



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

ساختارهای ابرمختلط روی گروه‌های لی چهار بعدی

فاطمه غلامی

اساتید راهنما:

دکتر احمد زیره

دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم

اساتید مشاور:

دکتر ابراهیم هاشمی

دکتر کاظم بی تقصیرفدافن

شهریور ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

۱	تاریخچه و مقدمات.....	۱
۲	۱-۱ تاریخچه.....	۲
۳	۲-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی.....	۳
۱۶	۲ ساختارهای مختلط و ابرمختلط.....	۱۶
۱۷	۱-۲ مقدمه.....	۱۷
۲۳	۲-۲ ساختار ابرمختلط.....	۲۳
۲۷	۳ طبقه بندی ساختارهای ابرمختلط.....	۲۷
۲۸	۱-۳ مقدمه.....	۲۸
۳۳	۲-۳ طبقه بندی روی جبرلی حل پذیر.....	۳۳
۴۸	۴ طبقه بندی ساختارهای ابرهرمیتی.....	۴۸
۴۹	۱-۴ مقدمه.....	۴۹
۵۲	۲-۴ ساختارهای ابرهرمیتی.....	۵۲
۵۹	۵ متر کیلر و نتایج آن.....	۵۹

۵-۱ مقدمه..... ۶۰

۵-۲ نتیجه گیری..... ۶۵

A مراجع..... ۶۷

B واژه نامه..... ۷۰

چکیده

هدف این پایان نامه، طبقه بندی ساختارهای ابرمختلط ناوردا روی گروه‌های لی ۴- بعدی حقیقی G است. نشان می‌دهیم گروه‌های لی همبند ساده که ساختارهای ابرمختلط ناوردا می‌پذیرند، به صورتهای: ۱- گروه جمعی H از کواترنیونها ۲- گروه ضربی H^* از کواترنیونهای غیر صفر ۳- گروه‌های حل‌پذیری که بطور ساده متعدی روی فضاهای هیپربولیک مختلط و حقیقی RH^4 و CH^2 عمل می‌کنند. ۴- ضرب نیم مستقیم $C \times C$ هستند.

فضاهای CH^2 و $C \times C$ یک RP^2 از ساختارهای ابرمختلط ناوردا (غیر هم ارز) دارند در حالی که باقی گروه‌ها فقط یک RP^2 در حد هم ارزی دارند. و در نهایت منیفولدهای چهار بعدی ابرهرمیتی بررسی می‌شوند.

کلمات کلیدی: ساختار ابرمختلط، ساختار ابرهرمیتی

فصل اول

تاریخچه و مقدمات

۱-۱ تاریخچه

در مورد ساختارهای ابرمختلط کارهای فراوانی انجام شده که تعدادی از آنها را در زیر می‌آوریم. چارلز بویر^۱ در ۱۹۸۸ ساختارهای ابرمختلط از ساختارهای ۳-ساساکین^۲ را توصیف نمود. در این زمینه یاستون پون^۳ در ۱۹۹۹ ساختارهای ابرمختلط روی منیفلدهای گروهی را بیان کرد وی دگردیسی ساختارهای ابرمختلط روی گروه‌های لی فشرده را بررسی نمود. آنا فینا^۴ در سال ۲۰۰۰ منیفلدهای ابرمختلط ۸-بعدی را طبقه بندی کرد. دوتی^۵ به همراه آنا فینا گروه‌های لی پوچ توان ابرمختلط را در حالت ۸-بعدی بررسی نموده و سپس با همکاری باربریز^۶ ساختارهای ابرمختلط روی یک کلاس از گروه‌های لی حل‌پذیر را توصیف نمود.

ساختارهای ابرمختلط و ابرکیلر روی کلاف‌های مماس از فضاها متقارن هرمیتی رتبه یک توسط میکی تیووک^۷ بررسی شد. همچنین باربریز ساختارهای ابرمختلط ناوردا روی گروه‌های لی ۴-بعدی را طبقه بندی نمود. در این زمینه جویسی^۸ این ساختارها را بر روی گروه‌های لی فشرده بررسی کرد. در مورد ساختارهای ابرمختلط می‌توان به کارهای بیشتری اشاره کرد که ادامه آنها در این بحث نمی‌گنجد.

¹ Charles boyer

²Sasakian

³Yatsun poon

⁴Anna fina

⁵Dotti

⁶Barberi

⁷I.v. mikityuk

⁸D.Joyce

۱-۱-۱ مقدمه

در فصل اول تعاریف و قضایایی را می‌آوریم که از آنها در فصل‌های بعدی استفاده خواهیم نمود. در فصل دوم ساختارهای مختلط و ابرمختلط را تعریف نموده و با ارائه لم و مثال‌هایی آنها را بررسی می‌نماییم.

فصل سوم شامل دو بخش است که در بخش اول ساختارهای ابرمختلط روی گروه‌های لی ۴- بعدی حل ناپذیر طبقه بندی می‌شوند و در بخش دوم این ساختارها را روی گروه‌های لی ۴- بعدی حل‌پذیر طبقه بندی می‌کنیم. در فصل چهارم ساختارهای هرمیتی و ابرهرمیتی را تعریف می‌نماییم و سپس ساختارهای ابرهرمیتی را روی گروه‌های لی ۴- بعدی طبقه بندی می‌کنیم. در فصل پنجم متر کیلر را تعریف نموده نتایج حاصله را بیان می‌نماییم.

در تمام این پایان نامه C نمایانگر مجموعه اعداد مختلط و R مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

۲-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۲-۱ **منیفلد توپولوژیک:** یک فضای توپولوژیک M یک منیفلد توپولوژیک از بعد n است اگر

شرایط زیر برقرار باشد:

(i) M هاسدورف باشد یعنی: برای هر دو نقطه $p, q \in M$ زیر مجموعه‌های باز جدا از هم $U, V \subset$

M وجود دارند بطوریکه $p \in U$ و $q \in V$.

(ii) M شمارای نوع دوم باشد یعنی: پایه‌ای شمارا برای توپولوژی M وجود داشته باشد.

(iii) M موضعاً اقلیدسی از بعد n باشد یعنی: هر نقطه M یک همسایگی داشته باشد که با یک زیر مجموعه باز از R^n همئومورفیسم باشد.

یک منیفلد توپولوژیک، دیفرانسیل پذیر است در صورتی که بتوان برای آن یک ساختار دیفرانسیل پذیر تعریف کرد. اکنون ساختار دیفرانسیل پذیر روی یک منیفلد را شرح می دهیم.

۱-۲-۲ تعریف

۱- فرض کنیم M یک منیفلد توپولوژیک n -بعدی باشد یک چارت مختصاتی روی M یک دوتایی (u, φ) است که u یک زیرمجموعه باز از M است و $\varphi: u \rightarrow \tilde{u}$ یک همئومورفیسم از u به یک زیرمجموعه باز $\tilde{u} = \varphi(u) \subset R^n$ است.

۲- اگر (u, φ) و (v, ψ) دو چارت باشند بطوریکه $u \cap v \neq \emptyset$ نگاشت ترکیبی $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(u \cap v) \rightarrow \psi(u \cap v)$ نگاشت انتقال از φ به ψ نامیده می شود. که چون ترکیبی از همئومورفیسم ها می باشد خود یک همئومورفیسم است.

۳- دو چارت (u, φ) و (v, ψ) سازگار هموارند اگر $u \cap v = \emptyset$ یا نگاشت انتقال $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد.

۴- مجموعه ای از چارتهایی که دامنه M را می پوشاند یک اطلس برای M نامیده می شود.

۵- یک اطلس $\mathcal{A}$ هموار است اگر هر دو چارت در $\mathcal{A}$ سازگار هموار با یکدیگر باشند.

۶- اگر یک اطلس $\mathcal{A}$ مشمول در هیچ اطلس هموار بزرگتر نباشد می گوییم اطلس $\mathcal{A}$ روی M ماکزیمال است.

۷- یک ساختار هموار روی منیفلد توپولوژیک M ، یک اطلس هموار ماکزیمال است.

۳-۲-۱ **تعریف:** فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد یک مجموعه u از زیرمجموعه‌های X موضعاً متناهی است اگر هر نقطه X همسایگی داشته باشد که حداکثر در تعدادی متناهی از مجموعه‌های u اشتراک داشته باشد.

۴-۲-۱ **تعریف:** اگر پوشش باز $\mathcal{U}$ از X داده شده باشد آنگاه هر پوشش باز دیگر X مانند $\mathcal{V}$ نظریف $\mathcal{U}$ است اگر برای هر $v \in \mathcal{V}$ تعدادی $u \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد بطوریکه $v \subset u$. می‌گوییم X پارافشرده است اگر هر پوشش باز از X یک نظریف موضعاً متناهی بپذیرد.

۵-۲-۱ **مثال:** فضای اقلیدسی R^n یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n -بعدی است.

۶-۲-۱ **گروه لی:** یک گروه لی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر G است که گروه در مفهوم جبری است با نگاشت حاصلضربی $m: G \times G \rightarrow G$ و نگاشت معکوس $i: G \rightarrow G$ که هر دو دیفرانسیل پذیرند. چون نگاشت‌های دیفرانسیل پذیر پیوسته اند، یک گروه لی یک گروه توپولوژیک است.

۷-۲-۱ **مثال:** گروه خطی عمومی $GL(n, R)$ ، مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ معکوس پذیر با درآیه‌های حقیقی است که تحت ضرب ماتریس‌ها یک گروه و یک زیر منیفلد باز از فضای برداری $M(n, R)$ است.

ضرب دیفرانسیل پذیر است زیرا درآیه‌های ماتریسی یک ماتریس حاصلضرب AB چند جمله‌ای‌هایی از درآیه‌های A, B هستند. معکوس نیز دیفرانسیل پذیر است زیرا با قانون کرامر درآیه‌های A^{-1} به عنوان توابعی گویا از درآیه‌های A بیان می‌شوند.

۸-۲-۱ **تعریف:** برای هر منیفلد دیفرانسیل پذیر M ، کلاف مماس از بردار M برابر است با اجتماع جدا

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M. \quad \text{از هم فضاهای مماس در همه نقاط:}$$

۹-۲-۱ **تعریف:** اگر M یک منیفلد هموار باشد آنگاه یک میدان برداری روی M یک برش از نگاشت

$Y : M \rightarrow TM$ است به خصوص یک میدان برداری یک نگاشت پیوسته
 $p \rightarrow Y_p$ است
 با این خاصیت که: $\pi \circ Y = Id_M$

۱۰-۲-۱ **براکت لی:**

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. نگاشت $[V, W] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ براکت لی از V

و W نامیده شده و با رابطه $[V, W]f = VWf - WVf$ تعریف می شود.

تابع $f : M \rightarrow R$ یک تابع دیفرانسیل پذیر است. V و W میدان های برداری دیفرانسیل پذیر روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M هستند.

۱۱-۲-۱ **لم:** براکت لی از هر جفت میدان های برداری دیفرانسیل پذیر یک میدان برداری دیفرانسیل پذیر است.

اثبات: به مرجع [۱۲] مراجعه شود.

۱۲-۲-۱ **جبر لی:** یک جبر لی یک فضای برداری حقیقی g است با نگاشتی از $g \times g$ به g که آنرا

براکت نامیده و معمولا با $[X, Y] \rightarrow (X, Y)$ نشان می دهیم. و برای هر X و Y و Z در g داشته باشیم:

- i) $a, b \in R, [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ دو خطی بودن
- ii) $[X, Y] = -[Y, X]$ پاد تقارنی
- iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ اتحاد ژاکوبی

اگر g یک جبر لی باشد آنگاه یک زیر فضای خطی $h \subset g$ یک زیر جبر لی g نامیده می‌شود اگر تحت براکت‌ها بسته باشد و همچنین h خودش یک جبر لی باشد.

۱۳-۲-۱ مثال: فضای $\mathcal{T}(M)$ شامل تمام میدان‌های برداری دیفرانسیل‌پذیر روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M یک جبر لی تحت براکت لی است.

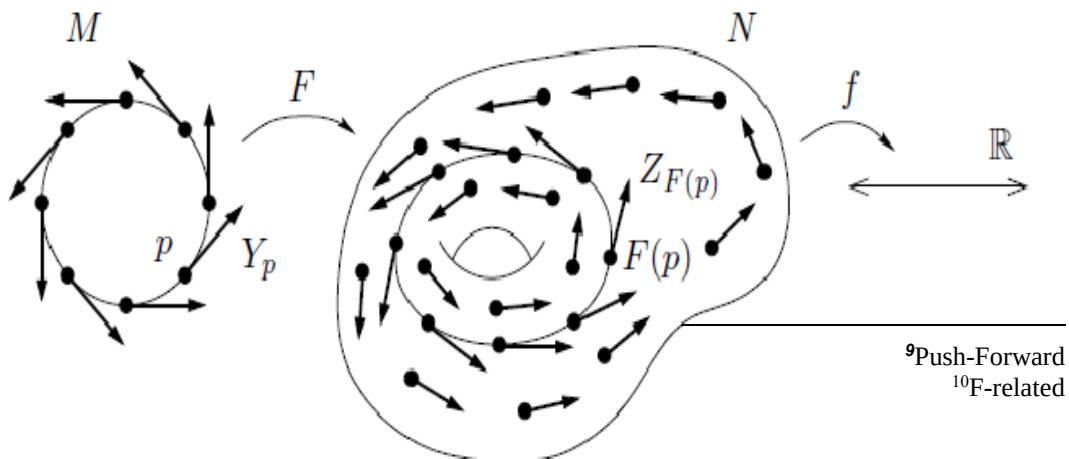
۱۴-۲-۱ تعریف: فرض کنیم M و N منیفلد های دیفرانسیل‌پذیر و $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد. برای هر $p \in M$ نگاشت $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ پوش-فوروارد وابسته به F نامیده می‌شود. $T_p M$ فضای مماس M در p و $T_{F(p)} N$ فضای مماس N در $F(p)$ است و داریم:

$$(F_* X)f = X(f \circ F)$$

۱۵-۲-۱ تعریف: اگر $F : M \rightarrow N$ نگاشتی دیفرانسیل‌پذیر و Y یک میدان برداری روی M باشد و میدان برداری Z روی N وجود داشته باشد با این خاصیت که برای هر $p \in M$

$$F_* Y_p = Z_{F(p)}$$

می‌گوییم میدان های برداری Y و Z و F -مرتبط^۹ هستند.



۱-۲-۱۶ **لم:** فرض کنید $F : M \rightarrow N$ نگاشتی دیفرانسیل پذیر باشد و $y \in \mathcal{T}(M)$ ، $\mathcal{T}(M)$ مجموعه همه میدان های برداری دیفرانسیل پذیر روی M است) و $Z \in \mathcal{T}(M)$ بنابراین Y و F ، Z مرتبطند اگر و فقط اگر برای هر تابع f حقیقی مقدار دیفرانسیل پذیر تعریف شده روی یک زیر مجموعه باز N :

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F$$

اثبات: به مرجع [۱۲] مراجعه شود.

شکل ۱-۱: میدان های برداری F -مرتبط

۱-۲-۱۷ **تعریف:** یک فضای آفین یک ساختار هندسی است که خواص (مستوی) آفین از فضای اقلیدسی را عمومیت می دهد و می توان آنرا به عنوان یک فضای برداری که از مبدأ آن صرف نظر می شود در نظر گرفت.

