

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده ریاضی
گروه محض

خودریختی های از مرتبه عدد اول با رتبه مرکز ساز پایین

دانشجو
محمود بزی جوان

استاد راهنما
سید حیدر جعفری

استاد مشاور
ابراهیم هاشمی

پایان نامه جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و φ را یک خودریختی از مرتبه عدد اول p از گروه متناهی G در نظر بگیرید و $C_G(\varphi)$ را زیرگروه نقطه ثابت از آن در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه کلاسیک **تامپسون** داریم اگر φ یک خودریختی منظم باشد (یا بطور معادل $C_G(\varphi) = 1$) آنگاه G پوچتوان است و همچنین نشان داد که اگر هر φ تقریباً منظم باشد آنگاه G نیز باید تقریباً پوچتوان باشد. به عبارتی اگر $|C_G(\varphi)| = n$ آنگاه G یک زیر گروه پوچتوان از شاخص کراندار شده نسبت به p و n دارد که به اختصار آن را (p, n) -کراندار شده گوئیم. این نتیجه ترکیبی از کارهای **فونگ** در [۱] و **هارتلی** و **میکسنرد** در [۶] و **پت** در [۸] است. در این تحقیق ما می‌بینیم که خودریختی φ "تقریباً منظم" است اگر یک تحدید روی رتبه $C_G(\varphi)$ وجود داشته باشد و متقابلاً G دارای خاصیت "تقریباً پوچتوان" است هرگاه هر خودریختی G تقریباً منظم باشد.

ما از رده بندی گروه های متناهی در اثبات حالت تقریباً حل پذیر بودن و در حالت هم اول بودن استفاده می کنیم و اثبات می کنیم که رتبه $\frac{G}{S(G)}$ بر حسب p و r کراندار شده است. برای گروه های حل پذیر نیز ترکیب نتیجه هال - هیگمن با زیرگروه های p - قدرتمند، تقریباً پوچتوانی را نشان می دهد که نشان می دهیم این شرایط در حالت غیر هم اول نیز برقرار است.

فهرست مطالب

مقدمه..... ۱

فصل اول

تعاریف..... ۵

فصل دوم: خودریختی های القایی

خودریختی های القایی و فرم های ژوردان..... 17

خودریختی های القایی از گروه های خارج قسمتی..... 19

خودریختی ها به عنوان تبدیلات خطی..... 22

فرم نرمال ژوردان از یک تبدیل خطی از مرتبه متناهی..... 22

قضیه و تعریف (عمل هم اول)..... 25

فصل سوم: گروه های غیر حل پذیر

گروه های غیر حل پذیر..... 39

نتیجه هال - هیگمن..... 41

فصل چهارم: حالت حل پذیری غیر خاص هم اول

حالت حل پذیری غیر خاص هم اول..... 47

فصل پنجم: حل پذیری در حالت هم اول

حل پذیری در حالت هم اول..... 54

فصل ششم: زیرگروه های مشخصه نرمال

59.....زیرگروه های مشخصه نرمال

فصل هفتم: نتایج اصلی

63.....تکمیل اثبات ها و نتایج اصلی

64.....قضیه (الف)

64.....قضیه (ب)

مقدمه

فرض کنید G یک گروه باشد و φ را یک خودریختی از مرتبه عدد اول p از گروه متناهی G در نظر بگیرید و $C_G(\varphi)$ را زیرگروه نقطه ثابت از آن در نظر می‌گیریم و خودریختی φ "تقریباً منظم" است اگر یک تحدید روی رتبه $C_G(\varphi)$ وجود داشته باشد و متقابلاً G دارای خاصیت "تقریباً پوچتوان" است هرگاه هر خودریختی G تقریباً منظم باشد. با استفاده از قضیه کلاسیک تامپسون^۱ [17] اگر φ یک خودریختی منظم^۲ باشد (یا بطور معادل $C_G(\varphi) = 1$) آنگاه G پوچتوان است و به‌وضوح می‌بینیم که اگر هر φ تقریباً منظم^۳ باشد آنگاه G نیز باید تقریباً پوچتوان باشد. به عبارتی اگر $|C_G(\varphi)| = n$ آنگاه G یک زیر گروه پوچتوان از شاخص کراندار شده نسبت به p و n دارد که به اختصار آن را (p, n) -کراندار شده گوئیم. این نتیجه ترکیبی از کارهای فونگ^۴ در [2] و هارتلی^۵ و میکسنر^۶ در [9] و پتت^۷ در [11] است. در این تحقیق ما می‌بینیم که خودریختی φ "تقریباً منظم" است اگر یک تحدید روی رتبه $C_G(\varphi)$ وجود داشته باشد و متقابلاً G دارای خاصیت "تقریباً پوچتوان" است هرگاه هر خودریختی G تقریباً منظم باشد.

با استفاده از قضیه هیگمن می‌دانیم کلاس پوچتوانی گروه‌های پوچتوان با خودریختی‌های از مرتبه عدد اول p ؛ P -کراندار است. با استفاده از قضیه خوخرو^۸ در [12,13]؛ داریم، اگر گروه G پوچتوان باشد و $|C_G(\varphi)| = n$ باشد آنگاه G دارای یک زیرگروه از شاخص (p, n) -کراندار است که کلاس پوچتوانی اش P -کراندار است. بنابراین اگر G پوچتوان

¹ Thompson

² Regular Automorphism

³ Almost Regular

⁴ P. Fong

⁵ Hartly

⁶ Mixner

⁷ Pettet

⁸ E. I. Khukhro

باشد آنگاه $C_G(\varphi)$ از رتبه r -کراندار است. آنگاه G باید یک زیرگروه از هم رتبه (p, n) -کراندار داشته باشد که کلاس پوچتوانی اش p -کراندار است و یک زیرگروه نرمال از کلاس پوچتوانی p -کراندار با خارج قسمت از رتبه (p, n) -کراندار دارد.

با استفاده از قضیه هیگمن [5] می دانیم کلاس پوچتوانی گروه های پوچتوان با خودریختی های از مرتبه عدد اول p ، p -کراندار است. با استفاده از قضیه خوخرو در [12,13]، داریم، اگر گروه G پوچتوان باشد و $|C_G(\varphi)| = n$ باشد آنگاه G دارای یک زیرگروه از شاخص (p, n) -کراندار است که کلاس پوچتوانی اش p -کراندار است. بنابراین اگر G پوچتوان باشد آنگاه $C_G(\varphi)$ از رتبه r -کراندار است. آنگاه G باید یک زیرگروه از هم رتبه (p, n) -کراندار داشته باشد که کلاس پوچتوانی اش p -کراندار است و یک زیرگروه نرمال از کلاس پوچتوانی p -کراندار با خارج قسمت از رتبه (p, n) -کراندار دارد.

در فصل اول تعدادی لم و نتیجه مقدماتی می آوریم که در فصل های بعدی استفاده می شود. در فصل دوم ما کرانداری $\frac{G}{S(G)}$ را اثبات می کنیم. در فصل سوم قضیه هال - هیگمن را معرفی و بیان می کنیم. در فصل ۴، گزاره ۴-۱ را اثبات می کنیم که این نتیجه کمی بهتر از حالت هم اول بودن را به ما می دهد که می گوئید که اگر G از رتبه فرد باشد آنگاه G یک زیرگروه مشخصه R از رتبه (p, n) -کراندار دارد به قسمی که $[G, \varphi] / R$ پوچتوان است.

قضیه (الف): فرض کنید G یک p' -گروه باشد که یک خودریختی φ از مرتبه عدد اول

p دارد به قسمی که $C_G(\varphi)$ دارای رتبه r است. فرض کنید که $S(G)$ رادیکال حل پذیر G باشد در این صورت خارج قسمت $G/S(G)$ ؛ رتبه (p, n) -کراندار دارد. بنابراین G دارای

زیرگروه های مشخصه $R \leq N \leq G$ است به قسمی که N/R پوچتوان است و G/N و R دارای رتبه (p, n) - کراندارند.

قضیه (ب): فرض کنید گروه متناهی G ؛ خودریختی φ از مرتبه عدد اول p با زیرگروه $C_G(\varphi)$ از رتبه r دارد. بنابراین G دارای زیرگروه های مشخصه $R \leq N \leq G$ است به قسمی که N/R پوچتوان است و G/N و R دارای رتبه (p, n) - کراندارند.

نتیجه: فرض کنید G یک گروه متناهی موضعا حل پذیر است و g یک عنصر از مرتبه p که $C_G(g)$ از رتبه r باشد. آنگاه G دارای زیرگروه های نرمال $R \leq N \leq G$ است که N/R موضعا پوچتوان است و G/N و R ؛ دارای رتبه (p, n) - کراندارند.

در فصل ۵ ما در مورد اینکه قضیه ب، در حالت ضعیف تر زیرگروه زیرنرمال نسبت به حالت زیرگروه مشخصه اثبات شده است بحث می کنیم. در فصل ۶ ما زیرگروه های نرمال را جایگزین زیرگروه های مشخصه می کنیم و در فصل ۷ ما می توانیم نتایج اصلی را بین کنیم و اثبات هایمان را تکمیل کنیم.

فصل اول

تعاریف پایه

مجموعه همه نگاشت های دوسویی از یک فضای برداری V روی میدان K یک زیر گروه از S_V است که با $GL(V)$ نمایش داده می شود و $GL_n(K)$ مجموعه همه ماتریس های وارون پذیر $n \times n$ روی میدان K با عمل ضرب ماتریس ها یک گروه تشکیل می دهد که اگر V از بعد n باشد آنگاه برای هر تبدیل خطی از V یک یکرختی بین $GL(V)$ و $GL_n(K)$ وجود دارد.

از این پس عنصر همانی از گروه G یا زیر گروه بدیهی از آن را با 1 نمایش می دهیم و اگر H زیر گروهی از G باشد می نویسیم $H \leq G$ یا $G \geq H$ و اگر $H < G$ می گوئیم H زیر گروه محض از G است.

یک خودریختی φ را از رتبه پایین می نامیم هرگاه $|C_G(\varphi)| < m$ ، که m یک عدد صحیح است.

شاخص زیرگروه H در G را با $|G:H|$ نمایش می دهیم و یادآوری می کنیم که $|G:H \cap K| \leq |G:K||G:H|$ و اشتراک n زیرگروه از شاخص حداکثر m شاخص (m,n) - کراندار شده دارد که کوچک تر یا مساوی با n است.

مزدوج x نسبت به g را با نماد x^g نمایش می دهیم و به صورت $x^g = g^{-1}xg$ تعریف می کنیم. برای هر زیرمجموعه M از گروه G داریم: $M^g = \{g^{-1}mg | m \in M\}$. می گوئیم H زیر گروه نرمال از G است اگر و تنها اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم $H^g = H \Leftrightarrow Hg = gH$ و می نویسیم $H \triangleleft G$.

اگر G یک p -گروه باشد آنگاه زیر گروه $\Omega_i(G)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Omega_i(G) = \langle g \in G \mid g^{p^i} = 1 \rangle$$

1-1 تعاریف

1-1-1 رتبه گروه^۱: رتبه یک گروه برابر با کمترین تعداد مولد های یک گروه است به

$$rank(G) = \min \{ |X| \mid X \subseteq G, \langle X \rangle = G \}$$

عبارتی

۱-۱-۲ مرتبه گروه^۲: تعداد عناصر یک گروه را مرتبه گروه می نامیم.

۱-۱-۳ زیرگروه جابجاگر^۳: فرض کنید H و K زیرگروههایی از گروه G باشند

جابجاگر H و K به صورت $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$ تعریف می گردد

که $[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk$. اگر H و K زیرگروههای مشخصه گروه G باشند آنگاه $[H, K]$ نیز

زیرگروه مشخصه از G است بنابراین چون G در خودش نیز مشخصه است پس $[G, G] = G'$

زیرگروه مشخصه G است.

۱-۱-۴ گروه موضعاً متناهی^۴: گروه G را موضعاً متناهی گوئیم هرگاه هر زیرگروه با

تولید متناهی آن، متناهی باشد. به عنوان مثال:

۱. تمام گروه های متناهی، موضعاً متناهی اند.

¹ Rank

² Order

³ Commutator Subgroup

⁴ Locally Finite Group

۲. هر مجموع مستقیم نامتناهی از گروه های متناهی، موضعاً متناهی است.

۳. گروه های هامیلتونی، موضعاً متناهی اند. (گروه غیرآبلی متناهی G را هامیلتونی گوئیم هرگاه هر زیرگروه آن نرمال باشد. هرگروه هامیلتونی به فرم $Q \times A$ است که A یک گروه آبلی از مرتبه ۴ است.)

۱-۱-۵ گروه های موضعاً پوچتوان^۱: در جبر نا جابجایی و نظریه گروه، یک جبر یا

یک گروه موضعاً پوچتوان است اگر و تنها اگر هر زیرجبر با تولید متناهی از آن یا هر زیرگروه با تولید متناهی آن پوچتوان باشد.

۱-۱-۶ p -زیرگروه های قدرتمند^۲: p -گروه G قدرتمند است، اگر $\Omega_1(G) \supseteq G'$.

اگر $N \triangleleft G$ آنگاه N به طور قدرتمند نشانده شده در G است اگر $\Omega_1(G) \supseteq [N, G]$.

بنابراین G قدرتمند است، اگر و تنها اگر به طور قدرتمند نشانده شده در خودش باشد. [27]

۱-۱-۷ گروه های ساده: گروه G را ساده گوئیم هرگاه زیرگروه نرمال محض

نابدیهی نداشته باشد.

۱-۱-۸ p -گروه آبلی مقدماتی: گروه G را یک p -گروه آبلی مقدماتی گوئیم هرگاه

آبلی باشد و مرتبه هر عضو نابدیهی آن عدد اول p باشد لذا اگر گروه G یک p -گروه آبلی مقدماتی باشد آنگاه $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ که مرتبه هر H_i عدد اول p است.

¹ Locall nilpotent group

² Powerful p -group

۹-۱-۱ سری زیرنرمال^۱: یک زنجیره از زیرگروه‌های گروه G مانند

$$1 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G \text{ به قسمی که برای هر } i = 0, 1, \dots, n-1, G_i \triangleleft G_{i+1} \text{ باشد را سری}$$

زیرنرمال گوئیم. گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ را عوامل سری گویند. تعداد عوامل نابديهی سری

را طول سری گوئیم و با l نمایش می‌دهیم.

۱۰-۱-۱ سری نرمال: یک سری زیر نرمال را نرمال گوئیم هرگاه برای هر i ، $G_i \triangleleft G$. به

وضوح اگر گروه G یک گروه آبلی باشد آنگاه هر سری آن، سری نرمال، است.

