

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل عددی مسائل سهموی براساس فرمول ضعیف مکان-زمان

نگارنده: مونس وفائی زاده

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

بهمن ۱۳۹۶

پایان نامه خود را تقدیم می‌کنم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم،

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را
سپر بلاهای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن
ایستاده‌ام برسم.

تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود.

سپاس فراوان از پدر بزرگوار و مادر مهربانم، ای پدر از تو هرچه گویم باز هم کم می‌آورم، خورشید شدی و از روشنایی‌ات جان گرفتم. و تو ای مادر، ای شوق نفس کشیدنم، هستی‌ام؛ تو رنگ شادی‌هایم شدی.

از استاد محترم؛ جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و جناب آقای دکتر حجت احسنی‌طهرانی که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از تمام اساتیدی که در دوران هجده سال تحصیل به نحوی افتخار شاگردی در محضرشان را داشتم کمال تشکر را دارم.

مونس وفائی‌زاده

بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **مونس وفائی زاده** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **حل عددی مسائل سهموی براساس فرمول ضعیف مکان-زمان**، تحت راهنمایی **علی مس فروش** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مونس وفائی زاده

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

به فرمول بندی ضعیف مکان-زمان معادله گرما پرداخته و از آن برای ساخت یک شیوه عددی استفاده می کنیم. این فرمول بندی مبتنی بر شناخت فرمول بندی ضعیف مکان-زمان است، با این تفاوت که مولفه نقطه ای جواب که معمولاً در کارهای دیگر حذف می شود، اکنون نگه داشته شده است. نقش چنین مولفه ای را اول توسط استفاده از آن برای بدست آوردن کران نقطه به نقطه روی جواب بررسی کرده و سپس آن را برای ساخت یک روش عددی گسترش می دهیم. شیوه بدست آمده علاوه بر اینکه در جهت L_2 شبه بهین است همچنین در گره های زمانی نقطه به نقطه ابرهمگرا است. برآوردهای خطای پیشین را اثبات کرده و آزمایش های عددی که به صورت تجربی محاسبات ما را پشتیبانی می کنند ارائه می دهیم.

کلمات کلیدی: اینفیمم-سوپریمم، مکان-زمان، ابرهمگرا، شبه بهینگی، عناصر متناهی، برآورد خطا، پترو-گالرکین

فهرست مطالب

ط فهرست تصاویر

۱	تعاریف و مفاهیم اولیه	۱
۱	۱.۱ ماهیت معادلات دیفرانسیل	۱
۲	۲.۱ تعاریف	۲
۹	۲ تعریف مساله و پیش نیازها	۹
۹	۱.۲ مقدمه	۹
۱۱	۲.۲ چهارچوب انتزاعی	۱۱
۱۳	۳.۲ انواع گوناگون سمت راست	۱۳
۱۴	۱.۳.۲ سمت راست منظم	۱۴
۱۵	۲.۳.۲ سمت راست قطعه وار منظم	۱۵
۱۵	۳.۳.۲ انتگرال تصادفی	۱۵
۱۷	۴.۳.۲ سمت راست هیچ جا مشتق پذیر نباشد	۱۷
۱۸	۴.۲ مقادیر نقطه ای و تجزیه آنها	۱۸
۱۸	۵.۲ قضیه اینفیمم-سوپریمم	۱۸
۲۷	۳ گسسته سازی	۲۷
۲۸	۱.۳ گسسته سازی با چند جمله ای هایی از پایین ترین درجه در زمان	۲۸
۳۴	۲.۳ تجزیه طرح	۳۴
۳۶	۳.۳ گسسته سازی زمانی با چند جمله ای های درجه بالاتر	۳۶
۳۹	۴ برآوردهای خطای پیشین	۳۹
۳۹	۱.۴ شبه بهینگی	۳۹
۴۲	۲.۴ همگرایی	۴۲
۴۲	۳.۴ همگرایی مرتبه اول در زمان	۴۲
۴۴	۴.۴ همگرایی مرتبه دوم در زمان	۴۴

۴۵	۵ نیمه گسسته سازی زمانی
۴۵	۱.۵ وجود و یکتایی
۴۹	۲.۵ برآورد خطای پیشین
۵۲	۳.۵ همگرایی از مرتبه $q + 1$
۵۲	۴.۵ ابر همگرایی نقطه به نقطه از مرتبه $2(q + 1)$
۵۷	۶ آزمایش های عددی
۵۷	۱.۶ آزمایش یک بعدی
۵۸	۲.۶ آزمایش دو بعدی
۵۹	۳.۶ آزمایش یک بعدی ، $q = 1$
۶۰	۴.۶ آزمایش یک بعدی با نظم پایین
۶۱	مراجع

فهرست تصاویر

۵۸		آزمایش‌های عددی مساله (۱.۶)	۱.۶
۵۹		آزمایش‌های عددی مساله (۲.۶)	۲.۶
۵۹		آزمایش‌های عددی مساله (۱.۶)، $q = 1$	۳.۶
۶۰		آزمایش‌های عددی برای یک مساله با نظم پایین سمت راست	۴.۶

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ ماهیت معادلات دیفرانسیل

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقات آن نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می‌نامند. معادلات دیفرانسیل در ریاضیات، به‌ویژه در هندسه، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم کاربرد فراوان دارند. دلیل این کارایی گسترده معادلات دیفرانسیل به آسانی قابل درک است. یادآوری می‌کنیم که چنانچه $y = f(x)$ تابعی مفروض باشد، آنگاه مشتق آن نسبت به x را می‌توان به‌عنوان میزان تغییرات y نسبت به x در نظر گرفت. در روند طبیعی هر پدیده، متغیرهای مربوطه و میزان تغییرات آنها با اصول علمی اساسی حاکم بر آن روند، به یکدیگر مربوط می‌شوند. هنگامی که این ارتباط با علائم ریاضی بیان شود، نتیجه اغلب یک معادله دیفرانسیل است.

تعریف ۱.۱.۱. معادله‌ای که تنها یک متغیر مستقل در آن وجود داشته باشد را معادله دیفرانسیل معمولی می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. معادله‌ای که شامل یک تابع چند متغیره و مشتق‌های آن نسبت به متغیرهای مستقل است را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی می‌گوییم هرگاه نسبت به متغیر تابع (وابسته) و مشتقات آن خطی باشد. در غیر این صورت آن را غیرخطی می‌گویند.

فرم کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با دو متغیر مستقل x و y به صورت زیر است،

$$\varphi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0.$$

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. خانواده‌ای از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از درجه دوم به صورت کلی زیر هستند،

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0,$$

زمانی که $AC - B^2 = 0$ ، معادلات دیفرانسیل سهموی با مشتقات جزئی نامیده می‌شود. این نوع از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در توصیف طیف گسترده‌ای از مسائل در علوم و مهندسی بسیار ظاهر می‌شوند، از معادلات حرارت گرفته تا انتشار امواج صوتی در اقیانوس تا توصیف مدل‌های ریاضی و سیستم‌های فیزیکی وابسته به گذر زمان.

تعریف ۲.۲.۱. مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + a(t)u(t) = f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

که در آن u_0 مقدار اولیه، $f(t)$ تابع منبع، $\dot{u}$ مشتق u نسبت به t و $a(t)$ تابعی کراندار است، اگر $a(t) \geq 0$ آنگاه مساله بیان شده، مساله سهموی نامیده می‌شود. اگر متغیر وابسته u و همه مشتقات آن به صورت خطی ظاهر شوند مساله را سهموی خطی می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه X که از این پس عناصر آن را نقاط خواهیم نامید، یک فضای متری است، هرگاه برای هر دو نقطه p و q از X عدد حقیقی $d(p, q)$ ، به نام فاصله از p تا q ، طوری مربوط شده باشد که دارای سه خاصیت زیر باشد،

$$1. \quad d(p, q) \geq 0 \text{ و } d(p, q) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } p = q.$$

$$2. \quad d(p, q) = d(q, p)$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } r \in X, \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

هر تابع برخورد از این سه خاصیت یک تابع فاصله یا متر نام دارد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (M, d) یک فضای متری باشد. گوییم دنباله (x^k) در M دنباله کوشی است، هرگاه به ازای $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح k_0 وجود داشته باشد به گونه‌ای که اگر $k, l \geq k_0$ آنگاه $d(x^k, x^l) < \varepsilon$.

تعریف ۵.۲.۱. (M, d) یک فضای متری کامل است، هرگاه هر دنباله کوشی در M به سوی یک حد در M میل کند.

تعریف ۶.۲.۱. فضای ضرب داخلی که نسبت به متر ایجاد شده به وسیله ضرب داخلی خود یک فضای متری کامل باشد را فضای هیلبرت می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. [۳۸] یک فضای هیلبرت، جدایی‌پذیر نامیده می‌شود اگر پایه شمارش‌پذیر داشته باشد.

تعریف ۸.۲.۱. اگر V فضای نرم‌دار باشد، تناظر جفت عناصر V با یک عدد حقیقی که به صورت $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود را فرم می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. یک فرم، دوخطی نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $u, v, w \in V$ شرایط زیر برقرار باشند،

$$a(\lambda u + \mu w, v) = \lambda a(u, v) + \mu a(w, v),$$

$$a(u, \lambda w + \mu v) = \lambda a(u, w) + \mu a(u, v).$$

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر به ازای هر $u, v \in V$ ، تساوی $a(u, v) = a(v, u)$ برقرار باشد، $(\cdot, \cdot)$ فرم متقارن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر A بستار کل فضا باشد و در $\mathbb{R}_n$ هر نقطه A ، نقطه حدی باشد، مجموعه A را چگال می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر Ω یک مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ و k عدد صحیح مثبت باشد. فضای سوبولف^۱ به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega) \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq k \right\}.$$

تعریف ۱۳.۲.۱. [۳۵] حاصلضرب تانسور^۲ $V \otimes W$ دو فضای برداری V و W ، یک فضای برداری از جفت مرتب حاصلضرب دکارتی $V \times W$ به $V \otimes W$ می‌باشد که توسط $\otimes$ نشان داده می‌شود. در حاصلضرب تانسوری V و W ، فضای برداری $V \otimes W$ توسط $v \in V$ و $w \in W$ تولید می‌شود که در آن روابط دوخطی برای عملگر ضرب $\otimes$ اعمال می‌شود. اگر V دارای پایه $e_1, \dots, e_m$ و W دارای پایه $f_1, \dots, f_n$ باشد هر یک از عناصر پایه $V \otimes W$ به صورت $e_i \otimes f_j$ نوشته

^۱Sobolev space

^۲Tensor product

خواهد شد. هر بردار $w \in W$ و $v \in V$ به صورت $w = \sum_j w_j f_j$ و $v = \sum_i v_i e_i$ می باشد. پس هر بردار حاصلضرب متناظر $v \otimes w$ در $V \otimes W$ به صورت $\sum_{i,j} v_i w_j (e_i \otimes f_j) \in V \otimes W$ تعریف می شود. که $e_i \otimes f_j$ به صورت $e_i f_j^T$ تعریف می شود.

تعریف ۱۴.۲.۱. نگاشتی که بین دو ساختار جبری (مانند دو گروه، حلقه یا فضای جبری) باشد همومرفیسم^۳ نامیده می شود.

تعریف ۱۵.۲.۱. همومرفیسمی که معکوس پذیر باشد ایزومرفیسم^۴ نامیده می شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. [۲۵] فضای خطی که دارای نرم کامل باشد فضای باناخ^۵ نامیده می شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. [۲۳] یک گلفاند سه گانه^۶ توسط عملگر $B \rightarrow H \rightarrow B^*$ نشان داده می شود که B فضای باناخ و H فضای هیلبرت جدایی پذیر و $j: B \rightarrow H$ باشد. $i_c: H \cong H^*$ ایزومورفیسم است به این صورت که اگر H فضای هیلبرت باشد، H^* فضای دوگان شامل همه توابع خطی پیوسته از H به $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.

اگر x یک عضو H باشد تابع φ_x برای همه y ها در H توسط $\varphi_x(y) = \langle y, x \rangle$ تعریف می شود. در اینجا $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی فضای هیلبرت است.

هر تابع خطی پیوسته g در H^* متناظر با عضو $x_g \in H$ را به شکل $x_g = g(e_1)e_1 + g(e_2)e_2 + \dots$ به طور منحصر بفرد می توان تشکیل داد. در اینجا e_i پایه متعامد H می باشد.

ترانهاده باناخ به شکل $j^*: H^* \rightarrow B^*$ می باشد و $k: H \rightarrow B^*$ به شکل $k = j^* \circ i_c$ تعریف می شود.

تعریف ۱۸.۲.۱. اگر $1 \leq p \leq \infty$ باشد، فضای تابع لبگ-بوخنر^۷ $L_p(E, \mu)$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$L_p(E, \mu) = \left\{ f | f: T \rightarrow E \text{ اندازه پذیر}, \left(\int_T \|f(t)\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$L_\infty(E, \mu) = \left\{ f | f: T \rightarrow E \text{ اندازه پذیر}, \sup_{t \in T} \|f(t)\| < \infty \right\},$$

که در آن T مجموعه اعداد صحیح و مثبت است.

تعریف ۱۹.۲.۱. مجموعه ای از توابع که جواب تقریبی را در آن جستجو می کنیم، فضای آزمون^۸ نامیده می شود.

^۳ Homomorphism

^۴ Isomorphism

^۵ Banach space

^۶ Gelfand triple

^۷ Lebesgue-Bochner

^۸ Trial space

تعریف ۲۰.۲.۱. فضای توابعی که برای شرط تعامد بکار می‌رود را فضای آزمایش^۹ می‌گوییم.

تعریف ۲۱.۲.۱. فضای توابع قطعه‌وار خطی پیوسته روی افراز (مش) $\mathcal{T}_h$ است که $\mathcal{T}_h = \{I_j\}$ توجه کنید که $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ و $h_j = x_j - x_{j-1}$.

تعریف ۲۲.۲.۱. $V_h^q \subset \mathbb{P}^q(a, b)$ فضای همه چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر q است.

$$V_h^{\circ q} = \{v: v \in V_h^q, \quad v(\circ) = v(1) = \circ\},$$

یکی از پایه‌های $V_h^{\circ q}$ ، $\{\varphi_i\}$ است که به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \circ, & \text{دیگر حالات.} \end{cases}$$

تعریف ۲۳.۲.۱. توابع حقیقی $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ که $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ و $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ را مربع انتگرال پذیر می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^k$ و $V \subset \mathbb{R}^l$ مجموعه‌های باز باشند، نگاشت f از U به V را هموار می‌نامیم هرگاه همه مشتق‌های پاره‌ای وجود داشته و پیوسته باشند.

تعریف ۲۵.۲.۱. گوییم مساله مقدار اولیه $y(a) = \alpha$ ، $a \leq t \leq b$ ، $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ یک مساله خوش وضع است اگر در سه شرط زیر صدق کند.

۱. دارای جواب منحصر به فرد مانند $y(t)$ برای این مساله وجود داشته باشد،

۲. عددی مانند $\circ > \varepsilon$ موجود باشد به گونه‌ای که اگر $|\varepsilon_\circ| < \varepsilon$ برای هر $a \leq t \leq b$ مقدار $|\delta(t)| < \varepsilon$ موجود باشد به گونه‌ای که مساله

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \varepsilon_\circ,$$

دارای جواب یکتای $z(t)$ باشد.

۳. ثابتی مانند $\circ > k$ موجود باشد به گونه‌ای که به ازای هر $a \leq t \leq b$ نامساوی $|z(t) - y(t)| < k\varepsilon$ برقرار باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید V_h فضای تمام توابع خطی پیوسته روی ناحیه Ω باشد. $P_h u \in V_h$ را که تصویر L_2 تابع $u \in L_2(\Omega)$ است، برای هر $v \in V_h$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u - P_h u, v \rangle = \circ.$$

به این معنی که عضو $u - P_h u$ بر فضای V_h عمود است.

^۹Test space

تعریف ۲۷.۲.۱. مجموعه تمام توابع حقیقی اندازه‌پذیر و کراندار را L_∞ گوئیم.

تعریف ۲۸.۲.۱. در روش اویلر^{۱۰} هدف تعیین جواب تقریبی برای مساله مقدار اولیه خوش وضع زیر می‌باشد،

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (1.1)$$

در عمل، یک تقریب پیوسته به جواب $y(t)$ بدست نمی‌آید. در عوض، تقریب‌هایی به y در نقاط گوناگون بازه $[a, b]$ ، به نام نقاط شبکه‌ای پدید می‌آیند. وقتی جواب تقریبی در این نقاط بدست آمد، جواب تقریبی در سایر نقاط بازه با استفاده از یکی از روندهای درونیایی حاصل می‌شود. در اینجا برای ماوریم که توزیع نقاط شبکه‌ای در طول بازه $[a, b]$ به‌طور یکسان باشد. این شرط با انتخاب عدد صحیح مثبت N و نقاط $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$ که در آن به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N$ و $t_i = a + ih$ حاصل می‌شود. $h = \frac{(b-a)}{N}$ یعنی فاصله مشترک بین این نقاط، اندازه گام نامیده می‌شود. برای رسیدن به روش اویلر، از قضیه تیلور^{۱۱} استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $y(t)$ یعنی جواب یکتای (۱.۱) دو مشتق پیوسته بر $[a, b]$ داشته باشد، به‌طوریکه به‌ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ می‌توان $y(t_{i+1})$ را به‌ازای نقطه‌ای مانند ζ_i که $t_i < \zeta_i < t_{i+1}$ به‌صورت زیر نوشت،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\zeta_i),$$

با استفاده از نماد $h = t_{i+1} - t_i$ نتیجه می‌شود که عدد θ_i که $0 < \theta_i < 1$ وجود دارد به‌طوریکه،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i + \theta_i h).$$

چون $y(t)$ در معادله دیفرانسیل (۱.۱) صدق می‌کند، لذا تساوی زیر برقرار است،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(t_i + \theta_i h).$$

با بازنویسی این معادله، به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N-1$ داریم،

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) + \frac{h}{2}y''(t_i + \theta_i h).$$

وقتی h به اندازه کافی کوچک باشد بنابر پیوستگی y'' ، جمله $(\frac{h}{2})y''(t_i + \theta_i h)$ نیز کوچک بوده و

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \approx f(t_i, y(t_i)).$$

در روش اویلر از این فرض، با تعریف $w_0 = \alpha$ و $w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$ و فرض $w_i \approx y(t_i)$ به‌ازای هر $i = 1, 2, \dots, N$ استفاده می‌شود.

^{۱۰} Euler

^{۱۱} Taylor theorem

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید مقادیر یک تابع f در نقاط متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ به ترتیب برابر با $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ باشند برای یافتن مقدار تقریبی $f(x)$ که x نقطه‌ای است بین نقاط x_0 تا x_n و $x \neq x_i$ ، یک چند جمله‌ای $P(x)$ می‌سازیم که از $n+1$ نقطه $(x_i, f(x_i))$ که $i = 0, 1, \dots, n$ بگذرد. در این صورت $P(x_i) = f(x_i)$. حال برای $x = x_i$ داریم $f(x) \approx P(x)$ ، از طرفی چند جمله‌ای‌های لاگرانژ^{۱۲} $L_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

این چند جمله‌ای‌ها از درجه n هستند و خاصیت زیر را دارند،

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

حال چند جمله‌ای $P(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$P(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i),$$

که به شکل یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های لاگرانژ نوشته شده است.

^{۱۲}Lagrange

فصل ۲

تعریف مساله و پیش نیازها

۱.۲ مقدمه

در این پایان نامه حل مسائل سهموی براساس فرمول بندی ضعیف مکان-زمان را از دیدگاه عددی مطالعه می کنیم، به این منظور مساله با مقدار اولیه (۱.۲) را در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

در دهه های اخیر فرمول بندی مکان-زمان این مساله مورد توجه بسیاری از محققان بوده است. ایده اصلی فرمول بندی مکان-زمان مبتنی بر ضرب معادله (۱.۲) در تابع آزمایش مناسب وابسته به زمان و مکان و سپس انتگرال گیری از آن می باشد. با اعمال شرط آغازین و جمع کردن معادلات، به فرمول بندی اولیه مکان-زمان مساله می رسیم که در ادامه به آن پرداخته می شود. با انتگرال گیری جز به جز از قسمت شامل مشتق زمان، به فرمول بندی ضعیف مکان-زمان دست می یابیم که گاهی آن را فرمول بندی دوم (در [۸]، [۱۴]، [۹]، [۱۶]، [۱۷] می بینیم) یا فرمول بندی طبیعی (در [۴۰] می بینیم) می نامند. در هر دو فرمول بندی، ابزار اصلی برای اثبات وجود و یکتایی جواب قضیه باناخ-ناسز-بابوشکا^۱ است که در قضیه ۱.۵.۲ خواهد آمد. اولین تحلیل های عددی برای گسترش مسائل مبتنی بر فرمول بندی ضعیف

^۱Banach-Necas-Babuska theorem

مکان-زمان را می‌توان در [۱۱، ۱۲] یافت. در [۱۸] گسسته‌سازی مبتنی بر فرمول‌بندی اولیه مسائل انجام شده است. در [۱۷] فرمول‌بندی دوم مکان-زمان برای ساخت روش‌های حل عددی تطبیقی گسترش داده شده است که باعث می‌شود محققان بتوانند نظریه موجود در مقالات پیشین را برای معادلات با مشتقات جزئی سهموی در بعدهای متناهی اجرا کنند. چون جواب به اندازه کافی منظم نیست می‌توان از فرمول‌بندی اولیه مکان-زمان استفاده کرد. در [۱۴] از فرمول‌بندی دوم مکان-زمان برای بررسی بیشتر استفاده می‌کنیم. در [۸، ۳۹] پایداری گسسته‌سازی پترو-گالرکین^۲ مکان-زمان مساله برای فرمول‌بندی‌های اول و دوم بررسی می‌شود. شرط CFL برای زمانی که فضاهای آزمون و آزمایش چند جمله‌ای قطعه‌وار باشند شرطی ضروری است. در [۹] گسسته‌سازی پترو-گالرکین مکان-زمان معادله گرما بر یک بازه زمانی بی‌کران توسط چندجمله‌ای‌های لاگور^۳ انجام می‌شود. هر دو فرمول‌بندی اول و دوم مکان-زمان بررسی شده‌اند. در [۱۶] عناصر متناهی و نوع موجکی خانواده‌ای از فضاهای گسسته در نظر گرفته می‌شود. در [۱۹] فرمول‌بندی دوم مکان-زمان به‌عنوان یک چهارچوب طبیعی در ساده کردن روش می‌تواند استفاده شود، به‌طوری که به نتیجه دقیقی از کران‌های خطای پسین رسید. در همه کارهایی که روی فرمول‌بندی دوم مکان-زمان انجام می‌گیرد محققان برای حذف یک قسمت، از انتگرال جزبه‌جز استفاده می‌کنند که توسط توابع آزمایش که در لحظه پایانی از بین می‌رود بدست آمده است. در اینجا فرمول‌بندی دوم مکان-زمان برای مطالعه متغیر تصادفی (۱.۲) استفاده می‌شود. در این فصل چهارچوب انتزاعی برای فرمول‌بندی ضعیف مکان-زمان براساس قضیه اینفیمم-سوپریمم باناخ-ناز-بابوشکا ساخته می‌شود. فصل سوم شامل تقریب‌های پترو-گالرکین مبتنی بر چند جمله‌ای‌های قطعه‌وار در مکان و زمان می‌باشد. هنگامی که توابع آزمایش پیوسته و از درجه $q + 1$ باشند، توابع آزمون ناپیوسته و از درجه $q \geq 0$ می‌باشند. فصل چهارم به برآوردهای خطای پیشین شبه‌بهینگی اختصاص دارد. CFL یک شرط لازم است. مرتبه زمانی در نرم طبیعی $q + 1$ است. اگرچه تقریب ثابت قطعه‌وار برای $(q = 0)$ از مرتبه دوم نسبت به زمان در مقایسه با روش کرانک-نیکلسون^۴ است. در فصل پنجم، اثبات مستقیمی ارائه می‌شود که نشان می‌دهد روش ما ابرهمگرا^۵ از مرتبه $2(q + 1)$ در شبکه‌های زمانی است. اثبات آن مبتنی بر جداسازی خطای مکانی و زمانی و روش دوگان است. فقط تحلیل قسمت شبه‌گسسته‌سازی زمانی انجام می‌گیرد. در این اثبات از شرط CFL استفاده نمی‌کنیم. در فصل ششم، نرخ‌های همگرایی زمانی در آزمایش‌های عددی نشان داده شده‌اند.