۱-۲-۱۸ **تعریف:** یک تبدیل آفین یک نگاشت آفین بین دو فضای برداری و شامل یک تبدیل خطی

$$X \rightarrow AX + b$$

است که با انتقال روبرو بدست می آید.

۱-۲-۱۹ **انتقال های چپ و راست:** فرض کنیم G یک گروه لی باشد هر $g \in G$ نگاشت های

$L_g, R_g : G \rightarrow G$ را تعریف می کند که انتقال های چپ و راست نامیده شده و بصورت زیر تعریف می گردند:

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg$$

که L_g و R_g دیفئومورفیسم هستند.

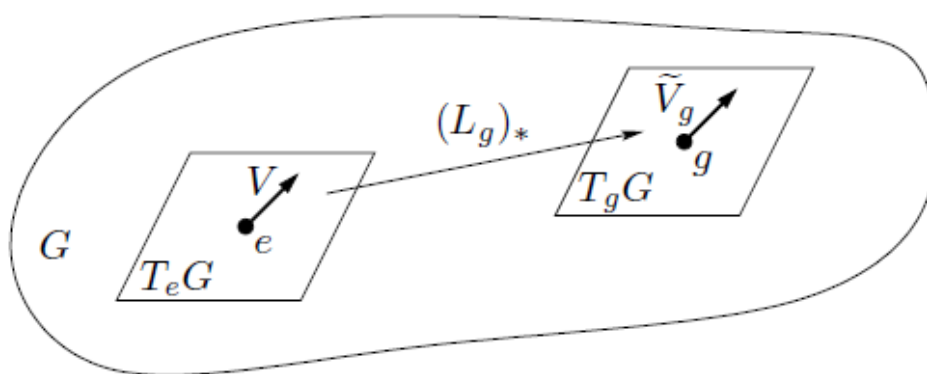
۲۰-۲-۱ **تعریف:** یک میدان برداری X روی گروه لی G ناوردای چپ نامیده می‌شود اگر تحت همه

انتقال های چپ ناوردا باشد. یعنی برای هر $g \in G$ ، L_g -مرتبط با خودش باشد:

$$(L_g)_* X_{g'} = X_{gg'} \quad g, g' \in G$$

چون L_g دیفیئومورفیسم است می‌توانیم بنویسیم:

$$(L_g)_* X = X \quad \text{برای هر } g \in G$$



شکل ۲-۱: تعریف یک میدان برداری ناوردای چپ

۲۱-۲-۱ **لم:** فرض کنید G یک گروه لی باشد و X و Y میدان‌های برداری ناوردای چپ و دیفرانسیل‌پذیر

روی G باشند بنابراین $[X, Y]$ ناوردای چپ است.

اثبات: به مرجع [۱۲] مراجعه شود.

۲۲-۲-۱ **جبر لی از یک گروه لی:** جبر لی از همه میدان‌های برداری ناوردای چپ روی یک گروه

لی G ، جبر لی G نامیده می‌شود و با $\text{Lie}(G)$ نشان داده می‌شود.

۱-۲-۲۳ مثال: در فضای اقلیدسی R^n ، انتقال چپ توسط یک عنصر $b \in R^n$ با نگاشت آفین

$L_b(x) = b + x$ داده می‌شود که پوش -فوروارد $(L_b)_*$ ، توسط ماتریس همانی و مختصات استاندارد

نمایش داده می‌شوند. بنابراین یک میدان برداری $V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ناوردای چپ است اگر و فقط اگر ضرایب V^i آن

ثابت باشند. زیرا براکت لی از دو میدان برداری ضریب ثابت، صفر است.

جبر لی R^n آبدلی است و با براکت صفر، ایزومورفیسم با خود R^n است. بطور خلاصه:

$$\text{Lie}(R^n) \cong R^n$$

۱-۲-۲۴ تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری از بعد متناهی روی میدان F باشد مجموعه تمام

تبدیلات خطی روی V را به $\text{End}_F V$ نمایش می‌دهیم.

$$f \in \text{End}_F V; \quad f: V \rightarrow V$$

۱-۲-۲۵ تعریف: فرض کنیم g یک جبر لی روی میدان K و V یک فضای برداری روی K (که لزوماً

متناهی البعد نیست) نمایش g در V یک نگاشت:

$$\pi: X \rightarrow \pi(X) \quad (X \in g)$$

از g به فضای برداری همه اندومورفیسم‌هایی از V است به طوریکه:

(i) π خطی است

$$\pi[X, Y] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X), \quad (X, Y \in g) \quad \text{(ii)}$$

۱-۲-۲۶ تعریف: اگر g یک جبر لی باشد یک زیر فضای خطی $h \subset g$ یک ایده‌آل در g است اگر

$$[g, h] \subseteq h \quad \text{یا} \quad [X, Y] \in h \quad \text{که} \quad X \in g, Y \in h$$

۲۷-۲-۱ **تعریف:** $Dg = [g, g]$ (که Dg یک زیر جبر لی از g است) جبر لی مشتق شده از g نامیده

می شود. $D^p g$ را برای هر $p \geq 0$ با استقرا تعریف می کنیم:

$$D \cdot g = g$$

$$D^p g = D(D^{p-1}g), \quad p \geq 1 \quad \text{p-امین جبر لی مشتق شده}$$

۲۸-۲-۱ **تعریف:** فرض کنیم U یک جبر روی K باشد، ضرب در U دو خطی است و لازم نیست شرکت

پذیر باشد. یک اندومورفیسم D از U (به عنوان یک فضای برداری)، یک مشتق نامیده می شود اگر

$$D(ab) = (D a)b + a(D b) \quad a, b \in U$$

۲۹-۲-۱ **گروه تحلیلی:** یک گروه لی همبند، یک گروه تحلیلی نامیده می شود.

۳۰-۲-۱ **جبر لی حل پذیر:** جبر لی g حل پذیر است اگر برای یک $p \geq 1$ داشته باشیم $D^p g = 0$

۳۱-۲-۱ **گروه حل پذیر:** یک گروه تحلیلی، حل پذیر است اگر جبر لی آن حل پذیر باشد.

۳۲-۲-۱ **تعریف:** عمل های گروه:

اگر G یک گروه و M یک مجموعه باشد، عمل چپ G روی M یک نگاشت $G \times M \rightarrow M$ است که

بصورت $(g, p) \rightarrow g \cdot p$ نوشته می شود. که در شرایط زیر صادق است:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p \quad \text{for all } g_1, g_2 \in G, \quad p \in M$$

$$e \cdot p = p \quad \text{for all } p \in M$$

یک عمل راست بطور مشابه تعریف می شود. یک نگاشت $G \times M \rightarrow M$ با روابط زیر:

$$(p.g_1).g_2 = p.(g_1g_2) \quad \text{for all } g_1, g_2 \in G, \quad p \in M$$

$$p.e = p \quad \text{for all } p \in M$$

فرض کنیم G یک گروه لی و M یک منیفلد باشد یک عمل G روی M پیوسته است اگر نگاشت $G \times M \rightarrow M$ یا $M \times G \rightarrow M$ که عمل را تعریف می کند پیوسته باشد.

یک منیفلد M با یک G -عمل^{۱۱} پیوسته، G -فضا^{۱۲} نامیده می شود. اگر M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد عمل نیز دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه M یک G -فضای دیفرانسیل پذیر نامیده می شود.

۳۳-۲-۱ تعریف: عمل گروه متعدی است اگر برای هر دو نقطه $p, q \in M$ یک عضو گروه مانند g وجود داشته باشد بطوریکه: $g.p=q$

۳۴-۲-۱ تعریف: عمل یک گروه آزاد نامیده می شود اگر تنها عنصر G که هر عنصر M را ثابت نگه می دارد همانی باشد:

$$p \in M \text{ ای داشته باشیم } g.p = p \text{ آنگاه } g=e$$

هم ارز است با شرط $G_p = \{e\}$ برای هر $p \in M$ که $G_p = \{g \in G; g.p = p\}$ گروه ایزوتروپی از p است.

۳۵-۲-۱ ساده متعدی: اگر عمل گروه هم آزاد و هم متعدی باشد هم ارز است با اینکه بگوییم برای هر p و q در M دقیقاً یک g در G وجود داشته باشد بطوریکه $g.p = q$ و برای تعدادی p در M و تعدادی g در U ، $g = e$ باشد.

¹¹G-Action
¹²G-Space

۱-۲-۳۶ **تعریف:** فرض کنیم a و b دو ایده‌آل حل‌پذیر جبر لی g باشند بنابراین $a+b$ یک ایده‌آل است،

چون $\frac{a+b}{a}$ با $\frac{b}{a \cap b}$ یکرخت است و $\frac{a+b}{a}$ حل‌پذیر است پس $a+b$ حل‌پذیر است.

یک ایده‌آل حل‌پذیر یکتای q از g شامل همه ایده‌آل‌های حل‌پذیر g وجود دارد. q رادیکال g نامیده می‌شود. (rad)

$\text{rad } g = g$ اگر و فقط اگر g حل‌پذیر باشد.

۱-۲-۳۷ **تعریف:** جبر لی g نیم ساده است اگر $\text{rad } g = 0$

رادیکال یک جبر لی بوضوح تحت همه اتومورفیسم‌های جبر لی ناورد است.

۱-۲-۳۸ **تعریف:** یک کلاف برداری از بعد (رتبه) K روی فضای توپولوژیک M ، یک فضای توپولوژیک E

با نگاشت پیوسته و پوشای $\pi : E \rightarrow M$ است.

که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) برای هر $p \in M$ ، $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (تاری از E روی p نامیده می‌شود) ساختاری از یک

فضای برداری حقیقی K بعدی دارد.

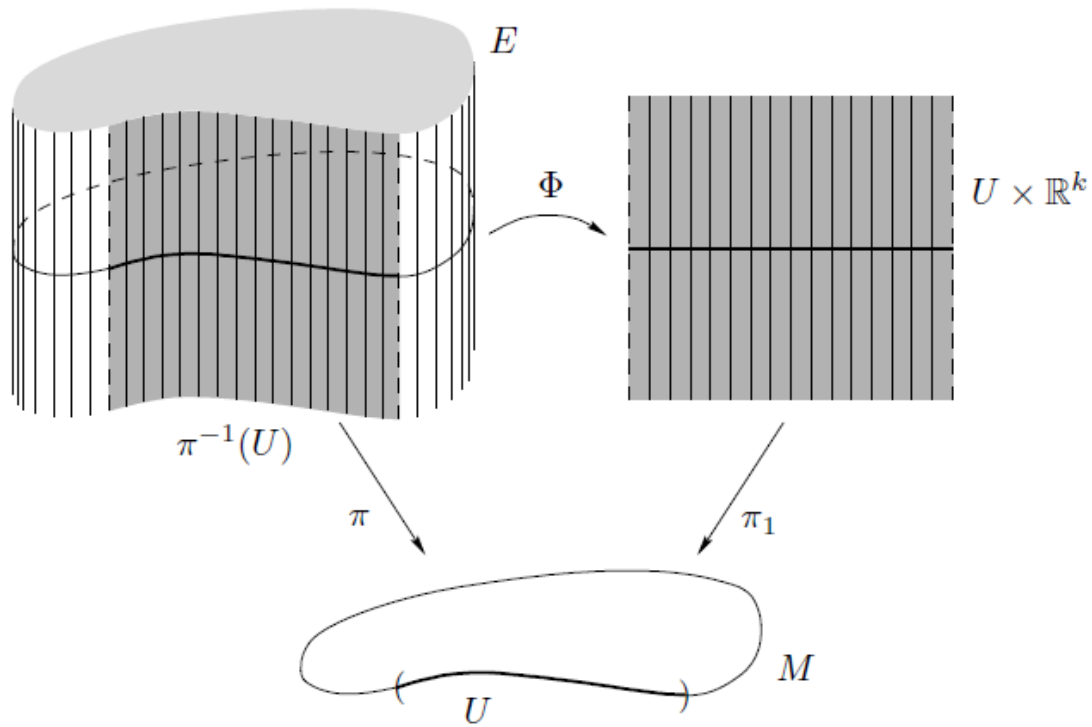
(ii) برای هر $p \in M$ یک همسایگی U از p در M و یک همئومورفیسم $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^K$

(φ یک بدیهی سازی موضعی E روی U نامیده می‌شود) وجود دارد بطوریکه نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^K \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

(π_1 نگاشت تصویری روی اولین فاکتور است)

بطوریکه برای هر $q \in U$ تحدید ϕ به E_q ایزومورفیسم خطی از E_q به $R^K \cong R^K \times \{q\}$ است.



شکل ۱-۳: بدیهی سازی موضعی یک کلاف برداری

۳۹-۲-۱ **تعریف:** فرض کنید $\pi : E \rightarrow M$ یک کلاف برداری روی منیفلد M باشد. یک برش از E ، یک

برش از نگاشت π است یعنی نگاشت پیوسته $\sigma : M \rightarrow E$ که $\pi \circ \sigma = \text{Id}_M$

۴۰-۲-۱ **تعریف:** یک k -تانسور هموردا روی V ، یک تابع چند خطی حقیقی $T : V \times$

$\underbrace{V \times \dots \times V}_K \rightarrow R$ است. عدد K رتبه نامیده می‌شود.

۴۱-۲-۱ **تعریف:** کلافی از K -تانسور هموردا روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M برابر است با:

$$T^K M = \coprod_{p \in M} T^K(T_p M)$$

اجتماع جدا از هم مجموعه‌ای از همه K -تانسورهای هموردا روی فضای مماس منیفلد هموار M .

۱-۲-۴۲ **تعریف:** یک برش از یک کلاف تانسوری، میدان تانسوری روی منیفلد M نامیده می‌شود.

فصل دوم

ساختارهای مختلط و ابرمختلط

۲-۱ مقدمه

در این فصل ساختارهای مختلط و ابرمختلط را تعریف نموده و با ارائه مثال‌هایی ساختارهای مختلط را روی گروه و جبر لی بررسی می‌کنیم.

۲-۱-۱ ساختار مختلط: یک ساختار مختلط روی یک فضای برداری حقیقی V یک اندومورفیسم

J از V است بطوریکه $J^2 = -I$ که I تبدیل همانی V است. یک فضای برداری حقیقی V با یک ساختار مختلط J می‌تواند به یک فضای برداری مختلط تبدیل شود با تعریف ضرب اسکالر با اعداد مختلط داریم:

$$\forall x \in V, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (a + ib)x = ax + bJx$$

زمانی که V فضای برداری حقیقی است بعد m زوج است و زمانی که V فضای برداری مختلط است بعد آن $\frac{1}{2}m$ است. و برعکس اگر V یک فضای برداری از بعد مختلط n باشد، فرض کنیم J اندومورفیسم خطی از V باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$JX = iX \quad \forall X \in V$$

اگر V یک فضای برداری حقیقی از بعد $2n$ باشد پس J یک ساختار مختلط V است.

۲-۱-۲ گزاره: فرض کنید J یک ساختار مختلط روی یک فضای برداری $2n$ -بعدی V باشد عنصرهای

$X_1, \dots, X_n$ از V وجود دارند بطوریکه $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$ یک پایه برای V است.

اثبات: به مرجع [۱۱] جلد دوم مراجعه شود.

