

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدايتنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایداری سیستم های خطی تاخیری پیوسته با دو تاخیر ورودی

نگارنده: راویه رحیمی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

دی ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **راویه رحیمی** با شماره دانشجویی **۹۴۰۷۸۵۴** رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان **پایداری سیستم های خطی تاخیری پیوسته با دو تاخیر ورودی** که در تاریخ **۹۶/۱۰/۳۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ مردود ☒ قبول (با درجه علمی خوب...)			
نوع تحقیق: ☐ عملی ☒ نظری			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۳- استاد مشاور	دکتر علی مس فروش	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سمیه مغاری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی قوتمند جزی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمد هادی نوری اسکندری	استادیار	



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۹۶/۱۰/۳۰

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع

مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم...

موباشان سپید شد تا من رو سپید شوم...

عاشقانه سوختند تا کرامت بخش وجودم و روشنگر راهم باشند...

راستی قائم در شکستی قاتلان تجلی یافت...

پدر عزیزم
مادر مهربانم

و
معلمان گرانمایم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه‌ی درخت پر بارشان وجودی بهم و از ریشه‌ی آن ها شاخ و برگ
گیرم و از سایه‌ی وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. و این نشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم
چرا که این دو وجود پس از پروردگارم بوده اند که دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پرفراز و نشیب به من آموختند. حال
این برگه سبزی است تحفه‌ی دویش و تقدیم آنان...

سپاس‌گزاری...

خدای عزیزم تو را بی‌نهایت دوست دارم، تویی که همواره با من بوده‌ای و شاهد و ناظر تمامی زندگی‌ام بوده‌ای، خداوند دوست‌داشتنی‌ام از من بکسر هر آنچه تویی مهربان و عزیز را از من می‌گیری. خدایا تمام تقدیر و شکرم برای توست...

از استاد کرانقدر جناب آقای دکتر احسنی طهرانی که دوستانه در تمامی مراحل انجام این مطالعه مروری نمودند کمال تشکر را دارم. همچنین از استاد مشاور دکتر مس فروش و داوران عزیز جناب آقای دکتر نورری و دکتر قوتمند که زحمات

مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند کمال قدر دانی را به غل می‌آورم.

از پدر مهربانم و مادر عزیزم به پاس حمایت‌های بی‌دینشان سپاس‌گزارم.

از خداوند منان سلامتی و توفیق روزافزون همه‌ی این عزیزان را خواهم.

راویہ رحیمی
دی ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **راویه رحیمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **پایداری سیستم های خطی تاخیری پیوسته با دو تاخیر ورودی**، تحت راهنمایی **حجت احسنی طهرانی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

راویه رحیمی

دی ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، روشی جدید که در سال های اخیر برای کنترل سیستم هایی از معادلات دیفرانسیل تک تاخیره و پایداری سازی آن ها با استفاده از تابع لامبرت مطرح شده را معرفی می کنیم. به این ترتیب روشی جدید برای طراحی کنترل کننده به وسیله تخصیص مقدار ویژه به همراه چند مثال ارائه می شود. با استفاده از این روش می توان یک زیرمجموعه از مقدارهای ویژه را به موقعیت های مطلوب انتقال داد. برای سیستمی که توسط معادلات دیفرانسیل تاخیری نشان داده می شود، جواب سیستم بر اساس تابع لامبرت بدست می آید و پایداری بررسی می شود. اگر سیستم پایدار نباشد، بعد از بررسی کنترل پذیری سیستم، یک پسخورد پایدارکننده به وسیله تخصیص مقدارهای ویژه طراحی می شود و سرانجام، سیستم حلقه بسته می تواند پایدار شود. در ادامه بازه تاخیر زمانی برای اینکه سیستم پایدار باقی بماند را از معیار راث-هورویتز تعیین می نماییم و سپس معیارهای پایداری سیستم تک تاخیره را از روش نامساوی های ماتریس خطی بررسی می کنیم. در نهایت پایداری سیستم های خطی با دو تاخیر زمانی را بیان می نماییم. در این فصل دو تاخیر متغیر با زمان در ورودی و دو تاخیر ثابت و متغیر با زمان در متغیر حالت را مورد بررسی قرار می دهیم. در این بخش، باید تابع لیاپانوف مناسب را برای سیستم های با دو تاخیر زمانی تعریف کنیم و سپس نشان دهیم که تابع لیاپانوف ایجاد شده، معین مثبت و همچنین مشتق آن معین منفی می باشد. برای برقراری این دو شرط، نامساوی های ماتریس خطی (LMIs) ایجاد می گردند که پایداری سیستم های با دو تاخیر زمانی را تضمین می کنند. در این پایان نامه نیز، از روش نامساوی های ماتریس خطی برای بررسی پایداری مجانبی استفاده می کنیم و مثال هایی را ارائه می دهیم. این روش با نرم افزار MATLAB قابل تحلیل است.

کلمات کلیدی: سیستم کنترل خطی، پایداری، تابع لامبرت، تاخیر زمانی، تخصیص مقدار ویژه، کنترل کننده پسخورد، معادلات دیفرانسیل تاخیری، تابع لیاپانوف، نامساوی ماتریس خطی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

ف

فهرست جداول

ق

۱ تعاریف و پیش‌نیازها

۱.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای ریاضی

۲.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل

۱.۲.۱ حل معادلات فضای حالت

۲ سیستم‌های کنترل خطی

۱.۲ کنترل‌پذیری

۲.۲ لیاپانوف

۳.۲ نامساوی ماتریس خطی

۱.۳.۲ خواص نامساوی ماتریسی

۲.۳.۲ جعبه ابزار LMI در نرم‌افزار MATLAB

۴.۲ آزمون پایداری

۵.۲ کنترل بهینه H^∞ برای تعیین یک کنترل پایدارساز

۳ کنترل سیستم خطی پیوسته زمانی با یک تاخیر زمانی

۱.۳ مقدمه

۲.۳ معادلات دیفرانسیل با تاخیر زمانی

۳.۳ تابع لامبرت

۴.۳ سیستم‌های تاخیری

۵.۳ بدست آوردن جواب سیستم‌های تاخیری به وسیله تابع لامبرت

۱.۵.۳ سیستم‌های همگن

۶.۳ بررسی پایداری سیستم‌های تاخیری به وسیله تابع لامبرت

۱.۶.۳ پایداری

۷.۳	تخصیص مقدار ویژه به وسیله تابع لامبرت برای کنترل سیستم‌های تاخیر	۳۹
۱.۷.۳	تخصیص مقدار ویژه	۴۰
۲.۷.۳	طراحی کنترل کننده پسخورد	۴۱
۸.۳	آزمون پایداری	۵۱
۱.۸.۳	سیستم‌هایی با تاخیر ثابت در متغیر حالت	۵۱
۲.۸.۳	معیار راث هورویتز	۵۴
۳.۸.۳	سیستم‌های با تاخیر متغیر با زمان در متغیر حالت	۵۸
۴	سیستم‌های کنترل خطی با دو تاخیر زمانی	۶۵
۱.۴	مقدمه	۶۵
۲.۴	سیستم‌هایی با تاخیر متغیر با زمان در ورودی	۶۶
۱.۲.۴	معرفی سیستم کنترل شبکه با دو تاخیر	۶۶
۲.۲.۴	تحلیل پایداری	۶۷
۳.۴	سیستم‌هایی با دو تاخیر ثابت در متغیر حالت	۸۰
۴.۴	سیستم‌هایی با دو تاخیر متغیر با زمان در متغیر حالت	۸۳
۹۳	مراجع	
۹۹	آ برنامه‌نویسی	
۱۲۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۲۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۷	پایدار مجانبی و لیاپانوف	۱.۱
۲۶	آونگ ساده	۱.۳
۲۷	طرح ساده از سیستم دوش	۲.۳
۲۸	تصاویر شاخه‌های تابع لامبرت $W_k = Re(W_k) + iIm(W_k)$	۳.۳
۲۹	مقدارهای حقیقی شاخه $k = 0$ و $k = -1$ از تابع لامبرت	۴.۳
۴۳	طیف ویژه با کنترل‌کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از تقریب پاده	۵.۳
۴۴	طیف ویژه با کنترل‌کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از روش خطی	۶.۳
	طیف ویژه با کنترل‌کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از روش تابع	۷.۳
۴۵	لامبرت	
۴۸	پاسخ سیستم بعد از به کار بردن پسخورد $K = [5/1845 \quad -4/9190]$	۸.۳
۵۱	پاسخ سیستم بعد از به کار بردن پسخورد $K = [-0.760 \quad -1/6548]$	۹.۳
۶۰	رفتار سیستم با تاخیر در متغیر حالت برای مثال (۳.۸.۳)	۱۰.۳
۶۴	رفتار سیستم برای مثال (۴.۸.۳)	۱۱.۳
۷۹	واکنش حالت سیستم برای مثال (۲.۲.۴)	۱.۴
۸۰	واکنش حالت سیستم برای مثال (۳.۲.۴)	۲.۴
۸۷	رفتار سیستم برای مثال (۱.۴.۴)	۳.۴

فهرست جداول

۱.۳	مقادیر ویژه محاسبه شده برای سیستم (۶۴.۳) با $a = 1, a_d = 2, h = 1s$	۴۲
	و $K = -1/1$	
۲.۳	مقادیر ویژه محاسبه شده برای سیستم ۸۳.۳ با $a = 1, a_d = -1, h = 1s$	۴۳
	و $K = 0/7183$	
۳.۳	مقادیر ویژه محاسبه شده برای سیستم (۸۳.۳) با $a = 1, a_d = -1, h = 1s$	۴۵
	و $K = -3/5978$	
۱.۴	کران بالای h_2 برای h_1 های مختلف	۸۹

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ تعاریف و پیش نیازهای ریاضی

تعریف ۱.۱.۱. ماتریس $A_{n \times n}$ را در نظر بگیرید. اسکالر λ را یک مقدار ویژه^۱ ماتریس A می نامند اگر یک بردار غیر صفر X وجود داشته باشد طوری که $AX = \lambda X$ را برآورده سازد. به بردار غیر صفر X در اینجا بردار ویژه^۲ ماتریس A متناظر با مقدار ویژه λ می نامند. معادله $AX = \lambda X$ را می توان بصورت زیر نوشت،

$$(A - \lambda I)X = 0, \quad (1.1)$$

برای هر λ مشخص شده، معادله (۱.۱) یک دستگاه معادلات خطی همگن است. λ یک مقدار ویژه از ماتریس A است اگر و فقط اگر پاسخ معادله $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد. این معادله یک چندجمله ای از درجه n است و آن را معادله مشخصه^۳ ماتریس A می نامند.

یکی از کاربردهای مهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس های مربعی است.

^۱Eigenvalue

^۲Eigenvector

^۳Characteristic equation

تعریف ۲.۱.۱. ماتریس $A_{n \times n}$ را پوچ توان^۴ گویند، هرگاه عدد طبیعی مانند m وجود داشته باشد که $A^m = 0$. در این حالت کوچکترین عدد m که در رابطه $A^m = 0$ صدق کند را پوچی ماتریس A می گوئیم و با نماد $m = \text{null}(A)$ نشان می دهیم [۱].

همچنین یادآور می شویم که برای محاسبه پوچی^۵ ماتریس A می توان رابطه زیر را به کار برد،

$$\text{null}(A) = n - \text{rank}(A), \quad (2.1)$$

که در آن $\text{rank}(A)$ رتبه ماتریس A را نشان می دهد.

