بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بهترین تقریب، ابرصفحه‌ها و گوی‌های یکه

نگارنده: محسن کرم‌اللهی

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

شهریور۱۳۹۶

تقدیم به تمامی مادرها

سپاس‌گزاری

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آن‌ها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم.
به مصداق ((من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق)) بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش که با کرامتی چون خورشید سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم.
همچنین لازم می‌دانم از جناب آقایان دکتر احمد معتمد نژاد و دکتر علیرضا خدّامی که داوری پایان نامه من را بر عهده داشتند، نهایت تشکر و قدر دانی را به عمل بیاورم.

محسن کرم‌اللهی
شهریور۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **محسن کرم‌اللهی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بهترین تقریب، ابرصفحه‌ها و گوی‌های یکه** ، تحت راهنمایی **مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ’’ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محسن کرم‌اللهی
شهریور۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یکی از مباحث اصلی علم بهترین تقریب، بررسی پروکسیمینال بودن زیر مجموعه‌های یک فضای مشخص است. از آن جایی که در برخی مجموعه‌ها بررسی این موضوع امری دشوار است، سعی می‌کنیم دامنه‌ی بررسی خود را کوچکتر کنیم تا روند کار ساده تر شود. در واقع در این تحقیق به جای این که پروکسیمینال بودن کل مجموعه را بررسی کنیم، بر روی گوی‌های یکه‌ی مجموعه‌ی مورد نظر تمرکز می‌کنیم. همچنین یکی از مطالب جدید علم بهترین تقریب، فضاهای پروکسیمینال قوی است که به معرفی آن می‌پردازیم و ارتباط این فضاها را با ابرصفحه‌ها و موضوع بهترین تقریب همزمان بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: ابرصفحه، بهترین تقریب، بهترین تقریب همزمان، پروکسیمینال، پروکسیمینال قوی، گوی پروکسیمینال و گوی پروکسیمینال قوی.

فهرست مطالب

فصل ۱

کلیات و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز و همچنین برخی از قضایایی که در فصل های بعد به کار می‌روند، می‌پردازیم. تعاریف به منظور معرفی علائم و اصطلاحات و صورت قضایا برای رفع نیاز از مراجعه به منابع مختلف بیان می‌شوند. لازم به ذکر است که اثبات قضایای معروف اغلب به کتب مربوطه ارجاع داده می‌شوند.

۱.۱ مفاهیم آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ (فضای برداری). فرض کنیم $(\mathrm{E},+)$ گروه آبلی باشد. دراین‌صورت E را فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه نگاشت $\mathbb{F}\times\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{E}$ روی $(\alpha,x)\longrightarrow\alpha x$ دارای خواص زیر باشد:

۱. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{F},x\in\mathrm{E})$.

۲. $\alpha(x_۱+x_۲)=\alpha x_۱+\alpha x_۲$, $\qquad(\alpha\in\mathbb{F},x_۱,x_۲\in\mathrm{E})$.

۳. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, $\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{F},x\in\mathrm{E})$.

۴. $۱x=x$, $\qquad(x\in\mathrm{E})$.

تعریف ۲.۱.۱ (فضای نرمدار). فرض کنیم E فضای برداری روی میدان حقیقی یا مختلط

باشد و $\|\cdot\| : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع باشد، تابع $\|\cdot\|$ را نرم روی E می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in \mathrm{E}$ و هر اسکالر α دارای خواص زیر باشد:

۱. $\|x\| \geq ۰$.

۲. $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

۴. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این‌صورت $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم. این نرم متر d را روی فضای E به صورت زیر تعریف می‌کند؛

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \qquad d(x, y) = \|x - y\|.$$

که آن را متر تولید شده توسط نرم روی فضای برداری E می‌نامیم.
بنابراین هر فضای نرمدار یک فضای متری است.

مثال ۱.۱.۱.

۱ـ (فضای l_∞^n). فضای خطی $\mathbb{R}^n$ با نرم زیر را فضای l_∞^n می‌نامیم.

$$\|x\| = \max_{۱ \leq i \leq n} |x_i|.$$

۲ـ (فضای $l_۱^n$).
فضای خطی $\mathbb{R}^n$ با نرم زیر را فضای $l_۱^n$ می‌نامیم.

$$\|x\| = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|.$$

۳ـ (فضای اقلیدسی $l_۲^n$). فضای خطی $\mathbb{R}^n$ با نرم زیر را فضای اقلیدسی $l_۲^n$ می‌نامیم.

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲}.$$

۳ـ (فضای l^∞). فضای تمام دنباله‌های کراندار از اعداد حقیقی مانند $x = (x_i)_{i=۱}^{\infty}$ را با جمع برادری و ضرب اسکالر زیر در نظر می‌گیریم.

$$x + y = (x_۱ + y_۱, \ldots, x_n + y_n, \ldots), \qquad ax = (ax_۱, \ldots, ax_n, \ldots).$$

که در آن $x, y \in l^\infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ می‌باشند. این فضارا با نرم زیر فضای l^∞ می‌نامیم.

$$\|x\| = \sup_{۱ \leq i < \infty} |x_i|.$$

۵ـ (فضای $C([a,b])$). فضای تمام توابع پیوسته مانند $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ را روی بازه‌ی بسته $[a,b]$، به همراه جمع و ضرب زیر درنظر می‌گیریم.

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\alpha x)(t) = \alpha x(t).$$

این فضارا به همراه نرم زیر، با $C([a,b])$ نمایش می‌دهیم.

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

تعریف ۳.۱.۱ (دنباله کوشی)**.** فرض کنیم X فضایی نرمدار باشد. دراین‌صورت دنباله‌ی $\{x_n\} \subseteq X$ را دنباله کوشی [۱] می‌نامیم، اگر برای هر $\epsilon > ۰$ عدد $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری‌که برای تمام $m, n \geq N$،

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

تعریف ۴.۱.۱ (فضای باناخ)**.** فضای نرمدار $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ را فضای باناخ [۲] گوییم، هرگاه تحت متر تعریف شده توسط نرم، فضایی کامل باشد. یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۵.۱.۱ (گوی یکه)**.** فرض کنیم X فضای باناخ باشد دراین‌صورت گوی یکه‌ی بسته‌ی فضای X را با B_{X} و کره‌ی یکه‌ی بسته‌ی فضای X را با S_{X} نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_{\mathrm{X}} = \{x \in \mathrm{X} : \|x\| \leq ۱\}, \qquad S_{\mathrm{X}} = \{x \in \mathrm{X} \colon \|x\| = ۱\}.$$

همچنین برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $r > ۰$ قرار می‌دهیم:

$$B[x,r] = \{y \in \mathrm{X} \colon \|x-y\| \leq r\}, \qquad B(x,r) = \{y \in \mathrm{X} \colon \|x-y\| < r\}.$$

تعریف ۶.۱.۱. اگر X و Y فضای باناخ باشند، آنگاه نگاشت $F \colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ را خطی نامیم اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in \mathrm{X}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y).$$

همچنین نگاشت خطی F را کراندار گوییم اگر عدد ثابت c موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathrm{X}$:

$$\|F(x)\| \leq c\|x\|.$$

به ویژه اگر $\mathrm{Y} = \mathbb{R}$ یا $\mathrm{Y} = \mathbb{C}$، نگاشت F را تابعک خطی نامیم. که در آن منظور از $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط می‌باشد.

---
[۱] Cauchy sequence
[۲] Banach Space

تعریف ۷.۱.۱ (فضای دوگان). فرض کنیم X فضای باناخ باشد. مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی و کراندار روی فضای X را با X^* نمایش داده و فضای دوگان X می‌نامیم.
در [۵] نشان داده شده است که فضای دوگان، فضایی خطی و نرمدار است.

تعریف ۸.۱.۱. اگر X فضای باناخ و نگاشت $J\colon X \to X^{**}$ با ضابطه‌ی $J(x)(f) = f(x)$ پوشا باشد، فضای X را فضای باناخ انعکاسی [۳] می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ (مجموعه محدب). زیر مجموعه‌ی K از فضای برداری X را محدب [۴] گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in K$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم:

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in K.$$

مثال ۲.۱.۱. ۱. مجموعه‌های $\emptyset$، X و $\{۰\}$ محدب هستند.

۲. مقطع هر گردایه از مجموعه‌های محدب، محدب است.

۳. گوی بسته به مرکز x و شعاع r که در زیر تعریف شده است محدب است.

$$B[x, r] = \{y \in X\colon \|x - y\| \leq r\}.$$

۴. گوی باز به مرکز x و شعاع r که در زیر تعریف شده است، محدب است.

$$B(x, r) = \{y \in X\colon \|x - y\| < r\}.$$

۵. اگر مجموعه‌های A, B محدب باشند آنگاه مجموعه

$$A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\}$$

محدب است.

تعریف ۱۰.۱.۱ (پوسته‌ی محدب). فرض کنیم $K \subset X$ باشد. مقطع تمام مجموعه‌های محدب شامل K را با $co(K)$ نمایش می‌دهیم و آن را پوسته‌ی محدب K [۵] می‌نامیم.

لم ۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضای باناخ باشند. همچنین فرض کنیم $x_۰ \in X$ باشد. برای نگاشت خطی $F\colon X \to Y$ گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. فرض کنیم $x_n \in X$ و $x_n \to x_۰$، دراین‌صورت $F(x_n) \to F(x_۰)$.

۲. برای هر $\epsilon > ۰$ وجود دارد $\delta = \delta(\epsilon, x_۰) > ۰$ به طوری‌که اگر $x \in X$ و $\|x - x_۰\| < \delta$ آنگاه $\|F(x) - F(x_۰)\| < \epsilon$.

---
[۳] Reflexive Banach Space
[۴] Convex
[۵] Convex Hull

برهان. به [۵] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. همچنین فرض کنیم $F\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ نگاشتی خطی و $x_\circ \in \mathrm{X}$ باشد دراین‌صورت

۱. نگاشت F را در $x_\circ$ پیوسته گوییم اگر گزاره‌های (۱) و (۲) از لم (۱.۱) برقرار باشند.

۲. F را روی فضای X پیوسته گوییم اگر در هر $x_\circ \in \mathrm{X}$ پیوسته باشد.

۳. F را روی X پیوسته‌ی یکنواخت گوییم اگر برای هر $\epsilon > \circ$، عدد $\delta = \delta(\epsilon) > \circ$ موجود باشد به طوری‌که اگر $x, y \in \mathrm{X}$ و $\|x - y\| < \delta$ باشد، رابطه‌ی زیر نتیجه شود:

$$\|F(x) - F(y)\| < \epsilon.$$

۴. گوییم F در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند اگر عدد ثابت $c \geq \circ$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x, y \in \mathrm{X}$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار و $F : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ نگاشتی خطی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. F کراندار است.

۲. F در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند.

۳. F به طور یکنواخت پیوسته است.

۴. F پیوسته است.

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند و $\mathrm{X} \neq \{\circ\}$. همچنین فرض کنیم $F\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ یک عملگر خطی کراندار باشد، دراین‌صورت برای هر $x \in \mathrm{X}$ داریم:

$$\|F(x)\| \leq \|F\|\|x\|.$$

که در آن

$$\|F\| = \sup_{x \neq \circ} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq ۱} \|F(x)\| = \sup_{\|x\| = ۱} \|F(x)\|.$$

برهان. به [۵] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱۲.۱.۱ (مجموعه‌های از هم جدا)**.** دو زیرمجموعه A, B از فضای باناخ X را از هم جدا نامیم، هرگاه

$$int(A) \cap B = int(B) \cap A = \emptyset.$$

قضیه ۳.۱.۱ (قضیه جداسازی فیشر)**.** فرض کنیم A, B دو زیر مجموعه محدب، ناتهی و از هم جدا از فضای باناخ X باشند. دراین‌صورت $f \in \mathrm{X}^* \setminus \{۰\}$ موجود است به طوری‌که

$$\sup f(A) \leq \inf f(B).$$

برهان. به [۱۸] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۳.۱.۱ (ابرصفحه)**.** فرض کنیم $f \in X^* \setminus \{۰\}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ باشد. دراین‌صورت به مجموعه

$$\mathrm{H}_\lambda = \{y \in X : f(y) = \lambda\}$$

یک ابرصفحه [۶] می‌گوییم که آن را با $\mathrm{H}_\lambda = \mathrm{H}_{f,\lambda}$ نمایش می‌دهیم.
همچنین فضای پوچ تابعک $f \in X^* \setminus \{۰\}$ را با $\ker f$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ker f := \mathrm{H}_{f,۰}.$$

ملاحظه ۱.۱.۱. فرض کنیم H_λ ابرصفحه و $y_۰ \in \mathrm{H}_\lambda$ دلخواه باشد، دراینصورت

$$y_۰ + \ker f = \mathrm{H}_\lambda$$

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنیم X فضایی باناخ، $x^* \in \mathrm{X}^* \setminus \{۰\}$، $c \in \mathbb{R}$، $M = \ker x^*$ و $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{x,c} = \{y \in \mathrm{X} \colon x^*(y) = c\}$ باشند. دراین‌صورت:

۱. برای هر $x_۱ \in \mathrm{X} \setminus M$ داریم $\mathrm{X} = M \oplus span\{x_۱\}$.

۲. برای هر $x_۰ \in \mathrm{H}$ داریم $\mathrm{H} = M + x_۰$.

۳. M زیرفضای ماکزیمال بسته در X است.

۴. H زیرمجموعه‌ای محدب بسته از فضای X است.

برهان. به [۵] مراجعه کنید. □

ملاحظه ۲.۱.۱. $\ker f$ بسته، محدب و زیرفضای برداری از X است.

[۶] Hypeplane

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم X فضای باناخ و $\mathrm{H}_{f,\lambda}$ یک ابرصفحه‌ی دلخواه در X باشد، دراینصورت مجموعه‌های

$$V_{f,\lambda}^{\geq}=\{y\in \mathrm{X}\colon f(y)\geq\lambda\},\qquad V_{f,\lambda}^{\leq}=\{y\in \mathrm{X}\colon f(y)\leq\lambda\},$$

را نیم فضاهای بسته‌ی مشخص شده توسط ابرصفحه‌ی $\mathrm{H}_{f,\lambda}$ گوییم. همچنین مجموعه‌های

$$U_{f,\lambda}^{>}=\{y\in \mathrm{X}\colon f(y)>\lambda\},\qquad U_{f,\lambda}^{<}=\{y\in \mathrm{X}\colon f(y)<\lambda\}$$

را نیم فضاهای باز مشخص شده توسط ابرصفحه‌ی $\mathrm{H}_{f,\lambda}$ گوییم.

ملاحظه ۳.۱.۱. هر ابرصفحه بسته و محدب است، اما لزوما زیرفضای برداری نیست.

تعریف ۱۵.۱.۱. گوییم تابعک $f\in \mathrm{X}^*$ نرم خود را اخذ می‌کند اگر عنصر $x\in \mathrm{X}$ طوری موجود باشد که $\|x\|=۱$ و $f(x)=\|f\|$.
حال مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های روی X که نرم خود را اخذ می‌کنند را با $NA(\mathrm{X})$ [۷] نمایش می‌دهیم و همچنین قرار می‌دهیم:

$$NA_۱(\mathrm{X})=NA(\mathrm{X})\cap S_{\mathrm{X}^*}.$$

حال اگر $f\in \mathrm{X}^*$ باشد، مجموعه‌ی $J_{\mathrm{X}}(f)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_{\mathrm{X}}(f)=\{x\in \mathrm{X}:\|x\|=۱, f(x)=\|f\|\}.$$

قضیه ۵.۱.۱ (قضیه جیمز [۸]). فرض کنیم X فضای باناخ غیر انعکاسی باشد. دراین‌صورت $f\in S_{\mathrm{X}^*}$ موجود است به طوری‌که f نرم خود را روی X اخذ نمی‌کند.

برهان. به [۱۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۶.۱.۱. فضای نرم‌دار X را محدب موضعی نامیم اگر هر همسایگی دلخواه از هر عنصر $x\in X$، شامل یک همسایگی محدب از x باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم X فضای محدب موضعی باشد. دراین‌صورت تابعک $f:X\to\mathbb{R}^*=[-\infty,+\infty]$ را:

الف) در $x_\circ\in X$ نیم پیوسته‌ی پایینی گوییم اگر برای هر $k\in\mathbb{R}$ که $k<f(x_\circ)$ همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x\in U$ داشته باشیم $k<f(x)$. یا به طور معادل اگر $f(x_\circ)\leq\lim\limits_{y\to x_\circ}\inf f(y)$، که

$$\lim_{y\to x_\circ}\inf f(y)=\sup_{U\in\mathcal{U}(x_\circ)}\inf_{y\in U}f(y).$$

دقت کنید که $\mathcal{U}(x_\circ)$ مجموعه‌ی همه‌ی همسایگی‌های $x_\circ$ می‌باشد.

[۷] Norm attaining
[۸] James theorem

چ) نیم پیوسته‌ی پایینی گوییم اگر در هر $x_{\circ} \in X$، نیم پیوسته‌ی پایینی باشد.

ج) در $x_{\circ}$ نیم پیوسته‌ی بالایی گوییم اگر $-f$ در $x_{\circ}$ نیم پیوسته‌ی پایینی باشد.

د) در $x_{\circ}$ پیوسته گوییم اگر در $x_{\circ}$ هم نیم پیوسته‌ی پایینی و هم نیم پیوسته‌ی بالایی باشد.

۲.۱ مفاهیم بهترین تقریب

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X فضایی باناخ، $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{X}$ و $x \in \mathrm{X}$ باشد. در این‌صورت فاصله x از مجموعه‌ی K را با $d(x, \mathrm{K})$ یا $dist(x, \mathrm{K})$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$d(x, \mathrm{K}) = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathrm{K}\}$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X فضایی باناخ، $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{X}$ و $x \in \mathrm{X}$ باشد. $y \in \mathrm{K}$ را بهترین تقریب x از K می‌نامیم اگر داشته باشیم

$$\|x - y\| = d(x, K).$$

همچنین مجموعه‌ی بهترین تقریب های x در K را با $\mathrm{P_K}(x)$ نمایش می‌دهیم. یعنی داریم:

$$\mathrm{P_K}(x) = \{y \in \mathrm{K} : \|y - x\| = d(x, \mathrm{K})\}.$$

$\mathrm{P_K} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{K}$ را نگاشت تقریب می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. زیر مجموعه‌ی K از X را پروکسیمینال گوییم، اگر برای هر $x \in \mathrm{X}$ مجموعه ی $\mathrm{P_K}(x)$ نا تهی باشد. همچنین K را چبیشف گوییم، اگر برای هر $x \in \mathrm{X}$ مجموعه‌ی $\mathrm{P_K}(x)$ دقیقا تک عضوی باشد.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم K زیر مجموعه‌ای محدب از فضای باناخ X باشد. در این‌صورت هر $x \in \mathrm{X}$ حداکثر یک بهترین تقریب در K دارد.
یا به طور معادل هر مجموعه‌ی محدب پروکسیمینال، چبیشف است.

برهان. به [۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۴.۲.۱. ۱. زیر مجموعه‌ی C از فضای باناخ X را مخروط محدب [۹] گوییم، اگر برای هر $x, y \in C$، و هر $\alpha, \beta \geq \circ$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in C$.

۲. زیر مجموعه‌ی ناتهی M از فضای باناخ X را زیرفضا گوییم، اگر برای هر $x, y \in M$، و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in M$.

دقت کنید که هر زیر فضا مخروط محدب هست ولی عکس آن برقرار نیست.

[۹] convex cone

مثال ۱.۲.۱. ۱. مجموعه‌های X و $\{0\}$ زیرفضا هستند.

۲. مقطع هر خانواده از مخروط‌های محدب(زیرفضاها)، یک مخروط محدب(زیرفضا) است.

۳. در فضای $C([a,b])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع نامنفی

$$C = \{f \in C([a,b]) \colon x(t) \geq 0 \,;\, t \in [a,b]\}$$

مخروط محدب است ولی زیرفضا نیست.

قضیه ۲.۲.۱.

الف) فرض کنیم K یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از فضای نرم‌دار X باشد. دراین‌صورت:

۱. برای هر $x, y \in X$ داریم $d(x+y, K+y) = d(x, K)$.

۲. برای هر $x, y \in X$ داریم $P_{K+y}(x+y) = P_K(x) + y$.

۳. برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $d(\alpha x, \alpha K) = |\alpha| d(x, K)$.

۴. برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $P_{\alpha K}(\alpha x) = \alpha P_K(x)$.

۵. K پروکسیمینال است اگر و تنها اگر برای هر $y \in \mathrm{X}$، $K+y$ پروکسیمینال باشد.

۶. K پروکسیمینال است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ مجموعه‌ی αK پروکسیمینال باشد.

ب) فرض کنیم M زیرفضایی ناتهی از X باشد، دراین‌صورت:

۱. برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $y \in M$ داریم $d(x+y, M) = d(x, M)$.

۲. برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $y \in M$ داریم $P_M(x+y) = P_M(x) + y$.

۳. برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $d(\alpha x, M) = |\alpha| d(x, M)$.

۴. برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $P_{\alpha M}(x) = \alpha P_M(x)$.

۵. برای هر $x, y \in \mathrm{X}$ داریم $d(x+y, M) \leq d(x, M) + d(y, M)$.

برهان. به [۵] مراجعه کنید. $\square$

۱.۲.۱ بهترین تقریب ابرصفحه‌ها

ابتدا در قضیه زیر فاصله یک عنصر دلخواه از فضای باناخ X را از ابرصفحه‌ی $\mathrm{H}_\lambda \subset \mathrm{X}$، به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنیم $f \in \mathrm{X}^* \setminus \{۰\}$ و $\mathrm{H}_\lambda = \mathrm{H}_{f,\lambda}$ ابرصفحه باشد. در این‌صورت برای هر $x \in \mathrm{X}$ داریم:

$$d(x, \mathrm{H}_\lambda) = \frac{|f(x) - \lambda|}{\|f\|}.$$

برهان. ابتدا مسئله را برای حالت $\lambda = ۰$ اثبات می‌کنیم. لذا داریم $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{f,۰}$، نشان می‌دهیم:

$$d(x, \mathrm{H}) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ ثابت باشد. می‌دانیم برای هر $y \in \mathrm{H}$، داریم $f(y) = ۰$. پس داریم:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - ۰|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x - y)|}{\|f\|}. \tag{۱.۱}$$

اما می‌دانیم که:

$$|f(x - y)| \leq \|f\| \|x - y\|.$$

حال با جایگذاری در رابطه‌ی (۱.۱) داریم:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x - y\|.$$

اما چون این رابطه برای هر $y \in \mathrm{H}$ برقرار است، لذا با اینفیمم گرفتن از طرفین داریم:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \inf_{y \in \mathrm{H}} \|x - y\| = d(x, \mathrm{H}).$$

حال ϵ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\|f\| > \epsilon > ۰$ و همچنین فرض کنیم که $z \in \mathrm{X}$ طوری باشد که $\|z\| = ۱$ و $f(z) > \|f\| - \epsilon$ (دقت شود با توجه به خاصیت سوپریمم این رابطه به دست می‌آید.). حال قرار می‌دهیم $y := x - f(x)[f(z)]^{-۱}z$. اولا y در H قرار دارد زیرا

$$f(y) = f(x - f(x)[f(z)]^{-۱}z) = f(x) - f(x)[f(z)]^{-۱}f(z) = ۰.$$

همچنین رابطه‌ی زیر برای y برقرار است:

$$\|x - y\| = \|x - x + f(x)[f(z)]^{-۱}z\| = \frac{|f(x)|}{|f(z)|}\|z\| = \frac{|f(x)|}{|f(z)|} \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \epsilon}.$$

از طرفی چون $y \in \mathrm{H}$ و $d(x, \mathrm{H}) \leq \|x - y\|$ لذا خواهیم داشت:

$$d(x, \mathrm{H}) \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \epsilon}.$$

حال چون ϵ دلخواه بود، لذا داریم:

$$d(x,\mathrm{H}) \leq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

بنابراین حکم در حالت $\lambda = \circ$ برقرار است.