۳-۱-۲ **ساختار تقریبا مختلط:** یک ساختار تقریبا مختلط روی منیفلد دیفرانسیل پذیر حقیقی M

یک میدان تانسوری J است که در هر نقطه x از M یک اندومورفیسم از فضای مماس $T_x(M)$ است بطوریکه $J^2 = -I$ و I تبدیل همانی $T_x(M)$ است. یک منیفلد با ساختار تقریبا مختلط منیفلد تقریبا مختلط نامیده می شود.

۴-۱-۲ **گزاره:** هر منیفلد تقریبا مختلط از بعد زوج است.

اثبات: به مرجع [۱۱] جلد دوم مراجعه شود.

۵-۱-۲ **تذکر:** برای نشان دادن این مطلب که هر منیفلد مختلط بطور طبیعی یک ساختار تقریبا

مختلط دارد فضای C^n از n تایی های اعداد مختلط $(Z^1, \dots, Z^n)$ با شرط $Z^j = X^j + iY^j$ و $j=1, \dots, n$ رادر نظر می گیریم. نسبت به دستگاه مختصات $(X^1, \dots, X^n, Y^1, \dots, Y^n)$ یک ساختار تقریبا مختلط J روی C^n را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial X^i}\right) = \frac{\partial}{\partial Y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial Y^i}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial X^i}\right)$$

۶-۱-۲ **گزاره:** یک نگاشت f از یک زیر مجموعه باز C^n به C^m ، ساختارهای تقریبا مختلط C^n و C^m را

حفظ می کند یعنی $f_* \circ J = J \circ f_*$ یا $f_* \circ J = J \circ f_*$ اگر و فقط اگر f هولومورفیک باشد. شرایط کوشی ریمن صدق کند.

اثبات: به مرجع [۱۱] جلد دوم مراجعه شود.

۷-۱-۲ **ساختار مختلط روی یک منیفلد:** یک ساختار تقریبا مختلط J روی یک منیفلد M ،

ساختار مختلط نامیده می‌شود اگر منیفلد زمینه M یک منیفلد مختلط بوده و ساختار تقریباً مختلط J همان ساختار القایی از ساختار منیفلد M باشد.

۸-۱-۲ تعریف: فرض کنیم g یک جبر لی روی میدان K باشد برای هر $X \in g$ ، adX را اندومورفیسمی از g داده شده به صورت $(Y \in g)$ و $[X, Y]$ و $adX : Y \rightarrow [X, Y]$ در نظر می‌گیریم. از تعریف جبر لی و خواص آن به آسانی نتیجه می‌شود که adX یک مشتق g است.

۹-۱-۲ مثال: فرض کنید g یک جبر لی روی C باشد g را به عنوان یک فضای برداری حقیقی در نظر می‌گیریم. ساختار مختلط J را بصورت $JX = ix$ تعریف شده داریم. ساختار مختلط J در رابطه

$$[JX, Y] = J[X, Y] = [X, JY] \quad \forall X, Y \in g$$

صدق می‌کند یعنی $J \circ ad(X) = ad(X) \circ J$ برای هر $X \in g$ برقرار است.

برعکس: فرض کنید g یک جبر لی روی R با یک ساختار مختلط J باشد که برای هر $X \in g$ در رابطه $J \circ ad(X) = ad(X) \circ J$ صدق می‌کند. تعریف می‌کنیم: $(a+ib)X = aX + bJX$ که $a, b \in R$ ، یک جبر لی مختلط بدست می‌آوریم و به صورت زیر نشان می‌دهیم براکت دو خطی است:

$$[(a+ib)X, Y] = [aX, Y] + [bJX, Y] = a[X, Y] + b[JX, Y] = a[X, Y] + bJ[X, Y] = (a+ib)[X, Y]$$

۱۰-۱-۲ تعریف: دو میدان تانسوری A و B از نوع (۱ و ۱) روی منیفلد M داده شده است. می‌توانیم تابی از A و B تشکیل دهیم که میدان تانسوری از نوع (۲ و ۱) باشد. به ویژه در مواردیکه A و B هر دو یک ساختار تقریباً مختلط J هستند تابی از J را میدان تانسوری از نوع (۲ و ۱) با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\} \quad X, Y \in \mathcal{T}(M)$$

۱-۲-۱۱ قضیه: یک ساختار تقریباً مختلط یک ساختار مختلط است اگر و فقط اگر تابی نداشته باشد

یعنی $N=0$ باشد.

۱-۲-۱۲ تذکر: یک ساختار تقریباً مختلط، انتگرال پذیر است اگر $N=0$

۱-۲-۱۳ فرمول لایبنیز^{۱۳}: فرض کنید φ یک نگاشت از منیفلد حاصلضربی $M \times N$ به منیفلد دیگر

V باشد دیفرانسیل φ_* در $(p,q) \in M \times N$ می تواند بصورت زیر بیان شود:

اگر $Z \in T_{(p,q)}(M \times N)$ متناظراً $(X,Y) \in T_p(M) + T_q(N)$ پس

$$\varphi_*(Z) = \varphi_{1*}(X) + \varphi_{2*}(Y)$$

$$\varphi_2 : N \rightarrow V \quad \text{و} \quad \varphi_1 : M \rightarrow V \quad \text{که}$$

با $\varphi_1(p') = \varphi(p', q)$ برای $p' \in M$ و $\varphi_2(q') = \varphi(p, q')$ برای $q' \in N$ تعریف می شوند.

۱-۲-۱۴ مثال: یک گروه لی مختلط G یک گروه است که یک منیفلد مختلط نیز هست بطوریکه

عمل های گروه $G \ni (a,b) \mapsto ab^{-1} \in G$ یک نگاشت هولومورفیک از $G \times G$ به G است. در اینجا $G \times G$ مشروط به ساختارهای مختلط حاصلضربی است. (بطور معمول اگر M و M' ساختارهای تقریباً مختلط J و J' داشته باشند، $M \times M'$ ساختار تقریباً مختلط حاصلضربی $J \times J'$ دارد اگر J و J' انتگرال پذیر باشند (یا ساختارهای مختلط) $J \times J'$ نیز چنین است).

گروه $GL(n; \mathbb{C})$ یک گروه لی مختلط است. ساختار مختلط آن با در نظر گرفتن آن به عنوان یک زیر

مجموعه باز $\mathbb{C}^{n^2}$ بدست می آید. جبر لی آن $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ مرکب از همه ماتریس های مختلط $n \times n$ است، اگر

G یک گروه لی مختلط باشد ساختار مختلط J آن با نگاشت های :

$$L_a : x \rightarrow ax, \quad R_a : x \rightarrow xa$$

¹³Liebniz

$$\Psi : x \rightarrow x^{-1} \quad , \quad \text{ad}(a): x \rightarrow axa^{-1}$$

ناورد است.

اگر X یک میدان برداری ناوردای چپ باشد JX نیز چنین است. بنابراین J یک ساختار مختلط در جبر لی $\mathfrak{g}$ از G القا می کند. چون J با $\text{ad}(a)$ ، $a \in G$ ، ناورد است. نتیجه می گیریم $J \circ \text{ad}(X) = \text{ad}(X) \circ J$ که $X \in \mathfrak{g}$.

بنابراین $\mathfrak{g}$ یک جبر لی مختلط است.

برعکس:

فرض کنید G یک گروه لی باشد که جبر لی $\mathfrak{g}$ آن یک جبر لی مختلط است. (با ساختار مختلط J)

ابتدا فرض کنید که G همبند است از $X \in \mathfrak{g}$ ، $J \circ \text{ad}(X) = \text{ad}(X) \circ J$ بدست می آوریم:

$$J \circ \text{ad}(a) = \text{ad}(a) \circ J \quad , \quad a \in G$$

اگر J را به هر فضای مماس $T_a(G)$ با L_a انتقال دهیم. یک ساختار تقریباً مختلط ناوردای چپ J روی G بدست می آوریم که ناوردای راست نیز هست. چون $[JX, Y] = J[X, Y]$ ، برای همه میدانهای برداری ناوردای چپ X و Y می بینیم که $N(X, Y) = 0$ برای چنین X و Y ای، داریم $N = 0$. چون J تحلیلی حقیقی است (مانند یک میدان تانسوری ناوردای چپ روی یک گروه لی) نتیجه می گیریم G یک منیفلد مختلط است.

چون L_a و R_a ، $a \in G$ ، J را حفظ می کنند. فرمول لایبنیز نشان می دهد نگاشتی که:

$(X, Y) \in G \times G \rightarrow XY \in G$ هولومورفیک است. نگاشت $\Psi : X \rightarrow X^{-1}$ در e هولومورفیک است (چون

دیفرانسیل آن -1 است که با J جابه جا می شود) و لذا چون $\Psi \circ L_a = R_{a^{-1}} \circ \Psi$ نتیجه می دهد که $(\Psi_*)_a =$

$(R_{a^{-1}})_* \circ (\Psi_*)_e (L_a)_* eJ$ را حفظ می کند بنابراین G یک گروه لی مختلط است. به همین ترتیب می توانیم حالتی را که G همبند نیست، بررسی کنیم.

۱۵-۱-۲ تعریف: به عنوان یک مجموعه، کواترنیون های H مساوی با R^4 هستند. یک فضای برداری ۴-بعدی روی اعداد حقیقی است و سه عملگر جمع و ضرب اسکالر و ضرب کواترنیون دارد. و هر عنصر بصورت $a+bi+cj+dk$ نمایش داده می شود که a و b و c و d اعداد حقیقی اند.

$$\begin{aligned}jk &= i & kj &= -i \\ki &= j & ik &= -j & i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ij &= k & ji &= -k\end{aligned}$$

۱۶-۱-۲ تعریف: فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R -مدول (چپ) گروه آبدی و جمعی مانند A است همراه با تابعی مانند $R \times A \rightarrow A$ (تصویر (r,a) با ra نشان داده می شود) به طوریکه به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$

$$r(a+b)=ra+rb \quad (i)$$

$$(r+s)a=ra+sa \quad (ii)$$

$$r(sa)=(rs)a \quad (iii)$$

و اگر R دارای واحد 1_R باشد بطوریکه:

$$1_R a = a, \quad a \in A \quad \text{به ازای هر} \quad (iv)$$

آنگاه گوییم A یک R -مدول یکانی است. هرگاه R یک حلقه بخشی باشد، آنگاه یک R -مدول یکانی فضای برداری (چپ) نام دارد.

یک R -مدول راست (یکانی) به همین نحو با تابعی چون $A \times R \rightarrow A$ تعریف می‌شود که با ضابطه $(a,r) \rightarrow ar$ نموده شده و در روابط (i) تا (iv) صدق می‌کند.

۲-۲ ساختار ابرمختلط

۱-۲-۲ تعریف: یک ساختار ابرمختلط روی یک منیفلد M یک جفت $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ از ساختارهای مختلط ضد جا به جایی روی M است. یک ساختار ابرمختلط روی یک گروه لی G ناورداست اگر انتقالهای چپ از G نسبت به J_1 و J_2 هولومورفیک باشند.

۲-۲-۲ تعریف: جبرلی حقیقی g داده شده است یک ساختار ابرمختلط (یا به اختصار hcs) روی g یک خانواده $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ از اندومورفیسم‌هایی از g است که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$J_\alpha^2 = -I, \quad J_1 J_2 = J_2 J_1 \quad (1-2)$$

$$N_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2-2)$$

I نگاشت همانی است و N_α تانسور نیجنه‌یوس^{۱۴} متناظر با J_α است.

$$N_\alpha(X, Y) = [J_\alpha X, J_\alpha Y] - J_\alpha([X, J_\alpha Y] + [J_\alpha X, Y]) - [X, Y], \quad \forall X, Y \in g$$

۳-۲-۲ تذکر: بوضوح اگر G یک گروه لی با جبر لی g باشد آنگاه یک hcs روی g ، توسط انتقال‌های چپ یک ساختار ابرمختلط ناوردا روی G ، القا می‌شود. از رابطه (۱-۲) نتیجه می‌شود که J_1 و J_2 و $J_3 = J_2 J_1 J_2$ به g یک ساختار H -مدول می‌دهد که H حلقه کواترنیون‌ها است. لذا $\dim g = 4n$ و $n \in \mathbb{N}$ همچنین از روابط (۱-۲) و (۲-۲) نتیجه می‌شود $N_3 = 0$.

¹⁴Nijenhuis

۴-۲-۲ تذکر: دو ساختار ابرمختلط $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ روی g هم ارزند اگر اتومورفیسم φ از g

$$\varphi J_\alpha = J'_\alpha \varphi \quad , \quad \alpha = 1, 2$$
 وجود داشته باشد بطوریکه

۵-۲-۲ تذکر: یک hcs $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ روی g یک کره دو بعدی S^2 از ساختارهای مختلط می‌دهد.

$$J_X = \sum_{\beta=1}^3 X_\beta J_\beta \quad , \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$$

که $J_3 = J_2 J_1$ بعلاوه هر جفت از بردارهای متعامد $X = (X_1, X_2, X_3)$ و $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ روی یک کره S^2

ساختار ابرمختلط $\{J_X, J_Y\}$ روی g تعریف می‌کند.

حال سه لم را ثابت می‌کنیم که از آنها در اثبات قضایای بعدی استفاده خواهیم کرد.

۶-۲-۲ لم: اگر $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ خانواده‌ای از اندومورفیسم‌های R^4 باشد که در (۲-۱) صدق کند و $W \subset R^4$ یک

زیر فضای دو بعدی دلخواه باشد $X = (X_1, X_2, X_3) \in S^2$ وجود دارد بطوریکه $J_X = \sum_{\alpha=1}^3 X_\alpha J_\alpha$ را پایدار نگه می‌دارد.

اثبات: $X \in R^4$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه $\{J_1 X, J_2 X, J_3 X, X\}$ یک پایه R^4 و مستقل خطی است.

مجموعه $\{X, Y\}$ را پایه‌ای برای $W \subset R^4$ در نظر می‌گیریم و $Y \in R^4$ می‌نویسیم:

$$Y = \underbrace{x_0 X}_{\in R^4} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{x_i J_i X}_{\in R^4} \quad , \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

نشان می‌دهیم:

$$J_X(W) = W \text{ یا } J_X(W) \subset W$$

$$w \in W \quad \rightarrow \quad w = C_1 X + C_2 Y$$

$$w \in J_x(W) \rightarrow J_x(W) = C_1 J_x(X) + C_2 J_x(Y)$$

از طرفی

$$Y = x_0 X + \sum x_i J_i X \rightarrow Y - x_0 X = \sum x_i J_i X$$

$$x_0 J_x X = J_x Y - J_x^2 X = J_x Y + X$$

$$x_0 J_x X = J_x Y + X \rightarrow J_x Y = x_0 J_x X - X$$

$$J_x^2 Y = x_0 J_x^2 X - J_x X \rightarrow -Y = -x_0 X - J_x X \rightarrow J_x X = (-x_0 X + Y) \in w \rightarrow$$

$$J_x Y \in w \rightarrow w \in W \rightarrow J_x(w) \subset W$$

از طرفی هر زیر فضای دو بعدی از یک فضای دو بعدی برابر خود فضا است. پس

$$J_x(w) = W$$

۷-۲-۲ لم: اگر J_α یک اندومورفیسم از g باشد بطوریکه $J_\alpha^2 = -I$ و $\{X_1, J_\alpha X_1, \dots, X_n, J_\alpha X_n\}$ یک پایه

از g باشد پس $N_\alpha = 0$ اگر و فقط اگر $j < i$, $N_\alpha(X_i, X_j) = 0$

اثبات: به سادگی می توانیم بدست بیاوریم که $N_\alpha(X, Y) = -N_\alpha(Y, X)$ و $N_\alpha(J_\alpha X, Y) = -J_\alpha N_\alpha(X, Y)$ اگر

$$N_\alpha(X_i, X_j) = 0 \text{ باشد.}$$

$$N_\alpha \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} N_\alpha(X_i, J_\alpha X_j) = 0 \\ N_\alpha(X_i, X_j) = 0 \\ N_\alpha(J_\alpha X_i, J_\alpha X_j) = 0 \end{cases}$$

پایه $\{X_1, \dots, X_n, J_\alpha X_1, \dots, J_\alpha X_n\}$ را در نظر می گیریم:

$$-J_\alpha N_\alpha(J_\alpha X_i, J_\alpha X_j) = N_\alpha(J_\alpha^2 X_i, J_\alpha X_j) = -N_\alpha(X_i, J_\alpha X_j)$$

۸-۲-۲ لم: اگر $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ خانواده‌ای از اندومورفیسم‌های فضاهای برداری حقیقی V باشد که در شرط

(۲-۲) صدق می‌کند V یک ضرب داخلی می‌پذیرد بطوریکه J_1 و J_2 متعامد باشند اگر $\dim V=4$ باشد

چنین ضرب داخلی در حد یک ضریب مثبت یکتا است.