^۲ Petrov-Galerkin^۳ Laguerre^۴ Crank-Nicolson^۵ Superconvergence

۲.۲ چهارچوب انتزاعی

فرض کنید گلفاند سه گانه $V \rightarrow H \rightarrow V^*$ داده شده است، که V و H فضاهای هیلبرت جدایی پذیر هستند به گونه ای که V به طور چگال در H جا داده شده است. فرض کنید عملگر A موجود در (۱.۲) متناظر با فرم دو خطی متقارن $a(\cdot, \cdot)$ باشد که برای بعضی ثابت های مثبت $A_{\min}$ و $A_{\max}$ برای هر $u, v \in V$ نامساوی های زیر برقرار می باشند.

$$|a(u, v)| \leq A_{\max} \|u\|_V \|v\|_V, \quad (\text{کرانداری})$$

$$a(v, v) \geq A_{\min} \|v\|_V^2,$$

نامساوی دوم به خاصیت کورسیوتی^۶ موسوم است. فضاهای لبگ-بوخنر به صورت زیر تعریف می شوند،

$$\mathcal{Y}^t = L_2((\circ, t); V), \quad \mathcal{X}^t = L_2((\circ, t); V) \cap H^1((\circ, t); V^*),$$

که نرم های زیر در این فضا قابل استفاده می باشند،

$$\|y\|_{\mathcal{Y}^t}^2 := \|y\|_{L_2((\circ, t); V)}^2 = \int_{\circ}^t \|y(s)\|_V^2 ds,$$

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 := \|x(\circ)\|_H^2 + \|x\|_{L_2((\circ, t); V)}^2 + \|\dot{x}\|_{L_2((\circ, t); V^*)}^2,$$

از نماد $\mathcal{Y}_H^t$ برای فضای $\mathcal{Y}^t \times H$ که مجهز به ضرب داخلی است استفاده می کنیم و در حالتی که $t = T$ است قرار می دهیم، $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^T$ ، $\mathcal{Y}_H = \mathcal{Y} \times H$ و $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T$. همچنین یادآوری می کنیم که فضای $\mathcal{X}^t$ به طور چگال در $\mathcal{C}([\circ, t]; H)$ جا داده شده است، لذا مقادیر نقطه وار $x \in \mathcal{X}$ با معنی خواهند بود. منظور از ${}_{V^*}\langle u, v \rangle_V$ ضرب داخلی است که $u \in V^*$ و $v \in V$. فرض می کنیم فضاهای هیلبرت V و H داده شده باشند. گلفاند سه گانه $V \rightarrow H \rightarrow V^*$ با فرم دوخطی زیر می باشد،

$$a(t; \cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in [\circ, T],$$

شرایط زیر برای هر $u, v \in V$ برای همه اعداد مثبت $A_{\min}$ و $A_{\max}$ برقرار است،

$$|a(t; u, v)| \leq A_{\max} \|u\|_V \|v\|_V, \quad t \in [\circ, T],$$

$$a(t; v, v) \geq A_{\min} \|v\|_V^2, \quad t \in [\circ, T].$$

اگر برای هر $t \in [\circ, T]$ ، $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$ عملگر خطی کراندار از V در V^* متناظر با فرم دوخطی باشد، پس عبارت زیر برقرار می باشد،

$${}_{V^*}\langle A(t)u, v \rangle_V = a(t; u, v) = {}_V\langle u, A^*(t)v \rangle_{V^*}.$$

^۶Coersivity

حالا مساله زیر را در نظر می‌گیریم که در آن $\dot{u}$ مشتق u نسبت به t می‌باشد، $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ،

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad \text{در } V^*, \quad t \in (0, T],$$

$$u(0) = u_0, \quad \text{در } H,$$

$\mathcal{X}$ به‌طور چگال در $\mathcal{C}([0, T]; H)$ جا داده شده است، بنابراین $x(0), x(T) \in H$ روی زمان وابسته نیست و در V یکنواخت است.

برای بدست آوردن فرمول اولیه (۱.۲) با انتگرال‌گیری در زمان از جفت دوتایی بین معادله و تابع آزمایش $y_1 \in \mathcal{Y}$ و ضرب داخلی بین شرط آغازین و بردار آزمایش $y_2 \in H$ دو معادله زیر بدست می‌آید،

$$\int_0^T \left(V^* \langle \dot{u}(s), y_1(s) \rangle_V + a(s; u(s), y_1(s)) \right) ds = \int_0^T V^* \langle f(t), y_1(t) \rangle_V dt,$$

$$\langle u(0), y_2 \rangle_H = \langle u_0, y_2 \rangle_H,$$

با جمع دو معادله بالا و تعریف $\mathcal{Y}_H := \mathcal{Y} \times H$ مساله زیر به‌ازای هر $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}_H$ تعریف می‌شود،

$$u \in \mathcal{X}: \mathcal{B}(u, y) = \mathcal{F}(y), \quad (2.2)$$

فرم دوخطی به‌شکل زیر می‌باشد،

$$\mathcal{B}: \mathcal{X} \times \mathcal{Y}_H \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{B}(x, y) := \int_0^T \left(V^* \langle \dot{x}(s), y_1 \rangle_V + a(s; x(s), y_1(s)) \right) ds + \langle x(0), y_2 \rangle_H,$$

و تابع بار به‌صورت زیر است،

$$\mathcal{F} \in \mathcal{Y}_H^*, \quad \mathcal{F}(y) := \int_0^T V^* \langle f(t), y_1(t) \rangle_V dt + \langle u_0, y_2 \rangle_H,$$

پس (۲.۲) را فرمول اولیه مکان-زمان (۱.۲) می‌نامیم.

با انتگرال‌گیری جز به‌جز از (۱.۲) و جابه‌جایی توابع آزمایش و آزمون فرمول ضعیف مکان-زمان آن را به‌صورت زیر بدست می‌آوریم،

$$\int_0^T (\dot{u} + Au)v ds = \int_0^T f v dt,$$

$$\int_0^T \dot{u} v ds + \int_0^T A u v ds = \int_0^T f v dt,$$

$$u(T)v(T) - u(0)v(0) - \int_0^T u(t)\dot{v}(t) ds + \int_0^T A u(t)v(t) ds = \int_0^T f v dt,$$

با جابه‌جا کردن فضای آزمایش و آزمون فرم دوخطی به‌ازای هر $x \in \mathcal{X}$ به‌شکل زیر می‌باشد،

$$\mathcal{B}^*: \mathcal{Y}_H \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{B}^*(y, x) := \int_0^T \langle y_1, -\dot{x} + Ax \rangle_{V^*} ds + \langle y_2, x(T) \rangle_H,$$

و تابع بار به‌شکل زیر است،

$$\mathcal{F} \in \mathcal{X}^*, \quad \mathcal{F}(x) := \int_0^T \langle f(t), x(t) \rangle_V dt + \langle u_0, x(\circ) \rangle_H, \quad (4.2)$$

پس فرمول ضعیف (۱.۲) به‌شکل زیر می‌باشد،

$$u = (u_1, u_2) \in \mathcal{Y}_H : \mathcal{B}^*(u, x) = \mathcal{F}(x). \quad (5.2)$$

به راحتی دیده می‌شود که u_2 در جواب u (۳.۲) به لحظه پایانی T وابسته است بنابراین می‌توان فرمول (۵.۲) را روی $t \in [0, T]$ پارامتری کرد، چون $\mathcal{Y}_H^t = \mathcal{Y}^t \times H$ با پارامتری کردن، $\mathcal{Y}_H$ تبدیل به $\mathcal{Y}_H^t$ می‌شود. بنابراین $u = (u_1, u_2(t)) \in \mathcal{Y}_H^t$ پس فرم دوخطی $\mathcal{Y}_H^t \times \mathcal{X}^t$ را خواهیم داشت که به‌شکل زیر است،

$$\mathcal{B}_t^*: \mathcal{Y}_H^t \times \mathcal{X}^t \rightarrow \mathbb{R},$$

که با انتگرال‌گیری جزبه‌جز و جابه‌جا کردن تابع آزمایش و آزمون، مانند قبل فرم پارامتری آن به‌شکل زیر می‌باشد،

$$\mathcal{B}_t^*(y, x) := \int_0^t \langle y_1(s), -\dot{x} + Ax \rangle_{V^*} ds + \langle y_2(t), x(T) \rangle_H,$$

و تابع بار به‌شکل زیر است،

$$\mathcal{F}_t: \mathcal{X}^t \rightarrow \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{F}_t(x) := \int_0^t \langle f(t), x(t) \rangle_V dt + \langle u_0, x(\circ) \rangle_H,$$

بنابراین شکل پارامتری (۵.۲) به‌ازای هر $x \in \mathcal{X}^t$ به‌شکل زیر است،

$$u = (u_1, u_2(t)) \in \mathcal{Y}_H^t : \mathcal{B}_t^*(u, x) = \mathcal{F}_t(x). \quad (7.2)$$

در اینجا $\mathcal{F}_t$ و $\mathcal{B}_t^*$ مانند قبل به فضاهای $\mathcal{Y}_H^t$ و $\mathcal{X}^t$ محدود می‌شوند. در ادامه پیرامون شکل‌های گوناگونی که طرف راست معادله می‌تواند داشته باشد خواهیم نوشت.

۳.۲ انواع گوناگون سمت راست

فرمول‌بندی ضعیف مکان-زمان اجازه استفاده از انواع گوناگون داده‌ها را به‌عنوان طرف راست معادله می‌دهد. منظم بودن به معنای مشتق‌پذیری می‌باشد، که در ادامه سمت راست منظم، سمت راست قطعه‌وار منظم، سمت راست دارای انتگرال تصادفی و سمت راستی که هیچ‌جا مشتق‌پذیر نباشد را بررسی می‌کنیم.

۱.۳.۲ سمت راست منظم

حالت اصلی مورد مطالعه به صورت زیر می‌باشد که در آن $u_0 \in H$ و $f \in L_2((\circ, T); V^*)$

$$\mathcal{F}_t(x) = \int_0^t V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V ds + \langle u_0, x(\circ) \rangle_H, \quad t \in [\circ, T], \quad (۸.۲)$$

در این مورد $u_2 = u_1 \in \mathcal{X}$ با در نظر گرفتن $x \in C_0^\infty([\circ, t]; V)$ در (۷.۲) تساوی زیر را داریم،

$$\int_0^t \langle u_1(s), -\dot{x}(s) \rangle_H ds = \int_0^t V^* \langle f(s) - Au_1(s), x(s) \rangle_V ds.$$

به شکل زیر تساوی بالا را بدست می‌آوریم،

$$\mathcal{B}^*(u, x) := \int_0^T V \langle u_1, -\dot{x} + Ax \rangle_{V^*} ds + \langle u_2, x(T) \rangle_H,$$

$$\mathcal{B}_t^*(u, x) := \int_0^t V \langle u_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*} ds + \langle u_2(s), x(T) \rangle_H,$$

$$\mathcal{F}_t(x) := \int_0^t V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V dt + \langle u_0(t), x(\circ) \rangle_H,$$

$$\mathcal{B}_t^*(u, x) = \mathcal{F}_t(x),$$

$$\int_0^t V \langle u_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*} ds + \langle u_2, x(T) \rangle_H = \int_0^t V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V ds + \langle u_0(t), x(\circ) \rangle_H,$$

$$\int_0^t V \langle u_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*} ds = \int_0^t V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V ds,$$

$$\int_0^t V \langle u_1(s), -\dot{x}(s) \rangle_{V^*} ds = \int_0^t V^* \langle f(s) - Ax(s), x(s) \rangle_V ds,$$

$$\int_0^t V \langle u_1(s), -\dot{x}(s) \rangle_{V^*} ds = \int_0^t V^* \langle f(s) - Au_1(s), x(s) \rangle_V ds,$$

$$\int_0^t \langle u_1(s), -\dot{x}(s) \rangle_H ds = \int_0^t V^* \langle f(s) - Au_1(s), x(s) \rangle_V ds.$$

بنابراین u_1 دارای مشتق ضعیف مربع انتگرال پذیر است، چون $\dot{u}_1 + Au_1 = f$ پس مشتق آن برابر با $\dot{u}_1 = f - Au_1 \in L_2((\circ, T); V^*)$ می‌باشد. سپس می‌توان از (۷.۲) به شکل زیر استفاده کرد،

$$\int_0^t V \langle u_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*} ds + \langle u_2(t), x(T) \rangle_H = \int_0^t V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V dt + \langle u_0(t), x(\circ) \rangle_H,$$

و نتیجه گرفت که $u_1(t) = u_2(t)$ ، با توجه به تساوی بالا خواهیم داشت،

$$\langle u_2(t), x(T) \rangle_H = \langle u_0(t), x(\circ) \rangle_H$$

$x(\circ) = x(T)$ پس $u_0 = u_2$ ، از طرفی $u_0 = u(\circ)$ پس $u_2 = u(\circ)$ در نتیجه $u_1 = u_2$ و هر دو آنها وابسته به $\mathcal{X} \subset C([\circ, T]; H)$ می‌باشند. چون $u_1 \in \mathcal{X}$ پس $u_2 \in \mathcal{X}$ و $\mathcal{X} \subset C([\circ, T]; H)$ پس هر دو آنها وابسته به $\mathcal{X} \subset C([\circ, T]; H)$ می‌باشند.

۲.۳.۲ سمت راست قطعه‌وار منظم

در حالت کلی برای همه $\{\zeta_i\}_{i=1,\dots,M} \in H$ ، $f \in L_2((\circ, T); V^*)$ و $\{t_i\}_{i=1,\dots,M} \subset [\circ, T]$ عبارت زیر برقرار است،

$$\mathcal{F}_t(x) = \int_{\circ}^t V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V ds + \sum_{t_i \leq t} \langle \zeta_i, x(t_i) \rangle_H, \quad t \in [\circ, T], \quad (9.2)$$

با توجه به (۶.۲) عبارت زیر را داریم،

$$\mathcal{F}_t(x) := \int_{\circ}^t V^* \langle f(t), x(t) \rangle_V dt + \langle u_{\circ}, x(\circ) \rangle_H,$$

اگر سمت راست قطعه‌وار باشد، عبارت (۶.۲) را به شکل زیر خواهیم داشت،

$$\mathcal{F}_t(x) = \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} V^* \langle f(s), x(s) \rangle_V ds + \sum_{i=1}^{M-1} \langle u(t_i^+) - u(t_i^-), x(t_i) \rangle_H ds + \langle u_{\circ}, x(\circ) \rangle_H,$$

اگر $\zeta_i = u(t_i^+) - u(t_i^-)$ آنگاه عبارت بالا را به شکل (۹.۲) خواهیم داشت.

آنچه که در بالا ارائه می شود فقط در مورد قطعه‌وار صحیح است، به ویژه که مقادیر ζ_i ، پرش های جواب در زمان t_i را نشان می دهند.

۳.۳.۲ انتگرال تصادفی

مثال کلی تر توسط تابعی که ω -روش نامیده می شود ارائه می شود. ω در یک فضای کامل احتمال $(\Omega, \Sigma_t, \mathbb{P})$ قرار دارد و به فرم $\mathcal{F}_t + \mathcal{W}_t$ می باشد. در اینجا $\mathcal{F}_t$ مانند ۱.۳.۲ می باشد و $\mathcal{W}_t$ انتگرال ضعیف تصادفی وابسته به H است. فرایند وینر W^Y با عملگر مقدار انتگرال Ψ به صورت زیر است،

$$\mathcal{W}_t(x) = \int_{\circ}^t \langle \Psi(s) dW(s), x(s) \rangle_H ds, \quad t \in [\circ, T]. \quad (10.2)$$

یک فرایند وینر روی بازه $[\circ, T]$ یک متغیر تصادفی $W(t)$ است که در شرایط زیر صدق کند،

$$W(\circ) = \circ$$

و

$$W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s} N(\circ, 1), \quad \circ \leq s < t \leq T,$$

که $N(\circ, 1)$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است.

مساله تکامل یافته تصادفی سهموی خطی به شکل زیر می باشد،

$$dU(t) + A(t)U(t)dt = f(t)dt + \Psi(t)dW(t), \quad t \in (\circ, T], \quad (11.2)$$

$$U(\circ) = U_{\circ}.$$

اگر V و H فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر باشند گلفاند سه‌گانه $V \subset H \subset V^*$ را تشکیل می‌دهیم که V در H به‌طور چگال داده شده است. ضرب داخلی در H را با $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ و جفت دوتایی بین V و V^* را با $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*}$ نشان می‌دهیم. برای همه $u \in H$ و $v \in V$ تساوی $\langle u, v \rangle_{V^*} = \langle u, v \rangle_H$ را داریم. اگر $T \in (\circ, \infty)$ و $(\Omega, \Sigma_t, \mathbb{P})$ فضای کامل احتمال باشد، با توجه به نگاشت اندازه‌پذیر $A: \Omega \times [\circ, T] \times V \rightarrow V^*$ فرم دوخطی زیر را نشان می‌دهیم،

$$a(w, t; u, v) = \langle A(w, t)u, v \rangle_{V^*}.$$

مساله تکامل‌یافته (۱۱.۲) را گسترش می‌دهیم که ω –روشن نامیده می‌شود. برای تولید فرمول‌بندی ضعیف مکان–زمان معادله (۱۱.۲) مانند ۲.۲ عمل می‌کنیم. فضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ را با این قرارداد که $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\circ^t$ و $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_\circ^t$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{Y}_\circ^t = L_2((\circ, t); V), \quad \mathcal{X}_\circ^t = L_2((\circ, t); V) \cap H^1((\circ, t); V^*),$$

که نرم‌های زیر در این فضا قابل استفاده هستند،

$$\|y\|_{\mathcal{Y}_\circ^t} := \|y\|_{L_2((\circ, t); V)},$$

$$\|x\|_{\mathcal{X}_\circ^t} := \|x\|_{L_2((\circ, t); V)} + \|\dot{x}\|_{L_2((\circ, t); V^*)} + \|x(\circ)\|_H + \|x(t)\|_H.$$

خانواده عملگرهای $A(w, s)$ برای همه اعداد مثبت $A_{\min}$ و $A_{\max}$ در شرایط زیر برقرار است،

$$|a(w, s; u, v)| \leq A_{\max} \|u\|_V \|v\|_V, \quad (w, s) \in \Omega \times [\circ, T], \quad u, v \in V$$

$$a(w, s; v, v) \geq A_{\min} \|v\|_V^2, \quad (w, s) \in \Omega \times [\circ, T], \quad v \in V.$$

خانواده مسائل پارامتری (w, t) را به‌فرم دوخطی زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{B}_{w,t}^*: \mathcal{Y}_\circ^t \times \mathcal{X}_\circ^t \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{B}_{w,t}^* := \int_\circ^T \langle y_\wedge(s), -\dot{x} \rangle_{V^*} + a(w, s; y_\wedge(s), x(s)) \, ds + \langle y_\wedge, x(t) \rangle_H,$$

و تابع بار به‌شکل زیر است،

$$\mathcal{F}_{w,t}: \mathcal{X}_\circ^t \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{W}_{w,t}: \mathcal{X}_\circ^t \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}_{w,t}(x) = \int_\circ^T \langle f(w, s), x(s) \rangle_{V^*} \, ds + \langle U_\circ(w), x(\circ) \rangle_H,$$

$$\mathcal{W}_{w,t}(x) = \left(\int_\circ^t \langle \Psi(s) \, dW(s), x(s) \rangle_H \right)(w),$$

بنابراین فرمول‌بندی ضعیف مکان–زمان برای $(w, t) \in \Omega \times [\circ, T]$ به‌شکل زیر می‌باشد،
 $U_{w,t} \in \mathcal{Y}_\circ^t \times H$ را پیدا کنید به‌طوری که برای هر $x \in \mathcal{X}_\circ^t$ عبارت زیر برقرار باشد،

$$\mathcal{B}_{w,t}^*(U_{w,t}, x) = \mathcal{F}_{w,t}(x) + \mathcal{W}_{w,t}(x),$$

که این معادله ω -روش نامیده می‌شود.

u_2 و u_1 مدل‌هایی از یکدیگرند به این مفهوم که $u_1 \in L_2((\circ, T); V)$ ، $u_2 \in C([\circ, T]; H)$ و u_1 لازم نیست مشتق‌پذیر یا پیوسته باشد، اما u_2 روی زمان پیوسته، وابسته به H و مدلی از مقدار u_1 است،

$$\int_{\circ}^T \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 dt = \circ.$$

پس؛

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 = \circ,$$

$$u_1(t) - u_2(t) = \circ,$$

در نتیجه در $L_2(\Omega \times (\circ, T); H)$ ؛ $u_1 = u_2$.

آنچه مهم است این است که فرمول ضعیف مکان-زمان نمی‌تواند با فرمول اول مکان-زمان جابه‌جا شود، چون فرایند وینر هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست و بنابراین، $u_1 \notin \mathcal{X}$.

۴.۳.۲ سمت راست هیچ‌جا مشتق‌پذیر نباشد

نوع کلی‌تر سمت راست که می‌توان به کار برد فرم زیر را دارد،

$$\mathcal{F}_t(x) = \int_{\circ}^t \langle g(s), -\dot{x}(s) \rangle_{V^*} ds - \langle g(t), x(t) \rangle_H + \langle g(\circ), x(\circ) \rangle_H, \quad t \in [\circ, T], \quad (12.2)$$

برای تابع $g \in L_2((\circ, T); V) \cap C([\circ, T]; H)$ و g هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست. به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم آنچه برای انتگرال تصادفی بدست آمد در این مورد نیز برقرار است.