حال فرض کنیم $\lambda \neq \circ$ و $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{f,\lambda}$. برای هر $x_\circ \in \mathrm{H}$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{H}_\circ = \mathrm{H} - x_\circ.$$

با توجه به نکته‌ی (۱.۲.۱)، می‌توان نوشت $\mathrm{H}_\circ = \mathrm{H}_{f,\circ}$. حال داریم:

$$\begin{aligned} d(x,\mathrm{H}) &= d(x - x_\circ, \mathrm{H} - x_\circ) = d(x - x_\circ, \mathrm{H}_\circ) \\ &= \frac{|f(x - x_\circ)|}{\|f\|} \\ &= \frac{|f(x) - \lambda|}{\|f\|}. \end{aligned}$$

بنابراین در حالت $\lambda \neq \circ$ هم حکم قضیه برقرار است. □

ملاحظه ۱.۲.۱. $\mathrm{H} = kerf$ پروکسیمینال است اگر و تنها اگر $f \in NA(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ چبیشف است اگر و تنها اگر $J_{\mathrm{X}}(f)$ تک عضوی باشد.

همچنین اگر H پروکسیمینال باشدآنگاه برای هر $x \in \mathrm{X}$ داریم:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{H}}(x) = x - \frac{f(x)}{\|f\|} J_{\mathrm{X}}(f).$$

برهان. به کتاب [۱] فصل سوم قضیه ۱۰ مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنیم X فضای باناخ، $x^* \in \mathrm{X}^* \setminus \{\circ\}$، $c \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{H} = \{y \in \mathrm{X} \colon x^*(y) = c\}$ باشند. دراین‌صورت عبارات زیر معادل هستند:

۱. H پروکسیمینال است.

۲. هر $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{H}$ دارای یک بهترین تقریب در H است.

۳. x^* نرم خود را اخذ می‌کند.

برهان. به [۵] مراجعه کنید. □

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $z \in C([a,b]) \setminus \{\circ\}$، $c \in \mathbb{R}$ و

$$\mathrm{H} = \{y \in C([a,b]) \colon \int_a^b y(t)z(t)\mathrm{d}t = c\}.$$

دراین‌صورت H ابرصفحه‌ای چبیشف در $C([a,b])$ است و برای هر $x \in C([a,b])$ داریم:

$$P_{\mathrm{H}}(x) = x - \|z\|^{-۲} \Big[\int_a^b x(t)z(t)\mathrm{d}t - c \Big] z.$$

جزئیات این مثال را می‌توان در [۵] مشاهده کرد.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنیم

$$\mathrm{X} = \{x \in l_۲ : x(n) = ۰ \quad \text{به غیر از تعداد متناهی } n\}$$

و

$$\mathrm{H} = \{y \in \mathrm{X} \colon \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n/۲} y(n) = ۰\}.$$

دراین‌صورت H ابرصفحه‌ای در X است و هیچ عنصری از $\mathrm{X} \setminus \mathrm{H}$ دارای بهترین تقریب در H نیست.

برای اثبات این مثال، تابعک x^* را روی X برای هر $y \in \mathrm{X}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^*(y) = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n/۲} y(n).$$

به وضوح x^* یک تابعک خطی روی X است. برای هر $y \in \mathrm{X}$ با شرط $\|y\| = ۱$، از نامساوی شوارتز(در $l_۲$) داریم:

$$|x^*(y)| \leq [\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n}]^{۱/۲} \|y\| = ۱. \tag{۲.۱}$$

بنابراین $x^* \in \mathrm{X}^*$، $\|x^*\| \leq ۱$ و $\mathrm{H} = \ker x^*$ یک ابرصفحه است. حال نشان می‌دهیم که $\|x^*\| = ۱$. برای هر عدد صحیح $N \geq ۱$، عنصر $y_N(n) = ۲^{-n/۲}$ را برای هر $n \leq N$ تعریف می‌کنیم و اگر $n > N$ باشد، $y_N(n) = ۰$. دراینصورت $y_N \in \mathrm{X}$، $\|y_N\| \leq ۱$ و

$$x^*(y_N) = \sum_{n=۱}^{N} ۲^{-n} = ۱ - ۲^{-N} \to ۱.$$

بنابراین $\|x^*\| = ۱$.

اگر x^* نرم خود را اخذ کند، لذا برای برخی yهای متعلق به X که $\|y\| = ۱$ داریم $x^*(y) = ۱$. بنابراین برای این yها حالت تساوی در رابطه‌ی (۲.۱) برقرار می‌شود. بنابر شرایط تساوی در نامساوی شوارتز، باید داشته باشیم $y = \lambda z$ که $\lambda > ۰$ و برای هر n، $z(n) = ۲^{-n/۲}$. اما $z \notin \mathrm{X}$ (زیرا برای هر n داریم $z(n) \neq ۰$)، لذا نتیجه می‌شود که $y = \lambda z \notin \mathrm{X}$. بنابراین x^* نرم خود را اخذ نمی‌کند. حال با استفاده از قضیه‌ی (۴.۲.۱) نتیجه می‌شود که هیچ عنصری از $\mathrm{X} \setminus \mathrm{H}$ دارای بهترین تقریب در H نیست.

فصل ۲

گوی پروکسیمینال‌ها و گوی پروکسیمینال‌های قوی

در این فصل به بررسی مفاهیم پایه‌ای گوی پروکسیمینال‌ها و گوی پروکسیمینال‌های قوی می‌پردازیم.

۱.۲ گوی پروکسیمینال

تعریف ۱.۱.۲. زیر فضای Y از فضای باناخ X را گوی پروکسیمینال [۱] در X گوییم اگر B_{Y} در X پروکسیمینال باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم اگر زیر فضای Y از فضای باناخ X گوی پروکسیمینال باشد آنگاه پروکسیمینال هم هست. در واقع با این کار برای بررسی پروکسیمینال بودن یک فضا،دامنه بررسی خود را به گوی یکه‌ی آن فضا محدود می‌کنیم.
ابتدا لم‌های زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم X فضای باناخ و Y زیر فضای آن باشد. همچنین فرض کنیم $x_\circ \in \mathrm{X} \backslash B_{\mathrm{Y}}$ باشد، دراین‌صورت:

---
[۱] Ball proximinal

الف) $d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}) = \sup\{f(x_\circ) - \|f|_{\mathrm{Y}}\| : f \in B_{\mathrm{X}^*}\}$

ب) اگر $f_\circ \in S_{\mathrm{X}^*}$ موجود باشد به طوری‌که $f_\circ$ روی X نرم خود را در نقطه‌ی $x_\circ - z_\circ$ و $f_\circ|_{\mathrm{Y}}$ نرم خود را در نقطه‌ی $z_\circ$ اخذ کند، دراین‌صورت $z_\circ \in \mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}(x_\circ)$.

برهان.

الف) برای $f \in B_{\mathrm{X}^*}$ و $y \in B_{\mathrm{Y}}$ داریم $f(x_\circ) - f(y) \leq \|x_\circ - y\|$. حال با اینفیمم گرفتن روی y داریم:

$$f(x_\circ) - \|f|_{\mathrm{Y}}\| \leq \inf \|x_\circ - y\| = d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}). \qquad (۱.۲)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که گوی باز $B(x_\circ, d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}))$ از B_{Y} جداست. بنابراین طبق قضیه‌ی جداسازی فیشر (۳.۱.۱) $f_\circ \in S_{\mathrm{X}^*}$ موجود است به طوری‌که:

$$\inf f_\circ(B(x_\circ, d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}))) \geq \sup f_\circ(B_{\mathrm{Y}}).$$

در نتیجه

$$f_\circ(x_\circ) - d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}) \geq \|f_\circ|_{\mathrm{Y}}\|$$

و لذا

$$f_\circ(x_\circ) - \|f_\circ|_{\mathrm{Y}}\| \geq d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}). \qquad (۲.۲)$$

پس بنابر روابط (۱.۲) و (۲.۲)، تساوی برقرار است.

ب) فرض کنیم $f_\circ$ روی X نرم خود را در نقطه‌ی $x_\circ - z_\circ$ اخذ می‌کند و همچنین $f_\circ|_{\mathrm{Y}}$ نرم خود را در $z_\circ$ اخذ می‌کند. بنابر قسمت الف) داریم:

$$d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}}) \geq f_\circ(x_\circ) - \|f_\circ|_{\mathrm{Y}}\| = f_\circ(x_\circ) - f_\circ(z_\circ) = f_\circ(x_\circ - z_\circ) = \|x_\circ - z_\circ\| \geq d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}})$$

لذا نتیجه می‌شود که $\|x_\circ - z_\circ\| = d(x_\circ, B_{\mathrm{Y}})$. بنابراین $z_\circ \in \mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}(x_\circ)$. □

حال برای هدف اصلی خود که اثبات پروکسیمینال بودن فضاهای گوی پروکسیمینال است، لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۲.۱.۲. فرض کنیم X فضای باناخ و Y زیر فضای آن باشد، دراینصورت:

۱ــ برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $\lambda > \circ$:

$$\lambda \mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}(\tfrac{x}{\lambda}) = \mathrm{P}_{\lambda B_{\mathrm{Y}}}(x).$$

۲ــ برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $\lambda \geq \|x\| + d(x, \mathrm{Y})$:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x) \subseteq \mathrm{P}_{\lambda B_{\mathrm{Y}}}(x).$$

۳ـ برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $\lambda > \|x\| + d(x, \mathrm{Y})$:

$$\mathrm{P_Y}(x) = \mathrm{P}_{\lambda B_\mathrm{Y}}(x).$$

۴ـ اگر $\mathrm{P}_{B_\mathrm{Y}}$ پیوسته باشد دراین‌صورت $\mathrm{P_Y}$ هم پیوسته است.

برهان.

۱ـ فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ و $\lambda > \circ$ باشد. همچنین فرض کنیم $y_\circ \in \mathrm{P}_{B_\mathrm{Y}}$ باشد، برای هر $y \in B_\mathrm{Y}$ داریم:

$$\|\frac{x}{\lambda} - y_\circ\| \leq \|\frac{x}{\lambda} - y\| \Longleftrightarrow \|x - \lambda y_\circ\| \leq \|x - \lambda y\|.$$

بنابراین $\lambda \mathrm{P}_{B_\mathrm{Y}}(\frac{x}{\lambda}) = \mathrm{P}_{\lambda B_\mathrm{Y}}(x)$.

۲ـ فرض کنیم که $\lambda \geq \|x\| + d(x, \mathrm{Y})$ باشد. برای هر $y \in \mathrm{P_Y}(x)$ داریم:

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + d(x, \mathrm{Y}) \leq \lambda.$$

بنابراین $\mathrm{P_Y}(x) \subseteq \mathrm{P}_{\lambda B_\mathrm{Y}}(x)$.

۳ـ فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ و $d = d(x, \mathrm{Y})$. فرض کنیم $\lambda > \|x\| + d$ و $y_\circ \in \mathrm{P}_{\lambda B_\mathrm{Y}}(x)$ باشد. به سادگی قابل بررسی است که برای هر $\delta > \circ$

$$d(x, \mathrm{Y}) = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathrm{Y} \cap B[x, d + \delta]\}.$$

به ویژه می‌توانیم قرار دهیم $\delta = \lambda - (\|x\| + d)$.
برای هر $y \in \mathrm{Y}$، اگر $y \in \mathrm{Y} \cap B[x, d + \delta]$ دراینصورت $y \in \lambda B_\mathrm{Y}$. بنابراین $\|x - y\| \geq \|x - y_\circ\|$ لذا نتیجه می‌شود که $y_\circ \in \mathrm{P_Y}(x)$، بنابراین $\mathrm{P}_{\lambda B_\mathrm{Y}}(x) \subseteq \mathrm{P_Y}(x)$. بنابر قسمت ۲ـ تساوی برقرار است.

۴ـ چون $\mathrm{P}_{B_\mathrm{Y}}$ پیوسته است اگر و تنها اگر $\mathrm{P}_{\lambda B_\mathrm{Y}}$ پیوسته باشد، لذا قسمت ۴ـ نتیجه می‌شود.
□

گزاره ۱.۱.۲. فرض کنیم X فضای باناخ و Y زیرفضای آن باشد، گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

۱) Y در X گوی پروکسیمینال است.

۲) B_Y در B_X پروکسیمینال است.

۳) Y در X پروکسیمینال است.

۴) B_Y در $\frac{1}{2}B_\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$ پروکسیمینال است.

دراینصورت $(۴) \Leftrightarrow (۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$.

برهان. $(۲) \Rightarrow (۱)$.
واضح است.
$(۳) \Rightarrow (۲)$.
فرض کنیم $x \in X$ و $\lambda > \|x\| + d(x, Y)$. بنابه (۲)، λB_Y در λB_X پروکسیمینال است. حال چون $x \in \lambda B_X$، لذا نتیجه می‌شود که $P_{\lambda B_Y}(x) \neq \emptyset$. حال بنابه قسمت (۳) لم (۲.۱.۲)، داریم $P_Y(x) = P_{\lambda B_Y}(x) \neq \emptyset$. بنابراین نتیجه می‌شود که Y در X پروکسیمینال است.
$(۴) \Rightarrow (۳)$.
براساس مطالب قبل اگر $\|x\| \leq \frac{۱}{۲}$ و $y \in P_Y(x)$ داریم

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \leq d(x, Y) + \|x\| \leq ۲\|x\| \leq ۱.$$

بنابراین قسمت (۴) اثبات می‌شود.
$(۳) \Rightarrow (۴)$.
فرض کنیم $x \in X \setminus Y$ باشد. می‌توان فرض کرد که $\|x\| > d(x, Y)$. براساس گزاره‌ی (۴) داریم $P_{B_Y}(\frac{x}{۲\|x\|}) \neq \emptyset$، بنابراین $P_{۲\|x\|B_Y} \neq \emptyset$. حال چون $۲\|x\| > \|x\| + d(x, Y)$، لذا براساس قسمت (۳) لم (۲.۱.۲) نتیجه می‌شود که $P_Y(x) = P_{۲\|x\|B_Y}(x) \neq \emptyset$. بنابراین Y در X پروکسیمینیال است. $\square$

۲.۲ گوی پروکسیمینال قوی

ابتدا مفهوم فضاهای پروکسیمینال قوی [۲] را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم X فضای باناخ و K زیر مجموعه‌ای بسته از آن باشد. برای $x \in X$ و $\delta > ۰$ قرار می‌دهیم:

$$P_K(x, \delta) = \{z \in K \colon \|x - z\| < d(x, K) + \delta\}.$$

حال زیر مجموعه‌ی بسته‌ی $K \subseteq X$ را در نقطه‌ی $x \in X \setminus K$ پروکسیمینال قوی گوییم، اگر K در x پروکسیمینال باشد و برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ی موجود باشد به طوری‌که:

$$\sup\{d(z, P_K(x)) \colon z \in P_K(x, \delta)\} < \epsilon.$$

یا به طور معادل $P_K(x, \delta) \subseteq P_K(x) + B(۰, \epsilon)$ باشد.
اگر برای هر $x \in X \setminus K$ این شرایط برقرار باشد، K را در X پروکسیمینال قوی گوییم.

تعریف ۲.۲.۲. زیر فضای Y از فضای باناخ X را گوی پروکسیمینال قوی گوییم اگر B_Y در X پروکسیمینال قوی باشد.

[۲] strongly proximinal

گزاره ۱.۲.۲. فرض کنیم X فضایی باناخ و Y زیرفضای آن باشد، در این‌صورت:

الف) برای هر $x \in \mathrm{X}$، $\delta > 0$ و $\lambda > 0$ داریم $\mathrm{P}_{\lambda B_{\mathrm{Y}}}(x, \delta) = \lambda \mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}(\frac{x}{\lambda}, \frac{\delta}{\lambda})$.

ب) برای هر $x \in \mathrm{X}$ و $\lambda > 0$، λB_{Y} در $x \in \mathrm{X}$ پروکسیمینال قوی است، اگر و تنها اگر B_{Y} در $\frac{x}{\lambda}$ پروکسیمینال قوی باشد.

ج) اگر B_{Y} در X پروکسیمینال قوی باشد، آنگاه Y هم در X پروکسیمینال قوی است.

برهان. الف). مشابه قسمت الف لم (۲.۱.۲) اثبات می‌شود.
ب). نتیجه‌ی مستقیم قسمت الف است.
ج). فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ و $\lambda > \|x\| + d(x, \mathrm{Y})$ باشد.اگر B_{Y} در $\frac{x}{\lambda}$ پروکسیمینال قوی باشد، لذا λB_{Y} در x پروکسیمینال قوی است. حال مشابه استدلال لم (۲.۱.۲) برای $0 < \delta < \lambda - (\|x\| + d(x, \mathrm{Y}))$ داریم $\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x, \delta) \subseteq \lambda B_{\mathrm{Y}}$. بنابراین $\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x, \delta) = \mathrm{P}_{\lambda B_{\mathrm{Y}}}(x, \delta)$. به علاوه $\mathrm{P}_{\lambda B_{\mathrm{Y}}}(x) = \mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x)$، بنابراین Y در X پروکسیمینال قوی است. □

مطلب مهمی که از گزاره‌ی فوق نتیجه می‌شود این است که برای بررسی گوی پروکسیمینال قوی بودن یک مجموعه می‌توان فضای بررسی خود را به گوی یکه‌ی آن مجموعه محدود کرد.

یکی از مباحثی که ارتباط محکمی با فضاهای گوی پروکسیمینال قوی دارد، مبحث دنباله‌های کاهشی است که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

۱.۲.۲ دنباله‌های کاهشی و فضاهای گوی پروکسیمینال قوی

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم X فضایی باناخ و K زیرمجموعه‌ای بسته از آن باشد. دراین‌صورت دنباله‌ی $\{z_n\} \subseteq \mathrm{K}$ را دنباله‌ی کاهشی [۳] متناظر با $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{K}$ نامیم اگر دارای شرایط زیر باشد:

$$\|x - z_n\| \to d(x, \mathrm{K}).$$

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنیم X فضایی باناخ و K زیرمجموعه‌ای بسته از آن باشد، همچنین فرض کنیم $x_0 \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{K}$ باشد. در این‌صورت:

الف) K را برای x_0 فشرده تقریبی نامیم، اگر هر دنباله‌ی کاهشی $\{z_n\} \subseteq \mathrm{K}$ متناظر با x_0، دارای زیر دنباله‌ای همگرا باشد.

ب) K را برای x_0 چبیشف قوی نامیم، اگر هر دنباله‌ی کاهشی $\{z_n\} \subseteq \mathrm{K}$ متناظر با x_0، همگرا باشد.

ج) اگر K برای هر $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{K}$ تقریبا فشرده (چبیشف قوی) باشد، K را تقریبا فشرده (چبیشف قوی) می‌گوییم.

---
[۳] minimizing sequence

حال با تعریف دنباله‌های کاهشی، به یک تعریف معادل برای فضاهای پروکسیمینال قوی می‌رسیم که در زیر آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۲. زیر مجموعه‌ی پروکسیمینال K از فضای باناخ X را پروکسیمینال قوی نامیم، اگر برای هر $x \in \mathrm{X}$ و هر دنباله‌ی کاهشی $\{y_n\} \subseteq \mathrm{K}$ متناظر با x، زیر دنباله‌ی $\{y_{n_k}\}$ و دنباله‌ی $\{z_k\} \subseteq \mathrm{P_K}(x)$ موجود باشند به طوریکه $\|y_{n_k} - z_k\| \to \circ$.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای بسته از فضای باناخ X و $x_\circ \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{K}$ باشند. دراینصورت K فشرده تقریبی است اگر و تنها اگر K در $x_\circ$ پروکسیمینال قوی باشد و $\mathrm{P_K}(x_\circ)$ فشرده باشد.

برهان. $(\Leftarrow)$ دقت کنید که در فضاهای باناخ نرمدار، فشردگی و فشردگی دنباله‌ای معادل هستند. بنابراین نتیجه می‌شود اگر K برای $x_\circ$ فشرده تقریبی باشد، دراین‌صورت $\mathrm{P_K}(x_\circ)$ فشرده است.