اثبات: فرض می‌کنیم $\langle, \rangle$ ضرب داخلی دلخواه باشد تعریف می‌کنیم:

$$(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \sum_{\alpha=1}^3 \langle J_\alpha X, J_\alpha Y \rangle, \quad \forall X, Y \in V$$

که $J_3 = J_1 J_2$ واضح است که $\langle, \rangle$ یک ضرب داخلی با خواص خواسته شده است زیرا:

$$(J_1, J_2) = \langle J_1, J_2 \rangle + \langle J_1 J_1, J_1 J_2 \rangle + \langle J_2 J_1, J_2 J_2 \rangle + \langle J_3 J_1, J_3 J_2 \rangle = \langle J_1, J_2 \rangle + \langle -I, J_3 \rangle + \langle J_3, -I \rangle + \langle J_4, J_1 \rangle = 0$$

اگر $\dim V=4$ و $(,)$ یک ضرب داخلی روی V باشد بطوریکه J_1 و J_2 متعامدند.

فرض کنیم $T \in \text{End} V$ باشد بطوریکه: $(X, Y)_1 = (Tx, Y) \quad \forall X, Y \in V$

اگر $(\lambda > 0)$ فضای ویژه T متناظر با مقدار ویژه λ باشد پس $J_\alpha V_\lambda$ را حفظ می‌کند. $(\alpha=1, 2)$

لذا $\dim V_\lambda \equiv 0 \pmod{4}$ بنابراین $V_\lambda = V$ و $(,)_1 = \lambda(,)$

فصل سوم

طبقه بندی ساختارهای ابرمختلط

۳-۱ مقدمه

در این فصل نتایج مهمی از طبقه بندی ساختارهای ابرمختلط بدست می‌آوریم کلاس‌های هم ارزی از hcs روی هر جبر لی حقیقی ۴ بعدی را پارامتری می‌کنیم. از این به بعد g یک جبر لی حقیقی ۴-بعدی با مرکز $\mathfrak{z}$ و $g' = [g, g]$ جبر لی مشتق شده خواهد بود.

در این فصل طبقه بندی ساختار ابرمختلط برای زمانی که g حل‌ناپذیر و یا حل‌پذیر است بطور جداگانه بررسی می‌شود. ابتدا چند تعریف مورد نیاز را می‌آوریم.

۳-۱-۱ تعریف: قبلاً adX را تعریف نمودیم. می‌گوئیم $X \rightarrow adX$ یک نمایش از g در g است. و

نمایش الحاقی g نامیده می‌شود. $adX : g \rightarrow g$

توجه کنید که g آبدلی است اگر و فقط اگر برای هر $X \in g$, $adX=0$ هسته نمایش الحاقی، مجموعه شامل هر $X \in g$ است بطوریکه $[X, Y]=0$ برای هر $Y \in g$ ، که مرکز g ^{۱۵} نامیده می‌شود.

۳-۱-۲ تعریف: یک جبر لی g روی میدان K ساده است اگر آبدلی نباشد و 0 و g تنها ایده‌آل‌های آن

باشند. به عبارت دیگر g ساده است اگر فقط اگر نیم ساده باشد و ایده‌آل سره نداشته باشد.

۳-۱-۳ یادآوری

در تمام موارد زیر می‌توان به جای C از R نیز استفاده نمود.

$$SL(n, C) = \{ A \in GL(n, C) : \det A = 1 \} \quad U(n) = \{ A \in GL(n, C) : A^* A = I_n \}$$

A^* ماتریس الحاقی است.

¹⁵Center of g

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$$

$$\text{Lie}(SL(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr} A = 0\}$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A^* + A = 0\}$$

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

تعریف ۳-۱-۴: برای $n \geq 1$ یک ماتریس حقیقی A که $A^*A = I_n$ یک ماتریس متعامد نامیده می‌شود

A^T ترانهاده A است.

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\} \subseteq M_n(\mathbb{R})$$

$$O(n)^+ = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$$

$$O(n)^- = \{A \in O(n) : \det A = -1\}$$

$$O(n)^+ \cap O(n)^- = \emptyset$$

$$SO(n) = O(n)^+ \leq O(n)$$

زیر گروه

$SO(n)$ گروه متعامد ویژه $n \times n$ است.

تعریف ۳-۱-۵: فرض کنیم $\mathfrak{q}$ و $\mathfrak{m}$ جبرلی‌هایی روی میدان K باشند و σ یک نمایش از $\mathfrak{m}$ در $\mathfrak{q}$ باشد

بطوریکه $\sigma(Y)$ یک مشتق از $\mathfrak{q}$ برای همه $Y \in \mathfrak{m}$ باشد. برای $X, X' \in \mathfrak{m}$ و $Y, Y' \in \mathfrak{m}$ فرض کنید:

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'] + \sigma(Y)X' - \sigma(Y')X, [Y, Y'])$$

که این رابطه به آسانی فضای برداری $\mathfrak{q} \times \mathfrak{m}$ را به جبر لی تبدیل می‌کند. $\mathfrak{q} \times_{\sigma} \mathfrak{m}$ ضرب نیم مستقیم از $\mathfrak{q}$

با $\mathfrak{m}$ وابسته به σ نامیده می‌شود. اگر $\sigma = 0$ باشد ضرب مستقیم است و با $\mathfrak{q} \times \mathfrak{m}$ نمایش می‌دهیم.

۳-۱-۶ سطح هویف^{۱۶}: یک سطح مختلط فشرده که به عنوان خارج قسمت یک فضای برداری

مختلط (بدون صفر $C^2 \setminus 0$) توسط یک عمل آزاد از یک گروه گسسته بدست می‌آید.

¹⁶Hopf

۸-۱-۳ تجزیه لوی^{۱۷}

هر جبر لی یک ضرب نیم مستقیم از رادیکال آن و یک جبر نیم ساده است.

۹-۱-۳ قضیه: اگر g حل پذیر نباشد بنابراین g یک ساختار hcs می پذیرد اگر و فقط اگر

$g \cong R \oplus SO(3)$ ، بعلاوه hcs روی $R \oplus SO(3)$ در حد هم ارزی یکتاست.

اثبات: قسمتی از حکم اول با نشان دادن یک $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ روی $R \oplus SO(3)$ نتیجه می شود. فرض می

کنیم $\{Z, X, Y, W\}$ یک پایه از $R \oplus SO(3)$ باشد بطوریکه $Z \in R$ و

$$[W, X] = Y, \quad [Y, W] = X, \quad [X, Y] = W$$

فرض کنیم $J_1, J_2 \in \text{End}(R \oplus SO(3))$ بصورت زیر تعریف شده باشند.

$$J_1^2 = -I \quad J_1 Y = W \quad J_1 Z = X$$

$$J_2^2 = -I \quad J_2 W = X \quad J_2(Z) = Y$$

$$J_2 J_1 = -J_1 J_2 \quad \text{بوضوح پاد جابه جایی اند زیرا}$$

بعلاوه

$$N_1(Z, Y) = [J_1 Z, J_1 Y] - J_1[Z, J_1 Y] - J_1[J_1 Z, Y] - [Z, Y] = [X, W] - J_1[X, Y] = 0$$

چون $N_1=0$ است لذا J_1 انتگرال پذیر است بنابراین بنا به لم (۷-۲-۲) یک محاسبه مشابه نشان می دهد که

$N_2(Z, W)=0$ بنابراین $H = \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ یک hcs روی $R \oplus SO(3)$ تعریف می کند.

حال فرض کنیم g یک hcs $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ می پذیرد.

¹⁷Levi

چون g حل پذیر نیست ($Dg \neq 0$) با استفاده از تجزیه لوی g ، و طبقه بندی جبرهای لی ۳-بعدی ساده

حقیقی بدست می آوریم: $g \cong \mathfrak{so}(3)$ یا $g \cong \mathfrak{so}(2, 1)$ ، یک مجموعه مستقیم از ایده آل های Z .

اگر Z عنصری غیر صفر در $\mathfrak{g}$ باشد تعریف می کنیم:

$$W=J_1J_2Z, \quad Y=J_2Z, \quad X=J_1Z$$

که $\{Z, X, Y, W\}$ پایه ای برای g است. $[W, X]$ ، $[Y, W]$ و $[X, Y]$ را محاسبه می کنیم می نویسیم:

$$[X, Y] = aZ + bX + cY + dW$$

چون $N_1(Z, Y) = 0 = N_2(Z, X)$ لذا داریم:

$$J_2[X, Y] = [Y, W], \quad J_1[X, Y] = [X, W]$$

بنابراین

$$[W, X] = -[X, W] = -J_1[X, Y] = -J_1(aZ + bX + cY + dW) = -aJ_1Z - bJ_1X - cJ_1Y - dJ_1W = -aZ + bX - cW + dY = bZ - aX + dY - cW$$

به همین ترتیب

$$[Y, W] = J_2[X, Y] = -cZ + dX + aY + bW$$

ضریب Z در $[[X, Y], W] + [[Y, W], X] + [[W, X], Y]$ را بدست می آوریم:

$$[[X, Y], W] = [aZ + bX + cY + dW, W] = a[Z, W] + b[X, W] + c[Y, W] + d[W, W] = -b(bZ - aX + dY - cW) - c^2Z + baX - bdY - bcW$$

به همین ترتیب $[[Y, W], X]$ و $[[W, X], Y]$ را بدست می آوریم.

که در نتیجه ضریب Z ، $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ است.

بنابراین $a=b=c=0$ و از روابط قبلی داریم:

$$(1-3) \quad [X,Y]=dW \quad [Y,W]=dX \quad [W,X]=dY$$

چون $d \neq 0$ (g آبلی نیست $Dg \neq 0$, $adX = [X,Y]$) پس $\{X,Y,W\}$ یک جبر لی ۳-بعدی ایزومورف با $SO(3)$ تولید می کند. (شرایط یک جبر لی را دارد)

اگر $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$, hcs دیگری روی g باشد قرار می دهیم $J'_3 = J'_1 J'_2$ از روش بالا نتیجه می گیریم $d' \neq 0$ وجود دارد بطوریکه $[J'_\alpha Z, J'_\beta Z] = d' J'_\gamma Z$ که $(\gamma \text{ و } \beta \text{ و } \alpha)$ جایگشت دوری از $(1 \text{ و } 2 \text{ و } 3)$ است. (مشابه (۱-۳) است)

فرض کنیم $\varphi \in \text{End}(g)$ و با $\varphi Z = \frac{d}{d'} Z$ و $J'_\alpha \varphi = J'_\alpha \varphi$ برای $\alpha=1,2$ تعریف شده باشد نشان می دهیم φ یک اتومورفیسم از g است بنابراین $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ هم ارزند.

به این ترتیب قضیه اثبات می شود.

۱۰-۱-۳ یادآوری: گروه لی همبند ساده با جبر لی $R \oplus SO(3)$ ، گروه ضربی H^* از کواترنیون های غیر

صفر است. گروه لی H^* همبند ساده است ساختار hcs می پذیرد بنابراین جبر لی H^* ، hcs می پذیرد. H^* حل پذیر نیست پس جبر لی H^* همان $R \oplus SO(3)$ است. قضیه زیر برای درک این مطلب استفاده می کنیم.

۱۱-۱-۳ قضیه: فرض کنید g جبر لی متناهی البعد باشد یک گروه لی همبند G وجود دارد که جبر لی آن همان جبر لی مفروض است.

اثبات: به مرجع [۱۳] مراجعه شود.

۱۲-۱-۳ یادآوری: در قضیه ۹-۱-۳ ثابت کردیم که اگر $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ پس $J_1\mathfrak{g} \oplus J_2\mathfrak{g} \oplus J_3\mathfrak{g}$ یکرخت با $SO(3)$ یا آبدلی است. بنابراین یک جبر لی ۴-بعدی با مرکز غیر بدیهی یک hcs می‌پذیرد اگر و فقط اگر $\mathfrak{g} \cong R \oplus SO(3)$ یا $\mathfrak{g}$ آبدلی باشد.

۱۳-۱-۳ یادآوری: مطابق قضیه ۹-۱-۳، $R \oplus \mathfrak{sl}(2, R)$ یک hcs نمی‌پذیرد به عبارت دیگر ساختار مختلط ناوردا می‌پذیرد.

حکم بالا با نتایجی از [۱۵] بدست می‌آید.

۱۴-۱-۳ یادآوری: به عنوان یک نتیجه قضیه ۹-۱-۳ خارج قسمتی از $R \times S^3$ با زیر گروه مرکزی گسسته بدست می‌آوریم که hcs ناوردا می‌پذیرد. $R \times SO(3)$ ، $S^1 \times S^3$ و $S^1 \times SO(3)$ ، دو فضای آخری سطوح هوپف هستند که در طبقه بندی منیفلد های ۴-بعدی ابر هرمیتی فشرده بویر^{۱۸} نمایان می‌شوند [۳]. توجه کنید که از دیفئومورفیسم $S^1 \times S^3 \cong U(2)$ می‌توانیم به $U(2)$ ساختار ابرمختلط بدهیم. (لازم نیست ناوردا باشد)

۲-۳ حال طبقه بندی ساختار های ابرمختلط را با این فرض که $\mathfrak{g}$ حل‌پذیر است انجام می‌دهیم بطور جداگانه حالتی که $\dim \mathfrak{g}' = 0, 1, 2, 3$ است تجزیه و تحلیل می‌کنیم. ابتدا تعاریف مورد نیاز را می‌آوریم.

۱-۲-۳ تعریف: ساختار مختلط R^{2n} القا شده از C^n که

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n, -x^1, \dots, -x^n)$$

¹⁸Boyer

ساختار مختلط متعارف R^{2n} نامیده می‌شود. برحسب پایه طبیعی برای R^{2n} با ماتریس زیر داده

می‌شود. $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ که I_n ماتریس های همانی از درجه n است.