تعریف ۳.۱.۱. یک مجموعه محدب است اگر پاره خط واصل بین هر دو نقطه که در این مجموعه قرار دارند نیز، در مجموعه قرار داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ (تقریب پاده^۶). فرض کنید $u(t)$ تابع تحلیلی با سری مک لورن زیر باشد،

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

آنگاه تقریب پاده برای $u(t)$ از مرتبه $[L, M]$ که با $[L, M]u(t)$ نشان داده می شود بصورت زیر می باشد،

$$[L, M]u(t) = \frac{P_L(t)}{Q_M(t)} = \frac{p_0 + p_1 t + \dots + p_L t^L}{1 + q_1 t + \dots + q_M t^M} = \frac{\sum_{n=0}^L p_n t^n}{\sum_{n=0}^M q_n t^n} \quad (4.1)$$

که در آن $q_0 = 1$ در نظر می گیریم، به علاوه صورت و مخرج هیچ عامل مشترکی ندارند. در اینجا داریم:

$$u(t) \simeq \sum_{n=0}^{L+M} u_n t^n, \quad (5.1)$$

$$u(t) - [L, M]u(t) = O(t^{L+M+1}) \quad (6.1)$$

از (۶.۱) داریم،

$$u(t) \sum_{n=0}^M q_n t^n - \sum_{n=0}^L p_n t^n = O(t^{L+M+1}) \quad (7.1)$$

^۴ Nilpotent

^۵ Null

^۶ Pade Approximation

از (۷.۱) سیستم‌های جبری خطی زیر را داریم،

$$\begin{cases} u_L q_1 + \dots + u_{L-M+1} q_M = -u_{L+1} \\ u_{L+1} q_1 + \dots + u_{L-M+2} q_M = -u_{L+2} \\ \vdots \\ u_{L+M+1} q_1 + \dots + u_L q_M = -u_{L+M} \end{cases} \quad (۸.۱)$$

$$\begin{cases} p_0 = u_0 \\ p_1 = u_1 + u_0 q_0 \\ \vdots \\ p_L = u_L + u_{L-1} q_1 + \dots + u_0 q_L \end{cases} \quad (۹.۱)$$

از (۸.۱)، ابتدا همه ضرایب q_n ، $1 \leq n \leq L$ را محاسبه می‌کنیم. سپس ضرایب p_n ، $0 \leq n \leq L$ را از (۹.۱) بدست می‌آوریم [۳۹].

۲.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل

در روش‌های مبتنی بر کنترل کلاسیک، مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌ها بر اساس تابع تبدیل^۷ سیستم صورت می‌گیرد که این تابع ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم را بیان می‌کند. اما در روش‌های مبتنی بر کنترل مدرن، مدل‌سازی سیستم بر اساس پایه فضای حالت^۸ است. از جمله مزایای این نوع مدل‌سازی، قابلیت استفاده از آن برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی (MIMO)^۹، سیستم‌های خطی، غیر خطی و تغییرپذیر با زمان^{۱۰} می‌باشد. صورت کلی معادلات فضای حالت به شکل زیر است

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \end{cases} \quad (۱۰.۱)$$

که در آن $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ ورودی‌های سیستم و $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ متغیرهای حالت سیستم می‌باشند. خروجی‌های $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ سیستم را می‌توان به شکل زیر بیان

^۷ Transfer Function

^۸ State Space

^۹ Multi Input-Multi Output

^{۱۰} Time Varying

نمود،

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \end{cases} \quad (11.1)$$

تعریف می‌کنیم،

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

به این ترتیب معادلات (۱۰.۱) و (۱۱.۱) به شکل زیر در می‌آیند،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ y(t) = g(x, u, t), \end{cases} \quad (12.1)$$

معادله اول معادله حالت و معادله دوم معادله خروجی نام دارد. اگر تابع f یا g شامل t باشند، سیستم متغیر با زمان است.

در صورتیکه توابع $f(x, u, t)$ و $g(x, u, t)$ خطی باشند، معادله (۱۲.۱) بصورت زیر حاصل می‌گردد،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (13.1)$$

که در آن $A(t)$ ماتریس حالت، $B(t)$ ماتریس ورودی، $C(t)$ ماتریس خروجی و $D(t)$ ماتریسی است که ارتباط مستقیم بین ورودی و خروجی را نشان می‌دهد. در حالت کلی، f و g توابع

غیرخطی متغیر با زمان هستند که نحوه ارتباط بردارهای حالت، ورودی و خروجی را نشان می‌دهند. اگر در توابع f و g ، زمان t به‌طور صریح وارد نشود، سیستم خطی مستقل از زمان (ناوردای زمانی^{۱۱}) است. در این صورت معادله (۱۳.۱) به شکل زیر ساده می‌شود،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (14.1)$$

معادله اول، معادله حالت یک سیستم خطی مستقل از زمان است و معادله دوم، معادله خروجی این سیستم است [۴۰].

متغیرهای حالت در یک سیستم می‌تواند تعبیر فیزیکی داشته باشد و قابل اندازه‌گیری توسط حسگر^{۱۲} باشد مانند ولتاژ، جریان، دما، سرعت، فشار و جابجایی و نیز می‌تواند کاملاً ریاضی باشد و تعبیر فیزیکی نداشته باشد و علت استفاده از آن‌ها فقط برای ساده‌سازی محاسبات ریاضی باشد.

۱.۲.۱ حل معادلات فضای حالت

صورت کلی معادلات فضای حالت را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

برای حل این معادلات لازم است تا بردار $x(t)$ را از معادله اول بدست آورد و با جایگذاری آن‌ها در معادله دوم، خروجی سیستم را محاسبه نمود. معادله اول را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

پاسخ کلی چنین معادله‌ای بصورت زیر می‌باشد،

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau, \quad (15.1)$$

e^{At} تابع نمایی ماتریسی است که به آن ماتریس انتقال حالت^{۱۳} می‌گویند و با نماد $\varphi(t)$ نیز نمایش می‌دهند،

$$x(t) = \varphi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau,$$

در صورتیکه معادلات را بصورت همگن در نظر بگیریم،

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

^{۱۱}Time Invariant

^{۱۲}Sensor

^{۱۳}State Transition Matrix

در این صورت، جواب معادله همگن به شکل زیر خواهد بود،

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) = \varphi(t-t_0)x(t_0), \quad (16.1)$$

که در آن ماتریس انتقال حالت در واقع بیان‌کننده پاسخ طبیعی یا بدون ورودی سیستم می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱ (نقطه تعادل). نقطه تعادل x_e بردار ثابتی است که اگر $x(t_0) = x_0$ و $u(t) = 0$ باشد، پاسخ سیستم داده شده با معادله

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t],$$

برای کلیه $x(t) = x_e, t \geq t_0$ خواهد بود. همچنین از آنجایی که نقطه تعادل برداری ثابت است،

$$\dot{x}_e(t) = 0 = f(x_e, 0, t), \quad (17.1)$$

نقطه تعادل نشان‌دهنده پاسخ ثابت حالت ماندگار به معادله (۱۷.۱) است. اگر فرض کنیم که سیستم خطی است، نقطه تعادل از معادله زیر بدست می‌آید،

$$Ax_e = 0.$$

بدیهی است که مبدا مختصات همواره یک نقطه تعادل برای سیستم‌های خطی است [۱].

تعریف ۲.۲.۱ (پایداری لیاپانوف). یکی از کلی‌ترین روش‌های تحلیل پایداری سیستم‌ها منسوب به دانشمند روسی قرن نوزدهم، لیاپانوف^{۱۴} است. معادله دیفرانسیل حالت زیر را در نظر بگیرید،

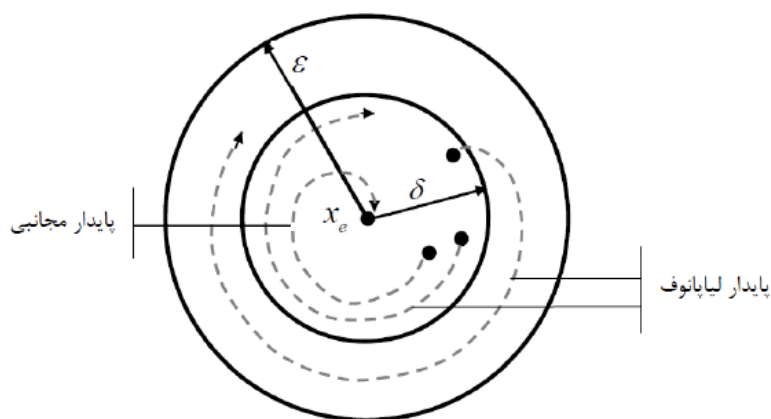
$$\dot{x}(t) = f[x(t), 0, t], \quad (18.1)$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک t_0 و یک $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon)$ آن‌گاه برای هر $t \geq t_0$ داشته باشیم $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$. بعبارتی،

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \quad \xrightarrow{t \geq t_0} \quad \|x(t) - x_e\| < \varepsilon.$$

ویژگی فیزیکی پایداری به مفهوم لیاپانوف آن است که می‌توان با انتخاب حالت اولیه به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری نمود. بعبارت دیگر حالت تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر پاسخ سیستم ناشی از هر حالت اولیه نزدیک x_e هیچ‌گاه از حالت تعادل x_e دور نشود (شکل (۱.۱) را ببینید) [۱].

^{۱۴}Lyapunov



شکل ۱.۱: پایدار مجانبی و لیپانوف

تعریف ۳.۲.۱ (پایداری مجانبی). نقطه تعادل معادله دیفرانسیل (۱۸.۱) پایدار مجانبی است اگر،

۱. پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

۲. برای کلیه مقادیر $t_0 > 0$ یک $\delta(t_0) > 0$ وجود داشته باشد طوری که اگر $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ آن‌گاه (شکل (۱.۱) را ببینید). [۱]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0,$$

اگر حالت اولیه سیستم $x(t_0)$ از نقطه تعادل دور باشد، آن‌گاه پایداری مجانبی معمولاً اطلاعات زیادی از رفتار پاسخ سیستم در اختیار نخواهد قرار داد. در واقع، با انحراف زیاد ممکن است که سیستم ناپایدار باشد. بنابراین در عمل دانستن اندازه بزرگترین محدوده پایداری مجانبی لازم می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱ (حوزه جذب). به بزرگترین محدوده پایداری مجانبی حوزه جذب گفته می‌شود. عبارت دیگر، حوزه جذب آن قسمت از $\mathbb{R}^n$ است که در آن حرکت‌های پایداری مجانبی آغاز می‌گردد و یا هر حرکتی که از حوزه جذب سرچشمه گرفته باشد، پایدار مجانبی است.

تعریف ۵.۲.۱ (پایداری مجانبی سراسری). نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت (۱۸.۱) را پایداری مجانبی فراگیر گویند هرگاه [۱]

۱. پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

۲. برای هر $x(t_0)$ و هر t_0 داشته باشیم،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

لم ۱.۲.۱. برای مشتق گرفتن از انتگرال $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x, t) dt$ نسبت به x ، قاعده لیب نیتز^{۱۵} بصورت زیر بکار می‌رود [۲]،

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x, t) dt = G(x, \beta(x)) \frac{d\beta}{dx} - G(x, \alpha(x)) \frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x} dt. \quad (19.1)$$

در تحلیل و طراحی این پایان‌نامه تنها سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفته خواهند شد.

^{۱۵}Leibniz

فصل ۲

سیستم‌های کنترل خطی

در مراحل اولیه توسعه نظریه کنترل، کارهای برجسته‌ای توسط افرادی مانند مینورسکی^۱، هازن^۲، نایکوئیست^۳ و دیگران انجام شده است. در سال ۱۹۲۲ مینورسکی در زمینه کنترل خودکار کشتی کار کرد و نشان داد که چگونه می‌توان پایداری را با توجه به معادلات دیفراسیل توصیف‌کننده سیستم تعیین کرد. در سال ۱۹۳۲ نایکوئیست روش نسبتاً ساده‌ای برای تعیین پایداری سیستم‌های حلقه بسته، بر اساس پاسخ حلقه باز به ورودی‌های سینوسی ارائه کرد. در دهه‌ی ۱۹۴۰ روش‌های پاسخ فرکانسی (خصوصاً روش نمودار بوده^۴ که توسط بوده ابداع شده) امکان طراحی سیستم‌های کنترل حلقه بسته خطی را فراهم کرد که شاخص‌های عملکرد را برآورد می‌کردند. طی سال‌های آخر دهه‌ی ۱۹۴۰ تا سال‌های اول دهه‌ی ۱۹۵۰ ایوانز^۵ روش مکان هندسی ریشه‌ها را به‌طور کامل مورد بررسی قرار داد. روش پاسخ فرکانسی و مکان هندسی ریشه‌ها، هسته اصلی نظریه کنترل کلاسیک هستند. چون دستگاه‌های چند ورودی-چند خروجی (MIMO) امروزی به تدریج پیچیده‌تر می‌شوند، با تعداد زیادی معادله توصیف می‌گردد. نظریه کلاسیک کنترل که تنها به سیستم‌های یک ورودی-یک خروجی

^۱Minorsky

^۲Hazen

^۳Nyquist

^۴Bode

^۵Evans

(SISO)^۶ اختصاص دارد، برای تحلیل این سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی توانایی کافی ندارد.