$u_1 \notin \mathcal{X}$ که در $L_2((\circ, T); H)$ و $u_2 \in C([\circ, T]; H)$ ، $u_1 = u_2$. تاکید می‌کنیم در هر دو مورد سمت راست (۱۰.۲) یا (۱۲.۲)، u_2 مهم است، چون مقادیر نقطه‌ای $u_1(t)$ از u_1 خوش‌تعریف نیستند. اگر سمت راست (۱.۲) همچون ۱.۳.۲ به اندازه کافی منظم باشد، سپس u_1 مشتق ضعیف مربع انتگرال‌پذیر دارد و بنابراین وابسته به فضای $\mathcal{X} \subset C([\circ, T]; H)$ و $u_1 = u_2$ است. اگر طرف راست همچون ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ کمتر منظم باشد، سپس لازم نیست که u_1 مشتق‌پذیر یا پیوسته باشد. اما u_2 روی زمان پیوسته، وابسته به H و مدلی از مقدار u_1 است،

$$\int_{\circ}^T \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 dt = \circ.$$

u_2 اغلب در موارد دیگر ([۱۶، ۱۷]) حذف شده است، که در این صورت از فرمول‌بندی ضعیف مکان-زمان زیر استفاده می‌کنیم،

$$u \in \mathcal{Y} : \mathcal{B}^*(u, x) = \mathcal{F}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}_{\circ, T} := \{x \in \mathcal{X} : x(T) = \circ\}.$$

u_2 را در دسته‌ای از مقادیر نقطه‌ای قابل استخراج نگه می‌داریم. برای بیان افزایش اهمیت فرمول ضعیف مکان-زمان، به‌طور خلاصه دو فایده اصلی را بازخوانی می‌کنیم: تنوع بزرگتری از جملات اولیه و بدست آوردن کران‌ها به‌صورت نقطه‌ای امکان‌پذیر می‌شود.

۴.۲ مقادیر نقطه‌ای و تجزیه آنها

یکی از برتری‌های فرمول‌بندی ضعیف بی‌نیازی از پیوسته بودن جز اول جواب یعنی u_1 است. لذا میتوان بازه زمانی را گسسته‌سازی کرده و مسائل موضعی را حل کرد. این می‌تواند روی سطح گسسته توسط حل مسائل با گسسته‌سازی فضایی مختلف روی هر بازه زمانی انجام شود که باعث قابلیت انعطاف در انتخاب شبکه زمانی می‌شود. در اصل هر بازه زمانی را می‌تواند تغییر دهد.

۵.۲ قضیه اینفیم-سوپریم

قضیه‌ی زیر را (در [۳۰, ۱۰] می‌بینیم) بیان می‌کنیم،

قضیه ۱.۵.۲ (باناخ-ناسز-بابوشکا^۸). اگر W و V فضاهاى هیلبرت باشند، فرم دو خطی $B : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده بطوریکه،

$$C_B := \sup_{w \neq 0} \sup_{v \neq 0} \frac{B(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} < \infty, \quad (13.2)$$

عملگر خطی متناظر $B : W \rightarrow V^*$ ، برای همه $w \in W$ و $v \in V$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود،

$$v^* \langle Bw, v \rangle_V := B(w, v),$$

که به‌طور کراندار وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند،

$$c_B := \inf_{w \neq 0} \sup_{v \neq 0} \frac{B(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} > 0, \quad (14.2)$$

$$\forall v \in V, \quad \sup_{w \neq 0} B(w, v) > 0. \quad (15.2)$$

ثابت c_B ، ثابت اینفیم-سوپریم نامیده می‌شود هنگامی که ثابت C_B ثابت کران‌داری نامیده شود.

$c_B^{-1} = \|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^*, W)}$ ، چون با توجه به تعریف c_B ، $c_B^{-1} = \|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^*, W)} = \|(B^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)}$ ، علاوه‌براین می‌دانیم که روابط زیر برقرارند،

$$B^{-1} : V^* \rightarrow W$$

$$v^* \langle Bv, w \rangle_V := B(v, w), \quad \forall v \in V, \forall w \in W,$$

^۸Banach-Necas-Babushka(BNB)

$$B^* : W^* \rightarrow V$$

$$(B^*)^{-1} : V \rightarrow W^*$$

$$V^* \langle Bv, w \rangle_V := \mathcal{B}(v, w), \quad \forall v \in V, \forall w \in W,$$

پس $\|(B^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)} = \|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^*, W)}$ ، در نتیجه تساوی زیر را داریم،

$$c_B^{-1} = \|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^*, W)} = \|(B^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W^*, V)},$$

با توجه به شرایط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) تساوی زیر برقرار است،

$$\inf_{\circ \neq w \in W} \sup_{\circ \neq v \in V} \frac{\mathcal{B}(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} = \inf_{\circ \neq v \in V} \sup_{\circ \neq w \in W} \frac{\mathcal{B}(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} > \circ. \quad (۱۶.۲)$$

این اجازه می‌دهد فضاهایی که در اینجا سوپریمم و اینفیمم گرفته شده‌اند جابه‌جا شوند. حالا نشان می‌دهیم که $\mathcal{B}_t^*$ ، در فرضیات قضیه باناخ- ناسز- بابوشکا روی فضاهای $\mathcal{Y}_H^t$ و $\mathcal{X}^t$ صدق می‌کند. از خاصیت‌های A ، توان‌های کسری خوش تعریف هستند و نرم‌های V^* و V به ترتیب معادل با $\|A^{\frac{1}{p}} \cdot\|_H$ و $\|A^{-\frac{1}{p}} \cdot\|_H$ می‌باشند. معادل بودن این نرم‌ها را به شکل زیر بیان می‌کنیم،

از فضای هیلبرت $H = L_2(\Omega)$ با نرم استاندارد و ضرب داخلی زیر استفاده می‌کنیم،

$$\|v\| = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (v, w) = \int_{\Omega} v w dx,$$

نرم فضاهای سوبولف $H^m(\Omega)$ ، $\circ < m$ به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\|v\|_m = \left(\sum_{|\alpha| < m} \|D^\alpha v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

فضای $V = H_0^1(\Omega)$ با نرم $\|\cdot\|_1$ از توابع موجود در $V = H^1(\Omega)$ تشکیل شده است.

$V^* = H^{-1}(\Omega)$ فضای دوگان V با نرم زیر می‌باشد،

$$\|v\|_{-1} = \sup_{\mathcal{X} \in V} \frac{|(v, \mathcal{X})|}{\|\mathcal{X}\|_1}.$$

توان‌های کسری A را برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$A^\alpha v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (v, \phi_j) \phi_j,$$

$$\|A^\alpha v\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^\alpha (v, \phi_j))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D(A^\alpha) = \{v : \|A^\alpha v\| < \infty\},$$

$$D\left(A^{\frac{l}{2}}\right) = H^l(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad l = 1, 2,$$

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = H_0^1(\Omega), \quad D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$D\left(A^{-\frac{1}{2}}\right) = H^{-1}(\Omega),$$

بنابراین نرم‌های معادل روی $\mathcal{Y}_H^t$ و $\mathcal{X}^t$ را به‌ترتیب به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم،

$$|x|_{\mathcal{X}^t} := \|x(\circ)\|_H + \int_0^t \left(\|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s)\|_H^{\gamma} + \|A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} \right) ds,$$

$$|y|_{\mathcal{Y}_H^t} := \|y_{\gamma}\|_H + \int_0^t \|A^{\frac{1}{\gamma}} y_{\gamma}(s)\|_H^{\gamma} ds.$$

لم ۱.۵.۲. نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^t}$ که به‌شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t} := \|x(t)\|_H + \int_0^t \|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s) - A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} ds$$

هم‌ارز با نرم $|\cdot|_{\mathcal{X}^t}$ برای هر $t \in [\circ, T]$ می‌باشد.

برهان. با توجه به تعریف، نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^t}$ برابر با تساوی زیر است،

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t} = \|x(t)\|_H + \int_0^t \left(\|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s)\|_H^{\gamma} + \|A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} - \gamma \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle_{V^*} \right) ds,$$

از معادل بودن نرم‌های V و V^* با $\|A^{\frac{1}{\gamma}} \cdot\|_H$ و $\|A^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot\|_H$ تساوی زیر برقرار است،

$$\langle A^{\frac{1}{\gamma}} x(s), A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s) \rangle_H = \gamma \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle_{V^*} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \|x(s)\|_H^{\gamma},$$

بنابراین تساوی فوق را به‌شکل زیر در عبارت اولیه جایگذاری می‌کنیم،

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t} = \|x(t)\|_H + \int_0^t \left(\|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s)\|_H^{\gamma} + \|A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} - \gamma \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \|x(s)\|_H^{\gamma} \right) ds,$$

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t} = \|x(t)\|_H + \int_0^t \left(\|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s)\|_H^{\gamma} + \|A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} \right) ds - \|x(s)\|_H^{\gamma} \Big|_0^t,$$

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t} = \|x(t)\|_H - \|x(t)\|_H^{\gamma} + \|x(\circ)\|_H^{\gamma} + \int_0^t \left(\|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s)\|_H^{\gamma} + \|A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} \right) ds,$$

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t} = \|x(\circ)\|_H + \int_0^t \left(\|A^{\frac{1}{\gamma}} x(s)\|_H^{\gamma} + \|A^{-\frac{1}{\gamma}} \dot{x}(s)\|_H^{\gamma} \right) ds = |x|_{\mathcal{X}^t}.$$

□

حال c_B و C_B را برای $\mathcal{B}_t^*$ با توجه به $|\cdot|_{\mathcal{X}^t}$ و $|\cdot|_{\mathcal{Y}_H^t}$ محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۲.۵.۲. فرم دو خطی $\mathcal{B}_t^*(\cdot, \cdot)$ در شرایط زیر صدق می‌کند،

$$C_B := \sup_{\circ \neq y \in \mathcal{Y}^t \times H} \sup_{\circ \neq x \in \mathcal{X}^t} \frac{\mathcal{B}_t^*(y, x)}{|y|_{\mathcal{Y}_H^t} |x|_{\mathcal{X}^t}} = 1, \quad (17.2)$$

$$c_B := \inf_{\circ \neq y \in \mathcal{Y}^t \times H} \sup_{\circ \neq x \in \mathcal{X}^t} \frac{\mathcal{B}_t^*(y, x)}{|y|_{\mathcal{Y}_H^t} |x|_{\mathcal{X}^t}} = 1. \quad (18.2)$$

برهان. تساوی زیر برقرار است،

$$\mathcal{B}_t^*(y, x) = \int_0^t \langle y_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*} ds + \langle y_2, x(t) \rangle_H,$$

با گرفتن قدرمطلق از طرفین عبارت بالا تساوی زیر را داریم،

$$|\mathcal{B}_t^*(y, x)| = \left| \int_0^t \langle y_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*} ds + \langle y_2, x(t) \rangle_H \right|,$$

طبق نامساوی مثلثی، نامساوی زیر را خواهیم داشت،

$$|\mathcal{B}_t^*(y, x)| \leq \int_0^t |\langle y_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*}| ds + |\langle y_2, x(t) \rangle_H|,$$

با تبدیل V و V^* به نرم‌های معادل $\|A^{\frac{1}{p}} \cdot\|_H$ و $\|A^{-\frac{1}{p}} \cdot\|_H$ عبارت زیر را داریم،

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_t^*(y, x)| &\leq \int_0^t |\langle y_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*}| ds + |\langle y_2, x(t) \rangle_H| \\ &= \int_0^t \left\| A^{\frac{1}{p}} y_1(s) (-\dot{x}(s) + Ax(s)) A^{-\frac{1}{p}} \right\|_H ds + \|y_2 x(t)\|_H, \end{aligned}$$

با توجه به نامساوی $\|AB\|_H \leq \|A\|_H \|B\|_H$ عبارات زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_t^*(y, x)| &\leq \int_0^t |\langle y_1(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_{V^*}| ds + |\langle y_2, x(t) \rangle_H| \\ &= \int_0^t \left\| A^{\frac{1}{p}} y_1(s) (-\dot{x}(s) + Ax(s)) A^{-\frac{1}{p}} \right\|_H ds + \|y_2\|_H \|x(t)\|_H \\ &\leq \int_0^t \left\| A^{\frac{1}{p}} y_1(s) \right\|_H^2 \left\| -A^{-\frac{1}{p}} \dot{x}(s) + A^{\frac{1}{p}} x(s) \right\|_H ds + \|y_2\|_H \|x(t)\|_H, \end{aligned}$$

با توجه به تعریف نرم‌های $|y|_{\mathcal{Y}_H^t}$ و $\|x\|_{\mathcal{X}^t}$ نامساوی $|\mathcal{B}_t^*(y, x)| \leq |y|_{\mathcal{Y}_H^t} \|x\|_{\mathcal{X}^t}$ را داریم، همچنین از معادل بودن $\|x\|_{\mathcal{X}^t}$ با $|x|_{\mathcal{X}^t}$ تساوی $|y|_{\mathcal{Y}_H^t} \|x\|_{\mathcal{X}^t} = |y|_{\mathcal{Y}_H^t} |x|_{\mathcal{X}^t}$ برقرار است. پس عبارت زیر را داریم،

$$|\mathcal{B}_t^*(y, x)| \leq |y|_{\mathcal{Y}_H^t} \|x\|_{\mathcal{X}^t} = |y|_{\mathcal{Y}_H^t} |x|_{\mathcal{X}^t}$$

که نامساوی زیر نتیجه می‌شود،

$$\frac{\mathcal{B}_t^*(y, x)}{|y|_{\mathcal{Y}_H^t} |x|_{\mathcal{X}^t}} \leq 1,$$

در نتیجه $C_B \leq 1$. طبق (۱۷.۲) و (۱۸.۲) باید نشان دهیم $C_B = 1$ و $c_B = 1$ یعنی $C_B = c_B$. نشان دادیم که $C_B \leq 1$ ، از طرفی می‌دانیم $c_B \leq C_B$ اگر نشان دهیم $c_B \geq 1$ حکم برقرار می‌شود. برای نشان دادن $c_B \geq 1$ از (۱۶.۲) استفاده کرده و عبارت زیر را اثبات می‌کنیم،

$$\forall x \in \mathcal{X}^t, \quad \exists y_x \in \mathcal{Y}_H^t: \mathcal{B}_t^*(y, x) \geq |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t} \|x\|_{\mathcal{X}^t} = |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t} |x|_{\mathcal{X}^t}.$$

پس برای $x \in \mathcal{X}^t$ ، $y_x = (x - A^{-1}\dot{x}, x(t))$ ، را انتخاب می‌کنیم که متعلق به $\mathcal{Y}_H^t$ است. طبق تعریف $|y|_{\mathcal{Y}_H^t}$ تساوی زیر برقرار است،

$$|y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}^2 = \|y_x\|_H^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}} y_x \right\|_{L^2((\cdot, t); H)}^2, \quad (۱۹.۲)$$

در رابطه (۱۹.۲) مقدار y_x را جایگذاری می‌کنیم تا رابطه زیر حاصل شود،

$$|y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}^2 = \|x(t)\|_H^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}} (x - A^{-1}\dot{x}(t)) \right\|_{L^2((\cdot, t); H)}^2 = \|x(t)\|_H^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}} x(s) - A^{-\frac{1}{2}} \dot{x}(s) \right\|_H^2.$$

چون با توجه به تعریف نرم $\|x\|_{\mathcal{X}^t}$ تساوی زیر را داریم،

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 = \|x(t)\|_H^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}} x(s) - A^{-\frac{1}{2}} \dot{x}(s) \right\|_H^2.$$

پس تساوی‌های زیر برقرارند،

$$|y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}^2 = \|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 = |x|_{\mathcal{X}^t}^2$$

$$|y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}^2 = \|x(t)\|_H^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}} (x - A^{-1}\dot{x}(t)) \right\|_{L^2((\cdot, t); H)}^2 = \|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 = |x|_{\mathcal{X}^t}^2. \quad (۲۰.۲)$$

با بسط فرم دو خطی و با استفاده از (۲۰.۲) تساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_t^*(y_x, x) &= \int_0^t \langle x(s) - A^{-1}\dot{x}(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_H ds + \|x(t)\|_H^2 \\ &= \int_0^t \left\| A^{\frac{1}{2}} x(s) - A^{-\frac{1}{2}} \dot{x}(s) \right\|_H^2 + \|x(t)\|_H^2 = \|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه ثابت کردیم $|y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}^2 = |x|_{\mathcal{X}^t}^2$ پس تساوی $|y_x|_{\mathcal{Y}_H^t} = |x|_{\mathcal{X}^t}$ را داریم. در نتیجه عبارات زیر برقرارند،

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 = |x|_{\mathcal{X}^t}^2 = |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}^2 = |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t} |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t} = |x|_{\mathcal{X}^t} |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_t^*(y_x, x) &= \int_0^t \langle x(s) - A^{-1}\dot{x}(s), -\dot{x}(s) + Ax(s) \rangle_H ds + \|x(t)\|_H^2 \\ &= \int_0^t \left\| A^{\frac{1}{2}} x(s) - A^{-\frac{1}{2}} \dot{x}(s) \right\|_H^2 + \|x(t)\|_H^2 = |x|_{\mathcal{X}^t} |y_x|_{\mathcal{Y}_H^t}, \end{aligned}$$

□

بنابراین $c_B \geq 1$. چون $c_B \leq C_B$ ، پس (۱۷.۲) و (۱۸.۲) را نتیجه می‌گیریم.

چون فرم دو خطی در فرض قضیه باناخ-ناسر-بابوشکا صدق می‌کند، $B_t \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_H^t, (\mathcal{X}^t)^*)$ متناظر با $B_t^*(\cdot, \cdot)$ ، توسط

$$\mathcal{B}_t^*(y, x) = (\mathcal{X}^t)^* \langle B_t y, x \rangle_{\mathcal{X}^t}$$

کراندار و ارون پذیر است و نامساوی $|y|_{\mathcal{Y}_H^t} \leq \|\mathcal{F}\|_{(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})^*}$ ، برقرار است. برای نشان دادن این نامساوی به شکل زیر عمل می کنیم. می دانیم که تساوی زیر برقرار است،

$$\mathcal{B}_t^*(y, x) = \mathcal{F}(x).$$

پس تساوی های زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_t^*(y, x) &= \int_0^t \langle y, -\dot{x} + Ax \rangle_{V^*} ds + \langle y, x(T) \rangle_H \\ &= \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} y (-\dot{x} + Ax) A^{-\frac{1}{q}} \right\|_H ds + \|y, x(T)\|_H. \end{aligned}$$

همچنین با توجه به تعریف زیر،

$$|y|_{\mathcal{Y}_H^t} = \|y\|_H + \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} y(s) \right\|_H ds,$$

نامساوی زیر برقرار است،

$$\|y\|_H + \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} y(s) \right\|_H ds \leq \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} y(-\dot{x} + Ax) A^{-\frac{1}{q}} \right\|_H ds + \|y, x(T)\|_H,$$

پس نامساوی زیر داریم،

$$|y|_{\mathcal{Y}_H^t} \leq \|\mathcal{F}\|_{(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})^*}.$$

توجه می کنیم که برای سمت راست ۱.۳.۲، $\mathcal{F}_t$ متعلق به فضای دوتایی $(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})$ برای هر $t \leq T$ است، اگر $f \in L^{\frac{p}{p-1}}((\circ, T); V^*)$ و $u_\circ \in H$ ، در واقع طبق (۸.۲) عبارات زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= \int_0^t \langle f(s), x(s) \rangle_{V^*} ds + \langle u_\circ, x(\circ) \rangle_H \quad t \in [\circ, T] \\ \mathcal{F}_t &= \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) x(s) A^{-\frac{1}{q}} \right\|_H ds + \|u_\circ x(\circ)\|_H \\ &\leq \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H \left\| x(s) A^{-\frac{1}{q}} \right\|_H ds + \|u_\circ\|_H \|x(\circ)\|_H \\ \|\mathcal{F}_t\| &\leq \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H ds + \|u_\circ\|_H + \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} y(s) \right\|_H ds + \|y\|_H \\ \|\mathcal{F}_t\|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H^{\frac{p}{p-1}} ds + \|u_\circ\|_H^{\frac{p}{p-1}} + \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} y(s) \right\|_H^{\frac{p}{p-1}} ds + \|y\|_H^{\frac{p}{p-1}} \\ \|\mathcal{F}_t\|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H^{\frac{p}{p-1}} ds + \|u_\circ\|_H^{\frac{p}{p-1}} + |y|_{\mathcal{Y}_H^t}^{\frac{p}{p-1}} \\ \|\mathcal{F}_t\|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H^{\frac{p}{p-1}} ds + \|u_\circ\|_H^{\frac{p}{p-1}} \\ \|\mathcal{F}_t\| &\leq \left[\int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H^{\frac{p}{p-1}} ds + \|u_\circ\|_H^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

پس نامساوی های زیر برقرارند،

$$\|\mathcal{F}_t\|_{(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})^*} \leq \left[\int_0^t \left\| A^{-\frac{1}{p}} f(s) \right\|_H^{\frac{p}{p-1}} ds + \|u_\circ\|_H^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \leq \left[A_{\min}^{-\frac{1}{p}} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^{\frac{p}{p-1}} ds + \|u_\circ\|_H^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}. \quad (۲۱.۲)$$

با ترکیب قضیه باناخ-ناسز-بابوشکا و (۲۱.۲) و باتوجه به اینکه $\|y\|_{\mathcal{Y}_H^t} \leq \|\mathcal{F}_t\|_{(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})^*}$ نامساوی‌های زیر را داریم،

$$\|y\|_{\mathcal{Y}_H^t} \leq \|\mathcal{F}_t\|_{(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})^*} \leq \left[\int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} f(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \leq \int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} f(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma}$$

پس نامساوی زیر بدست می‌آید،

$$\int_0^t \|A^{\frac{1}{\gamma}} u_1(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_2(t)\|_H^{\gamma} \leq \int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} f(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma}.$$

با هم‌ارزی $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_H^t}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_H}$ و آخرین کران در (۲۱.۲) نامساوی زیر را بدست می‌آوریم،

$$A_{\min} \int_0^t \|u_1(s)\|_V^{\gamma} ds + \|u_2(t)\|_H^{\gamma} \leq A_{\min}^{-1} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma}. \quad (22.2)$$

برای بدست آوردن نامساوی بالا به شکل زیر عمل می‌کنیم،
نامساوی زیر را از قبل داریم،

$$\left[\int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} f(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \leq \left[A_{\min}^{-1} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (23.2)$$

با توجه به نامساوی (۲۳.۲) نامساوی زیر را داریم،

$$\int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} f(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma} \leq A_{\min}^{-1} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma},$$

همچنین از قبل نامساوی زیر را داریم،

$$\int_0^t \|A^{\frac{1}{\gamma}} u_1(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_2(t)\|_H^{\gamma} \leq \int_0^t \|A^{-\frac{1}{\gamma}} f(s)\|_H^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma}$$

پس نامساوی زیر حاصل می‌شود،

$$A_{\min} \int_0^t \|u_1(s)\|_V^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma} \leq A_{\min}^{-1} \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma}.$$

اگر بعضی مسائل را روی $[\circ, r]$ و $[r, t]$ بدست آوریم دو کران موضعی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} A_{\min} \int_0^r \|u_1(s)\|_V^{\gamma} ds + \|u_2(r)\|_H^{\gamma} &\leq A_{\min}^{-1} \int_0^r \|f(s)\|_{V^*}^{\gamma} ds + \|u_0\|_H^{\gamma}, \\ A_{\min} \int_r^t \|u_1(s)\|_V^{\gamma} ds + \|u_2(t)\|_H^{\gamma} &\leq A_{\min}^{-1} \int_r^t \|f(s)\|_{V^*}^{\gamma} ds + \|u_2\|_H^{\gamma} \end{aligned} \quad (24.2)$$

قضیه ۳.۵.۲ (وجود و یکتایی). برای سمت راست ۱.۳.۲ که $u_0 \in H$ و $f \in L_{\gamma}((\circ, T); V^*)$ جواب یکتای $u = (u_1, u_2)$ در $L_{\gamma}((\circ, T); V) \times \mathcal{C}([\circ, T]; H)$ برای معادله (۷.۲) وجود دارد و نرم در کران زیر صدق می‌کند،

$$A_{\min} \int_0^T \|u_1(t)\|_V^{\gamma} dt + \sup_{t \in [\circ, T]} \|u_2(t)\|_H^{\gamma} \leq A_{\min}^{-1} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^{\gamma} dt + \|u_0\|_H^{\gamma},$$

و در حالت خاص $u_1 = u_2 \in \mathcal{X}$ برقرار است.