حال به برهان خلف فرض کنیم K در $x_\circ$ پروکسیمینال قوی نباشد، بنابراین همسایگی V از نقطه‌ی $x_\circ$ و دنباله‌ی کاهشی متناظر با $x_\circ$ مانند $\{z_n\} \subseteq \mathrm{K}$ موجود هستند به طوری‌که $z_n \notin \mathrm{P_K}(x_\circ) + V$. حال چون K برای $x_\circ$ فشرده تقریبی است لذا زیردنباله‌ی $\{z_{n_k}\}$ موجود است به طوری‌که $z_{n_k} \to z_\circ \in \mathrm{K}$. حال نتیجه می‌شود که $z_\circ \in \mathrm{P_K}(x_\circ)$ و بنابراین برای هر $n \geq ۱$ داریم $z_n \in z_\circ + V \subseteq \mathrm{P_K}(x_\circ) + V$، که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و لذا K در $x_\circ$ پروکسیمینال قوی است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم K در $x_\circ$ پروکسیمینال قوی باشد و $\mathrm{P_K}(x_\circ)$ فشرده باشد. به برهان خلف فرض کنیم K برای $x_\circ$ فشرده تقریبی نباشد، بنابراین دنباله‌ی کاهشی $\{z_n\} \subseteq \mathrm{K}$ موجود است به طوری‌که هیچ زیر دنباله‌ی همگرایی ندارد. لذا طبق تعریف دنباله‌ها برای هر $z \in \mathrm{P_K}(x_\circ)$ یک همسایگی U_z از z و عدد طبیعی $N_z \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری‌که برای هر $n \geq N_z$، $z_n \notin U_z$. حال چون $\mathrm{P_K}(x_\circ)$ فشرده است لذا همسایگی V از $x_\circ$ و $N_\circ \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری‌که برای هر $n \geq N_\circ$، $z_n \notin \mathrm{P_K}(x_\circ) + V$. حال چون K در $x_\circ$ پروکسیمینال قوی است لذا $\delta > \circ$ موجود است به طوری‌که $\mathrm{P_K}(x_\circ, \delta) \subseteq \mathrm{P_K}(x_\circ) + V$. دقت کنید که برای هر دنباله‌ی کاهشی متناظر با $x_\circ$ مانند $\{z_n\} \subseteq \mathrm{K}$، نهایتا $z_n \in \mathrm{P_K}(x_\circ, \delta)$ که این یک تناقض است. لذا فرض خلف باطل و K برای $x_\circ$ فشرده تقریبی است. $\square$

تعریف ۶.۲.۲. $x^* \in S_{\mathrm{X}^*}$ را تابعک نمایش قوی [۴] نامیم اگر $x^* \in NA(\mathrm{X})$ و هر دنباله‌ی $\{x_n\} \subseteq \mathrm{X}$ که $\lim x^*(x_n) = ۱$، همگرا باشد.

گزاره ۲.۲.۲. فرض کنیم X فضای باناخ و هر $f \in NA_۱(\mathrm{X})$ یک تابعک نمایش قوی باشد. دراین‌صورت B_{X} چبیشف قوی است و لذا پروکسیمینال قوی است.

[۴] Strongly exposing functional

برهان. فرض کنیم $x_\circ \in X$، یادآوری می‌کنیم که

$$d(x_\circ, B_X) = \|x_\circ\| - ۱ = \|x_\circ - \frac{x_\circ}{\|x_\circ\|}\|.$$

همانند برهان لم (۱.۱.۲) گوی باز $B(x_\circ, \|x_\circ\| - ۱)$ از B_X جداست، بنابراین $f_\circ \in S_{X^*}$ وجود دارد به طوری‌که $f_\circ(x_\circ) - (\|x_\circ\| - ۱) \geq ۱$ از طرفی هم می‌دانیم که $\|x_\circ\| \geq f_\circ(x_\circ)$، بنابراین نتیجه می‌شود که $f_\circ(x_\circ) = \|x_\circ\|$ پس $f_\circ$ نرم خود را اخذ می‌کند و لذا $f_\circ \in NA_۱(X)$، پس بنابر مفروضات صورت گزاره، $f_\circ$ نمایش قوی $\frac{x_\circ}{\|x_\circ\|}$ است. فرض کنیم $\{z_n\} \subseteq B_X$ یک دنباله‌ی کاهشی باشد، در این‌صورت

$$\|x_\circ\| - ۱ \leq \|x_\circ\| - \|z_n\| \leq \|x_\circ\| - f_\circ(z_n) \leq f_\circ(x_\circ - z_n) \leq \|x_\circ - z_n\| \to \|x_\circ\| - ۱.$$

و لذا نتیجه می‌شود که $f_\circ(z_n) \to ۱$ و بنابراین $z_n \to \frac{x_\circ}{\|x_\circ\|}$. حال چون دنباله‌ی کاهشی $\{z_n\}$ دلخواه بود لذا نتیجه می‌شود که B_X چبیشف قوی و لذا پروکسیمینال قوی است. $\square$

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنیم X فضای باناخ، $x \in X$، Y زیر فضایی از X و $d(x, B_Y) = d(x, Y)$ باشند. همچنین فرض کنیم Y در x پروکسیمینال قوی و $P_Y(x)$ فشرده باشند، دراینصورت B_Y در x پروکسیمینال قوی است.

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۱.۲.۲)، چون Y در x پروکسیمینال قوی و $P_Y(x)$ فشرده است لذا نتیجه می‌شود که Y در x فشرده تقریبی است.
دقت کنید اگر $d(x, B_Y) = d(x, Y)$ و $\{y_n\}$ در B_Y دنباله‌ی کاهشی متناظر با x باشد، دراین‌صورت $\{y_n\}$ دنباله‌ی کاهشی متناظر با x در Y است. حال چون Y فشرده تقریبی است لذا دنباله‌ی کاهشی $\{y_n\} \subseteq B_Y$ دارای زیردنباله‌ای همگراست. بنابراین B_Y در x فشرده تقریبی است و لذا پروکسیمینال قوی است. $\square$

یکی از مفاهیمی که با گوی پروکسیمینال‌ها در ارتباط است، فضاهای $E-$ پروکسیمینال می‌باشد که در ادامه به معرفی آن و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم.

۳.۲ فضای E- پروکسیمینال

تعریف ۱.۳.۲. زیر فضای پروکسیمینال Y از فضای باناخ X را $E-$ پروکسیمینال گوییم، اگر برای هر $x \in X \setminus Y$ و $\epsilon, \gamma > \circ$ که $d_X(x, B_Y[\circ, \gamma]) = d_X[x, Y]$، نتیجه شود که عنصر $y \in Y$ وجود دارد به طوری‌که $\|x - y\| = d_X(x, Y)$ و $\|y\| < \gamma + \epsilon$.

به آسانی نتیجه می‌شود که اگر Y گوی پروکسیمینال یا گوی پروکسیمینال قوی باشد، $E-$پروکسیمینال هم هست.
برای بررسی ارتباط بین فضاهای $E-$ پروکسیمینال و گوی پروکسیمینال‌ها، ابتدا دو لم زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲. فرض کنیم X فضای باناخ، Y زیرفضایی از X، $\beta > 0$ و $x \in \mathrm{X} \setminus B_{\mathrm{X}}[0, \beta]$ باشند. همچنین فرض کنیم که $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[0, \beta]$ ناتهی و

$$\gamma = \inf\{\|x - z\| \colon z \in (x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[0, \beta]\}$$
$$= d_{\mathrm{X}}(x, (x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[0, \beta]) = d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[0, \beta])$$

باشند، دراین‌صورت $d_{\mathrm{X}}(0, B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]) = \beta$.

برهان. فرض کنیم که $d_{\mathrm{X}}(0, B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]) < \beta$ باشد، دراین‌صورت $y \in \mathrm{Y}$ موجود است به طوری‌که $\|y\| \leq \gamma$ و $\|x + y\| < \beta$. دقت کنید که $y \neq 0$ (زیرا $x \notin B_{\mathrm{X}}[0, \beta]$). حال قرار می‌دهیم $\delta = \frac{1}{2}(\beta - \|x + y\|)$، دراین‌صورت

$$\|x + y - \frac{\delta y}{\|y\|}\| \leq \|x + y\| + \delta < \beta;$$

$$\|y - \frac{\delta y}{\|y\|}\| < \gamma.$$

این یک تناقض است، بنابراین نتیجه می‌شود که $d_{\mathrm{X}}(0, x + B_{\mathrm{Y}}[0, \gamma]) \geq \beta$. حال بنابه تعریف γ، برای هر $\epsilon > 0$ عنصر $y \in B_{\mathrm{Y}}[0, 1]$ وجود دارد به طوری‌که

$$\|x - (\gamma + \epsilon)y\| \leq \beta.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$d_{\mathrm{X}}(x, B_{\mathrm{Y}}[0, \gamma]) \leq \beta + \epsilon.$$

حال چون ϵ عدد حقیقی و مثبت دلخواه بود، لذا نتیجه می‌شود که

$$\beta = d_{\mathrm{X}}(x, B_{\mathrm{Y}}[0, \gamma]) = d_{\mathrm{X}}(0, B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]).$$

$\square$

لم ۲.۳.۲. فرض کنیم Y زیر فضایی $E-$ پروکسیمینال از فضای باناخ X، $\gamma > 0$ و $x \in \mathrm{X} \setminus B_{\mathrm{Y}}[0, \gamma]$ باشند. اگر $\alpha = d(x, \mathrm{Y})$ و $\beta = d(0, B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma])$ دراین‌صورت

$$\gamma \geq \inf\{\|y\| \colon y \in \mathrm{Y}, x + y \in B_{\mathrm{X}}[0, \beta]\} = d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[0, \beta]).$$

همچنین اگر $\alpha < \beta$ باشد، تساوی برقرار می‌شود.

برهان. فرض کنیم x یک عنصر دلخواه از $\mathrm{X} \setminus B_{\mathrm{Y}}[0, \gamma]$، $\alpha = d(x, \mathrm{Y})$ و $\beta = d(0, B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma])$ باشند. حال چون زیرفضای Y، $E-$پروکسیمینال است لذا در X پروکسیمینال است، بنابراین عنصر $z \in x + \mathrm{Y}$ موجود است به طوری‌که

$$\|z\| = \alpha = d_{\mathrm{X}}(0, x + \mathrm{Y})$$

لذا نتیجه می‌شود که $\alpha \leq \beta$. دو حالت $\alpha = \beta$ و $\alpha < \beta$ را در نظر می‌گیریم.

حالت اول $\alpha = \beta$. چون Y فضای E−پروکسیمینال است لذا برای هر $\epsilon > \circ$، عنصر $z' \in x + \mathrm{Y}$ موجود است به طوری‌که $\|z'\| = \beta$ و $\|x - z'\| \leq \gamma + \epsilon$. لذا نتیجه می‌شود که

$$\gamma \geq d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]).$$

حالت دوم $\alpha < \beta$. دقت کنید که $\|z\| = \alpha < \beta$. برای هر $\epsilon > \circ$، عدد $\circ < \delta < ۱$ موجود است به طوری‌که

$$\delta \max\{\beta - \alpha, \|x - z\|\} < \epsilon.$$

حال بنابر ساختار تعریف β، عنصر $y \in B_{\mathrm{Y}}[\circ, \gamma]$ موجود است به طوری‌که

$$\|x + y\| \leq \beta + \delta(\beta - \alpha).$$

دراین‌صورت $(۱ - \delta)(x + y) + \delta z \in x + \mathrm{Y}$ و لذا

$$\begin{aligned}\|(۱ - \delta)(x + y) + \delta z\| &\leq (۱ - \delta)(\beta + \delta(\beta - \alpha)) + \delta\alpha \\ &\leq (۱ - \delta)\beta + \delta(\beta - \alpha) + \delta\alpha = \beta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|[(۱ - \delta)(y + x) + \delta z] - x\| &= \|(۱ - \delta)y + \delta(z - x)\| \\ &\leq \|y\| + \|\delta(z - x)\| \leq \gamma + \epsilon.\end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود که

$$\gamma \geq d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]).$$

فرض کنیم که $y' \in \mathrm{Y}$ طوری باشد که $\|y'\| < \gamma$ و $\|x + y'\| \leq \beta$. حال $\delta > \circ$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\delta\|x - z\| < \gamma - \|y'\|$ باشد. در این‌صورت $(۱ - \delta)y' + \delta(z - x) \in \mathrm{Y}$ و

$$\|(۱ - \delta)y' + \delta(z - x)\| \leq \|y'\| + \delta\|z - x\| < \gamma,$$

$$\|(۱ - \delta)(x + y') + \delta z\| \leq (۱ - \delta)\beta + \delta\alpha < \beta.$$

این با تعریف β در تناقض است، بنابراین $\gamma = d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta])$ واثبات تمام است. □

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم Y زیرفضایی E− پروکسیمینال از فضای باناخ X باشد، دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(۱) Y در X گوی پروکسیمینال است.

(۲) برای هر $\gamma > \circ$ و $x \in \mathrm{X}$ گوی $B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]$ در X پروکسیمینال است.

(۳) برای هر $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$ و $\beta > ۰$ که $۰ < \alpha = d_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{Y}) \leq \beta$، مجموعه‌ی $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, \beta]$ در $x + \mathrm{Y}$ پروکسیمینال است.

(۴) برای هر $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$ که $۰ < d_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{Y}) < ۱$ مجموعه‌ی $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, ۱]$ در $x + \mathrm{Y}$ پروکسیمینال است.

برهان. قسمت‌های (۲) $\Rightarrow$ (۱) و (۴) $\Rightarrow$ (۳) واضح هستند، بنابراین کافیست (۱) $\Rightarrow$ (۳) $\Rightarrow$ (۲) و (۳) $\Rightarrow$ (۴) را اثبات کنیم.

(۳) $\Rightarrow$ (۴) . فرض کنیم x عنصری دلخواه از $\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$، $\alpha = d(x, \mathrm{Y})$ و β عدد مثبت حقیقی که $\alpha \leq \beta$ باشند. قرار می‌دهیم $x' = \frac{x}{\beta}$، دراین‌صورت

$$۰ < d_{\mathrm{X}}(x', \mathrm{Y}) = \frac{\alpha}{\beta} \leq ۱.$$

بنابر فرض بهترین تقریب y' برای x' از مجموعه‌ی $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, ۱]$ موجود است. دقت کنید که

$$(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, \beta] = \beta[(x' + y) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, ۱]]$$

لذا $\beta y'$ یک بهترین تقریب برای x از مجموعه‌ی $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, \beta]$ می‌باشد. لذا (۳) $\Rightarrow$ (۴) اثبات شد.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) . فرض کنیم Y زیرفضای گوی پروکسیمینال از X باشد. همچنین فرض کنیم $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$ و $\beta > ۰$ طوری باشد که $\beta \geq d_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{Y}) = \alpha$، دراینصورت $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, \beta]$ ناتهی است. فرض کنیم

$$\gamma = \inf\{\|x - z\| \colon z \in (x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[۰, \beta]\} = d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[۰, \beta]).$$

بنابر لم (۱.۳.۲)، داریم $d_{\mathrm{X}}(۰, B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]) = \beta$. حال طبق فرض می‌دانیم که $B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]$ در X پروکسیمینال است. فرض کنیم z بهترین تقریب عنصر ۰ از مجموعه‌ی $B_{\mathrm{Y}}[x, \gamma]$ باشد، دراین‌صورت $z \in x + \mathrm{Y}$، $\|z\| = \beta$ و $\|z - x\| \leq \gamma$. بنابراین z بهترین تقریب x از مجموعه‌ی $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{Y}}[۰, \beta]$ می‌باشد. لذا قسمت (۳) نتیجه می‌شود.

(۱) $\Rightarrow$ (۳) . طبق فرض Y زیرفضای $E-$پروکسیمینال از X می‌باشد. فرض کنیم x عنصری دلخواه از $\mathrm{X} \setminus B_{\mathrm{Y}}[۰, ۱]$ باشد. اگر $x \in \mathrm{Y}$ دراینصورت $\frac{x}{\|x\|}$ بهترین تقریب x از $B_{\mathrm{Y}}[۰, ۱]$ می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $x \notin \mathrm{Y}$، یعنی $d_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{Y}) > ۰$. می‌دانیم که دو مطلب زیر معادل هستند:

الف) یک بهترین تقریب برای x مانند z از $B_{\mathrm{Y}}[۰, ۱]$ موجود است.

ب) بهترین تقریب $x - z$ برای عنصر ۰ از $B_{\mathrm{Y}}[x, ۱]$ موجود است.

بنابراین کافیست نشان دهیم برای هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{Y}) > ۰$، یک بهترین تقریب از گوی $B_{\mathrm{Y}}[x, ۱]$ برای عنصر ۰ موجود است. فرض کنیم

$$\beta = d_{\mathrm{X}}(x, B_{\mathrm{Y}}[۰, ۱]) = d_{\mathrm{X}}(۰, B_{\mathrm{Y}}[x, ۱]) > ۰,$$

$$\alpha = d_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{Y}).$$

به وضوح داریم $\beta \leq \alpha$. حال چون Y پروکسیمینال است، لذا عنصر $z \in x + \mathrm{Y}$ موجود است به طوری‌که $\|z\| = \alpha$. چون $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]$ ناتهی است لذا بر اساس لم (۲.۳.۲) داریم:

$$d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]) \leq ۱$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) فرض کنیم $d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]) < ۱$. دراین‌صورت بنابر لم (۲.۳.۲) داریم $\alpha = \beta$. بنابراین عنصر $y \in \mathrm{Y}$ با شرط $\|y\| < ۱$ موجود است و $\|x+y\| = \beta$. پس $u = x+y$ یک بهترین تقریب از $B_{\mathrm{Y}}[x, ۱]$ برای عنصر ∘ می‌باشد.

حالت دوم) فرض کنیم $d_{\mathrm{Y}}(x, B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]) = ۱$. چون $(x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]$ در $x + \mathrm{Y}$ پروکسیمینال است، لذا عنصر $u \in (x + \mathrm{Y}) \cap B_{\mathrm{X}}[\circ, \beta]$ موجود است به طوری‌که

$$\|x - u\| = ۱ \quad , \quad \|u\| \leq \beta.$$

لذا u یک بهترین تقریب از $B_{\mathrm{Y}}[x, ۱]$ برای عنصر ∘ می‌باشد.
پس در هر دو حالت نشان دادیم که $B_{\mathrm{Y}}[x, ۱]$ در X پروکسیمینال است، در نتیجه Y در X گوی پروکسیمینال است. □

برای مطالعات بیشتر در این زمینه می‌توان به مطالب ارائه شده در [۲]، [۸]، [۹]، [۱۷] و [۶] مراجعه کرد.
حال که به درک مناسبی از مفاهیم گوی پروکسیمینال‌ها و گوی پروکسیمینال‌های قوی رسیدیم، در ادامه ارتباط این مفاهیم را با ابرصفحه‌ها بیان می‌کنیم.

فصل ۳

مشخصه‌سازی گوی پروکسیمینال و گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه‌ها

در این فصل به مشخصه سازی گوی پروکسیمینال و گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه‌ها می‌پردازیم و مثالی از یک ابرصفحه‌ی چبیشف معرفی می‌کنیم که گوی پروکسیمینال نیست. همچنین در این فصل مفاهیم جدیدی را که ارتباطی قوی با ابرصفحه‌ها و گوی پروکسیمینال‌ها دارند، مانند فضاهای SSD که در ادامه با آن‌ها آشنا میشویم، معرفی می‌کنیم.

۱.۳ گوی پروکسیمینال ابرصفحه‌ها

ابتدا گزاره‌ای در ارتباط با مفهوم فاصله در گوی پروکسیمینال ابرصفحه‌ها بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ و $f \in NA_1(\mathrm{X})$ باشد. ابرصفحه‌ی $\mathrm{H} = \ker f$ و عدد حقیقی $0 < \lambda \leq 1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که x با نرم $\|x\| > 1$ در H_λ باشد، در این‌صورت اگر $\beta = d(x, B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda)$، آنگاه $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{H}}) = \frac{1}{\beta}$.

برهان. با توجه به تعریف β داریم:

$$\begin{aligned}\beta &= \inf\{\|x-y\|: y \in B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda\}\\ &= \inf\{\|z\|: z \in B[x,۱] \cap \mathrm{H}\},\end{aligned}$$

بنابراین با تقسیم طرفین به β خواهیم داشت:

$$۱ = \inf\{\|w\|: w \in B[\frac{x}{\beta}, \frac{۱}{\beta}] \cap \mathrm{H}\} \tag{۱.۳}$$

حال ادعا می‌کنیم که $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{H}}) = \frac{۱}{\beta}$.
به سادگی رابطه‌ی (۱.۳) نتیجه می‌دهد که $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{H}}) \geq \frac{۱}{\beta}$. حال فقط کافیست عکس نامساوی را نشان دهیم. بنابر مفروضات قضیه می‌دانیم که $d(x, B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda) = \beta$، بنابراین برای هر $\epsilon > ۰$ وجود دارد $y = y_\epsilon$ ی متعلق به $B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda$ به طوری‌که $\beta \leq \|x-y\| \leq \beta(۱+\epsilon)$. حال فرض کنیم که $w_\epsilon = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. بنابراین w_ϵ در B_{H} قرار دارد، حال داریم:

$$\begin{aligned}\|\frac{x}{\beta} - w_\epsilon\| &= \|\frac{x}{\beta} - \frac{x-y}{\|x-y\|}\|\\ &= \|\frac{y}{\|x-y\|} + x[\frac{۱}{\beta} - \frac{۱}{\|x-y\|}]\ \|\\ &\leq \frac{۱}{\|x-y\|}\|y\| + \frac{[\ \|x-y\| - \beta]}{\beta^۲}\|x\|\\ &\leq \frac{۱}{\beta} + \frac{\epsilon\beta}{\beta^۲}\|x\|\\ &= \frac{۱}{\beta} + \frac{\epsilon}{\beta}\|x\|\end{aligned}$$

حال چون $\epsilon > ۰$ دلخواه بود لذا نتیجه می‌شود که $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{H}}) \leq \frac{۱}{\beta}$ و بنابراین داریم $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{H}}) = \frac{۱}{\beta}$، و لذا اثبات تمام است. □

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_۱(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشد. دراین‌صورت اگر H گوی پروکسیمینال باشد، آنگاه برای هر λ که $۰ < \lambda < ۱$ مجموعه‌ی $\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}$ دارای یک بهترین تقریب در H_λ می‌باشد، یا به طور معادل $\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}$ در H_λ پروکسیمینال است.

برهان. فرض کنیم که x متعلق به H_λ باشد به طوری‌که $۰ < d(x, H_\lambda \cap B_X) = \beta$، حال چون B_H پروکسیمینال است با استفاده از قضیه‌ی (۱.۱.۳) می‌توانیم $w \in B_H$ را طوری انتخاب کنیم که $\|\frac{x}{\beta} - w\| = \frac{۱}{\beta}$. در این‌صورت $x - \beta w$ در $H_\lambda \cap B_X$ قرار دارد و $\|x-(x-\beta w)\| = \|\beta w\| \leq \beta$. بنابراین $x - \beta w$ یک بهترین تقریب x از $H_\lambda \cap B_X$ می باشد و لذا $H_\lambda \cap B_X$ پروکسیمینال است. □

ملاحظه ۱.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. برای $x \in \mathrm{X}$ دو وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. $d(x, \mathrm{H}) = d(x, B_{\mathrm{H}})$.

۲. $\inf\{\|y\| : y \in \mathrm{P}_{\mathrm{H}}(\mathrm{X})\} \leq ۱$.