نظریه کنترل مدرن بر پایه تحلیل حوزه زمان، دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل بنا نهاده شده است. کنترل مدرن، طراحی سیستم کنترل را ساده‌تر کرده است، زیرا این نظریه بر اساس مدلی از سیستم کنترل واقعی کار می‌کند.

۱.۲ کنترل‌پذیری

تعریف ۱.۱.۲. سیستم خطی ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.2)$$

را به‌ازای $t \geq t_0$ و با حالت اولیه‌ی $x(t_0) = x_0$ در نظر می‌گیریم. هرگاه ورودی $u(t)$ که $t \in [t_0, t_1]$ ، حالت اولیه‌ی x_0 را در زمان t_1 به حالت صفر انتقال دهد، حالت x_0 را در زمان t_0 کنترل‌پذیر^۷ گوئیم. لازم به ذکر است حالت صفر در اینجا بیانگر حالت تعادل می‌باشد. کنترل‌پذیری یک سیستم اهمیتی اساسی دارد، زیرا باید مسائلی مورد مطالعه قرار گیرند که در آن‌ها هدف، انتقال سیستم از یک حالت اولیه دلخواه، به حالت تعادل می‌باشد. در نتیجه کنترل‌پذیری، شرط لازم برای وجود جواب است.

تعریف ۲.۱.۲. برای سیستم تعریف شده با معادله (۱۴.۱)، ماتریس کنترل‌پذیری را بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$Q = \begin{bmatrix} B & A.B & \dots & A^{n-1}.B \end{bmatrix},$$

تعریف ۳.۱.۲. سیستم (۱.۲) را کاملاً کنترل‌پذیر گوئیم هرگاه به‌ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ سیستم به حالت صفر کنترل‌پذیر باشد.

گزاره ۱.۱.۲. سیستم خطی توصیف شده با معادلات (۱۴.۱) کاملاً کنترل‌پذیر است اگر و فقط اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری سیستم، فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید کند و یا بعبارت دیگر سیستم کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر $rank(Q) = n$ باشد.

پایداری سیستم‌های کنترلی

در طراحی یک سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی، در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن، به حالت تعادل خود برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل

^۶ Single-Input Single-Output

^۷ Controllable

خطی، حالتی است که در صورت عدم اغتشاش و تغییر نکردن ورودی، خروجی در آن حالت باقی بماند.

حال به بررسی مفهوم ریاضی پایداری در سیستم‌های کنترل می‌پردازیم. سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.2)$$

با بردار ورودی،

$$u(t) = Kx(t), \quad (3.2)$$

موسوم به قانون کنترل را در نظر می‌گیریم، که در آن $u(t)$ ، متناسب با بردار حالت $x(t)$ انتخاب شده است. در این صورت، سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پاسخورد حالت و $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را ماتریس پاسخورد حالت^۸ می‌نامیم. با ترکیب دو معادله (۲.۲) و (۳.۲) رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (4.2)$$

در این رابطه ماتریس A را ماتریس حلقه باز^۹ و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه باز گوییم.

همچنین ماتریس $A + BK$ را ماتریس سیستم حلقه بسته^{۱۰} و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می‌نامیم.

در ادامه، برخی از تعاریف و اصطلاحات را که در مطالعه سیستم‌های کنترل با آن‌ها برخورد خواهیم داشت، ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۲. سیستم‌هایی که در آن‌ها خروجی هیچ نقشی بر روی عمل کنترل ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه باز گویند [۴۰].

در سیستم‌های حلقه باز خروجی با ورودی مرجع مقایسه نمی‌شود، پس به‌ازای هر ورودی مرجع یک شرایط کاری ثابت وجود دارد، بنابراین دقت سیستم به تنظیم آن بستگی دارد. اگر اغتشاش وجود داشته باشد سیستم کنترل حلقه باز نمی‌تواند وظیفه مطلوب را انجام دهد. سیستم کنترل حلقه باز را در عمل تنها موقعی می‌توان به کار برد که رابطه ورودی و خروجی معلوم بوده و اغتشاش داخلی یا خارجی وجود نداشته باشد. هر سیستم کنترلی که بر اساس زمان‌بندی کار می‌کند، حلقه باز است. چراغ‌های راهنمایی که بر اساس زمان‌بندی کار می‌کنند، نمونه‌ای از سیستم کنترل حلقه باز می‌باشند.

^۸State Feedback Matrix

^۹Open Loop

^{۱۰}Closed Loop

تعریف ۵.۱.۲. سیستم‌های کنترل پسخوردی را عموماً سیستم‌های کنترل حلقه بسته می‌نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته استفاده از پسخورد برای کاهش خطای سیستم و رسیدن به پایداری است [۴۰].

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. به‌ازای هر بردار حالت اولیه x_0 ، سیستم خطی ناوردای زمانی،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

دارای یک جواب منحصر به فرد بصورت،

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

می‌باشد، با استفاده از این قضیه و انتخاب بردار حالت اولیه x_0 ، جواب سیستم حلقه بسته (۲.۲) و (۳.۲) را بصورت زیر بدست می‌آوریم،

$$x(t) = e^{(A+BK)t}x_0,$$

چنانچه تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته، در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند آن‌گاه داریم،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(A+BK)t} = 0,$$

این رابطه بیان می‌کند که با گذر زمان، هر حالت اولیه در صورتی به حالت تعادل برده می‌شود که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته، منفی باشند.

تعریف ۶.۱.۲. سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط معادلات (۲.۲) و (۳.۲) را یک سیستم پایدار مجانبی می‌نامیم هرگاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته منفی باشد. در صورتیکه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد سیستم را پایدار و در غیر این صورت سیستم را ناپایدار نامیم.

تعریف ۷.۱.۲. مسأله یافتن ماتریس پسخورد K ، برای سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط (۲.۲) و (۳.۲) به گونه‌ای که سیستم پایدار مجانبی باشد را مسأله تخصیص مقادیر ویژه گوئیم.

۲.۲ لیاپانوف

روش مستقیم لیاپانوف بدون بدست آوردن پاسخ $x(t)$ ، پایداری سیستم‌های غیرخطی و خطی را تعیین می‌کند. روش لیاپانوف برای تعیین رفتار سیستم‌های مرتبه-بالا که ممکن است ورودی داشته یا نداشته، خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان باشند،

قابل اعمال است. در این روش پاسخ معادله دیفرانسیل لازم نیست. این روش انتخاب یک تابع اسکالر $V(x)$ که برای تعیین شرایط پایداری آزموده می‌شود را لازم دارد. وقتی که $V(x)$ این شرایط را به‌طور موفقیت‌آمیزی برآورده می‌سازد یک تابع لیپانوف نامیده می‌شود. مشکل اساسی در اعمال این روش تعیین یک تابع لیپانوف مناسب است، زیرا عدم موفقیت یک تابع برای برآورده ساختن شرایط پایداری دلیلی بر اینکه یک تابع لیپانوف واقعی وجود ندارد نیست. این مسئله با این واقعیت که تابع لیپانوف منحصر بفرد نیست پیچیده‌تر می‌شود. با وجود این مشکلات، روش لیپانوف مورد توجه بسیاری از مهندسين کنترل سیستم قرار گرفته است. برای سیستم‌های ساده حدس توابع لیپانوف مناسب امکان‌پذیر می‌باشد لیکن برای سیستم‌های پیچیده پیدا کردن یک تابع لیپانوف مناسب ممکن است بسیار مشکل باشد. توابع لیپانوف به $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ بستگی دارند و بصورت $V(x)$ نشان داده می‌شوند. در روش لیپانوف رفتار علامتی $V(x)$ و $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt}$ ، پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری حالت تعادل سیستم را بدون نیاز به حل مستقیم معادلات آن تعیین می‌کنند. در اینجا قضایای پایداری لیپانوف را ارائه می‌دهیم، این قضایا شرایط کافی برای پایداری خواهند بود.

لم ۱.۲.۲. معادله دیفرانسیل $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت P ، یافت شود که نامساوی زیر برقرار باشد،

$$A^T P + P A < 0. \quad (5.2)$$

به نامساوی فوق، نامساوی لیپانوف بر روی P گفته می‌شود که فرم خاصی از نامساوی ماتریس خطی است. همچنین لیپانوف نشان داد که این نخستین نامساوی ماتریس خطی است که با انتخاب ماتریس متقارن و معین مثبت Q مناسب و حل معادله $A^T P + P A = -Q$ می‌توان P را پیدا کرد [۱].

در حالت کلی تابع لیپانوف برای سیستم،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax, \\ f(0, t) = 0, \end{cases}$$

بصورت،

$$V(x) = x^T(t) P x(t), \quad (6.2)$$

تعریف می‌گردد. اکنون اگر سیستم مورد نظر دارای تاخیر باشد در ساخت تابع لیپانوف یک انتگرال ایجاد می‌شود، برای درک این مطلب مثالی را ارائه می‌دهیم، سیستم خطی زیر با تاخیرهای ثابت را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^k A_i x(t - \tau_i),$$

که $A_0, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \infty$ ، در این صورت ماتریس‌های معین مثبت و متقارن $P_i (i = 0, 1, \dots, k)$ وجود دارد طوریکه می‌توان تابع لیاپانوف را بصورت زیر تعریف کرد:

$$V(x_t) = x(t)^T P_0 x(t) + \sum_{i=1}^k \int_{t-\tau_i}^t x(s)^T P_i x(s) ds.$$

تعریف ۱.۲.۲. تابع $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را معین مثبت گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد،

$$1. \quad V(x) > 0 \text{ برای هر } x \neq 0,$$

$$2. \quad V(0) = 0.$$

$V(x)$ را نیمه معین مثبت گوییم هرگاه به ازای هر x ، $V(x) \geq 0$ و $V(x)$ معین منفی است اگر تابع $-V(x)$ معین مثبت باشد و نیمه معین منفی است هرگاه $-V(x)$ ، نیمه معین مثبت باشد.

قضیه ۱.۲.۲ (اصل لیاپانوف). سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) \\ f(0, t) = 0 \end{cases}$$

اگر تابع اسکالر $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوریکه مشتقات جزئی آن پیوسته باشد و شرایط زیر برقرار باشد،

$$1. \quad V(x, t) \text{ معین مثبت باشد.}$$

$$2. \quad \dot{V}(x, t) \text{ معین منفی باشد.}$$

آن‌گاه حالت تعادل مبدا دارای پایداری مجانبی است [۱].

نتیجه ۱.۲.۲. اگر $\dot{V}(x, t)$ نیمه معین منفی باشد، آن‌گاه مبدا یک نقطه ثابت پایدار سیستم است. اگر $\dot{V}(x, t)$ معین مثبت باشد، آن‌گاه مبدا ناپایدار است.

مثال ۱.۲.۲. پایداری مبدا را برای سیستم

$$(7.2) \quad \dot{x}_1 = -x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_1^3,$$

بررسی کنیم.

حل: مبدا یک نقطه ثابت غیرساده است. بنابراین یک تابع لیاپانوف $V(x)$ می‌تواند بصورت،
 $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ در نظر گرفته شود. این تابع معین مثبت و

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= 4x_1^3(-x_2^3) + 4x_2^3(x_1^3) = 0, \end{aligned}$$

نیمه معین منفی است. بنابراین منحنی‌های جواب، روی منحنی بسته $x_1^4 + x_2^4 = c$ قرار دارد و لذا مبدا پایدار است.