۱۱-۱-۱ سری ترکیب: سری زیرنرمال $1 \leq G_0 \leq \dots \leq G_n = G$ را سری ترکیب

گوئیم هرگاه هر گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ (عوامل سری) ساده باشد. عوامل این سری را عوامل

ترکیب گویند. اگر G یک p -گروه متناهی باشد آنگاه عوامل ترکیب، گروه‌های بدیهی یا گروه

های دوری از مرتبه p هستند.

۱۲-۱-۱ سری اصلی: یک سری نرمال G_i که $1 \leq i \leq n$ از گروه متناهی G را یک سری

اصلی نامیم هرگاه G_i یک زیرگروه محض در G_{i-1} و نرمال در G باشد و در G_{i-1} ماکسیمال باشد.

۱۳-۱-۱ سری حل‌پذیر^۲: یک سری زیرنرمال از گروه G را حل‌پذیر نامند هرگاه هر

عامل آن آبلی باشد. گروه G را حل‌پذیر گوئیم هرگاه یک سری حل‌پذیر داشته باشد. به‌وضوح

^۱ Subnormal series

^۲ Solvable series

تمام گروه های آبلی حل پذیراند. گروه S_3 مثالی از یک گروه حل پذیر نا آبلی است زیرا $\{1\} \leq A_3 \leq S_3$ یک سری زیرنرمال است که $\frac{S_3}{A_3} \cong Z_2$ و $A_3 \cong Z_3$. به وضوح هر p -گروه متناهی، حل پذیر است.

۱-۱-۱۴ سری مرکزی: سری نرمال $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ را مرکزی گوئیم

هرگاه برای $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ داشته باشیم، $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq C\left(\frac{G}{G_i}\right)$. گروه G پوچتوان است اگر یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی گروه G را رده پوچتوانی گروه G گویند. رده پوچتوانی گروه بدیهی را صفر در نظر می گیریم و به وضوح رده پوچتوانی گروه آبلی برابر با ۱ است.

۱-۱-۱۵ سری مشتق: با توجه به تعریف زیر گروه جابجاگر قرار می دهیم: $G^{(0)} = G$

و $G^{(1)} = [G, G]$ و $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$ و در این صورت $G^{(2)}, G^{(3)}$ زیرگروه مشتق دوم و زیرگروه مشتق سوم گروه G نامیده می شوند و سری کاهشی نرمال $G^{(0)} = G \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \dots \triangleright G^{(n-1)} \triangleright G^{(n)} \triangleright \dots$ سری مشتق گروه G نامیده می شود. به راحتی می توان اثبات کرد G حل پذیر است هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به قسمی که $G^{(n)} = 1$.

۱-۱-۱۶ سری مرکزی پایینی: یک سری کاهشی از زیرگروه های

$G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n \triangleright \dots$ است که $G_{i+1} = [G_i, G]$ که $G_2 = [G, G]$ و $G_3 = [[G, G], G] = [G_2, G]$. سری مرکزی پایینی معمولا با نماد $\gamma_n(G) = G_n$ نمایش داده

می‌شود. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $\gamma_1(G) = G$ و $\gamma_{k+1}(G) = [\gamma_k(G), G]$ به راحتی می‌توان اثبات کرد G پوچتوان است هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌قسمی که $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

۱۷-۱-۱ سری مرکزی بالایی: سری $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_n(G) \leq \dots$ را

سری مرکزی بالایی گوییم هرگاه $\frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right)$ باشد برای هر $0 \leq i \leq n-1$. ما $Z_i(G)$ را با $\zeta_i(G)$ نمایش می‌دهیم که یک زیرگروه مشخصه نیز هست.

۱۷-۱-۱ نرمال ساز: نرمال ساز زیرگروه S روی گروه G مجموعه همه اعضای G است

که با اعضای S جابجا می‌گردد. به عبارتی $N_G(S) = \{x \in G \mid xS = Sx\}$. اگر ابهامی بوجود نیاید به جای $N_G(S)$ از نماد $N(S)$ استفاده می‌کنیم. اگر S یک زیرگروه از G باشد آنگاه $N(S)$ بزرگترین زیرگروه G است که S در آن نرمال است.

۱۸-۱-۱ مرکز ساز: مرکز ساز عنصر a از گروه G مجموعه همه عناصری از گروه G است

که با a جابجا می‌گردد به عبارت دیگر $C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$. اگر H زیرگروهی از G باشد آنگاه $C_H(a) = C_G(a) \cap H$. از این به بعد اگر ابهامی نباشد به جای $C_G(a)$ از نماد $C(a)$ استفاده می‌کنیم.

۱۹-۱-۱ زیرگروه نقاط ثابت^۱: فرض کنید φ یک خودریختی از گروه متناهی

G باشد در این صورت زیرگروه $C_G(\varphi) = \{g \in G \mid g^\varphi = g\}$ را زیرگروه نقاط ثابت گروه φ می‌گوییم.

^۱ Fixed point subgroup

۱-۱-۲۰ زیرگروه‌های فیتینگ^۱: زیرگروه فیتینگ از گروه متناهی G زیرگروه تولید

شده توسط همه زیرگروه‌های نرمال پوچتوان از گروه G است که با $F(G)$ نمایش داده می‌شود به عبارت دیگر بزرگترین زیرگروه نرمال پوچتوان منحصر به فرد گروه G را زیر گروه فیتینگ گوئیم. اگر G یک گروه نا بدیهی حل پذیر باشد آنگاه $F(G)$ نیز نابدیهی است به عبارتی اگر $G \neq 1$ حل پذیر باشد آنگاه $F(G) \neq 1$. به طور مشابه اگر G حل پذیر باشد ولی G پوچتوان نباشد آنگاه زیرگروه فیتینگ از $\frac{G}{F(G)}$ نابدیهی است. [7]

۱-۱-۲۱ ارتفاع فیتینگ^۲: اگر گروه G حل پذیر باشد کوچکترین عدد صحیح n برای

گروه G که برای سری $1 = F_0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_n = G$ ، برای هر i ، $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ پوچتوان باشد را ارتفاع فیتینگ گروه G گوئیم که با $f(G)$ نمایش داده می شود. اگر G یک گروه حل پذیر نابدیهی باشد آنگاه $f\left(\frac{G}{F(G)}\right) = f(G) - 1$. [7]

۱-۱-۲۲ زیر گروه فراتینی^۳: اشتراک همه زیرگروه‌های ماکسیمال گروه G را زیرگروه

فراتینی از گروه G گویند که با $\Phi(G)$ نمایش داده می‌شود و اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد $\Phi(G)$ را برابر با G تعریف می کنیم. همچنین به $\frac{G}{\Phi(G)}$ عامل فراتینی گروه G گوئیم. زیرگروه‌های فراتینی دارای کاربرد فراوان در مطالعه گروه‌های متناهی هستند و دارای خصوصیات مفیدی هستند که به اختصار به چند مورد از آن‌ها که دارای کاربرد زیادتری در این تحقیق هستند اشاره می‌کنیم [7]:

¹ Fitting subgroup

² Fitting height

³ Ferattini subgroup

۱. $\Phi(G) \leq F(G)$ پوچتوان است و به‌ویژه اینکه $\Phi(G) \leq F(G)$.

۲. گروه G پوچتوان است اگر و تنها اگر $\frac{G}{\Phi(G)}$ پوچتوان باشد.

۳. اگر N زیرگروه نرمال گروه G باشد و $N \leq \Phi(G)$ ، آنگاه $F\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{F(G)}{N}$.

۴. $G' \cap Z(G) \leq \Phi(G)$.

۵. اگر G_1 و G_2 و ... و G_r گروه‌های متناهی متمایز باشند آنگاه

$$\Phi(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2) \times \dots \times \Phi(G_r)$$

۱-۱-۲۳ π - خودریختی: فرض کنید π یک مجموعه از اعداد اول باشد در این-

صورت خودریختی φ از گروه G را π - خودریختی نامیم هرگاه مرتبه‌اش فقط بر اعداد اول مجموعه π قابل قسمت باشد و φ را π' - خودریختی گوئیم هرگاه مرتبه‌اش بر هیچ یک از اعداد اول مجموعه π قابل قسمت نباشد.

۱-۱-۲۴ π - گروه: فرض کنید π یک مجموعه از اعداد اول باشد. اگر $|G|$ فقط بر اعداد

اول مجموعه π قابل تقسیم باشد آنگاه G یک π - گروه نامیده می‌شود. عنصر x در G را یک π - عنصر نامیم هرگاه مرتبه‌اش فقط بر عناصر مجموعه π قابل قسمت باشد و همچنین $\pi(G)$ را مجموعه اعداد اول بخش کننده مرتبه گروه G می‌نامیم.

۱-۱-۲۵ گروه π - تفکیک پذیر^۱: اگر π یک مجموعه از اعداد اول باشد، گروه G

را π - تفکیک پذیر گوییم هرگاه عامل هایش یا π - گروه باشند یا π' - گروه.

۱-۱-۲۶ زیرگروه هال: زیرگروه H از گروه G را زیرگروه هال نامند هرگاه مرتبه‌اش

نسبت به شاخص‌اش اول باشد. حال اگر π یک مجموعه از اعداد اول باشد، یک π - زیرگروه هال یک π - زیرگروه از گروه G است که شاخص‌اش توسط هیچ کدام از اعداد اول π قابل شمارش نباشد. به طور مثال هر سیلو زیرگروه، یک زیرگروه هال است.

۱-۱-۲۷ رادیکال حل پذیر^۲: حاصل ضرب همه زیرگروه‌های نرمال حل پذیر گروه G

را رادیکال حل پذیر گروه G می نامیده و با $s(G)$ نمایش می دهیم. گروه خارج قسمتی $\frac{G}{S}$ نیم ساده^۳ است یعنی زیرگروه نرمال حل پذیر نابديهی ندارد.

۱-۱-۲۸ زیرگروه π - ساکل (π - socle)^۴: فرض کنید π یک مجموعه از اعداد

اول باشد آنگاه زیرگروه تولید شده توسط π - زیرگروه‌های نرمال مینیمال از گروه G را زیرگروه π - ساکل گروه G نامیم و با $soc_{\pi}(G)$ نمایش می دهیم. وقتی $\pi = \{p\}$ باشد برای سادگی بجای $soc_{\pi}(G)$ از $Soc(G)$ استفاده می کنیم. بنابراین اگر N یک π - زیرگروه نرمال مینیمال G باشد آنگاه $Soc(G) = \langle N \rangle$. بنابراین ساکل گروه G عبارت است از حاصلضرب مستقیم از زیرگروه‌های نرمال مینیمال گروه G . به [۴-۱۲] از [6] مراجعه کنید.

¹ Separable group

² Solvable radical

³ Semisimple

⁴ π - socle

۱-۱-۲۹ زیرگروه مشخص: زیرگروه H از گروه G را زیرگروه مشخص گوئیم هرگاه

تحت هر خودریختی ϕ گروه G ثابت باشد و با ch نشان داده می شود.

۱-۱-۳۰ پایدارساز^۱: اگر G یک گروه باشد زیرمجموعه $G_m = \{g \in G | mg = m\}$ را

پایدارساز m در گروه G می نامیم. از طرفی مجموعه $mG = \{mg | g \in G\}$ را $-G$ مدار گروه G می نامیم.

۱-۱-۳۱ هم رتبه^۲: برای زیرگروه نرمال N از G ، هم رتبه N را مرتبه گروه

خارج قسمت G/N می گوئیم.

۱-۱-۳۲ زیرگروه های بحرانی^۳: زیرگروه S از گروه G را زیرگروه بحرانی گوئیم

هرگاه $G = F(G)S$ که $F(G)$ زیرگروه فیتینگ گروه G است.

۱-۱-۳۳ FG _مدول: فرض کنید V یک فضای برداری و G یک گروه است. آنگاه V

یک FG _مدول است اگر ما بتوانیم ضرب vg را تعریف کنیم که $v \in V$ و $g \in G$ است و

شرایط زیر برای هر $u, v \in V$ و $g, h \in G$ و $\lambda \in F$ برقرار باشد:

$$1. \quad vg \in V$$

$$2. \quad v(gh) = (vg)h$$

$$3. \quad v1 = v$$

¹ Stabilizer

² Corank

³ Critical Subgroup

$$(u+v)g = ug + vg \quad ۴.$$

با تعریف ارایه شده ما می توانیم نتیجه بگیریم که

$$v \rightarrow vg \quad (v \in V)$$

یک همریختی پوشا از V است.

۱-۱-۳۴ زیرگروه φ -پایا: زیرگروه H از گروه G را یک زیرگروه φ -پایا از گروه G

گوییم هرگاه تحت خودریختی φ پایا باشد به عبارتی $\varphi(H) = H$ باشد.

۱-۱-۳۵ P -گروه خاص^۱: p -گروه G را خاص گویند اگر G آبدی مقدماتی باشد یا از G

کلاس ۲ بوده و $G' = \Phi(G) = Z(G)$ آبدی مقدماتی باشد. از طرفی گروه G را فوق العاده خاص گوییم اگر $|G'| = p$.

۱-۱-۳۶ سیستم معکوس از گروه ها و همریختی ها: فرض کنید $(A_i)_{i \in I}$

یک خانواده از گروه ها باشد و $f_{ij} : A_j \rightarrow A_i$ برای هر $i \leq j$ یک خانواده از همریختی ها باشد با شرایط زیر:

۱. f_{ii} روی A_i همانی باشد.

۲. برای هر $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ ، $i \leq j \leq k$

آنگاه مجموعه از جفت های (A_i, f_{ij}) را سیستم معکوس گروه ها و همریختی ها می نامیم.

^۱ Extra p_group

فصل دوم

خودریختی های القایی و فرم های ژوردان

ما در این فصل تعدادی لم و نتیجه مقدماتی در مورد گروه های خارج قسمتی و زیر گروه های پایا و خودریختی های القایی بیان می کنیم که در فصل های بعدی کاربرد زیادی دارد. در ضمن یادآوری می شود علاقه مندان به این مبحث می توانند با مراجعه به فصل دوم از مرجع [14] اطلاعات کامل تری نسبت به خودریختی های القایی بدست آورند.

لم ۱-۲: اگر H زیرگروه نرمال از گروه G باشد آنگاه $C(H)$ و $N(H)$ زیرگروه های نرمال از G اند.