به سادگی قابل بررسی است که وضعیت (۲) وضعیت (۱) را نتیجه می‌دهد. همچنین اگر H گوی پروکسیمینال باشد، بنابه تعریف گوی‌های یکه و خواص مجموعه‌های پروکسیمینال نتیجه می‌شود که وضعیت (۱) نیز وضعیت (۲) را نتیجه می‌دهد و لذا در این حالت (۱) و (۲) معادل هستند. حال سوالی که پیش می‌آید این است که آیا عکس این مطلب هم برقرار است؟ یعنی،

اگر H ابرصفحه‌ای پروکسیمینال باشد به طوری‌که برای هر $x \in \mathrm{X}$ وضعیت‌های (۱) و (۲) معادل باشند، دراینصورت آیا H گوی پروکسیمینال است؟

پاسخ این سوال منفی است که در این فصل توسط یک مثال آن‌را نشان می‌دهیم.

۱.۱.۳ ابرصفحه‌ها و فضاهای E−پروکسیمینال

برای فضای باناخ X و زیر فضای Y از X دو وضعیت زیر را در نظر می گیریم:

۱. هر $x \in \mathrm{X}$ به طوری که $d(x, \mathrm{Y}) = d(x, B_{\mathrm{Y}})$ یک بهترین تقریب در B_{Y} دارد. یا به طور معادل $\mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}(x) = \mathrm{P}_{Y}(x) \cap B_{\mathrm{Y}} \neq \varnothing$.

۲. اگر برای هر $x \in \mathrm{X}$ داشته باشیم:

$$\alpha(x) = \inf\{r \geq ۰ : \exists (y_n) \subset \mathrm{Y} \quad s.t \quad \|y_n\| \leq r, \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d(x, \mathrm{Y})\}.$$

در این‌صورت عنصر y متعلق به $\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x)$ موجود است که $\|y\| = \alpha(x)$.

یه سادگی ثابت می شود که پروکسیمینال بودن یک مجموعه دو وضعیت بالا را برای آن مجموعه نتیجه می دهد.

در بخش آخر مثالی را ارائه می دهیم که وضعیت (۲) برای آن برقرار است ولی گوی پروکسیمینال نیست. در صورتی که یک گوی پروکسیمینال همواره وضعیت (۲) را نتیجه می دهد.

تعریف ۱.۱.۳. زیر فضای پروکسیمینال Y از فضای باناخ X را در $x \in \mathrm{X}$، Eـ پروکسیمینال گوییم، اگر برای هر $\epsilon > ۰$ یک عنصر y متعلق به $\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x)$ موجود باشد به طوری که $\|y\| < \alpha(x) + \epsilon$.

دقت کنید که $\alpha(x)$ در وضعیت (۲) در قسمت قبل معرفی شد.

نتیجه ۱.۱.۳. بنابر مطالب قبل از تعریف، گوی پروکسیمینال و گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه ها Eـ پروکسیمینال هستند.

ملاحظه ۲.۱.۳. یادآوری می‌کنیم که برای فضای باناخ X و هر $f \in \mathrm{X}^*$:

$$J_{\mathrm{X}}(f) = \{x \in S_{\mathrm{X}} \colon f(x) = \|f\|\}.$$

حال برای هر $\circ < \epsilon < ۱$ و هر $f \in \mathrm{X}^*$ قرار می‌دهیم

$$J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon) = \{x \in B_{\mathrm{X}} \colon f(x) > ۱ - \epsilon\}.$$

واضح است که $J_{\mathrm{X}}(f) \subseteq J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon)$. همچنین برای هر $x \in \mathrm{X}$ داریم:

$$d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon)) \leq d(x, J_{\mathrm{X}}(f)).$$

حال به بررسی قضایایی در رابطه با مجموعه‌های Eـ پروکسیمینال می‌پردازیم.

گزاره ۲.۱.۳. فرض کنیم X فضایی باناخ و Y زیر فضایی پروکسیمینال از X باشد. دراین‌صورت Y در X زیرفضایی $E-$پروکسیمینال است اگر و تنها اگر Y در هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d(x, \mathrm{Y}) = ۱$، $E-$پروکسیمینال باشد.

برهان. اگر Y در X زیرفضایی $E-$پروکسیمینال باشد، دراین‌صورت طبق تعریف در هر $x \in \mathrm{X}$، $E-$پروکسیمینال است. بنابراین اثبات قسمت مستقیم واضح است. حال برعکس فرض می‌کنیم Y در هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d(x, \mathrm{Y}) = ۱$، $E-$پروکسیمینال باشد. حال نشان می‌دهیم که Y در X زیرفضایی $E-$پروکسیمینال می‌باشد.

برای این کار عنصر دلخواه $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\epsilon > \circ$ داده شده باشد و $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty} \subseteq \mathrm{Y}$ دنباله کاهشی متناظر با x باشد به طوری‌که:

$$r = \sup_n \|y_n\| < \alpha(x) + \frac{\epsilon}{۲}. \qquad (۲.۳)$$

حال فرض می‌کنیم $d = d(x, \mathrm{Y})$ و $z = \frac{x}{d}$. دراین‌صورت داریم $d(z, \mathrm{Y}) = ۱$. همچنین دقت کنید که $\{\frac{y_n}{d}\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با z در Y است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \|z - \frac{y_n}{d}\| = \lim_{n\to\infty} \|\frac{x}{d} - \frac{y_n}{d}\| = ۱ = d(z, \mathrm{Y}).$$

دراین‌صورت $\sup_n \|\frac{y_n}{d}\| = \frac{r}{d}$. حال چون Y در z، $E-$پروکسیمینال است، لذا عنصر $y_۱ \in \mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(z)$ موجود است به طوری‌که $\|y_۱\| \leq \frac{r}{d} + \frac{\epsilon}{۲d}$. دقت کنید که $y_۱ = \frac{y_\circ}{d}$، که در آن $y_\circ \in \mathrm{P}_{\mathrm{Y}}(x)$.
همچنین بنابر رابطه‌ی (۲.۳) داریم:

$$\|y_\circ\| = d\|y_۱\| \leq r + \frac{\epsilon}{۲} < \alpha(x) + \epsilon.$$

لذا نتیجه می‌گیریم که Y در x، $E-$پروکسیمینال است. حال چون $x \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$ دلخواه بود لذا نتیجه می‌شود که Y در X، $E-$پروکسیمینال است. □

ملاحظه ۳.۱.۳. فرض کنیم $f \in NA_1(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. اگر $x \in \mathrm{X}$ دارای شرایط $d(x, \mathrm{H}) = 1$ باشد، دراین‌صورت $|f(x)| = d(x, \mathrm{H}) = 1$. واضح است که H در x، E−پروکسیمینال است اگر و تنها اگر در $(-x)$، E−پروکسیمینال باشد. بنابراین برای اثبات E−پروکسیمینال بودن H در X طبق گزاره‌ی قبل کافیست نشان دهیم که $\mathrm{H} = \ker f$ در تمام x های متعلق به X با شرط $f(x) = 1$، E−پروکسیمینال است.

در ادامه ابرصفحه‌های E−پروکسیمینال را مشخصه سازی می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_1(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. دراین‌صورت H ابرصفحه‌ای E−پروکسیمینال است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $f(x) = 1$، داشته باشیم:

$$d(x, J_{\mathrm{X}}(f)) = \lim_{\epsilon \to 0} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon)).$$

برهان. برای اثبات کفایت، فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ طوری باشد که $f(x) = 1$. بنابر نکته‌ی (۳.۱.۳) کافیست نشان دهیم که H در x، E−پروکسیمینال است.

فرض کنیم $\eta > 0$ داده شده باشد و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{H}$ یک دنباله‌ی کاهشی برای x باشد، به طوری‌که:

$$\sup_n \|y_n\| < \alpha(x) + \frac{\eta}{2}. \tag{۳.۳}$$

در این‌صورت $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d(x, \mathrm{H}) = f(x) = 1$. فرض کنیم $z_n = \frac{x - y_n}{\|x - y_n\|}$. دراین‌صورت داریم $\|z_n\| = 1$ و اگر $f(z_n) = \frac{f(x)}{\|x-y_n\|} = (1 - \frac{\epsilon_n}{2})$، داریم $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$، زیرا $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 1$.
حال چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $f(z_n) > 1 - \epsilon_n$ بنابراین $z_n \in J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon_n)$. لذا نتیجه می‌شود که $\|x - z_n\| \geq d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon_n))$. حال فرض کنیم $\alpha_n = \|x - y_n\|$. دراین‌صورت $z_n = \frac{x - y_n}{\alpha_n}$ و بنابراین $y_n = x - \alpha_n z_n$. اما داریم $x - z_n = x - \alpha_n z_n + \alpha_n z_n - z_n$، لذا $\|x - z_n\| \leq \|y_n\| + (\|1 - \alpha_n\|)$. حال چون $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$، لذا $\limsup\limits_n \|x - z_n\| \leq \limsup\limits_n \|y_n\|$.
همچنین داریم:

$$\lim_{n\to\infty} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon_n)) = \lim_{\epsilon\to 0} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon)) = d(x, J_{\mathrm{X}}(f)).$$

حال عنصر $w \in J_{\mathrm{X}}(f)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$\|x - w\| < \lim_{n\to\infty} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon_n)) + \frac{\eta}{2}.$$

فرض کنیم $y = x - w$. دراین‌صورت $y \in \mathrm{P_H}(x)$ است و

$$\begin{aligned}
\|y\| &< \lim_{n\to\infty} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon_n)) + \frac{\eta}{2} \\
&\leq \limsup_n \|x - z_n\| + \frac{\eta}{2} \\
&\leq \limsup_n \|y_n\| + \frac{\eta}{2} \\
&\overset{(۳.۳)}{\leq} \alpha(x) + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \alpha(x) + \eta.
\end{aligned}$$

بنابراین طبق تعریف نتیجه می‌شود که H در x، $E-$پروکسیمینال است.

حال قسمت لزوم را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم H ابرصفحه‌ای $E-$پروکسیمینال است. به برهان خلف فرض می‌کنیم که $x \in \mathrm{X}$ موجود باشد که $f(x) = ۱$ و $d(x, J_{\mathrm{X}}(f)) > \lim_{\epsilon \to \infty} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon))$.
فرض کنیم $\delta > ۰$ طوری باشد که

$$d(x, J_{\mathrm{X}}(f)) > \lim_{\epsilon \to ۰} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon)) + \delta.$$

عنصر $z_n \in J_{\mathrm{X}}(f, ۱/n)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$\|x - z_n\| < d(x, J_{\mathrm{X}}(f, ۱/n)) + \frac{۱}{n}.$$

دراین‌صورت $d(x, J_{\mathrm{X}}(f)) > \lim_{n \to \infty} \|x - z_n\| + \delta$. فرض کنیم $v_n = \frac{z_n}{f(z_n)}$. داریم $f(v_n) = ۱$ و $x - v_n \in \mathrm{H}$. فرض کنیم $y_n = x - v_n$، دراین‌صورت $\|x - y_n\| = \|v_n\| = \frac{\|z_n\|}{|f(z_n)|}$. دقت کنید که $۱ \leq |f(z_n)| < ۱ - \frac{۱}{n} < ۰$. حال چون $\lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = ۱$ ، لذا داریم:

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \lim_{n \to \infty} \frac{\|z_n\|}{|f(z_n)|} = ۱.$$

بنابراین $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ی کاهشی متناظر با x از ابرصفحه‌ی H است و

$$\begin{aligned}
\alpha(x) \leq \limsup_n \|x - v_n\| &= \limsup_n \|x - z_n\| \\
&< d(x, J_{\mathrm{X}}(f)) - \delta \\
&\overset{(۱.۲.۱)}{=} \inf\{\|y\| \colon y \in \mathrm{P_H}(x)\} - \delta.
\end{aligned}$$

بنابراین H ابرصفحه‌ی $E-$پروکسیمینال نیست، که با فرض در تناقض است. بنابراین قسمت لزوم هم اثبات می‌شود. □

یادآوری می‌کنیم که برای $\epsilon > ۰$،

$$\mathrm{P_H}(x, \epsilon) = \{y \in \mathrm{H} \colon \|x - y\| < d(x, \mathrm{H}) + \epsilon\}.$$

گزاره ۳.۱.۳. فرض کنیم X فضایی باناخ، $f \in S_{\mathrm{X}^*}$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. همچنین فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ طوری باشد که $f(x) = ۱$، دراین‌صورت $d(x, \mathrm{H}) = ۱$ و

$$\lim_{\epsilon \to ۰} d(۰, \mathrm{P_H}(x, \epsilon)) = \lim_{\epsilon \to ۰} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \epsilon)).$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $\epsilon > ۰$،

$$\mathrm{P_H}(x, \epsilon) \subseteq x - J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱ + \epsilon}) + \epsilon B_{\mathrm{X}} \tag{۴.۳}$$

و

$$x - J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱ + \epsilon}) \subseteq \mathrm{P_H}(x, \epsilon) + \epsilon B_{\mathrm{X}}. \tag{۵.۳}$$

عنصر دلخواه $y \in \mathrm{P_H}(x,\epsilon)$ را در نظر می‌گیریم. داریم $\|x-y\| < ۱+\epsilon$. فرض کنیم $w = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ باشد، دراین‌صورت

$$f(w) = \frac{f(x)}{\|x-y\|} = ۱ - \left(۱ - \frac{f(x)}{\|x-y\|}\right) > ۱ - \left(۱ - \frac{۱}{۱+\epsilon}\right) = ۱ - \frac{\epsilon}{۱+\epsilon}.$$

حال چون $\|w\| = ۱$ لذا نتیجه می‌شود که $w \in J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱+\epsilon})$. همچنین $\|w-(x-y)\| \leq \epsilon$، بنابراین $y = x - w + w - (x-y)$ در مجموعه‌ی $x - J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱+\epsilon}) + \epsilon B_{\mathrm{X}}$ قرار دارد و لذا رابطه‌ی (۴.۳) برقرار است.

برای اثبات طرف دیگر شمول، عنصر دلخواه $z \in J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱+\epsilon})$ را در نظر می‌گیریم. دقت کنید که $f(z) > ۱ - \frac{\epsilon}{۱+\epsilon}$. فرض کنیم $v = \frac{z}{f(z)}$ و $y = x - v$ باشند، دراین‌صورت y متعلق به H است و $\|x-y\| = \|v\| < \frac{۱}{۱-\frac{\epsilon}{۱+\epsilon}} = ۱+\epsilon$ پس $y \in \mathrm{P_H}(x,\epsilon)$ است. بنابراین داریم:

$$\|v-z\| = \frac{\|z\||f(z)-۱|}{|f(z)|} \leq \|z\|(۱+\epsilon)\frac{\epsilon}{۱+\epsilon} \overset{\|z\|\leq ۱}{\leq} \epsilon.$$

حال $x - z = x - v + v - z$، از طرفی می‌دانیم که $x - v \in \mathrm{P_H}(x,\epsilon)$ و $v - z \in \epsilon B_{\mathrm{X}}$، بنابراین رابطه‌ی (۵.۳) نتیجه می‌شود.

حال از روابط (۴.۳) و (۵.۳) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$d(\circ, \mathrm{P_H}(x,\epsilon)) \geq d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱+\epsilon})) - \epsilon \geq d(\circ, \mathrm{P_H}(x,\epsilon)) - ۲\epsilon. \qquad (۶.۳)$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\lim_{\epsilon\to\circ} d(x, J_{\mathrm{X}}(f, \frac{\epsilon}{۱+\epsilon})) = \lim_{\epsilon\to\circ} d(x, J_{\mathrm{X}}(f,\epsilon)).$$

حال با میل دادن $\epsilon \to \circ$ در رابطه‌ی (۶.۳) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\epsilon\to\circ} d(\circ, \mathrm{P_H}(x,\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to\circ} d(x, J_{\mathrm{X}}(f,\epsilon)).$$

بنابراین حکم قضیه برقرار است.

□

حال با استفاده از قضیه‌ی (۲.۱.۳) زیرفضاهای E−پروکسیمینال را مشخصه سازی می‌کنیم.

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنیم Y زیرفضایی E−پروکسیمینال از فضای باناخ X باشد. دراین‌صورت برای هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d(x,\mathrm{Y}) = ۱$ داریم:

$$d(\circ, \mathrm{P_Y}(x)) = \lim_{\epsilon\to\infty} d(\circ, \mathrm{P_Y}(x,\epsilon)) \qquad (۷.۳)$$

یا به طور معادل

$$\inf\{\|y\| : y \in \mathrm{P_Y}(x)\} = \lim_{\epsilon\to\circ} \inf\{\|y\| : y \in \mathrm{P_Y}(x,\epsilon)\}.$$

برهان. برهان خلف فرض می‌کنیم که رابطه‌ی (۷.۳) برای $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d(x, \mathrm{Y}) = ۱$ برقرار نباشد. دراین‌صورت $\delta > ۰$ موجود است به طوری‌که

$$d(۰, \mathrm{P_Y}(x)) - \delta > \lim_{\epsilon \to ۰} d(۰, \mathrm{P_Y}(x, \epsilon)). \tag{۸.۳}$$

حال می‌توانیم دنباله‌ی کاهشی $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty} \subseteq \mathrm{Y}$ متناظر با x را طوری بسازیم که $\|x - y_n\| < ۱ + \frac{۱}{n}$ باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|y_n\| < d(۰, \mathrm{P_Y}(x)) - \delta$. لذا نتیجه می‌شود که

$$\alpha(x) \leq \sup_{۱ \leq n < \infty} \|y_n\| \leq d(۰, \mathrm{P_Y}(x)) - \delta.$$

بنابراین Y، E−پروکسیمینال نیست که با فرض قضیه در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم قضیه برقرار است. □

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_۱(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. همچنین فرض کنیم x متعلق به فضای X باشد به طوری که داشته باشیم:

$$۰ < \alpha = d(x, \mathrm{H}) < d(x, B_{\mathrm{H}}) = \beta.$$

حال اگر $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$، دراین‌صورت $d(\frac{\operatorname{sgn} f(x) x}{\beta}, \mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}) = \frac{۱}{\beta}$.
در حالتی که ابرصفحه‌ی H، Eـ پروکسیمینال باشد گزاره برقرار است. همچنین برای x های متعلق به $\mathrm{X} \backslash \mathrm{H}$ که در رابطه‌ی $d(x, \mathrm{H}) = d(x, B_{\mathrm{H}})$ صدق می‌کنند، این قضیه همچنان برقرار است.

برهان. دقت کنید که $\inf\{\|x - y\| \colon y \in B_{\mathrm{H}}\} = \beta = \inf\{\|x - y\| \colon y \in B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}\}$، لذا نتیجه می‌شود که

$$\inf\{\|z\| \colon z \in B[x, ۱] \cap \mathrm{H}_\alpha\} = \beta.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\inf\{\|w\| \colon w \in B[\frac{x}{\beta}, \frac{۱}{\beta}] \cap \mathrm{H}_\lambda\} = ۱. \tag{۹.۳}$$

بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنیم که $f(x) = \alpha$ باشد. اثبات در حالتی که $f(x) = -\alpha$ باشد به طور مشابه است.
به سادگی (۹.۳) نشان می‌دهد که:

$$d(\frac{x}{\beta}, \mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}) \geq \frac{۱}{\beta}.$$

حال برای تساوی کافیست نشان دهیم:

$$d(\frac{x}{\beta}, \mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}) \leq \frac{۱}{\beta}.$$

اگر ابرصفحه‌ی H، Eـپروکسیمینال باشد و داشته باشیم $\alpha = d(x.\mathrm{H}) = d(x, B_{\mathrm{H}}) = \beta$، دراین‌صورت شرط (۲) که در (۱.۱.۳) معرفی کردیم برقرار است و با توجه به قضیه‌ی (۱.۱.۳) داریم:

$$\inf\{\|x - \beta z\| \colon z \in J_{\mathrm{X}}(f)\} \leq ۱.$$

حال چون $\lambda = \frac{\alpha}{\beta} = ۱$ لذا $\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}} = J_{\mathrm{X}}(f)$ و داریم $d(\frac{x}{\beta}, J_{\mathrm{X}}(f)) \leq \frac{۱}{\beta}$. بنابراین در حالت $\lambda = ۱$ قضیه برقرار می‌شود.

حال فرض کنیم که $\lambda < ۱$ می‌دانیم که $d(x, B_{\mathrm{H}}) = \beta$، بنابراین برای $\epsilon > ۰$ داده شده، عنصر $y = y_\epsilon$ متعلق به B_{H} موجود است به طوری که $\beta \leq \|x - y\| \leq \beta(۱ + \epsilon)$.

حال فرض می‌کنیم که $v_\epsilon = \frac{x-y}{\beta}$ باشد. دراین‌صورت v_ϵ متعلق به H_λ است و $\|v_\epsilon\| > ۱$ می‌باشد.

حال چون $۰ < \lambda < ۱$، میتوانیم برای $\delta > ۰$، w هایی را متعلق به $\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}$ انتخاب کنیم به طوریکه $\|w\| = ۱ - \delta$ باشد.

حال عنصر $\mu = \frac{\delta}{\epsilon+\delta}$ را در نظر می گیریم و قرار می دهیم $u_\epsilon = \frac{\delta}{\epsilon+\delta}v_\epsilon + \frac{\epsilon}{\epsilon+\delta}w$، بنابراین $\|u_\epsilon\| \leq ۱$ و $u_\epsilon \in H_\lambda$ می‌باشد. حال داریم:

$$\begin{aligned}
\|\frac{x}{\beta} - u_\epsilon\| &= \|\frac{x}{\beta} - [\frac{\delta}{\epsilon + \delta}v_\epsilon + \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta}w]\| \\
&= \|\frac{x}{\beta} - \mu v_\epsilon - (۱ - \mu)w\| \\
&= \|\frac{x}{\beta} - \frac{\mu(x - y)}{\beta} - (۱ - \mu)w\| \\
&\leq \frac{(۱ - \mu)}{\beta}\|x\| + \frac{\mu}{\beta} + (۱ - \mu) \\
&= \frac{\delta}{(\epsilon + \delta)\beta} + \frac{\epsilon}{(\epsilon + \delta)\beta}\|x\| + \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta}.
\end{aligned}$$

حال چون $\epsilon > ۰$ دلخواه بود نتیجه می‌شود که $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda) \leq \frac{۱}{\beta}$ و لذا $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda) = \frac{۱}{\beta}$. □

قضیه ۵.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_۱(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. دراین‌صورت اگر H، Eـپروکسیمینال باشد و $B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda$ برای $۰ < \lambda \leq ۱$ در H_λ پروکسیمینال باشد، آنگاه H یک گوی پروکسیمینال است.

برهان. فرض کنیم $x \in \mathrm{X}$ دارای شرایط $d(x, \mathrm{H}) = d(x, B_{\mathrm{H}})$ باشد. در این‌صورت شرط (۲) که در (۳.۱.۱) معرفی شد برقرار است. حال چون $J_{\mathrm{X}}(f) = B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_۱$ در $\mathrm{H}_۱$ پروکسیمینال است لذا مجموعه‌ی $P_{B_{\mathrm{H}}}(x)$ ناتهی است.