ملاحظه ۱.۵.۲. برای سمت راستی که در ۱.۳.۲ معرفی نشده باشد وجود و یکتایی مانند قضیه ۳.۵.۲ بدست می‌آید، اما حدود نرم‌ها، طبق حدودی که می‌توان برای $\|\mathcal{F}\|_{(\mathcal{X}^t, |\cdot|_{\mathcal{X}^t})^*}$ بدست آورد تغییر می‌کنند. تغییرات برای ۲.۳.۲ یا ۴.۳.۲ به آسانی بدست می‌آیند، در صورتی که نظریه مورد نظر برای ۳.۳.۲ به شکل زیر می‌باشد،

مساله تصادفی سهموی خطی به شکل زیر می‌باشد،

$$\begin{aligned} dU(t) + A(t)U(t)dt &= f(t)dt + \Psi(t) + Wd(t), \quad t \in (0, T], \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \quad (25.2)$$

فرض می‌کنیم که $A(t)$ یک عملگر باشد. فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر V و H داده شده اند و گلفاند سه‌گانه $V \subset H \subset V^*$ ، که V کامل و چگال در H جا داده شده است. توجه می‌کنیم که $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ضرب داخلی در H و $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*}$ دوخطی دوگان بین V^* و V به شکل $\langle u, v \rangle_{V^*} = \langle u, v \rangle_H$ ، که $u \in H$ و $v \in V$ می‌باشد. همچنین $\ell(H) = \ell(H; H)$ فضای عملگرهای خطی کراندار روی H و $\ell_2(H) = \ell_2(H; H)$ است. اگر $T \in (0, \infty)$ ثابت و اگر $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ فضای کامل احتمال با جداسازی نرمال $\Sigma = (\Sigma_t)_{t \in (0, \infty)}$ باشد.

برای ساختن فرمول‌بندی ضعیف مکان-زمان معادله (۲۵.۲) فضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ را روی $[0, t]$ که $t \in [0, T]$ دلخواه می‌باشد به شکل زیر تشکیل می‌دهیم،

$$\mathcal{Y}^t = L_2((0, t); V), \quad \mathcal{X}^t = L_2((0, t); V) \cap H^1((0, t); V^*),$$

نرم‌های زیر در این فضاها قابل استفاده هستند،

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{Y}^t}^2 &:= \|y\|_{L_2((0, t); V)}^2 \\ \|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 &:= \|x\|_{L_2((0, t); V)}^2 + \|\dot{x}\|_{L_2((0, t); V^*)}^2 + \|x(0)\|_H^2 + \|x(t)\|_H^2, \end{aligned}$$

قرارداد می‌کنیم که از این پس تساوی‌های $\mathcal{X} = \mathcal{X}^t$ و $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^t$ برقرار باشند. خانواده مسائل پارامتری شده توسط (w, t) با فرم دو خطی زیر می‌باشد،

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{w,t}^* &: (\mathcal{Y}_0^t \times H) \times \mathcal{X}_0^t \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{B}_{w,t}^*(y, x) &= \int_0^t \left(V^* \langle y_1(s), -\dot{x}(s) \rangle_V + a(w, s; y_1(s), x(s)) \right) ds, \end{aligned}$$

و تابع‌های بار به شکل زیر می‌باشد،

$$\mathcal{F}_{w,t} : \mathcal{X}_0^t \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{W}_{w,t} : \mathcal{X}_0^t \rightarrow \mathbb{R},$$

در اینجا تساوی‌های زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{w,t}(x) &= \int_0^t V^* \langle f(w, s), x(s) \rangle_V ds + \langle U_0(w), x(0) \rangle_H, \\ \mathcal{W}_{w,t}(x) &= \left(\int_0^t \langle \Psi(s) dW(s), x(s) \rangle_H \right) (w). \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم که $f(w, \cdot) \in L_2((\circ, T); V^*)$ و $U_\circ(w) \in H$ ، پس برای $x \in \mathcal{X}_\circ^t$ نامساوی‌های زیر را داریم،

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{w,t}(x)| &= \left| \int_\circ^t V^* \langle f(w, s), x(s) \rangle_V ds + \langle U_\circ(w), x(\circ) \rangle_H \right| \\ &\leq \left(\int_\circ^t \|f(w, s)\|_{V^*}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\circ^t \|x(s)\|_V^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \|U_\circ(w)\|_H \|x(\circ)\|_H \\ &\lesssim \left(\|f(w, \cdot)\|_{L_2((\circ, T); V^*)} + \|U_\circ(w)\|_H \right) \|x\|_{\mathcal{X}_\circ^t}, \end{aligned}$$

بنابراین عبارت زیر برقرار است،

$$\|\mathcal{F}_{w,t}(x)\|_{(\mathcal{X}_\circ^t)^*} \lesssim \|f(w, \cdot)\|_{L_2((\circ, T); V^*)} + \|U_\circ(w)\|_H.$$

برای اندازه‌گیری نظم فضایی^۹ از فضاهای $\dot{H}^\gamma = D(A^{\frac{\gamma}{2}})$ با نرم‌های $\|v\|_{\dot{H}^\gamma} = \|A^{\frac{\gamma}{2}} v\|_H$ برای $\gamma \in \mathbb{R}$ استفاده می‌کنیم. $D(A^\alpha)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned} A^\alpha v &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha(v, \varphi_j) \varphi_j \\ \|A^\alpha v\| &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^\alpha(v, \varphi_j))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ D(A^\alpha) &= \{v : \|A^\alpha v\| < \infty\} \end{aligned}$$

قضیه ۴.۵.۲ (نظم فضایی). فرض کنیم $\beta \geq \circ$ ، فرم دوخطی تعریف شده (۷.۲) کران‌دار است و شرط‌های اینفیمم-سوپریمم روی جفت فضاهای $L_2((\circ, t); \dot{H}^{1-\beta}) \cap H^1((\circ, t); \dot{H}^{-1-\beta})$ و $L_2((\circ, T); \dot{H}^{\beta-1})$ اگر $f \in L_2((\circ, T); \dot{H}^{\beta-1})$ و $u_\circ \in \dot{H}^\beta$ ، جواب یکتای $u = (u_1, u_2) \in L_2((\circ, T); \dot{H}^{\beta+1}) \times \mathcal{C}([\circ, T]; \dot{H}^\beta)$ برای (۷.۲) وجود دارد. این نرم در کران زیر صدق می‌کند:

$$\int_\circ^T \|u_1(t)\|_{\dot{H}^{\beta+1}}^2 dt + \sup_{t \in [\circ, T]} \|u_2(t)\|_{\dot{H}^\beta}^2 \leq \int_\circ^T \|f(t)\|_{\dot{H}^{\beta-1}}^2 dt + \|u_\circ\|_{\dot{H}^\beta}^2,$$

در حالت خاص $u_1 = u_2 \in L_2((\circ, T); \dot{H}^{\beta+1}) \cap H^1((\circ, T); \dot{H}^{\beta-1})$ برقرار است.

^۹ Spatial regularity

فصل ۳

گسسته‌سازی

این فصل با گسسته‌سازی مساله براساس توابع آزمایش که نسبت به زمان قطعه‌وار خطی و توابع آزمون که نسبت به زمان قطعه‌وار ثابت می‌باشند شروع می‌شود. روشی که بدست می‌آوریم روش کرنک-نیکلسون اصلاح شده است که با گام اول پسرو اوایلر^۱ و گام آخر پیشرو اوایلر^۲ تولید می‌شود.

اگر معادلات دیفرانسیل جزئی به شکل زیر باشد،

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

$$u(n\Delta x, i\Delta t) = u_n^i.$$

و به ترتیب معادلات پیشرو اوایلر و پسرو اوایلر به شکل زیر باشند،

$$\frac{u_n^{i+1} - u_n^i}{\Delta t} = F_n^i\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{u_n^{i+1} - u_n^i}{\Delta t} = F_n^{i+1}\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

آنگاه معادله برای روش کرنک-نیکلسون به شکل زیر است،

$$\frac{u_n^{i+1} - u_n^i}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[F_n^{i+1}\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + F_n^i\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \right].$$

^۱ Backward Euler

^۲ Forward Euler

۱.۳ گسسته‌سازی با چند جمله‌ای‌هایی از پایین‌ترین درجه در زمان

فاصله زمانی $[0, T]$ را به شکل $\mathcal{T}_k = \{0 = t_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = T\}$ تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $k_i = t_{i+1} - t_i$ و $k = \max_i k_i$. تقسیم‌بندی $\mathcal{T}_k$ در فاصله زمانی $[0, T]$ را با $\mathcal{T}_k^n$ ، فاصله $[t_i, t_{i+1}]$ را با I_i ، فضای توابع پیوسته قطعه‌وار خطی را با S_k و فضای توابع قطعه‌وار ثابت را با Q_k نشان می‌دهیم و قرارداد می‌کنیم که تقسیم‌بندی S_k^n و Q_k^n را مانند $\mathcal{T}_k^n$ انجام دهیم. V_h را فضای عناصر متناهی چند جمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته از درجه کمتر یا مساوی p روی خانواده شبه‌یکنواخت از مثلث‌ها روی دامنه با اندازه مش h در نظر می‌گیریم. چون گسسته‌سازی زمانی هدف اصلی ماست، فرض می‌کنیم که $p \geq 1$ به اندازه کافی بزرگ باشد. زیرفضاهایی با بعد متناهی توسط $\mathcal{V}_{h,k} := Q_k \otimes V_h$ و $\mathcal{X}_{h,k} := S_k \otimes V_h$ به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$Q_k \otimes V_h = \sum_{i,j} e_i f_j (\psi_i \otimes v_j), \quad \psi_i \otimes v_j = \psi_i v_j^T,$$

$$S_k \otimes V_h = \sum_{i,j} g_i f_j (\varphi_i \otimes v_j), \quad \varphi_i \otimes v_j = \varphi_i v_j^T,$$

ψ_i, φ_i و v_j به ترتیب عناصر پایه‌ای Q_k ، S_k و V_h همچنین e_i, g_i و f_j به ترتیب عناصر Q_k ، S_k و V_h می‌باشند. خانواده فضاهای $\mathcal{V}_{h,k}^n$ و $\mathcal{X}_{h,k}^n$ را تولید می‌کنیم. پایه استاندارد مولد توابع هت قطعه‌وار خطی S_k توسط $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ و پایه استاندارد مولد توابع قطعه‌وار ثابت Q_k را با $\{\psi_i\}_{i=0}^N$ نشان می‌دهیم.

B^* فرم دوخطی است که در (۳.۲) تعریف شده است و $\mathcal{F}$ تابع بار می‌باشد که در (۴.۲) به آن اشاره شده است. مساله (۵.۲) به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شود.

$U \in \mathcal{V}_{h,k} \times V_h$ را طوری بیابید که برای هر $X \in \mathcal{X}_{h,k}$ رابطه زیر برقرار باشد،

$$B^*(U, X) = \mathcal{F}(X). \quad (۱.۳)$$

فضای $\mathcal{X}_{h,k}$ را که با نرم دیگر مجهز شده است در نظر می‌گیریم،

$$\|X\|_{\mathcal{X}_k}^2 := \|X(\circ)\|_H^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{V^*}^2 + \|\Pi_i X\|_V^2 \right) ds,$$

از معادل بودن V و V^* با $\|A^{-\frac{1}{2}} \cdot\|_H$ و $\|A^{\frac{1}{2}} \cdot\|_H$ تساوی زیر بدست می‌آید،

$$\|X\|_{\mathcal{X}_k}^2 := \|X(\circ)\|_H^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|A^{-\frac{1}{2}} \dot{X}\|_H^2 + \|A^{\frac{1}{2}} \Pi_i X\|_H^2 \right) ds,$$

در اینجا Π تصویر متعامد است که به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$(\Pi_i X)(t) = \frac{1}{k_i} \int_{I_i} X(s) ds, \quad t \in I_i.$$

به منظور اثبات وجود و یکتایی جواب برای مساله گسسته (۱.۳) و همچنین بدست آوردن ثابت اینفیمم-سوپریمم در حالت گسسته همانند حالت پیوسته، قضیه ۱.۱.۳ را بیان می‌کنیم. اگر $\mathcal{X}_\delta \subset \mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}_\delta \subset \mathcal{Y}$ زیرفضاهایی با بعد متناهی باشند و $u \in \mathcal{X}$ باشد، آنگاه برای هر $v \in \mathcal{Y}$ ، مساله بیان شده زیر را گسسته‌سازی می‌کنیم،

$$u \in \mathcal{X}: \quad b(u, v) = f(v).$$

$u_\delta \in \mathcal{X}_\delta$ را طوری بیابید که برای هر $v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta$ مساله زیر را داشته باشیم،

$$b(u_\delta, v_\delta) = f(v_\delta). \quad (۲.۳)$$

$V = H^1_0(\Omega)$ و $H = L^2(\Omega)$ را در نظر می‌گیریم. $\mathcal{X}_\delta = S_{\Delta t} \otimes V_h$ ، $\mathcal{Y}_\delta = Q_{\Delta t} \otimes V_h$ و $\delta = (\Delta t, h)$ تعریف می‌کنیم که در آنها $S_{\Delta t}$ و V_h قطعه‌وار خطی و $Q_{\Delta t}$ عناصر متناهی قطعه‌وار ثابت و $\tau^k = \mathcal{X}I^k$ که $Q_{\Delta t} = \{\tau^1, \dots, \tau^K\}$ باشند و $S_{\Delta t} = \{\sigma^1, \dots, \sigma^K\}$ که $\sigma^k = (t^{k-1}, t^k)$ و $I^k := (t^{k-1}, t^k)$ و $V_h = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_h}\}$ ، برای هر $v_\delta = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_h} w_i^k \sigma^k \otimes \varphi_i \in \mathcal{X}_\delta$ و $w_\delta = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_h} w_i^k \sigma^k \otimes \varphi_i \in \mathcal{X}_\delta$ عبارت زیر را داریم،

$$\begin{aligned} b(w_\delta, v_\delta) &= \int_I \left(\langle \dot{w}_\delta(t), v_\delta(t) \rangle_{V^1 \times V} + a(w_\delta(t), v_\delta(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k,l=1}^K \sum_{i,j=1}^{n_h} w_k^i v_l^j \left[(\dot{\sigma}^k, \tau^l)_{L^2(I)} (\varphi_i, \varphi_j)_H + (\sigma^k, \tau^l)_{L^2(I)} a(\varphi_i, \varphi_j) \right] \\ &= W_\delta^T B_\delta V_\delta \end{aligned}$$

که در اینجا عبارت زیر برقرار است،

$$B_\delta := N_{\Delta t} \otimes M_h + M_{\Delta t} \otimes A_h,$$

عبارات زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} M_h &:= \left[(\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} \right]_{i,j=1, \dots, n_h}, \\ M_{\Delta t} &:= \left[(\sigma^k, \tau^l)_{L^2(I)} \right]_{k,l=1, \dots, K}, \\ N_{\Delta t} &:= \left[(\dot{\sigma}^k, \tau^l)_{L^2(I)} \right]_{k,l=1, \dots, K}, \\ A_h &:= \left[a(\varphi_i, \varphi_j) \right]_{i,j=1, \dots, n_h}, \end{aligned}$$

همچنین تساوی‌های زیر را داریم،

$$\begin{aligned} (\dot{\sigma}^k, \tau^l)_{L^2(I)} &= \delta_{k,l} - \delta_{k+1,l}, \\ (\sigma^k, \tau^l)_{L^2(I)} &= \frac{\Delta t}{2} (\delta_{k,l} + \delta_{k+1,l}), \end{aligned}$$

بنابراین تساوی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} b(w_\delta, \mathcal{T}^l \otimes \varphi_j) &= \sum_{i=1}^{n_h} \left[(w_i^l - w_i^{l-1})(\varphi_i, \varphi_j)_H + \frac{\Delta t}{\gamma} (w_i^l + w_i^{l-1}) a(\varphi_i, \varphi_j) \right] \\ &= \Delta t \left[M_h \frac{1}{\Delta t} (W^l - W^{l-1}) + A_h W^{l-\frac{1}{\gamma}} \right] \end{aligned}$$

که در اینجا تعاریف زیر را داریم،

$$W^l := (w_i^l)_{i=1, \dots, n_h}, \quad w_i^{l-\frac{1}{\gamma}} := \frac{1}{\gamma} (w_i^l + w_i^{l-1}),$$

که $W^{l-\frac{1}{\gamma}}$ به همین صورت تعریف می‌شود. اگر از تقریب سمت راست انتگرال‌گیری زمانی استفاده کنیم تساوی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} f(\mathcal{T}^l \otimes \varphi_j) &= \int_0^T \langle g(t), \mathcal{T}^l \otimes \varphi_j \rangle_{V' \times V} dt \approx \frac{\Delta t}{\gamma} \langle g(t^{l-1}) + g(t^l), \varphi_j \rangle_{V' \times V} \\ &= \frac{\Delta t}{\gamma} (g^{l-1} + g^l)_j = \Delta t g_i^{l-\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

در اینجا رابطه زیر را داریم،

$$g^l = \left(\langle g(t^l), \varphi_j \rangle_{V' \times V} \right)_{j=1, \dots, n_h}$$

می‌توان معادله (۲.۳) را به شکل زیر بازنویسی کنیم،

$$\frac{1}{\Delta t} M_h (W^l - W^{l-1}) + A_h W^{l-\frac{1}{\gamma}} = g^{l-\frac{1}{\gamma}}, \quad W^\circ := \circ,$$

برای تولید نرم متفاوت روی $\mathcal{X}$ تعاریف زیر را داریم،

برای $w \in \mathcal{X}$ ، $\bar{w}^k := (\Delta t)^{-1} \int_{I^k} w(t) dt \in V$ و $\bar{w} := \sum_{k=1}^K \mathcal{X} I^k \otimes \bar{w}^i \in L_2(I; V)$ را داریم. پس نرم زیر را تعریف می‌کنیم،

$$|||w|||_{\mathcal{X}, \delta}^2 := ||\dot{w}||_{L_2(I; V')}^2 + ||\bar{w}||_{L_2(I; V)}^2 + ||w(T)||_H^2.$$

قضیه ۱.۱.۳. [۱۹] اگر $a(\cdot, \cdot)$ متقارن و دارای شرایط کرانداری و کورسیوتی باشد و برای هر $\varphi \in V$ داشته باشیم $||\varphi||_V^2 := a(\varphi, \varphi)$ آنگاه $\beta_\delta = \gamma_\delta = 1$ که β_δ و γ_δ به شکل زیر تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned} \beta_\delta &:= \inf_{w_\delta \in \mathcal{X}_\delta} \sup_{v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta} \frac{b(w_\delta, v_\delta)}{|||w_\delta|||_{\mathcal{X}, \delta} ||v_\delta||_{\mathcal{Y}}}, \\ \gamma_\delta &:= \sup_{w_\delta \in \mathcal{X}_\delta} \sup_{v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta} \frac{b(w_\delta, v_\delta)}{|||w_\delta|||_{\mathcal{X}, \delta} ||v_\delta||_{\mathcal{Y}}}. \end{aligned}$$

برهان. چون $v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta$ قطعه‌وار ثابت در زمان است تساوی زیر را برای همه $w \in \mathcal{X}$ داریم،

$$\int_I a(w(t), v_\delta(t)) dt = \int_I a(\bar{w}(t), v_\delta(t)) dt,$$

بنابراین تساوی زیر برقرار است،

$$b(w_\delta, v_\delta) = \int_I a(A_h^{-1} \dot{w}_\delta(t) + \bar{w}_\delta(t), v_\delta(t)) dt,$$

که در اینجا $z_\delta(t) := A_h^{-1} \dot{w}_\delta(t)$ ، که برای همه $\varphi_h \in V_h$ تساوی زیر را داریم،

$$a(z_\delta(t), \varphi_h) = \langle \dot{w}_\delta(t), \varphi_h \rangle_{V' \times V}.$$

برای هر $\tilde{v} \in V'$ تساوی زیر برقرار است،

$$\|A_h^{-1} \tilde{v}\|_V^2 = a(A_h^{-1} \tilde{v}, A_h^{-1} \tilde{v}) = \langle \tilde{v}, A_h^{-1} \tilde{v} \rangle_{V' \times V} = \|\tilde{v}\|_{V'}^2,$$

اثبات می‌کنیم که برای همه $v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta$ ، جواب یکتای $z_\delta \in \mathcal{X}_\delta$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $q_\delta \in \mathcal{Y}_\delta$ تساوی زیر برقرار است،

$$\int_I a(A_h^{-1} \dot{z}_\delta(t) + \bar{z}_\delta(t), q_\delta(t)) dt = \int_I a(v_\delta(t), q_\delta(t)) dt,$$

توجه می‌کنیم که برای $z_\delta \in \mathcal{X}$ عبارت $v_\delta := A^{-1} \dot{z}_\delta(t) + \bar{z}_\delta \in \mathcal{Y}_\delta$ را داریم. بنابراین با نامساوی کوشی-شوارتز^۳ و $z_\delta = w_\delta$ تساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \sup_{v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta} \frac{b(w_\delta, v_\delta)}{\|v_\delta\|_{\mathcal{Y}}} &= \sup_{z_\delta \in \mathcal{X}_\delta} \frac{b(w_\delta, A_h^{-1} \dot{z}_\delta + \bar{z}_\delta)}{\|A_h^{-1} \dot{z}_\delta + \bar{z}_\delta\|_{\mathcal{Y}}} = \sup_{z_\delta \in \mathcal{X}_\delta} \frac{\int_I a(A_h^{-1} \dot{w}_\delta + \bar{w}_\delta, A_h^{-1} \dot{z}_\delta + \bar{z}_\delta) dt}{\|A_h^{-1} \dot{z}_\delta + \bar{z}_\delta\|_{\mathcal{Y}}} \\ &= \|A_h^{-1} \dot{w}_\delta + \bar{w}_\delta\|_{\mathcal{Y}} \end{aligned}$$

همچنین عبارت زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \|A_h^{-1} \dot{w}_\delta + \bar{w}_\delta\|_{\mathcal{Y}}^2 &= \|A_h^{-1} \dot{w}_\delta\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|\bar{w}_\delta\|_{\mathcal{Y}}^2 + 2 \int_I \langle \dot{w}_\delta(t), \bar{w}_\delta(t) \rangle_{V' \times V} dt \\ &= \|\dot{w}_\delta\|_{L_T(I; V')}^2 + \|\bar{w}_\delta\|_{L_T(I; V)}^2 + \|w_\delta(T)\|_H^2 = \|w_\delta\|_{\mathcal{X}, \delta}^2 \end{aligned}$$

بنابراین تساوی زیر برقرار است،

$$\sup_{v_\delta \in \mathcal{Y}_\delta} \frac{b(w_\delta, v_\delta)}{\|v_\delta\|_{\mathcal{Y}}} = \|w_\delta\|_{\mathcal{X}, \delta}$$

□

که نتیجه می‌شود $\beta_\delta = \gamma_\delta = 1$.

