i$  است، با بخش حقیقی منفی، و  $n$  راه حل  $p_i$ ، با بخش حقیقی مثبت، برای مثال می‌توانیم آن را در [۱۴] و [۱۵] ببینیم. از [۳] نتیجه می‌گیریم

$$\Phi(u) = \gamma_1 e^{\sigma_1 u} + \dots + \gamma_m e^{\sigma_m u} + Gg(u), \quad (19.3)$$

به طوری که  $\gamma_i$ ها با مقادیر اصلی معین هستند، و خواهیم داشت

$$Gg(u) \equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \left( \int_0^u e^{\sigma_i(u-\xi)} + \int_u^\infty e^{\rho_j(u-\xi)} + e^{\sigma_i u} \int_0^\infty e^{-\rho_j(\xi)} \right) g(\xi) d\xi \quad (20.3)$$

اپراتور گرین برای  $LODE$  ناهمگن (۱۶.۳) با حالت‌های همگن مرزی تعریف می‌شود، به طوری که داریم

$$c_{ij} = - \prod_{k=1, k \neq i}^m (\sigma_i - \sigma_k)^{-1} \prod_{k=1, k \neq j}^n (\rho_j - \rho_k)^{-1} (\rho_j - \sigma_i)^{-1}. \quad (21.3)$$

حالت مرزی معادله‌ی (۱۶.۳) عبارت است از حالت‌های اصلی  $\Phi^{(k)}(\circ) (k = \circ, \dots, m-1)$  که از معادله دیفرانسیل-انتگرال تعیین می‌شود، و حالت پایدار  $\Phi(\infty) = \circ$  که به وسیله‌ی فرض‌های مدل تأمین می‌شود. در مقایسه با موارد ضرایب ثابت، ما فرض می‌کنیم که در سیستم پایه‌ای فرمول (۱۵.۳)،  $m$  راه حل پایدار  $s_i(u)$  و  $n$  حالت ناپایدار  $r_j(u)$  وجود دارد. در اینجا راه حل  $f(u)$  پایدار است اگر  $f(u) \rightarrow \circ$  و ناپایدار است اگر  $f(u) \rightarrow \infty$  با این شرط که  $u \rightarrow \infty$  باشد. در نظر می‌گیریم دنباله‌ی  $t_1, \dots, t_{m+n}$  را برای دنباله‌ای کامل از راه حل‌های  $s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n$ ، و همچنین ما رونسکین‌های متوالی  $\omega_k \equiv W[t_1, \dots, t_k]$  برای  $k = 1, \dots, m+n$ ، که همه را روی بازه‌ی  $\mathbb{R}^+ = [\circ, \infty)$  و غیر صفر فرض می‌کنیم. حال با توجه به این فرض‌ها، در ادامه اپراتور جبری ضرایب مورد انتظار را از [۳] برای حق بیمه‌ی وابسته توسعه می‌دهیم، و راه حل عمومی (۱۶.۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\Phi(u) = \gamma_1 s_1(u) + \dots + \gamma_m s_m(u) + Gg(u),$$

به طوری که  $\gamma_i$ ها با مقادیر اصلی معین هستند و  $Gg(u)$  نیز اپراتور گرین برای  $LODE$  ناهمگن (۱۶.۳) با حالت مرزی همگن است، اما این زمانی است که  $p(u)$  غیر ثابت باشد. در نتیجه، ارائه‌ی فرمول (۲۰.۳) دیگر قابل قبول نیست و ما یک روش جدید را برای آن تعمیم خواهیم داد.

این بخش را ادامه می‌دهیم با یک تذکره در مورد اینکه چگونه یک سیستم اصلی، دارای راه حل‌های پایدار و ناپایدار است. به طور کلی این موضوع ما را به آنالیز جانبی از راه حل‌های معادلات همگن می‌رساند. با توجه به [۸] می‌توان حالت‌های روی  $p(u)$  که موجودیت یک سیستم اصلی را تأمین می‌کند، مشخص کرد که این حالت‌ها ساختاری از ضرایب را معین می‌کند. به طوری که این حالت‌ها عبارت‌اند از دو حالت: همگرا شدن (به سرعت) با (مقادیر) ثابت. (۱۶.۳).

اگرچه سرعت همگرایی ضرایب قطعاً به تابع حق بیمه‌ی  $p(u)$  وابسته است. برای نمونه، می‌توان در مثال ۵.۴ از [۲۹]  $p(u) = ce^{\varepsilon/u}$  دید که  $LODE$  با ضرایب تقریباً ثابت به  $LODE$  ضرایب ثابت (داده شده در [۳]) همگرا است.

## روش اپراتور گرین

در بخش قبل ما دیدیم که وظیفه‌ی اصلی برای محاسبه‌ی تابع  $Gerber - Shiu$  روی متغیر  $u$  برای تعیین اپراتور گرین  $G$  برای  $LODE$  ناهمگن (۱۶.۳) با شرایط مرزی همگن که شامل حالت‌های پایدار از  $\Phi^k(\circ) = \circ$  و  $\Phi^k(\infty) = \circ$  ( $k = \circ, \dots, m-1$ ) و حالت پایدار  $\Phi^k(\infty) = \circ$  است. حال ما می‌خواهیم یک روش نمادین را ارائه دهیم که برای یک  $LODE$  عمومی با ضرایب تصادفی و شرایط مرزی همگن یک (اپراتور)  $G$  ایجاد می‌کند. به عبارت دیگر، مسئله‌ی مرزی را از نوع عمومی زیر فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} T\Phi(u) = g(u), \\ \Phi(\circ) = \Phi'(\circ) = \dots = \Phi^{(m-1)}(\circ) = \circ \quad \text{and} \quad \Phi(\infty) = \circ, \end{cases} \quad (22.3)$$

به‌طوری که  $T \equiv D^{m+n} + c_{m+n-1}(u)D^{m+n-1} + \dots + c_1(u)D + c_\circ(u)$  یک اپراتور دیفرانسیل خطی با ضرایب تصادفی (و عمده‌ی ضرایب نرمال واحد (یکتا) هستند.) و  $D \equiv \frac{d}{du}$  است. تحت شرایط شرح بیان شده، راه‌حلی از (۲۲.۳) منحصر به فرد و وابسته‌ی خطی روی تابع به اصطلاح شدت  $g(u)$  موجود است. از این رو انتقال  $\Phi \longmapsto g$  یک اپراتور خطی گرین  $G$  از (۲۲.۳) است. قضیه‌ی زیر را می‌توان فوراً از فرمول دیفرانسیل مورد نظر نتیجه گرفت.