۳.۲ نامساوی ماتریس خطی

در نظریه کنترل به مسائلی مواجه می‌شویم که دستیابی به جواب آن منوط به حل یک نامساوی ماتریسی است و یا در بعضی مسائل بهینه‌سازی، قیود نامساوی ماتریسی هستند. یک نامساوی ماتریس خطی (LMI)^{۱۱}، در حالت کلی هر محدودیتی به فرم زیر می‌باشد:

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_N A_N < 0, \quad (۸.۲)$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_N)$ بردار حقیقی نامشخص بوده و یک بردار از متغیرهای تصمیم‌گیری و $A_0, \dots, A_N$ ماتریس‌های متقارن مشخص هستند. نماد نامساوی در رابطه فوق به این معناست که رابطه معین منفی می‌باشد، یعنی راست‌ترین مقدار ویژه دارای قسمت حقیقی منفی است.

هر نامساوی ماتریسی متقارن که به متغیر خود وابسته باشد، قابل بیان بصورت نامساوی ماتریس خطی است.

مثال ۱.۳.۲. نامساوی‌های زیر معادلند:

$$\begin{bmatrix} 4 + x_1 + 2x_2 & x_2 + x_3 + 2 \\ x_2 + x_3 + 2 & 3x_2 + x_4 \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

LMI (۸.۲) محدودیت محدب از x است زیرا اگر $A(x) < 0$ ، $A(y) < 0$ باشد در این صورت $A(z) < 0$ که

$$z = \theta x + (1 - \theta)y, \quad \forall \theta \in [0, 1],$$

توجه داشته باشید که سیستم محدودیت LMI می‌تواند بعنوان یک LMI واحد در نظر گرفته شود، (در اینجا، A_i ها ماتریس‌هایی وابسته به متغیر x می‌باشند) زیرا

$$\begin{cases} A_1(x) < 0, \\ \vdots \\ A_N(x) < 0, \end{cases}$$

معادل است با،

$$A(x) := \text{diag}\{A_1(x), \dots, A_N(x)\} < 0,$$

در بسیاری از موارد LMI به فرم کانونی (۸.۲) ظاهر نمی‌شوند بلکه به فرم

$$L(x_1, \dots, x_N) < R(x_1, \dots, x_N),$$

^{۱۱}Linear Matrix Inequality

به نمایش در می‌آیند، که در آن $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ توابعی از برخی متغیرهای ماتریسی $x_1, \dots, x_N$ می‌باشند [۴۱].

۱.۳.۲ خواص نامساوی ماتریسی

• LMIها یکتا نیستند یعنی LMIهای مختلفی می‌توانند منجر به یک مجموعه جواب شوند. به عنوان مثال،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} > \circ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \circ & I \\ I & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & I \\ I & \circ \end{bmatrix} > \circ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} > \circ$$

• مجموعه جواب‌های شدنی (۸.۲) یک مجموعه جواب محدب می‌باشد. این یک ویژگی مهم می‌باشد زیرا تکنیک‌های حل عددی قدرتمندی برای مسائل دارای مجموعه جواب‌های محدب وجود دارد.

• تحدب: یک نتیجه بسیار مهم از خاصیت محدب بودن LMIها این است که، با وجود اینکه معادله (۸.۲) در حالت کلی دارای راه حل جبری نمی‌باشد، ولی می‌توان آن را به روش‌های عددی حل نمود و در صورت وجود جواب آن را پیدا کرد.

• خاصیت تقارن: LMIها متقارن می‌باشند. این خاصیت باعث سادگی تعریف آن‌ها می‌شود زیرا نیازی به مشخص نمودن تمامی عناصر LMI نیست و تنها مشخص کردن عناصر روی قطر اصلی و بالا یا پایین آن کفایت می‌کند.

شرط پایداری لیاپانوف بعنوان اولین LMI در مهندسی کنترل شناخته می‌شود. در دهه چهل این معیار وارد مسائل واقعی مهندسی کنترل شد و حل آن بصورت دستی و تنها برای مسائل کوچک انجام می‌گرفت.

$$A^T X + X A < \circ, \quad (9.2)$$

که X ماتریس متقارن و معین می‌باشد. می‌توان به سادگی نامعادله لیاپانوف را به فرم (۸.۲) تبدیل کرد،

$$A^T \left(\sum_{i=1}^N x_i E_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N x_i E_i \right) A = x_1 (E_1 A + A^T E_1) + \dots + x_N (E_N A + A^T E_N) < \circ.$$

E_i ها نماد بردار استاندارد می‌باشند.

۲.۳.۲ جعبه ابزار LMI در نرم‌افزار MATLAB

جعبه ابزار LMI در نرم‌افزار MATLAB مجموعه‌ای از توابع مفید برای حل مسائل مربوط به LMIها را در اختیار کاربر قرار می‌دهد.

به طور کلی یک مسئله شامل LMI ها در نرم افزار MATLAB در دو مرحله حل می گردد. ابتدا اقدام به تعریف LMI های موجود در مسئله می کنیم. این مرحله شامل تعیین متغیرهای تصمیم گیری در LMI ها و تعریف LMI ها بر اساس این متغیرها می باشد. در مرحله دوم، مسئله با استفاده از حل کننده های موجود به طور عددی حل می گردد.

توصیف یک LMI، به سادگی توسط دستور `setlmis([ ])` آغاز می شود، همان طور که مشاهده می کنید برای این تابع هیچ پارامتری تعیین نمی گردد. پس از آن لازم است که متغیرهای تصمیم یعنی متغیرهای مجهول مسئله LMI تعریف گردند. بعنوان مثال $C^T X C$ را در نظر بگیرید، که C یک ماتریس ثابت و X ماتریسی از متغیرهای تصمیم گیری است. این تعریف با استفاده از تابع `lmivar` بصورت زیر تعریف می گردد،

$$X = \text{lmivar}(\text{type}, \text{structure}).$$

این دستور به ما اجازه می دهد تا چندین فرم ماتریس تصمیم گیری مانند ماتریس های متقارن، ماتریس های مستطیلی یا ماتریس های دیگر را تعریف کنیم. بسته به نوع ماتریس انتخاب شده، ساختار حاوی اطلاعات مختلفی است. بدین ترتیب، ابتدا نوع را تعریف می کنیم و سپس ساختار را که به نوع بستگی دارد بیان می کنیم.

● اگر $\text{type}=1$ ، این بدان معناست که ماتریس X ، مربعی و متقارن است، عنصر ساختار $(i, 1)$ ابعاد بلوک i -ام را مشخص می کند (۱ برای بلوک کامل، ۰ برای اسکالر و -۱ برای بلوک صفر).

● اگر $\text{type}=2$ ، ماتریس X ، مستطیلی از سایز $m \times n$ است که $\text{structure}=[m,n]$.

در گام بعد باید LMI ها بصورت تک تک با دستور `lmiterm()` بصورت زیر تعریف گردد،

$$\text{lmiterm}(\text{termID}, A, B, \text{flag}).$$

`lmiterm` شامل ۳ یا ۴ آرگومان است. آرگومان اول `termID` یک بردار 1×4 می باشد. اولین عنصر این بردار، نشان می دهد که کدام LMI تعریف شده را بکار می بریم (اگر LMI تعریف شده معین مثبت باشد یعنی بزرگتر از صفر باشد، علامت منفی و اگر معین منفی، یعنی کوچکتر از صفر بود علامت مثبت می گیرد). دومین و سومین ورودی در این بردار موقعیت LMI مربوطه را بیان می کند و ورودی چهارم نشان می دهد که کدام متغیر تصمیم گیری LMI درگیر است. آرگومان دوم و سوم از تابع `lmiterm`، ضرایب سمت چپ و راست ماتریس های تصمیم گیری هستند. آرگومان چهارم وقتی بر روی 's' تنظیم می شود، اجازه می دهد تا عبارت داده شده و متقارن آن در LMI ظاهر شود [۴۲].

گام نهایی استفاده از دستور زیر به منظور ایجاد LMI ها می باشد،

$$\text{LMIs} = \text{getlmis}.$$

اکنون نوبت به حل LMI ها می‌رسد، به‌طور کلی سه نوع حل‌کننده LMI در نرم‌افزار MATLAB مورد استفاده قرار می‌گیرند که عبارتند از $feasp$ ، $mincx$ و $gevp$ که $feasp$ برای حل مسئله امکان‌پذیری LMI ها بصورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد،

$$[tmin, Xfeasp] = feasp(LMIs),$$

Xfeasp شامل متغیرهای تصمیم و tmin متغیری است که باید در بهینه‌سازی منفی گردد. اکنون برای مشاهده متغیرها بایستی آن‌ها را به فرم ماتریسی تبدیل نمود که این کار با دستور زیر امکان‌پذیر است،

$$X = \text{dec2mat}(LMIs, feasp, X).$$

پس از این با اجرای فایل نوشته شده، نرم‌افزار به ما می‌گوید که آیا نامعادلات ماتریسی خطی نوشته شده به‌ازای پارامترهای موجود امکان‌پذیر می‌باشند یا خیر و ما می‌توانیم با مشاهده نتایج، خواسته‌های خود را دنبال نماییم. در دهه ۶۰ تئوری‌هایی ارائه شد مبنی بر اینکه دسته خاصی از نامساوی‌های غیرخطی نظیر معادله ریکاتی قابل بیان بصورت LMI می‌باشد. لم معروف شر^{۱۲} این دسته از نامساوی‌های ماتریسی را معرفی می‌کند.

لم ۱.۳.۲ (مکمل شر). فرض کنید $P, Q, S \in M^{n \times n}$ ماتریس‌های داده شده باشند، به‌طوریکه $P = P^T$ (متقارن)، $S > 0$ (معین مثبت) و $S = S^T$ باشد، آن‌گاه نامساوی ماتریسی خطی،

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^T & -S \end{bmatrix} < 0, \quad (10.2)$$

هم‌ارز رابطه زیر می‌باشد،

$$P < 0, \quad P + QS^{-1}Q^T < 0. \quad (11.2)$$

به عبارت دیگر، نابرابری (۱۱.۲) می‌تواند به LMI (۱۰.۲) تبدیل گردد [۴۱].

مثال ۲.۳.۲. معادلات ریکاتی که به‌طور وسیعی در کنترل بهینه استفاده می‌شوند یک نامساوی ماتریسی خطی است. نمایش آن بصورت رابطه زیر است،

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0,$$

که در آن $P = P^T > 0$ و $R > 0$ است، این رابطه معادل ماتریس زیر می‌باشد،

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -R \end{bmatrix} < 0.$$

^{۱۲} Schur Lemma

۴.۲ آزمون پایداری

سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x} = Ax(t), \quad (۱۲.۲)$$

فرض کنید A ماتریس نامنفردی باشد، با توجه به مفروضات به پایداری از دیدگاه لیپانوف می‌پردازیم.

برای سیستم (۱۲.۲) یک تابع احتمالی لیپانوف $V(t)$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که،

$$V(t) = x(t)^T P x(t),$$

ماتریس P متقارن و معین‌مثبت می‌باشد. سپس برای پایداری طبق قضیه (۱.۲.۲) مشتق تابع لیپانوف را بدست می‌آوریم،

$$\dot{V}(t) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) = (Ax(t))^T P x(t) + x(t)^T P (Ax(t)) = x(t)^T (A^T P + P A) x(t).$$

از آنجایی که $V(t)$ را معین‌مثبت انتخاب کردیم لذا برای پایداری مجانبی لازم است که مشتق تابع لیپانوف معین‌منفی باشد. بنابراین،

$$\dot{V}(t) = x(t)^T Q x(t),$$

$$Q = -(A^T P + P A).$$

برای اثبات پایداری مجانبی سیستم کافی است که ماتریس Q معین‌مثبت باشد. به بیان دیگر سیستم فوق پایدار مجانبی است هرگاه نامساوی ماتریس خطی (LMI) زیر برقرار باشد،

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & \circ \\ \circ & -P \end{bmatrix} < \circ. \quad (۱۳.۲)$$

اکنون همین روند را برای سیستم (۲.۲) با شرط (۳.۲) بکار برده و این بار بجای ماتریس حلقه باز A ماتریس حلقه بسته $A + BK$ را جایگزین می‌کنیم، در این صورت، با توجه به لم مکمل شر (۱.۳.۲) نابرابری زیر،

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < \circ,$$

شرط پایداری برای سیستم (۲.۲) می‌باشد.