حال کران $\mathcal{F}$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_k}$ به‌جای نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ باقی مانده است. برای همه $X \in \mathcal{X}_{h,k}$ عبارات زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{X}^t}^2 &:= \|x(\circ)\|_H^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^2 + \|X\|_V^2) ds, \\ \|X\|_{\mathcal{X}_k}^2 &:= \|x(\circ)\|_H^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^2 + \|\Pi_i X\|_V^2) ds. \end{aligned}$$

^۳ Cauchy-Schwarz

از مقایسه دو نرم بالا عبارات زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \|x(\circ)\|_H^{\check{}} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|X\|_V^{\check{}}) ds &= \|x(\circ)\|_H^{\check{}} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|\Pi_i X\|_V^{\check{}}) ds \\ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|X\|_V^{\check{}}) ds &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|\Pi_i X\|_V^{\check{}}) ds, \\ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|\Pi_i X\|_V^{\check{}}) ds &\leq c_S^{\check{}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|\Pi_i X\|_V^{\check{}}) ds, \end{aligned}$$

در نتیجه نامساوی زیر حاصل می‌شود،

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|X\|_V^{\check{}}) ds \leq c_S^{\check{}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|\Pi_i X\|_V^{\check{}}) ds,$$

چون $\mathcal{X}_{h,k}$ دارای بعد متناهی است و c_S در حالت کلی در انتخاب فضاها یکنواخت نیست. این منجر به هم‌ارزی نرم‌های $|X|_{\mathcal{X}}$ و $|X|_{\mathcal{X}_k}$ می‌شود، چرا که نامساوی (۳.۳) برقرار است،

$$|X|_{\mathcal{X}_k} \leq |X|_{\mathcal{X}} \leq \max(1, c_S) |X|_{\mathcal{X}_k}, \quad x \in \mathcal{X}_{h,k}. \quad (3.3)$$

برای اثبات (۳.۳) به شکل زیر عمل می‌کنیم،

تعاریف زیر را برای $|x|_{\mathcal{X}_k}$ ، $|x|_{\mathcal{X}^t}$ و $|x|_{\mathcal{X}}$ داریم،

$$|x|_{\mathcal{X}_k}^{\check{}} := \|X(\circ)\|_H^{\check{}} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|A^{-\frac{1}{\check{}}} \dot{X}\|_H^{\check{}} + \|A^{\frac{1}{\check{}}} \Pi_i X\|_H^{\check{}} \right) ds, \quad (4.3)$$

$$\|x\|_{\mathcal{X}^t}^{\check{}} := \|x(\circ)\|_H^{\check{}} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} (\|\dot{X}\|_{V^*}^{\check{}} + \|X\|_V^{\check{}}) ds,$$

$$|x|_{\mathcal{X}}^{\check{}} := \|x(\circ)\|_H^{\check{}} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|A^{\frac{1}{\check{}}} x\|_H^{\check{}} + \|A^{-\frac{1}{\check{}}} \dot{x}\|_H^{\check{}} \right) ds,$$

مقدار $(\Pi_i X)(t) = \frac{1}{k_i} \int_{I_i} X(s) ds$ را در (۴.۳) جایگزین می‌کنیم که تساوی زیر بدست می‌آید،

$$|x|_{\mathcal{X}_k}^{\check{}} := \|X(\circ)\|_H^{\check{}} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|A^{-\frac{1}{\check{}}} \dot{X}\|_H^{\check{}} + \frac{1}{k_i} \|A^{\frac{1}{\check{}}} X\|_H^{\check{}} \right) ds,$$

پس $|x|_{\mathcal{X}_k}^{\check{}} \leq |x|_{\mathcal{X}}^{\check{}}$ در نتیجه دو نامساوی $|x|_{\mathcal{X}_k} \leq |x|_{\mathcal{X}}$ و $|X|_{\mathcal{X}} \leq \max(1, c_S) |X|_{\mathcal{X}_k}$ حاصل می‌شود که از ترکیب آن دو، نامساوی (۳.۳) بدست می‌آید. در [۳۹] شرایط کافی برای کران‌داری یکنواخت c_S برای همه h ها و k ها نشان داده شده است که به شکل زیر می‌باشد،

$$C_{CFL} = k \sup_{v \in \check{V}_h} \frac{\|v\|_V}{\|v\|_{V^*}} < \infty, \quad (5.3)$$

توسط شبه‌یکنواختی و نامساوی وارون، در شرط CFL ، $k \leq Ch^{\check{}}$ است. بنابراین (۵.۳) پایداری مساله گسسته نسبت به نرم‌های اولیه را تضمین می‌کند.

برای سمت راست ۱.۳.۲ مشابه (۲۱.۲) نامساوی (۶.۳) را داریم،

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{(\mathcal{X}_{h,k}, |\cdot|, \mathcal{X}_k)^*} &\leq \left(A_{\min}^{-1} \|f\|_{L^\Psi((\circ, T); V^*)} + \|u_\circ\|_H^\Psi \right)^{\frac{1}{\Psi}}, \\ \|\mathcal{F}\|_{(\mathcal{X}_{h,k}, |\cdot|, \mathcal{X}_k)^*} &\leq \left(c_S^\Psi A_{\min}^{-1} \|f\|_{L^\Psi((\circ, T); V^*)} + \|u_\circ\|_H^\Psi \right)^{\frac{1}{\Psi}}. \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

مشابه قضیه ۳.۵.۲ با تغییر کران در (۶.۳) برای $(\mathcal{Y}_h, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}_h})$ با $U \in (\mathcal{Y}_h, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}_h})$ برقرار است. به این ترتیب می‌بینیم که مقادیر (۱.۳) یک طرح زمان پله‌ای است. نشانه‌های زیر را به شکل زیر معرفی می‌کنیم،

$$\begin{aligned} F_i^L &:= \frac{\Psi}{k_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \varphi_i ds, & F_i^R &:= \frac{\Psi}{k_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f \varphi_i ds, \\ \langle A_i^L u, v \rangle &:= \frac{\Psi}{k_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(u, v \otimes \varphi_i) ds, \\ \langle A_i^R u, v \rangle &:= \frac{\Psi}{k_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(u, v \otimes \varphi_i) ds. \end{aligned}$$

مساله گسسته را می‌توان روی جفت فضاهای $(\mathcal{Y}_h, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}_h}, \mathcal{X}_{h,k})$ به صورت زیر برای هر $v \in V_h$ نوشت،

$$\langle U_1^{(\circ)} - u_\circ, v \rangle + \frac{k_\circ}{\Psi} \langle A_\circ^R U_1^{(\circ)}, v \rangle = \frac{k_\circ}{\Psi} \langle F_\circ^R, v \rangle,$$

که تساوی بالا به شکل زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \langle U_1^{(\circ)} - u_\circ, v \rangle + \frac{k_\circ}{\Psi} \langle A_\circ^R U_1^{(\circ)}, v \rangle &= \langle U_1^{(\circ)} - u_\circ, v \rangle + \frac{k_\circ}{\Psi} \left(\frac{\Psi}{k_\circ} \int_{t_\circ}^{t_1} a(U_1^{(\circ)}, v \otimes \varphi_\circ) ds \right) \\ &= \frac{k_\circ}{\Psi} \left\langle \frac{\Psi}{k_\circ} \int_{t_\circ}^{t_1} f \varphi_\circ ds, v \right\rangle = \frac{k_\circ}{\Psi} \langle F_\circ^R, v \rangle \end{aligned}$$

و تساوی زیر برقرار است،

$$\langle U_1^{(i)} - U_1^{(i-1)}, v \rangle + \frac{1}{\Psi} \langle k_i A_i^R U_1^{(i)} + k_{i-1} A_i^L U_1^{(i-1)}, v \rangle = \frac{1}{\Psi} \langle k_i F_i^R + k_{i-1} F_i^L, v \rangle,$$

که تساوی بالا به شکل زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} &\langle U_1^{(i)} - U_1^{(i-1)}, v \rangle + \frac{k_i}{\Psi} \langle A_i^R U_1^{(i)}, v \rangle + \frac{k_{i-1}}{\Psi} \langle A_i^L U_1^{(i-1)}, v \rangle \\ &= \langle U_1^{(i)}, v \rangle - \langle U_1^{(i-1)}, v \rangle + \frac{k_i}{\Psi} \left(\frac{\Psi}{k_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(U_1^{(i)}, v \otimes \varphi_i) ds \right) \\ &\quad + \frac{k_{i-1}}{\Psi} \left(\frac{\Psi}{k_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(U_1^{(i-1)}, v \otimes \varphi_i) ds \right), \\ &= \frac{1}{\Psi} \left\langle k_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f \varphi_i ds, v \right\rangle + \frac{1}{\Psi} \left\langle k_{i-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \varphi_{i-1} ds, v \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Psi} \langle k_i F_i^R, v \rangle + \frac{1}{\Psi} \langle k_{i-1} F_i^L, v \rangle = \frac{1}{\Psi} \langle k_i F_i^R + k_{i-1} F_i^L, v \rangle \end{aligned}$$

و همچنین تساوی زیر را داریم،

$$\langle U_{\mathcal{V}}^{(N)} - U_{\mathcal{V}}^{(N-1)}, v \rangle + \frac{k_{N-1}}{\mathcal{V}} \langle A_N^L U_{\mathcal{V}}^{(N-1)}, v \rangle = \frac{k_{N-1}}{\mathcal{V}} \langle F_N^L, v \rangle,$$

که به شکل زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} & \langle U_{\mathcal{V}}^{(N)} - U_{\mathcal{V}}^{(N-1)}, v \rangle + \frac{k_{N-1}}{\mathcal{V}} \langle A_N^L U_{\mathcal{V}}^{(N-1)}, v \rangle \\ &= \langle U_{\mathcal{V}}^{(N)} - U_{\mathcal{V}}^{(N-1)}, v \rangle + \frac{k_{N-1}}{\mathcal{V}} \left(\frac{\mathcal{V}}{k_{N-1}} \int_{N-1}^N a(U_{\mathcal{V}}^{(N-1)}, v \otimes \varphi_N) ds \right) \\ &= \frac{k_{N-1}}{\mathcal{V}} \left\langle \frac{\mathcal{V}}{k_{N-1}} \int_{N-1}^N f \varphi_N, v \right\rangle = \frac{k_{N-1}}{\mathcal{V}} \langle F_N^L, v \rangle \end{aligned}$$

در اینجا $U_{\mathcal{V}}^{(i)} \in V_h$ عامل مشترک $U_{\mathcal{V}} = \sum_{i=\circ}^{N-1} U^{(i)} \psi_i$ تعریف می‌شود و $U_{\mathcal{V}}^{(N)}$ تقریبی از $u_{\mathcal{V}}(t_N)$ است. این طرح ترکیبی از گام اول پسرو اوایلر، چندین گام کرنک-نیکلسون و گام آخر پیشرو اوایلر است.

از (۲۲.۲) و (۶.۳) به این نتیجه می‌رسیم که نرم جواب عددی به شکل زیر کران‌دار است،
باتوجه به (۲۲.۲) عبارت زیر را داریم،

$$A_{\min} \|U_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|U_{\mathcal{V}}^{(N)}\|_H^2 \leq A_{\min}^{-1} \|f\|_{L_{\mathcal{V}}((\circ, T); V^*)}^2 + \|u_{\circ}\|_H^2 \leq c_S^2 A_{\min}^{-1} \|f\|_{L_{\mathcal{V}}((\circ, T); V^*)}^2 + \|u_{\circ}\|_H^2$$

در نتیجه نامساوی زیر را خواهیم داشت،

$$A_{\min} \|U_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|U_{\mathcal{V}}^{(N)}\|_H^2 \leq c_S^2 A_{\min}^{-1} \|f\|_{L_{\mathcal{V}}((\circ, T); V^*)}^2 + \|u_{\circ}\|_H^2. \quad (۷.۳)$$

۲.۳ تجزیه طرح

توجه داریم که در افراز با یک عنصر طرح به صورت زیر کاهش می‌یابد،

$$\begin{aligned} \langle U_{\mathcal{V}}^{(\circ)} - u_{\circ}, v \rangle + \frac{k_{\circ}}{\mathcal{V}} \langle A_{\circ}^R U_{\mathcal{V}}^{(\circ)}, v \rangle &= \frac{k_{\circ}}{\mathcal{V}} \langle F_{\circ}^R, v \rangle, \\ \langle U_{\mathcal{V}}^{(1)} - U_{\mathcal{V}}^{(\circ)}, v \rangle + \frac{k_{\circ}}{\mathcal{V}} \langle A_{\mathcal{V}}^L U_{\mathcal{V}}^{(\circ)}, v \rangle &= \frac{k_{\circ}}{\mathcal{V}} \langle F_{\mathcal{V}}^L, v \rangle. \end{aligned}$$

می‌توانیم تجزیه بالا را برای هر بازه زمانی I_i تکرار کنیم، بنابراین مقادیر اضافی که تقریب $U^{(\circ)} = u_{\circ}$ و $i = \circ, \dots, N-1$ طرح برای می‌آیند. طرح برای t_i هستند بدست می‌آیند. به شکل زیر می‌باشد،

$$\begin{aligned} \langle U_{\mathcal{V}}^{(i)} - U_{\mathcal{V}}^{(i-1)}, v \rangle + \frac{k_i}{\mathcal{V}} \langle A_i^R U_{\mathcal{V}}^{(i-1)}, v \rangle &= \frac{k_i}{\mathcal{V}} \langle F_i^R, v \rangle, \\ \langle U_{\mathcal{V}}^{(i+1)} - U_{\mathcal{V}}^{(i)}, v \rangle + \frac{k_i}{\mathcal{V}} \langle A_{i+1}^L U_{\mathcal{V}}^{(i)}, v \rangle &= \frac{k_i}{\mathcal{V}} \langle F_{i+1}^L, v \rangle. \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

تساوی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \langle U_{\Upsilon}^{(1)} - U_1^{(\circ)}, v \rangle + \frac{k_{\circ}}{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon}{k_{\circ}} \int_{t_{\circ}}^{t_1} a(U_1^{(\circ)}, v \otimes \varphi_1) ds \right) = \\ \langle U_1^{(\circ)}, v \rangle - \langle u^{(\circ)}, v \rangle + \frac{k_{\circ}}{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon}{k_{\circ}} \int_{t_{\circ}}^{t_1} a(U_1^{(\circ)}, v \otimes \varphi_1) ds \right) = \frac{k_{\circ}}{\Upsilon} \left\langle \frac{\Upsilon}{k_{\circ}} \int_{t_{\circ}}^{t_1} f \varphi_1 ds, v \right\rangle \\ = \frac{k_{\circ}}{\Upsilon} \langle F_1^R, v \rangle. \end{aligned}$$

پس با داشتن مقدار $U_{\Upsilon}^{(1)}$ ، مقدار $U_1^{(1)}$ را از تساوی زیر بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \langle U_1^{(1)} - U_{\Upsilon}^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \langle A_1^R U_1^{(1)}, v \rangle &= \langle U_1^{(1)} - U_{\Upsilon}^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \frac{\Upsilon}{k_1} \int_{t_1}^{t_{\Upsilon}} a(U_1^{(1)}, v \otimes \varphi_1) ds \\ &= \langle U_1^{(1)}, v \rangle - \langle U_{\Upsilon}^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \frac{\Upsilon}{k_1} \int_{t_1}^{t_{\Upsilon}} a(U_1^{(1)}, v \otimes \varphi_1) ds = \frac{k_1}{\Upsilon} \left\langle \frac{\Upsilon}{k_1} \int_{t_1}^{t_{\Upsilon}} f \varphi_1 ds, v \right\rangle \\ &= \frac{k_1}{\Upsilon} \langle F_1^R, v \rangle \\ \langle U_1^{(1)} - U_{\Upsilon}^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \langle A_1^R U_1^{(1)}, v \rangle &= \frac{k_1}{\Upsilon} \langle F_1^R, v \rangle, \end{aligned}$$

با داشتن مقدار $U_1^{(1)}$ ، مقدار $U_{\Upsilon}^{(2)}$ را بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \langle U_{\Upsilon}^{(2)} - U_1^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \langle A_{\Upsilon}^L U_1^{(1)}, v \rangle &= \langle U_{\Upsilon}^{(2)} - U_1^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon}{k_1} \int_{t_1}^{t_{\Upsilon}} a(U_1^{(1)}, v \otimes \varphi_{\Upsilon}) ds \right) \\ &= \frac{k_1}{\Upsilon} \left\langle \frac{\Upsilon}{k_1} \int_{t_1}^{t_{\Upsilon}} f \varphi_{\Upsilon} ds, v \right\rangle = \frac{k_1}{\Upsilon} \langle F_{\Upsilon}^L, v \rangle, \end{aligned}$$

در نتیجه تساوی زیر برقرار است،

$$\langle U_{\Upsilon}^{(2)} - U_1^{(1)}, v \rangle + \frac{k_1}{\Upsilon} \langle A_{\Upsilon}^L U_1^{(1)}, v \rangle = \frac{k_1}{\Upsilon} \langle F_{\Upsilon}^L, v \rangle,$$

و با داشتن مقدار $U_1^{(2)}$ ، مقدار $U_{\Upsilon}^{(3)}$ از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$\langle U_{\Upsilon}^{(3)} - U_1^{(2)}, v \rangle + \frac{k_{\Upsilon}}{\Upsilon} \langle A_{\Upsilon}^L U_1^{(2)}, v \rangle = \frac{k_{\Upsilon}}{\Upsilon} \langle F_{\Upsilon}^L, v \rangle,$$

با ادامه این روند (۸.۳) بدست خواهد آمد.

متغیر دلخواه قضیه ۳.۵.۲ در عبارت زیر صدق می‌کند، با توجه به (۷.۳) نامساوی زیر را داریم،

$$A_{\min} \|U_1\|_{\mathcal{Y}}^{\Upsilon} + \|U_{\Upsilon}^{(i)}\|_H^{\Upsilon} \leq c_S^{-1} A_{\min} \|f\|_{L_{\Upsilon}^{\Upsilon}((\circ, T); V^*)}^{\Upsilon} + \|u_{\circ}\|_H^{\Upsilon}.$$

پس برای هر $i = 1, \dots, N$ عبارت بالا برقرار است. در نتیجه نامساوی زیر برقرار است،

$$A_{\min} \|U_1\|_{\mathcal{Y}}^{\Upsilon} + \max_{i=1, \dots, N} \|U_{\Upsilon}^{(i)}\|_H^{\Upsilon} \leq c_S^{-1} A_{\min} \|f\|_{L_{\Upsilon}^{\Upsilon}((\circ, T); V^*)}^{\Upsilon} + \|u_{\circ}\|_H^{\Upsilon}.$$

ملاحظه ۱.۲.۳. چیزی که باید به آن توجه کرد این است که $U_{\Upsilon}^{(n)}$ می‌تواند از $U_1|_{(\circ, t_n)}$ ساخته شود. حتی اگر تجزیه‌های ارائه شده در بالا را معرفی نکنیم. تا زمانی که مقادیر U_1 داریم، می‌توان از دومین معادله (۸.۳) در هر زمان استفاده شود.

۳.۳ گسسته‌سازی زمانی با چند جمله‌ای‌های درجه بالاتر

نتایج بدست آمده در این بخش را می‌توان به چند جمله‌ای‌های از درجه دلخواه نسبت به زمان تعمیم داد. فضای توابع پیوسته چند جمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته از مرتبه بیشتر از $q+1$ با $S_{k,q+1}$ با تقسیم‌بندی T_k و فضای توابع گسسته که چند جمله‌ای قطعه‌وار، از مرتبه بیشتر از q می‌باشند با $Q_{k,q}$ برای بعضی تقسیم‌بندی‌ها نشان داده می‌شوند. زیرفضای با بعد متناهی $Q_{k,q} \otimes V_h := \mathcal{Y}_{h,k,q}$ و $S_{k,q+1} \otimes V_h := \mathcal{X}_{h,k,q+1}$ ، برای زیرفضای با بعد متناهی $V_h \subset V$ را تعریف می‌کنیم. مساله گسسته‌سازی را می‌توان به شکل زیر نوشت،

$$U \in \mathcal{Y}_{h,k,q} \times V_h : \mathcal{B}^*(U, X) = \mathcal{F}(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}_{h,k,q+1}. \quad (9.3)$$

نتایج وجود و یکتایی را در مورد $q = 0$ دنبال می‌کنیم، که توسط تغییر نرم روی فضای $\mathcal{X}_{h,k,q+1}$ به شکل زیر می‌باشد،

$$\begin{aligned} \|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 &:= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{V^*}^2 + \|\Pi_i^{(q)} X\|_V^2 \right) ds + \|X(\circ)\|_H^2, \\ |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 &:= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|\Pi_i^{(q)} X\|_{\dot{H}^1}^2 \right) ds + \|X(\circ)\|_H^2, \end{aligned} \quad (10.3)$$

تساوی زیر را برای گسسته‌سازی با چند جمله‌ای‌های از درجه پایین داریم،

$$\|X\|_{\mathcal{X}_k}^2 := \|X(\circ)\|_H^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{V^*}^2 + \|\Pi_i X\|_V^2 \right) ds,$$

بنابراین برای چند جمله‌ای‌های از درجه بالا عبارت زیر برقرار است،

$$\|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 := \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{V^*}^2 + \|\Pi_i^{(q)} X\|_V^2 \right) ds + \|X(\circ)\|_H^2,$$

از معادل بودن V و V^* با $\|A^{\frac{1}{2}} \cdot\|_H$ و $\|A^{-\frac{1}{2}} \cdot\|_H$ تساوی زیر بدست می‌آید،

$$|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 := \|X(\circ)\|_H^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|A^{-\frac{1}{2}} \dot{X}\|_H^2 + \|A^{\frac{1}{2}} \Pi_i^{(q)} X\|_H^2 \right) ds,$$

بنابراین عبارت زیر برقرار است،

$$|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 := \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|\Pi_i^{(q)} X\|_{\dot{H}^1}^2 \right) ds + \|X(\circ)\|_H^2,$$

در اینجا $\Pi^{(q)}$ به طور موضعی روی هر I_i ، مانند تصویر متعامد L_2 در فضای چند جمله‌ای‌های از درجه بیشتر از q تعریف می‌شود.