۲-۲-۳ تعریف: گروه آفین از هر فضای آفین روی یک میدان K ، گروهی از همه تبدیل های آفین وارون-

پذیر از فضا به خودش است که یک گروه لی است اگر K یک میدان مختلط یا حقیقی از کواترنيون ها باشد.

۳-۲-۳ تعریف: RP^n فضای تصویر حقیقی n -بعدی است که به عنوان مجموعه ای از زیر فضاهای خطی

۱-بعدی از R^{n+1} تعریف می‌شود.

۴-۲-۳ تعریف: یک جبر لی ۳-بعدی با مولد های زیر یک جبرهایزنبیگ^{۱۹} است

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Y, Z] = 0 \quad [X, Z] = 0 \quad [X, Y] = Z$$

که دقیقا همانند فضایی از ماتریس های بالا مثلثی است.

۵-۲-۳ قضیه: فرض کنید g یک جبر لی روی K باشد پس g حل پذیر است اگر و فقط اگر

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = 0 \quad (X, Y, Z \in g)$$

اثبات: به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

۶-۲-۳ گزاره: یک تناظر یک به یک بین مجموعه ساختارهای مختلط روی R^{2n} و فضای همگن

$\frac{GL(2n, R)}{GL(n, C)}$ وجود دارد. همدسته با یک عنصر $S \in GL(2n; R)$ نمایش داده می‌شود. متناظر با ساختار

مختلط SJ_0S^{-1} است که J_0 (نمایش ماتریسی) ساختار مختلط متعارف R^{2n} است.

¹⁹Heisenberg

اثبات: به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

حال برحسب $\dim g'$ ساختارهای ابرمختلط را طبقه بندی می‌کنیم:

اگر $\dim g' = 0$ لذا g' آبدی است. یک hcs روی g می‌تواند با انتخاب دو اندومورفیسم که در شرط (۱-۲) صدق می‌کند بدست آید. در این موقعیت حالت انتگرال‌پذیری (۲-۲) خود به خود برقرار است و می‌توانیم با بحث مشابه اینها در مورد مختلط نشان دهیم که یک تناظر یک به یک بین ساختارهای ابرمختلط روی g و نقاطی در فضای $\frac{GL(4n, R)}{GL(n, H)}$ وجود دارد.

با بیان یک $hcs, \{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ و فرستادن $GL(4n, R) \ni T \rightarrow \{T J_\alpha^0 T^{-1}\}_{\alpha=1,2}$ تناظر اثبات می‌شود. بویژه هر hcs هم‌ارز با $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ است.

و اگر بعد g' برابر یک باشد داریم:

۳-۲-۷ گزاره: اگر $\dim g' = 1$ ، g هیچ hcs را نمی‌پذیرد.

اثبات: اگر g یک hcs بپذیرد فرض کنیم با توجه به یادآوری ۳-۱-۱۲، $\mathfrak{z} = \{0\}$. حال اگر X یک عنصر غیر صفر از g' باشد، $Y \in g$ وجود دارد بطوریکه $[Y, X] = X$ پس g تجزیه می‌شود.

$$g = \text{Ker}(\text{ad}X) \cap \text{Ker}(\text{ad}Y) \oplus RX \oplus RY$$

با بکارگیری اتحاد ژاکوبی با U و V که $U, V \in \text{Ker}(\text{ad}X) \cap \text{Ker}(\text{ad}Y)$ بدست می‌آوریم $[U, V] = 0$ بنابراین $\mathfrak{z} = \text{Ker}(\text{ad}X) \cap \text{Ker}(\text{ad}Y)$ که یک تناقض است پس g هیچ ساختار ابرمختلطی نمی‌پذیرد.

۳-۲-۸ تذکر: فرض کنیم $\text{Aff}(C)$ گروه جنبشی آفین C تحت ترکیب توابع باشد که با ضرب نیم

مستقیم C یکرخت با C^* است. $\text{Aff}(C) \cong C \times C^*$

جبر لی $\text{aff}(C)$ به یک مجموع مستقیم از یک ایده آل آبلی (متناظر با زیر گروه نرمال انتقال هاست) با اضافه یک زیر جبر آبلی (متناظر با یک ضرب اسکالر در C^*) تجزیه می شود. بعلاوه پایه های X و Y از ایده آل های W و Z از زیر جبر وجود دارند بطوریکه روابط زیر برقرار است:

$$[Y, Z] = Y \quad [X, Z] = X$$

$$[Y, W] = -X \quad [X, W] = Y$$

قضیه بعد حالتی را که بعد g' برابر ۲ است را بررسی می کند.

۹-۲-۳ **قضیه:** اگر $\dim g' = 2$ باشد پس:

(i) $g \cong \text{aff}(C)$ یک hcs می پذیرد اگر و فقط اگر

(ii) کلاس هم ارزی hcs روی g با فضای RP^2 پارامتری می شود.

اثبات: ابتدا نشان می دهیم $\text{aff}(C)$ یک hcs می پذیرد. فرض کنیم $\mathcal{H} = \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ خانواده ای از اندومورفیسم هایی از $\text{aff}(C)$ باشد.

$$J_1 X = -W \quad J_1 Y = Z \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 X = Y \quad J_2 Z = -W \quad J_2^2 = -I$$

چون $N_1(Z, Y) = 0$ و $N_2(Z, W) = 0$ پس J_1 و J_2 انتگرال پذیرند. (با استفاده از لم ۷-۲-۲).

برعکس:

فرض کنیم $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ یک hcs روی g تعریف می کند.

$\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ را اگر لازم باشد تغییر می دهیم ((۲-۲) و لم ۶-۲-۲ را ببینید)

فرض کنیم $g' \rightarrow g' : J_2$ بنابراین $g' = g' \oplus J_1 g'$ (جمع مستقیم یک ایده‌آل و یک زیر جبر).

فرض کنید $\{X', Y'\}$ پایه ای از g' باشد که $Y' = J_2 X'$ که نتیجه می‌دهد $\{X', Y', J_1 X', J_1 Y'\}$ پایه‌ای از g است.

دو فرم دو خطی و پاد متقارن α و β روی g وجود دارد بطوریکه :

$$[V, W] = \alpha(V, W)X' + \beta(V, W)Y' \quad \forall V, W \in g$$

شرط انتگرال پذیری $N_1(X', Y') = 0$ و اینکه g' آبلی است (چون g حل پذیر است پس $Dg = 0$)

$[X', Y'] = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$[J_1 X', J_1 Y'] = 0 \quad [X', J_1 Y'] = [Y', J_1 Y']$$

و از $N_2(X', J_1 X') = 0$ بدست می‌آوریم:

$$[X', J_1 Y'] = -[Y', J_1 Y']$$

از اتحاد ژاکوبی داریم:

$$\alpha(X', J_1 X') = \beta(X', J_1 Y')\alpha(X', J_1 Y') = \beta(X', J_1 Y')$$

و بنابراین براکت در g با $c = \alpha(X', J_1 X')$ و $d = \beta(X', J_1 Y')$ تعیین می‌شود.

$$[X', J_1 X'] = cX' - dY' \quad [X', J_1 Y'] = dX' + cY'$$

$$[Y', J_1 X'] = dX' + cY' \quad [Y', J_1 Y'] = -cX' + dY'$$

چون $\dim g' = 2$ است لذا باید $c \neq 0$ یا $d \neq 0$ باشد.

X و Y و Z و W را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$X=(c^2 + d^2)^{-1}(dX' + cY')$$

$$Y=(c^2 + d^2)^{-1}(-cX' + dY')$$

$$Z=(c^2 + d^2)^{-1}(cJ_1X' - dJ_1Y')$$

$$W=(c^2 + d^2)^{-1}(-dJ_1X' + cJ_1Y')$$

از روابط بالا بدست می آوریم :

$$[Y,Z]=Y$$

$$[X,Z]=X$$

$$[Y,W]=-X$$

$$[X,W]=Y$$

$$g \cong \text{aff}(C)$$

توجه کنید J_1 و J_2 نسبت به پایه $\{X, Y, Z, W\}$ به شکل زیر هستند:

$$J_1X = aZ - bW$$

$$J_1Y = bZ + aW$$

$$J_1^2 = -I$$

$$J_2X = Y$$

$$J_2Z = -W$$

$$J_2^2 = -I$$

که

$$a^2 + b^2 = 1 \quad b=(d^2 - c^2)(c^2 + d^2)^{-1} \quad \text{و} \quad a=2cd(c^2 + d^2)^{-1}$$

فرض کنید $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ ، hcs ، بدست آمده باشد با قرار دادن :

$$J_1^0X=-W$$

$$J_1^0Y = Z$$

$$(J_1^0)^2 = -I$$

$$J_2^0 = J_2$$

ادعا می کنیم $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ هم ارزند. در حقیقت نشان می دهیم $\varphi \in \text{End}(g)$ تعریف شده با

$$\varphi J_\alpha = \varphi W = W \quad \text{و} \quad \varphi Z = Z \quad \text{و} \quad \varphi Y = -aX + bY \quad \text{و} \quad \varphi X = bX + aY, \quad \text{یک اتومورفیسم از } g \text{ می دهد بطوریکه}$$

$$J_\alpha^0 \varphi, \quad \alpha = 1, 2$$

(ii) در (i) ثابت کرده ایم که همه ساختارهای ابرمختلط $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ با این خاصیت که J_2 ، g' را حفظ می کند هم ارزند. یک ساختار ثابت $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ که این خاصیت را دارد داده شده است تعریف می کنیم :

$$SO(3)^0 = \{ \{J_\alpha^0, J_\alpha^0\} : x, y \in S^2, x \perp y \}$$

که $J_3^0 = J_1^0 J_2^0 J_1^0 = \sum_{\alpha=1}^3 y_\alpha J_\alpha^0$ و $J_x^0 = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha J_\alpha^0$ پس هر hcs روی $g = \text{aff}(C)$ با یک hcs که در $SO(3)^0$ قرار می گیرد هم ارز است.

برای اثبات این مطلب یک hcs ، $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ دلخواه در نظر می گیریم بنا به لم (۲-۲-۶) $q \in S^2$ وجود دارد بطوریکه $J_q = \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha J_\alpha$ ، g' را حفظ می کند و $J_3 = J_1 J_2$ اگر $p \in S^2$ به q عمود باشد پس $\{J_p, J_q\}$ یک hcs است که توسط اتومورفیسم φ هم ارز با $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ است.

فرض کنیم x و y دو سطر نخست از A^{-1} باشد که A ماتریسی با سطرهای p و q و $p \wedge q$ است پس φ یک هم ارزی بین $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J_x^0, J_y^0\}$ است.

ثابت کردیم نگاشتی که $\{J_x^0, J_y^0\} \rightarrow SO(3) \ni (x, y, x \wedge y)$ به روی مجموعه ای از کلاس های هم ارزی hcs روی g ، پوشاست.

فرض کنیم $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ ساختار تعریف شده در (i) باشد نشان می دهیم $\{J_x^0, J_y^0\}$ و $\{J_p^0, J_q^0\}$ هم ارزند اگر و فقط اگر $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in O(2)$ وجود داشته باشد بطوریکه $x = \tilde{A}p$ و $y = \tilde{A}q$ که $\tilde{A} =$

$$\begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} \\ 0 & \det A & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

بنابراین کلاس های هم ارزی hcs روی g در تناظر یک به یک با نقاطی در فضای $\frac{O(2)}{SO(3)} = \mathbb{R}R^2$ هستند.

۳-۲-۱۰ **قضیه:** فرض کنید g یک جبر لی حقیقی حل پذیر ۴- بعدی باشد بطوریکه $\dim g' < 3$

اگر g آبلی نباشد پس g یکی از جبرهای لی لیست شده در جدول زیر است که X و Y و Z و W پایه ای از g است و c و d اعداد حقیقی اند.

G	رابطه	g'	$C(g)$
S1	$[X,Y]=Z$	$\langle Z \rangle$	$\langle Z, w \rangle$
S2	$[X,Y]=Y$	$\langle Y \rangle$	$\langle Z, w \rangle$
S3	$[X,Y]=Y, [X,W]=Z$	$\langle Y, Z \rangle$	$\langle Z \rangle$
S4	$[X,Y]=Z, [X,W]=Y$	$\langle Y, Z \rangle$	$\langle Z \rangle$
S5	$[X,Y]=Y, [X,W]=dW, d \neq 0$	$\langle Y, W \rangle$	$\langle Z \rangle$
S6	$[X,Y]=Y, [X,W]=Y+W$	$\langle Y, W \rangle$	$\langle Z \rangle$
S7	$[X,Y]=W, [X,W]=-cW+dW, d^2 - 4c < 0, d = 0 \text{ or } 1$	$\langle Y, W \rangle$	$\langle Z \rangle$
S8	$[X,Y]=Y, [Z,W]=W,$	$\langle Y, W \rangle$	0
S9	$[X,Y]=Y, [X,W]=W, [Z,W]=Y$	$\langle Y, W \rangle$	0
S10	$[X,Y]=Y, [X,W]=dW, d \neq 0$ $[Z,Y]=Y, [Z,W]=cW$	$\langle Y, W \rangle$	0
S11	$[X,Y]=Z, [X,W]=W, [Z,Y]=W,$ $[Z,W]=-cW+dW, d^2 - 4c < 0, d = 0 \text{ or } 1$	$\langle Y, W \rangle$	0

اثبات: به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

۳-۲-۱۱ اسنو^{۲۰} در قضیه بالا ساختارهای مختلط روی یک جبر لی حقیقی حل پذیر ۴- بعدی g رابطه

بندی کرد بطوریکه $\dim g' \leq 2$

²⁰J. E. Snow

جبر لی که در قضیه (۳-۲-۹) با S11 نمایان می‌شود در جدول بالا نشان داده می‌شود. S11 چهارخانواده مجزا از کلاس‌های هم ارزی ساختارهای مختلط می‌پذیرد. ساختارهای J_1^0 و J_2^0 از قضیه ۳-۲-۹ ساختارهای مختلط غیر هم ارز متعلق به خانواده‌های متفاوت را نشان می‌دهد.

قبل از بیان آخرین قضیه این فصل به تعدادی تعریف نیازمندیم.

۳-۲-۱۲ تعریف: نقطه $p \in M$ و یک زیر فضای دو بعدی $\sigma \subset T_p M$ را در نظر می‌گیریم عدد حقیقی $K(X, Y) = K(\sigma)$ که $\{X, Y\}$ پایه‌ای از σ است انحناء برشی σ در P نامیده می‌شود.

$$K(X, Y) = \frac{(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|^2} |X \wedge Y| = (|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

۳-۲-۱۳ تعریف: نیم فضای $H^n = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n, X_n > 0\}$ داده شده است. متر زیر را روی H^n معرفی می‌کنیم $g_{ij}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\delta_{ij}}{X_n^2}$. که H^n همبند ساده است. H^n با متر ذکر شده انحناء برشی ثابت مساوی با ۱- دارد و H^n کامل است.

H^n فضای هیپربولیک از بعد n نامیده می‌شود.

۳-۲-۱۴ تعریف: فرض کنید K یک میدان از مشخصه صفر و g یک جبر لی از بعد متناهی m روی K باشد، g پوچ توان است اگر $\text{ad} X$ یک اندومورفیسم پوچتوان g برای همه $X \in g$ باشد و همچنین هر جبر لی آبلی، پوچتوان است.

اکنون حالت $\dim g' = 3$ را بررسی می‌کنیم.