۵.۲ کنترل بهینه H^∞ برای تعیین یک کنترل پیدارساز

سیستم خطی پیوسته زمانی زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bu, \\ x(\circ) = x_\circ, \end{cases} \quad (۱۴.۲)$$

که در آن x متغیر حالت و u متغیر ورودی می‌باشد، A و B ماتریس‌های مشخص با ابعاد متناسب می‌باشند. هدف تعیین کنترل پایدارساز است.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

که در آن $x^T Q x$ تابع هزینه حالت و $u^T R u$ تابع هزینه کنترل می‌باشند و $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی و نیمه‌معین مثبت متقارن و $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ یک ماتریس حقیقی و معین مثبت هستند.

قضیه ۱.۵.۲. یک کنترلگر مناسب برای ورودی u که J را به حداقل برساند بصورت زیر بدست می‌آید [۱]،

$$u(t) = R^{-1} B^T P x(t) = K x(t), \quad K = R^{-1} B^T P, \quad (15.2)$$

که ماتریس P از حل معادله ریکاتی زیر بدست می‌آید،

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q < 0, \quad P > 0, \quad R > 0. \square$$

اکنون با استفاده از لم مکمل شر می‌توان نامساوی اخیر را به LMI زیر تبدیل نمود،

$$P > 0, Q > 0, R > 0, \\ \begin{bmatrix} A^T P + P A + Q & P B \\ B^T P & -R \end{bmatrix} < 0,$$

که با استفاده از نرم‌افزار MATLAB می‌توان ماتریس بهره K را محاسبه نمود.

تذکر ۱.۵.۲. کنترل (۱۵.۲) یک کنترل پایدارکننده برای سیستم (۱۴.۲) می‌باشد.

مثال ۱.۵.۲. ماتریس A و B بصورت زیرمفروض هستند، ماتریس بهره K را برای LMI فوق محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LMI بیان شده در بالا را بصورت زیر در نرم‌افزار MATLAB وارد می‌نماییم،

```
A=[-2,1;1,-1];
B=[1;1];
setlmis([])
P=lmivar(1,[2,1]);
Q=lmivar(1,[2,1]);
R=lmivar(1,[1,1]);
lmiterm([-1 1 1 P],1,1);
```

```

lmiterm([-2 1 1 Q],1,1);
lmiterm([-3 1 1 R],1,1);
lmiterm([4 1 1 P],A',1,'s');
lmiterm([4 1 1 Q],1,1);
lmiterm([4 1 2 P],1,B);
lmiterm([4 2 2 R],-1,1);
LMIs=getlmis;
[TMIN,XFEAS]=feasp(LMIs);
Q=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q)
P=dec2mat(LMIs,XFEAS,P)
R=dec2mat(LMIs,XFEAS,R)
K=inv(R)*B'*P

```

پس از حل LMI فوق با نرم افزار MATLAB ماتریس های P ، Q و R بصورت های زیر بدست می آیند،

$$P = \begin{bmatrix} 0/4286 & -0/0719 \\ -0/0719 & 0/3931 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0/8880 & -0/5595 \\ -0/5595 & 0/4283 \end{bmatrix}, R = 1/4534$$

ماتریس بهره K نیز بصورت $K = [0/2454 \quad 0/2210]$ حاصل می گردد.

فصل ۳

کنترل سیستم خطی پیوسته زمانی با یک تاخیر زمانی

۱.۳ مقدمه

سیستم‌های کنترل شبکه کاربردهایی در تجهیزات مهندسی مختلف از جمله شبکه‌های انتقال و توزیع اطلاعات دارند. معمولاً سیستم‌های کنترل با استفاده از مدل‌های ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرند. تحلیل دقیق‌تر سیستم‌ها نیاز به استفاده از مدل‌های پیچیده‌تر ریاضی دارد. اغلب سیگنال‌هایی که در امتداد سیستم کنترل منتقل می‌شوند، شامل این مدل‌ها می‌شوند. این تاخیرها، بررسی مدل را پیچیده‌تر می‌گرداند. در دهه اخیر، بسیاری از تحقیقات تحلیلی که از سیستم‌های با تاخیر منتشر شده با استفاده از تابع لامبرت صورت گرفته است. سیستم‌های تاخیر زمانی در بسیاری از سیستم‌های طبیعی و مهندسی مانند، فرآیند با تاخیر انتقال، مشکلات جریان ترافیک، سیستم‌های بیولوژیکی، زیستی، صنعتی، الکتریکی، هوایی، اقتصادی، اجتماعی، فرایندهای شیمیایی، شبکه‌های هیدرولیکی و شبکه‌های ارتباطی و بسیاری موارد دیگر کاربرد دارد. تاخیر زمانی ویژگی یک سیستم فیزیکی است که در نتیجه آن واکنش یا پاسخ سیستم به یک نیروی وارد شده، به تاخیر می‌افتد. هر زمان که اطلاعات یا انرژی به لحاظ فیزیکی از یک مکان به مکان دیگر انتقال داده می‌شود به همراه انتقال تاخیر به وجود می‌آید که مقدار آن به فاصله و سرعت انتقال بستگی دارد.

وجود تاخیر زمانی مخصوصا تاخیرهای طولانی در این سیستم‌ها باعث ناپایداری می‌شود به همین خاطر در سه دهه اخیر تحلیل این سیستم‌ها و مساله پایداری آن‌ها موضوعی است که مورد توجه محققان قرار گرفته است.

ابتدا بر روی یک رویداد خاص و جدید بر اساس تابع کلاسیک لامبرت^۱ برای تحلیل و کنترل سیستم‌های خطی تاخیری با یک تاخیر شناخته شده تمرکز می‌کنیم.

۲.۳ معادلات دیفرانسیل با تاخیر زمانی

در قرن هجدهم کاندورست^۲ و لاپلاس^۳ یک رده مهم و بزرگ از سیستم‌های دینامیکی معادلات دیفرانسیل تاخیری (DDEs)^۴ را معرفی کردند. معادله دیفرانسیل معمولی (ODE)^۵ بصورت،

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.3)$$

یک مدل رایج برای نمایش سیستم‌های دینامیکی هستند که در این مدل $x(t) \in \mathbb{R}^n$ متغیر حالت می‌باشد و معادله دیفرانسیل، تغییرمتغیر حالت را نسبت به زمان مشخص می‌کند. سیستم‌های تاخیر زمانی (که از تاخیرهایی که از اجزای سیستم اتفاق می‌افتد به وجود می‌آیند) نمی‌توانند به وسیله این معادلات نشان داده شوند. در این سیستم‌ها، رفتار سیستم هم به حالت‌های فعلی و هم به حالت‌های قبل وابسته است.

برای نمایش این سیستم‌ها از معادلات دیفرانسیل با تاخیر زمانی استفاده می‌گردد که در آن‌ها عامل‌های تاخیر زمانی وجود دارد که به آن‌ها معادلات دیفرانسیل تاخیری می‌گویند. عبارتی، در یک سیستم دینامیکی که تاخیر زمانی وجود دارد، معادله سیستم تبدیل به یک معادله دیفرانسیل تاخیری می‌گردد.

صورت کلی معادله دیفرانسیل با تاخیر زمانی برای $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بصورت،

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t), \quad (2.3)$$

می‌باشد که در آن $x_t = \{x(h) : h \leq t\}$ و f یک تابع بصورت $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. نمایشی که در این پایان‌نامه برای نشان دادن یک سیستم با تاخیر منحصر به فرد استفاده می‌شود بصورت،

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (3.3)$$

^۱Lambert Function

^۲Condorcet

^۳Laplace

^۴Delay Differential Equation

^۵Ordinary Differential Equation

است که در آن f یک تابع خطی است و h تاخیر زمانی را نشان می‌دهد. این سیستم‌ها دارای تعداد نامتناهی ریشه می‌باشند زیرا وجود تاخیر زمانی در این معادله باعث ایجاد عبارات‌های نمایی در معادله مشخصه سیستم‌های تاخیری می‌شود. در واقع، مشکل اصلی این معادلات آن است که باعث ایجاد یک طیف نامتناهی از مقادیر ویژه می‌شوند بنابراین تحلیل این سیستم‌ها با روش‌های کلاسیک به خصوص در بررسی پایداری در مقایسه با سیستم‌های بدون تاخیر، پیچیده‌تر خواهد بود.

چنین مسائلی اغلب به‌طور غیرمستقیم و با استفاده از روش‌های ترسیمی، عددی و تقریبی حل می‌شوند. در برخی موارد از روش تقریب پاده استفاده می‌شود که یک تقریب گویا است و در این روش بجای عبارت نمایی در معادله مشخصه، یک عبارت کسری جایگزین می‌شود. اما این روش شامل محدودیت‌هایی است و می‌تواند منجر به ناپایداری در سیستم اصلی شود. روش‌های دیگری نیز وجود دارد که از آن‌ها برای تبدیل سیستم تاخیری به یک سیستم بدون تاخیر و سپس پایدار کردن آن استفاده می‌شود. چنین روش‌هایی ممکن است زمانی که برای یک سیستم واقعی به کار برده می‌شوند، باعث خطاهای غیر منتظره شوند. علاوه بر این اجرای مطمئن آن‌ها هنوز یک مسأله باز است.

در سال‌های اخیر، استفاده از روش تابع لامبرت^۶ در زمینه‌های علمی متنوع و مهندسی شامل تحلیل سیستم‌های تاخیری رواج پیدا کرده است. ایده به کار بردن تابع لامبرت برای بررسی سیستم‌های تاخیری متعلق به رایت^۷ می‌باشد [۶]. روشی که در این بخش برای پایداری سیستم‌های تاخیری و کنترل آن‌ها به کار برده می‌شود، استفاده از تابع لامبرت می‌باشد که روشی جدید برای آنالیز و کنترل سیستم‌های تاخیری است.

قبل از معرفی تابع لامبرت، چندین مثال عملی از سیستم‌های تاخیر زمانی را بیان می‌کنیم. این به خواننده یک نگاه اجمالی از اینکه چگونه تاخیر در عمل ممکن است رخ دهد، ارائه می‌دهد.