نتیجه‌ای که دو جز U توسط گسسته‌سازی براساس فرمول‌بندی اول مکان-زمان می‌دهند را

توضیح می‌دهیم. فرمول‌بندی اول مکان-زمان (۱.۲) هنگامی که فرم ضعیف مکان-زمان (۹.۳) داده می‌شود منجر به گسسته‌سازی زیر می‌شود،

$$W \in \mathcal{X}_{h,k,q+1} : \mathcal{B}(W, Y) = \mathcal{F}(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{Y}_{h,k,q} \times V_h,$$

قضیه بعد بیان می‌کند که جواب‌های گسسته معادله اول و فرمول‌بندی ضعیف (۱.۲) تنها نسبت به یک جمله متناسب با خطای درونیایی مقدار سمت راست تفاوت دارد. چون این نتیجه هدف این پایان‌نامه نیست، اثبات آن را حذف می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. اگر برای بعضی $\gamma \in N$ ، $f^{(\gamma)} \in L_2((\cdot, T); V)$ سپس نامساوی زیر را برای $\theta := \min\{q+1, \gamma\}$ داریم،

$$\|U_1 - \Pi^{(q)}W\|_{L_2((\cdot, T); V)} + \|U_1^{(N)} - W(t_N)\|_H \leq Ck^{\theta+1} \|f^{(\theta)}\|_{L_2((\cdot, T); V)}.$$

فصل ۴

برآوردهای خطای پیشین

برآوردهای خطا را برای شیوه ارائه شده در فصل قبل بدست می‌آوریم. ابتدا نظریه شبه‌بهینگی را بیان می‌کنیم، سپس به برآورد خطای پایدار با نرم طبیعی جواب در (۷.۳) می‌رسیم. اگرچه آزمایش‌های عددی (در شکل‌های ۲.۶(آ) و ۲.۶(ب) می‌بینیم) و قضیه ۱.۴.۴ بر این اشاره دارد که مولفه دوم جواب با نرخ متناسب k^2 سریع‌تر همگرا است. این منطبق بر این حقیقت است که روش ارائه شده، اصلاح شده روش کرنک-نیکلسون است.

۱.۴ شبه‌بهینگی

هنگامی که تقریب بدست آمده در روش ارائه شده بهترین تقریب ممکن در اندازه‌گیری خطا باشد به آن تقریب شبه‌بهین گفته می‌شود. زیرفضاهای $\mathcal{Y}_h \times V_h \subset \mathcal{Y}_{h,k}$ و $\mathcal{X}_{h,k} \subset \mathcal{X}$ که قبلاً به‌ترتیب با نرم‌های $|\cdot|_{\mathcal{Y}_H}$ و $|\cdot|_{\mathcal{X}_k}$ مجهز شده‌اند را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱.۱.۴ (شبه‌بهینگی). اگر u و U به‌ترتیب جواب‌های (۷.۲) و (۱.۳) باشند، خطای $u-U$

برای $Y_1 \in \mathcal{Y}_{h,k}$ دلخواه و $Y_1^{(n)} \in V_h$ برای هر n به شکل زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} & A_{\min} \|u_1 - U_1\|_{L_T((\circ, t_n); V)}^2 + \|u_2(t_n) - U_2^{(n)}\|_H^2 \\ & \leq \max\{1, c_S\}^2 \left(A_{\max} \|u_1 - Y_1\|_{L_T((\circ, t_n); V)}^2 + \|u_2(t_n) - Y_2^{(n)}\|_H^2 \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

در حالت خاص خطای زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} & A_{\min} \|u_1 - U_1\|_{L_T((\circ, T); V)}^2 + \max_{i=1, \dots, N} \|u_2(t_i) - U_2^{(i)}\|_H^2 \\ & \leq \max\{1, c_S\}^2 \left(A_{\max} \|u_1 - Y_1\|_{L_T((\circ, T); V)}^2 + \max_{i=1, \dots, N} \|u_2(t_i) - Y_2^{(i)}\|_H^2 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

برهان. مساله را روی $(\circ, t_n)$ که دلخواه است در نظر می گیریم. توسط $R: \mathcal{Y}_H \mapsto \mathcal{Y}_{h,k} \times V_h$ تصویر رایتز^۱ را نشان می دهیم که به شکل $Ru = U$ تعریف می شود، به طوریکه برای هر $X \in \mathcal{X}_{h,k}$ تساوی زیر را داریم،

$$B^*(R\varphi, X) = B^*(\varphi, X). \quad (3.4)$$

چون R خودتوان و $\mathcal{Y}_H$ فضای هیلبرت است، تساوی $\|I - R\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}_H)} = \|R\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}_H)}$ برقرار است (در قضیه ۲.۱.۴ می بینیم)، بنابراین برای هر $Y \in \mathcal{Y}_{h,k} \times V_h$ عبارت زیر را داریم،

$$|u - U|_{\mathcal{Y}_H} = |(u - Ru)|_{\mathcal{Y}_H} = |(I - R)u|_{\mathcal{Y}_H} = |(I - R)(u - Y)|_{\mathcal{Y}_H} \leq \|R\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}_H)} |u - Y|_{\mathcal{Y}_H}.$$

طبق (۱۸.۲) نامساوی زیر را داریم،

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \frac{|R\varphi|_{\mathcal{Y}_H}}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H}} \leq \frac{1}{c_B} \sup_{\phi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{B^*(R\varphi, X)}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}}$$

طبق (۳.۴) تساوی زیر را داریم،

$$\frac{1}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{B^*(R\varphi, X)}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}} = \frac{1}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{B^*(\varphi, X)}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}}$$

همچنین طبق (۱۷.۲) نامساوی زیر برقرار است،

$$\frac{1}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{B^*(\varphi, X)}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}} \leq \frac{C_B}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}}$$

پس عبارت زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \|R\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}_H)} &= \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \frac{|R\varphi|_{\mathcal{Y}_H}}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H}} \leq \frac{1}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{B^*(R\varphi, X)}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}} \\ &= \frac{1}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{B^*(\varphi, X)}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}} \leq \frac{C_B}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}}, \end{aligned}$$

^۱ Ritz

در اینجا اول از حالت گسسته (۱۸.۲) نسبت به $|\cdot|_{\mathcal{Y}_H}$ و $|\cdot|_{\mathcal{X}_k}$ و سپس (۳.۴) و (۱۷.۲) استفاده می‌کنیم. سرانجام چون $C_B = c_B = 1$ ، توسط (۳.۳) نامساوی زیر را بدست می‌آوریم،

$$\frac{C_B}{c_B} \sup_{\varphi \in \mathcal{Y}_H} \sup_{X \in \mathcal{X}_{h,k}} \frac{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}}}{|\varphi|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_k}} \leq \frac{C_B}{c_B} \max\{1, c_S\} = \max\{1, c_S\}.$$

چون $Y \in \mathcal{Y}_{h,k} \times V_h$ دلخواه است از هم‌ارزی بین نرم‌های $\|\cdot\|_{L_{\mathcal{Y}}((\cdot, t_n); \dot{H}^1)}$ و $\|\cdot\|_{L_{\mathcal{Y}}((\cdot, t_n); V)}$ (۱.۴) بدست می‌آید. چون t_n دلخواه است دومین کران (۲.۴) به راحتی بدست می‌آید. $\square$

قضیه ۲.۱.۴. [۲۰] اگر H فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|_H$ و ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)_H$ باشد و $P: H \rightarrow H$ خودتوان باشد به‌طوری‌که $P^2 = P \neq I$ عبارت زیر برقرار است،

$$\|P\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|I - P\|_{\mathcal{L}(H,H)}.$$

برهان. ابتدا قضیه را برای حالتی که بعد H برابر با ۲ باشد اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $I - P$ دارای رتبه ۱ باشند به‌طوری‌که که تساوی‌های $Pv = (b, v)_H a$ و $(I - P)v = (d, v)_H c$ برقرارند و برای ثابت‌های $a, b, c, d \in H$ تساوی $(a, b)_H = (c, d)_H = 1$ برقرار است بنابراین برای هر $v \in H$ تساوی زیر را داریم،

$$v = Pv + (I - P)v = (b, v)_H a + (d, v)_H c.$$

تساوی‌های زیر برقرارند،

$$\|P * P\|_{\mathcal{L}(H,H)} = (a, b)_H * (a, b)_H = \|a\|_H^2 \|b\|_H^2,$$

$$\|(I - P) * (I - P)\|_{\mathcal{L}(H,H)} = (c, d)_H * (c, d)_H = \|c\|_H^2 \|d\|_H^2.$$

مجموعه X را که توسط دو عضو x و Px تولید می‌شود در نظر می‌گیریم. به‌طور کلی برای هر $x \in H$ به‌طوری‌که $\|x\| = 1$ ، زیرفضایی از مجموعه X را تشکیل می‌دهیم، اگر بعد X برابر یک باشد سپس تساوی $(I - P)x = 0$ را داریم. اگر بعد X برابر دو باشد نتیجه می‌گیریم که $\|(I - P)x\|_X \leq \|P\|_X$ ، که این عبارت به‌صورت زیر نتیجه می‌شود،

$$\|(I - P)x\|_H = \|(I - P)x\|_X \leq \|P\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \|P\|_{\mathcal{L}(H,H)},$$

که نشان می‌دهد $\|I - P\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \|P\|_{\mathcal{L}(H,H)}$. به‌طور مشابه $\|I - P\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \|P\|_{\mathcal{L}(H,H)}$ به‌طور مشابه. به این صورت که مجموعه X که توسط دو عضو x و $(I - P)x$ تشکیل می‌شود را در نظر می‌گیریم. زیرفضایی از مجموعه X را تشکیل می‌دهیم. اگر بعد X برابر یک باشد سپس تساوی $Px = 0$ را داریم. اگر بعد X برابر دو باشد، $\|Px\|_X \leq \|I - P\|_X$ به‌صورت زیر نتیجه می‌شود،

$$\|Px\|_H = \|Px\|_X \leq \|I - P\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \|I - P\|_{\mathcal{L}(H,H)},$$

که نشان می‌دهد $\|I - P\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \|P\|_{\mathcal{L}(H,H)}$. بنابراین تساوی زیر برقرار است،

$$\|P\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|I - P\|_{\mathcal{L}(H,H)}.$$

$\square$

۲.۴ همگرایی

ابتدا همگرایی روش را تحت حداقل فرضیات نشان می دهیم، لذا فرض کنید $\mathcal{F} \in \mathcal{X}^*$ به عنوان طرف راست معادله منظم نیست.

قضیه ۱.۲.۴. اگر u و U به ترتیب جواب های (۷.۲) و (۱.۳) باشند، با فرض درستی (۵.۳) اگر $\mathcal{F} \in \mathcal{X}^*$ آنگاه $\|u - U\|_{\mathcal{Y}_H} \rightarrow 0$ ، هنگامی که $k, h \rightarrow 0$.

برهان. از قضیه شبه بهینگی برای هر $Y \in \mathcal{Y}_{h,k} \times V_h$ استفاده می کنیم، لذا نامساوی زیر برقرار است،

$$\|u - U\|_{\mathcal{Y}_H} \leq C \|u - Y\|_{\mathcal{Y}_H},$$

که در اینجا C به c_s ، $A_{\min}$ و $A_{\max}$ وابسته است (طبق قضیه شبه بهینگی)، بنابراین مستقل از h و k در (۵.۳) می باشد. $\mathcal{V}$ را فضای به اندازه کافی توابع هموار، چگال در $\mathcal{Y}_H$ انتخاب می کنیم. برای مثال $\mathcal{V} := H^1((\cdot, T); V) \times V$ در نظر می گیریم. برای ε دلخواه، $v_\varepsilon \in \mathcal{V}$ را انتخاب می کنیم به طوریکه نامساوی زیر برقرار باشد،

$$\|u - v_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

سپس $h = h(\varepsilon)$ و $k = k(\varepsilon)$ را طوری انتخاب می کنیم که $\tilde{v}_\varepsilon \in \mathcal{Y}_{h,k} \times V_h$ و v_ε در نامساوی زیر صدق کند،

$$\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H} \leq C(h + k)\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (۴.۴)$$

چون طبق (۴.۴) نامساوی زیر را داریم،

$$C(\|u - v_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H} + \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H}) \leq C\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq C\varepsilon$$

نامساوی زیر را بدست می آوریم،

$$\|u - U\|_{\mathcal{Y}_H} \leq C\|u - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H} \leq C(\|u - v_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H} + \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_H}) \leq C\varepsilon,$$

□

چون ε دلخواه است ادعا ثابت می شود.

۳.۴ همگرایی مرتبه اول در زمان

برای اثبات نتایج بعدی فرض می کنیم که گسسته سازی فضایی با استفاده از چند جمله ای های از درجه به اندازه کافی بالا انجام شود، این انتخاب ضروری نیست اما باعث می شود که شرط

(۵.۳) تبدیل به $h^2 \lesssim k$ ، شود. بنابراین برای پایداری بین نرخ همگرایی فضایی و زمانی، به مرتبه ۲ (چند جمله‌ای از درجه ۲ $p = 2$) در H^1 -نرم در قضیه زیر و به‌طور مشابه مرتبه ۴ نیاز داریم. دوباره از فضای $\dot{H}^\beta$ در بخش؟؟ استفاده می‌کنیم. سمت راست که در (۲.۴) آمده برآوردهای درونیایی استاندارد بهتر تخمین می‌زند.

قضیه ۱.۳.۴. اگر u و U به ترتیب جواب‌های (۷.۲) و (۱.۳) باشند، برای داده‌های به‌اندازه کافی هموار f و u_0 با فرض درستی (۵.۳) نامساوی زیر برقرار است،

$$\|u_1 - U_1\|_{L^2((0,T);V)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i) - U_2^{(i)}\|_H \leq C(k + h^2) \left(\|f\|_{L^2((0,T);\dot{H}^1)} + \|u_0\|_{\dot{H}^2} \right).$$

برهان. از (۲.۴) در قضیه شبه‌بهینگی و برآوردهای خطای درونیایی نامساوی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} & \|u_1 - U_1\|_{L^2((0,T);V)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i) - U_2^{(i)}\|_H \\ & \leq \|u_1 - Y_1\|_{L^2((0,T);V)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i) - Y_2^{(i)}\|_H, \end{aligned}$$

طبق قضیه ۴.۵.۲ که $\beta = 2$ و $u \in L^2((0,T);\dot{H}^{\beta+1})$ نامساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} & \|u_1(t)\|_{\dot{H}^3} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \\ & \leq C \left(k \|\dot{u}\|_{L^2((0,T);\dot{H}^1)}^2 + h^2 \left(\|u\|_{L^2((0,T);\dot{H}^3)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \right) \right), \end{aligned}$$

از طرفی تساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} & \|u_1 - U_1\|_{L^2((0,T);V)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i) - U_2^{(i)}\|_H \leq \|u_1(t)\|_{\dot{H}^3} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \\ & \leq C \left(k \|\dot{u}\|_{L^2((0,T);\dot{H}^1)}^2 + h^2 \left(\|u\|_{L^2((0,T);\dot{H}^3)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \right) \right), \end{aligned}$$

پس برای u به‌اندازه کافی هموار که C وابسته روی c_s ، $A_{\min}$ و $A_{\max}$ نامساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} & \|u_1 - U_1\|_{L^2((0,T);V)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i) - U_2^{(i)}\|_H \\ & \leq C \left(k \|\dot{u}\|_{L^2((0,T);\dot{H}^1)}^2 + h^2 \left(\|u\|_{L^2((0,T);\dot{H}^3)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \right) \right), \end{aligned}$$

طبق قضیه ۴.۵.۲ نامساوی زیر را داریم،

$$\|u_1(t)\|_{\dot{H}^3} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \leq \|f(t)\|_{\dot{H}^1} + \|u_0\|_{\dot{H}^2},$$

پس نامساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} & C \left(k \|\dot{u}\|_{L^2((0,T);\dot{H}^1)}^2 + h^2 \left(\|u\|_{L^2((0,T);\dot{H}^3)} + \max_{i=1,\dots,N} \|u_2(t_i)\|_{\dot{H}^2} \right) \right) \\ & \leq C(k + h^2) \left(\|f\|_{L^2((0,T);\dot{H}^1)} + \|u_0\|_{\dot{H}^2} \right), \end{aligned}$$

در نتیجه نامساوی زیر برقرار است،

$$\|u_1 - U_1\|_{L^2((\cdot, T); V)} + \max_{i=1, \dots, N} \|u_2(t_i) - U_2^{(i)}\|_H \leq C(k + h^2) \left(\|f\|_{L^2((\cdot, T); \dot{H}^1)} + \|u_0\|_{\dot{H}^2} \right).$$

□

۴.۴ همگرایی مرتبه دوم در زمان

با استفاده از ارتباط بین فرمول گسسته مکان-زمان اول و دوم و با توجه به اینکه فرمول بندی اول مکان-زمان منطبق با روش کرنک-نیکلسون است می‌توانیم قضیه زیر را نتیجه بگیریم،
قضیه ۱.۴.۴. طرح موجود در (۸.۳) با نرخ مناسب k^2 در نقاط گره‌ای $\{t_i\}_{i=1, \dots, N}$ برای داده به اندازه کافی هموار، همگراست.

برهان. W موجود در قضیه ۱.۳.۳ را در نظر می‌گیریم، توجه می‌کنیم که برای هر t_i نامساوی زیر برقرار است،

$$\|U_2^{(i)} - u_2(t_i)\|_H \leq \|U_2^{(i)} - W(t_i)\|_H + \|u_2(t_i) - W(t_i)\|_H,$$

عبارت بالا به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned} \|U_2^{(i)} - u_2(t_i)\|_H &= \|U_2^{(i)} - W(t_i) + W(t_i) - u_2(t_i)\|_H \\ &\leq \|U_2^{(i)} - W(t_i)\|_H + \|W(t_i) - u_2(t_i)\|_H = \|U_2^{(i)} - W(t_i)\|_H - \|u_2(t_i) - W(t_i)\|_H \\ &\leq \|U_2^{(i)} - W(t_i)\|_H + \|u_2(t_i) - W(t_i)\|_H. \end{aligned}$$

فرمول بندی اولیه حاصل ضرب‌های زمان پله‌ای کرنک-نیکلسون است، به طوریکه عبارت دوم توسط Ck^2 کران دار است. می‌توانیم کران عبارت اول را مطابق قضیه ۱.۳.۳، Ck^2 بدست آوریم.

پس طرح موجود در (۸.۳) با نرخ مناسب k^2 در نقاط گره‌ای $\{t_i\}_{i=1, \dots, N}$ همگراست. □

فصل ۵

نیمه گسسته سازی زمانی

در قضیه ۱.۴.۵ اثبات مستقیمی از نتیجه قضیه ۱.۴.۴ ارائه می دهیم که منطبق بر روش کرنک-نیکلسون نیست و برای درجه دلخواه گسترش می یابد. اثبات بر اساس برهان دوگان است اما ابتدا نیاز به جانشینی برای نظریه شبه بهینگی در مورد نیمه گسسته داریم.

۱.۵ وجود و یکتایی

فضاهای نیمه گسسته زمانی را به شکل زیر معرفی می کنیم،

$$\mathcal{Y}_{k,q} := \{Y \in \mathcal{Y} : Y|_{I_i} \in \mathbb{P}^q[t] \otimes \dot{H}^1\}, \quad \mathcal{X}_{k,q+1} := \{X \in \mathcal{X} : X|_{I_i} \in \mathbb{P}^{q+1}[t] \otimes \dot{H}^1\},$$

و نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ را مانند (۱۰.۳) تعریف می کنیم. با توجه به (۱.۳) مساله نیمه گسسته برای هر $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ به شکل زیر می باشد،

$$\hat{U} \in \mathcal{Y}_{k,q} \times H : B^*(\hat{U}, X) = \mathcal{F}(X), \quad (1.5)$$

می توانیم طرح را همچون (۸.۳) برای تولید مقادیر نقطه ای $\hat{U}_\gamma^{(i)}$ در هر t_i جداسازی کنیم. نظریه پایدار وجود و یکتایی براساس باناخ-ناسز-بابوشکا را در این مورد نیز می توان بدست آورد. با ارائه یک مدل نیمه گسسته از لم ۱.۵.۲ به صورت زیر شروع می کنیم،

لم ۱.۱.۵. نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ که به شکل زیر تعریف می شود،

$$\|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^{\vee} := \|X(t)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X(s) - A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X}(s) \right\|_H^{\vee} ds,$$

برابر با نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ می باشد.