یادآوری: روابط زیر برای جابجاگر عناصر a و b و c برقرار است:

$$a^b = a[a, b] \quad \bullet$$

$$[ab, c] = [a, c]^b [b, c] = [a, c][a, c, b][b, c] \quad \bullet$$

$$[a, bc] = [a, c][a, b]^c = [a, c][a, b][a, b, c] \quad \bullet$$

$$[a, b]^{-1} = [b, a] \quad \bullet$$

لم ۲-۲: برای هر زیرگروه نرمال N از گروه G ، گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ آبدی است اگر و تنها اگر $[G, G] \leq N$.

برهان: برای هر x و y از گروه G ، $\bar{x}, \bar{y}$ را تصویر x و y در گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ در نظر می گیریم ($\bar{x} = x + N, \bar{y} = y + N$) چون $[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]}$ بنابراین داریم:

$$\blacksquare. [G, G] \leq N \Leftrightarrow \forall x, y [x, y] \in N \Leftrightarrow \forall x, y [\bar{x}, \bar{y}] = 1 \Leftrightarrow \frac{G}{N} \text{ آبدلی است}$$

خودریختی های القایی از گروه های خارج قسمتی

فرض کنید $\varphi \in \text{Aut}(G)$ و N یک زیرگروه φ -پایا از گروه G است. نگاشت $\bar{\varphi}$ با

تعریف $Ng \rightarrow Ng^\varphi$ یک خودریختی گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ است. این نگاشت دوسویی است

زیرا اگر $(Ng)^\varphi = (Nh)^\varphi$ آنگاه داریم:

$$(gh^{-1})^\varphi \in N \Leftrightarrow gh^{-1} \in N^{\varphi^{-1}} = N \Leftrightarrow Ng = Nh$$

لذا $\bar{\varphi}$ یک به یک است. از طرفی $Ng = ((Ng)^{\varphi^{-1}})^\varphi$ پس $\bar{\varphi}$ پوشاست

از طرفی چون

$$\bar{\varphi} \text{ پس } (Ng.Nh)^\varphi = (Ngh)^\varphi = N(gh)^\varphi = Ng^\varphi h^\varphi = Ng^\varphi Nh^\varphi = (Ng)^\varphi (Nh)^\varphi$$

همریختی است. خودریختی $\bar{\varphi}$ از گروه $\frac{G}{N}$ خودریختی القایی گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ نامیده می شود.

$\langle \varphi \rangle$ به عنوان گروه روی $\frac{G}{N}$ عمل می کند و مرتبه $\bar{\varphi}$ مرتبه φ را می شمارد.

لم ۲-۳: فرض کنید φ یک خودریختی از مرتبه n از گروه متناهی G است و N یک

زیرگروه نرمال φ -پایا G است که $(|N|, |\varphi|) = 1$ آنگاه $C_{\frac{G}{N}}(\bar{\varphi}) = \frac{C_G(\varphi)N}{N}$.

برهان: بنابر [۲۹-۲] از [9] کافیت اثبات کنیم که $C_{\frac{G}{N}}(\bar{\varphi}) \leq C_G(\varphi)N/N$ با استفاده از

استقراء روی $|\varphi|$ لم را اثبات می کنیم. فرض می کنیم $|\varphi| = p$ که p یک عدد اول است. طبق [۲۹-۱] از [10] تعداد $\langle \varphi \rangle$ -مدار روی gN ، مرتبه $|\varphi| = p$ را می شمارد بنابراین تعداد $\langle \varphi \rangle$ -مدار روی gN برابر با ۱ یا برابر با p است. اجتماع مجزا از این مدار برابر با gN است. اگر تمام مدار از اندازه p باشند آنگاه p باید $|gN| = |N|$ را بشمارد که تناقض با فرض $(|N|, |\varphi|) = 1$ است پس تمام مدار باید از اندازه ۱ باشند بنابراین باید عضوی از $C_G(\varphi) \cap N$ باشد. اگر $|\varphi| = mn$ که $m > 1, n > 1$ ، با استفاده از فرض استقراء داریم:

$C_{\frac{G}{N}}(\varphi^n) = C_G(\varphi^n)N/N \cong C_G(\varphi^n) / C_G(\varphi^n) \cap N$ چون هر φ -پایا همدهسته gN ، φ^n -پایا نیز هست. پس $g_0 \in C_G(\varphi^n)$ وجود دارد به قسمی که $g_0 N = g N$. حال $g_0^\varphi \in g_0 N$ و $g_0^\varphi \in C_G(\varphi^n)$ چون $C_G(\varphi^n)$ ، φ -پایاست بنابراین $g_0^{-1} g_0^\varphi \in N \cap C_G(\varphi^n)$ به قسمی که همدهسته $g_0(C_G(\varphi^n) \cap N)$ ، φ -پایاست ولی φ روی یک خودریختی روی $C_G(\varphi^n)$ از مرتبه n عمل می کند لذا با استفاده از فرض استقراء $g_0(C_G(\varphi^n) \cap N)$ شامل عنصر g_1 از $C_G(\varphi)$ است بنابراین $g_0(C_G(\varphi^n) \cap N) \subseteq g_0 N = g N$ بنابرین حکم تمام است. ■

لم ۲-۴: فرض کنید φ یک خودریختی از گروه متناهی G است و N یک φ -پایا

$$\left| C_{\frac{G}{N}}(\bar{\varphi}) \right| \leq |C_G(\varphi)|$$

زیرگروه از آن است آنگاه

برهان: طبق لم ۲-۳ مرتبه φ^G (G -مدارهای شامل φ) برابر با $|G : C_G(\varphi)|$ است. حال

علامت بار را برای تصویر عناصر در $\frac{G\langle \varphi \rangle}{N}$ در نظر می گیریم. بنابراین

$$\varphi^{\bar{g}} = \varphi^g N, g \in G \text{ و } |\varphi^{\bar{g}}| = |\bar{G} : C_{\bar{G}}(\varphi)| = \frac{\left| \frac{G}{N} \right|}{\left| C_{\frac{G}{N}}(\varphi) \right|} = \frac{|G|}{|N| \left| C_{\frac{G}{N}}(\varphi) \right|}$$

به عبارت دیگر هر عنصر از $\bar{G}$ -مدار $\varphi^{\bar{g}}$ عنصری از φ^g است. روی هم ریختی طبیعی حداکثر

$|N|$ عنصر می توانند به داخل یک عنصر از $\frac{C(\varphi)}{N}$ نگاشته شوند. بنابراین داریم:

$$|\varphi^{\bar{g}}| |N| \geq |\varphi^g|$$

بنابراین داریم:

$$\frac{|G|}{\left| C_{\frac{G}{N}}(\varphi) \right|} = \frac{\left| \frac{G}{N} \right|}{\left| C_{\frac{G}{N}}(\varphi) \right|} \cdot |N| \geq \frac{|G|}{|C_G(\varphi)|} \Rightarrow \left| C_{\frac{G}{N}}(\varphi) \right| \leq |C_G(N)|$$

توجه می کنیم که این قضیه را می توان به حالتی که A یک گروه دلخواه از خودریختی

های گروه G باشد تعمیم داد با این شرط که مرتبه A نسبت به مرتبه گروه A - پایای نرمال N

$$\blacksquare. C_{\frac{G}{N}}(A) = \frac{C_G(A)N}{N} \text{ آنگاه } (|A|, |N|) = 1 \text{ اول باشد}$$

خودریختی ها به عنوان تبدیلات خطی

فرض کنید G یک زیرگروه از گروه خودریختی های از گروه آبدلی V است. که به عنوان یک ZG - مدول راست در نظر گرفته می شود. در این صورت G یک زیر مجموعه از $Hom_Z(V, V)$ (حلقه همه درونریختی های V) است.

یادآوری می کنیم که هر گروه آبدلی مقدماتی E از توان عدد اول p را می توان به عنوان یک فضای برداری روی F_p (یک میدان از p عنصر) در نظر گرفت. آنگاه گروه خودریختی $Aut(E)$ را می توان به عنوان $GL(E)$ (گروه تبدیلات خطی نا منفرد از E) در نظر گرفت. با استفاده از فرم نرمال ژوردان می توان بین مرتبه یک p -گروه آبدلی و تعداد نقاط ثابت شده از p - خودریختی هایش ارتباط برقرار کرد.

فرم نرمال ژوردان از یک تبدیل خطی از مرتبه متناهی

فرض کنید ψ یک تبدیل خطی از فضای برداری متناهی بعد V روی میدان K باشد. اگر همه مقادیر ویژه¹ ψ به K تعلق داشته باشند آنگاه V یک پایه دارد که ماتریس ψ نسبت به آن ژوردان نرمال شکل است که بلوک های قطری² $diag(j_1, \dots, j_n)$ با بلوک های ژوردان J_i

¹ Eigenvalues

² Block - Diagonal

به شکل
$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$
 است که λ_i ها مقادیر ویژه ψ هستند که لزوماً متفاوت نیستند. [14]

قضیه ۲-۵: فرض کنید ψ یک عنصر از مرتبه متناهی n در گروه تبدیلات خطی نا تبهگن^۱ از فضای برداری V روی میدان K است اگر مشخصه میدان K صفر یا نسبت به n اول باشد آنگاه فرم نرمال ژوردان از ψ روی یک توسعه دلخواه از میدان K قطری است و مقادیر ویژه ψ ، n امین ریشه از ۱ اند.

برهان: با یک محاسبه ساده از n امین توان یک قاب^۲ ژوردان از مرتبه بزرگتر از 1×1 نشان

می‌دهد که معادله
$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & \dots \\ & \alpha & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \dots \\ & \alpha^n & \ddots \\ & & \ddots & n\alpha^{n-1} \\ & & & \alpha^n \end{bmatrix} = E$$
 برقرار است

اگر و تنها اگر $\alpha^n = 1$ و $n\alpha^{n-1} = 0$. چون $n \neq 0$ با استفاده از فرضیات روی مشخصه در معادله دوم داریم $\alpha = 0$ که با فرض اول تناقض دارد بنابراین تمام قابهای ژوردان از اندازه 1×1 اند بنابراین تمام مقادیر ویژه ψ برابر با ۱ اند. ■

قضیه ۲-۶: فرض کنید ψ یک عنصر از $GL(V)$ از مرتبه p^n باشد که V یک میدان

برداری از بعد متناهی روی میدان K از مشخصه $p > 0$ است. آنگاه تمام مقادیر ویژه ψ برابر با ۱ اند و V یک پایه دارد که ماتریس ψ نسبت به آن ژوردان نرمال شکل است با بلوک‌هایی به

^۱ Nondegenerate

^۲ Box

شکل $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ که همه آنها از مرتبه حداکثر $p^n \times p^n$ اند و حداقل یک قاب از مرتبه بزرگتر از $p^{n-1} \times p^{n-1}$ وجود دارد.

برهان: روی هر میدان از مشخصه P داریم $0 = 1 - \varphi^{p^n} = (1 - \varphi)^{p^n}$. بنابراین φ ریشه چند جمله ای $x^{p^n} - 1$ است بنابراین همه مقادیر ویژه از φ برابر با ۱ است حال با استفاده از قضیه نرمال ژوردان، V یک پایه دارد که ماتریس φ نسبت به آن ژوردان نرمال شکل است و

$$\text{بلوک های آن به شکل} \begin{bmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots \\ & 1 & & \ddots \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \binom{m}{2} \\ & & & & 1 & \binom{m}{1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}^m \right] \text{ است.}$$

حال فرض می کنیم $m := p^s$ برای تعدادی $s \in N$. چون $\varphi^{p^n} = 1$ است بنابراین

داریم $\binom{m}{1} = \binom{m}{2} = \cdots = 0$ به سادگی می توانیم ببینیم که $\binom{m}{i}$ مضربی از p است و $\binom{p^s}{p^s} = 1$.

واضح است که اگر اندازه هر بلوک بیشتر از $p^n \times p^n$ باشد آنگاه $\varphi^{p^n} \neq 1$ که این مخالف فرض است. اگر اندازه همه بلوک ها حداکثر $p^{n-1} \times p^{n-1}$ باشد آنگاه ما باید داشته باشیم $\varphi^{p^{n-1}} = 1$ که تناقض با فرض $|\varphi| = p^n$ است و حداقل یک قاب از مرتبه بزرگتر از $p^{n-1} \times p^{n-1}$ وجود دارد.



قضیه ۷-۲: با فرضیات قضیه بالا $\dim V = dp^n$ که $\dim C_V(\varphi) = d$ $C_V(\varphi) = \{v \in V \mid v\varphi = v\}$.

برهان: به [۱۲-۲] از [14] مراجعه گردد. ■

تعریف (عمل هم _ اول)

اگر گروه R روی گروه G عمل کند و p یک عدد اول باشد در این صورت $\mathcal{N}_G(R, p)$ را مجموعه $R -$ پایا $p -$ زیرگروه‌های از گروه G و $\mathcal{N}_G^*(R, p)$ را مجموعه عناصر ماکسیمال از $\mathcal{N}_G(R, p)$ نسبت به رابطه شمول تعریف میکنیم، در این صورت می‌گوییم R به صورت هم اول روی گروه G عمل می‌کند هرگاه R به عنوان یک گروه از خودریختی‌های G روی G عمل کند و R و G مرتبه‌های نسبت به هم اول داشته باشند و R یا G یک گروه حل پذیر باشد. با توجه به این تعریف داریم:

قضیه ۲-۸: فرض کنید R به صورت هم اول روی G عمل می‌کند و p یک عدد اول است.

در این صورت شرایط زیر برقرار است:

$$1. \quad \mathcal{N}_G^*(R, p) \subset \text{syl}_p(G). \quad \text{بنابراین } G \text{ یک } R - \text{پایا } p - \text{زیرگروه سیلو دارد.}$$

$$2. \quad C_G(R) \text{ به صورت متعددی با مزدوج هایش روی } \mathcal{N}_G^*(R, p) \text{ عمل می‌کند.}$$

$$3. \quad \text{اگر } P \in \mathcal{N}_G^*(R, p) \text{ آنگاه } C_P(R) \in \text{syl}_p(C_G(R)).$$

$$4. \quad G = C_G(R)[G, R] \text{ . بویژه اینکه } [G, R] = [G, R, R].$$

۵. اگر G آبلی باشد آنگاه $G = C_G(R) \times [G, R]$.

۶. اگر K یک زیرگروه نرمال R - پایا از G باشد و $\bar{G} = \frac{G}{K}$ آنگاه $C_{\bar{G}}(R) = \overline{C_G(R)}$.

۷. هر ۲ عنصر از $C_G(R)$ که در G مزدوج اند در $C_G(R)$ نیز مزدوج اند.

برهان: به [1] مراجعه گردد.