مثال ۱.۲.۳. (مساله آونگ) معادله حرکت یک آونگ ساده را بصورت زیر در نظر بگیرید (شکل ۱.۳) را ملاحظه کنید)،

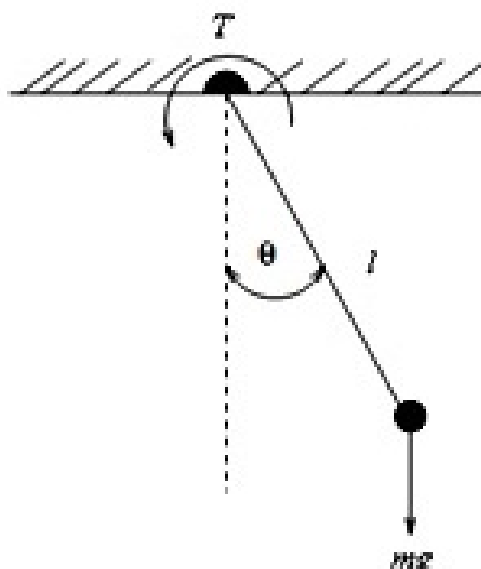
$$T(t-h) - mgl \sin(\theta(t)) = ml^2 \ddot{\theta}(t),$$

m جرم آونگ و T گشتاور ورودی و θ زاویه راستای آونگ با راستای قائم است. هدف نگه داشتن آونگ در نقطه $\theta = \theta_0$ است. می‌توان نشان داد که مدل غیرخطی می‌تواند در اطراف $\theta = \theta_0$ بصورت خطی زیر تبدیل شود،

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g \sin(\theta_0)}{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} T(t-h),$$

^۶ Lambert W Function

^۷ Wright



شکل ۱.۳: آونگ ساده

با در نظر گرفتن، $\Delta(\theta) = \theta - \theta_0$ بدست می‌آوریم:

$$T(t) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta(t) \\ \Delta\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + mgl \sin(\theta_0),$$

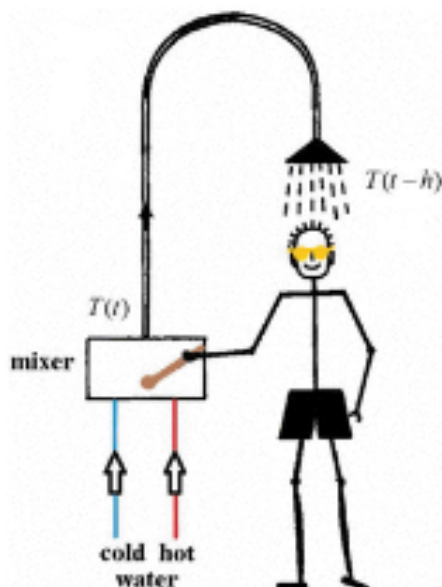
بنابراین سیستم حلقه بسته می‌تواند بصورت زیر نشان داده شود،

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta}(t) \\ \Delta\ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta(t) \\ \Delta\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_1}{ml^2} & \frac{k_2}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta(t-h) \\ \Delta\dot{\theta}(t-h) \end{bmatrix}.$$

مثال ۲.۲.۳. (مدل کنترل مدیریتی) فرض کنیم مبلغی سرمایه داریم که مقداری از آن را سپرده‌گذاری و مابقی را سهام خریداری کرده‌ایم. این مدل دارای سیستمی بصورت زیر می‌باشد،

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t-h) - u(t) - b|u(t)| + f(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_2 x_2(t-h) + u(t), \end{cases}$$

x_1 میزان سپرده فعلی با سود a_1 و x_2 میزان سهام با سود a_2 می‌باشد. $b \in (0, 1)$ میزان هزینه پرداخت شده به دلالتان سهام و u میزان خرید و فروش سهام می‌باشد که u مثبت معادل خرید سهام و u منفی معادل فروش سهام است و شرط $u_0 \geq |u(t)|$ ، بدلیل محدودیت خرید و فروش سهام برقرار است. $f(t)$ نرخ مصرف را نمایش می‌دهد. تاخیر در این سیستم، نشان‌دهنده این است که سود سپرده لحظه‌ای نیست و با تاخیر این سود برگردانده می‌شود. در اینجا هدف این است که با ورودی $u(0)$ ، خرید و فروش سهام را طوری به تعادل برسانیم که مجموع دارایی‌ها



شکل ۲.۳: طرح ساده از سیستم دوش

در انتهای یک دوره مشخص T ماکزیمم گردد.

$$x_1(T) + x_2(T) \rightarrow \max.$$

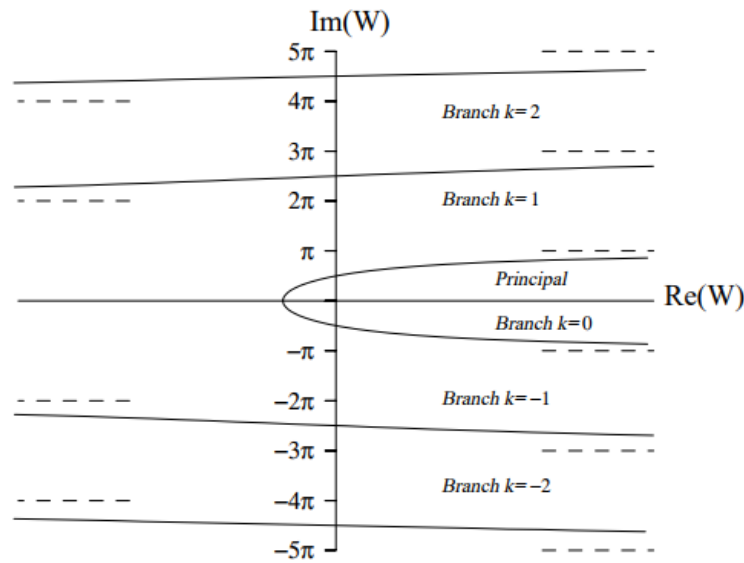
مثال ۳.۲.۳. (سیستم دوش حمام) یک مثال ساده از یک سیستم تاخیری که در زندگی روزمره اتفاق می‌افتد کنترل دما است. همانطور که در شکل (۲.۳) نشان داده می‌شود اکثر افراد مشکل تنظیم دمای آب را تجربه کرده‌اند دمای آب گاهی اوقات خیلی داغ یا خیلی سرد است. دمای واقعی اغلب خارج از حد مطلوب است و گاهی مدتی طول می‌کشد تا دما کنترل شود و این به خاطر آن است که برای جاری شدن آب از شیر به سمت بدن فرد زمانی صرف می‌شود. این زمان یک تاخیر است که به فشار آب و طول لوله بستگی دارد. طبق شکل (۲.۳)، $T(t)$ نشان‌دهنده دما در زمان t می‌باشد و چون طول لوله باعث ایجاد یک تاخیر می‌گردد تا به دمای مطلوب T_d برسیم، بنابراین دمای آبی که از سر دوش بیرون می‌آید مهم می‌باشد که با $T(t-h)$ نمایش می‌دهیم. که معادله دیفرانسیل تاخیری آن بصورت زیر می‌باشد،

$$\dot{T}(t) = -K(T(t-h) - T_d).$$

۳.۳ تابع لامبرت

این تابع توسط لامبرت و اوایلر در سال‌های ۱۷۲۸ تا ۱۷۸۳ معرفی شده است [۷]. تابع لامبرت یا تابع امگا و یا ضرب لگاریتمی، مجموعه‌ای از توابع می‌باشد بعبارتی شاخه‌هایی از معکوس تابع $f(w) = we^w$ می‌باشد که e^w تابع نمایی و w عدد مختلط است. بعبارت دیگر،

$$w = f^{-1}(we^w) = W(we^w),$$



شکل ۳.۳: تصاویر شاخه‌های تابع لامبرت $W_k = Re(W_k) + iIm(W_k)$

هر تابع $\omega = W(H)$ که در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$W(H)e^{W(H)} = H, \quad (4.3)$$

تابع لامبرت نامیده می‌شود. این تابع، مختلط مقدار با یک آرگومان مختلط H و دارای تعداد نامتناهی شاخه است، به‌طوری‌که هر شاخه تابع لامبرت با یک اندیس k بصورت W_k و برای $k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ نشان داده می‌شود که در آن W_0 ، شاخه اصلی تابع لامبرت نامیده می‌شود و هر یک از شاخه‌ها در رابطه،

$$W_k(H)e^{W_k(H)} = H, \quad (5.3)$$

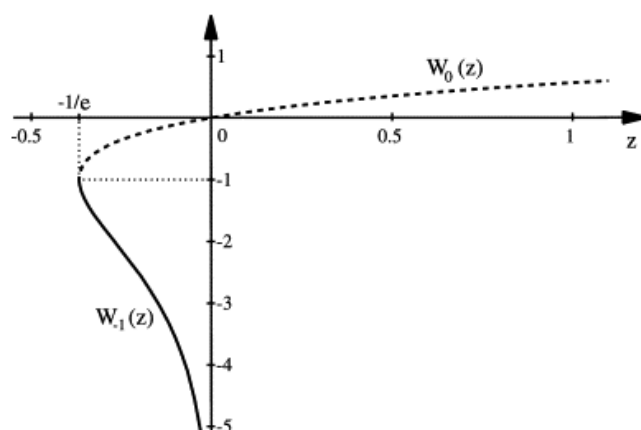
صدق می‌کند. شاخه اصلی و شاخه‌های دیگر از تابع لامبرت می‌توانند با استفاده از توابع موجود در نرم افزارهایی مانند MATLAB محاسبه شوند. در این پایان‌نامه نیز از این نرم‌افزار برای محاسبات استفاده می‌کنیم.

همانطور که در شکل (۳.۳) مشاهده می‌شود هر شاخه $W_k(H)$ از تابع لامبرت که در آن H یک مقدار مختلط است، دارای تصویر مخصوص به خود می‌باشد. همچنین تصویر هر شاخه نسبت به محور حقیقی متقارن است. قسمت حقیقی شاخه اصلی نیز دارای مینیمم مقدار -1 در نقطه $H = -\frac{1}{e}$ است (شکل (۴.۳) را ببینید). به بیان دیگر داریم [۷]،

$$Re\{W_0(H)\} \geq -1. \quad (6.3)$$

یکی دیگر از خصوصیت‌های تابع لامبرت که از آن در تعیین راست‌ترین مقدارهای ویژه و سپس تعیین پایداری سیستم تاخیری استفاده می‌شود بصورت زیر می‌باشد [۸]،

$$\max[Re\{W_k(H)\}] = Re\{W_0(H)\}. \quad (7.3)$$



شکل ۴.۳: مقدارهای حقیقی شاخه $k = 0$ و $k = -1$ از تابع لامبرت

همچنین از دیگر خواص تابع لامبرت، استفاده از آن برای حل معادلات شامل عبارت‌های نمایی می‌باشد.

بنابراین می‌توان گفت مزیت اصلی استفاده از تابع لامبرت این است که به کمک آن می‌توان معادله مشخصه سیستم‌های تاخیری خطی اسکالر را حل کرد و سپس به کمک نرم‌افزار MATLAB که دارای یک تابع به نام lambertw برای محاسبه تابع لامبرت است، موقعیت ریشه‌ها را مشخص کرد.

۴.۳ سیستم‌های تاخیری

همانطور که قبلاً نیز بیان کردیم سیستم‌های خطی شامل تاخیر زمانی به وسیله معادلات دیفرانسیل تاخیری نشان داده می‌شوند به‌طوری‌که معادله فضای حالت یک سیستم نوردای زمانی خطی با تاخیر منحصربه‌فرد بصورت زیر می‌باشد،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h), t > 0, \quad (۸.۳)$$

که در آن A و A_d ماتریس‌های $n \times n$ هستند، $x(t)$ یک بردار حالت $n \times 1$ است و $h > 0$ تاخیر زمانی را نشان می‌دهد. برای اینکه معادله (۸.۳) جواب یکتا داشته باشد، باید یک تابع برداری اولیه $g(t)$ که $n \times 1$ می‌باشد، وجود داشته باشد به گونه‌ای که،

$$x(t) = g(t), t \in [-h, 0], \quad (۹.۳)$$

برای حل معادله (۸.۳) می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد و با توجه به اینکه،

$$\mathcal{L}(x(t-h)) = \int_0^\infty e^{-st} x(t-h) dt = \int_0^h e^{-st} x(t-h) dt + \int_h^\infty e^{-st} x(t-h) dt,$$

که در آن $\mathcal{L}$ عملگر لاپلاس می باشد و همچنین از اینکه،

$$0 < t < h \rightarrow -h < t - h < 0 \rightarrow x(t - h) = g(t - h),$$

بدست می آوریم،

$$\mathcal{L}(x(t-h)) = \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt + \int_0^\infty e^{-s(t+h)} x(t) dt = \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt + e^{-sh} \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt,$$

با توجه به اینکه،

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt,$$

و با در نظر گرفتن $x(0) = x_0$ خواهیم داشت،

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + A_d \left(e^{-sh} x(s) + \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt \right), \quad (10.3)$$

با ساده کردن رابطه (۱۰.۳) بدست می آوریم،

$$(sI - A - A_d e^{-sh})X(s) = x_0 + A_d \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt, \quad (11.3)$$

بنابراین داریم [۴۳]،

$$X(s) = (sI - A - A_d e^{-sh})^{-1} \left(x_0 + A_d \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt \right). \quad (12.3)$$

به این ترتیب جواب سیستم می تواند با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس و از رابطه (۱۲.۳) محاسبه گردد. معادله مشخصه سیستم نیز با فرض یک جواب غیر صفر به فرم $e^{st}C$ که در آن s یک متغیر اسکالر و C یک ثابت است بصورت،

$$\det[sI - A - A_d e^{-sh}] = s^n + a_{n-1}(e^{-sh})s^{n-1} + \dots + a_1(e^{-sh})s + a_0(e^{-sh}) = 0, \quad (13.3)$$

بدست می آید که در آن s ، ریشه های معادله مشخصه یا همان مقادیر ویژه می باشند و a_i ها برای $i = 1, \dots, n$ توابعی از e^{-sh} هستند [۴۵]. واضح است که این معادله دارای تعداد نامتناهی جواب است. برای تحلیل پایداری یک سیستم تاخیری می توان از این معادله مشخصه استفاده کرد که در بخش های بعد به بررسی آن می پردازیم.