**قضیه ۱.۱.۳.** تابع  $Gerber - Shiu$  برابر است با

$$\Phi(u) = \gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_m s_m(u) + Gg(u), \quad (23.3)$$

به‌طوری که  $G$  برای فرمول (۲۲.۳) اپراتور گرین است و ضرایب  $\gamma_i$ ‌ها نیز تعریف شده هستند.

برای توصیف روش جدیدمان از روش روشن به وجود آمده از  $G$ ، اجازه دهید بیاد بیاوریم که چگونه این کار انجام شده بود در [۳]. برای مورد خاص از ضرایب ثابت  $c_i(u) \equiv c_i$  ما از همان روش در اینجا استفاده خواهیم کرد، در اپراتورهای اساسی خاص  $A = \int_\circ^u, B = \int_u^\infty$  و انتگرال محدود  $F = A + B = \int_\circ^\infty$  بکار بردن اپراتورهای اساسی، ایده‌ی بسیار مهم با فاکتور اپراتور گرین به شکل

$$G = (-1)^n A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_m} B_{\rho_1} \dots B_{\rho_n}, \quad (24.3)$$

به‌طوری که فاکتور اپراتورها به صورت  $A_\sigma \equiv e^{\sigma x} A e^{-\sigma x}$  و  $B_\rho \equiv e^{\rho x} B e^{-\rho x}$  با  $\sigma_i$  و  $\rho_i$  که قبلاً بیان شد، تعریف می‌شوند. این نکته نیز یادمان باشد که استراتژی ما تجزیه‌ی مسئله و نگاه داشتن نماهای پایدار با اپراتور پایه‌ی  $A$  و برای ناپایدار با  $B$  بود.

این ایده را می‌توان روی معادله (۲۲.۳) بررسی کرد. با استفاده از نتایج بیان شده در [۲۰]، هر اپراتور گرین می‌تواند کاملاً به اپراتورهای پایه شکسته شود، اگر بتواند اپراتور دیفرانسیل  $T$  را به فاکتورهای مرتبه اول تجزیه کند. در نظر می‌گیریم یک سیستم اصلی و اولیه را به صورت  $\omega_k(u) \neq \circ (k = 1, \dots, m+n)$  با استفاده از تابع رونسکین  $t_1, \dots, t_{m+n} = s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n$  برای هر  $u \in \mathbb{R}^+$  می‌تواند همیشه با تکنیک‌های مشهور توصیف شده انجام شود، برای مثال در فرمول ۱۸ از [۱۶] و همینطور در [۱۸] و [۲۴] نمونه‌هایی مشاهده می‌شود. با استفاده از این فاکتورگیری، ما می‌توانیم تجزیه کنیم  $G$  را در یک روش مشابه با (۲۴.۳)، به غیر از اینکه  $A_{s_i}$  باید با اپراتورهای پیچیده‌تر بنا شده روی  $A$  و  $s_i$  جایگزین شود و به طور مشابه برای  $B_{r_j}$  به وسیله‌ی اپراتورهای مناسب  $B$  و  $r_j$  نیز جایگزین شود. برای اجتناب از موارد اشتباه و چندحالتی فرض می‌کنیم که به طور کلی  $m, n > 0$  باشد.

**قضیه ۲.۱.۳.** اپراتور گرین از (۲۲.۳) داده شده به صورت  $G = G_s G_r$  در حالی که  $G_s =$

$$A_{s_1}, \dots, A_{s_m} \text{ و } G_r = (-1)^n B_{r_1}, \dots, B_{r_n} \text{ و با}$$

$$A_{t_i} = A_{s_i} = \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} A \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i} \quad \text{for } 1 \leq i \leq m,$$

$$B_{t_j} = B_{r_{j-m}} = \frac{\omega_j}{\omega_{j-1}} B \frac{\omega_{j-1}}{\omega_j} \quad \text{for } m+1 \leq j \leq m+n,$$

برای راحتی  $\omega_0 = 1$  در نظر می‌گیریم.

**اثبات.** برای اثبات از فاکتورگیری  $T = T_{r_n} \dots T_{r_1} T_{s_m} \dots T_{s_1}$  با اپراتورهای مرتبه اول داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$T_{t_i} = T_{s_i} = \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i} T \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \quad \text{for } 1 \leq i \leq m,$$

$$T_{t_j} = T_{r_{j-m}} = \frac{\omega_{j-1}}{\omega_j} T \frac{\omega_j}{\omega_{j-1}} \quad \text{for } m+1 \leq j \leq m+n.$$