قضیه ۲-۹: فرض کنید p یک عدد اول است و φ یک خودریختی از مرتبه p^n از یک

p - گروه آبلی متناهی A است. اگر $|C_A(\varphi)| = p^m$ آنگاه مرتبه A حداکثر برابر با mp^n است.

برهان: چون $\Omega_1(A)$ زیر گروه مشخصه از A است بنابراین تحت φ پایاست. با استفاده از

این خاصیت، ما $\Omega_1(A)$ را به عنوان یک فضای برداری روی میدان F_p و φ را به عنوان یک

تبدیل خطی از $\Omega_1(A)$ در نظر می گیریم. چون $|C_A(\varphi)| = p^m$ و پس $|C_{\Omega_1(A)}(\varphi)| \leq |C_A(\varphi)| = p^m$

$\dim C_{\Omega_1(A)}(\varphi) \leq m$. مرتبه تحدید φ به $\Omega_1(A)$ ، P^n را می شمارد بنابراین با استفاده از قضیه

۲-۷، $\dim \Omega_1(A) \leq mp^n$. ولی بعد $\Omega_1(A)$ دقیقاً برابر با رتبه $\Omega_1(A)$ به عنوان یک p - گروه

آبلی است که با مرتبه A برابر است. ■

۲-۱۰ نتیجه:

۱. فرض φ یک عنصر از $GL(V)$ از مرتبه p^n است و V یک فضای برداری روی یک

میدان از مشخصه عدد اول p باشد آنگاه $C_V(\varphi) \neq 0$.

۲. اگر φ را یک خودریختی از مرتبه p^n از یک p -گروه آبدی A باشد آنگاه $C_A(\varphi) \neq 1$.

۳. فرض کنید p یک عدد اول و A یک گروه از مرتبه p^m است که به عنوان خودریختی-

های روی گروه P عمل می کند و از مرتبه p^n است آنگاه $C_p(A) \neq 1$.

برهان: به مرجع [۲۶] مراجعه شود.

۱۱-۲ گزاره: فرض G یک گروه قدرتمند است و $\Omega_1(G) \supseteq N \supseteq G'$ را $a_1N, \dots, a_dN$

یک پایه برای گروه آبدی $\frac{G}{N}$ بگیرید. آنگاه ————— برای $e_1 \cdots e_d$ مناسب، داریم

$$.N = \langle a_1^{p^{e_1}}, \dots, a_d^{p^{e_d}} \rangle$$

برهان: به [۸-۱] از [۲۷] مراجعه گردد. ■

نتیجه ۱۲-۲: گر $G = \langle a_1, \dots, a_d \rangle$ یک گروه قدرتمند باشد آنگاه $\Omega_i(G) = \langle a_1^{p^i}, \dots, a_d^{p^i} \rangle$.

اثبات این قضیه برای حالت $p=2$ در [۳-۱] در [۲۱] آمده است و به راحتی می توان این

اثبات را به حالتی که p یک عدد اول فرد است تعمیم داد فقط باید توجه کنیم که اگر G یک

گروه قدرتمند باشد داریم: $\Omega_i(\Omega_j(G)) = \Omega_{i+j}(G)$.

برهان: به [۲۱] مراجعه شود.

قضیه ۲-۱۳: فرض کنید $d(G)$ برابر با مینیمم تعداد مولدهای گروه G که G یک

p -گروه و $d(G)=d$ باشد. آنگاه G یک گروه قدرتمند است اگر و تنها اگر G حاصل ضرب داخلی از d زیرگروه دوری است.

برهان: به [۱۱-۱] از [۲۱] مراجعه گردد. ■

فرض کنید $\pi(G)$ مجموعه همه مقسوم علیه‌های اول $|G|$ باشد و $q \in \pi(G)$ - زیرگروه نرمال ماکسیمال منحصر به فرد گروه G را با $O_\pi(G)$ نمایش می‌دهیم. $O_\pi(G)$ زیرگروه مشخصه گروه G است. طبق تعریف $O_p(\bar{G}) = \bar{1}$ که $\bar{G} = \frac{G}{O_p(G)}$ در

$\bar{G}$ این π' -زیرگروه نرمال منحصر به فرد را با $O_{\pi'}(\bar{G})$ نمایش می‌دهیم که عبارت است از تصویر معکوس G در $O_{\pi, \pi'}(G)$. مشابه $O_{\pi, \pi', \pi}(G)$ را تصویر معکوس G در

تعریف می‌کنیم. $O_\pi\left(\frac{G}{O_{\pi, \pi'}(G)}\right)$ سری

و $1 \subseteq O_\pi(G) \subseteq O_{\pi, \pi'}(G) \subseteq O_{\pi, \pi', \pi}(G) \subseteq \dots$ را π -سری بالایی

$1 \subseteq O_{\pi'}(G) \subseteq O_{\pi', \pi}(G) \subseteq O_{\pi', \pi, \pi'}(G) \subseteq \dots$ را π' -سری پایینی می‌نامیم.

$O_{q'}(G)$ ، q' -زیرگروه نرمال از گروه G در نظر می‌گیریم و $O_{qq'}(G)$ را تصویر

معکوس q -زیرگروه نرمال ماکسیمال در گروه $\frac{G}{O_{q'}(G)}$ در نظر می‌گیریم آنگاه

عمل $\frac{G}{O_{qq'}(G)}$ با تزویج روی $\frac{G}{\Phi(G)}$ با وفاست.

با استفاده از قضیه تامپسون (۱۹۹۵) می‌توان نشان داد که هر گروه متناهی با یک

خودریختی منظم از مرتبه عدد اول فرد پوچتوان است. هیگمن [5] در سال ۱۹۵۷ اثبات کرد که

کلاس پوچتوانی یک گروه پوچتوان با یک خودریختی منظم از مرتبه عدد اول p با یک نگاشت $h(p)$ کراندار شده است که فقط وابسته به p است. کرکین^۱ و کوستریکین^۲ در سال ۱۹۶۳ یک کران بالایی برای تابع هیگمن پیدا کردند.

در قضیه بعد ما ثابت می کنیم که رتبه هر p - سیلو زیر گروه از گروه متناهی G کراندار شده است.

لم ۲-۱۳: فرض G یک گروه متناهی و φ یک خودریختی از مرتبه عدد اول p با مرکزساز از رتبه r است، آنگاه رتبه p - سیلو زیر گروه از G کراندار شده بر حسب r و p است.

برهان: به [13] مراجعه گردد. ■

لم ۲-۱۴: فرض کنید Q یک q - گروه متناهی از تبدیلات خطی از فضای برداری V از مشخصه متمایز با q باشد آنگاه رتبه Q بر حسب بعد V کراندار شده است.

برهان: به [13] مراجعه گردد. ■

قضیه (هال) ۲-۱۵: فرض کنید G یک گروه متناهی حل پذیر باشد و π یک مجموعه از اعداد اول باشد در این صورت G یک π - زیر گروه هال دارد و هر دو π - زیر گروه هال از G مزدوج اند بنابراین هر زیر گروه که مرتبه اش حاصل ضربی از عناصر π باشد شامل تعدادی π - زیر گروه هال است. بویژه اینکه هر π - زیر گروه از گروه G در یک π - زیر گروه هال

¹ V. A. Kreknin

² A. I. Kostrikin

مشمول است. این قضیه را با استفاده از استقراء و این که هر زیرگروه حل پذیر دارای یک زیرگروه نرمال آبلی مقدماتی است، می توان اثبات کرد.

اثبات: به مرجع [9] مراجعه گردد.

قضیه ۲-۱۶: (معکوس قضیه هال) هرگروه متناهی که یک π -زیرگروه هال داشته باشد (برای هر مجموعه از اعداد اول π) حل پذیر است.

اثبات: به مرجع [۳] مراجعه گردد.

قضیه فوق را می توان تعمیمی از قضیه برونساید^۱ در نظر گرفت که بیان می کرد:

گروه های از مرتبه $p^a q^b$ که p و q اعداد اولند حل پذیرند. قضیه سیلو وجود زیرگروه های هال را تضمین می کند.

قضیه ۲-۱۷: فرض کنید $\Phi(G)$ بیانگر زیرگروه های فراتینی از گروه G باشد در این صورت:

$G = \langle x_i | x_i \in G, 1 \leq i \leq n \rangle$ اگر و تنها اگر $G = \langle \Phi(G), x_i | x_i \in G, 1 \leq i \leq n \rangle$. بویژه اگر $H = G = \Phi(G)H$ که H زیرگروه G است، آنگاه $H = G$.

اثبات: به مرجع [۳] مراجعه گردد.

¹ Burnside

قضیه ۲-۱۸: فرض کنید M یک زیرگروه ماکسیمال از گروه G است و $L = \bigcap_{x \in G} M^x$.

در این صورت L یک زیرگروه نرمال از گروه G است. و مجموعه $\bar{G} = \frac{G}{L}$ و $\bar{F} = F(\bar{G})$ را در نظر می‌گیریم و $\bar{M}$ را تصویر M در $\bar{G}$ می‌گیریم.

آنگاه داریم: $\bar{F} = 1$ یا یکی از شرایط زیر برقرار است:

۱. $\bar{F}$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه G است.

۲. $\bar{F}$ یک p -گروه آبلی مقدماتی از G است.

$$3. C_G(\bar{F}) = \bar{F}.$$

$$4. \bar{F} \cap \bar{M} = 1.$$

۵. برای یک n , $|G : M| = p^n$.

اثبات: به مرجع [۳] مراجعه گردد. (۴-۶-۱) ■

قضیه ۲-۱۹: فرض کنید $\Phi(G)$ بیانگر زیرگروه‌های فراتینی از گروه G باشد در این صورت

اگر $F = F(G)$ و $\Phi = \Phi(G)$ در این صورت:

$$1. [F, F] \subseteq \Phi \subseteq F$$

$$2. \frac{F}{\Phi} = F\left(\frac{G}{\Phi}\right)$$

برهان: به [۶-۱-۶] از مرجع [۳] مراجعه گردد. ■

توجه ۲:

خاصیت های زیر نیز برای زیرگروه های هال برقرار است:

۱. یک π -زیرگروه هال از گروه G ، یک π -زیرگروه ماکسیمال از گروه G است.

۲. اگر P یک p -گروه باشد در این صورت برای هر $p \in P$ ، هر p -زیرگروه هال یک p -زیرگروه سیلو از گروه G است.

۳. اگر G یک گروه باشد و P یک p -زیرگروه سیلو از گروه G و H یک p' -زیرگروه هال از گروه G باشد آنگاه داریم $G = HP$ و $H \cap P = 1$.
(p' -زیرگروه های هال معمولا p -سیلو زیرگروه های متمم G نامیده می شوند)

در این قسمت ما دو لم مقدماتی می آوریم که در ادامه کاربرد دارند. برای گروه X ، سری مرکزی پایینی از X در نظر می گیریم که با $\gamma_1(X) = X$ شروع می شود و همچنین تعریف می کنیم $\gamma_\infty(X) := \bigcap \gamma_i(X)$ و جملات سری فیتینگ را با $F_i(X)$ نمایش می دهیم که این سری با $F_1(X) = F(X)$ شروع می شود.

لم ۲۰-۲: برای هر گروه متناهی $H = F_2(H)$ از ارتفاع فیتینگ ۲،

داریم: $\gamma_\infty(H) = \prod_q [F_q, H_{q'}] = \prod_{q \neq t} [F_q, H_t]$ که F_q یک q -زیر گروه

سیلو از $F(H)$ است و $H_{q'}$ یک $-q'$ زیر گروه هال از H و H_t یک $-t$ زیر گروه سیلو از H است.

برهان: چون $[F_q, H_{q'}]$ و $[F_q, H_t]$ برای $t \neq q$ زیر گروه های نرمال از H اند بنابراین

حاصل ضرب آنها نیز نرمال است. از طرفی می دانیم $X \triangleright [X, X] \triangleright [[X, X], X] \triangleright \dots$

(به طور معادل یعنی $\gamma_1(X) = X$ و $\gamma_\infty(X) := \bigcap \gamma_i(X)$ که $X \triangleright \gamma_2(X) \triangleright \gamma_3(X) \dots$)

چون $F_1(X) = F(X)$ که $1 \leq F_1(H) \leq F_2(H) = H$ که $F_2(H) = F\left(\frac{H}{F_1(H)}\right)$ بنابراین چون

$\frac{H}{F_1(H)}$ و $F_1(H)$ پوچتوان است بنابراین حل پذیر اند و طبق خاصیت گروه های حل پذیر گروه

H نیز حل پذیر است پس چون متناهی اند حتما دارای زیر گروه هال اند. چون هر

گروه متناهی حاصل ضرب یک $-q$ زیر گروه سیلو در یک $-q'$ زیر گروه هال است بنابراین

می توانیم بنویسیم $H = H_q H_{q'}$. حال چون $[F_q, H_{q'}]$ نرمال است بنابراین خارج قسمتی

$\frac{H}{[F_q, H_{q'}]}$ با معنی است از طرفی به پیمانه $[F_q, H_{q'}]$ گروه $H = H_q H_{q'}$ روی F_q به عنوان

تصویر H_q عمل می کند بنابر این چون $\prod_q [F_q, H_{q'}]$ نرمال است پس با توجه

به عمل F_q روی H_q گروه خارج قسمتی $\frac{H}{\prod_q [F_q, H_{q'}]}$ پوچتوان است

لذا $\gamma_\infty(H) \leq \prod_q [F_q, H_{q'}]$ بر عکس، چون $[F_q, H_{q'}] = [F_q, H_{q'}] \cdot [F_q, H_{q'}]$ با

استفاده از ۳ داریم $\gamma_\infty(H) \leq [F_q, H_{q'}]$ بنابراین $\prod_q [F_q, H_{q'}] \leq \gamma_\infty(H)$ لذا

$\gamma_\infty(H) = \prod_q [F_q, H_{q'}]$ حال چون $H_{q'} = \prod_{t \neq q} H_t$ ، با توجه به نرمال بودن $[F_q, H_t]$ در H

داریم $[F_q, H_{q'}] = \prod_{t \neq q} [F_q, H_t]$ ■

قضیه ۲-۲۱ (استدلال فراتینی): اگر H و P در گروه G نرمال باشند

به قسمی که $p \in \text{syl}_p(H)$ ، آنگاه $G = N_G(p)H$.

اثبات: به [۶-۲۶] از [۹] مراجعه گردد.

در این قسمت ما سه زیر گروه را به همراه اثبات بیان می کنیم که یک لم کاربردی و مهم در مطالعه نظریه گروه های متناهی و مخصوصاً نظریه گروه های قدرتمند است. این قضیه دارای دو صورت متفاوت است که جداگانه آورده شده و اثبات شده اند.