۵.۳ بدست آوردن جواب سیستم های تاخیری به وسیله

تابع لامبرت

در این قسمت، از روش مطرح شده برای حل سیستم هایی از معادلات دیفرانسیل تاخیری و برای حالت اسکالر و برخی حالت های خاص دیگر استفاده می کنیم و روش را برای حالت های کلی تر که در آن ماتریس های ضرایب سیستم از معادلات دیفرانسیل تاخیری جابجا نمی شوند نیز به کار می بریم.

۱.۵.۳ سیستم‌های همگن

حالت اسکالر

معادله دیفرانسیل تاخیری همگن و از مرتبه اول زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + ax(t) + a_dx(t-h) = 0, h > 0, t > 0, \\ x(t) = g(t), t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (14.3)$$

با فرض اینکه جواب معادله بصورت،

$$x(t) = e^{st}C^I, \quad (15.3)$$

باشد که در آن s یک عدد مختلط و C^I نیز هر عدد مختلط قابل قبول است و با قرار دادن $x(t)$ در معادله سیستم بدست می‌آوریم،

$$(se^{st} + ae^{st} + a_de^{s(t-h)})C^I = 0 \rightarrow (s + a + a_de^{-sh})e^{st}C^I = 0. \quad (16.3)$$

چون $e^{st}C^I \neq 0$ آنگاه نتیجه می‌گیریم،

$$(s + a + a_de^{-sh}) = 0, \quad (17.3)$$

با ضرب رابطه (۱۷.۳) در e^{sh} خواهیم داشت،

$$(s + a)e^{sh} = -a_d, \quad (18.3)$$

همچنین رابطه (۱۹.۳) را در he^{ah} ضرب کرده و بدست می‌آوریم،

$$(s + a)he^{(s+a)h} = -a_dhe^{ah}, \quad (19.3)$$

همانطور که می‌دانیم هر تابع $W(H)$ که در رابطه $W(H)e^{W(H)} = H$ صدق می‌کند یک تابع لامبرت است. بنابراین داریم،

$$W(-a_dhe^{ah}) = (s + a)h. \quad (20.3)$$

از رابطه (۲۰.۳) نتیجه می‌گیریم،

$$s = \frac{1}{h}W(-a_dhe^{ah}) - a, \quad (21.3)$$

و همچنین بدست می‌آوریم،

$$W(-a_dhe^{ah})e^{W(-a_dhe^{ah})} = -a_dhe^{ah}, \quad (22.3)$$

به طوریکه $W(-adhe^{ah})$ مقدار تابع لامبرت را در $H = -adhe^{ah}$ نشان می دهد. به این ترتیب جواب کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت ترکیب خطی از همه جواب های [۹]،

$$x_k(t) = e^{s_k t} = e^{(\frac{1}{h} W_k(-adhe^{ah}) - a)t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (23.3)$$

و بصورت،

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{1}{h} W_k(-adhe^{ah}) - a)t} C_k^I, \quad (24.3)$$

است. رابطه (۲۴.۳) را می توان بصورت زیر نیز نشان داد،

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k(t) C_k^I, t \geq -h, \quad (25.3)$$

و از اینکه،

$$x(t) = g(t), t \in [-h, 0], \quad (26.3)$$

بدست می آوریم،

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k(t) C_k^I, t \in [-h, 0], \quad (27.3)$$

برای محاسبه ضرایب C_k^I ابتدا بازه $[-h, 0]$ را بصورت زیر به $2N$ قسمت، تقسیم می کنیم،

$$[-h, 0] = \left[-h, -h + \frac{h}{2N} \right] \cup \left[-h + \frac{h}{2N}, -h + \frac{2h}{2N} \right] \cup \dots \cup \left[-\frac{h}{2N}, 0 \right],$$

و سپس با محاسبه مقدار تابع $g(t)$ در نقاط ابتدا و انتهای بازه ها بدست می آوریم،

$$g(0) = \dots + C_{-N}^I x_{-N}(0) + C_{-(N-1)}^I x_{-(N-1)}(0) + \dots + C_{-1}^I x_{-1}(0) + C_0^I x_0(0) + C_1^I x_1(0)$$

$$+ \dots + C_{(N-1)}^I x_{(N-1)}(0) + C_N^I x_N(0) + \dots,$$

$$g\left(-\frac{h}{2N}\right) = \dots + C_{-N}^I x_{-N}\left(-\frac{h}{2N}\right) + C_{-(N-1)}^I x_{-(N-1)}\left(-\frac{h}{2N}\right) + \dots + C_{-1}^I x_{-1}\left(-\frac{h}{2N}\right)$$

$$+ C_0^I x_0\left(-\frac{h}{2N}\right) + C_1^I x_1\left(-\frac{h}{2N}\right) + \dots + C_{(N-1)}^I x_{(N-1)}\left(-\frac{h}{2N}\right) + C_N^I x_N\left(-\frac{h}{2N}\right) + \dots,$$

⋮

$$g(-h) = \dots + C_{-N}^I x_{-N}(-h) + C_{-(N-1)}^I x_{-(N-1)}(-h) + \dots + C_{-1}^I x_{-1}(-h) + C_0^I x_0(-h) + C_1^I x_1(-h)$$

$$+ \dots + C_{(N-1)}^I x_{(N-1)}(-h) + C_N^I x_N(-h) + \dots,$$

اکنون این معادلات را می‌توان بصورت ماتریسی،

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g(\circ) \\ g(\frac{-h}{\varphi_N}) \\ g(\frac{-\varphi h}{\varphi_N}) \\ \vdots \\ g(-h) \end{pmatrix}}_{G(h, N)} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} x_{-N}(\circ) & \cdots & x_N(\circ) \\ x_{-N}(\frac{-h}{\varphi_N}) & \cdots & x_N(\frac{-h}{\varphi_N}) \\ x_{-N}(\frac{-\varphi h}{\varphi_N}) & \cdots & x_N(\frac{-\varphi h}{\varphi_N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{-N}(-h) & \cdots & x_N(-h) \end{pmatrix}}_{x(h, N)} \underbrace{\begin{pmatrix} C_{-N}^I \\ C_{-(N-1)}^I \\ C_{-(N-2)}^I \\ \vdots \\ C_N^I \end{pmatrix}}_{C(N)} \quad (28.3)$$

یا بصورت،

$$G(h, N) \approx x(h, N)C(N), \quad (29.3)$$

نوشت که در آن بردار $C(N)$ تقریبی از بردار $(C_k^I)^T = (\cdots, C_{-N}^I, \cdots, C_{-1}^I, C_\circ^I, C_1^I, \cdots, C_N^I, \cdots)$ و برای مقدارهای بزرگ از N می‌باشد (در اینجا T ، عملگر ترانهاده است).
با فرض وارون‌پذیری ماتریس $x(h, N)$ که یک ماتریس $(2N+1) \times (2N+1)$ می‌باشد، بدست می‌آوریم

$$C(N) \approx x^{-1}(h, N)G(h, N), \quad (30.3)$$

بنابراین ضرایب C_k^I را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد،

$$C_k^I = \lim_{N \rightarrow \infty} \{x^{-1}(h, N)G(h, N)\}_k, \quad (31.3)$$

همچنین می‌توان از تبدیل لاپلاس برای محاسبه ضرایب C_k^I استفاده کرد، که بصورت زیر است [۵]،

$$C_k^I = \frac{x_\circ - a_d \int_\circ^h e^{-s_k t} g(t-h) dt}{1 - a_d h e^{-s_k h}}. \quad (32.3)$$

حالت ماتریسی

معادله دیفرانسیل تاخیری همگن زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-h) = \circ, h > \circ, t > \circ, \\ x(t) = g(t), t \in [-h, \circ], \end{cases} \quad (33.3)$$

که در آن $x(t)$ یک بردار حالت $n \times 1$ است و A و A_d نیز ماتریس‌های $n \times n$ هستند.
در صورتیکه A و A_d جابجا شوند و یا عبارت دیگر داشته باشیم $AA_d = A_d A$ ، آن‌گاه ماتریس‌های A و s نیز جابجا خواهند شد در این صورت ماتریس s بصورت،

$$s = \frac{1}{h} W(-A_d h e^{Ah}) - A, \quad (34.3)$$

خواهد بود و بنابراین s_k بصورت زیر خواهد بود،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(-A_d h e^{Ah}) - A, \quad (35.3)$$

و بنابراین جواب بصورت،

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{1}{h} W_k(-A_d h e^{Ah}) - A)t} C_k^I, \quad (36.3)$$

که این جواب مشابه فرم $x(t)$ برای حالت اسکالر است و C_k^I نیز مشابه قبل محاسبه می‌گردد. اما در حالت کلی ماتریس‌های A و A_d جابجا نمی‌شوند بنابراین A و s نیز جابجا نخواهند شد به همین دلیل،

$$(s + A) h e^{sh} e^{Ah} \neq (s + A) h e^{(s+A)h}, \quad (37.3)$$

به این ترتیب برای نوشتن جواب بصورت عبارت‌هایی از ماتریس تابع لامبرت که در رابطه،

$$W(H) e^{W(H)} = H, \quad (38.3)$$

صدق می‌کند و در آن H یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد، ماتریس مجهول Q را به گونه‌ای معرفی می‌کنیم که در رابطه زیر صدق کند،

$$(s + A) h e^{(s+A)h} = -A_d h Q, \quad (39.3)$$

با مقایسه رابطه (38.3) و (39.3) روابط زیر را بدست می‌آوریم،

$$(s + A) h = W(-A_d h Q), \quad (40.3)$$

و

$$W(-A_d h Q) e^{W(-A_d h Q)} = -A_d h Q, \quad (41.3)$$

که در آن $W(-A_d h Q)$ مقدار تابع لامبرت را در $H = -A_d h Q$ نشان می‌دهد. با حل معادله (40.3) برای s بدست می‌آوریم،

$$s = \frac{1}{h} W(-A_d h Q) - A, \quad (42.3)$$

همچنین با قرار دادن رابطه (42.3) در رابطه زیر،

$$(s + A + A_d e^{-sh}) = 0,$$

خواهیم داشت،

$$W(-A_d h Q) e^{W(-A_d h Q) - Ah} = -A_d h, \quad (43.3)$$

که از این رابطه برای محاسبه ماتریس Q استفاده می‌کنیم و سپس با قرار دادن آن در رابطه (۴۲.۳) به محاسبه ماتریس s می‌پردازیم.

به این ترتیب جواب کلی معادله دیفرانسیل تاخیری بصورت ترکیب خطی از،

$$x_k(t) = e^{s_k t} = e^{\frac{1}{h}(W_k(-A_d h Q_k) - A)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (44.3)$$

و بصورت،

$$x_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} C_k^I, \quad (45.3)$$

بدست می‌آید. در اینجا بردار C_k^I یک بردار $n \times 1$ است و مشابه ضرایب C_k^I در حالت اسکالر محاسبه می‌شود. ماتریس s_k نیز در رابطه (۴۵.۳) بصورت،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(-A_d h Q_k) - A, \quad (46.3)$$

می‌باشد که در آن مقدار ماتریس Q بدست آمده برای k امین شاخه از تابع لامبرت است که با روش‌های عددی و استفاده از تابع fsolve در نرم‌افزار MATLAB و از رابطه،

$$W_k(-A_d h Q_k) e^{W_k(-A_d h Q_k) - A h} = -A_d h, \quad (47.3)$$

محاسبه می‌شود که W_k در این معادله، ماتریس تابع لامبرت را نشان می‌دهد.