این روشن است که  $G = A_{s_1} \dots A_{s_m} (-B_{r_1}) \dots (-B_{r_n})$  و طبق (۱۶.۳) و (۲۲.۳) پس  $G$  یک معکوس صحیح از اپراتور  $T$  است، زیرا هر دوی  $A$  و  $-B$  معکوس صحیح از  $D$  هستند. این نتایج (بقایا) نشان می‌دهند که  $\Phi = Gg$  حالت‌های مرزی را ثابت می‌کند. مشتق  $\Phi$  کمتر از زمان‌های  $m$ ، نتیجه می‌دهد در یک عبارت مجموع که همه‌ی درایه‌ها به فرم  $h.(A \dots g)$  ، برای بعضی توابع  $h$  می‌باشند؛ ارزیابی هر بازدهی به صورت  $\circ (f^\circ \dots g) = \circ$  پس در واقع برای حالت‌های ابتدایی، همگن بودن اثبات شده است. برای نشان دادن محاسبه حالت ثابت (پایدار)  $\Phi(\infty) = \circ$  نیز همچنین، ما می‌نویسیم:  $\Phi = A_{s_1} = \tilde{g}$  به‌طوری که  $\tilde{g} \equiv A_{s_1} \dots A_{s_m} G_r g$  تعریف می‌شود. آنگاه  $\Phi = s_1 A_{s_1}^{-1} \tilde{g}$  است و بنابراین

$$\Phi(\infty) = s_1(\infty) \int_0^\infty s_1(u)^{-1} \tilde{g}(u) du = 0$$

زیرا انتگرال همگرا فرض شده و  $s_1(\infty) = 0$  است.  $\square$

توجه داشته باشید که برای قضیه بالا و همینطور از این به بعد، فرض می‌کنیم همه‌ی توابع لازم انتخاب شده هستند، به طوری که همه انتگرال‌های نامحدود دارند (این برقرار خواهد بود برای همه‌ی مواردی که در بحث ما استفاده می‌شود). این همچنین دلیلی است برای اینکه  $r_j$ ها در اپراتورهای  $B$  و نسبتاً بیشتر برای  $s_i$  در اپراتورهای  $A$ ، ترکیب شده هستند. حال چون ما می‌خواهیم در اینجا روی جنبه‌های نمادین تمرکز کنیم، نباید این نقاط را بیشتر تغییر دهیم.

وارد جزئیات نمی‌شویم و ما اکنون می‌توانیم اپراتور گرین را از (۲۲.۳) به صورت فرم ضربی زیر بنویسیم

$$G = \frac{\omega_1}{\omega_0} C_1 \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1^2} C_2 \frac{\omega_1 \omega_3}{\omega_2^2} C_3 \cdots C_{m+n-1} \frac{\omega_{m+n-2} \omega_n}{\omega_{m+n-1}^2} C_{m+n} \frac{\omega_{m+n-1}}{\omega_{m+n}}, \quad (25.3)$$

به طوری که  $C_i$ ها جایگزین برای  $A$  به طوری که  $1 \leq i \leq m$  و  $-B$  برای  $m+1 \leq i \leq m+n$  هستند. اگرچه این ما را قبلاً به روشی برای فرم  $\Phi(u)$  رساند، ما مایل هستیم به تجزیه‌ی انتگرال واحد به  $m+n$  انتگرال از (۲۵.۳)، که ما فقط آن را در [۳] می‌بینیم.

در ابتدا، برای یک لحظه فرض می‌کنیم که هیچ راه حل ناپایداری نداریم، بنابراین سیستم اصلی تنها به صورت  $s_1, \dots, s_m$  است. در این مورد، ما باید توزیع را با حالت پایدار انجام دهیم، بنابراین تنها حالت‌های ابتدایی پایدار در (۲۲.۳) را نظر می‌گیریم. پس نتیجه می‌گیریم که اپراتور گرین تنها شامل اپراتورهای  $A$ ، بدون هیچ رخدادی از  $B$  است. به شکل ساده‌تر، چگونه می‌توان ( $m$  تا) اپراتورهای انتگرال  $C_1 \dots C_m = A$  را در (۲۵.۳) به وسیله‌ی یک ترکیب خطی از انتگرال‌گیری‌های واحد حل کرد (اپراتورهای ضرب با  $A$  واحد ترکیب می‌شوند)؟ به این سوال با فرمول تغییرات در ثابت‌ها پاسخ داده می‌شود، که این موضوع با اپراتورهایی که در [۱۷] نشان داده شده است، بازنویسی می‌شود.

**قضیه ۳.۱.۳.** اگر  $s_1, \dots, s_m$  پایه باشند برای معادله همگن  $T\Phi = 0$ ، اپراتور گرین از (۲۲.۳) به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$G_s = s_1 A \frac{d_{m,1}}{\omega_m} + \cdots + s_m A \frac{d_{m,m}}{\omega_m}, \quad (26.3)$$

به طوری که  $\omega_m$  دترمینان رونسکین از  $s_1, \dots, s_m$  است و  $d_{m,i}$  به وسیله‌ی جایگزین کردن  $i$ -امین ستون با  $m$ -امین بردار واحد به وسیله‌ی  $\omega_m$  نتیجه می‌شود.

به عبارت دیگر، معادله‌ی  $\Phi = Gg$  یک راه حل خاص از  $T\Phi = g$  است که دارای شرایط اصلی  $\Phi(\circ) = \Phi'(\circ) = \dots = \Phi^{(m-1)}(\circ) = \circ$  و منحصر به فردی است. در معادله‌ی ما حالت پایدار  $\Phi(\infty) = \circ$  وجود دارد، زیرا برای همه‌ی  $i = 1, \dots, m$  رابطه  $s_i(\infty) = \circ$  برقرار است. ولی این نکته را باید دانست که معادله‌ی (۲۶.۳) برای هر سیستم پایه‌ای  $s_1, \dots, s_m$  از  $T$  درست و معتبر است، به این منظور یک راه حل خاص برای مقدار مسئله‌ی مرزی ارائه شده است (منظور معادله‌ی (۲۲.۳) بدون حالت پایداری است).