لم ۲-۲۲: (لم سه زیر گروه) فرض کنید X و Y و Z عناصری از گروه G باشند و H و

K و L زیر گروه های G باشند در این صورت:

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1 \quad (۱)$$

$$[L, H, K] = 1 \text{ آنگاه } [H, K, L] = 1 \text{ و } [K, L, H] = 1 \quad (۲)$$

برهان داریم:

$$[x, y^{-1}, z] = y^{-1} [x^{-1} y x y^{-1}, z] y^{-1} = y^{-1} (y x^{-1} y^{-1} x) z^{-1} (x^{-1} y x y^{-1}) y z = x^{-1} y^{-1} x z^{-1} x^{-1} y x y^{-1} z y$$

حال قرار می دهیم:

$$c = z y z^{-1} x z, \quad b = y x y^{-1} z y, \quad a = x z x^{-1} y x$$

و توجه می کنیم که b و c به وسیله جایگشت دوری عناصر X و Y و Z از a بدست می

آیند، و داریم: $[x, y^{-1}, z] = a^{-1} b$. همچنین با جایگشت دوری X و Y و Z داریم:

$$[z, x^{-1}, y]^x = c^{-1}a \quad \text{و} \quad [y, z^{-1}, x]^z = b^{-1}c$$

حال چون $(a^{-1}b)(b^{-1}c)(c^{-1}a) = 1$ لذا نتیجه می گیریم (۱) برقرار است.

حال فرض کنید $[H, K, L] = [K, L, H] = 1$ آنگاه برای تمام $x \in H, y \in K, z \in L$ داریم:

$[x, y^{-1}, z] = [y, z^{-1}, x] = 1$ لذا بنابر (۱) داریم $[z, x^{-1}, y] = 1$. اما $[L, H, K]$ به وسیله مجموعه تمام جابجاگرهای به شکل $[z, x^{-1}, y]$ و مزدوج های آن تولید می شود بنابراین $[L, H, K] = 1$. ■

از این پس ما از نماد جابجاگر برای $[G, \varphi]$ به صورت زیر استفاده می کنیم
 $[G, \varphi] = [G, \langle \varphi \rangle] = \langle [g, \varphi] | g \in G \rangle = \langle g^{-1}g^\varphi | g \in G \rangle$
 است که φ به صورت بدیهی روی خارج قسمت عمل می کند.

قضیه ۲-۲۳ (کالوزیس): فرض کنید $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_s = 1$ یک سری نرمال

از گروه G باشد. اگر $A \leq \text{Aut}(G)$ باشد به قسمی که برای هر i ، $[G_i, A] \leq G_{i+1}$ ، آنگاه $[G, A]$ و A هر دو پوچتوان و از کلاس S اند.

اثبات: به مرجع [14] مراجعه گردد.

قضیه ۲-۲۴: سری نرمال $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_s = 1$ مرکزی است اگر و تنها

اگر $[G_i, G] \leq G_{i+1}$.

¹ L.Kaluzhnin

برهان: اگر سری نرمال $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_s = 1$ مرکزی باشد آنگاه

$$(G_{i+1}x)(G_{i+1}g) = (G_{i+1}g)(G_{i+1}x), g \in G \text{ و } x \in G_i \text{ برای هر } i, \text{ بنابراین } \frac{G_i}{G_{i+1}} \leq C\left(\frac{G}{G_{i+1}}\right)$$

بوده و لذا $G_{i+1}(xgx^{-1}g^{-1}) = G_{i+1}$ بنابراین $[x, g] \in G_{i+1}$ پس $[G_i, G] \leq G_{i+1}$.

برعکس، فرض $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_s = 1$ نرمال است به طوری که برای هر $i = 1, \dots, n-1$,

$[G_i, G] \in G_{i+1}$. در نتیجه برای هر $x \in G_i$ و هر $g \in G$ ، $[x, g] \in G_{i+1}$ بنابراین

$$(G_{i+1}x)(G_{i+1}g) = (G_{i+1}g)(G_{i+1}x) \text{ بوده و لذا } (G_{i+1}x) \in C\left(\frac{G}{G_{i+1}}\right) \text{ است. در نتیجه } \frac{G_i}{G_{i+1}} \leq C\left(\frac{G}{G_{i+1}}\right) \blacksquare$$

یادآوری:

(۱) فرض کنید G یک گروه π -تفکیک پذیر است آنگاه π -سری بالایی و پایینی از گروه G

به G ختم می شود و برعکس اگر π -سری بالایی و پایینی از گروه G به G ختم شود آنگاه

یک گروه π -تفکیک پذیر است.

(۲) زیرگروه ها و تصاویر همریخت از هر گروه π -تفکیک پذیر، π -تفکیک پذیر است.

(۳) هر زیرگروه نرمال مینیمال از گروه π -تفکیک پذیر، یک π -گروه یا π' -گروه است.

$$(۴) \text{ برای هر گروه } G, O_\pi\left(\frac{G}{O_\pi(G)}\right) = 1.$$

(۵) اگر G یک گروه π -تفکیک پذیر باشد و $\bar{G} = \frac{G}{O_{\pi'}(G)}$ ، آنگاه $O_\pi(\bar{G}) \subseteq C_{\bar{G}}(O_\pi(\bar{G}))$.

لم ۲-۲۵: فرض کنید π یک مجموعه از اعداد اول و G یک گروه متناهی π -تفکیک پذیر

باشد به قسمی که یک خودریختی مانند φ دارد که $G = [G, \varphi]$. بعلاوه فرض کنید H یک π' -زیر گروه هال φ -پایا از گروه G است و X یک زیر گروه نرمال φ -پایا از G که $H \not\leq X$ و $[H, \varphi] \not\leq X$.

برهان: فرض می کنیم $X=1$ و $[H, \varphi]=1$. سری نرمال φ -پایای $G \geq G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq 1$

از G را در نظر می گیریم که عواملش متناوبا π -گروه و π' -گروه هستند و $[G_1, \varphi] \leq G_2$.
گروه خارج قسمتی $\frac{G}{G_1}$ نمی تواند یک π' -گروه باشد زیرا در غیر این صورت: اگر $\frac{G}{G_1}$ یک π' -گروه باشد آنگاه داریم $G_1 \subseteq G_1 H = G$. از طرفی سری فوق یک سری φ -پایاست پس داریم:

$$\frac{G}{G_1} = \varphi\left(\frac{G}{G_1}\right) = \frac{\varphi(G)}{\varphi(G_1)} = \frac{\varphi(G_1 H)}{\varphi(G_1)} = \frac{\varphi(G_1)\varphi(H)}{\varphi(G_1)} = \frac{G_1 H}{G_1}$$

حال کافیت اثبات کنیم $G_1 = G_1 H$. داریم:

$$G = [G, \varphi] = [G_1 H, \varphi] = [G_1, \varphi]^H [H, \varphi] \leq G_2$$

. از طرفی $|G, G_1 H| = \frac{|G|}{|H||G_1|}$ بنابراین $[G, H] = [G, G_1 H][G_1 H, H]$ و

$$[G, H] = [G, G_1 H][G_1 H, G_1] \text{ و } [G_1, G_1 H][G, G_1]$$

بنابراین چون طبق فرض $[G, H]$ یک π' -گروه نیست و نیز $[G, G_1]$ یک π' -گروه است پس

نتیجه می شود که $[G, G_1 H] = 1$ که در این صورت $G = G_1 = G_1 H$ که تناقض با

فرض π' -گروه بودن $\frac{G}{G_1}$ دارد بنابراین $\frac{G}{G_1}$ یک π' -گروه نیست پس با استفاده از فرض

داریم $\frac{G_1}{G_2}$ یک π' -گروه است به قسمی که $[G_1, \varphi] \leq G_2$. بنابراین چون $[G_i, G_j] \leq G_{i+j}$ داریم:

$$[[G, G_1], \varphi] \leq [G_1, \varphi] \leq G_2$$

و

$$[[G_1, \varphi], G] \leq [G_2, G] \leq G$$

بنابر این طبق لم سه زیر گروه داریم $[[\varphi, G], G_1] = [G, G_1] \leq G_2$. بنابراین طبق [۶-۲-۲] از

[۳] تصویر G_1 در $\frac{G}{G_2}$ مرکزی است و چون این تصویر یک π' -زیرگروه هال از $\frac{G}{G_2}$ است

پس $\frac{G}{G_2}$ حاصل ضرب مستقیمی از π -زیرگروه های هال خودش و $\frac{G_1}{G_2}$ است که تناقض با

فرض $[G, \varphi] = G$ است. ■

فصل ۳

گروه های غیر حل پذیر

در این قسمت ۲ لم مقدماتی بدون اثبات می آوریم که با استفاده از آنها گزاره زیر را که هدف این قسمت است را اثبات می کنیم. علاقه مندان به داشتن اثبات دو لم مقدماتی و بدست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد گروه های ساده می توانند به مرجع [6] مراجعه کنند.

قضیه 3-1: M را یک زیرگروه نرمال از گروه متناهی G در نظر بگیرید. اگر M

حاصل ضرب مستقیمی از زیرگروه هایی غیرآبلی ساده $G_1, G_2, \dots, G_r$ باشد آنگاه M حاصل ضرب مستقیمی از زیرگروه های نرمال مینیمال G است و بویژه $M \leq soc(G)$.

اثبات: به [۴-۱۴] از [6] مراجعه گردد. ■

گزاره 3-2: فرض کنید G یک گروه ساده باشد با یک خودریختی φ از مرتبه عدد اول p

باشد به قسمی که $C_G(\varphi)$ از رتبه r باشد آنگاه رتبه $\frac{G}{S(G)}$ که $S(G)$ رادیکال حل پذیر از G است، (p, r) - کراندار است.

اثبات: به مرجع [۴] مراجعه گردد.

لم ۳-۳: اگر G حاصل ضرب مستقیمی از گروه های غیرآبلی ساده S_i باشد آنگاه گزاره 1

باز هم برقرار است و بعلاوه عدد $k, (p, r)$ - کراندار است.

اثبات: به مرجع [۴] مراجعه گردد.

گزاره 3-4: فرض کنید G یک p' -گروه با یک خودریختی φ از مرتبه عدد اول p باشد

به قسمی که $C_G(\varphi)$ از رتبه r باشد آنگاه رتبه $\frac{G}{S(G)}$ که $S(G)$ رادیکال حل پذیر از G

است، (p, r) -کراندار است.

اثبات: فرض می کنیم $S(G) = 1$. حال M را حاصلضرب همه زیرگروه های نرمال مینیمال G

در نظر بگیرید آنگاه $M = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$ حاصلضرب مستقیم از گروه های ساده نا آبدی است

حال با استفاده از لم 3-3 در بالا رتبه M و عدد $k, (p, r)$ -کراندار است. پس G در

$(\text{Aut} S_1 \times \text{Aut} S_2 \times \dots \times \text{Aut} S_k)$ نشانده می شود که H یک گروه متقارن از درجه

k است. حال چون هر S_i ساده است بنابراین طبق [۶-۱۱] از [1] برای هر i رتبه $\frac{\text{Aut} S_i}{S_i}$

حداکثر ۳ است. لذا رتبه G ، براساس طبقه بندی گروه های متناهی،

(p, r) -کراندار است. ■

نتیجه هال - هیگمن

در این فصل ما قضیه هال-هیگمن را بیان می کنیم که کاربرد زیادی در مطالعه نظریه گروه

های متناهی دارد.

لم 3-5: فرض کنید $T\langle\varphi\rangle$ حاصل ضرب نیم مستقیم از یک t -زیرگروه نرمال T و یک گروه

دوری $\langle\varphi\rangle$ از مرتبه p ، که p و t اعداد اول مجزا هستند. فرض کنید $|C_T(\varphi)| = t^s$ و $\frac{T}{Z(T)}$

آبدی و از توان t است. فرض کنید $T\langle\varphi\rangle$ به طور با وفا با تبدیلات خطی روی فضای برداری V

روی یک میدان جبری بسته K با مشخصه t یا p عمل می‌کند. اگر $\dim_v C(\phi) = r$ ، آنگاه رتبه T بر حسب p و r و S کراندار شده است.

اثبات: به مرجع [13] مراجعه گردد.

قضیه 3-6: فرض کنید $G = H\langle\alpha\rangle$ حاصل ضرب نیم‌مستقیم از یک p -زیرگروه نرمال H از کلاس کمتر مساوی ۲ با یک گروه دوری $\langle\alpha\rangle$ از مرتبه عدد اول $p \neq q$ باشد. حال فرض کنید:

$$(۱) \quad \frac{H}{Z(H)} \text{ از توان } p \text{ است.}$$

$$(۲) \quad H = [H, \alpha] \neq 1.$$

حال k را یک میدان جبری بسته از مشخصه k بگیرید که $k \nmid |G|$ و V را یک KG -مدول کاهشی باوفا در نظر بگیرید. آنگاه:

$$(الف) \quad \dim_k C(\alpha) = \frac{1}{q} \dim_k V.$$

(ب) H فوق العاده خاص است و $Z(H) \leq Z(G)$ و $|H|$ بوسیله تابع

$$g(d, q) \text{ که } d = \dim_K C_V(\alpha), \text{ کراندار شده است.}$$

اثبات: به مرجع [8] مراجعه گردد.

در قضیه بعد ما اثبات می‌کنیم که اگر گروه G یک گروه حل‌پذیر باشد آنگاه $\left| \frac{G}{F(G)} \right|$

بر حسب تابعی از m کراندار است که $F(G)$ زیرگروه فیتینگ گروه G است.

قضیه 3-۷: (هارتلی _ میکسنر) G را یک گروه متناهی حل پذیر در نظر بگیرید که

یک خودریختی φ از مرتبه عدد اول q دارد. فرض کنید $m = |C_G(\varphi)|$. آنگاه داریم $|G/F(G)| \leq f(m, q)$ که یک تابع بر حسب m و q است.

برهان: به مرجع [8] مراجعه گردد. ■

قضیه 3-۸: فرض کنید A یک زیرگروه از خودریختی های گروه G باشد. حال فرض کنید

A یک P' -زیرگروه از P -گروه P است و فرض کنید ψ یک عضو نا بدیهی از A است و ψ به صورت بدیهی روی هر زیرگروه نرمال A -پایا از P عمل کند. آنگاه گزاره های زیر معادل اند:

$$P' \subseteq Z(P) \quad (۱)$$

$$\frac{P}{P'} \text{ آبدلی مقدماتی است.} \quad (۲)$$

$$(۳) \quad P \text{ یا آبدلی مقدماتی است یا از کلاس } ۲ \text{ و } P' = Z(P) = \Phi(P) \text{ آبدلی مقدماتی است و } \psi$$

به صورت بدیهی روی P' عمل می کند.