۳-۲-۱۵ گزاره: فرض کنیم $(g, \langle, \rangle)$ یک جبر لی حل‌پذیر با ضرب داخلی باشد بطوریکه $K < 0$ بنابراین حالت‌های زیر هم ارزند:

$$\nabla R = 0 \quad (i)$$

$$g = \{A_0\} + a_1 + a_2 \quad \text{یک تجزیه متعامد است با } g' = a_1 + a_2 \quad \text{و } [g', a_2] = 0 \quad (a) \quad (ii)$$

$$[g', g'] = a_2$$

$$\text{اگر } adA_0/g' = D_0 + S_0 \text{ به قسمت‌های پاد متقارن و متقارن آن تجزیه شده باشد بنابراین } =$$

$$S_0 \text{ یک مشتق پاد متقارن } g' \text{ است. } i=1,2 \text{ برای } \lambda. id/a_i D_0$$

$$(c) \text{ اگر } Z_1, \dots, Z_t \text{ پایه متعامد یکه } a_2 \text{ و اگر نگاشت‌های پاد متقارن } i = 1, \dots, t : a_1 \rightarrow a_1 \text{ به } J_i$$

صورت زیر تعریف شده باشند:

$$[X, Y] = 2\lambda \sum_{i=1}^t \langle X, J_i Y \rangle Z_i \quad \forall X, Y \in a_1$$

بنابراین:

$$\alpha) \quad J_i^2 = -id \quad \text{یعنی } J_i \text{ متعامد است}$$

$$\beta) \quad J_i J_k = -J_k J_i \quad \text{for } i \neq k$$

$$\gamma) \quad J_i J_k X \in \{J_1 X, \dots, J_t X\} \quad \text{for all } X \in a_1, \quad i \neq k$$

اثبات: به مرجع [۶] مراجعه شود.

نخست دو خانواده از جبرهای لی حل‌پذیر که وابسته به فضاهای هیپربولیک مختلط و حقیقی CH^n و

RH^n هستند معرفی می‌کنیم. چنین فضاهایی یک گروه حل‌پذیر از ایزومتريهایی که بطور ساده متعدی

روی آن عمل می‌کنند می‌پذیرد. بنابراین با یک گروه لی حل‌پذیر (همبند ساده) با یک متر نوردای چپ،

ایزومتريک است.

فرض کنیم $(s, \langle, \rangle)$ جبر لی حل پذیر متناظر با ضرب داخلی $\langle, \rangle$ باشد پس s یک تجزیه متعامد $s = \dim a_1 = \dim a_2$ دارد بطوریکه $[s', s'] = a_2$ و $s' = a_1 \oplus a_2$ و $\langle A, A \rangle = 1$ و $[s', a_2] = 0$ که $\dim a_1 = \dim a_2$ برای تعدادی عدد صحیح مثبت s .

وقتی $a_2 = 0$ پس a_1 آبدلی و گروه لی همبند ساده n بعدی با متر نوردای چپ وابسته به $(s, \langle, \rangle)$ که ایزومتريک با RH^n است.

اگر $a_2 = RX(\langle X, X \rangle = 1)$ ، a_1 یک پایه متعامد یکه $\{Y_1, Z_1, \dots, Y_{n-1}, Z_{n-1}\}$ دارد بطوریکه $[Z_i, Y_j] = -[Y_j, Z_i] = \delta_{ij}X$ پس گروه لی همبند ساده $2n$ -بعدی متناظر با متر نوردای چپ، ایزومتريک با CH^n است.

۳-۲-۱۶ قضیه: اگر $\dim g' = 3$ و g حل پذیر باشد یکی از موارد زیر بر قرار است:

(a) g' آبدلی است یا (b) g' یک جبر هایزنبرگ است.

در مورد (a)، g یک hcs می پذیرد اگر و فقط اگر g متناظر با فضای RH^4 باشد. بعلاوه g یک hcs یکتا در حد هم ارزی دارد.

در مورد (b)، g یک hcs می پذیرد اگر و فقط اگر متناظر با فضای CH^2 باشد کلاس های هم ارزی hcs روی g با فضای RP^2 پارامتری شده اند.

اثبات: چون g' پوچتوان است اولین حکم قضیه نتیجه می شود. چون تنها جبر لی غیر آبدلی پوچتوان ۳-بعدی، جبر هایزنبرگ است.

اکنون فرض کنیم حالت (a) برقرار باشد اگر g یک hcs ، $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ بپذیرد و فرض کنیم $\langle, \rangle$ یک ضرب داخلی باشد بطوریکه J_α برای $\alpha=1,2,3$ با $J_3=J_1J_2$ متعامد است. (لم ۲-۲-۸)

یک عنصر غیر صفر $A \in g$ عمود به g' نسبت به $\langle, \rangle$ را ثابت در نظر می‌گیریم بوضوح $\{J_\alpha A\}_{\alpha=1,2}$ یک پایه از g' است. باید داشته باشیم: $[J_\alpha A, J_\beta A] = 0$

اگر (α, β, γ) یک جایگشت دوری از اندیس‌های $(1, 2, 3)$ باشد با انتگرال‌پذیری J_α بدست می‌آوریم:

$$J_\alpha[A, J_\beta A] = [A, J_\alpha J_\beta A] J_\alpha[A, J_\gamma A] = [A, J_\alpha J_\gamma A] \quad (2-3)$$

اگر $ad_A : g' \rightarrow g'$ را نسبت به پایه $\{J_\alpha A\}_{\alpha=1,2}$ محاسبه کنیم و از (۳-۲) استفاده نماییم بدست می‌آوریم.

$$(3-3) ad_{A|g} = \lambda I$$

که نشان می‌دهد g با جبر لی حل‌پذیری که متناظر با فضای هیپربولیک حقیقی است یکرخت است. برعکس:

برای این جبر لی داده شده یک hcs ارائه می‌دهیم یک پایه $\{X, Y, Z\}$ از g' در نظر می‌گیریم اگر $A \notin g'$ ، (۳-۳) برقرار است $H = \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ را همانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} J_1 A = X & J_1 Y = Z & J_1^2 = -I \\ J_2 A = Y & J_2 Z = X & J_2^2 = -I \end{array}$$

به آسانی بررسی می‌شود که $N_1(A, Y) = 0$ و $N_2(A, Z) = 0$ بنابراین با توجه به لم ۲-۲-۷ و J_2 انتگرال-پذیرند. بعلاوه بدست می‌آوریم که همه ساختارهای ابرمختلط روی g با H هم‌ارزند. برای این اساس، hcs دیگر $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ متناظر با ضرب داخلی $\langle, \rangle'$ داده شده است. $A' \in g$ را عمود به g' نسبت به $\langle, \rangle'$ در نظر می‌گیریم و مانند بالا بدست می‌آوریم:

$$\lambda' \neq 0 \text{ برای } \text{ad}_{A'|g'} = \lambda' I$$

فرض کنید $\varphi \in \text{End}(g)$ با $\varphi A = \frac{\lambda}{\lambda'} A'$ و $\varphi J_\alpha = J_\alpha' \varphi$ برای $\alpha = 1, 2$ تعریف شده باشد نشان می‌دهیم φ یک اتومورفیسم از g است بنابراین هم‌ارزی مورد نظر برقرار می‌شود. اکنون فرض کنید (b) برقرار باشد اگر g جبر لی متناظر با CH^2 باشد که پایه $\{A, X, Y, Z\}$ دارد بطوریکه:

$$[Z, Y] = X \quad [A, X] = X$$

$$[A, Z] = \frac{1}{2} Z \quad [A, Y] = \frac{1}{2} Y$$

$J_1, J_2 \in \text{End}(g)$ را با شرایط زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_1 A = X \quad J_1 Y = Z \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 A = \frac{\sqrt{2}}{2} Z \quad J_2 X = \frac{\sqrt{2}}{2} Y \quad J_2^2 = -I$$

با یک محاسبه مستقیم انتگرال پذیری J_1 و J_2 بدست می‌آید.

برعکس:

اگر g در (b) صدق کند و یک hcs ، $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ بپذیرد فرض کنیم $\langle, \rangle$ یک ضرب داخلی باشد بطوریکه

$$J_\alpha \text{ برای } \alpha = 1, 2 \text{ متعامد است. (لم ۲-۲-۸)}$$

عنصر غیر صفر $\tilde{A}$ در متمم متعامد g' در نظر می‌گیریم. با لم (۲-۲-۶) فرض می‌کنیم $J_1 \tilde{A} \in \mathfrak{g}'$. پایه مقابل از g را در نظر می‌گیریم: $\tilde{A}$ و $\tilde{X} = J_1 \tilde{A}$ و $Z = J_2 \tilde{X}$ و $Y = J_2 \tilde{X}$ (توجه کنید $\{\tilde{X}, Z, Y\}$ پایه‌ای از g' است).

چون $\tilde{X} \in \mathfrak{g}'$ به آسانی نشان می‌دهیم $R\tilde{X}$ یک ایده‌آل از $\mathfrak{g}$ است. بنابراین $\lambda \in R$ وجود دارد بطوریکه $[\tilde{A}, \tilde{X}] = \lambda \tilde{X}$ با یادآوری $1-3-13$ ، بنابراین $\lambda \neq 0$.

با این فرض که $\mathfrak{g}'$ یک جبر هایزنبرگ با مرکز $R\tilde{X}$ است $\alpha \in R$ ($\alpha \neq 0$) وجود دارد بطوریکه $[Z, Y] = \alpha \tilde{X}$.

از $N_1(\tilde{A}, Z) = 0$ و $N_2(\tilde{X}, Z) = 0$ بدست می‌آوریم:

$$(3-4) \quad [\tilde{A}, Y] = (\lambda - \alpha)Y, \quad [\tilde{A}, Z] = J_1[\tilde{A}, Y] = (\lambda - \alpha)Z$$

اکنون اتحاد ژاکوبی با Y و Z و $\tilde{A}$ بکار می‌گیریم و بدست می‌آوریم $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ قرار می‌دهیم Y و Z و $X = \frac{\lambda}{2}\tilde{X}$ و $A = \frac{1}{\lambda}\tilde{A}$ با استفاده از (3-4) مستقیماً نشان می‌دهیم $\mathfrak{g}$ جبر لی متناظر با فضای هیپرβολیک مختلط است.

در پایه‌های بالا J_1 و J_2 شکل زیر را می‌گیرند.

$$\begin{array}{lll} J_1 A = \frac{2}{\lambda^2} X & J_1 Y = Z & J_1^2 = -I \\ J_2 A = \frac{1}{\lambda} Z & J_2 X = \frac{\lambda}{2} Y & J_2^2 = -I \end{array}$$

اگر J'_1 و J'_2 را ساختار بدست آمده وقتی λ را با λ' جایگزین می‌کنیم، بنامیم. به آسانی نشان می‌دهیم $\varphi \in \text{End}(\mathfrak{g})$ که در $\varphi A = A$ و $\varphi J_\alpha = J'_\alpha \varphi$ به ازاء $\alpha = 1, 2$ صدق می‌کند یک اتومورفیسم از $\mathfrak{g}$ است که یک هم‌ارزی بین $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ برقرار می‌کند.

ثابت کردیم که همه ساختارهای ابرمختلط $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ با این خاصیت که J_1 ، $RA \oplus \mathfrak{g}'$ را ناوردا باقی می‌گذارد هم‌ارزند.

فرض کنیم $\lambda = \sqrt{2}$ ثابت باشد و hcs وابسته را با $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ نشان می دهیم اگر $SO(3)^0$ را همانند (ii) قضیه ۹-۲-۳ تعریف کنیم با بحث مشابه ، هر hcs روی g هم ارز با یک hcs است که در $SO(3)^0$ قرار می گیرد. نشان می دهیم $\{J_X^0, J_Y^0\}$ و $\{J_p^0, J_q^0\}$ هم ارزند اگر و فقط اگر $A \in O(2)$ وجود داشته باشد بطوریکه $x = \tilde{A}p$ و $y = \tilde{A}q$ که $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \det A & \\ & A \end{pmatrix}$ این شرط که مشابه قضیه ۹-۲-۳ است پارامتری سازی را معین می کند.

فصل چهارم

طبقه بندی ساختارهای ابرهرمیتی

۴-۱ مقدمه

پس از طبقه بندی ساختارهای ابرمختلط روی گروه‌های لی ۴ - بعدی در این فصل ابتدا مترهای هرمیتی و ابرهرمیتی را تعریف نموده و سپس ساختارهای ابرهرمیتی را بر روی گروه‌های لی ۴ - بعدی بررسی می‌کنیم.

۴-۱-۱ **تعریف:** فرض کنید M و N منیفلدهای دیفرانسیل پذیر باشند و $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت

دیفرانسیل پذیر باشد و $p \in M$ دلخواه باشد نگاشت پوش-فوروارد^{۲۱} $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ یک نگاشت

خطی دوگان را نتیجه می دهد:

$$(F_*)^* : T_p^* N \rightarrow T_{F(p)}^* M$$

که برگشت^{۲۲} وابسته به F نامیده می شود. و بصورت زیر تعریف می شود.

$$(F^* \omega)(X) = \omega(F_* X) \quad \text{for } \omega \in T_{F(p)}^* N, X \in T_p M$$

۴-۱-۲ **تعریف:** یک نگاشت دیفرانسیل پذیر $F : M \rightarrow N$ یک ایمرشن^{۲۳} نامیده می شود اگر F_* در

هر نقطه یک به یک باشد یا $\text{rank } F = \dim M$ که رتبه F در $p \in M$ رتبه نگاشت خطی $F_* : T_p M \rightarrow$

$T_{F(p)} N$ است که رتبه ماتریس مشتقات جزئی F در هر چارت دیفرانسیل پذیر است یا بعد $\text{Im } F_* \subset T_{F(p)} N$.

۴-۱-۳ **متر ریمانی:** یک متر ریمانی روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر M یک تناظر است که به هر

نقطه p از M یک ضرب داخلی روی فضای مماس $T_p M$ مربوط می کند که دیفرانسیل پذیری در مفهوم

زیر تغییر می کند. اگر $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ یک دستگاه مختصات حول p باشد با

$$X(x_1, \dots, x_n) = q \in X(u)$$

²¹ Push-Forward

²² pull back

²³ Immersion

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dX_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$$

که

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

که یک تابع دیفرانسیل پذیر روی u است.

مثال ۴-۱-۴: یک مثال تقریباً بدیهی $M = \mathbb{R}^n$ که $\frac{\partial}{\partial x_i}$ را با $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ ، یکی می گیریم

متر بصورت زیر تعریف می شود:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$\mathbb{R}^n$ فضای اقلیدسی از بعد n نامیده می شود.

تعریف ۵-۱-۴: فرض کنید M و N منیفلدهای ریمانی باشند یک دیفئومورفیسم $f: M \rightarrow N$ (یعنی

f دو سویی و دیفرانسیل پذیر با معکوس دیفرانسیل پذیر است) ایزومتري نامیده می شود اگر

$$p \in m \ \& \ u, v \in T_p M \quad , \quad \langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f_p}$$

تعریف ۶-۱-۴: یک متر ریمانی روی گروه لی G ناوردای چپ است اگر:

$$x, y \in G \ \& \ u, v \in T_y G \quad , \quad \langle u, v \rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v \rangle_{L_x(y)}$$

یعنی L_x یک ایزومتري است. بطور مشابه می‌توانیم متر ریمانی ناوردای راست را تعریف کنیم یک متر ریمانی روی G که هم ناوردای چپ و هم ناوردای راست است – دو ناوردای^{۲۴} نامیده می‌شود.