حالا ما به سراغ معادله عمومی می‌رویم، جایی که سیستم پایه‌ای  $t_1, \dots, t_{m+n}$  که به ازای  $m \geq 1$  از حالت‌های پایدار  $s_1, \dots, s_m$  و به ازای  $n \geq 1$  از حالت‌های ناپایدار  $r_1, \dots, r_n$  تشکیل شده است. در این مورد اپراتور گرین یک نمایی شبیه به (۲۶.۳) دارد به استثنای اینکه ما به اپراتورهای  $B$  در ترکیب با اپراتورهای  $A$  نیاز داریم و همینطور ما انتگرال‌های  $F$  را برای تراز کردن (بالانس) اپراتورهای  $A$  و  $B$  تعریف می‌کنیم. برای مطالب این قسمت از منابع [۳، ۴، ۹، ۲۹، ۱۷] استفاده شده است.

**قضیه ۴.۱.۳.** ابتدا ثابت‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$\alpha_{i,j} = \frac{d_{i,m+j}(\circ)}{\omega_{m+j-1}(\circ)} \quad (27.3)$$

به ازای  $n, j = 1, \dots, n$  و  $i = 1, \dots, m+n$  به طوری که توابع  $a_j = \alpha_{1,j}s_1 + \dots + \alpha_{m,j}s_m$  برای  $j = 1, \dots, n$ ؛ و توابع  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$  به وسیله‌ی رابطه‌ی بازگشتی  $\tilde{a}_1 = a_1, \tilde{a}_j = a_j - \alpha_{m+1,j}\tilde{a}_1 - \dots - \alpha_{m+j-1,j}\tilde{a}_{j-1}$  به دست می‌آیند. آنگاه اپراتور گرین از (۲۲.۳) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$G = \sum_{i=1}^{m+n} t_i C_i \frac{d_{i,m+n}}{\omega_{m+n}} - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j F \frac{d_{m+j,m+n}}{\omega_{m+n}}, \quad (28.3)$$

به طوری که  $C_i$  برای هر  $1 \leq i \leq m$  برابر با  $A$  و برای هر  $m+1 \leq i \leq m+n$  برابر با  $-B$  است.

اثبات این قضیه در پیوست آمده است. البته لازم به ذکر است که روش‌های ساده‌تری از دنباله‌ی توابع  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  که در قضیه‌ی (۴.۱.۳) آمده، وجود دارد.

**قضیه ۵.۱.۳.** توابع  $\tilde{a}_j$  در قضیه (۴.۱.۳) می‌توانند به وسیله‌ی حل معادله‌ی  $T\tilde{a} = a$  محاسبه شوند، به طوری که  $T$  ماتریس پایین مثلثی بوده و معادله‌ی آن به صورت

$$T_{jk} = \begin{cases} \alpha_{m+k}(j) & j > k \\ 1 & j = k \\ \circ & \text{otherwise} \end{cases}$$

در حالی که  $\tilde{a}$  و  $a$  به ترتیب ستون‌ها با ورودی  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  و  $a_1, \dots, a_n$  هستند. اگرچه به وضوح ما داریم  $\tilde{a}_j = \det T_j / \det T$  به طوری که  $T_j$  ماتریس حاصل شده از جایگزینی ستون  $j$ ام از ماتریس  $T$  با  $a$  است.

اثبات. با توجه به تعریف  $\alpha_{m+1,j}\tilde{a}_1 + \dots + \alpha_{m+j-1,j}\tilde{a}_{j-1} + \tilde{a}_j = a_j$  برای  $j > 1$  داریم که از تعریف  $\tilde{a}_j$  حاصل می‌شود. اما  $j$ -امین سطر از ماتریس  $T\tilde{a}$  به وضوح مشخص است، در حالی که معادله‌ی بازگشتی و اساسی  $\tilde{a}_1 = a_1$  اولین سطر را ثابت می‌کند.  $\square$

در هر فرم، توابع  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  می‌تواند به آسانی محاسبه شود به وسیله‌ی  $s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n$  و معادله (۲۸.۳) یک فرم دیگر را برای اپراتور گرین از معادله (۲۲.۳) نتیجه می‌دهد.

## نتایج جانبی برای مدل ریسک تجدید

در ادامه، می‌خواهیم نشان دهیم که بعضی توابع  $k$  و  $l$ ، که اگر  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{k(u)}{l(u)} = 1$  را داشته باشیم، آنگاه  $k(u) \sim l(u)$ . فرض کنید که تقریباً همه جا هر دوی توزیع ادعای ورودی و توزیع اندازه‌ی ادعا تبدیل لاپلاس گویا داشته باشند [۵، ۳۵]. تابع چگالی آن‌ها به ترتیب  $ODE$  های (۱۵.۳) و (۸.۳) را اثبات می‌کند. فرض می‌کنیم که راه حل‌هایی، تقریباً همه جا، از معادله (۱۶.۳) به شکل  $t_i(u) \sim u^{\beta_i} e^{y_i u}$  باشند، آنگاه داریم

$$t_i(U) \sim \exp\{A\eta_i(u)\}, \quad i = 1, \dots, m+n \quad (29.3)$$

به طوری که داریم

$$\eta_i(u) \sim y_i + \frac{\beta_i}{u}, \quad i = 1, \dots, m+n \quad (30.3)$$

و

$$y_m < \dots < y_1 \leq 0 < y_{m+1} < \dots < y_{m+n} \quad (31.3)$$

( $\eta_i$  ها مقدارهای حدودی نیستند.)