برهان. مشابه اثبات لم ۱.۵.۲ تساوی زیر را داریم،

$$\|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^{\vee} := \|X(t)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X(s) \right\|_H^{\vee} + \left\| A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X}(s) \right\|_H^{\vee} - \vee \left\langle \Pi_i^{(q)} X, \dot{X} \right\rangle_{V^*} \right) ds,$$

می دانیم که تساوی $\int_{I_i} \vee \left\langle \Pi_i^{(q)} X, \dot{X} \right\rangle_{V^*} ds = \int_{I_i} \vee \langle X, \dot{X} \rangle_{V^*} ds = \int_{I_i} \frac{1}{\vee} \frac{d}{dt} \|X(s)\|_H^{\vee} ds$ برقرار است پس عبارات زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} \|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^{\vee} &= \|X(t)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X(s) \right\|_H^{\vee} + \left\| A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X}(s) \right\|_H^{\vee} - \vee \frac{1}{\vee} \frac{d}{dt} \|X(s)\|_H^{\vee} \right) ds \\ &= \|X(t)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X(s) \right\|_H^{\vee} + \left\| A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X}(s) \right\|_H^{\vee} \right) ds - \|X(s)\|_H^{\vee} \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &= \|X(t)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X(s) \right\|_H^{\vee} + \left\| A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X}(s) \right\|_H^{\vee} \right) ds - \|X(t_{i+1})\|_H^{\vee} + \|X(t_i)\|_H^{\vee} \\ &= \|X(t)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X(s) \right\|_H^{\vee} + \left\| A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X}(s) \right\|_H^{\vee} \right) ds - \|X(t_1)\|_H^{\vee} + \|X(t_0)\|_H^{\vee} - \\ &\quad \|X(t_2)\|_H^{\vee} + \|X(t_1)\|_H^{\vee} - \|X(t_3)\|_H^{\vee} + \|X(t_2)\|_H^{\vee} - \dots - \|X(t_{N-1})\|_H^{\vee} + \|X(t_{N-2})\|_H^{\vee} \\ &\quad - \|X(t_N)\|_H^{\vee} + \|X(t_{N-1})\|_H^{\vee} = \|X(\circ)\|_H^{\vee} + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\left\| A^{\frac{1}{\vee}} \Pi_i^{(q)} X \right\|_H^{\vee} + \left\| A^{-\frac{1}{\vee}} \dot{X} \right\|_H^{\vee} \right) ds \\ &= \|x\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^{\vee}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۱.۱.۵. فرم دوخطی (۳.۲) در تساوی های زیر برقرار است،

$$C_B := \sup_{\circ \neq Y \in \mathcal{Y}_{k,q} \times H} \sup_{\circ \neq X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(Y, X)}{|Y|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} = 1, \quad (2.5)$$

$$c_B := \inf_{\circ \neq Y \in \mathcal{Y}_{k,q} \times H} \sup_{\circ \neq X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(Y, X)}{|Y|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} = 1. \quad (3.5)$$

برهان. برای هر I_i تساوی زیر برقرار است،

$$\int_{I_i} \vee \langle Y(s), -\dot{X}(s) + A^* X(s) \rangle_{V^*} ds = \int_{I_i} \vee \langle Y(s), -\dot{X}(s) + A^* \Pi_i^{(q)} X(s) \rangle_{V^*} ds,$$

بنابراین می‌توانیم از نامساوی هولدر^۱ مانند اثبات قضیه ۲.۵.۲ استفاده کرده و (۲.۵) را بدست آوریم،

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}^*(Y, X)| &\leq \int_{I_i} |{}_V \langle Y(s), -\dot{X}(s) + AX(s) \rangle_{V^*}| ds + |\langle Y, X(t) \rangle_H| \\ &\leq \int_{I_i} \|A^{\frac{1}{p}} Y(s)\|_H \| -A^{-\frac{1}{p}} \dot{X}(s) + A^{\frac{1}{p}} X(s) \|_H ds + \|Y\|_H \|X(t)\|_H \\ &\leq |Y|_{\mathcal{Y}_H} \|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}} = |Y|_{\mathcal{Y}_H} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}} \end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که $C_B \leq 1$ ، از طرفی می‌دانیم $c_B \leq C_B$. اگر نشان دهیم $c_B \geq 1$ حکم برقرار است. برای نشان دادن $c_B \geq 1$ برای $Y_X, X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ را به شکل زیر انتخاب می‌کنیم،

$$\begin{aligned} Y_X &= (\Pi^{(q)} X - A^{-1} \dot{X}, X(t)) \\ |Y_X|_{\mathcal{Y}_H}^2 &= \|X(t)\|_H^2 + \|A^{\frac{1}{p}}(X - A^{-1} \dot{X})\|_{L^r((\cdot, t); H)}^2 = \|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 = |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 \end{aligned}$$

بنابراین عبارات زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^*(Y_X, X) &= \int_0^t \langle X(s) - A^{-1} \dot{X}(s), -\dot{X}(s) + AX(s) \rangle_H ds + \|X(s)\|_H^2 \\ &= \int_0^t \|A^{\frac{1}{p}} X(s) - A^{-\frac{1}{p}} X(t)\|_H^2 ds \|X(t)\|_H^2 = \|X\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}^2 = |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}} |Y|_{\mathcal{Y}_H} \end{aligned}$$

بنابراین $c_B \geq 1$. چون $c_B \leq C_B$ پس (۲.۵) و (۳.۵) را نتیجه می‌گیریم. $\square$

کران $\mathcal{F}$ را نسبت به نرم $|\cdot|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ در لم زیر بدست می‌آوریم،

لم ۲.۱.۵. اگر $f \in L^r((\cdot, T); \dot{H}^{-1})$ و $u_0 \in H$ ، آنگاه برای $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ ، نامساوی زیر برقرار است،

$$|\mathcal{F}(X)| \leq \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|f(s)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|f(s)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right) + \|u_0\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}.$$

برهان. برای $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ و برای هر زیربازه I_i عبارت زیر برقرار است،

$$\|X - \Pi_i^{(q)} X\|_{L^r(I_i; \dot{H}^{-1})}^2 \leq \|X - \Pi_i^{(\cdot)} X\|_{L^r(I_i; \dot{H}^{-1})}^2 \leq k_i^2 \|\dot{X}\|_{L^r(I_i; \dot{H}^{-1})}^2. \quad (4.5)$$

برای اثبات نامساوی $\|X - \Pi_i^{(\cdot)} X\|_{L^r(I_i; \dot{H}^{-1})}^2 \leq k_i^2 \|\dot{X}\|_{L^r(I_i; \dot{H}^{-1})}^2$ از نامساوی زیر استفاده می‌کنیم،

$$\|f - \Pi_h f\|_{L^p[a,b]} \leq C_i(b-a) \|f'\|_{L^p[a,b]}$$

^۱Holder

که با در نظر گرفتن $f = X$ ، $p = 2$ و $|I_i| = k_i$ نامساوی $\|X - \Pi_i^{(\circ)} X\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})}^2 \leq k_i^2 \|\dot{X}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})}^2$ ثابت می شود.

با توجه به تعریف $\mathcal{F}(X)$ و با اضافه و کم کردن عبارات زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left\langle f(s), X(s) - \Pi_i^{(q)} X(s) + \Pi_i^{(q)} X(s) \right\rangle_H ds + \langle u_\circ, X(\circ) \rangle_H \\ \mathcal{F}(X) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \left\langle f(s), \Pi_i^{(q)} X(s) \right\rangle_H ds + \int_{I_i} \left\langle f(s), X(s) - \Pi_i^{(q)} X(s) \right\rangle_H ds \right) + \langle u_\circ, X(\circ) \rangle_H \end{aligned}$$

با گرفتن قدرمطلق از رابطه بالا تساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(X)| &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|f\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})} \left\| \Pi_i^{(q)} X \right\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)} + \int_{I_i} \|f\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)} \left\| X - \Pi_i^{(q)} X \right\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})} \right) \\ &+ \|u_\circ\|_H \|X(\circ)\|_H \end{aligned}$$

با توجه به (۴.۵) نامساوی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(X)| &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|f\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})} \left\| \Pi_i^{(q)} X \right\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)} + \int_{I_i} \|f\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)} k_i \|\dot{X}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})} \right) \\ &+ \|u_\circ\|_H \|X(\circ)\|_H \end{aligned}$$

با توجه به اینکه تساوی زیر را داریم،

$$|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}} = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \left(\|\dot{X}\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \left\| \Pi_i^{(q)} X \right\|_{\dot{H}^1}^2 \right) ds + \|X(\circ)\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

پس نامساوی زیر حاصل می شود،

$$|\mathcal{F}(X)| \leq \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\|f\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})}^2 + k_i^2 \|f\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)}^2 \right) + \|u_\circ\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} |x|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$$

□

و ثابت کامل می شود.

لم قبل در حالت خاص به شکل زیر نشان داده می شود،

$$\|\mathcal{F}\|_{(\mathcal{X}_{k,q+1}, |\cdot|_{\mathcal{X}_{k,q+1}})^*} \leq \left(\|f\|_{L_T((\circ, T); \dot{H}^{-1})}^2 + k^2 \|f\|_{L_T((\circ, T); \dot{H}^1)}^2 + \|u_\circ\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

بنابراین قضیه زیر را خواهیم داشت،

قضیه ۲.۱.۵. اگر $f \in L_T((\circ, T); \dot{H}^1)$ و $u_\circ \in H$ باشد جواب منحصر بفرد $\hat{U} \in \mathcal{Y}_{k,q} \times H$ برای مساله نیمه گسسته وجود دارد و نامساوی زیر را داریم،

$$|\hat{U}|_{\mathcal{Y}_H} \leq \left(\|f\|_{L_T((\circ, T); \dot{H}^{-1})}^2 + k^2 \|f\|_{L_T((\circ, T); \dot{H}^1)}^2 + \|u_\circ\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

۲.۵ برآورد خطای پیشین

در اثبات قضیه ۱.۱.۴ از کران داری B^* نسبت به $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_H}$ و علاوه بر این با نرم هم‌ارز (۳.۳) بین $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_k}$ برای نشان دادن کران داری نسبت به $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_H}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_k}$ استفاده می‌کنیم. چون ثابت c_S برای نیمه گسسته، متناهی نیست مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. این مساله را با کران داری فرم دو خطی نسبت به $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ و نرم قوی‌تر روی $\mathcal{Y}$ حل خواهیم کرد.

لم ۱.۲.۵. برآورد کران داری زیر برای هر $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ و $y \in L_T((\cdot, t_n); \dot{H}^3) \times H$ به‌طوریکه $y_T = 0$ به‌شکل زیر می‌باشد،

$$|B^*(y, X)| \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|y\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|y\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}.$$

برهان. عبارتی که برای رسیدن به نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ نیاز به تغییر دارد شامل مشتق زمان نیست. عبارت زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \langle y, A^* X \rangle_H ds &= \int_{I_i} \langle Ay, X \rangle_H ds = \int_{I_i} \langle Ay, \Pi_i^{(q)} X + X - \Pi_i^{(q)} X \rangle_H ds \\ &= \int_{I_i} \langle Ay, \Pi_i^{(q)} X \rangle_H ds + \int_{I_i} \langle Ay, X - \Pi_i^{(q)} X \rangle_H ds \end{aligned}$$

حال اگر نرم گرفته و از (۴.۵) استفاده کنیم، چون نامساوی زیر را داریم،

$$\|X - \Pi_i^{(q)} X\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})}^2 \leq k_i^2 \|\dot{X}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})}^2$$

پس نامساوی زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_i} \langle y, A^* X \rangle_H ds \right| &\leq \|y\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)} \|\Pi_i^{(q)} X\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)} + k_i \|y\|_{L_T(I_i; \dot{H}^3)} \|\dot{X}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})} \\ &\leq \|y\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)}^2 \|\Pi_i^{(q)} X\|_{L_T(I_i; \dot{H}^1)}^2 + k_i^2 \|y\|_{L_T(I_i; \dot{H}^3)}^2 \|\dot{X}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{-1})}^2, \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}$ عبارت زیر برقرار است،

$$\left| \int_{I_i} \langle y, A^* X \rangle_H ds \right| \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|y\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|y\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}},$$

□

در نتیجه ادعا ثابت می‌شود، پس حکم برقرار است.

حال می‌توانیم جایگزینی برای قضیه شبه‌بهینگی در مورد نیمه گسسته داشته باشیم.

قضیه ۱.۲.۵. اگر u و $\hat{U}$ به ترتیب جواب‌های (۵.۲) و (۱.۵) باشند، سپس خطای $u - \hat{U}$ برای هر $Y_1 \in \mathcal{Y}_{k,q,3} := \{Y \in \mathcal{Y} : Y|_{I_i} \in \mathbb{P}^q[t] \otimes \dot{H}^3\}$ به‌شکل زیر می‌باشد،

$$|u - \hat{U}|_{\mathcal{Y}_H} \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. توجه داریم که رابطه تعامد برای هر $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ به شکل زیر برقرار است،

$$\mathcal{B}^*(u - \hat{U}, X) = 0,$$

به طوریکه برای هر $Y \in \mathcal{Y}_{k,q} \times H$ رابطه زیر را داریم،

$$\left| u - \hat{U} \right|_{\mathcal{Y}_H} \leq \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \left| \hat{U} - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} \leq \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(\hat{U} - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}}$$

همچنین تساوی زیر را داریم،

$$\mathcal{B}^*(\hat{U} - Y, X) = \mathcal{B}^*(u - Y, X) + \mathcal{B}^*(\hat{U} - u, X)$$

پس تساوی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} & \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(\hat{U} - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \\ &= \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X) + \mathcal{B}^*(\hat{U} - u, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \end{aligned}$$

از آنجایی که $\mathcal{B}^*(\hat{U} - u, X) = 0$ پس عبارت زیر را داریم،

$$\begin{aligned} & \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X) + \mathcal{B}^*(\hat{U} - u, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \\ &= \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \end{aligned}$$

در نتیجه عبارات زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \left| u - \hat{U} \right|_{\mathcal{Y}_H} &\leq \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \left| \hat{U} - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} \leq \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(\hat{U} - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \\ &= \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X) + \mathcal{B}^*(\hat{U} - u, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \\ &= \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \end{aligned}$$

نامساوی

$$\left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \left| \hat{U} - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} \leq \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(\hat{U} - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}},$$

از (۳.۵) بدست می آید، در حالی که تساوی زیر از متعامد بودن حاصل می شود،

$$\begin{aligned} & \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X) + \mathcal{B}^*(\hat{U} - u, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}} \\ &= \left| u - Y \right|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}}. \end{aligned}$$

اگر Y را طوری انتخاب کنیم که مولفه دوم آن برابر u_2 انتخاب کنیم به طوریکه در مورد نیمه گسسته، شدنی باشد یعنی $Y_2 - u_2 = 0$. بنابراین با توجه به لم ۱.۲.۵ نامساوی زیر را داریم،

$$|\mathcal{B}^*(u - Y, X)| \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}} |X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}} \quad (۵.۵)$$

و چون نامساوی زیر را داریم،

$$|u - \hat{U}|_{\mathcal{Y}_H} \leq |u - Y|_{\mathcal{Y}_H} + \sup_{X \in \mathcal{X}_{k,q+1}} \frac{\mathcal{B}^*(u - Y, X)}{|X|_{\mathcal{X}_{k,q+1}}}, \quad (۶.۵)$$

با جایگذاری (۵.۵) در (۶.۵) عبارت زیر را خواهیم داشت،

$$|u - \hat{U}|_{\mathcal{Y}_H} \leq |u - Y|_{\mathcal{Y}_H} + C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

همچنین طبق تعریف $|u - Y|_{\mathcal{Y}_H}$ این عبارت از عبارت زیر کوچکتر است،

$$C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

پس برای هر $Y_1 \in \mathcal{Y}_{k,q,3} := \{Y \in \mathcal{Y} : Y|_{I_i} \in \mathbb{P}^q[t] \otimes \dot{H}^3\}$ نامساوی زیر برقرار است،

$$|u - \hat{U}|_{\mathcal{Y}_H} \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^1}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^3}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

□

در این اثبات چون از نرم‌های مختلفی روی U و u در تبدیل $U = Ru$ استفاده می‌کنیم نمی‌توانیم از $\|I - R\| = \|R\|$ مانند اثبات قضیه ۱.۱.۴ استفاده کنیم.

ملاحظه ۱.۲.۵. چیزهایی که تا اینجا گفته شد تا زمانی که منظم بودن فضایی را انتقال دهد و روی جواب $u \in L_T((\cdot, T); \dot{H}^{\beta+1})$ کار می‌کند برقرار است. به آسانی دیده می‌شود که برای هر Y_1 در فضای $\mathcal{Y}_{k,q,\beta+3} := \{Y \in \mathcal{Y} : Y|_{I_i} \in \mathbb{P}^q[t] \otimes \dot{H}^{\beta+3}\}$ نامساوی زیر برقرار است،

$$\|u - \hat{U}\|_{L_T((\cdot, T); \dot{H}^{\beta+1}) \times \dot{H}^\beta} \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^{\beta+1}}^2 ds + k_i^2 \int_{I_i} \|u_1 - Y_1\|_{\dot{H}^{\beta+3}}^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

۳.۵ همگرایی از مرتبه $q + 1$

حال که چکیده ای از برآورد خطا را برای نیمه گسسته داریم، می توانیم به مدلی مشابه قضیه ۱.۳.۴ برسیم.

قضیه ۱.۳.۵. برای داده به اندازه کافی هموار، خطا در طرح نیمه گسسته (۱.۵)، برای $\beta \geq 0$ در نامساوی زیر صدق می کند،

$$\begin{aligned} & \|u_1 - \hat{U}_1\|_{L_T((\circ, T); \dot{H}^{\beta+1})} + \max_{i=1, \dots, N} \|u_2(t_i) - \hat{U}_2^{(i)}\|_{\dot{H}^\beta} \\ & \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} k_i^{\gamma(q+1)} \left(\|u_1^{(q)}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{\beta+\gamma})}^2 + \|u_1^{(q+1)}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{\beta+1})}^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

۴.۵ ابر همگرایی نقطه به نقطه از مرتبه $2(q + 1)$

اکنون می توانیم اثبات دقیقی برای قضیه ۱.۴.۴ ارائه دهیم، که براساس فرم واضح طرحی که توسط گسسته سازی زمانی که با فرمول اول مکان-زمان بدست آمده، نیست. مزیت اثبات واضح این است که برای هر q دلخواه برقرار است. هنگامی که قضیه ۱.۴.۴ براساس زمان پله ای برای فرمول اول مکان-زمان (۱.۲) بدست آید به آن روش کرنک-نیکلسون می گویند. به همگرایی با سرعت بیشتر ابرهمگرایی گفته می شود.

قضیه ۱.۴.۵. برای داده به اندازه کافی هموار که توسط جواب عددی (۱.۵) بدست آمد که در نقاط گره ای ابر همگراست، در صورتی که،

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \|u_2(t_n) - U_2^{(n)}\|_H \\ & \leq C k^{q+1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} k_i^{\gamma(q+1)} \left(\|u_1^{(q)}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{\gamma q+\delta})}^2 + \|u_1^{(q+1)}\|_{L_T(I_i; \dot{H}^{\gamma q+\gamma})}^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

یا،

$$\max_{n=1, \dots, N} \|u_2(t_n) - U_2^{(n)}\|_H \leq C k^{\gamma(q+1)} \left(\|f^{(q)}\|_{L_T((\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma})}^2 + \|u_{q, \circ}\|_{\dot{H}^{\gamma q+\gamma}}^2 \right), \quad (8.5)$$

در اینجا $u_{q, \circ}$ به صورت زیر تعریف شده است،

$$u_{q, \circ} := \sum_{k=0}^{q-1} (-A)^k f^{(q-1-k)}(\circ) + (-A)^q u_{\circ}.$$

برهان. مساله را روی $(\circ, t_n)$ با t_n دلخواه در علامت گذاری برای فضاها و فرم دوخطی در نظر می گیریم. رابطه تعامد زیر برای $e = u - \hat{U}$ برای هر $X \in \mathcal{X}_{k, q+1}$ برقرار است،

$$B^*(e, X) = 0, \quad (9.5)$$

حال مساله الحاقی زیر را در نظر می گیریم،

$$-\dot{z}(s) + Az(s) = 0, \quad V^* \text{ در}, \quad s \in (0, t_n),$$

$$z(t_n) = \varphi, \quad H \text{ در},$$

در اینجا φ عنصر دلخواه H است. فرمول بندی اول مکان-زمان این مساله در حالت پیوسته برای هر $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}_H$ به شکل زیر می باشد،

$$z \in \mathcal{X}: B^*(y, z) = \langle y_2, \varphi \rangle_H, \quad (10.5)$$

به این صورت که می دانیم رابطه زیر را داریم،

$$B^*: \mathcal{Y}_H \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$B^*(y, z) := \int_0^T V \langle y_1, -\dot{z} + Az \rangle_{V^*} ds + \langle y_2, z(T) \rangle_H,$$

اگر در (10.5) ، $y = (0, e_2)$ انتخاب کنیم رابطه زیر را داریم،

$$\langle e_2, \varphi \rangle_H = B^*(e, z),$$

و از رابطه تعامد (9.5) تساوی زیر برقرار است،

$$B^*(e, z) = B^*(e, z - X),$$

پس برای هر $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ رابطه زیر برقرار است،

$$\langle e_2, \varphi \rangle_H = B^*(e, z) = B^*(e, z - X).$$

عبارت زیر برقرار است،

$$|\langle e_2, \varphi \rangle_H| \leq \|e\|_{L_V((0, t_n); \dot{H}^{\beta+1}) \times \dot{H}^\beta} \|z - X\|_{L_V((0, t_n); \dot{H}^{1-\beta}) \cap H^1((0, t_n); \dot{H}^{1-\beta})}.$$

چون تساوی های زیر برقرارند،

$$|B^*(e, \varphi)| = |B^*(e, z - X)|,$$

$$|\langle e, \varphi \rangle_H| = |\langle e, z - X \rangle_H|,$$

$$|\langle e, \varphi \rangle_H| \leq \|e\| \|z - X\|,$$

برای عبارت دوم، $X \in \mathcal{X}_{k,q+1}$ را به صورت درونیابی استاندارد z به صورت زیر انتخاب می کنیم،

$$\|A^{q+1} z\|_{L_V((0, t_n); \dot{H}^{1-\beta})} = \|z\|_{L_V((0, t_n); \dot{H}^{1-\beta+(2q+2)}),}$$

$$\|A^{q+1} \dot{z}\|_{L_V((0, t_n); \dot{H}^{1-\beta})} = \|\dot{z}\|_{L_V((0, t_n); \dot{H}^{1-\beta+(2q+2)}),}$$

با توجه به قضیه ۱.۳.۵ روابط زیر را داریم،

$$\begin{aligned}
 & \|z - X\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{1-\beta}) \cap H^1((\circ, t_n); \dot{H}^{-1-\beta})} \\
 & \leq Ck^{q+1} \left(\|z^{(q+1)}\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{1-\beta})} + \|z^{(q+2)}\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{-1-\beta})} \right) \\
 & = Ck^{q+1} \left(\|A^{q+1}z\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{1-\beta})} + \|A^{q+1}\dot{z}\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{-1-\beta})} \right) \\
 & = Ck^{q+1} \left(\|z\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{1-\beta+(\gamma q+\gamma)})} + \|\dot{z}\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{-1-\beta+(\gamma q+\gamma)})} \right) \\
 & = Ck^{q+1} \left(\|z\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^1)} + \|\dot{z}\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{-1})} \right) \leq Ck^{q+1} \|\varphi\|_H,
 \end{aligned}$$

در اینجا $\beta = \gamma(q+1)$ انتخاب کرده و از یک کران استاندارد برای z استفاده می کنیم. بنابراین نامساوی زیر برقرار است،

$$\|e_{\gamma}\|_H \leq Ck^{q+1} \|e\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{\gamma(q+1)+1}) \times \dot{H}^{\gamma(q+1)}},$$