۷-۱-۴ تعریف: یک الصاق آفین ∇ روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر M نگاشت:

$$\nabla: T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$$

است. که بصورت $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ نشان داده می‌شود. و در شرایط زیر صدق می‌کند:

- i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

که $X, Y, Z \in T(M)$ و $f, g \in D(M)$ که $D(M)$ حلقه توابع حقیقی مقدار C^∞ تعریف شده روی M است.

۸-۱-۴ تعریف: یک ضرب داخلی هرمیتی روی یک فضای برداری حقیقی V با یک ساختار مختلط J

یک ضرب داخلی h است بطوریکه:

$$h(JX, JY) = h(X, Y) \quad \text{for } X, Y \in V$$

که نتیجه می‌دهد $h(JX, X) = 0$ برای هر $X \in V$.

۹-۱-۴ تعریف: یک متر هرمیتی روی یک منیفلد تقریباً مختلط M یک متر ریمانی g است که ناوردای

ساختار تقریباً مختلط J است، یعنی برای هر میدان برداری X و Y : $g(JX, JY) = g(X, Y)$.

²⁴ bi-invariant

یک متر هرمیتی، یک ضرب داخلی هرمیتی روی هر فضای مماس $T_x M$ ، نسبت به ساختار مختلط تعریف شده با J تعریف می کند. یک منیفلد تقریباً مختلط (منیفلد مختلط) با یک متر هرمیتی منیفلد تقریباً هرمیتی (منیفلد هرمیتی) نامیده می شود.

۴-۱-۱۰ گزاره: هر منیفلد تقریباً مختلط یک متر هرمیتی می پذیرد با این شرط که پارافشرده^{۲۵} باشد.

اثبات: به مرجع [۱۱] جلد دوم مراجعه شود.

۴-۲ ساختارهای ابرهرمیتی

۴-۲-۱ تعریف: فرض می کنیم $(M, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2})$ یک منیفلد ابرمختلط همبند باشد یک متر $\langle , \rangle$ روی M ابرهرمیتی است اگر اندومورفیسم های $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ نسبت به $\langle , \rangle$ عمود باشند.

از لم ۲-۲-۸ نتیجه می گیریم اگر $\dim M=4$ ، همه مترهای ابرهرمیتی (نسبت به یک ساختار ثابت) هم ارزند.

۴-۲-۲ تعریف: یک نگاشت دیفرانسیل پذیر $(M', \{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}) \rightarrow (M, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2})$ f بین منیفلد های ابرمختلط، ابرمختلط گفته می شود اگر دیفرانسیل آن df در رابطه، $df J_\alpha = J'_\alpha df$ for $\alpha = 1, 2$ صدق کند.

۴-۲-۳ یادآوری: توجه کنید برگشت یک متر ابرهرمیتی با یک ایمرشن ابرمختلط، ابرهرمیتی است.

²⁵ Para Compact

از این به بعد، G یک گروه لی حقیقی ۴- بعدی همبند ساده است که یک ساختار ابرمختلط ناوردا می- پذیرد.

۴-۲-۴ تعریف: یک متر ناوردا ی چپ روی G ، ابرهرمیتی ناورداست اگر نسبت به تعدادی hcs ناوردا روی G ابرهرمیتی باشد.

در این فصل مترهای ابرهرمیتی ناوردا روی G را بدست می آوریم. نشان می دهیم چنین مترهایی در حد یکرختی هم ارزند.

۵-۲-۴ گزاره: اگر $<, >$ و $<', >'$ مترهای ابرهرمیتی ناوردا روی G باشند یک عدد حقیقی $\lambda > 0$ وجود دارد بطوریکه $(G, \lambda <, >)$ با $(G, \lambda' <', >')$ ایزومتريک است.

اثبات:

فرض کنیم ساختارهای ابرمختلط ناوردا $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ روی G متناظر با $<, >$ و $<', >'$ وجود داشته باشد هر دو ساختار ابرمختلط ناوردا با اندومورفیسم هایی که روی جبر لی g از G القا می شوند تعیین می گردند.

این اندومورفیسم ها را با $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ نشان می دهیم و آنها hcs روی g هستند.

از نتایج فصل ۳ می دانیم یک hcs ، $\{J^0_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ روی g وجود دارد بطوریکه هر hcs دیگر هم ارزست با hcs که در فضای متناظر $SO(3)^0$ قرار می گیرد.

بدون اینکه کلیت مطلب را از دست دهیم فرض کنیم یکی از ساختارها برای مثال $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ ، $\{J^0_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ است. فرض کنیم:

$$\varphi \in \text{Aut}(g) \quad , \quad x \perp y \quad , \quad x, y \in S^2$$

بطوریکه $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ با $\{J_x^0, J_y^0\}$ از طریق φ هم‌ارز است. فرض کنیم $\tilde{\varphi}$ اتومورفیسمی از G القا شده با φ باشد و $<, >^{xy}$ یک متر ابرهرمیتی ناوردای چپ نسبت به $\{J_x^0, J_y^0\}$ باشد.

$$\tilde{\varphi} : (G, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}) \rightarrow (G, \{J_x^0, J_y^0\})$$

ابرمختلط است بنابراین $<, >^{xy} \tilde{\varphi}^*$ نسبت به $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ ابرهرمیتی است. و بنابراین یک تابع دیفرانسیل‌پذیر مثبت ρ روی G وجود دارد بطوریکه $<, >^{xy} \tilde{\varphi}^* = \rho <, >$ چون $\tilde{\varphi}$ یک اتومورفیسم است برگشت $<, >^{xy} \tilde{\varphi}^*$ ناوردای چپ است بنابراین ρ روی G باید ثابت باشد.

بنا به فرض $<, >'$ نسبت به $\{J_\alpha^0\}_{\alpha=1,2}$ ابرهرمیتی است بنابراین J_Z^0 ، $<, >'$ متعامد است برای همه $Z \in S^2$.

بنابراین $<, >'$ و $<, >^{xy}$ مترهای ابرهرمیتی ناورداری چپ نسبت به ساختار یکسان هستند عدد حقیقی مثبت β وجود دارد بطوریکه $<, >^{xy} = \beta <, >'$ و گزاره با فرض کردن $\lambda = \rho\beta$ و $\tilde{\varphi}$ نتیجه می‌شود.

۴-۲-۶ گزاره: یک منیفلد همگن همبند از انحناء غیر مثبت به عنوان یک گروه لی حل‌پذیر همبند با متر ناوردای چپ نشان داده می‌شود.

اثبات: به مرجع [۷] مراجعه شود.

۴-۲-۷ لم: فرض کنیم G یک گروه لی همبند ساده با یک متر ناوردای چپ و جبر لی $g = t + \mathfrak{k}$ مجموع مستقیم متعامد از یک ایده‌ال t و یک زیر جبر $\mathfrak{k}$ از g باشد بطوریکه $\text{ad}_{X|_t}$ پاد متقارن برای همه $X \in \mathfrak{k}$ است. اگر T و K زیر جبرهای لی همبند G با جبرهای لی t و $\mathfrak{k}$ و مترهای ناوردای چپ القا شده توسط

متر G باشند بنابراین G با ضرب ریمانی $T \times K$ ، ضرب نیم مستقیم T و K (عمل K روی T بصورت $\sigma_K(t) = kTk^{-1}$ داده می‌شود) ایزومورفیک است. (ایزومورفیک به عنوان گروه لی)

اثبات: به مرجع [۵] مراجعه شود.

۴-۲-۸ یادآوری: یک منیفلد همگن همبند از انحنا منفی همبند ساده است و بنابراین دیفئومورفسم با یک فضای اقلیدسی ساده است.

در مرحله بعد، مترهای ابرهرمیتی ناوردا را بدست می‌آوریم نتیجه می‌گیریم $\mathfrak{h}$ متر متفاوت در حد یکریختی وجود دارد.

۴-۲-۹ قضیه: اگر $\langle , \rangle$ یک متر ابرهرمیتی ناوردا روی G باشد عدد حقیقی مثبت λ وجود دارد بطوریکه $(G, \langle , \rangle_\lambda)$ با یکی از فضا های ریمانی زیر ایزومتريک است.

(i) R^4 با متر اقلیدسی

(ii) ضرب ریمانی $R \times H^3$ با مترهای متعارف

(iii) ضرب ریمانی $R \times RH^3$ که RH^3 متر متقارن از انحنا برشی منفی دارد.

(iv) RH^4 با متر متقارن

(v) R^4 با یک متر غیر متقارن همگن از انحنا برشی منفی، بعلاوه $\langle , \rangle$ ، G را در حد یک

ایزومورفيسم تعیین می‌کند.

اثبات: اگر g ، جبر لی G باشد با نتایج فصل (۳) حالت های زیر را برای g داریم.

(i) g آبلای است

$$g \cong R \oplus SO(3) \quad (ii)$$

$$g \cong \text{aff}(C) \quad (iii)$$

(iv) g جبر لی حل‌پذیر متناظر با RH^4 است یا

(v) g جبر لی حل‌پذیر متناظر با CH^2 است.

اگر (i) برقرار باشد G ایزومورفیک با $(R^4, +)$ است. با گزاره ۴-۲-۵ فرض کنیم $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ بصورت زیر داده شده است:

$$J_1 Z = X \quad J_1 Y = W \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 Z = Y \quad J_2 W = X \quad J_2^2 = -I$$

در پایه $\{X, Y, Z, W\}$ از $R^4 = T_0 g$ ، که $\langle, \rangle$ با انتقال چپ ضرب داخلی بدست آمده بطوریکه این پایه متعامد یک‌ه است. بنابراین $\langle, \rangle$ متر متعارف روی R^4 است.

اگر (ii) برقرار باشد G با $R \times S^3$ ایزومورفیک است. با گزاره ۴-۲-۵ فرض کنیم $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ بصورت زیر است:

$$J_1 Z = X \quad J_1 Y = W \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 Z = Y \quad J_2 W = X \quad J_2^2 = -I$$

که $\{X, Y, Z, W\}$ همانند قضیه ۳-۱-۹ است. و $\langle, \rangle$ با انتقال چپ ضرب داخلی بدست آمده بطوریکه این پایه متعامد یک‌ه است. زیر گروه های لی G متناظر با R, Z و $\text{span}\{X, Y, Z, W\}$ ، R و S^3 هستند.

از لم ۴-۲-۷ نتیجه می‌گیریم $(G, \langle, \rangle)$ با ضرب ریمانی $R \times S^3$ با متر القا شده با $\langle, \rangle$ روی هر عامل، ایزومتريک است. توجه کنید که $\langle, \rangle$ روی S^3 متر متعارف با انحنا برشی ثابت ۱ القا می‌کند.

اگر (iii) برقرار باشد g یک پایه $\{X, Y, Z, W\}$ همانند قضیه ۳-۲-۹ می‌پذیرد با گزاره ۴-۲-۵ فرض می‌کنیم $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$J_1 X = -W \quad J_1 Y = Z \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 X = Y \quad J_2 Z = -W \quad J_2^2 = -I$$

و $\langle, \rangle$ با انتقال چپ ضرب داخلی نسبت به پایه بالا بدست آمده ، متعامد یکه است.

فرض کنیم T و K زیر گروه‌های لی از G با جبرهای لی $\text{span}\{X, Y, Z\}$ و RW باشند.

توجه کنید $\text{ad}_W|_{\text{span}\{X, Y, Z\}}$ متقارن چپ است. و مجدداً با لم ۴-۲-۷ بدست می‌آوریم $(G, \langle, \rangle)$ با ضرب ریمانی $T \times K$ با متر القا شده توسط $\langle, \rangle$ روی هر عامل ، ایزومتريک است.

T و K هر دو باید همبند ساده باشند بنابراین T گروه لی حل‌پذیر همبند ساده متناظر با RH^3 است و $K=R$ توجه کنید که $\langle, \rangle$ روی T متر ناوردای چپ القا می‌کند که T را با RH^3 ایزومتريک می‌سازد.

اگر (iv) برقرار باشد g یک پایه $\{A, X, Y, Z\}$ همانند قسمت (a) از قضیه ۳-۲-۱۶ می‌پذیرد. با گزاره ۴-۲-۵، فرض کنیم که $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ بصورت زیر داده شده باشد:

$$J_1 A = X \quad J_1 Y = Z \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 A = Y \quad J_2 Z = X \quad J_2^2 = -I$$

و $\langle, \rangle$ متر ناوردای چپ القا شده توسط ضرب داخلی نسبت به پایه بالا متعامد یکه است.

$(G, \langle, \rangle)$ با فضای متقارن RH^4 ایزومتريک است. و در نهایت اگر (v) برقرار باشد g یک پایه $\{A, X, Z, Y\}$ همانند قسمت (b) قضیه ۳-۲-۱۶ می‌پذیرد.

با گزاره ۴-۲-۵ فرض کنیم $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ مانند زیر است:

$$J_1 A = X \quad J_1 Y = Z \quad J_1^2 = -I$$

$$J_2 A = \frac{\sqrt{2}}{2} Z \quad J_2 X = \frac{\sqrt{2}}{2} Y \quad J_2^2 = -I$$

و $\langle , \rangle$ متر ناوردای چپ القا شده توسط ضرب داخلی با پایه متعامد یکه $\{A, X, \frac{\sqrt{2}}{2}Z, \frac{\sqrt{2}}{2}Y\}$ است. G با گروه لی حل پذیر متناظر با فضای هیپربولیک مختلط CH^2 ایزومورفیک است. بنابراین ساختار منیفلد پایه روی G ، ساختار اقلیدسی روی R^4 است.

متر $\langle , \rangle$ متقارن نیست (با گزاره ۳-۲-۱۵)، و با محاسبه مستقیم بدست می آوریم انحنا برشی منفی دارد. آخرین حکم قضیه بر این اساس نتیجه می شود که مترهای ابرهرمیتی ناوردا روی گروه های لی غیر ایزومورفیک فضا های ریمانی غیر همسان (غیر یکرخت) بوجود می آورند.

فصل پنجم

متر کیلر و نتایج آن

۵-۱ مقدمه

در این فصل متر کیلر را تعریف نموده و سپس با تعریف متر برگمن با ارا ئه لم و قضایای نتایج حاصله را بیان می کنیم.

۵-۱-۱ تعریف: ۲- فرم اساسی ϕ از یک منیفلد تقریباً هرمیتی M با ساختار تقریباً مختلط J و متر g بصورت مقابل تعریف می شود: برای همه میدان های برداری X و Y ، $\phi(X, Y) = g(X, JY)$ ، چون g با J ناورداست پس ϕ نیز چنین است یعنی $\phi(JX, JY) = \phi(X, Y)$ برای همه میدان های برداری X و Y .

۵-۱-۲ تعریف: یک متر هرمیتی روی یک منیفلد تقریباً مختلط متر کیلر^{۲۶} نامیده می شود. اگر ۲- فرم اساسی آن بسته باشد.

یک منیفلد تقریباً مختلط (منیفلد مختلط) با یک متر کیلر منیفلد تقریباً کیلر (منیفلد کیلر) نامیده می شود.