**ملاحظه ۱.۱.۳.** توجه کنید که برای توابع حق بیمه  $p(u) = c + \frac{1}{1+\varepsilon u}$  و  $p(u) = c + \varepsilon u$  همچنین تابع  $p(u) = ce^{\varepsilon/u}$  نیز  $t_i$  مشابه با (۲۹.۳) و (۳۱.۳) انجام می‌شود. ثابت‌های  $\alpha_{jk} = \gamma_k - \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} F_{\omega m+n}^{d_{m+j, m+n}}$  با  $h_k$  که در (۲۳.۳) معرفی شده و  $\alpha_{jk}$  که در (۲۷.۳) تعریف شده است. برای یک جایگشت  $\varphi$  روی  $\{1, \dots, m+n\}$  ما معادله زیر را تعریف می‌کنیم

$$\pi_i = \frac{\sum_{\varphi(i)=m+n} (-1)^{\text{sgn}\varphi} \prod_{k \neq i} y_k^{\varphi(k)}}{\sum_{\varphi} (-1)^{\text{sgn}\varphi} \prod_{k=1}^{m+n} y_k^{\varphi(k)}}$$

به طوری که  $\text{sgn}\varphi$  برابر با تابع علامت (پارامتر)  $\varphi$  است.

**قضیه ۶.۱.۳.** اگر  $g(u) \sim e^{-\nu u}$  برای  $\nu > -y_1$ ، آنگاه با توجه به معادلات (۲۹.۳) و (۳۱.۳) بسط مجانبی (تقریبی) زیر را خواهیم داشت

$$\Phi(u) \approx \sum_{i=1}^{m+1} \vartheta_i(u) \quad (32.3)$$

در حالی که  $\vartheta_i(u) = h_i s_i(u)$  برای هر  $i = 1, \dots, m$  و

$$\vartheta_{m+1}(u) \sim \sum_{i=1}^{m+n} \frac{\pi_i}{y_i + \nu} g(u).$$

این برابر است با اینکه ما بگوییم  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u) - \sum_{i=1}^k \vartheta_i(u)}{\vartheta_{k+1}(u)} = 1$  برای هر  $k = 1, \dots, m$ .

اثبات

با توجه به معادلات (۲۹.۳) و (۳۰.۳) داریم

$$t_i(U) \sim \exp\left\{A\left(y_i + \frac{\beta_i}{u}\right)\right\}$$

برای حل از معادله (۲۸.۳) و فرمول لایبنیتز برای دترمینان استفاده

می‌کنیم. سپس با انجام محاسباتی، بسط (۳۲.۳) را با معادله  $\vartheta_k(u) = l_k t_k(u)$  و

$$\vartheta_{m+1}(u) = \sum_{i=1}^{m+n} \pi_i t_i(u) C_i \frac{g}{t_i}(u).$$

با استفاده از قاعده هوپیتال اثبات کامل می‌شود.  $\square$



# مراجع

[۱] جهانی پور ر، ظهوری زنگنه ب، (۱۳۸۳)، حرکت براونی ”حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی“ انتشارات فرهنگ و اندیشه ریاضی، صفحه ۱-۲۰

- [2] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1964). Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55). Courier Corporation.
- [3] Albrecher, H., Constantinescu, C., Pirsic, G., Regensburger, G., Rosenkranz, M. (2010). An algebraic operator approach to the analysis of Gerber–Shiu functions. Insurance: Mathematics and Economics, 46(1), 42-51.
- [4] Albrecher, H., Teugels, J. L., Tichy, R. F. (2001). On a gamma series expansion for the time-dependent probability of collective ruin. Insurance: Mathematics and Economics, 29(3), 345-355.
- [5] Albrecher, H. (2010). Ruin probabilities (Vol. 14). World Scientific.
- [6] Coddington, E. A., Levinson, N. (1955). Theory of ordinary differential equations. Tata McGraw-Hill Education.
- [7] Constantinescu, C., Thomann, E. (2011). Martingales for renewal jump-diffusion processes. Preprint.
- [8] Fedoryuk, M. V. (2012). Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations. Springer Science Business Media.
- [9] Gerber, H. U., Shiu, E. S. (1998). On the time value of ruin. North American Actuarial Journal, 2(1), 48-72.
- [10] Gröbner, W. (1966). Matrizenrechnung. Bibliographisches Institut.

- 
- [11] Ince, E. L. (1939). Ordinary Differential Equations, London, 1926. Translated under the title Obyknoennye differentsial'nye uravneniya, Kharkov.
- [12] Knessl, C., Peters, C. S. (1994). Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin I. SIAM Journal on Applied Mathematics, 54(6), 1745-1767.
- [13] Knessl, C., Peters, C. S. (1996). Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin II. SIAM Journal on Applied Mathematics, 56(5), 1471-1521.
- [14] Landriault, D., Willmot, G. (2008). On the Gerber–Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution. Insurance: Mathematics and Economics, 42(2), 600-608.
- [15] Li, S., Garrido, J. (2005). On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. Advances in Applied Probability, 37(3), 836-856.
- [16] Polya, G. (1922). On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, 24(4), 312-324.
- [17] Regensburger, G., Rosenkranz, M. (2009). Symbolic integral operators and boundary problems. Lecture Notes.
- [18] Ristroph, R. (1972). Pólya's property  $\omega$  and factorization—A short proof. Proceedings of the American Mathematical Society, 31(2), 631-632.
- [19] Rosenkranz, M. (2005). A new symbolic method for solving linear two-point boundary value problems on the level of operators. Journal of Symbolic Computation, 39(2), 171-199.
- [20] Rosenkranz, M., Regensburger, G. (2008). Solving and factoring boundary problems for linear ordinary differential equations in differential algebras. Journal of Symbolic Computation, 43(8), 515-544.
- [21] Salem, A., Said, K. (2008). A simple proof of Sylvester's (determinants) identity. Applied Mathematical Sciences, 32(2), 1571-1580.
- [22] Segerdahl, C. O. (1942). Über einige risikothoretische Fragestellungen. Scandinavian Actuarial Journal, 1942(1-2), 43-83.
- [23] Tichy, R. F. (1984). Über eine zahlentheoretische Methode zur numerischen Integration und zur Behandlung von Integralgleichungen. Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 193.