اثبات: به [۷-۳-۵] از [۳] مراجعه گردد.

نتیجه 3-۹: فرض کنید p و q اعداد اول متمایز اند و $H\langle\varphi\rangle$ حاصل ضرب نیم مستقیم

از یک $\{2, p, q\}$ -زیرگروه نرمال و گروه دوری $\langle\varphi\rangle$ از مرتبه P در نظر بگیرید. بعلاوه فرض کنید

که $H = [H, \varphi] \neq 1$ و گروه $H\langle\varphi\rangle$ به صورت با وفا روی فضای برداری V روی میدان F_q با

q عنصر عمل می کند. در این صورت $C_V(\varphi) \neq 0$.

قضیه 3-۱۰: (ایزاک - هارتلی) فرض کنید A یک گروه دلخواه است و عدد

$\delta(A) = \delta$ وابسته به A موجود است و خاصیت زیر نیز برقرار است: A روی گروه G عمل می‌کند و G یک گروه متناهی حل‌پذیر است که $(|G|, |A|) = 1$ و k یک میدان است که مشخصه اش مرتبه A را نمی‌شمارد. حال V را یک kAG -مدول تقلیل یافته و S را یک kA -مدول در نظر بگیرید که به عنوان مولفه ای از تحدید V_A ظاهر می‌شود. آنگاه

$$\dim_k V \leq \delta m_c \text{ که } m_c \text{ تعداد } S \text{ ها در } V_A \text{ است.}$$

توجه ۳:

۱. اگر گروه‌های A و G هر دو حل‌پذیر باشند، **تامپسون** اثبات کرد ارتفاع فیتینگ گروه

G بر حسب $|C_G(A)|$ و مرتبه A کراندار شده است. بویژه اینکه **هارتلی و میکسنر** و پتت به طور جداگانه و مستقل از **تامپسون** اثبات کردند که اگر مرتبه A نسبت به

عدد اول q اول باشد آنگاه رتبه $\frac{G}{F(G)}$ بر حسب $|C_G(A)|$ و q کراندار شده است.

۲. اگر G یک گروه نا بدیهی باشد که $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ و H_i ها

زیرگروه‌های نرمال نا بدیهی و ساده از G اند. در این صورت اگر $Z(G) = 1$ باشد

آنگاه $H_1, \dots, H_n$ زیرگروه‌های نرمال مینیمال از G اند و هر زیرگروه نرمال

نا بدیهی از آن به حاصل ضرب مستقیم بعضی از H_i ها تجزیه می‌شود.

قسمت ۲ این نتیجه به **قضیه ریماک** معروف است. علاقه مندان به مطالعه اثبات این قضیه می

توانند به [۵-۲] از [14] مراجعه کنند.

قضیه 3-11: (کولچین - مالسو) هر گروه خطی حل پذیر یک زیرگروه از شاخص

n - کراندار دارد که زیرگروه مشتق اش پوچتوان و از کلاس کمتر مساوی با n است.

اثبات: به [13] مراجعه گردد.

قضیه 3-12: فرض کنید G یک گروه حل پذیر متناهی است که یک خودریختی از مرتبه

عدد اول p و مرکزساز از رتبه r دارد آنگاه G یک سری نرمال

$1 \leq G_1 \leq G_2 \leq G_3 \leq G_4 \leq G$ دارد که عامل های G_1 و $\frac{G_2}{G_1}$ پوچتوان اند و $\frac{G_3}{G_2}$ پوچتوان

است و از کلاس (p, r) - کراندار است و $\frac{G_4}{G_3}$ آبدی است و $\frac{G_5}{G_4}$ پوچتوان و از کلاس

p - کراندار است و $\frac{G}{G_5}$ رتبه (p, r) - کراندار دارد بویژه $\frac{G}{F(G_5)}$ رتبه

(p, r) - کراندار دارد.

برهان: به [13] مراجعه گردد. ■

توجه 4: هر گروه پوچتوان حاصل ضرب سیلو زیرگروه های خودش است. بویژه

$G = G_p \times G_{p'}$ که G_p یک p - گروه و $G_{p'}$ یک p' - گروه است که هر دو φ - پایا

زیرگروه های نرمال هال اند بنابراین $C(\varphi) = C_{G_p}(\varphi) \times C_{G_{p'}}(\varphi)$.

فصل چهارم

حالت حل پذیری غیر خاص هم اول

گزاره 4-1: فرض کنید G یک P' -گروه حل پذیر متناهی است که یک خودریختی φ از

مرتبه عدد اول p دارد که $C_G(\varphi)$ از رتبه r است. اگر $G = [G, \varphi]$ و L یک زیرگروه φ -پایا

از G باشد که $\frac{F_2(L)}{F_1(L)}$ از مرتبه فرد است آنگاه زیرگروه $(F_2(L))\gamma_\infty(p, r)$ -کراندار دارد.

اثبات: فرض کنید q یک عدد اول است که مرتبه $F(L)$ را می شمارد که L زیرگروه نرمال

φ -پایا از گروه G است و همچنین فرض کنید که $\pi = \{2, q\}$ یک مجموعه از اعداد اول است.

فرض کنید Q یک q -سیلو زیرگروه سیلو از $F(L)$ و H را یک π' -زیرگروه هال از گروه G

است. $H_2 = H \cap F_2(L)$ را در نظر می گیریم که چون $F_2(L)$ در گروه G نرمال است پس

H_2 یک π' -زیرگروه هال از گروه $F_2(L)$ است زیرا: چون $F_2(L)$ در گروه G نرمال است می توانیم فرض کنید که $F_2(L) = N$ که N یک زیرگروه نرمال از G است بنابراین $H_2 = H \cap N \subseteq K \subseteq H_1^* = H$ یک π' -زیرگروه هال از N و H_1 زیرگروه هال از گروه G است بنابراین

$$K \cap N \subseteq H^* \cap N^* = (H \cap N)^* = H_1 \cap N \supseteq K \cap N = K \quad (1)$$

بنابراین $|H^* \cap N^*| = |H_1 \cap N| \geq |K|$ (۲) لذا از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که

$K = H \cap N$ لذا $H_2 = K$ یک π' -زیرگروه هال از N است. از طرفی چون $\frac{F_2(L)}{F_1(L)}$ از مرتبه

فرد است در نتیجه $2 \nmid \left| \frac{F_2(L)}{F_1(L)} \right|$ پس عمل H_2 روی Q با عمل q' -زیرگروه هال از $F_2(L)$

منطبق است زیرا اگر $P \in \text{syl}_2(F(L))$ آنگاه $P \text{ ch } F(L) \triangleleft F_2(L)$ بنابراین $P \triangleleft F_2(L)$ پس

گروه K چنان موجود است که $PK = F_2(L)$ بنابراین با توجه به اینکه $p \in \text{syl}_2(F(L))$ بود

داریم $[P, Q] = 1$ بنابراین $[F_2(L), Q] = [PK, Q] = [P, Q][K, Q]$ که با توجه به اینکه

$[P, Q] = 1$ بنابراین $[F_2(L), Q] = [PK, Q] = [K, Q]$. حال با توجه به لم ۷ و قضیه ۵-۲ قسمت

اول کفایت اثبات کنیم که $Q_1 = [Q, H_2]$ رتبه (p, r) -کراندار دارد که در لم بعد به طور

جداگانه بررسی می گردد. توجه می کنیم که با استفاده از لم ۲-۱۸، $Q_1 = [Q, H_2]$ یک

زیرگروه نرمال φ -پایا از گروه G نیز هست. ■

در لم بعد کراندارای تعداد مولد های Q_1 را بررسی می کنیم.

لم 4-2: مینیمم تعداد مولدهای Q_1 ، (p, r) -کراندار است.

برهان: Q یک q -زیرگروه از $F(L)$ است و H_2 یک π' -زیرگروه هال از $F(L)$ است

بنابراین Q_1 یک q -زیرگروه است لذا طبق [۳-۶-۲۹] از [۱۴] $\phi(Q_1)$ برابر با $Q_1' Q_1^q$ است

پس $V = \frac{Q_1}{\phi(Q_1)} = \frac{Q_1}{Q_1' Q_1^q}$ یک q -زیرگروه است بنابراین طبق [۳-۷-۲۴] از

[۱۴] $V = \frac{Q_1}{\phi(Q_1)}$ یک q -زیرگروه آبله‌مقدماتی است بنابراین ما $V = \frac{Q_1}{\phi(Q_1)}$ را می‌توانیم به

عنوان $F_q G \langle \phi \rangle$ مدول در نظر بگیریم. حال سری ترکیب $V = V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset 0$ را در نظر

می‌گیریم که چون V_i ها q -زیرگروه‌های آبله‌مقدماتی اند بنابراین $U_i = \frac{V_i}{V_{i+1}}$ ها ساده اند و

می‌توان آنها را به عنوان یک $F_q G \langle \phi \rangle$ -مدول تقلیل نیافتنی (ساده) در نظر گرفت. حال با

استفاده از قضیه ماسج^۱ [۱-۳-۳] از [۹] برای هر i داریم $[U_i, H_2] = U_i$ و H به صورت نا

بدیهی روی U_i عمل می‌کند. حال با استفاده از لم ۲-۲۳، X به عنوان مرکز عمل G روی U_i با

$\pi = \{2, q\}$ عمل می‌کند و ما نتیجه می‌گیریم که $[H, \phi]$ نیز به صورت نا بدیهی روی U_i

عمل میکند از طرفی از [۳-۳-۳] از [۹] می‌دانیم که $[H, \phi] = [[H, \phi], \phi]$ بنابراین با

استفاده از نتیجه (۳-۸) داریم $C_{U_i}(\phi) \neq 0$. حال با استفاده از قضیه ایزاک

هارتلی $\dim_{F_q} U_i \leq \delta \dim_{F_q} C_{U_i}(\phi)$ که δ یک عدد p -کراندار است. چون

$\dim_{F_q} C_V(\phi) = \sum_i \dim_{F_q} C_{U_i}(\phi)$ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\dim_{F_q} V = \sum \dim_{F_q} U_i \leq \delta \dim_{F_q} C_V(\phi) \leq \delta r$$

در نتیجه تعداد مولدهای Q_1 ، (p, r) -کراندار است. ■

^۱Maschke

قضیه 4-3: فرض کنید که G یک p' -گروه حل پذیر متناهی از مرتبه عدد فرد است که

یک خودریختی از مرتبه عدد اول p دارد به قسمی که $C_G(\varphi)$ از رتبه r باشد آنگاه $[G, \varphi]$ یک زیرگروه مشخصه R از رتبه (p, r) -کراندار دارد به قسمی که $\frac{[G, \varphi]}{R}$ پوچتوان است.

اثبات: ابتدا ما فرض می کنیم که $G = [G, \varphi]$. حال با استفاده از گزاره 4-1 (می توانیم فرض

کنیم که $L = G$) داریم: رتبه (p, r) ، $\gamma_\infty(F_2(G))$ -کراندار است که یک زیرگروه مشخصه از

گروه G است و تصویر $F_2(G)$ در $\frac{G}{\gamma_\infty(F_2(G))}$ پوچتوان است. بنابراین ارتفاع فیتینگ

$\frac{G}{\gamma_\infty(F_2(G))}$ نسبتاً کوچک است. حال با استفاده از فرض استقراء این گروه خارج قسمتی یک

زیرگروه مشخصه از رتبه (p, r) -کراندار با خارج قسمت پوچتوان دارد. تصویر معکوس این

زیرگروه یک زیرگروه مشخصه از گروه G با خارج قسمت پوچتوان است و همان زیرگروه مورد

نظر است. که رتبه اش، (p, r) -کراندار است زیرا در تمام مراحل، (p, r) -کراندار با ارتفاع

فیتینگ G است. ■

قضیه 4-4: اگر یک گروه متناهی حل پذیر از رتبه r و توان p باشد آنگاه مرتبه اش

حداکثر $n^{f(r)}$ است که $f(r)$ یک عدد r -کراندار است.

اثبات: به [۱۰-۲] از [۱۲] مراجعه شود.

هدف بعدی ما نشان دادن این مطلب است که Q_1 دارای q -زیرگروه قدرتمند از رتبه

(p, r) -کراندار است. M را یک زیرگروه نرمال φ -پایا از گروه G و مشمول در Q_1 در نظر

می گیریم. علامت بار را تصویر در $\overline{Q_1} = \frac{Q_1}{M^q}$ یا $\frac{Q_1}{M^4}$ اگر $q = 2$ باشد) در نظر می گیریم.