عنصر $x \in \mathrm{X}$ را با شرط $۰ < d(x, \mathrm{H}) = \alpha < d(x, B_{\mathrm{H}}) = \beta$ در نظر می‌گیریم. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنیم که $f(x) = \alpha$، همچنین قرار می دهیم $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$، دراین‌صورت داریم $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda) = \frac{۱}{\beta}$. حال عنصر y متعلق به $B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\|\frac{x}{\beta} - y\| = \frac{۱}{\beta}$ یا به طور معادل $\|x - \beta y\| = ۱$. دقت کنید که

$$f(x - \beta y) = f(x) - \beta f(y) = \alpha - \beta\lambda = \alpha - \alpha = ۰.$$

بنابراین $x - \beta y \in B_{\mathrm{H}}$ می‌باشد. حال داریم $\|x - (x - \beta y)\| = \|\beta y\| \leq \|\beta\|$ که در آن $y \in B_{\mathrm{X}}$ است. بنابراین $x - \beta y$ یک بهترین تقریب برای B_{H} است. □

قضیه‌ی زیر نتیجه‌ی مستقیم قضایای (۴.۱.۳) و (۵.۱.۳) می‌باشد.

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_1(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. دراینصورت H یک گوی پروکسیمینال در X است اگر و تنها اگر H در X، $E-$پروکسیمینال باشد و $B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}_\lambda$ برای $0 < \lambda \leq 1$ در H_λ پروکسیمینال باشد.

۲.۳ گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه‌ها

در این بخش به مشخصه سازی گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه‌ها می‌پردازیم. برای این کار در ابتدا مفهوم نرم‌های **زیر دیفرانسیل پذیر قوی** یا به اختصار لاتین نرم‌های **SSD** [1] را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۳ نرم‌های زیر دیفرانسیل پذیر قوی

تعریف ۱.۲.۳. نرم $\|\cdot\|$ را روی فضای باناخ X در نقطه ی $x \in \mathrm{X}$ زیر دیفرانسیل پذیر قوی می‌نامیم و با نماد SSD نشان می‌دهیم، اگر حد یک‌طرفه‌ی

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(\|x + th\| - \|x\|)$$

به طور یکنواخت در $h \in S_{\mathrm{X}}$ موجود باشد.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنیم X فضای باناخ و $f \in S_{\mathrm{X}^*}$ باشند. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. نرم دوگان $\|\cdot\|_{\mathrm{X}^*}$ در f، SSD است.

۲. داریم $f \in NA_1(\mathrm{X})$ و برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ موجود است به طوریکه:

$$f(x) > 1 - \delta \Rightarrow d(x, J_{\mathrm{X}}(f)) < \epsilon.$$

۳. ابرصفحه‌ی $\mathrm{H} = \ker f$ در X پروکسیمینال قوی است.

برهان. به [۹] مراجعه کنید. □

---

[1] strongle sub-differentiable

۲.۲.۳ مشخصه‌سازی گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه‌ها

در قضیه زیر یک شرط لازم برای گوی پروکسیمینال قوی بودن یک ابرصفحه‌ی پروکسیمینال را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_{1}(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. دراین‌صورت اگر H گوی پروکسیمینال قوی باشد، آنگاه برای هر λ که $0 < \lambda \leq 1$، $\mathrm{H}_{\lambda} \cap B_{\mathrm{X}}$ در H_{λ} پروکسیمینال قوی است.

برهان. هر عنصر $x \in \mathrm{H}_{\lambda}$ را به طوری که $0 < \beta = d(x, \mathrm{H}_{\lambda} \cap B_{\mathrm{X}})$ در نظر می‌گیریم. حال بنابر قضیه‌ی (۱.۱.۳) داریم $d(\frac{x}{\beta}, B_{\mathrm{H}}) = \frac{1}{\beta}$. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد، $\epsilon_{1} > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\epsilon > \epsilon_{1}(1 + \beta)$ باشد. حال چون B_{H} پروکسیمینال قوی است لذا $\eta > 0$ی موجود است به طوری‌که اگر $w \in B_{\mathrm{H}}$ و $\|\frac{x}{\beta} - w\| < \frac{1}{\beta} + \eta$ باشند، آنگاه $w_{0} \in \mathrm{P}_{B_{\mathrm{H}}}(\frac{x}{\beta})$ی موجود است به طوری‌که $\|w - w_{0}\| < \epsilon_{1}$.

حال δ را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 < \delta < \epsilon_{1}$ و $\|x\|\frac{\delta}{\beta^{2}} < \eta$ باشد. فرض کنیم $y \in \mathrm{H}_{\lambda} \cap B_{\mathrm{X}}$ باشد به طوری‌که $\|x - y\| < \beta + \delta$. حال نشان می‌دهیم که $d(y, \mathrm{P}_{[\mathrm{H}_{\lambda} \cap B_{\mathrm{X}}]}(x)) < \epsilon$ و این اثبات را تمام می‌کند.

برای اثبات این ادعا فرض کنیم که $v = \frac{x-y}{\|x-y\|}$، دراین‌صورت v به B_{H} تعلق دارد، بنابراین

$$\begin{aligned} \left\|\frac{x}{\beta} - v\right\| &= \left\|\frac{x}{\beta} - \frac{x}{\|x-y\|} + \frac{y}{\|x-y\|}\right\| \\ &\leq \|x\|\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\|x-y\|}\right] + \frac{1}{\beta} \\ &\leq \|x\|\frac{\delta}{\beta^{2}} + \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\beta} + \eta. \end{aligned}$$

بنابراین v_{0}ی در $\mathrm{P}_{B_{\mathrm{H}}}(\frac{x}{\beta})$ موجود است به طوری‌که $\|v - v_{0}\| < \epsilon_{1}$. دقت کنید که $\left\|\frac{x}{\beta} - v_{0}\right\| = \frac{1}{\beta}$. بنابراین $x - \beta v_{0}$ در $\mathrm{H}_{\lambda} \cap B_{\mathrm{X}}$ قرار دارد و $\|x - (x - \beta v_{0})\| \leq \beta$، بنابراین $x - \beta v_{0}$ یک بهترین تقریب برای x از $\mathrm{H}_{\lambda} \cap B_{\mathrm{X}}$ است. حال داریم:

$$\begin{aligned} \left\|(x - \beta v_{0}) - y\right\| &= \left\|(x - y) - \beta v_{0}\right\| \\ &= \left\|v\|x - y\| - \beta v_{0}\right\| \\ &= \left\|v\|x - y\| - \beta v + \beta v - \beta v_{0}\right\| \\ &\leq \delta + \beta\|v - v_{0}\| \\ &< \delta + \beta\epsilon_{1} \\ &< \epsilon_{1}(1 + \beta) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

و لذا اثبات تمام است. □

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم X فضایی باناخ، $f \in NA_{۱}(\mathrm{X})$ و $\mathrm{H} = \ker f$ باشند. اگر برای هر $۰ < \lambda < ۱$، $\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}$ در H_λ پروکسیمینال قوی باشد، آنگاه B_{H} در هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d(x, \mathrm{H}) < d(x, B_{\mathrm{H}})$ پروکسیمینال قوی است.

برهان. عنصر $x \in \mathrm{X}$ را با شرط $۰ < \alpha = d(x, \mathrm{H}) < d(x, B_{\mathrm{H}}) = \beta$ در نظر می گیریم و قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$، دراین‌صورت $۰ < \lambda < ۱$ می‌باشد. حال بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که $f(x) = \alpha$. اثبات حالتی که $f(x) = -\alpha$ باشد، به‌صورت مشابه است. بنابر قضبه‌ی (۴.۱.۳) نتیجه می‌شود که $d(\frac{x}{\beta}, \mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}) = \frac{۱}{\beta}$. حال چون $۰ < \lambda < ۱$ لذا می‌توانیم عنصر $v_۰ \in \mathrm{H}_\lambda$ را طوری انتخاب کنیم که $\|v_۰\| < ۱$ باشد. فرض کنیم $\|v_۰\| = ۱ - \delta_۰$ که $\delta_۰ > ۰$ می‌باشد.
فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، $\epsilon_۱ > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{\epsilon}{۲\beta} > \epsilon_۱$ باشد. حال $\eta > ۰$ را با توجه به تعریف مجموعه‌های پروکسیمینال قوی از $H_\lambda \cap B_X$ به $\epsilon_۱$ متناظر می‌کنیم و فرض کنیم $۰ < \delta < \beta$ طوری باشد که رابطه‌ی $\frac{۳\delta}{\beta\delta_۰ + \delta} < \min\{\frac{\epsilon}{۲\beta}, \eta\}$ برقرار است. فرض کنیم $\mu = \frac{\delta}{\beta\delta_۰ + \delta}$، دراین‌صورت $۰ < \mu < ۱$ می‌باشد.
حال عنصر y متعلق به B_{H} را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم $\beta < \|x - y\| < \beta + \delta$. فرض کنیم $v_۱ = \frac{x-y}{\beta}$ و قرار می‌دهیم $v = \mu v_۰ + (۱ - \mu) v_۱$. دراین‌صورت $\|v\| \leq ۱$ و v به مجموعه‌ی $\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}$ تعلق دارد. بنابراین داریم:

$$\|v_۱ - v\| \leq \mu \|v_۰ - v_۱\| = \frac{۳\delta}{\beta\delta_۰ + \delta}.$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x}{\beta} - v\right\| &= \left\|\frac{x}{\beta} - v_۱ + v_۱ - v\right\| \\
&\leq \left\|\frac{x}{\beta} - v_۱\right\| + \left\|v_۱ - v\right\| \\
&= \left\|\frac{x}{\beta} - \frac{x-y}{\beta}\right\| + \left\|v_۱ - v\right\| \\
&\leq \frac{۱}{\beta} + \frac{۳\delta}{\beta\delta_۰ + \delta} \\
&< \frac{۱}{\beta} + \eta.
\end{aligned}$$

بنابراین $v_۰$ی متعلق به $\mathrm{P}_{[\mathrm{H}_\lambda \cap B_{\mathrm{X}}]}(\frac{x}{\beta})$ موجود است به طوری‌که داریم $\|v - v_۰\| < \epsilon$. حال داریم $\left\|\frac{x}{\beta} - v_۰\right\| = \frac{۱}{\beta}$ و لذا $x - \beta v_۰$ در B_{H} قرار دارد. بنابراین $\|x - (x - \beta v_۰)\| \leq \beta$. پس $x - \beta v_۰$

متعلق است به $P_{B_{\rm H}}(x)$. حال داریم $y-x+\beta v_۱=\circ$، لذا داریم:

$$\begin{aligned}\|y-(x-\beta v_\circ)\| &= \|(y-x)+\beta v_\circ\|\\ &= \|(y-x)+\beta v_۱+\beta(v-v_۱)+\beta(v_\circ-v)\|\\ &\le \beta\Big[\|v-v_۱\|+\|v-v_\circ\|\Big]\\ &\le \beta\frac{۳\delta}{\beta\delta_\circ+\delta}+\beta\epsilon_۱\\ &= \beta\Big[\frac{۳\delta}{\beta\delta_\circ+\delta}+\epsilon_۱\Big]\\ &< \beta\Big[\frac{\epsilon}{۲\beta}+\frac{\epsilon}{۲\beta}\Big]=\epsilon.\end{aligned}$$

و لذا اثبات تمام است. □

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f\in NA_۱({\rm X})$ و $\rm H=\ker f$ ابرصفحه‌ی پروکسیمینال قوی باشد. اگر $J_{\rm X}(f)$ در $\rm H_۱$ پروکسیمینال قوی باشد، آنگاه $B_{\rm H}$ در هر $x\in{\rm X}$ که دارای شرایط $d(x,{\rm H})=d(x,B_{\rm H})$ باشد، پروکسیمینال قوی است.

برهان. هر $x\in{\rm X}$ را با شرط $d(x,{\rm H})=d(x,B_{\rm H})=\beta$ به صورت دلخواه در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f(x)=\beta$ باشد. اثبات حالتی که $f(x)=-\beta$ است، به صورت مشابه است.
حال چون H پروکسیمینال قوی است لذا بنابر فضیه‌ی (۴.۱.۳) نتیجه می‌گیریم که :

$$d(\frac{x}{\beta},{\rm H}_۱\cap B_{\rm X})=d(\frac{x}{\beta},J_{\rm X}(f))=\frac{۱}{\beta}.$$

حال فرض می‌کنیم که $\epsilon>\circ$ داده شده باشد، $\epsilon_۱>\circ$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $(۲\beta+۱)\epsilon_۱<\epsilon$ باشد. فرض کنیم $\eta>\circ$ با شرط $\eta<۴\epsilon_۱$ بنابر پروکسیمینال قوی بودن $J_{\rm X}(f)$ و تعریف مجموعه‌های پروکسیمینال قوی به $\epsilon_۱$ متناظر شده باشد. حال طبق فرض ابرصفحه‌ی H در X پروکسیمینال قوی است، لذا بنابر قضیه‌ی (۱.۲.۳) $\delta_۱>\circ$ موجود است به طوری که اگر $w\in B_{\rm X}$ و $f(w)>۱-\delta_۱$ باشند، آنگاه $d(w,J_{\rm X}(f))<\frac{\eta}{۴}$ می‌باشد. حال $\circ<\delta<\epsilon_۱$ را طوری انتخاب می‌کنیم که روابط $\frac{\delta}{\beta}<\frac{\eta}{۴}$ و $\frac{\beta}{\beta+\delta}>۱-\delta_۱$ برقرار باشند.
فرض می‌کنیم $y_\circ\in B_{\rm H}$ باشد به طوری‌که $\|x-y_\circ\|<\beta+\delta$. قرار می‌دهیم $w=x-\beta\frac{x-y_\circ}{\|x-y_\circ\|}$. دراین‌صورت داریم

$$\begin{aligned}\|w-y_\circ\| &= \|(x-y_\circ)-\beta\frac{x-y_\circ}{\|x-y_\circ\|}\|\\ &= \|x-y_\circ\|-\beta\\ &< \delta.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $v=\frac{x-y_\circ}{\|x-y_\circ\|}$ باشد. دراین‌صورت $\|v\|=۱$ و داریم

$$f(v)=f\Big(\frac{x-y_\circ}{\|x-y_\circ\|}\Big)=\frac{f(x)}{\|x-y_\circ\|}=\frac{\beta}{\|x-y_\circ\|}>\frac{\beta}{\beta+\delta}>۱-\delta_۱.$$

بنابراین $v_\circ$ی متعلق به $J_X(f)$ موجود است به طوری‌که $\|v-v_\circ\| < \frac{\eta}{۴}$. حال چون $\|w-y_\circ\| < \delta$ و $y_\circ \in B_H$، لذا نتیجه می‌شود که $\|w\| < ۱+\delta$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x}{\beta}-v\right\| &= \frac{۱}{\beta}\|x-\beta v\| \\ &= \frac{۱}{\beta}\|x-\beta\frac{x-y_\circ}{\|x-y_\circ\|}\| \\ &= \frac{۱}{\beta}\|w\| \\ &\leq \frac{۱+\delta}{\beta} \\ &= \frac{۱}{\beta}+\frac{\delta}{\beta}.\end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود که:

$$\left\|\frac{x}{\beta}-v_\circ\right\| \leq \frac{۱}{\beta}+\frac{\delta}{\beta}+\frac{\eta}{۴} < \frac{۱}{\beta}+\eta.$$

بنابراین $u_\circ$ی متعلق به $J_X(f)$ موجود است به طوری‌که $\|u_\circ - v_\circ\| < \epsilon_۱$ و

$$\left\|\frac{x}{\beta}-u_\circ\right\| = d(\frac{x}{\beta}, J_X(f)) = \frac{۱}{\beta}.$$

حال نتیجه می‌شود که $\|x-\beta u_\circ\| = ۱$ و لذا $x-\beta u_\circ \in \mathrm{P_H}(x)\cap B_X = \mathrm{P}_{B_H}(x)$. دقت کنید که $\|x-y_\circ-\beta u_\circ\| < \delta$. حال داریم:

$$\begin{aligned}\|x-y_\circ-\beta u_\circ\| &= \|(x-y_\circ)-\beta u_\circ\| \\ &= \|(x-y_\circ)-\beta v+\beta(v_\circ-u_\circ)+\beta(v-v_\circ)\| \\ &\leq \delta+\beta\epsilon_۱+\beta\epsilon_۱ \\ &\leq (۲\beta+۱)\epsilon_۱ \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

و بنابراین اثبات قضیه تمام است. □

دو قضیه‌ی بعدی نتیجه‌ی مستقیم قضایای (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳) می‌باشند.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_۱(X)$ و $H = \ker f$ باشند. اگر برای هر $۰ < \lambda \leq ۱$، مجموعه‌ی $H_\lambda \cap B_X$ در H_λ پروکسیمینال قوی باشد، آنگاه H در X یک گوی پروکسیمینال قوی می‌باشد.

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنیم X فضای باناخ، $f \in NA_۱(X)$ و $H = \ker f$ ابر صفحه‌ی پروکسیمینال قوی باشد. دراین‌صورت ابرصفحه‌ی H در X گوی پروکسیمینال قوی است اگر و تنها اگر برای هر $۰ < \lambda \leq ۱$، مجموعه‌ی $H_\lambda \cap B_X$ در H_λ پروکسیمینال قوی باشد.

حال که به درک مناسبی از مشخصه سازی گوی پروکسیمینال و گوی پروکسیمینال قوی ابرصفحه‌ها رسیدیم، در بخش بعدی سعی می‌کنیم مثال‌هایی را معرفی کنیم که اهمیت این فصل را برای ما مشخص کنند.

۳.۳ ساخت مثال

در این بخش مراحل ساخت یک مثال از ابرصفحه‌ی چبیشف قوی را که گوی پروکسیمینال نیست، تشریح می‌کنیم. همچنین مثالی را از یک ابرصفحه‌ی $E-$پروکسیمینال که پروکسیمینال قوی نیست معرفی می‌کنیم.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنیم X فضایی باناخ و Y زیرفضایی چبیشف قوی از X باشد. دراین‌صورت برای هر $x \in \mathrm{X}$ با شرط $d(x, \mathrm{Y}) = d(x, B_{\mathrm{Y}})$، مجموعه‌ی $\mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}$ ناتهی است.

برهان. فرض کنیم y بهترین تقریب عنصر x از مجموعه‌ی Y باشد، به طوری‌که

$$\|x - y\| = d(x, \mathrm{Y}) = d(x, B_{\mathrm{Y}}).$$

فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای در B_{Y} باشد به طوریکه $\lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d(x, B_{\mathrm{Y}})$ (درواقع یعنی فرض کنیم $\{y_n\}$ یک دنباله کاهشی متناظر با x در B_{Y} باشد). چون Y چبیشف و پروکسیمینال قوی است لذا نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = ۰$، بنابراین $y \in B_{\mathrm{Y}}$ است و لذا $\mathrm{P}_{B_{\mathrm{Y}}}(x) = \{y\}$. بنابراین حکم قضیه ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم X فضای باناخ غیر انعکاسی باشد. دراینصورت برای برخی نرم های معادل، X شامل یک ابرصفحه‌ی بسته مانند H است که چبیشف است ولی گوی پروکسیمینال نیست.
به ویژه، برای هر $x \in \mathrm{X}$ که $d(x, \mathrm{H}) = d(x, B_{\mathrm{H}})$، مجموعه ی $\mathrm{P}_{B_{\mathrm{H}}}(x)$ ناتهی است.