و توسط قضیه ۱.۳.۵ و n دلخواه، (۷.۵) را به صورت زیر بدست می آوریم،

$$\|u_{\gamma}(t_i) - U_{\gamma}^{(i)}\|_H \leq Ck^{q+1} \|e\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{\gamma(q+1)+1}) \times \dot{H}^{\gamma(q+1)}},$$

با توجه به قضیه ۱.۳.۵ نامساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned}
 & \max_{i=1, \dots, N} \|u_{\gamma}(t_i) - U_{\gamma}^{(i)}\|_{\dot{H}^{\beta}} \\
 & \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} k_i^{\gamma(q+1)} \left(\|u_{\gamma}^{(q)}\|_{L^{\gamma}((\circ, T); \dot{H}^{\beta+\gamma})}^{\gamma} + \|u_{\gamma}^{(q+1)}\|_{L^{\gamma}((\circ, T); \dot{H}^{\beta+1})}^{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}},
 \end{aligned}$$

پس با توجه به رابطه بالا و قرار دادن $\beta = \gamma q + \gamma$ رابطه (۷.۵) حاصل می شود. برای نشان دادن (۸.۵)، توجه می کنیم که از (۷.۵) کران غیر موضعی نتیجه می گیریم،

$$\max_{n=1, \dots, N} \|e_{\gamma}^{(n)}\|_H \leq Ck^{\gamma(q+1)} \left(\|u_{\gamma}^{(q)}\|_{L^{\gamma}((\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma})} + \|u_{\gamma}^{(q+1)}\|_{L^{\gamma}((\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma+1})} \right).$$

با توجه به علامت $u_q := u^{(q)}$ و با توجه به اینکه جواب فرمول بندی زمانی زیر است،

$$\dot{u}_q + Au_q = f^{(q)}, \quad t \in (\circ, T); \quad u_q(\circ) = u_{q,\circ},$$

می بینیم که کران داری زیر هم ارز $(\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma} \cap H^1((\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma+1})$ است، $u_q \in L^{\gamma}((\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma})$ است،

$$\|u^{(q)}\|_{L^{\gamma}((\circ, t_n); \dot{H}^{\gamma q+\gamma})} + \|u^{(q+1)}\|_{L^{\gamma}((\circ, T); \dot{H}^{\gamma q+\gamma+1})}.$$

طبق قضیه نظم فضایی، شرط کافی توسط $f^{(q)} \in L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})$ و $u_{q,\circ} \in \dot{H}^{2q+4}$ برای $\beta = 2q + 4$ به صورت زیر داده می شود،

$$\|u_q\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+5})}^2 + \|\dot{u}_q\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})}^2 \leq \|f^{(q)}\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})}^2 + \|u_{q,\circ}\|_{\dot{H}^{2q+4}}^2$$

و طبق ۱.۴.۵ عبارت زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \max_{n=1, \dots, N} \|e_\gamma^{(n)}\|_H &\leq Ck^{2(q+1)} \left(\|u_\gamma^{(q)}\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+5})} + \|u_\gamma^{(q+1)}\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})} \right) \\ &\leq Ck^{2(q+1)} \left(\|u_q\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+5})}^2 + \|\dot{u}_q\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})}^2 \right) \\ &\leq Ck^{2(q+1)} \left(\|f^{(q)}\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})}^2 + \|u_{q,\circ}\|_{\dot{H}^{2q+4}}^2 \right), \end{aligned}$$

بنابراین برآورد نهایی را بدست می آوریم،

$$\max_{n=1, \dots, N} \|e_\gamma^{(n)}\|_H \leq Ck^{2(q+1)} \left(\|f^{(q)}\|_{L^2((\circ, T); \dot{H}^{2q+3})}^2 + \|u_{q,\circ}\|_{\dot{H}^{2q+4}}^2 \right),$$

□

که اثبات کامل می شود.

ملاحظه ۱.۴.۵. قضیه ۱.۴.۵ یکی از مزایای عامل اضافی k^{q+1} را نشان می دهد که از برهان دوگانگی و الحاقی از درجه $q+1$ در نرم $H^1(I_i; \dot{H}^s)$ که آبین-نیتسچ تریک^۲ نام دارد بدست می آید.

^۲ Aubin-Nitsche trick

فصل ۶

آزمایش‌های عددی

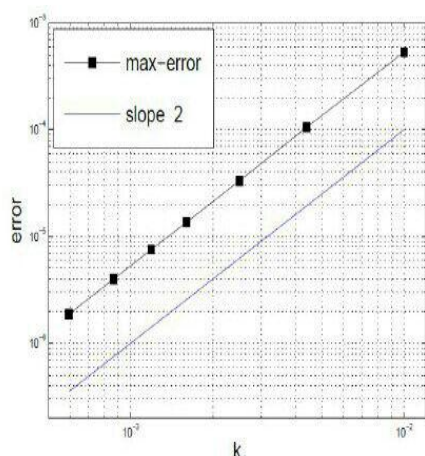
چون هدف اصلی گسترش دادن زمانی مساله است، آزمایش‌های عددی به دامنه‌های یک بعدی و دو بعدی محدود می‌شود. برای دو مساله مختلف درستی برآوردهای پیشین آزمایش می‌شود. در هر دو مورد درستی شرط (۵.۳) با در نظر گرفتن $k = h^2$ اعمال می‌شود.

۱.۶ آزمایش یک بعدی

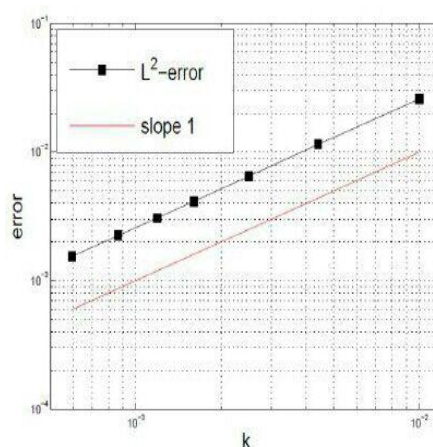
طرح ارائه شده برای مساله زیر روی دامنه مکان-زمان $(0, 1) \times (0, 1]$ آزمایش می‌شود،

$$\begin{aligned} \dot{u}(\xi, t) - u''(\xi, t) &= 2\pi \sin(2\pi\xi) \left(\cos(2\pi t) + 2\pi \sin(2\pi t) \right), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ u(\xi, 0) &= 0, \quad \xi \in [0, 1], \end{aligned} \tag{۱.۶}$$

که دارای جواب $u(\xi, t) = \sin(2\pi\xi) \sin(\pi t)$ است.



(ب) ابرهمگرایی



(آ) کاهش خطا

شکل ۱.۶: آزمایش‌های عددی مساله (۱.۶)

شکل ۱.۶ (آ) کاهش خطای نرمال شده توسط نرم سمت راست برای جواب عددی (۱.۶) را نشان می‌دهد. با توجه به جواب دقیق مساله (۱.۶) و جواب تقریبی که با استفاده از شیوه ارائه شده بدست می‌آید، خطا نسبت به نرم L_2 محاسبه می‌شود، که با بدست آوردن خطا نشان داده می‌شود در هر مرحله خطا کاهش می‌یابد.

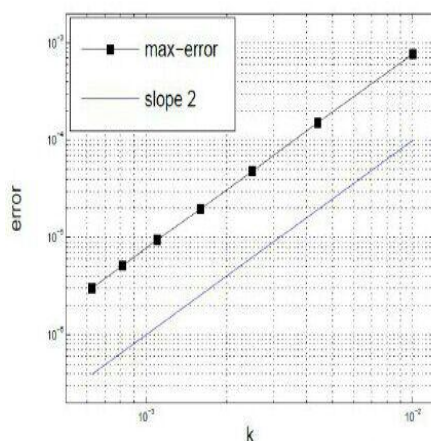
در شکل ۱.۶ (ب) نشان داده می‌شود که جز دوم خطا که در قضیه ۱.۴.۵ برقرار است، ابرهمگرا کران دار است. در این صورت خطا نسبت به جز دوم شیوه ارائه شده محاسبه می‌شود، که در هر مرحله خطا کاهش می‌یابد که در مقایسه با محاسبه نرم L_2 کاهش خطا بیشتر می‌باشد.

۲.۶ آزمایش دو بعدی

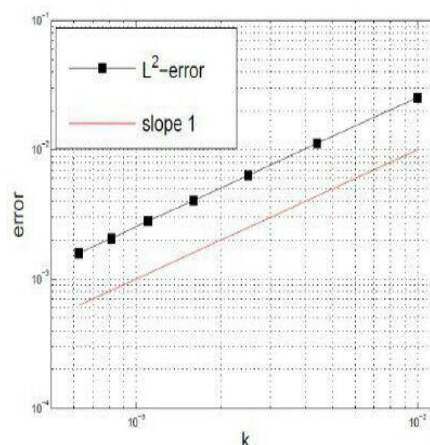
طرح ارائه شده برای مساله زیر روی دامنه مکان-زمان $(0, 1] \times (0, 1)^2$ آزمایش می‌شود،

$$\begin{aligned} u_t(\xi, \eta, t) - \Delta u(\xi, \eta, t) &= \pi \sin(\pi\xi) \sin(\pi\eta) (\cos(\pi t) + 2\pi \sin(\pi t)), \\ u(0, \eta, t) &= u(1, \eta, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \eta \in (0, 1), \\ u(\xi, 0, t) &= u(\xi, 1, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \xi \in (0, 1), \\ u(\xi, \eta, 0) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in [0, 1]^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

که دارای جواب $u(\xi, \eta, t) = \sin(\pi\xi) \sin(\pi\eta) \sin(\pi t)$



(ب) ابرهمگرایی

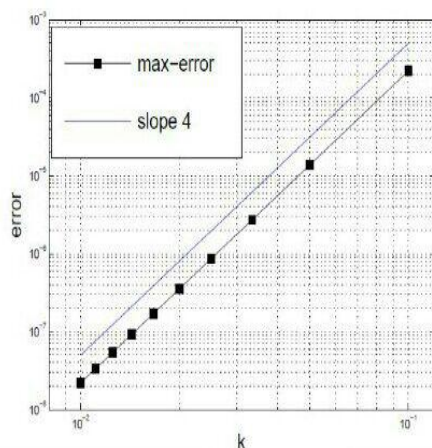


(آ) کاهش خطا

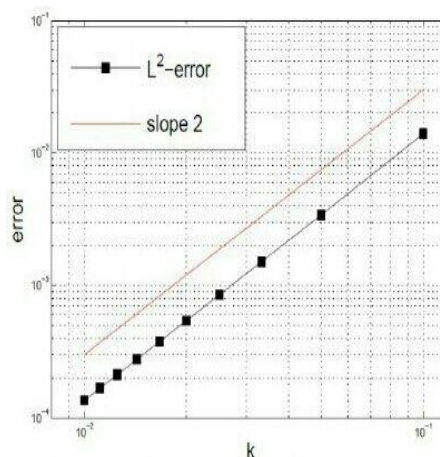
شکل ۲.۶: آزمایش‌های عددی مساله (۲.۶)

شکل‌های ۲.۶(آ) و ۲.۶(ب) نتایج بدست آمده در مورد دامنه یک بعدی را نشان می‌دهند.

۳.۶ آزمایش یک بعدی ، $q = 1$



(ب) ابرهمگرایی



(آ) کاهش خطا

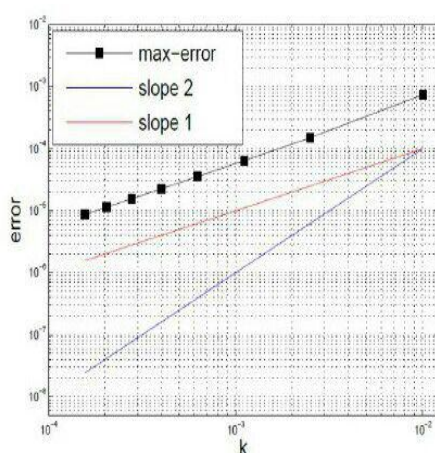
شکل ۳.۶: آزمایش‌های عددی مساله (۱.۶)، $q = 1$

شکل‌های ۳.۶(آ) و ۳.۶(ب) نتایج همگرایی و ابرهمگرایی هنگامی که از طرح ارائه شده در حل (۱.۶) استفاده می‌شود نشان می‌دهند. نرخ همگرایی بهینه و ثابت با پیش‌بینی ماست. شکل ۳.۶(آ) کاهش خطا را نسبت به نرم L_2 برای روش ارائه شده نشان می‌دهد. همچنین

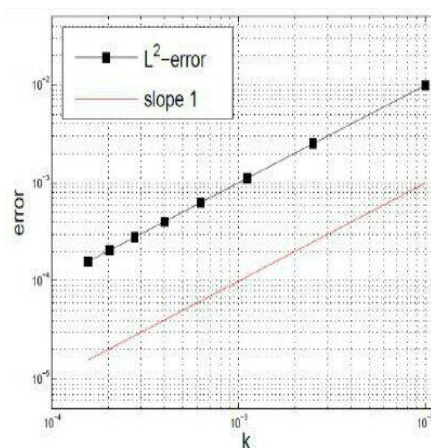
با محاسبه خطا نسبت به جز دوم خطا که در قضیه ۱.۴.۵ برقرار است شکل ۳.۶(ب) نشان می‌دهد که خطا نسبت نرم L_2 کاهش بیشتری می‌یابد پس شیوه ارائه شده بهینه خواهد بود.

۴.۶ آزمایش یک بعدی با نظم پایین

رفتار خطا وقتی جواب هموار نیست بررسی می‌شود. یک مساله به‌طوری که u مشتق اول زمان دارد به‌طوری‌که مربع انتگرال‌پذیر است اما مشتق دوم ندارد انتخاب می‌کنیم. u را برابر $\left|t - \frac{\pi}{5}\right|^{\frac{r-\varepsilon}{r}} \sin(\pi\xi)$ در نظر می‌گیریم. در این مورد ε را مساوی $\frac{1}{5}$ قرار می‌دهیم.



(ب) ابرهمگرا نیست



(آ) کاهش خطا

شکل ۴.۶: آزمایش‌های عددی برای یک مساله با نظم پایین سمت راست

در شکل‌های ۴.۶(آ) و ۴.۶(ب) نتایج همگرایی و ابرهمگرایی وقتی از این شیوه در حل مساله استفاده می‌شود دیده می‌شود. نرخ همگرایی برای جز اول خطا بهینه و ثابت با پیش‌بینی‌های ماست. در این مورد جز دوم خطا ابرهمگرا نیست. در شکل ۴.۶(آ) نشان داده می‌شود خطایی که با شیوه ارائه شده نسبت به نرم L_2 محاسبه می‌شود در هر مرحله کاهش می‌یابد. اما در شکل ۴.۶(ب) خطایی که با جز دوم شیوه ارائه شده بدست می‌آید ابرهمگرا نیست. بنابراین برای مساله با نظم پایین ابرهمگرایی برقرار نخواهد بود.

در نتیجه نشان داده شد که ابرهمگرایی در نقاط شبکه زمانی وجود دارد و شیوه‌ای که ارائه شده نسبت به نرم استفاده شده در اندازه‌گیری خطا بهینه است.

مراجع

- [۱] بابایی ع، میامئی ا، (۱۳۶۵)، ”معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها“ جلد اول، چاپ دوم، مرکز نشر دانشگاهی تهران، صفحه ۱.
- [۲] عالمزاده ع، محمدزاده م، (۱۳۷۰)، ”معادلات دیفرانسیل جزئی برای علوم مهندسی“ جلد اول، چاپ اول، موسسه نشر علوم نوین، صفحه ۶.
- [۳] شهشهانی س، (۱۳۵۸)، ”توپولوژی از دیدگاه حساب دیفرانسیل“ جلد اول، چاپ دوم، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، صفحه ۱۱-۱۲.
- [۴] یوسفی ب، صالحی ب، (۱۳۷۷)، ”مقدمه‌ای بر فضای هیلبرت“ جلد اول، چاپ دوم، مرکز نشر دانشگاه شیراز، صفحه ۱۵.
- [۵] بابلیان ا، مالک‌نژاد خ، (۱۳۷۱)، ”محاسبات عددی“ جلد اول، چاپ دوم، موسسه تحقیقاتی و انتشاراتی نور، صفحه ۳۳۴-۳۳۸.
- [۶] عالمزاده ع، (۱۳۸۱)، ”جبر مجرد“ جلد اول، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، صفحه ۲۴۱.
- [۷] عباسی تشنیزی م، (۱۳۹۲)، پایان‌نامه ارشد: ”تقریب‌های تفاضلات متناهی برای حل عددی مسائل معکوس سهموی“، دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان.
- [8] Andreev R. (2012), ” Stability of sparse space-time finite element discretizations of linear parabolic evolution equations”**IMA Journal of Numerical Analysis**, 33,1, pp 242-260.
- [9] Andreev R. (2016), ” On long time integration of the heat equation”**Calcolo**, 53,1, pp 19-34.
- [10] Babuska I. and Aziz A. (1972), ” Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method” **The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applicaions to Partial Differential Equations**, pp 1-359.
- [11] Babuska I. and Janik T. (1989), ” The h-p version of the finite element method for parabolic equations. Part I. The p-version in time”**Numerical Methods for Partial Differential Equations**, 5,4, pp 363-399.

-
- [12] Babuska I. and Janik T. (1990), "The h-p version of the finite element method for parabolic equations. II. The h-p version in time" **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, 6,4, pp 343-369.
- [13] Cioico P.A, Dahlke S, Dohring N, Friedrich U, Kinzel S, Lindner F, Raasch T, Ritter K, and Schilling R.L. (2014), "Convergence analysis of spatially adaptive Rothe methods" **Foundations of Computational Mathematics**, 14,5, pp 863-912.
- [14] Chegini N. and Stevenson R. (2011), "Adaptive wavelet schemes for parabolic problems: sparse matrices and numerical results" **SIAM journal on numerical analysis**, 49,1, pp 182-212.
- [15] Larsson S. and Molteni M. (2016), "A weak space-time formulation for the linear stochastic heat equation" **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, 3,2, pp 787-806.
- [16] Mollet C. (2014), "Stability of Petrov–Galerkin discretizations: Application to the space-time weak formulation for parabolic evolution problems" **Computational Methods in Applied Mathematics**, 14,2, pp 231-255.
- [17] Schwab Ch. and Suli E. (2013), "Adaptive Galerkin approximation algorithms for Kolmogorov equations in infinite dimensions" **Stochastic Partial Differential Equations: Analysis and Computations**, 1,1, pp 483-493.
- [18] Schwab Ch. and Stevenson R. (2009), "Space-time adaptive wavelet methods for parabolic evolution problems" **Mathematics of Computation**, 78,267, pp 1293-1318.
- [19] Urban K. and Pater A.T. (2014), "An improved error bound for reduced basis approximation of linear parabolic problems" **Mathematics of Computation**, 83,288, pp 1599-1615.
- [20] Xu J. and Zikatanov L. (2003), "Some observations on Babuška and Brezzi theories" **Numerische Mathematik**, 94. 1, pp 195-202.
- [21] Leonard. and Edward I. and Sundaresan K. (1974), "Geometry of Lebesgue-Bochner function spaces—smoothness" **Transactions of the American Mathematical Society**, 198, pp 229-251.
- [22] Mollet. and Christian. (2014), "Stability of Petrov–Galerkin discretizations: Application to the space-time weak formulation for parabolic evolution problems" **Computational Methods in Applied Mathematics**, 14,2, pp 231-255.

- [23] Antoine J.P. (1969), " Dirac formalism and symmetry problems in quantum mechanics. I. General Dirac formalism" **Journal of Mathematical Physics**, 10,1, pp 53-69.
- [24] Pinkus. and Allan. (2004), " Density methods and results in approximation theory" **Banach Center Publications**, 64, pp 173-192.
- [25] Heil. and Christophher. (2006), " Banach and Hilbert Space" **Journal of Approximation Theory**, 134,2, pp 1-13.
- [26] Larsson S. and Molteni M. (2017), " A weak space-time formulation for the linear stochastic heat equation" **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, 3,2, pp 787-806.
- [27] Larsson S. (2006), " Semilinear parabolic partial differential equations: theory, approximation, and application" **New trends in the mathematical and computer sciences**, 3, pp 153-194.
- [28] Crank J and Nicolson P. (1996), " A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type" **Advances in Computational Mathematics**, 6,1, pp 207-226.
- [29] Antoine J-P. (1969), " Dirac formalism and symmetry problems in quantum mechanics. I. General Dirac formalism" **Journal of Mathematical Physics**, 10,1, pp 53-69.
- [30] Ern A. and Guermond J.L. (2004), "**Theory and Practice of Finite Elements**", 159. 1, New York, pp. 120-230.
- [31] Thomee V. (1984), "**Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems**", 1054. 1, Berlin, pp.279-272.
- [32] Awodey. and Steve. (2010), "**Category theory**", Oxford University Press, pp. 11.
- [33] Eriksson K. (1996), "**Computational differential equations**", 1. 1, Cambridge University Press, pp. 218.
- [34] Larsson S. and Thom V. (2008), "**Partial differential equations with numerical methods**", 45. 1, pp. 37.
- [35] Tu L. W. (1971), "**An Introduction to Manifolds**", 2. 1, Tufts University, pp. 25.
- [36] Quarteroni A. and Quarteroni S. (2009), "**Numerical models for differential problems**", 2. 1, pp. 11-29.

-
- [37] Rudin W. (1964), "**Principles of mathematical analysis**", 3. 1, New York, pp. 1-22.
- [38] Blanchard, Philippe and Bruning. (2003), "**Mathematical Methods in Physics**", 1. 1, Birkhauser Boston , pp. 83-97.
- [39] Andreev R.,(2012), PhD thesis, "Stability of space-time Petrov-Galerkin discretizations for parabolic evolution equations", ETH Zurich.
- [40] Tantardini F.,(2013), PhD thesis, "Quasi-Optimality in the Backward Euler-Galerkin Method for Linear Parabolic Problems", Tesi di dottorato, University degli Studi di Milano.
- [41] Andreev, and Roman, (2012), PhD thesis, "Stability of space-time Petrov-Galerkin discretizations for parabolic evolution equations".

Aabstract

We investigate a weak space-time formulation of the heat equation and its use for the construction of a numerical scheme. The formulation is based on a known weak space-time formulation, with the difference that a pointwise component of the solution, which in other works is usually neglected, is now kept. We investigate the role of such a component by first using it to obtain a pointwise bound on the solution and then deploying it to construct a numerical scheme. The scheme obtained, besides being quasi-optimal in the L_2 sense, is also pointwise superconvergent in the temporal nodes. We prove a priori error estimates and we present numerical experiments to empirically support our findings.

keywords: inf-sup, space-time, superconvergence, quasi-optimality, finite element, error estimate, Petrov-Galerkin



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Numerical Analysis

**Numerical solution of parabolic based on a
weak space-time formulation**

By: Munes Vafaeizadeh

Supervisor

Ali Mesforush

Advisor

Hojat Ahsani tehrani

January 2018