حال چون $\overline{M} = \frac{M}{M^q}$ (یا $\frac{M}{M^4}$) توان q (یا ۴) دارد مرتبه مرکزساز φ در این گروه حداکثر q^f است که $f = f(r)$ یک عدد (p, r) -کراندار است. ما $\xi_i(X)$ را عناصر سری مرکزی بالایی در نظر می‌گیریم که با $\xi_1(X) = Z(X)$ شروع می‌شود.

$$\text{لم ۴-۵: } \overline{M} \leq \zeta_{2f+1}(\overline{Q_1}).$$

برهان: سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$M = \overline{M} > M_2 > M_3 > \dots > 1$$

که

$$M_i = \left[\overline{M}, \underbrace{\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_1}}_{i-1} \right]$$

و M_i ها زیرگروه‌های φ -پایا از گروه G اند. فرض کنید $V_i = \frac{M_i}{M_{i+1}}$ عامل های سری فوق است. چون این V_i در Q_1 مرکزی است بنابراین V_i ها q -گروه های آبلی مقدماتی اند. هرگاه $[V_i, H_2] \neq 0$ آنگاه با توجه به تعریف H_2 چون V_i زیرگروه V_i و H_2 زیرگروه H است بنابراین $[V_i, H_2] \leq [V_i, H]$ ، پس هرگاه $[V_i, H_2] \neq 0$ داریم $[V_i, H] \neq 0$ و چون طبق لم ۴-۱، $H = [H, \varphi]$ ، بنابراین $[V_i, [H, \varphi]] \neq 0$ و X به عنوان مرکز عمل G روی V_i با $\pi = \{2, q\}$ عمل می‌کند (عمل هم اول) بنابراین با استفاده از نتیجه (۳-۸) داریم $C_{V_i}(\varphi) \neq 0$. چون $|C_{\overline{M}}(\varphi)| \leq q^r$ بنابراین ما حداکثر f عامل V_i با شرط $[V_i, H_2] \neq 0$ می‌توانیم داشته باشیم. بنابراین برای تعدادی $k \leq 2f + 1$ ، دو حالت $[V_k, H_2] = 0$ یا

$[V_{K+1}, H_2] = 0$ را برقرار است. بنابراین چون $[V_K, H_2] = 0$ داریم

$$\left[\frac{M_k}{M_{k+1}}, H_2 \right] = 0 \rightarrow [M_k, H_2] \leq M_{k+1}$$

به عبارتی داریم:

$$[[H_2, M_k], Q_1] \leq [M_{k+1}, Q_1] = M_{k+2}$$

و

$$[[M_k, Q_1], H_2] = [M_{k+1}, H_2] \leq M_{k+2}$$

و بنابراین طبق لم سه زیرگروه داریم:

$$[[Q_1, H_2], M_k] = [Q_1, M_k] = M_{k+1} \leq M_{k+2}$$

آنگاه $M_{k+1} = 1$. بنابراین سری که با $[Q_1, M_i]$ ها ساخته می شود به ۱ ختم می شود لذا $\overline{Q_1}$ پوچتوان است با استفاده از [۲-۲-۱۰] از [۱۶] داریم:

$$\overline{M} \leq \zeta_k(\overline{Q_1}) \leq \zeta_{2f+1}(\overline{Q_1})$$

و در نتیجه حکم تمام است. ■

ادامه اثبات گزاره (۴-۱)

فرض کنید $M = \gamma_{2f+1}(Q_1)$ آنگاه $\zeta_{(2f+1)-(2f+1)} = \zeta_0 = 1$ $[\overline{M}, \overline{M}] \leq [\gamma_{2f+1}(\overline{Q_1}), \zeta_{2f+1}(\overline{Q_1})] = \zeta_{(2f+1)-(2f+1)} = \zeta_0 = 1$

بنابراین $[M, M] \leq M^q$ یا $[M, M] \leq M^4$. بنابراین $M = \gamma_{2f+1}(Q_1)$ یک q -زیرگروه قدرتمند از Q_1 است. گروه خارج قسمتی $\frac{Q_1}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ پوچتوان و از کلاس $4f+1$ است. زیرا Q_1 با

تعدادی عدد (p, r) -کراندار تولید می شود و $\frac{Q_1}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ پوچتوان و از

کلاس (p, r) -کراندار است و رتبه $\frac{Q_1}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ ، نیز (p, r) -کراندار است. بویژه رتبه

$\frac{\gamma_{2f+1}(Q_1)}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ نیز (p, r) -کراندار است. بنابراین رتبه q -زیرگروه قدرتمند $M = \gamma_{2f+1}(Q_1)$

نیز (p, r) -کراندار است. بنابراین رتبه Q_1 ، (p, r) -کراندار است و بنابراین حکم تمام است. ■

فصل پنجم

حل پذیری در حالت هم اول

گزاره ۵-۱: فرض کنید G یک p' -گروه حل پذیر متناهی است که یک خودریختی φ از

مرتبه عدد اول p دارد به قسمی که $C_G(\varphi)$ از رتبه r است. بنابراین یک سری نرمال $G > N > R$

موجود است که $\frac{N}{R}$ پوچتوان است و $\frac{G}{N}$ و R رتبه (p, r) -کراندار دارند.

اثبات: به مرجع [۲۶] مراجعه گردد.

حال فرض می کنیم که $H = O_{2',2}([G, \varphi])$ حاصل ضرب نیم مستقیم از $2'$ -زیرگروه های

نرمال پوچتوان و 2 -گروه های G و W را یک φ -پایا 2 -زیرگروه سیلو از H تعریف می کنیم.

β را مجموعه همه $\langle \varphi \rangle - G$ پایا بخش های V از $O_2(H)$ که q - زیرگروه های آبلی مقدماتی

هستند در نظر می گیریم که دارای ۲ شرط زیراند:

$$(۱) \quad V \text{ یک سری ترکیب از } \langle \varphi \rangle \text{ است.}$$

$$(۲) \quad C_V(\varphi) = 1.$$

حال مجموعه K را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K = \bigcap_{V \in \beta} C_H(V)$$

که یک زیرگروه نرمال φ - پایا از گروه G است. میدانیم $O_2(H)$ پوچتوان است بنابراین با

استفاده از شرط (۱) هر $V \in \beta$ در $O_2(H)$ مرکزی است. بنابراین $C_H(V) \geq O_2(H)$

و $C_H(V) = O_2(H)C_W(V)$. چون $H = O_2(H)W$ که W همانطور که قبلا معرفی شد یک

$$\varphi - \text{پایا ۲-زیرگروه سیلو از } H \text{ است بنابراین } K = O_2(H) \cdot \bigcap_{V \in \beta} C_W(V).$$

قضیه ۵-۲:

۱. اگر d ماکسیمم رتبه زیرگروه های سیلو از گروه حل پذیر متناهی G باشد آنگاه رتبه این

گروه حداکثر $d+1$ است.

۲. اگر d ماکسیمم رتبه زیرگروه های سیلو از گروه متناهی G باشد آنگاه رتبه این گروه

حداکثر $2d$ است.

برهان: به مرجع [۲۷] مراجعه گردد.

لم ۵-۳: رتبه $(p, r), \gamma_\infty(K)$ - کراندار است.

برهان: با استفاده از قضیه ۵-۲ قسمت اول و [12] کافیت، برای عدد اول $q \neq 2$ ، محاسبه

رتبه $Q_1 = [Q, Y]$ که Q یک q -زیرگروه سیلو از $F(K)$ است و $Y = W \cap K$ یک φ -پایا

۲-زیرگروه سیلو از K است، (یاد آوری می کنیم که $\frac{K}{F(K)}$ یک ۲-گروه است). فرض $\pi = \{q\}$

و از گزاره ۲-۱۱ استفاده می کنیم. ابتدا رتبه $V = \frac{Q_1}{\phi(Q_1)}$ را بدست می آوریم. توجه می کنیم

که $V = [V, Y]$. بنابراین V را می توان به عنوان یک $F_q G \langle \varphi \rangle$ -مدول در نظر گرفت. حال

سری $V = V_1 \supset V_2 \supset \dots$ را یک سری از $F_q G \langle \varphi \rangle$ -زیرمدول ها با خارج قسمت تقلیل یافته

$U_i = \frac{V_i}{V_{i+1}}$ را در نظر می گیریم. حال چون Y روی هر U_i به صورت نا بدیهی عمل می کند با

استفاده از نتیجه (8-3) داریم $C_{U_i}(\varphi) \neq 0$. حال با استفاده از قضیه ایزاک- هارتلی،

F_q -بعد از U_i بر حسب p و F_q -بعد از $C_{U_i}(\varphi)$ کراندار است. حال چون $\sum_i C_{U_i}(\varphi) \leq r$

بنابراین F_q -بعد از V برابر با $\sum_i \dim_{F_q} U_i$ است که (p, r) -کراندار است.

حال ما نشان می دهیم که Q_1 یک q -زیرگروه سیلو از رتبه کراندار شده و هم رتبه دارد M

را یک φ -پایا زیرگروه نرمال از گروه G شامل Q_1 می گیریم. علامت با را تصویر در گروه

خارج قسمتی $\overline{Q_1} = \frac{Q_1}{M^q}$ در نظر می گیریم. حال چون $\overline{M} = \frac{M}{M^q}$ توان q دارد، رتبه مرکز ساز

φ در این گروه حداکثر برابر با q^f است برای تعدادی عدد r -کراندار $f = f(r)$. از طرفی

$\overline{M} \leq \zeta_{2f+1}(\overline{Q_1})$. حال سری $M_1 = \overline{M} > M_2 > M_3 > \dots > 1$ را بررسی می کنیم که

$$M_i = \left[\overline{M}, \underbrace{\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_1}}_{i-1} \right]$$

که همه M_i ها زیرگروه‌های نرمال φ -پایا از G هستند. حال فرض کنید $V_i = \frac{M_i}{M_{i+1}}$ عامل

های این سری هستند و چون این سری در $\overline{Q_1}$ مرکزی هستند، همه V_i ها q -گروه‌های
آبلی‌مقدماتی اند و می‌توانند به عنوان $\langle \varphi \rangle F_q G$ -مدول در نظر گرفته شوند. فرض کنید برای
تعدادی i ، $[V_i, Y] \neq 0$. چون $[V_i, Y] = \gamma_\infty(V_i K)$ بنابراین V_i و K ، $\langle \varphi \rangle G$ -پایا هستند
بنابراین $[V_i, Y]$ نیز $\langle \varphi \rangle G$ -پایاست. اگر U یک $\langle \varphi \rangle F_q G$ -زیرمدول تقلیل یافته از $[V_i, Y]$
باشد بنابراین ما داریم $C_{V_i}(\varphi) \neq 0$ با تعریف $K \geq Y$. بنابراین $C_{V_i}(\varphi) \neq 0$ برقرار است هرگاه
 $[V_i, Y] \neq 0$. بنابراین طبق [۲۳] برای تعدادی $k \leq 2f+1$ ما داریم: $[V_k, Y] = 0$ و
 $[V_{k+1}, Y] = 0$. به عبارت دیگر داریم:

$$[[Y, M_K], Q_1] \leq [M_{k+1}, Q_1] = M_{k+2}$$

و

$$[[M_k, Q_1], Y] = [M_{k+1}, Y] \leq M_{k+2}$$

بنابراین طبق لم ۲-۳ زیرگروه داریم:

$$[[Q_1, Y], M_k] = [Q_1, M_k] = M_{k+1} \leq M_{k+2}$$

بنابراین $M_{k+1} = 1$. و این به این معناست که $\overline{Q_1} \leq \zeta_k(\overline{Q_1}) \leq \overline{M}$.

حال ما فرض می‌کنیم که $M = \gamma_{2f+1}(Q_1)$ ————— آنگاه

$$[\overline{M}, \overline{M}] \leq [\gamma_{2f+1}(\overline{Q_1}), \zeta_{2f+1}(\overline{Q_1})] = 1$$

که $[M, M] \leq M^q$ است. بنابراین $M = \gamma_{2f+1}(Q_1)$ یک q -زیرگروه قدرتمند از Q_1 است. گروه خارج‌قسمتی $\frac{Q_1}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ پوچتوان و از کلاس $4f+1$ است زیرا Q_1 تولید شده به وسیله یک اعداد (p, r) -کراندارشده و $\frac{Q_1}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ پوچتوان و از کلاس (p, r) -کراندارشده است، رتبه $\frac{Q_1}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ ، (p, r) -کراندارشده است. بویژه رتبه $\frac{\gamma_{2f+1}(Q_1)}{\gamma_{2f+1}(Q_1)^q}$ نیز (p, r) -کراندارشده است. که این منطبق است با رتبه q -زیرگروه قدرتمند $\gamma_{2f+1}(Q_1)$. بنابراین Q_1 ، (p, r) -کراندارشده است و این همان چیزی است که نیاز داشتیم. ■

فصل ششم

زیرگروه‌های مشخصه نرمال

قضیه ۶-۱: اگر گروه متناهی حل‌پذیر G زیرگروه‌های نرمال $R \leq N \leq G$ داشته باشد که

$\frac{N}{R}$ پوچتوان باشد و $\frac{G}{N}$ و R از رتبه r باشند، آنگاه G زیرگروه‌های مشخصه $R_1 \leq N_1 \leq G$

دارد که $\frac{N_1}{R_1}$ پوچتوان است و $\frac{G}{N_1}$ و R_1 رتبه r -کراندار دارد.

برهان: چون هر گروه حل‌پذیر از رتبه r ارتفاع فیتینگ r -کراندار دارد بنابراین ارتفاع

فیتینگ N ، r -کراندار است. ما اثبات را با استقراء روی این ارتفاع انجام می‌دهیم. اگر N

پوچتوان باشد آنگاه ما می‌توانیم فرض کنید که $N_1 = F(G)$ و $R_1 = 1$ و حکم تمام است.

حال ادعا می‌کنیم که N پوچتوان نیست. ما $S = \gamma_\infty(F_2(N))$ را بررسی می‌کنیم که یک

زیرگروه نرمال پوچتوان از گروه G و مشمول در R است. برای اختصار قرار می‌دهیم

$A = \text{Aut}(G)$. پس کافیت اثبات کنیم که

$$S^A = \prod_{a \in \text{Aut}G} S^a$$

رتبه r -کراندار شده دارد. بنابراین فرض استقراء با $\frac{G}{S^A}$ به عنوان یک زیرگروه مشخصه می‌تواند بکار گرفته شود. حال با استفاده از قضیه ۵-۲ قسمت ۱ کفایت تا رتبه q -زیرگروه‌های سیلو از S^A را برای هر عدد اول q بدست آوریم. فرض کنید Q یک q -زیرگروه‌های سیلو (نرمال) از S باشد. آنگاه $Q^A = \prod_{a \in \text{Aut}G} Q^a$ یک q -زیرگروه سیلو از S^A است. فرض کنید $V = \frac{Q^A}{\phi(Q^A)}$. بنابراین کفایت اثبات کنیم که رتبه V ، r -کراندار است. بدین ترتیب ما می‌توانیم یک عدد r -کراندار شده k از خودریختی‌های $a_1, \dots, a_k \in A$ را انتخاب کنیم به‌قسمی که

$$\frac{\prod_{i=1}^k Q^{a_i} \phi(Q^A)}{\phi(Q^A)} = V = \frac{Q^A}{\phi(Q^A)}$$

بنابراین با استفاده از قضیه پایه برونساید داریم $\prod_{i=1}^K Q^{a_i} = Q^A$ و رتبه این گروه حداکثر

برابر با kr است زیرا $Q \leq R$. با استفاده از توجه ۵ قسمت اول داریم $Q = \prod_{t \neq q} [Q, S_t]$ که S_t یا

یک t -زیرگروه سیلو از $F_2(N)$ است یا یک t -زیرگروه سیلو از $\frac{F_2(N)}{S}$ اند. حال چون رتبه

$\frac{Q}{\phi(Q)}$ حداکثر برابر با r است پس ما می‌توانیم عدد r -کراندار شده از اعداد اول $t_1, \dots, t_m$

انتخاب کنیم که از q مجزا اند و عناصر t_i, h_{ij} -زیرگروه‌های سیلو از $\frac{F_2(N)}{S}$ اند به‌قسمی که

$$\frac{Q}{\phi(Q)} = \prod_{i,j} \left[\frac{Q}{\phi(Q)}, h_{ij} \right]$$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\prod_{a \in \text{Aut} G} \prod_{i,j} [Q^a, h_{ij}^a] \phi(Q^A)}{\phi(Q^A)} \\
&\leq \prod_{i,j,a} [V, h_{ij}^a] = \prod_i \prod_{j,a} [V, h_{ij}^a] \\
&\leq \prod_I [V, \langle h_{ij}^a | j, a \rangle]
\end{aligned} \tag{۱}$$

توجه می کنیم که برای هر i ، تصویر زیرگروه $\langle h_{ij}^a | j, a \rangle$ در $\frac{G}{C_G(V)}$ ، مشمول در

t_i -زیرگروه های سیلوی T_i از خارج قسمت پوچتوان $\frac{F_2(N)^A C_G(V)}{C_G(V)}$ اند. حال فرض کنید t

یکی از t_i ها باشد و T یک t -زیرگروه سیلو از $\frac{F_2(N)^A C_G(V)}{C_G(V)}$ است. ما ادعا می کنیم که

رتبه r, T -کراندار است. علامت با را تصویر در $\frac{G}{C_G(V)}$ در نظر می گیریم. با این فرض روی

$\frac{G}{N}$ ، رتبه $\frac{T}{T \cap \bar{N}}$ کمتر مساوی با r است. حال $\tilde{N}$ را تصویر از N در $\frac{G}{\phi(Q^A)}$ بگیرید. بنابراین

مشابه بالا رتبه $\frac{V}{V \cap \tilde{N}}$ کمتر مساوی با r است. چون $t \neq q$ و $\frac{N}{R}$ پوچتوان است بنابراین

زیرگروه جابجاگر $[T \cap \bar{N}, V \cap \tilde{N}]$ مشمول در $\frac{R\phi(Q^A)}{\phi(Q^A)}$ مشمول است. لذا رتبه کمتر مساوی

با r دارد. حال با استفاده از قضیه ماسچ، $\frac{(V \cap \tilde{N})}{C_{V \cap \tilde{N}}(T \cap \bar{N})}$ رتبه مساوی با r دارد در نتیجه

$\frac{V}{C_V(T \cap \bar{N})}$ رتبه کمتر مساوی با r دارد. بنابراین رتبه $[V, T \cap \bar{N}]$ کمتر مساوی با r دارد.