برهان. اثبات این قضیه بر مبنای سه مرحله نرم گذاری مجدد معادل انجام می‌پذیرد.
فرض کنیم X فضای باناخ غیر انعکاسی، $g \in \mathrm{X}^* \setminus \{۰\}$ یک ابرصفحه‌ی بسته و $\mathrm{Y} = \ker g$ باشند. دراین‌صورت Y غیر انعکاسی است و بنابر قضیه‌ی جیمز (۵.۱.۱) تابعک $f \in \mathrm{X}^*$ با شرط $\|f\| = \|f|_{\mathrm{Y}}\| = ۱$ و $f|_{\mathrm{Y}} \notin NA(\mathrm{Y})$ موجود است. حال عنصر $y_۰$ متعلق به درون مجموعه‌ی $A = \{y \in B_{\mathrm{Y}} \colon \frac{۳}{۴} < f(y) < ۱\}$ نسبت به Y را انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\delta > ۰$ طوری باشد که گوی بسته‌ی $B_{\mathrm{Y}}[y_۰, \delta]$ شامل تمام نقاط درونی مجموعه‌ی A باشد. فرض کنیم

$$\alpha = \inf\{f(y) \colon y \in B_{\mathrm{Y}}[y_۰, \delta]\} \quad , \quad U = \{y \in B_{\mathrm{Y}} \colon |f(y)| \leq \alpha\}.$$

دقت کنید که $U \cap B_{\mathrm{Y}}[y_۰, \delta] = \emptyset$، زیرا f سوپریمم خود را روی B_{Y} اخذ نمی‌کند. حال عنصر $x_۰ \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $g(x_۰) = ۱$ و فرض می‌کنیم که $V = x_۰ + B_{\mathrm{Y}}[۰, \delta]$. قرار می‌دهیم

$$C = \bar{co}\{U \cup V \cup -V\}.$$

فرض کنیم X_C همان فضای باناخ X با نرم جدیدی باشد که تحت این نرم مجموعه‌ی C یک گوی یکه‌ی بسته باشد. دراین‌صورت $\|g\|_{X_C} = ۱$، $g \in NA(X_C)$ و $J_{X_C}(g) = V$ می‌باشند. به وضوح Y یک ابرصفحه‌ی پروکسیمینال در X_C می‌باشد. بنابراین اگر $z_۰ = x_۰ + y_۰$ دراین‌صورت

$$g(z_۰) = d(z_۰, Y) = ۱, \qquad P_Y(z_۰) = B[y_۰, \delta], \qquad \inf\{\|y\|_{X_C} : y \in P_Y(z_۰)\} = ۱$$

دقت کنید که بنابر تعریف مجموعه A، این اینفیمم اخذ نمی‌شود. لذا نتیجه می‌شود که $d(z_۰, Y) = d(z_۰, B_Y) = ۱$ اما $P_{B_Y}(z_۰) = \emptyset$.
حال برای ادامه‌ی اثبات مطالب جدید زیر را معرفی می‌کنیم. برای هر σ متعلق به $\{-۱, ۱\}$ و h متعلق به X^* قرار می‌دهیم:

$$H(h, \sigma) = \{y \in X : h(y) = \sigma\},$$

$$H^+(h, \sigma) = \{y \in X : h(y) \geq \sigma\}, \qquad H^-(h, \sigma) = \{y \in X : h(y) \leq \sigma\}.$$

حال بنابر مطالب تعریف شده در بالا، در ادامه نرم جدیدی را معرفی می‌کنیم:
نرم جدید $\|\cdot\|_۱$ روی X طوری موجود است که برای $f \in NA(X)$ با شرط $\|f\|_۱ = ۱$، اگر $H = \ker f$ باشد آن‌گاه عنصر $x_۱ \in X$ موجود است که دارای شرایط زیر می‌باشد:

$$|f(x_۱)| = d(x_۱, H) = d(x_۱, B_H) = ۱, \tag{۱۰.۳}$$

$$\inf\{\|y\|_۱ : y \in P_H(x_۱)\} = ۱ \quad , \quad P_{B_H}(x_۱) = \emptyset. \tag{۱۱.۳}$$

به وضوح اینفیمم فوق اخذ نمی‌شود و چون $P_H(x_۱) = x_۱ - f(x_۱)J_X(f)$، نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی $J_X(f)$ یک مجموعه‌ی تک عضوی نیست. گوی یکه‌ی بسته از $(X, \|\cdot\|_۱)$ را با B نمایش می‌دهیم.
بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $f(x_۱) = -۱$. به وضوح از روابط (۱۰.۳) و (۱۱.۳) نتیجه می‌گیریم که $B[x_۱, ۱] \cap B_H = \emptyset$. دقت کنید که $x_۱ + J_X(f)$ در $B[x_۱, ۱]$ قرار دارد و بنابراین $[x_۱ + J_X(f)] \cap B_H = \emptyset$. لذا رابطه‌ی زیر برقرار می‌شود:

$$[x_۱ + J_X(f)] \cap B = [x_۱ + J_X(f)] \cap B \cap H = [x_۱ + J_X(f)] \cap B_H = \emptyset. \tag{۱۲.۳}$$

بنابراین بر اساس قضیه‌ی جداسازی فیشر (۳.۱.۱)، $G \in X^*$ با شرط $\|G\|_۱ = ۱$ موجود است به طوری‌که

$$\inf G(x_۱ + J_X(f)) \geq \sup G(B) = \sup |G(B)| = ۱. \tag{۱۳.۳}$$

حال چون $f(x_۱) = -۱$ و $\inf G(x_۱ + J_X(f)) \geq ۱$ و بنابر رابطه (۱۳.۳) نتیجه می‌شود که $P_H(x_۱) = x_۱ + J_X(f)$. حال براساس رابطه‌ی (۱۰.۳) داریم $d(x_۱, B_H) = ۱$. حال با استفاده از رابطه‌ی (۱۱.۳) داریم

$$\inf G(x_۱ + J_X(f)) = ۱ = \sup G(B_H) = \sup G(B) \tag{۱۴.۳}$$

و

$$\inf\{\|y_1 - y_2\|_1 : y_1 \in x_1 + J_X(f), y_2 \in B_H\} = 0. \tag{۱۵.۳}$$

حال فرض کنیم

$$\alpha_1 = \inf\{G(y) : y \in J_X(f)\}.$$

اگر $\alpha_1 > -1$ باشد، هر عنصر $z \in H \cap H(G, -1 - \alpha_1)$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $E = J_X(f) + z$. اگر $\alpha_1 = -1$ باشد، عنصر $z = 0$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $E = J_X(f)$. حال عنصر x را به صورت $x = x_1 - z$ مشخص می‌کنیم. دراین‌صورت داریم:

$$x + E = x_1 + J_X(f). \tag{۱۶.۳}$$

حال دومین نرم جدید خود را روی X طوری معرفی می‌کنیم که تحت این نرم گوی یکه‌ی بسته X، مجموعه‌ی $\overline{co}[(B \cap H) \cup E \cup -E]$ باشد و این نرم را با $\|\cdot\|$ نمایش می‌دهیم. از این به بعد فضای X را با نرم $\|\cdot\|$ در نظر می‌گیریم، یعنی فضای مورد نظر ما $(X, \|\cdot\|)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} = \overline{co}[(B \cap H) \cup E \cup -E]$$

و

$$B \cap H = B_X \cap H = B_H.$$

حال بنابر روابط (۱۵.۳) و (۱۶.۳) نتیجه می‌شود که:

$$\inf\{\|y_1 - y_2\| : y_1 \in x + E, y_2 \in B_H\} = 0. \tag{۱۷.۳}$$

دقت کنید که

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B\} = 1.$$

بنابراین تابعک f نرم خود را روی B_X اخذ می‌کند و

$$E = B_X \cap H(f, 1) = J_X(f).$$

می‌دانیم که

$$f(x) = f(x_1) = -1, \qquad d(x, H) = 1, \qquad P_H(x) = x + E. \tag{۱۸.۳}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۱۲.۳) داریم:

$$(x + E) \cap B_X = (x + E) \cap B_X \cap H = (x + E) \cap B \cap H = \emptyset. \tag{۱۹.۳}$$

حال با استفاده از روابط (۱۷.۳) و ۱۸.۳ داریم:

$$\inf\{\|y\| : y \in P_H(x)\} = 1 \quad , \quad d(x, B_H) = 1.$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (۳.۱۹) نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{P}_{B_{\mathrm{H}}}(x) = \emptyset$.
با توجه به تعریف مجموعه‌ی E نتیجه می‌شود که $\inf G(E) = -۱$. حال چون $G(z) \leq ۰$، لذا از رابطه‌ی (۳.۱۳) نتیجه می‌شود که

$$۱ \geq \sup G(E) \geq \inf G(E) = -۱. \qquad (۲۰.۳)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۱۴.۳)، داریم

$$\sup\{|G(y)|\colon y \in B \cap \mathrm{H}\} = \sup\{G(y)\colon y \in B \cap \mathrm{H}\} = ۱.$$

حال به سادگی نتیجه می‌شود که

$$\sup\{G(y)\colon y \in B_{\mathrm{X}}\} = ۱ \quad , \quad \inf\{G(y)\colon y \in B_{\mathrm{X}}\} = -۱. \qquad (۲۱.۳)$$

به عبارت دیگر $\|G\| = ۱$. حال با استفاده از روابط (۱۴.۳)، (۱۶.۳) و (۲۱.۳) داریم:

$$\inf G(x+E) = ۱ = \sup G(B \cap \mathrm{H}) = \sup G(B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}) = \sup G(B_{\mathrm{X}}). \qquad (۲۲.۳)$$

حال چون $f(x) = -۱$ $\inf G(x+E) = ۱$ لذا می‌توانیم عنصر $v \in \mathrm{X}$ را با شرط $f(v) = \frac{۳}{۲}$ و $G(v) = ۰$ انتخاب کنیم. حال سومین گوی یکه را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\widetilde{B} = \overline{co}[B_{\mathrm{X}} \cup \{v\} \cup \{-v\}].$$

حال برای این گوی یکه‌ی ساخته شده، ادعاهای زیر را در قالب یک گزاره اثبات می‌کنیم.

گزاره ۲.۳.۳. داریم:

۱. $\widetilde{B} \cap \mathrm{H}(f,۱) \subseteq \mathrm{H}^{+}(G,-۱)$.

۲. $\widetilde{B} \cap \mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}^{-}(G,۱)$.

۳. $\widetilde{B} \cap \mathrm{H} \cap \mathrm{H}(G,۱) = B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H} \cap \mathrm{H}(G,۱)$.

۴. $\widetilde{B} \cap \mathrm{H}(f,۱) \cap \mathrm{H}(G,-۱) \subseteq E$.

برهان. چون $G(v) = ۰$، لذا طبق رابطه‌ی (۲۱.۳) داریم:

$$\widetilde{B} \subseteq \{y \in \mathrm{X}\colon |G(v)| \leq ۱\}. \qquad (۲۳.۳)$$

بنابراین روابط (۱) و (۲) برقرار هستند.
برای اثبات دو قسمت دیگر، ابتدا مطلب زیر را بیان می‌کنیم: اگر A_i برای $i = ۱,۲$ زیرمجموعه‌های بسته، کراندار و محدب از فضای X باشند و $A_۱ \cap A_۲ = \emptyset$ و اگر $g \in \mathrm{X}^*$ باشد و یکی از شرایط زیر برقرار باشد،

$$\gamma = \inf g(A_۲) < \inf g(A_۱)$$

یا

$$\sup g(A_1) < \sup g(A_2) = \gamma,$$

دراینصورت

$$\overline{co}(A_1 \cup A_2) \cap \mathrm{H}(g, \gamma) = A_2 \cap \mathrm{H}(g, \gamma). \tag{۲۴.۳}$$

حال قرار می‌دهیم $A_1 = \{v\}$ و $A_2 = B_{\mathrm{X}}$. لذا بنابر رابطه‌ی (۲۱.۳) و این مطلب که $G(v) = 0$ نتیجه می‌گیریم که برای هر $\sigma \in [-1, 1]$،

$$\widetilde{B} \cap \mathrm{H}(G, \sigma) = B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}(G, \sigma)$$

بنابراین قسمت (۳) برقرار است و همچنین داریم

$$\widetilde{B} \cap \mathrm{H}(G, -1) \cap \mathrm{H}(f, 1) = B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}(G, -1) \cap \mathrm{H}(f, 1) \subseteq B_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{H}(f, 1) = E.$$

بنابراین قسمت (۴) هم برقرار است و اثبات این گزاره تمام می‌شود. □

حال از این گزاره نتیجه‌ی زیر استخراج می‌شود، یادآوری می‌کنیم که بر اساس رابطه‌ی (۱۸.۳) داریم $f(x) = -1$ و بر اساس رابطه‌ی (۲۲.۳) برای هر $y \in E$ داریم $G(x+y) \geq 1$ یا به طور معادل $G(x) \geq 1 - G(y)$. حال بر طبق رابطه‌ی (۲۰.۳) نتیجه می‌گیریم که $G(x) \geq 1 - (-1) = 2$. حال نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۳.۳. بر اساس مطالب قبلی

الف) $(x + \widetilde{B}) \cap \mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}^+(G, 1)$.

ب) $(x + \widetilde{B}) \cap \mathrm{H} \cap \mathrm{H}(G, 1) \subseteq x + E$.

برهان. دقت کنید که قسمت الف) نتیجه‌ی مستقیم قسمت اول گزاره‌ی (۲.۳.۳) می‌باشد. برای قسمت ب) می‌دانیم که اگر $z = x + y$ که در آن $y \in \widetilde{B}$ و $f(z) = 0$، دراین‌صورت $f(y) = -f(x) = 1$. همچنین اگر $G(z) = 1$، دراین‌صورت

$$G(y) = G(z) - G(x) = 1 - G(x) \leq 1 - 2 = -1.$$

لذا نتیجه می‌شود که $G(y) = -1$. حال با توجه به رابطه‌ی (۲۳.۳) نتیجه می‌گیریم که y به مجموعه‌ی $\widetilde{B} \cap \mathrm{H}(f, 1) \cap \mathrm{H}(G, -1)$ تعلق دارد. حال براساس قسمت چهارم گزاره‌ی (۳.۳.۲) نتیجه می‌گیریم که y به E تعلق دارد، بنابراین $z \in x + E$ و اثبات تمام است. □

حال سومین و آخرین نرمگذاری خود را معرفی می‌کنیم. نرم جدید را روی فضای X طوری تعریف می‌کنیم که گوی یکه تحت این نرم، مجموعه‌ی $\widetilde{B}$ باشد. فضای باناخ X را تحت این نرم جدید، با $\widetilde{\mathrm{X}}$ نمایش می‌دهیم. همچنین این نرم جدید را با $\widetilde{\|\cdot\|}$ نمایش می‌دهیم. برای $y \in \mathrm{X}$ و $A \subseteq \mathrm{X}$ فاصله‌ی y از A در $\widetilde{\mathrm{X}}$ را با $\tilde{d}(y, A)$ نمایش می‌دهیم.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که H در $\widetilde{\mathrm{X}}$ گوی پروکسیمینال نیست.

گزاره ۳.۳.۳.

$$\tilde{d}(x, \widetilde{B}\cap \mathrm{H}) = ۱ \quad , \quad (x+\widetilde{B})\cap(\widetilde{B}\cap \mathrm{H}) = \emptyset.$$

به ویژه x بهترین تقریبی از $\widetilde{B}\cap\mathrm{H}$ ندارد و H در $\widetilde{\mathrm{X}}$ گوی پروکسیمینال نیست.

برهان. چون B_{X} مشمول در $\widetilde{B}$ است لذا:

$$\tilde{d}(x, \widetilde{B}\cap \mathrm{H}) \le d(x, \widetilde{B}\cap \mathrm{H}) \le d(x, B_{\mathrm{X}}\cap \mathrm{H}) = ۱. \tag{۲۵.۳}$$

حال بنابر قسمت دوم گزاره‌ی (۲.۳.۳) و قسمت دوم نتیجه‌ی (۱.۳.۳) نتیجه می‌شود که

$$(x+\widetilde{B})\cap(\widetilde{B}\cap\mathrm{H}) \subseteq \mathrm{H}(G, ۱).$$

حال بنابر قسمت سوم گزاره‌ی (۲.۳.۳) و قسمت دوم نتیجه‌ی (۱.۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned}(x+\widetilde{B})\cap(\widetilde{B}\cap\mathrm{H}) &= (x+\widetilde{B})\cap(\widetilde{B}\cap\mathrm{H})\cap\mathrm{H}(G,۱)\\ &= (x+\widetilde{B})\cap\mathrm{H}\cap\mathrm{H}(G,۱)\cap B_{\mathrm{X}}\\ &\subseteq [x+E]\cap B_{\mathrm{X}}.\end{aligned}$$

اما طبق رابطه‌ی (۱۹.۳)، می‌دانیم که $[x+E]\cap B_{\mathrm{X}} = \emptyset$. لذا نتیجه می‌گیریم که:

$$(x+\widetilde{B})\cap(\widetilde{B}\cap\mathrm{H}) = \emptyset. \tag{۲۶.۳}$$

بنابراین $\tilde{d}(x, \widetilde{B}\cap\mathrm{H}) \ge ۱$ و بر طبق رابطه‌ی (۳.۲۵)، داریم $\tilde{d}(x, \widetilde{B}\cap\mathrm{H}) = ۱$. حال بنابر رابطه‌ی (۲۶.۳)، اثبات گزاره کامل می‌شود. □

حال می‌خواهیم نشان دهیم که ابرصفحه‌ی $\mathrm{H} = \ker f$ در $\widetilde{\mathrm{X}}$ چبیشف و پروکسیمینال قوی است. به وضوح H چبیشف است، زیرا که $J_{\widetilde{\mathrm{X}}}(f) = \{v\}$ یک مجموعه‌ی تک عضوی است.
از قبل می‌دانیم که اگر برای $\delta > ۰$،

$$J_{\mathrm{X}}(f,\delta) = \{y\in B_{\mathrm{X}} \colon f(y) > \|f\| - \delta\}$$

دراین‌صورت H در X پروکسیمینال قوی است اگر و تنها اگر

$$\limsup_{\delta\to ۰}\{d(y, J_{\mathrm{X}}(f))\colon y\in J_{\mathrm{X}}(f,\delta)\} = ۰. \tag{۲۷.۳}$$

می‌دانیم که $\sup\{f(y)\colon y\in B_{\mathrm{X}}\} = ۱$ و $f(v) = \frac{۳}{۲}$. فرض کنیم $۰ < \delta < \frac{۱}{۲}$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}J_{\widetilde{B}}(f,\delta) &= \{x\in\widetilde{B}\colon f(y) > \tfrac{۳}{۲} - \delta\}\\ &= \overline{co}[B_{\mathrm{X}}\cup\{v\}]\cap\{y\in \mathrm{X}\colon f(y) > \tfrac{۳}{۲} - \delta\}.\end{aligned}$$

حال برای هر $w \in co[B_{\mathrm{X}} \cup \{v\}]$ با شرط $f(w) > \frac{۳}{۴} - \delta$، به سادگی قابل بررسی است که $w = \lambda v + (۱-\lambda)y$، که در آن $y \in B_{\mathrm{X}}$ و $۱ - ۲\delta < \lambda \leq ۲\delta(۱+\|v\|)$. بنابراین

$$\sup\{\|y-v\| \colon y \in J_{\widetilde{B}}(f,\delta)\} \leq (۱-\lambda)(۱+\|v\|) \leq ۲\delta(۱+\|v\|).$$

بنابراین رابطه‌ی (۲۷.۳) برقرار است و نتیجه می‌شود که H در $\widetilde{\mathrm{X}}$ پروکسیمینال قوی است.
بنابراین اثبات قضیه تمام است. □

حال با استفاده از قضیه‌ی (۱.۳.۳) و گزاره‌ی (۱.۳.۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که ابرصفحه‌ی چبیشف قوی $\mathrm{H} = \ker f$ در فضای باناخ $\widetilde{\mathrm{X}}$ دارای شرایط زیر است:

۱. هر عنصر $y \in \widetilde{\mathrm{X}}$ با شرط $d(y,\mathrm{H}) = d(y, B_{\mathrm{H}})$ دارای یک بهترین تقریب از گوی یکه بسته H می‌باشد.

۲. ابرصفحه‌ی H در $\widetilde{\mathrm{X}}$ گوی پروکسیمینال نیست.

حال مثالی از یک ابرصفحه‌ی E−پروکسیمینال که پروکسیمینال قوی نیست، ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۳.۳. در این مثال ابرصفحه ی H را طوری می سازیم که اگر $d(x,\mathrm{H}) = d(x, B_{\mathrm{H}})$، آنگاه داشته باشیم $\inf\{\|y\| \colon y \in \mathrm{P}_{\mathrm{H}}(x)\} \leq ۱$ (E−پروکسیمینال)، در حالی که پروکسیمینال قوی نباشد. فرض کنیم $\mathrm{X} = c$ فضای تمام دنباله‌های همگرا از اسکالرهای حقیقی با نرم سوپریمم باشد. فرض کنیم f در c^* توسط $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲^۲}, \ldots, \frac{۱}{۲^n}, \ldots)$ القا شده باشد. در این‌صورت $\|f\| = ۱$، بنابراین $J_{\mathrm{X}}(f) = \{\mathrm{e}\}$ که e دنباله‌ی ثابت ۱ در c است. بنابراین $\mathrm{H} = \ker f$ ابرصفحه‌ای چبیشف است.
هر دنباله‌ی $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در c را با شرایط $\inf\{\|y\| \colon y \in \mathrm{P}_{\mathrm{H}}(x)\} > ۱$، در نظر می‌گیریم. حال در این حالت نشان می‌دهیم که $d(x, B_{\mathrm{H}}) > d(x,\mathrm{H})$. می‌دانیم که $\mathrm{P}_{\mathrm{H}}(x) = \{x - f(x)\mathrm{e}\}$. فرض کنیم برای $\delta > ۰$ داشته باشیم $\|x - f(x)\mathrm{e}\| = ۱ + \delta$. فرض کنیم $d = d(x,\mathrm{H})$، در این صورت $d = |f(x)|$. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنیم $f(x) = d$، در این صورت چون داریم $\|x - f(x)\mathrm{e}\| = ۱ + \delta$، لذا نتیجه می‌شود که یک عدد صحیح مثبت $m \geq ۱$ موجود است به طوری که یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

$$x_m \geq d + ۱ + \frac{۳\delta}{۴} \quad \text{یا} \quad x_m \leq d - \left(۱ + \frac{۳\delta}{۴}\right). \tag{۲۸.۳}$$

حال هر عنصر $y \in P_{\mathrm{H}}$ با این شرایط که $\|x-y\| < d + \epsilon$ باشد را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $w = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. در این‌صورت $\|w\| = ۱$ و

$$f(w) = \frac{f(x)}{\|x-y\|} \geq \frac{d}{d+\epsilon}. \tag{۲۹.۳}$$

فرض کنیم که $y' = x - f(x)w$. در این صورت:

$$\begin{aligned}\|y - y'\| &= \|x - y - f(x)w\| \\ &= \left\|(x-y) - f(x)\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| \\ &= |\,\|x-y\| - f(x)| < \epsilon.\end{aligned}$$

حال هر دنباله‌ی (z_k) را در H با این شرایط که $\lim_{k\to\infty}\|x - z_k\| = d$، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\epsilon_k > ۰$ طوری باشد که $\lim_{k\to\infty}\epsilon_k = ۰$ و برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|x - z_k\| < d + \epsilon_k$. بنابراین طبق مطالب گفته شده می‌توانیم دنباله‌ی $(w_k)_{k=۱}^{\infty}$ را طوری انتخاب کنیم که $\|w_k\| = ۱$ و $f(w_k) > \frac{d}{d+\epsilon_k}$ باشد و اگر $v_k = x - f(x)w_k$، آنگاه برای هر k، داشته باشیم $\|z_k - v_k\| < \epsilon_k$. بنابراین داریم:

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k - v_k\| = ۰. \tag{۳۰.۳}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\lim_{k\to\infty} f(w_k) = ۱. \tag{۳۱.۳}$$

فرض کنیم برای $k \geq ۱$ داشته باشیم $w_k = (w_n^k)_{n=۱}^{\infty}$. برای هر k داریم $\|w_k\|_\infty = ۱$، بنابراین طبق رابطه‌ی (۳۱.۳) نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \geq ۱$ $\lim_{k\to\infty} w_n^k = ۱$. و در حالت خاص $\lim_{k\to\infty} w_m^k = ۱$ جایی که m در رابطه‌ی (۲۸.۳) تعریف شده است. بنابراین عدد صحیح و مثبت $k_۰$ موجود است به طوری که

$$۱ \geq w_m^k > ۱ - \frac{\delta}{۲d}, \quad \forall k \geq k_۰. \tag{۳۲.۳}$$

حال برای هر k داریم $v_m^k = x_m^k - f(x)w_m^k = x_m^k - dw_m^k$. حال روابط (۲۸.۳) و (۳۲.۳)، نتیجه می‌دهند که

$$|v_m^k| \geq ۱ + \frac{\delta}{۴}, \quad \forall k \geq k_۰.$$

بنابراین رابطه‌ی (۳.۳۰)، نتیجه می‌دهد که یک عدد صحیح و مثبت $k_۱$ موجود است به طوری‌که

$$|z_m^k| \geq ۱ + \frac{\delta}{۵}, \quad \forall k \geq k_۱.$$

به ویژه داریم

$$\|z_k\|_\infty \geq ۱ + \frac{\delta}{۵}, \quad \forall k \geq k_۱.$$

بنابراین z_k به B_{H} تعلق ندارد. لذا نتیجه می‌شود که اگر (u_k) دنباله‌ای در B_{H} با این شرایط باشد که $\lim_{k\to\infty}\|x - u_k\| = \alpha$، آنگاه $\alpha > d$. یعنی $d(x, B_{\mathrm{H}}) > d = d(x, \mathrm{H})$. که این با فرض در تناقض است، بنابراین $\mathrm{H} = \ker f$ پروکسیمینال قوی نیست.