- [24] Zettl, A. (1974). General theory of the factorization of ordinary linear differential operators. Transactions of the American Mathematical Society, 197, 341-353.
- [25] Collamore, J. F. (2009). Random recurrence equations and ruin in a Markov-dependent stochastic economic environment. The Annals of Applied Probability, 19(4), 1404-1458.
- [26] Øksendal, B.(2003). ” **Stochastic differential equations**” Springer. Berlin Heidelberg. (pp. 65-84).
- [27] Kyprianou, A. E. (2013). Gerber–Shiu risk theory. Springer Science Business Media.
- [28] Björk, T. (2009). Arbitrage theory in continuous time. Oxford university press.
- [29] Albrecher, H., Constantinescu, C., Palmowski, Z., Regensburger, G., Rosenkranz, M. (2013). Exact and asymptotic results for insurance risk models with surplus-dependent premiums. SIAM Journal on Applied Mathematics, 73(1), 47-66.
- [30] Karatzas, I., Shreve, S. (2012). Brownian motion and stochastic calculus (Vol. 113). Springer Science Business Media.
- [31] Brzezniak, Z., Zastawniak, T. (2000). Basic stochastic processes: a course through exercises. Springer Science Business Media.
- [32] Fischer, T. (2013). On simple representations of stopping times and stopping time sigma-algebras. Statistics Probability Letters, 83(1), 345-349.
- [33] Hull, J., Treepongkaruna, S., Colwell, D., Heaney, R., Pitt, D. (2013). Fundamentals of futures and options markets. Pearson Higher Education AU.
- [34] Chung, K. L. (2001). A course in probability theory. Academic press.
- [35] Chen, Y., Wang, Y., Wang, K. (2013). Asymptotic results for ruin probability of a two-dimensional renewal risk model. Stochastic Analysis and Applications, 31(1), 80-91.
- [36] Pavlova, K. P., Willmot, G. E. (2004). The discrete stationary renewal risk model and the Gerber–Shiu discounted penalty function. Insurance: Mathematics and Economics, 35(2), 267-277.
- [37] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. L. (2009). Stochastic processes for insurance and finance (Vol. 505). John Wiley Sons.



# پیوست آ

## پیوست آ

### ۱.۱. لم‌ها و قضایای مورد نیاز

برای اثبات قضیه‌ی (۴.۱.۳) ابتدا لم زیر که مربوط به دترمینان رونسکین می‌شود، بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۱. ما معادله‌ی زیر را برای هر  $1 \leq i \leq k \leq m+n$  داریم

$$\left(\frac{d_{i,k+1}}{\omega_k}\right)' = -d_{i,k} \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}$$

اثبات.

ما اکنون باید  $d_{i,k+1}\omega'_k - d'_{i,k+1}\omega_k = d_{i,k}\omega_{k+1}$  را نشان دهیم. یادآوری می‌کنیم که همه عبارات استفاده شده در این فرمول، کوچکتر از ماتریس رونسکین  $W$  برای هر  $t_1, \dots, t_{m+n}$  است. بنابراین بگذارید بنویسیم (قراردادکنیم) یعنی برای ماتریس‌های کوچک‌تر از  $W$  که ستون  $j_1, \dots, j_l$  و ردیف  $i_1, \dots, i_l$  آن‌ها حذف شده باشد. وقتی که ما داریم  $\omega_k = W_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_l}$  (قراردادکنیم)  $d_{i,k} = (-1)^{i+k} W_{k,k+1}^{i,k+1}$  و  $d_{i,k+1} = (-1)^{i+k+1} W_{k+1}^i$  و  $\omega'_k = W_k^{k+1}$  و  $d'_{i,k+1} = (-1)^{i+k+1} W_k^i$  را استفاده می‌کنیم که دترمینان رونسکین می‌تواند مشتق‌پذیر باشد اگر آخرین ردیف را با مشتق آن جایگزین کنیم. برای مثال می‌توانید به [۱۱] مراجعه کنید. ضرب کردن عبارت با

$(-1)^{i+k}$  وجود دارد تا تساوی رونسکین  $W_k^i W_{k+1}^{k+1} W_{k+1}^i W_k^{k+1} = W_{k,k+1}^{i,k+1} \cdot \det W$  را نشان دهد، که فرمولی که مشاهده می‌کنید یه معادله کلاسیک از سیلوستر است که برای مثال در [۲۱] می‌بینید. □

لم فوق ابزاری برای از بین بردن انتگرال‌های تو در تو در معادله (۲۸.۳) است. (برای دیدن آن، توجه داشته باشید که آن را می‌توان مانند انتگرال ارائه شده از  $\omega_k^2 / d_{i,k} \omega_{k+1}$ ، وارونه خواند.)

اثبات قضیه (۴.۱.۳) به خاطر بسپارید که اگر  $n = 0$  باشد، قضیه به قضیه (۳.۱.۳) تبدیل می‌شود. بنابراین  $n > 0$  را فرض می‌کنیم. ما اکنون طبق قضیه (۲.۱.۳) داریم

$$G = (-1)^n A_{s_1} \cdots A_{s_m} B_{r_1} \cdots B_{r_n},$$

با استفاده از نکات بکار گرفته شده در اینجا، بر اساس این تقسیم بندی ما اثبات می‌کنیم (۲۸.۳) را به وسیله استقرا روی  $n$ . در این صورت ابتدا  $n = 1$  قرار می‌دهیم. با بکار گرفتن قضیه (۳.۱.۳) برای حالت  $n = 1$  داریم

$$G = G_s(-B_{r_1}) = \left( \sum_{i=1}^m s_i A \frac{d_{m+1,i}}{\omega_m} \right) \frac{\omega_{m+1}}{\omega_m} - B \frac{\omega_m}{\omega_{m+1}} = \sum_{i=1}^m s_i A \left( -d_{m,i} \frac{\omega_{m+1}}{\omega_m^2} \right) B \frac{\omega_m}{\omega_{m+1}},$$