حال چون $T \cap \bar{N}$ روی $[V, T \cap \bar{N}]$ به صورت بدیهی عمل می کند بنابراین با استفاده از قضیه

۲-۱۳ رتبه $r, T \cap \bar{N}$ -کراندار است پس رتبه T نیز r -کراندار است. بنابراین رتبه $[V, h_{ij}^a]$ ،

کمتر مساوی با r است پس برای هر $a \in \text{Aut} G$ ، رتبه $[V, h_{ij}^a]$ نیز کمتر مساوی با r است.

حال برای هر i ، ما تصویر عناصر h_{ij}^a و $a \in \text{Aut} G$ را در $\frac{G}{C_G(V)}$ بررسی می کنیم. هر دوی آنها متعلق به $t_i -$ زیرگروه های سیلوی T_i از $\overline{F_2(N)^A}$ که رتبه $r -$ کراندار شده دارد. حال با استفاده از قضیه پایه ای برونساید ما می توانیم یک عدد $r -$ کراندار شده n_i را از اعداد h_{ij}^a انتخاب کنیم که برای $k = 1, 2, 3, \dots, n_i$ ، h_{ijk}^{ak} ، که مولد زیرگروه های h_{ij}^a است. حال چون رتبه هر $[V, h_{ijk}^{ak}]$ مساوی با $2r$ است بنابراین رتبه هر $[V, \langle h_{ijk}^{ak} | k \rangle] = [V, \langle h_{ij}^a | j.a \rangle]$ دقیقاً برابر با $2rn_i$ است. حال با مجموع گرفتن روی اعداد $r -$ کراندار شده اول t_i در (۱) رتبه V ، $r -$ کراندار می شود و این همان چیزی است که لازم داشتیم. ■

فصل هفتم

نتایج اصلی

قضیه (الف): فرض کنید G یک p' -گروه باشد که یک خودریختی φ از مرتبه عدد اول

p دارد به قسمی که $C_G(\varphi)$ دارای رتبه r است. فرض کنید که $S(G)$ رادیکال حل پذیر G باشد در این صورت خارج قسمت $G/S(G)$ ، رتبه (p, n) -کراندار دارد. بنابراین G دارای زیرگروه‌های مشخصه $R \leq N \leq G$ است به قسمی که N/R پوچتوان است و G/N و R دارای رتبه (p, r) -کراندارند.

اثبات: با بکارگیری گزاره (۵-۱) برای $S(G)$ می‌بینیم یک تناظر بین زیرگروه‌های نرمال

$S(G)$ وجود دارد. حال قضیه (ج) به ما این اجازه را می‌دهد که زیرگروه‌های نرمال $S(G)$ را با

زیرگروه‌های مشخصه $S(G)$ و G تعویض کنیم و این اثبات را کامل می‌کند. ■

قضیه (ب): فرض کنید گروه متناهی G ، خودریختی φ از مرتبه عدد اول p با زیرگروه

$C_G(\varphi)$ از رتبه r دارد. بنابراین G دارای زیرگروه‌های مشخصه $R \leq N \leq G$ است به قسمی که

N/R پوچتوان است و G/N و R دارای رتبه (p, r) - کراندارند.

اثبات: با بکار گیری قضیه (الف) با $O_{p'}(G)$ ، ما زیرگروه‌های مشخصه با خصوصیات مورد نیاز

را بدست می آوریم که این زیرگروه ها در G نیز مشخصه اند. بنابراین کفایت نشان دهیم که

$\frac{G}{O_{p'}(G)}$ ، رتبه (p, r) - کراندار دارد. می دانیم رتبه هر p - زیرگروه سیلو از G ،

(p, r) - کراندار است. گروه $P = \frac{O_{p',p}(G)}{O_{p'}(G)}$ را در نظر می گیریم. گروه $\frac{G}{O_{p',p}(G)}$ به صورت

با وفا با مزدوج هایش روی $\frac{P}{\Phi(P)}$ عمل می کند که یک گروه آبدی با توان p و از رتبه

(p, r) - کراندار است. بنابراین با استفاده از قضیه پایسه ای برنسیاید رتبه

$\frac{P}{\Phi(P)}$ نیز (p, r) - کراندار است. بنابراین رتبه $\frac{G}{O_{p',p}(G)}$ نیز (p, r) - کراندار است. پس

رتبه $\frac{G}{O_{p'}(G)}$ نیز (p, r) - کراندار است و حکم تمام است. ■

نتیجه: فرض کنید G یک گروه متناهی موضعاً حل پذیر است و g یک عنصر از مرتبه p که

$C_G(g)$ از رتبه r باشد. آنگاه G دارای زیرگروه‌های نرمال $R \leq N \leq G$ است که N/R موضعاً

پوچتوان است و G/N و R ، دارای رتبه (p, n) - کراندارند.

اثبات: Σ را خانواده تمام زیرگروه‌های متناهی از گروه G که شامل g اند در نظر می گیریم.

برای هر $H \in \Sigma$ ، S_H را مجموعه همه جفت های (N, R) از زیرگروه‌های نرمال $R \leq N \leq H$

در نظر می‌گیریم به‌قسمی که $\frac{N}{R}$ پوچتوان است و $\frac{H}{N}$ و R دارای رتبه‌های کمتر مساوی با $f(p, r)$ است که $f(p, r)$ تابع بدست آمده از قضیه ۲-۶ است. هر S_H ناتهی است. حال قضیه (ب) را با H و خودریختی القایی داخلی با g بکار می‌گیریم. واضح است که هر S_H متناهی است. برای هر دو $H_1, H_2 \in \Sigma$ که $H_1 \geq H_2$ ، نگاشت $\varphi_{H_1, H_2} : S_{H_1} \rightarrow S_{H_2}$ موجود است. این سیستم معکوس از مجموعه‌های متناهی معکوس محدود متناهی دارد. این اجتماع از زیرگروه‌های متناظر با N و R روی هر عنصر از معکوس محدود زیرگروه مورد نیاز از گروه G را بدست می‌دهد. ■

نماد گذاری

- $H \leq G$ H زیرگروه G
- $H < G$ H زیرگروه سره از گروه G
- $H \triangleleft G$ H زیرگروه نرمال از گروه G
- $\Phi(G)$ زیرگروه فراتینی گروه G
- $\ker \varphi$ هسته همریختی φ

- کاردینال مجموعه S $|S|$
- زیرگروه مشتق گروه G $G' = [G, G]$
- اندیس زیرگروه H در گروه G $|G : H|$
- گروه خودریختی های گروه G $Aut(G)$
- تصویر H تحت همریختی φ H^φ
- مجموعه $\{g^n | g \in G\}$ G^n
- مرکزساز H در گروه G $C_G(H)$
- نرمال ساز H در گروه G $N_G(H)$
- زیرگروه نقطه ثابت تحت همریختی φ $C_G(\varphi)$
- P -زیرگروه های سیلو از گروه G $Syl_p(G)$
- رادیکال حل پذیر گروه G $sol(G)$
- ساکل گروه G $Soc(G)$
- عناصر سری مرکزی پایینی $\gamma_i(G)$
- جابجاگر a و b $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^b$

- $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ زیرگروه جابجاگر A و B
- $\Omega_n(G)$ مجموعه $\langle g \in G \mid g^{p^n} = 1 \rangle$
- $GL(n, F)$ گروه ماتریس های $n \times n$ وارون پذیر با درایه های در میدان F
- $SL(n, F)$ گروه ماتریس های $n \times n$ با دترمینان 1 روی میدان F
- $F(G)$ زیرگروه فیتینگ گروه G
- $Z(G)$ مرکز گروه

مراجع

- [1] P. Flavell. A Hall-Higman-Shult Type Theorem for Arbitrary
- [2] P. Fong, On orders of finite groups and centralizers of p-elements, Osaka J. Math. 13 (1976) 483–489.
- [3] D. Gorenstein, Finite Groups, Chelsea, New York, 1968.
- [۴] D. Gorenstein, The Classification of the Finite Simple Groups number 2, New York, 1994

[5]Yu. M. Gorchakov, On existence of abelian subgroups of infinite ranks in locally soluble groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR 146 (1964) 17–22; English transl Math. USSR Dokl. 5 (1964) 591–594.

[6]W. D. Gruyter, Finite Soluble Groups. New York 1992.

[7]B. Hartley, I.M. Isaacs, on characters and fixed points of coprime operator groups, J. Algebra 131 (1990) 342–358.

[8]B. Hartley, T. Meixner, Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small, Arch. Math. (Basel) 36 (1981) 211–213.

[9]G. Higman, Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements, J. London Math. Soc.(2) 32 (1957) 321–334.

[10]O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, Locally Finite Groups, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[11]E.I. Khukhro, Finite p -groups admitting an automorphism of order p with a small number of fixed points, Mat. Zametki 38 (1985) 652–657; English transl.: Math. Notes 38 (1986) 867–870.

[12]E. I. Khukhro, Groups and Lie rings admitting an almost regular Automorphism of prime order, Mat. Sb. 181 (1990) 1197–1219; English transl.: Math. USSR Sb. 71 (1992) 51–63.

- [13]E. I. Khukhro, Finite solvable and nilpotent groups with a restriction on the rank of the centralizer of an automorphism of prime order, *Sibirsk. Mat. Zh.* 41 (2000) 451–469; English transl.: *Siberian Math. J.* 41 (2000) 373–388
- [14]E. I. Khukro, *Nilpotent groups and their automorphisms*. Berlin-New York 1993.
- [15]E. I. Khukro, D. Mazurov, Automorphisms and centralizer of small rank, *J. Algebra* 303 (2005) 259–267.
- [16]E. I. Khukhro, *p-Automorphisms of Finite p-Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 246-280
- [17]L. G. Kovacs, on finite soluble groups, *Math. Z.* 103 (1968) 37–39.
- [18]V. A. Kreknin, A. I. Kostrikin, Lie algebras with regular automorphisms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 149 (1963) 249–251; English transl.: *Math. USSR Dokl.* 4 (1973) 355–358.
- [19]V. A. Kreknin, The solubility of Lie algebras with regular Automorphisms of finite period, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 150 (1963) 467–469; English transl.: *Math. USSR Dokl.* 4 (1963) 683–685.
- [20]P. Longobardi, M. Maj, On the number of generators of a finite group, *Arch. Math. (Basel)* 50 (1988) 110–112.
- [21]A. Lubotzky, A. Mann, Powerful p-groups I: Finite groups, *J. Algebra* 105 (1987) 484–505.

- [۲۲]N. Yu. Makarenko, Finite metabelian groups admitting an automorphism of prime order with a restriction on the rank of its centralizer, Written communication, 1999.
- [23]M. R. Pettet, Automorphisms and Fitting factors of finite groups, J. Algebra 72 (1981) 404–412.
- [24]D. J. S. ROBINSON, Finiteness conditions and generalized soluble groups. Berlin 1972.
- [25]J. E. Roseblade, on groups in which every subgroup is subnormal, J. Algebra 2 (1965) 402–412.
- [26]P. Shumyatsky, Involutory Automorphisms of finite groups and their centralizers, Arch. Math. (Basel) 71 (1998) 425–432.
- [27]J. Thompson, Finite groups with fixed_point-free Automorphisms of prime order, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 45(1959) 578–581.
- [28]J. Thompson, Automorphisms of solvable groups, J. Algebra 1 (1964) 259–267.

[29] ابراهیم هاشمی، جبر، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۸۷

[30] علی رضا جمالی، مباحثی در نظریه گروه ها، دانشگاه تربیت معلم، ۱۳۸۰

Abstract

Let φ be an automorphism of prime order p of a finite group G . The almost regular result of Fong and Hartley–Mixon–Pettet were giving the existence of a nilpotent subgroup of index bounded in terms of p and $|C_G(\varphi)|$. We prove the rank analogues of these results, when almost regular in hypothesis is interpreted as a restriction on the rank r of $C_G(\varphi)$, and the conclusion is sought as nilpotency modulo certain bits of bounded rank. The classification is used to prove almost solubility in the coprime case: the rank of $\frac{G}{S(G)}$ is bounded in terms of r and p . For soluble groups the Hall-Higman-type theorems are combined with the theory of powerful q -groups to obtain almost nilpotency, even without the coprimeness condition: there are characteristic subgroups $R \leq N \leq G$ such that $\frac{N}{R}$ is nilpotent and the rank of R and $\frac{G}{N}$ are bounded in terms of r and p .



Sahrood university of technology

Faculty mathematician

Automorphism of prime order whose centralizer has small rank

Mahmood Bezi Javan

Supervisor:

Dr. S. Mir Heydar Jafari

Adviser:

Dr. E. Hashemi

September 2010