۵-۱-۳ مثال: فضای n -بعدی مختلط C^n با متر

$$dS^2 = \sum_{\alpha=1}^n dZ^\alpha dZ^{-\alpha}$$

(که Z^1 و $\dots$ و Z^n دستگاه مختصات طبیعی است) یک منیفلد کاهلر تخت کامل است.

۵-۱-۴ مثال: فرض کنیم C^n یک فضای برداری و $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$ پایه C^n روی میدان اعداد حقیقی

باشد و D زیر گروهی از C^n تولید شده با :

²⁶ Kahler Metric

$$\tau_1, \dots, \tau_{2n} : D = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} m_i \tau_i \quad ; \quad m_i \text{ عدد صحیح است} \right\}$$

عمل D روی C^n بطور کامل ناپیوسته و منیفلد خارج قسمتی $\frac{C^n}{D}$ چنبره مختلط n بعدی نامیده می شود.

چون D گروهی گسسته است در مثال بالا یک متر کیلر روی $\frac{C^n}{D}$ القا می کند. چنبره های مختلط تنها منیفلدهای توازی پذیر مختلط فشرده هستند که متر کیلر می پذیرند.

۵-۱-۵ تعریف: یک زیر مجموعه $S \subset M$ کراندار است اگر عدد مثبت R وجود داشته باشد بطوریکه :

$$d(x, y) \leq R \quad \text{برای همه } x, y \in S$$

۵-۱-۶ تعریف: یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با یک عمل دیفرانسیل پذیر متعدی توسط یک گروه لی G

، اگر مشخص کردن گروه مهم نباشد یک فضای همگن یا یک منیفلد همگن نامیده می شود.

۵-۱-۷ تعریف: یک دامنه کراندار همگن ، تحویل ناپذیر است اگر با یک ضرب مستقیم از دو دامنه

کراندار از بعد پایین تر ایزومورفیک (بصورت هولومورفیک) نباشد.

۵-۱-۸ قضیه: هر دامنه کراندار همگن D با یک ضرب مستقیم از دامنه های تحویل ناپذیر ایزومورفیک

است. تجزیه در حد یک ترتیب یکتاست.

اثبات: به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

۵-۱-۹ قضیه: یک منیفلد کیلر همگن همبند از انحنا منفی با فضای هیپربولیک مختلط ایزومورفیک

است.

اثبات: به مرجع [۷] مراجعه شود.

۱۰-۱-۵ **تعریف:** فرض کنید $G \subset \mathbb{C}^n$ یک دامنه باشد و dV اندازه حجم اقلیدسی روی G و

$$A^2(G) = \left\{ f \text{ holomorphic in } G \mid \int_G |f(z)|^2 dV(z) < \infty \right\}$$

$A^2(G)$ فضای برگمن^{۲۷} نامیده می‌شود.

۱۱-۱-۵ **تعریف:** یک فضای هیلبرت^{۲۸} یک فضای ضرب داخلی است که تحت متر القا شده کامل است.

۱۲-۱-۵ **قضیه نمایش Riesz:** برای هر تابع خطی پیوسته f روی فضای هیلبرت H یک $u \in H$ یکتا وجود دارد بطوریکه:

$$f(x) = \langle x, u \rangle \text{ for all } x \in H$$

$\langle x, u \rangle$ ضرب داخلی بین x و u است.

۱۳-۱-۵ **تعریف:** فرض کنیم $G \subset \mathbb{C}^n$ یک دامنه کراندار باشد و $A^2(G)$ فضای برگمن برای یک $z \in G$ ثابت، تابع $f \rightarrow f(z)$ تابع خطی کراندار است با قضیه نمایش Riesz $A^2(G)$ به عنوان یک فضای هیلبرت است) یک عنصر $A^2(G)$ که $K_z \in A^2(G)$ می‌نامیم، وجود دارد. و داریم: $f(z) = \langle f, K_z \rangle$

تابع $K(z, w) = \overline{K_z(w)}$ کرنل برگمن نامیده می‌شود.

²⁷ Bergman

²⁸ Hilbert

۱۴-۱-۵ **تعریف:** فرض کنیم $G \subset \mathbb{C}^n$ یک دامنه باشد و $K(z, w)$ کرنل برگمن روی G باشد یک

متر هرمیتی روی کلاف مماس $T_z \mathbb{C}^n$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log(z, z) \quad \text{برای } z \in G$$

طول بردار مماس $\xi \in T_z \mathbb{C}^n$ بصورت زیر داده شده

$$|\xi|_{B,z} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(z) \xi_i \bar{\xi}_j}$$

این متر، متر برگمن روی G نامیده می‌شود.

۱۵-۱-۵ **تعریف:** یک منیفلد ریمانی، یکنواخت همدیس است اگر هر نقطه یک همسایگی داشته باشد

که با یک تبدیل همدیس به یک فضای یکنواخت نگاشته شود.

۱۶-۱-۵ **تعریف:** یک ناحیه G هم ارز با یک مجموعه S هم ارز همدیس است اگر یک تابع دوسویی

تحلیلی از G به S وجود داشته باشد.

۱۷-۱-۵ **تعریف:** یک منیفلد ریمانی تخت است اگر انحنا آن همیشه صفر باشد.

۱۸-۱-۵ **یادآوری:** یک منیفلد همگن همبند از انحنا منفی همبند ساده است بنابراین با یک فضای

اقلیدسی دیفئومورفیسم است.

۱۹-۱-۵ **یادآوری:** یک دامنه کراندار همگن با متر برگمن انحنا منفی دارد اگر و فقط اگر متقارن

باشد.

۵-۱-۲۰ **یادآوری:** یک منیفلد همگن همبند M با انحنای غیر مثبت یک گروه حل پذیر متعدی از ایزومتري های می پذیرد.

۵-۱-۲۱ **یادآوری:** یک منیفلد همگن همبند از انحنای منفی، همبند ساده است و هم ارز با یک جبر لی حل پذیر با یک ضرب داخلی است.

۵-۱-۲۲ **قضیه:** اگر یک فضای ریمانی همبند کامل یک تبدیل یکرخت غیر ایزومورفیک بپذیرد این فضا با فضای اقلیدسی ایزومورفیک است.
اثبات: به مرجع [۱۴] مراجعه شود.

۵-۱-۲۳ **یادآوری:** چون متر ابر کیلر ناوردای چپ، تخت است با قضیه ۴-۲-۹ نتیجه می گیریم به جز متر اقلیدسی، متر های ابرهرمیتی ناوردا در بعد ۴، ابر کیلر نیستند.

جبر حل پذیر S متناظر با فضای هیپربولیک مختلط CH^2 (قضیه ۳-۲-۱۶ را ببینید) یک ساختار مختلط متعارف J را دارد که بصورت $J^2 = -I$ و $JZ = Y$ و $JA = X$ است. متر متقارن روی CH^2 نسبت به J ، کیلری است. به آسانی نشان می دهیم که این متر هرمیتی است غیر کیلر نسبت به ساختار مختلط J_1 در (۷) از قضیه ۴-۲-۹ (معادله ۴-۱) است. بعلاوه می توانیم ثابت کنیم که J_1 کیلری نیست. یعنی متر ناوردای چپ که نسبت به J_1 کیلر باشد وجود ندارد. بویژه J_1 با J توسط یک اتومورفیسم از S هم ارز نیست.

CH^2 را با گوی باز یکه

$$D_2(C) = \{ (Z_1, Z_2) \in C^2 : Z_1 \overline{Z_1} + Z_2 \overline{Z_2} < 1 \}$$

یکی می گیریم.

متر متقارن روی CH^2 متناظر با متر برگمن روی $D_2(C)$ است و ساختار مختلط J متناظر با ساختار متعارف (جانشین شده از C^2) روی $D_2(C)$ است.

ساختار مختلط J_1 از طریق یکسان سازی بالا می‌تواند به $D_2(C)$ انتقال داده شود. بنابراین متر برگمن، هرمیتی است. و نسبت به J_1 غیر کیلر است. $D_2(C)$ با متر برگمن تنها دامنه کراندار همگن تحویل ناپذیر در C^2 در حد ایزومترهای هلومورفیک است.

۵-۲ نتیجه گیری

۵-۲-۱ نتیجه: هر دامنه کراندار همگن تحویل ناپذیر D در C^2 یک ساختار مختلط J_1 می‌پذیرد (ناوردا توسط گروه حل‌پذیر ایزومترها) که (با یک ایزومتري هلومورفیک) با ساختار مختلط متعارف روی D هم‌ارز نیست بطوریکه متر برگمن هرمیتی است و نسبت به J_1 غیر کیلری است.

از نتایج هندسی بدست آمده در این فصل می‌توانیم نتیجه بگیریم منیفلدهای ۴-بعدی ابر مختلط همبند ساده که از گروه‌های لی غیر ایزومورفیک بوجود می‌آیند حتی بوسیله یک دیفئومورفیسم ابر مختلط، هم‌ارز نیستند.

همه گروه‌های لی همبند ساده ۴-بعدی، که ساختارهای ابرمختلط ناوردا می‌پذیرند به غیر از $R \times S^3$ ، با R^4 دیفئومورفیک هستند.

یعنی $R \times S^3$ با hcs ناوردا (یکتا) با سایر گروه‌های لی با hcs ناوردا، توسط یک دیفئومورفیسم ابرمختلط، هم‌ارز نیست. R^4 با hcs ناوردا (یکتا) با گروه لی حل‌پذیر همبند ساده S ، متناظر با فضای هیپربولیک مختلط CH^2 با hcs ناوردا، هم‌ارز نیست.

اگر آنها هم‌ارز باشند پس دیفئومورفیسم ابرمختلط یک هم‌ارزی همدیس بین مترهای ابرهرمیتی می‌دهد. که با قضیه ۴-۲-۹ با (i) و (v) یکرخت هستند. بنابراین یکنواخت همدیس بودن (v) یک تناقض است.

با بحث یکسان، نشان می‌دهیم S به عنوان یک منیفلد ابرمختلط با $R \times RH^3$ یا RH^4 هم‌ارز نیست.

در پایان بدست می‌آوریم R^4 و RH^4 و $R \times RH^3$ متعلق به کلاس‌های هم‌ارزی همدیس متفاوت اند و بنابراین گروه‌های متناظر با hcs ناوردا توسط یک دیفئومورفیسم ابرمختلط، هم‌ارز نیستند.

۲-۲-۵ نتیجه: فرض می‌کنیم G و G' گروه‌های لی ۴-بعدی همبند ساده با ساختارهای ابرمختلط

ناوردا $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ و $\{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ باشند اگر یک دیفئومورفیسم ابرمختلط

$$f : (G, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2}) \rightarrow (G', \{J'_\alpha\}_{\alpha=1,2})$$

وجود داشته باشد پس G و G' به عنوان گروه‌های لی ایزومورفیسم اند.

پیوست A

مراجع

مراجع

- [1] A.Baker, Matrix groups an introduction to lie group theory, springer, 2002
- [2] M.L.Barberis, Hypercomplex structures on four-dimension lie groups, Proc .Amer .Math .Soc . 125, (4), (1997), 1043-1054.
- [3] C. P. Boyer, A note on hyperhermitian four-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 102(1) (1988), 157-164. MR 89c:53049
- [4] M. P. Docarmo, Riemannian geometry, Rio de Janeiro, 1979
- [5] M. J. Druetta, Visibility and rank one in homogeneous spaces of $K < 0$, Transact. AmerMath.Soc.304(1)(1987),307-321.MR88i:53084
- [6] Karin Erdmann and Mark J. Wildon, Introduction to Lie Algebras, springer University of Oxford, January 2006
- [7] E. Heintze, On homogeneous manifolds of negative curvature, Math. Ann. 211 (1974), 23-34. MR 50:5695
- [8] TW. Hungerford, Algebra, springer, Washington, 1980
- [9] D. Joyce, Compact hypercomplex and quaternionic manifolds, J. Differential Geom. 35(1992), 743-761. MR 93g:53064

- [10] S. Kaneyuki & T. Tsuji, Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension, Nagoya Math. J. 53 (1974), 1-46. MR 50:5039
- [11] S. Kobayashi & K. Nomizu, Foundations of differential geometry, 2vols, Interscience, NewYork, 1963. MR 27:2945
- [12] J. M. Lee, Introduction to smooth manifold, springer, Washington, 2002
- [13] Peter W. Michor, Topics in Differential Geometry, October, 2007
- [14] T. Nagano, The conformal transformation on a space with parallel Ricci tensor, J. Math. Soc. Japan 11 (1) (1959), 10-14. MR 23:A1330
- [15] D. Snow, Invariant complex structures on reductive Lie groups, J. Reine Angew. Math. 371(1986), 191-215. MR 87k:32058
- [16] J. E. Snow, Invariant complex structures on four-dimensional solvable real Lie groups, Manuscripta Math. 66 (1990), 397-412. MR 91c:32026
- [17] Ph. Spindel, A. Sevrin, W. Troost, & A. Van Proeyen, Extended super-symmetric a-models on group manifolds, Nuclear Phys. B 308 (1988), 662-698. MR 89m:53138
- [18] V. S.Varadarajan, Lie groups, lie algebras, and their representations, springer-verlag New York Berlin Heidel berg Tokyo, 1984

پیوست B

واژه نامه

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Act.....	عمل
Affine space	فضای آفین
Almost complex manifold	منیفلد تقریباً مختلط
Analytic	تحلیلی
Bundle	کلاف
Center.....	مرکز
complex structure	ساختار مختلط
Connection	الصاق
Covariant	هموردا
Curvatur.....	انحناء
Cycl permutation	جایگشت دوری
Decompositio	تجزیه
Derived	مشتق شده
Endomorphism	درون ریختی، اندومورفیسم
Free	آزاد

Holomorphic	هولومورف، تحلیلی
Homogeneous	همگن
Hypercomplex	ابرمختلط
Hyperhermitian	ابرهرمیتی
Ideal	ایده آل
Invariant	ناوردا
Irreducible	تحویل ناپذیر
Isometry	یکریختی
Left translation	انتقال چپ
Lie algebra	جبرلی
Lie bracket.....	براکت لی
Lie group	گروه لی
Module	مدول
Push forward	پوش فوروارد
Radical	رادیکال
Representation	نمایش
Riemannian metric	مترریمانی
Section	برش
Semidirect	نیم مستقیم
Solvable	حل پذیر

Tangent bundle کلاف مماس

Tensor field میدان تانسوری

Transformation تبدیل

Transitive متعدی

Vector bundle کلاف برداری

Vector field میدان برداری

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to classify invariant hypercomplex structures on a 4-dimensional real Lie group G . It is shown that the 4-dimensional simply connected Lie groups which admit invariant hypercomplex structures are the additive group H of the quaternions, the multiplicative group H^* of nonzero quaternions, the solvable Lie groups acting simply transitively on the real and complex hyperbolic spaces, RH^4 and CH^2 , respectively, and the semidirect product $C \rtimes C$. We show that the spaces CH^2 and $C \rtimes C$ possess an RP^2 of (inequivalent) invariant hypercomplex structures while the remaining groups have only one, up to equivalence. Finally, the corresponding hyperhermitian 4-manifolds are determined

Key words : Hypercomplex structure (hcs), hyperhermitian metric.



Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematic

HYPERCOMPLEX STRUCTURES ON FOUR DIMENSIONAL LIE GROUPS

Fatemeh Gholami

Supervisors:

Dr. Ahmad Zireh

Dr. HamidReza Salimi Moghaddam