و از (۱.۱.آ) می‌توان  $(d_{m+1,i}/\omega_m)'$  برای عبارت داخل پرانتز ارائه داد. حالا ما از [۱۹] عبارت مورد نظر  $AfB = A(\int_0^u f) + (\int_0^u f)B$  را برای تابع دلخواه  $f$  استفاده می‌کنیم. عبارت داخل پرانتز جایگزین می‌شود با

$$A \frac{d_{m+1,i}}{\omega_m} + \frac{d_{m+1,i}}{\omega_m} B - \alpha_{1,i} F,$$

بنابراین ما در نهایت خواهیم داشت

$$G = \sum_{i=1}^m \left( s_i A \frac{d_{m+1,i}}{\omega_{m+1}} + s_i \frac{d_{m+1,i}}{\omega_m} B \frac{\omega_m}{\omega_{m+1}} - \alpha_{1,i} s_i F \frac{\omega_m}{\omega_{m+1}} \right).$$

در ادامه فاکتور  $\sum_i s_i d_{m+1,i}$ ، که برابر است با  $-r_1 d_{m+1,m+1}$  را خارج می‌کنیم، همانطور که می‌بینید، با ردیف آخر بجای  $\omega_{m+1}$  جایگزین می‌کنیم در ابتدا و سپس این کار را در طول آخرین ردیف بسط می‌دهیم. اما  $d_{m+1,m+1} = \omega_m$ ، و همینطور متوسط مجموع ساده می‌شود با  $r_1(-B) d_{m+1,m+1} / \omega_{m+1}$  و ممکن است به مجموع ابتدایی اضافه شود. در مجموع سوم عبارت فوق، ما  $\sum_i \alpha_{1,i} s_i = a_1$  را فاکتور (عامل مشترک) می‌گیریم. بنابراین ما در نهایت به دست می‌آوریم

$$G = \sum_{i=1}^{m+1} t_i C_i \frac{d_{m+1,i}}{\omega_{m+1}} - \tilde{a}_1 F \frac{d_{m+1,m+1}}{\omega_{m+1}},$$

که عبارت حاصل شده همان (۲۸.۳) به ازای  $n = 1$  است. اکنون معادله (۲۸.۳) را برای  $n$  فرض می‌کنیم و سپس آن را برای  $n + 1$  ثابت می‌کنیم. با استفاده از قضیه استقرای ریاضی مابه دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} G &= (-1)^n A_{s_1} \cdots A_{s_m} B_{r_1} \cdots B_{r_n} (-B_{r_{n+1}}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{m+n} t_i C_i \frac{d_{i,m+n}}{\omega_{m+n}} - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j F \frac{d_{m+j,m+n}}{\omega_{m+n}} \right) \frac{\omega_{m+n+1}}{\omega_{m+n}} (-B) \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{m+n} t_i C_i \left( -d_{i,m+n} \frac{\omega_{m+n+1}}{\omega_{m+n}} \right) B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j F \left( -d_{m+j,m+n} \frac{\omega_{m+n+1}}{\omega_{m+n}} \right) B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}}. \end{aligned}$$

همانطور که در لم (۱.۱.آ) دیدیم، با قرار دادن  $n + 1$  به جای  $n$ ، می‌توان عبارت را با دو پرانتز  $(d_{m+n+1,i}/\omega_{m+n})'$  را برای معادله اول و  $(d_{m+n+1,m+j}/\omega_{m+n})'$  را برای دومین معادله، به دست آوریم. علاوه بر این، عبارت (اصل)  $AfB$  برای حالت پایه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بعلاوه ما اکنون نیاز داریم که عبارت (اصل)  $BfB = (\int_u^\infty f) B - B (\int_u^\infty f)$  و  $FfB = F (\int_\circ^\infty f)$  با هم ارتباط دهیم، که این ارتباط را از [۱۹] نتیجه می‌گیریم. وقتی که  $f$  را جایگزین کنیم عبارت به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$AfB = A \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n}} + \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n}} B - \alpha_{n+1,i} F,$$

$$BfB = B \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n}} - \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n}} B$$

برای عبارت اول می‌توان نوشت

$$FfB = \frac{F d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} - \alpha_{n+1,m+j} F$$

به جای دومین عبارت، ما اولین مجموع را به دو مجموع تقسیم می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^m s_i \left( A \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n}} + \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n}} B - \alpha_{n+1,i} F \right) \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}}, \quad (*)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j \left( \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} B - B \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} \right) \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}}. \quad (**)$$

در عبارت مجموع اولی (\*) داریم

$$\sum_{i=1}^m s_i A \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n+1}} + \left( \sum_{i=1}^m s_i d_{m+n+1,i} \right) / \omega_{m+n} B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} - \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{n+1,i} s_i \right) F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}}$$

ما می‌توانیم همان بسط تعیین کننده را همانند قبل برای محاسبه کردن عبارت مورد نظر، بکار ببریم.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m s_i A \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n+1}} + \left( -r_{n+1} - \sum_{j=1}^n r_j \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} \right) B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \\ & - a_{n+1} F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \\ & = \sum_{i=1}^m t_i C_i \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n+1}} + t_{m+n+1} C_{m+n+1} \frac{d_{m+n+1,m+n+1}}{\omega_{m+n+1}} \\ & - \sum_{j=1}^n r_j \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} - a_{n+1} F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \quad ; \end{aligned}$$

در مجموع دومی (\*\*) داریم

$$\sum_{j=1}^n r_j \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} + \sum_{i=1}^m t_{m+j} C_{m+j} \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n+1}}.$$