فصل ۴

فضاهای به طور همزمان پروکسیمینال قوی

در این فصل به ارتباط بین فضاهای پروکسیمینال قوی و نظریه‌ی بهترین تقریب همزمان [۱] می‌پردازیم. ابتدا مبانی بهترین تقریب همزمان را معرفی می‌کنیم، سپس قضایای مفیدی در زمینه‌ی فضاهای به طور همزمان پروکسیمینال قوی ارائه می‌دهیم.

۱.۴ بهترین تقریب همزمان

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم X فضایی باناخ، W زیر مجموعه‌ای از X و S یک زیر مجموعه‌ی کراندار از X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$d(S,W)=\inf_{w\in W}\sup_{s\in S}\|s-w\|.$$

عنصر $w_\circ\in W$ یک بهترین تقریب همزمان S از W نامیده می‌شود هرگاه:

$$d(S,W)=\sup_{s\in S}\|s-w_\circ\|.$$

[۱] Best simultaneous approximation

مجموعه‌ی تمام بهترین تقریب‌های همزمان S از W را با $L_W(S)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_W(S) = \{w \in W \colon \sup_{s\in S} \|s - w\| = d(S, W)\}.$$

اگر برای هر مجموعه‌ی کراندار S در X، حداقل یک بهترین تقریب همزمان S از W وجود داشته باشد، در این‌صورت W را یک زیر مجموعه‌ی به طور همزمان پروکسیمینال از X می‌نامیم.
اگر برای هر مجموعه‌ی کراندار S در X، فقط یک بهترین تقریب همزمان یکتا برای S از W وجود داشته باشد، دراین‌صورت W را یک زیرمجموعه‌ی به طور همزمان چبیشف از X می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنیم X فضایی باناخ، $A \subseteq \mathrm{X}$ و S یک زیرمجموعه‌ی کراندار از X باشد. در این‌صورت احکام زیر برقرار می‌باشند:

۱. به ازای هر $y \in A$ داریم $d(S + y, A) = d(S, A)$.

۲. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $d(\alpha S, A) = |\alpha| d(S, A)$.

۳. به ازای هر $y \in \mathrm{X}$ داریم $L_{A+y}(S + y) = L_A(S) + y$.

۴. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $L_{\alpha A}(\alpha S) = \alpha L_A(S)$.

برهان. با استفاده از تعریف قبل واضح است. □

لم ۱.۱.۴. فرض کنیم X فضایی باناخ و $M \subseteq \mathrm{X}$ زیرفضایی پروکسیمینال از X باشد. دراین‌صورت برای هر مجموعه‌ی کراندار و غیر تهی S از X داریم:

$$d(S, M) = \sup_{s\in S} \inf_{m\in M} \|s - m\|.$$

برهان. از اینکه M پروکسیمینال است لذا نتیجه می‌گیریم که برای هر $s \in S$ عنصر $m_s \in M$ وجود دارد به طوری‌که

$$\|s - m_s\| = \inf_{m\in M} \|s - m\|. \qquad (۱.۴)$$

بنابراین از رابطه‌ی (۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} d(S, M) &= \inf_{m\in M} \sup_{s\in S} \|s - m\| \\ &\le \sup_{s\in S} \|s - m_s\| = \sup_{s\in s} \inf_{m\in M} \|s - m\| \\ &\le \inf_{m\in M} \sup_{s\in S} \|s - m\| = d(S, M). \end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود که $d(S, M) = \sup_{s\in S} \inf_{m\in M} \|s - m\|$. □

۲.۴ فضاهای به طور همزمان پروکسیمینال قوی

همان طور که در فصل دوم به معرفی فضاهای پروکسیمینال قوی، فضاهای فشرده‌ی تقریبی و فضاهای چبیشف قوی پرداختیم، دراین قسمت این فضاهای معرفی شده را در زمینه‌ی بهترین تقریب همزمان بررسی می‌کنیم. در ابتدا چند تعریف جدید را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۴. ۱. زیر مجموعه‌ی به طور همزمان پروکسیمینال W از فضای باناخ X را به طور همزمان پروکسیمینال قوی نامیم، اگر برای هر زیر مجموعه‌ی کراندار S از X و برای هر دنباله‌ی کاهشی $\{y_n\} \subseteq W$ متناظر با S، به این معنی که $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{s\in S}\|s-y_n\| = d(S,W)$، زیر دنباله‌ی $\{y_{n_k}\}$ و دنباله‌ی $\{z_k\} \subseteq L_W(S)$ موجود باشند، به طوری‌که $\|y_{n_k}-z_k\| \to \circ$.

۲. زیر مجموعه‌ی W از فضای باناخ X را به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی نامیم، اگر برای هر زیر مجموعه‌ی کراندار S از X، هر دنباله‌ی کاهشی $\{y_n\} \subseteq W$ متناظر با S دارای یک زیر دنباله‌ی همگرا در W باشد.

۳. زیر مجموعه‌ی W از فضای باناخ X را به طور همزمان چبیشف قوی نامیم، اگر برای هر زیر مجموعه‌ی کراندار S از X، دنباله‌ی کاهشی $\{y_n\} \subseteq W$ متناظر با S همگرا باشد.

در این قسمت می‌خواهیم نشان دهیم که اگر W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی باشد، دراینصورت W به طور همزمان پروکسیمنال قوی است و عکس این مطلب برقرار است اگر برای هر زیر مجموعه‌ی کراندار S از X، مجموعه‌ی $L_W(S)$ فشرده باشد.

گزاره ۱.۲.۴. فرض کنیم W زیر فضایی متناهی بعد از فضای باناخ X باشد، دراینصورت W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است.

برهان. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای کراندار از X و $\{y_n\} \subseteq W$ دنباله‌ی کاهشی متناظر با S باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in S}\|s-y_n\| = d(S,W).$$

حال اگر قرار دهیم $a_n = \sup\limits_{s\in S}\|s-y_n\|$، نتیجه می‌گیریم که دنباله‌ی $\{a_n\}$، یک دنباله‌ی همگرا از اعداد حقیقی است و لذا طبق خواص دنباله‌ها کراندار است. بنابراین $M_۱ > \circ$ موجود است به طوری‌که برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $\|a_n\| = \sup\limits_{s\in S}\|s-y_n\| \le M_۱$ از طرفی می‌دانیم که مجموعه‌ی S کراندار است، لذا $M_۲ > \circ$ موجود است به طوریکه برای هر $s \in S$ داریم $\|s\| \le M_۲$. می‌دانیم که برای هر $s \in S$ و هر n داریم $\|y_n\| \le \|y_n - s\| + \|s\|$ و لذا

$$\|y_n\| \le \sup_{s\in S}\|y_n-s\| + \sup_{s\in S}\|s\| \le M_۱ + M_۲ = M.$$

لذا نتیجه می‌شود که $\{y_n\}$ یک دنباله‌ی کراندار در W است. حال چون W متناهی بعد بود لذا وجود دارد زیر دنباله‌ی $\{y_{n_k}\} \to y_\circ \in W$. بنابراین W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است. $\square$

گزاره‌ی قبل نشان می‌دهد که اگر $\{y_n\} \subseteq W$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با S باشد، دراین‌صورت $\{y_n\}$ کراندار است. بنابراین اگر W یک زیر مجموعه‌ی بسته از فضای متناهی بعد X باشد، دراین‌صورت W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است.

در ارتباط با زیر فضاهای به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی و زیر فضاهای به طور همزمان پروکسیمینال قوی قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنیم W یک زیرمجموعه‌ی بسته از فضای باناخ $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ باشد، دراین‌صورت W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است، اگر و تنها اگر W به طور همزمان پروکسیمینال قوی باشد و $L_W(S)$ برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S از X، فشرده باشد.

برهان. فرض کنیم W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی باشد و S یک زیر مجموعه‌ی کراندار از X باشد. فرض کنیم $\{y_n\} \subseteq W$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با S باشد، به این معنی که

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|s - y_n\| = d(S, W). \qquad (۲.۴)$$

چون W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است، لذا $\{y_n\}$ دارای یک زیر زیر دنباله $\{y_{n_k}\} \to y_\circ \in W$ می‌باشد. از رابطه‌ی (۲.۴) داریم $\sup_{s\in S} \|s - y_\circ\| = d(S, W)$، یعنی $y_\circ \in L_W(S)$. بنابراین W برای S به طور همزمان پروکسیمینال است. دراینصورت برای دنباله‌ی ثابت $\{y_\circ\} \subseteq L_W(S)$، داریم $\|y_{n_k} - y_\circ\| \to \circ$. بنابراین W برای S به طور همزمان پروکسیمینال قوی است.

حال فرض کنیم $\{z_n\}$ یک دنباله‌ی دلخواه در $L_W(S)$ باشد، به این معنی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\sup_{s\in S} \|s - z_n\| = d(S, W)$. دراین‌صورت $\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|s - z_n\| = d(S, W)$ و بنابراین $\{z_n\}$ یک دنباله کاهشی متناظر با S است. چون W به طور همزمان فشرده تقریبی است، لذا $\{z_n\}$ دارای یک زیردنباله همگرا مانند $\{z_{n_k}\}$ می‌باشد. بنابراین $L_W(S)$ فشرده می‌باشد.

حال برای اثبات عکس قضیه فرض کنیم W به طور همزمان پروکسیمینال قوی باشد و $L_W(S)$ برای هر زیر مجموعه‌ی کراندار S از X فشرده باشد. فرض کنیم $\{y_n\} \subseteq W$ یک دنباله کاهشی متناظر با S باشد. چون W به طور همزمان پروکسیمینال قوی است، لذا زیردنباله $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ و دنباله‌ی $\{z_k\} \subseteq L_W(S)$ وجود دارند به طوریکه $\|y_{n_k} - z_k\| \to \circ$. حال چون $L_W(S)$ فشرده است لذا $\{z_k\}$ دارای یک زیر دنباله $\{z_{k_t}\} \to z_\circ \in W$ می باشد. لذا نتیجه می‌شود که $\{y_{n_k}\} \to z_\circ$ و لذا W به طور همزمان فشرده تقریبی است. $\square$

حال با استفاده از گزاره‌ی (۱.۲.۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۴. فرض کنیم W یک زیر فضای متناهی بعد از فضای باناخ $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ باشد. دراینصورت W برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S از X به طور همزمان پروکسیمینال قوی است و همچنین $L_W(S)$ فشرده است.

حال چون زیر مجموعه‌های متناهی بعد فضاهای خطی و نرمدار به طور همزمان فشرده هستند لذا نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۴. فرض کنیم W یک زیرمجموعه‌ی متناهی بعد از فضای خطی نرمدار $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ باشد. دراین‌صورت W برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S از X به طور همزمان پروکسیمینال قوی است و همچنین $L_W(S)$ فشرده است.

قضیه‌ی زیر ارتباط بین فضاهای به طور همزمان فشرده تقریبی، به طور همزمان چبیشف قوی و به طور همزمان پروکسیمینال قوی، را ارائه می‌دهد.

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنیم W یک زیرمجموعه‌ی بسته از فضای باناخ X باشد. دراینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. W به طور همزمان چبیشف قوی است.

۲. W به طور همزمان پروکسیمینال قوی است و به طور همزمان چبیشف است.

۳. W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی و به طور همزمان چبیشف است.

برهان.

(۱)⇐(۲) . چون W به طور همزمان چبیشف قوی است لذا به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است و بنابر قضیه‌ی (۱.۲.۴) نتیجه می‌شود که W به طور همزمان پروکسیمینال قوی است. حال فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی کراندار از X باشد و فرض کنیم $w_۱, w_۲ \in L_W(S)$ با شرط $w_۱ \neq w_۲$ باشند. دراین‌صورت

$$\sup_{s\in S} \|s - w_۱\| = d(S, W) = \sup_{s\in S} \|s - w_۲\|.$$

دنباله‌ی $\{y_n\} \subseteq W$ را در نظر می‌گیریم به طوری‌که $y_{۲n} = w_۱$ و $y_{۲n+۱} = w_۲$. دراینصورت $\{y_n\}$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با S در W است. بنابراین $w_۱ = w_۲$ و لذا W به طور همزمان چبیشف است.

(۲)⇐(۳) . نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی (۱.۲.۴) است.

(۳)⇐(۱) . فرض کنیم $\{y_n\} \subseteq W$ دنباله‌ی کاهشی متناظر با زیر مجموعه‌ی کراندار S از X باشد، به این معنی که $\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|s - y_n\| = d(S, W)$. چون W به طور همزمان فشرده تقریبی است، لذا $\{y_n\}$ دارای زیردنباله‌ی $\{y_{n_k}\} \to y_۰$ می‌باشد. دراینصورت $\sup_{s\in S} \|s - y_۰\| = d(S, W)$،

یعنی $y_\circ \in L_W(S)$. حال ادعا می‌کنیم که هر زیردنباله از $\{y_n\}$ به $y_\circ$ همگراست. فرض کنیم $\{y_n\}$ دارای یک زیر دنباله مانند $\{y_{n_i}\}$ باشد به طوری‌که $\{y_{n_i}\} \to z_\circ$ و $z_\circ \neq y_\circ$ باشد. دراینصورت $\sup\limits_{s\in S}\|s - z_\circ\| = d(S, W)$، یعنی همچنین $z_\circ$ یک بهترین تقریب همزمان برای S از W می‌باشد. از طرفی W به طور همزمان چبیشف است و بنابراین $y_\circ = z_\circ$ که این یک تناقض است. در نتیجه هر زیردنباله از $\{y_n\}$ به $y_\circ$ همگراست، بنابراین $\{y_n\} \to y_\circ$. پس W به طور همزمان چبیشف قوی است. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که مجموعه‌های به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی حتما نیاز نیست که به طور همزمان چبیشف قوی باشند.

مثال ۱.۲.۴. فرض کنیم $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^۲, \|\cdot\|)$، که $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$ باشد. همچنین فرض کنیم $W = \{(x,\circ) : x \in \mathbb{R}\}$ و $S = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$ باشند. دراین‌صورت W زیرفضای متناهی بعد از X است. همچنین به سادگی قابل بررسی است که W به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است. حال زیر دنباله‌ی $\{y_n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $y_{۲n} = (۲/۵, \circ)$ و $y_{۲n+۱} = (۱/۵, \circ)$. دراینصورت $\{y_n\}$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با S است که همگرا نیست. بنابراین W به طور همزمان چبیشف نیست.

در ادامه نکاتی را یادآوری می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۲.۴. در حالی که زیرمجموعه‌های فشرده تقریبی از فضاهای باناخ پروکسیمینال قوی هستند، حتما لازم نیست که زیرمجموعه‌های پروکسیمینال قوی، فشرده‌ی تقریبی باشند.
فرض کنیم $\mathrm{X} = l_\infty$ و $W = c_\circ$. دراینصورت W در X پروکسیمینال قوی است. حال برای $x = (۱,۱,۱,\ldots) \in l_\infty$، دنباله‌ی $y_n = (۱,۱,\ldots,۱,\circ,\circ,\ldots)$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با x است. به سادگی قابل بررسی است که دنباله‌ی $\{y_n\}$ هیچ زیردنباله‌ی همگرایی ندارد.

۱. یک زیر مجموعه‌ی پروکسیمینال از فضای باناخ حتما لازم نیست که پروکسیمینال قوی باشد. حتی زیر مجموعه‌های محدب پروکسیمینال هم نیاز نیست حتما پروکسیمینال قوی باشند.

۳.۴ جمع و خارج قسمت زیر فضاهای به طور همزمان پروکسیمینال قوی

ابتدا تعریف فضاهای خارج قسمتی و نرم این فضاهارا معرفی می‌کنیم:

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم M زیرفضایی از فضای باناخ X باشد. همچنین فرض کنیم $\sim$ یک رابطه روی X باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M.$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی M است. دسته هم ارزی $x \in \mathrm{X}$ را با $[x]$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in \mathrm{X} \colon y \sim x\} \\ &= \{y \in \mathrm{X} \colon y - x \in M\} \\ &= \{y \in \mathrm{X} \colon y \in x + M\} = x + M.\end{aligned}$$

مجموعه‌ی $[x] = x + M = \{x + m \colon m \in M\}$ یک همدسته‌ی M در X نامیده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی همدسته‌های هم ارزی را با نماد X/M نمایش داده و آن را فضای خارج قسمتی می‌نامیم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{X}/M = \{x + M \colon x \in \mathrm{X}\}.$$

فضای X/M دارای ساختار برداری است که عمل جمع و ضرب اسکالر آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M \qquad (x, y \in \mathrm{X})$$

$$\lambda(x + M) = \lambda x + M \qquad (\lambda \text{ اسکالر دلخواه است}).$$

لذا اینصورت فضای خارج قسمتی X/M یک فضای خطی نرمدار با نرم تعریف شده به صورت زیر است:

$$\|x + M\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|.$$

حال با چند تعریف و گزاره‌ی جدید آشنا می‌شویم.

تعریف ۲.۳.۴. فرض کنیم X فضایی باناخ و G زیر فضایی بسته از X باشد. برای زیر مجموعه‌ی متناهی $E \subseteq \mathrm{X}$ و تابعک پیوسته‌ی $f \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ قرار می‌دهیم

$$d_f(E, G) = \inf\{\sum_{e \in E} f(\|e - g\|) \quad , \quad g \in G\}.$$

به طوری که حتما لازم نباشد که اینفیمم اخذ شود. در حالتی که اینفیمم اخذ شود، G را به طور همزمان f−پروکسیمینال در X می‌نامیم.

گزاره ۱.۳.۴. اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد حقیقی مثبت باشند، دراینصورت

$$\inf A + \inf B = \inf(A \oplus B)$$

که در آن $A \oplus B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$.

برهان. می‌دانیم که $\inf A + \inf B \leq \inf(A \oplus B)$. برای عکس نامساوی فرض کنیم که

$$\inf A + \inf B < \inf(A \oplus B).$$

دراین‌صورت برای $\epsilon > ۰$ مفروض، $a \in A$ و $b \in B$ موجودند به طوریکه $۰ < a \leq \inf A + \epsilon$ و $۰ < b \leq \inf B + \epsilon$. حال $۰ < ۲\epsilon < \inf(A \oplus B) - \inf A - \inf B$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned}
۰ < a + b &\leq \inf A + \inf B + ۲\epsilon \\
&< \inf A + \inf B + \inf(A \oplus B) - \inf A - \inf B \\
&= \inf(A \oplus B).
\end{aligned}$$

که این یک تناقض است بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\inf A + \inf B = \inf(A \oplus B)$. □

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنیم F یک زیرفضای به طور همزمان $f-$پروکسیمینال از فضای باناخ X و E زیر فضایی دلخواه از X باشند. همچنین فرض کنیم $E + F$ بسته باشد، دراینصورت $E + F$ در X به طور همزمان $f-$پروکسیمینال است اگر و تنها اگر $(E + F)/F$ در X/F به طور همزمان $f-$پروکسیمینال باشد.

برهان. فرض کنیم $\bar{x}_۱, \bar{x}_۲, \ldots, \bar{x}_n \in \mathrm{X}/F$ باشند. چون $E+F$ به طور همزمان $f-$پروکسیمینال است، لذا $y \in E + F$ موجود است به طوریکه برای هر $z \in E + F$ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - y\|) \leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - z\|).$$

بنابراین برای هر $z \in E + F$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &= \sum_{i=۱}^{n} f(\|\overline{x_i - y}\|) \\
&= \sum_{i=۱}^{n} f(\inf_{h \in F} \|x_i - y + h\|) \\
&\leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - y\|) \\
&\leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - z\|).
\end{aligned}$$

اما می‌دانیم که $E + F$ زیر فضای X است. بنابراین برای هر $z \in E + F$ و $w \in F$، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) \leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - z - w\|).$$

لذا نتیجه می‌شود که برای هر $z \in (E + F)/F$ داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) \leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{z}\|).$$

بنابراین $E+F/F$ در X/F به طور همزمان f–پروکسیمینال است.
حال برای عکس قضیه فرض کنیم $(E+F)/F$ در X/F به طور همزمان f–پروکسیمینال است.
فرض کنیم $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathrm{X}$ و $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n \in \mathrm{X}/F$ باشند. بنابر فرض $\bar{y} \in (E+F)/F$ موجود است به طوری‌که برای هر $\bar{z} \in (E+F)/F$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &\leq \sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{z}\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z\|).\end{aligned}$$

اما از طرفی می‌دانیم که

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &= \sum_{i=1}^{n} f(\|\overline{x_i - y}\|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\inf\{\|x_i - y - w\| : w \in F\}).\end{aligned}$$

حال با استفاده از گزاره‌ی (۱.۳.۴) و افزایشی بودن f داریم

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} f\|x_i - y - w\| : w \in F\}.$$

حال چون f به طور همزمان f–پروکسیمینال است، لذا $w_0 \in F$ موجود است به طوری‌که برای هر $z \in E+F$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y} - w_0\|) = \sum_{i=1}^{n} f\|x_i - \bar{y}\| \leq \sum_{i=1}^{n} f\|x_i - z\|.$$

بنابراین برای هر $z \in E+F$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - (y + w_0)\|) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i - z\|.$$

بنابراین اثبات تمام است. □

حال در ارتباط با مجموع زیر فضاهای به طور همزمان پروکسیمینال قوی، قضیه‌ی زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۳.۴. فرض کنیم F و W دو زیرفضا از فضای باناخ X باشند به طوری که f به طور همزمان پروکسیمینال، W متناهی بعد و $F+W$ بسته باشند. دراین‌صورت $F+W$ در X به طور همزمان پروکسیمینال است.

برهان. برای جدا نشدن از بحث اصلی، اثبات این لم را به [۱۱] ارجاع می‌دهیم. □

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنیم F و W زیر فضاهایی از فضای باناخ X باشند به طوری‌که F به طور همزمان پروکسیمینال قوی، W متناهی بعد و $F+W$ بسته باشند. دراین‌صورت $F+W$ در X به طور همزمان پروکسیمینال قوی است.

برهان. چون F به طور همزمان پروکسیمینال است و W متناهی بعد است، لذا طبق لم (۱.۳.۴) نتیجه می‌شود که $F+W$ به طور همزمان پروکسیمینال است. فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی کراندار از X باشد و $\{h_n+w_n\} \subseteq F+W$ طوری باشد که $\sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_n)\| \to d(S, W+F)$، که در آن $\{h_n\}$ یک دنباله در F و $\{w_n\}$ یک دنباله در W می‌باشد. بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورت $a_n = \sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_n)\|$ یک دنباله همگرا از اعداد حقیقی است و بنابراین کراندار است. پس $M_1 > 0$ موجود است به طوریکه برای هر n داریم $|a_n| \leq M_1$. حال برای هر $s \in S$ و هر n، نامساوی $\|h_n+w_n\| \leq \|h_n+w_n-s\| + \|s\|$ نتیجه می‌دهد که

$$\|h_n+w_n\| \leq \sup_{s\in S}\|h_n+w_n-s\| + \sup_{s\in S}\|s\| \leq M_1 + M_2 = M.$$

بنابراین $\{h_n+w_n\}$ یک دنباله کراندار در $F+W$ است.

حال چون نگاشت $P\colon F+W \to W$ با ضابطه‌ی $P(h+w) = w$ بسته است و $P(F) = 0$، لذا بنابر قضیه‌ی گراف بسته [۱۶]، عدد ثابت و مثبت C موجود است به طوریکه

$$\|w_n\| = \|P(h_n+w_n)\| \leq C\|h_n+w_n\| \leq CM.$$

بنابراین $\{w_n\}$ یک دنباله‌ی کراندار است و به همین طریق می‌توان نشان داد که $\{h_n\}$ هم کراندار است. حال چون W متناهی بعد است لذا می‌توانیم فرض کنیم $w_n \to w_0 \in W$. حال ادعا می‌کنیم که $d(S-w_0, F) = d(S, F+W) = \lim_{n\to\infty}\sup_{s\in S}\|s-(w_0+h_n)\|$.

حال چون

$$\begin{aligned}
&|\sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_n)\| - \sup_{s\in S}\|s-(w_0+h_n)\|\,| \\
&\leq \sup_{s\in S}|\,\|s-(h_n+w_n)\| - \|s-(w_0+h_n)\|\,| \\
&\leq \|w_n - w_0\|,
\end{aligned}$$

لذا داریم

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_n)\| = \lim_{n\to\infty}\sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_0)\|.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_n)\| = d(S, F+W) = \lim_{n\to\infty}\sup_{s\in S}\|s-(h_n+w_0)\| \geq d(S-w_0, F).$$

همچنین داریم

$$d(S, F+W) = \inf_{h+w\in F+W}\sup_{s\in S}\|s-(h+w)\| \leq d(S-w_0, F).$$

بنابراین ادعای قبل برقرار است. لذا $\{h_n\} \subseteq F$ یک دنباله کاهشی برای $S-w_\circ$ است. حال چون F به طور همزمان پروکسیمینال قوی است لذا زیردنباله‌ی $\{h_{n_k}\}$ و دنباله‌ی $\{z_k\} \subseteq L_F(S-w_\circ)$ وجود دارند به طوریکه $\|h_{n_k} - z_k\| \to \circ$. حال چون $z_k \in L_F(S - w_\circ)$، لذا

$$\sup_{s\in S} \|(s - w_\circ) - z_k\| = d(S - w_\circ, F) = d(S, F + W),$$

یعنی $w_\circ + z_k \in L_{F+W}(S)$. حال $\{w_\circ + z_k\} \subseteq L_{F+W}(S)$ و $\|h_{n_k} + w_{n_k} - (w_\circ + z_k)\| \to \circ$.
بنابراین $F + W$ یک زیرفضای به طور همزمان پروکسیمینال قوی از X می‌باشد. □

دقت کنید که اگر برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S از X مجموعه‌ی $L_F(S)$ فشرده باشد، آنگاه بر اساس روند اثبات قضیه قبل نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۳.۴. فرض کنیم F و W زیرفضاهایی از فضای باناخ X باشند به طوریکه F به طور همزمان پروکسیمینال قوی، W متناهی بعد و $F+W$ بسته باشد. دراینصورت $F+W$ به طور همزمان فشرده‌ی تقریبی است.

حال در ارتباط با فضای خارج قسمتی قضیه زیر را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنیم F زیر فضایی به طور همزمان پروکسیمینال از X و W زیرفضایی از X باشد به طوریکه $W + F$ بسته باشد. اگر $W + F$ در X به طور همزمان پروکسیمینال قوی باشد دراینصورت $(W + F)/F$ در X/F به طور همزمان پروکسیمینال قوی است.

برهان. فرض کنیم $W+F$ در X به طور همزمان پروکسیمینال قوی باشد. دراینصورت $W+F$ به طور همزمان پروکسیمینال است و لذا طبق قضیه‌ی (۱.۳.۴)، $(W+F)/F$ در X/F به طور همزمان پروکسیمینال است.

فرض کنیم A یک زیر مجموعه‌ی کراندار دلخواه از فضای باناخ X/F باشد، دراینصورت برای برخی زیرمجموعه‌های کراندار S از X داریم $A = S/F$. فرض کنیم $\{y_n+F\} \subseteq (W+F)/F$ یک دنباله‌ی کاهشی متناظر با S/F باشد، به این معنی که $\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|(s + F) - (y_n + F)\| = d(S/F, (W + F)/F)$. دراینصورت برای هر $\delta_n > \circ$ داریم $y_n + F \in L_{(W+F)/F}(S/F, \delta_n)$. چون $y_n + F \in L_{(W+F)/F}(S/F, \delta_n)$ لذا برای هر $g + F \in (W + F)/F$ داریم:

$$\sup_{s\in S} \|(s + F) - (y_n + F)\| < \sup_{s\in S} \|(s + F) - (g + F)\| + \delta_n$$

در نتیجه برای هر $g \in (W + F)$ داریم

$$\sup_{s\in S} \inf_{h\in F} \|(s - y_n) - h\| < \sup_{s\in S} \inf_{h\in F} \|(s - g) - h\| + \delta_n.$$

حال با استفاده از لم (۱.۱.۴) و پروکسیمینال بودن F، میتوان $h_n \in F$ را طوری در نظر گرفت که رابطه‌ی زیر برای هر $g \in (W + F)$ برقرار شود:

$$\sup_{s\in S} \|(s - y_n) - h_n\| < \inf_{h\in F} \sup_{s\in S} \|(s - g) - h\| + \delta_n.$$

فرض کنیم اگر $n \to \infty$ داشته باشیم $\delta_n \to \circ$، لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|(s-y_n)-h_n\| \leq d(S, W+F).$$

به علاوه، $d(S, W+F) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in s} \|(s-y_n)-h_n\|$ بنابراین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in s} \|(s-y_n)-h_n\| = d(S, W+F).$$

یعنی $\{y_n+h_n\}$ یک دنباله کاهشی متناظر با S در $W+F$ است. چون $W+F$ برای S به طور همزمان پروکسیمینال قوی است، لذا زیردنباله‌ی $\{y_{n_k}+h_{n_k}\}$ و دنباله‌ی $\{z_k\} \subseteq L_{W+F}(S)$ وجود دارند به طوریکه $\|(y_{n_k}+h_{n_k})-z_k\| \to \circ$. حال داریم

$$\|(y_{n_k}+F)-(z_k+F)\| = \inf_{h\in F} \|y_{n_k}-z_k+h\| \leq \|y_{n_k}-z_k+h_{n_k}\| \to \circ.$$

لذا نتیجه می‌شود که $(W+F)/F$ برای S/F به طور همزمان پروکسیمینال قوی است. □

حال بنابر قضیه (۲.۳.۴) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۳.۴. فرض کنیم F و W زیرفضاهایی از فضای باناخ X باشند، به طوریکه F به طور همزمان پروکسیمینال، W متناهی بعد و $F+W$ بسته باشد دراینصورت $(F+W)/F$ در X/F به طور همزمان پروکسیمینال قوی است.

حال لم‌های زیر را در ارتباط با فضاهای خارج قسمتی بیان می‌کنیم.

لم ۲.۳.۴. فرض کنیم X فضایی باناخ، M زیرفضایی پروکسیمینال از X و S زیرمجموعه‌ای کراندار از X باشد. دراینصورت S/M زیر مجموعه‌ای کراندار از X/M است.

برهان. برای هر $s \in S$ داریم

$$\|s+M\| = \inf_{m\in M} \|s-m\| \leq \|s\|.$$

بنابراین S/M زیر مجموعه‌ای کراندار از X/M است. □

لم ۳.۳.۴. فرض کنیم M یک زیرفضای پروکسیمینال از فضای باناخ X و W یک زیر فضای شامل M از X باشد. همچنین فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی کراندار در X باشد. اگر $w_\circ \in L_W(S)$، دراینصورت $w_\circ + M \in L_{W/M(S/M)}$ است.

برهان. چون S زیرمجموعه‌ای کراندار در X است، لذا طبق لم (۲.۳.۴)، S/M هم در X/M کراندار است. فرض کنیم $w_\circ \in L_W(S)$ و $w_\circ + M \notin L_{W/M}(S/M)$. بنابراین $w' \in W$ موجود است به طوریکه

$$\sup_{s\in S} \|s-w'+M\| < \sup_{s\in S} \|s-w_\circ+M\| \leq \sup_{s\in S} \|s-w_\circ\| = d(S, W). \qquad (۳.۴)$$

از طرف دیگر داریم

$$\|s-w'+M\| = \inf_{m\in M}\|s-w'-m\|.$$

بنابراین برای هر $\epsilon > \circ$ و هر $s\in S$ وجود دارد $m_s\in M$ به طوریکه

$$\|s-w'-m_s\| \leq \|s-w'+M\|+\epsilon.$$

حال چون $w'+m_s\in W$، لذا نتیجه می‌گیریم که

$$d(S,W) \leq \sup_{s\in S}\|s-(w'+m_s)\| \leq \sup_{s\in S} s-w'+M\|+\epsilon.$$

بنابراین

$$d(S,W) \leq \sup_{s\in S}\|s-w'+M\|. \tag{۴.۴}$$

حال براساس روابط (۳.۴) و (۴.۴) داریم:

$$d(S,W) \leq \sup_{s\in s}\|s-w'+M\| < d(S,W),$$

که غیر ممکن است. بنابراین فرض خلف باطل و

$$w_\circ + M \in L_{W/M}(S/M).$$

□

حال از این لم، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۳.۴. فرض کنیم M یک زیرفضای پروکسیمینال از فضای باناخ X و W یک زیرفضای شامل M از X باشد. دراینصورت اگر W به طور همزمان پروکسیمینال باشد، آنگاه W/M یک زیرفضای به طور همزمان پروکسیمینال از X/M است.

در قضیه بعد نشان می‌دهیم که اگر $W+F$ به طور همزمان پروکسیمینال قوی باشد، فضای خارج قسمتی هم چنین است.

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنیم W و F زیرفضاهایی از فضای باناخ X باشند و $F\subseteq W$ در X پروکسیمینال باشد. دراینصورت اگر W در X به طور همزمان پروکسیمینال قوی باشد، آنگاه W/F در X/F به طور همزمان پروکسیمینال قوی است.

برهان. چون W به طور همزمان پروکسیمینال است، لذا طبق نتیجه‌ی (۳.۳.۴)، W/F به طور همزمان پروکسیمینال است. فرض کنیم S/F یک زیر مجموعه‌ی کراندار دلخواه از X/F باشد و $\{y_n+F\}\subseteq W/F$ یک دنباله کاهشی متناظر با S/F باشد، به این معنی که:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s+F\in S/F}\|(s+F)-(y_n+F)\| = d(S/F,W/F).$$

بنابراین برای هر $\delta_n > 0$، داریم $y_n + F \in L_{W/F}(S/F, \delta_n)$. دراینصورت برای هر $w + F \in W/F$ داریم:

$$\sup_{s+F\in S/F} \|(s+F) - (y_n + F)\| < \sup_{s+F\in S/F} \|(s+F) - (w+F)\| + \delta_n.$$

یعنی برای هر $w \in W$ داریم:

$$\sup_{s\in S} \inf_{h\in F} \|(s - y_n) - h\| < \sup_{s\in S} \inf_{h\in F} \|(s - w) - h\| + \delta_n$$

حال بنابر لم (۱.۱.۴) و پروکسیمینال بودن F، می‌توان $h_n \in F$ را طوری انتخاب کرد که برای هر $w \in W$ رابطه‌ی زیر برقرار شود:

$$\sup_{s\in S} \|(s - y_n) - h_n\| < \inf_{h\in F} \sup_{s\in S} \|(s - w) - h\| + \delta_n < \sup_{s\in S} \|(s - w)\| + \delta_n.$$

حال با میل دادن $n \to \infty$، $\delta_n \to 0$ میل داده می‌شود، بنابراین داربم:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|s - (y_n + h_n)\| \leq d(S, W).$$

همچنین داریم:

$$d(S, W) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|s - (y_n + h_n)\|.$$

بنابراین رابطه‌ی زیر برقرار می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in S} \|s - (y_n + h_n)\| = d(S, W).$$

لذا نتیجه می‌شود که $\{y_n + h_n\} \subseteq W$ یک دنباله کاهشی متناظر با S است. حال چون W به طور همزمان پروکسیمینال قوی است لذا زیردنباله $\{y_{n_k} + h_{n_k}\}$ و دنباله $\{z_k\} \subseteq L_W(S)$ موجود هستند به طوریکه $\|(y_{n_k} + h_{n_k}) - z_k\| \to 0$. حال $\|(y_{n_k} + F) - (z_k + F)\| = \inf_{h\in F} \|(y_{n_k} - z_k) - h\| \leq \|y_{n_k} - z_k - h_{n_k}\| \to 0$. بنابراین W/F برای S/F به طور همزمان پروکسیمینال قوی است. □

در ادامه این فصل را با قضایایی در مورد فضاهای چبیشف قوی و به طور همزمان چبیشف قوی خاتمه می‌دهیم.

۴.۴ فضاهای به طور همزمان چبیشف قوی

در ابتدا قضایایی را در ارتباط با فضاهای خارج قسمتی به طور همزمان چبیشف ارائه می‌دهیم و سپس این قضایا را در فضاهای به طور همزمان چبیشف قوی بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۴.۴. فرض کنیم F یک زیرفضای پروکسیمینال از فضای باناخ X باشد و W یک زیرفضای شامل F از X باشد.اگر S زیرمجموعه‌ای کراندار از X باشد به طوریکه

$$w_0 + F \in L_{W/F}(S/F) \quad , \quad h_0 \in L_F(S - w_0), \tag{۵.۴}$$

آنگاه

$$w_\circ + h_\circ \in L_W(S).$$

برهان. با استفاده از لم (۱.۱.۴) و رابطه‌ی (۵.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in S}\|s-w_\circ-h_\circ\| &= \inf_{h\in F}\sup_{s\in S}\|s-w_\circ-h\| \\
&= \sup_{s\in S}\inf_{h\in F}\|s-w_\circ-h\| \\
&= \sup_{s\in S}\|s-w_\circ+F\| \\
&\le \sup_{s\in S}\|s-w+F\| \qquad \forall w\in W \\
&\le \sup_{s\in S}\|s-w\| \qquad \forall w\in W.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sup_{s\in S}\|s-(w_\circ+h_\circ)\| \le \sup_{s\in S}\|s-w\|, \qquad \forall w\in W.$$

حال چون $w_\circ + h_\circ \in W$ لذا نتیجه می‌شود که

$$w_\circ + h_\circ \in L_W(S).$$

$\square$

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنیم W و F زیرفضاهایی از فضای باناخ X باشند. اگر F به طور همزمان چبیشف باشد، دراینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. W/F در X/F به طور همزمان چبیشف است.

۲. $W+F$ در X به طور همزمان چبیشف است.

برهان.

(۱)⇐(۲) . بنابر فرض $(W+F)/F = W/F$ به طور همزمان چبیشف است. به برهان خلف فرض می‌کنیم که گزاره‌ی (۲) غلط باشد. پس طبق تعریف برخی زیر مجموعه‌های کراندار S از X دارای دو بهترین تقریب همزمان مانند $l_\circ$ و l_1 در $W+F$ هستند، بنابراین داریم:

$$l_\circ, l_1 \in L_{W+F}(S). \tag{۶.۴}$$

حال چون $W+F$ شامل F است، لذا بنابر لم (۳.۳.۴) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$l_\circ + F\,,\, l_1 + F \in L_{(W+F)/F}(S/F) = L_{W/F}(S/F).$$

حال بنابر فرض W/F به طور همزمان چبیشف است، بنابراین $l_\circ+F = l_1+F$. پس $h_\circ \in F\backslash\{\circ\}$ موجود است به طوریکه $l_1 = l_\circ + h_\circ$.

حال با استفاده از رابطه‌ی (۶.۴) داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{s\in S}\|(s-l_\circ)-h_\circ\| &= \sup_{s\in S}\|s-l_\lambda\| \\ &= \sup_{s\in s}\|s-l_\circ\| \\ &= d(S,W+F) \\ &= d(S-l_\circ,W+F) \\ &\leq d(S-l_\circ,F).\end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود که عناصر $h_\circ$ و ۰، بهترین تقریب‌های همزمان برای $S-l_\circ$ از F هستند. پس نتیجه می‌شود که F به طور همزمان چبیشف نیست که با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و لذا $W+F$ در X به طور همزمان پروکسیمینال است.

(۲)⇐(۱) . به برهان خلف فرض کنیم که گزاره‌ی (۱) غلط باشد. دراینصورت برای برخی زیرمجموعه‌های کراندار S از X، مجموعه‌ی S/F دارای دو بهترین تقریب همزمان مجزا مانند w_1+F و w_2+F در W/F است. بنابراین $w_1-w_2\notin F$.

چون F به طور همزمان پروکسیمینال است، لذا بهترین تقریب‌های همزمان h_1 و h_2 برای $S-w_1$ و $S-w_2$ از F موجود هستند.

بنابراین داریم:

$$h_1\in L_F(S-w_1) \quad , \quad h_2\in L_F(S-w_2).$$

حال چون $W+F$ شامل F است و چون

$$w_1+F\,,\,w_2+F\in L_{W/F}(S/F)=L_{(W+F)/F}(S/F),$$

لذا طبق لم (۱.۴.۴) نتیجه می‌شود که

$$w_1+h_1\,,\,w_2+h_2\in L_{W+F}(S).$$

اما طبق فرض می‌دانیم که $W+F$ به طور همزمان چبیشف است. بنابراین نتیجه می‌شود که $w_1+h_1=w_2+h_2$. لذا نتیجه می‌شود که $w_1-w_2\in F$ که تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم (۱) ثابت است. □

از این قضیه نتیجه‌ی زیر به صورت مستقیم حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۴.۴. فرض کنیم F زیرفضای به طور همزمان چبیشف از فضای باناخ X باشد. اگر W زیرفضایی شامل F از X باشد، دراینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. W در X به طور همزمان چبیشف است.

۲. W/F در X/F به طور همزمان چبیشف است.

حال بنابر نتیجه‌ی (۱.۴.۴) و قضیه‌ی (۴.۳.۴) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۴.۴. فرض کنیم F زیرفضایی به طور همزمان چبیشف از فضای باناخ X و W زیرفضایی شامل F از X باشند. دراینصورت اگر W به طور همزمان چبیشف قوی باشد، آنگاه W/F به طور همزمان چبیشف قوی است.

در آینده امید است که در مورد عکس قضیه‌های (۳.۳.۴) و (۴.۳.۴) به نتایج مطلوبی دست یابیم. همچنین یکی از مطالب مهمی که می‌توان به این تحقیق اضافه کرد، موضوع بهترین تقریب همزمان در فضاهای گوی پروکسیمینال‌ها است.

مراجع

[1] H. Ansari **Nonlinear Analysis: Approximation Theory, Optimization and Application**, Springer, (2014).

[2] P. Bandyopadhyay, Bor-Luh Lin, T. S. S. R. K. Rao, **Ball proximinality in Banach spaces**, Proceedings in Mathematics, de Gruyter, Berlin, 2007, pp. 251-264.

[3] P. Bandyopadhyay, Y. Li, B-Luh Lin, D. Narayana **Proximinality in Banach Spaces**, J. Nath. Anal. APPL, (2008) 341; 309-317.

[4] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, **Smoothness and renormings in Banach spaces**, Pitmann Monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman, Harlow, 1993. Logic in Computer Science, Vol. 3, Clarendon Press, Oxford, 1994, pp. 1–68.

[5] F. R. Deutsch, **Best Approximation in Inner Product Spaces**, Springer, (2001).

[6] S. Dutta, D. Narayana, **Strongly Proximinal Subspaces in Banach Spaces**, Function Spaces, Contemp. Math, vol. 435, Amer. Math. soc, Providence, RI, (2007) 143-152.

[7] G. Godefroy, V. Indumathi, **Renormings and proximinality: Some new examples**, 2012, Preprint.

[8] G. Godefroy, V. Indumathi, **Strong proximinality and polyhedral spaces**, Rev. Mat. Complut. 14 (1) (2011) 105-125.

[9] G. Godefroy, V. Indumathi, F. Lust-Piquard, **Strong subdiffrerentiability of convex functional and proximinality** , J. Approx. Theory 116 (2002) 397-415.

[10] M. von Golitschek, **Approximation Theory and Functional Analysis**, (1984).

[11] M. Iranmanesh, H. Mohebi **On best simultaneous approximation in quotient spaces**, Anal Theory Appl 2007; 23: 35-49.

[12] V. Indumathi, **On transitivity of proximinality**, J. AAprox. Theory 49 (2) (1987) 130-143.

[13] V. Indumathi, N. Parkash, **Ball proximinal and strongly ball proximinal hyperplanes**, J.Convex Approx. Theory 172 (2013) 37-46.

[14] M. Rawashdeh, Sh. Al-Sharif, **On the sum of Simultaneously f-Proximinal subspaces and Quotient Spaces**, Int. Journal of Math, vol. 6, (2012), no. 1, 11-18.

[15] W. Rudin, **Functional Analysis**, McGraw-Hill, New York, (1973).

[16] W. Rudin, **Principles of mathematical analysis**, New York: McGraw-Hill(1976).

[17] F.B. Saidi, **On the proximinality of the unit ball of proximinal subspases in Banach spaces: a counter example**, proc. Amer. Math. soc. 133 (2005) 2697-2703. Providence, 1967.

[18] I, Singer **Best Approximation in Normed Linear Spaces by Element of Sub-spaces**,Grundlehren Math.Wiss., Vol. 171, Springer-Verlag and Editura Academiei R.S.R., Berlin/Heidelberg/New York and Bucureqti, 1970.

Abstract

One of the main topics of Best Approximation theory is the determining of the Proximinality of subsets from a space. since this is a subject in some sets it's hard, we try to reduce the scope of our review to make the process easier. Indeed in this research, instead of determining the Proximinality of the entire set, focos on the Unit Ball of set. Also, one of the newest topics of Best Approximation theory is the strongly proximinality Spaces, which we introducing, and we say the relationship between this spaces with the Hyperplanes an the Best simultaneously approximation theory.

Keyword: Hyperplane; Proximinal; Strongly Proximinal; Ball Proximinal.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Approximation Theory

Best approximation, Hyperplane and Unit ball

By: Mohsen Karamollahi

Supervisor

Mehdi Iranmanesh

September 2017