قسمت‌های با درجه بالاتر و پایین‌تر را باهم ترکیب می‌کنیم، اولین مجموع درون آخرین عبارت با دومین مجموع درون عبارت قبلی حذف می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{m+n+1} t_i C_i \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n+1}} - a_{n+1} F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}}.$$

اکنون به ما اجازه دهید تا مجموع دوم را در عبارت فوق برای  $G$  محاسبه کنیم، یعنی

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j F \left( -d_{m+j,m+n} \frac{\omega_{m+n+1}}{\omega_{m+n}} \right) B \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \\ & = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j \left( \alpha_{n+1,m+j} F - F \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n}} \right) \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \\ & = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{n+1,m+j} \tilde{a}_j \right) F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j F \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n+1}}, \end{aligned}$$

به طوری که با توجه به تعریف  $\tilde{a}_j$ ، عبارت درون پرانتز برابر با  $a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1}$  می‌شود. اکنون می‌توانیم حاصل را به دست آوریم

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{m+n+1} t_i C_i \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n+1}} - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j F \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n+1}} \\ &\quad - \left( a_{n+1} F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} - (a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1}) F \frac{\omega_{m+n}}{\omega_{m+n+1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m+n+1} t_i C_i \frac{d_{m+n+1,i}}{\omega_{m+n+1}} - \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{a}_j F \frac{d_{m+n+1,m+j}}{\omega_{m+n+1}}, \end{aligned}$$

همانطور که می‌بینید حکم (۲۸.۳) با جایگذاری  $n+1$  به جای  $n$  به دست آمد.  $\square$   
در نتیجه، این پیوست به ما یادآور شد که قضیه (۴.۱.۳) معتبر است همچنین اگر  $B$  به صورت اپراتور  $\int_x^b$  به طوری که  $b \in \mathbb{R}$  نسبت به  $b = \infty$  گرفته شود. این دلیلی بر آن است که اپراتور اصلی از [۱۹] در این مورد معتبر است.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

|                                                        |                      |
|--------------------------------------------------------|----------------------|
| Probabilistic . . . . .                                | احتمالی              |
| Valuation . . . . .                                    | ارزیابی              |
| Measure . . . . .                                      | اندازه               |
| Stably . . . . .                                       | پایدار               |
| American Option . . . . .                              | اختیار آمریکایی      |
| European option . . . . .                              | اختیار اروپایی       |
| Call Option . . . . .                                  | اختیار خرید          |
| put Option . . . . .                                   | اختیار فروش          |
| Over The Counter market . . . . .                      | بازارهای فرابورس     |
| Claim Size Distribution . . . . .                      | توزیع اندازه ادعا    |
| Exercise Date Or expiration Date Or Maturity . . . . . | سررسید اختیار معامله |
| L'Hopital Rule . . . . .                               | قانون هوپیتال        |
| Futures Contract . . . . .                             | قرارداد آتی          |
| Exercise Price(Strike Price) . . . . .                 | قیمت توافقی          |
| Laplace . . . . .                                      | لاپلاس               |
| Homogeneous Initial Values . . . . .                   | مقادیر اولیه همگن    |
| Long position . . . . .                                | موضع معاملاتی خرید   |
| Short position . . . . .                               | موضع معاملاتی فروش   |
| boundry problem . . . . .                              | مسئله مرزی           |
| ruin probablity . . . . .                              | احتمال شکست          |
| ronskian determinant . . . . .                         | دترمینان رونسکین     |
| stochastic process . . . . .                           | فرایند تصادفی        |
| stopping time . . . . .                                | زمان توقف            |



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

|                                    |             |
|------------------------------------|-------------|
| Brownian . . . . .                 | براونی      |
| Claim . . . . .                    | ادعا        |
| Discounted . . . . .               | تنزیل یافته |
| Distribution . . . . .             | توزیع       |
| Function . . . . .                 | تابع        |
| Independent . . . . .              | مستقل       |
| Initial . . . . .                  | اولیه       |
| Insuracce . . . . .                | بیمه        |
| Lebesgue . . . . .                 | لبگ         |
| Motion . . . . .                   | حرکت        |
| Normal . . . . .                   | نرمال       |
| Portfilio . . . . .                | سبد سهام    |
| Premium . . . . .                  | حق بیمه     |
| Probability . . . . .              | احتمال      |
| Process . . . . .                  | فرآیند      |
| Rate . . . . .                     | نرخ         |
| Renewal . . . . .                  | تجدید       |
| Risk . . . . .                     | خطر         |
| Ruin . . . . .                     | شکست        |
| Stochastic . . . . .               | تصادفی      |
| Surplus . . . . .                  | مازاد       |
| Exponential distribution . . . . . | توزیع نمایی |



## **Aabstract**

In today's economy, mathematical finance plays an important role in predicting precise models for the future of investment in different departments. Especially in the financial markets, it's quite possible to touch this effect in the past and now. In fact, financial mathematics determines the risk and rate of return on capital.

Today, insurance companies have an important role in investing in different sectors of society (whether social or economic). Among them, we can mention issues such as health, industry, commerce, etc.

In this dissertation, we first outline the definitions of the fundamentals, as well as the definitions of the capital of the insurance company, the premium and the probability of bankruptcy, and then examine the results. Using the results we present a method for obtaining the risk of the insurance company. In fact, based on the boundary value problem, we use Green's method to develop solutions to the risk level of the insurance company.

**keywords:** Stochastic models, Seasonal modeling, Ruin probability, insurance.premiums



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: financial mathematics**

**Insurance risk models with dependent  
premiums from the insurance company**

**By: Mohammad Rameshgar**

**Supervisor**

**Elham Dastranj**

**Advisor**

**Mojtaba Ghiyasi**

**January 2018**