۶.۳ بررسی پایداری سیستم‌های تاخیری به وسیله تابع لامبرت

در این بخش، ابتدا تعاریفی برای بررسی مفهوم پایداری بیان می‌کنیم سپس با استفاده از تابع لامبرت به بررسی پایداری سیستم‌های تاخیری در هر دو حالت اسکالر و ماتریسی می‌پردازیم.

۱.۶.۳ پایداری

به‌طور کلی در بررسی پایداری یک سیستم می‌توان از تعاریف زیر استفاده کرد،

تعریف ۱.۶.۳. یک سیستم تاخیری خطی، پایدار مجانبی است هرگاه [۱۰]،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (48.3)$$

اگر بخواهیم پایداری سیستم تاخیری را با استفاده از معادله مشخصه آن بررسی کنیم از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۶.۳. یک سیستم تاخیری خطی، پایدار مجانبی است اگر همه جواب‌های معادله مشخصه سیستم در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند.

حالت اسکالر

یک خاصیت مهم روش تابع لامبرت این می باشد که موقعیت راست ترین مقادارهای ویژه را می توان از شاخه اصلی تابع لامبرت تعیین کرد و سپس از نتیجه بدست آمده پایداری یک سیستم از معادلات دیفرانسیل تاخیری را تعیین نمود. برای حالت اسکالر راست ترین قطبها (مقادارهای ویژه) با استفاده از شاخه اصلی تابع لامبرت ($k = 0$) بدست می آیند، به عبارت دیگر داریم (با توجه به رابطه (۷.۳))،

$$Re\{s_0\} = Re\left\{\frac{1}{h}W_0(a_d h e^{-ah}) + a\right\} \geq Re\{s_k\}, \forall k \neq 0, \quad (49.3)$$

بنابراین می توان برای تعیین پایداری فقط از شاخه اصلی استفاده کرد. سیستم تاخیری اسکالر خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_d x(t-h), \quad (50.3)$$

که در آن $a, a_d, x(t) \in \mathbb{C}$ و $h > 0$ می باشند. از تعریف (۲.۶.۳) سیستم (۵۰.۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر ریشه های معادله مشخصه $s - a - a_d e^{-sh}$ در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند.

برای بدست آوردن ریشه های معادله مشخصه با استفاده از تابع لامبرت بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{aligned} s - a - a_d e^{-sh} = 0 &\iff s - a = a_d e^{-sh} \iff (s - a)h e^{sh} e^{-ah} = a_d h e^{-ah}, \\ &\iff (s - a)h e^{(s-a)h} = a_d h e^{-ah}, \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه،

$$W(H)e^{W(H)} = H,$$

بدست می آوریم،

$$(s - a)h = W(a_d h e^{-ah}) \iff s = \frac{1}{h}W(a_d h e^{-ah}) + a,$$

بنابراین خواهیم داشت،

$$s_k = \frac{1}{h}W_k(a_d h e^{-ah}) + a.$$

حال به بیان یک لم می پردازیم.

لم ۱.۶.۳. سیستم تاخیری اسکالر خطی، پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر،

$$Re\left\{\frac{1}{h}W_0(a_d h e^{-ah}) + a\right\} < 0. \quad (51.3)$$

برهان. بنا به خاصیت تابع لامبرت در معادله (۷.۳)، $\frac{1}{h}W_0(a_d h e^{-ah}) + a$ در میان همه ریشه های معادله مشخصه یعنی $\frac{1}{h}W_k(a_d h e^{-ah}) + a, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$ راست ترین مقدار ویژه است. بنابراین از تعریف (۲.۶.۳) حکم بدست می آید. $\square$

حالت ماتریسی

سیستم تاخیری زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h), t \geq 0, h > 0, \\ x(t) = g(t), t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (52.3)$$

شرط پایداری این سیستم به مقدارهای ویژه ماتریس s_k و همچنین ماتریس e^{s_k} بستگی دارد. عبارت دیگر، سیستم تاخیری، پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر مقدارهای ویژه ماتریس s_k در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند، یا به طور معادل در مفهوم لیاپانوف همه مقدارهای ویژه ماتریس e^{s_k} درون دایره واحد قرارگیرند. از طرفی محاسبه ماتریس‌های s_k و یا e^{s_k} برای تعداد نامتناهی شاخه شدنی نیست در حالیکه تعیین راست‌ترین مقدارهای ویژه برای تشخیص پایداری در میان تعداد نامتناهی مقدار ویژه، اهمیت بسیاری دارد. همانطور که اشاره کردیم برای حالت اسکالر، ثابت شده است راست‌ترین قطب‌ها با استفاده از شاخه اصلی تابع لامبرت بدست می‌آیند. اثبات برای حالت اسکالر همچنین می‌تواند برای حالت ماتریسی، زمانی که A و A_d همزمان مثلثی شدنی^۸ باشند و یا در حالت خاص که داشته باشیم $AA_d = A_dA$ تعمیم داده شود. اگر چه تاکنون اثبات برای حالت کلی وجود ندارد اما در همه مثال‌های حل شده، مشاهده شده است که راست‌ترین مقدارهای ویژه با استفاده از m شاخه اول که در آن m پوچی A_d می‌باشد، بدست می‌آید. همچنین اگر ماتریس ضرایب A_d مقدارهای ویژه چندگانه صفر را نداشته باشد مشاهده شده است که راست‌ترین مقادیر ویژه با استفاده از شاخه اصلی تابع لامبرت بدست می‌آیند و چون اثبات کاملی وجود ندارد معمولاً این مشاهدات بصورت یک حدس مانند زیر مطرح می‌شود که از آن علاوه بر تعیین پایداری سیستم‌هایی از معادلات دیفرانسیل تاخیری بلکه همچنین برای قرار دادن یک زیر مجموعه از مقدارهای ویژه در موقعیت‌های مورد نظر استفاده می‌کنیم.

حدس: اگر ماتریس ضرایب A_d مقادیر ویژه چندگانه صفر را نداشته باشد آن گاه [۱۰]،

$$\max[Re\{eig(s_0)\}] \geq Re\{eig(s_k)\}, k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty \quad (53.3)$$

همچنین با بیان اینکه،

$$\max[Re\{eig(s_{-m})\}, \dots, Re\{eig(s_m)\}] \geq \max[Re\{eig(s_k)\}], \forall k \quad (54.3)$$

که در آن $m = nullity(A_d)$ می‌باشد، می‌توان حدس مطرح شده را به این صورت بیان کرد که اگر پوچی A_d صفر باشد آن گاه،

$$\max[Re\{eig(s_0)\}] \geq \max[Re\{eig(s_k)\}], \forall k \quad (55.3)$$

^۸Simultaneously Triangularizable

بعبارت دیگر اگر A_d مقدارهای ویژه چندگانه صفر را نداشته باشد و یا رتبه کامل^۹ باشد می‌توان تنها از شاخه اصلی برای تعیین پایداری استفاده کرد در غیر این صورت همه m شاخه اول برای رسیدن به یک نتیجه برای پایداری سیستم باید بررسی شوند.

در صورتیکه صفر یک مقدار ویژه چندگانه برای ماتریس A_d باشد، مشاهده شده است راست‌ترین مقدارهای ویژه با استفاده از شاخه اصلی ($k = 0$) و یا $k = \pm 1$ بدست می‌آیند.

همچنین برای رسیدن به یک شرط پایداری برای سیستم (۵۲.۳) احتیاج به فرض زیر داریم،

فرض ۱.۶.۳. چندجمله‌ای مشخصه سیستم تاخیری خطی (۵۲.۳) بصورت،

$$\det(sI - A - A_d e^{-sh}) = \prod_{i=1}^n (s - \alpha_i - \beta_i e^{-sh}) = 0, \quad (56.3)$$

است که در آن،

$$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$$

می‌باشند.

تذکر ۱.۶.۳. اگر A_d, A همزمان مثلثی شدنی باشند که در مورد آن شرط لازم و کافی آن است که $AA_d - A_dA$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه ماتریس نامنفردی وجود دارد که A و A_d را همزمان به ماتریس‌های مثلثی تبدیل می‌کند که در آن،

$$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$$

عناصر روی قطر ماتریس‌های مثلثی شده هستند [۴۳].

بنابراین در حالت خاص، زمانی که دو ماتریس A_d, A جابجا می‌شوند یعنی بصورت $AA_d = A_dA$ تبدیل گردد می‌توان گفت دو ماتریس همزمان مثلثی شدنی هستند.

همچنین از اینکه $\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i - \beta_i e^{-sh}) = 0$ واضح است که برای هر i داریم،

$$(s - \alpha_i - \beta_i e^{-sh}) = 0 \rightarrow s - \alpha_i = \beta_i e^{-sh} \rightarrow (s - \alpha_i) h e^{(s - \alpha_i)h} = \beta_i h e^{-\alpha_i h},$$

$$\rightarrow s = \frac{1}{h} W(\beta_i h e^{-\alpha_i h}) + \alpha_i \rightarrow s_k = \frac{1}{h} W_k(\beta_i h e^{-\alpha_i h}) + \alpha_i,$$

بنابراین اگر فرض (۱.۶.۳) برقرار باشد یک شرط برای پایداری سیستم (۵۲.۳) بصورت زیر بدست می‌آید.

لم ۲.۶.۳. بنا به فرض (۱.۶.۳) سیستم تاخیری خطی، پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر،

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{h} W(\beta_i h e^{-\alpha_i h}) + \alpha_i\right\} < 0, \quad (57.3)$$

همچنین الگوریتم زیر روش بررسی پایداری سیستم تاخیری (۵۲.۳) را در حالت کلی شرح می‌دهد.

^۹ Full Rank

الگوریتم

گام اول Q_0 را برای شاخه اصلی ($k = 0$)، از معادله (۵۸.۳) بدست می‌آوریم،

$$W_k(-A_d h Q_k) e^{W_k(-A_d h Q_k) + A h} = A_d h. \quad (58.3)$$

گام دوم Q_0 بدست آمده از مرحله قبل را در معادله (۵۹.۳) قرار می‌دهیم و s_0 را بدست می‌آوریم،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(-A_d h Q_k) - A. \quad (59.3)$$

گام سوم همه مقادیر ویژه s_0 را بررسی می‌کنیم که دارای قسمت‌های حقیقی منفی هستند یا خیر.

و به این ترتیب پایداری سیستم تعیین می‌شود.

۷.۳ تخصیص مقدار ویژه به وسیله تابع لامبرت برای کنترل سیستم‌های تاخیر زمانی

تحقیقات بسیاری در خصوص سیستم‌های کنترل شبکه تاخیری توسط افراد مختلف در دو دهه اخیر صورت گرفته است.

در سال ۲۰۰۳ افرادی مانند جی یو^{۱۰}، خاریتانو^{۱۱} و چن^{۱۲} بر روی پایداری سیستم‌های تاخیر زمانی کار کردند [۴۶]. پس از آن افراد دیگری چون سو^{۱۳} و جامز لم^{۱۴} در سال ۲۰۰۵ معیارهای پایداری سیستم‌های وابسته به تاخیر را بهبود بخشیدند [۱۱]. هانیانگ شائو^{۱۵} در سال ۲۰۰۹ معیارهای جدیدی برای پایداری سیستم وابسته به تاخیر بدست آورد [۱۲] و همچنین در سال ۲۰۱۴ با استفاده از روش چندوجهی محدب به نتیجه جدیدی دست یافت. مسأله پایداری سازی مقاوم سیستم‌های تاخیری به وسیله روش تخصیص طیف متناهی در [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است به‌طوری‌که در این روش سعی می‌شود تعداد متناهی و دلخواه از مقدارهای ویژه به موقعیت‌های مورد نظر انتقال داده شوند. یک روش پایداری سازی عددی نیز در [۱۴] مطرح شده است که مشابه روش تخصیص مقدار ویژه کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل معمولی در تعیین راس‌ترین مقدارهای ویژه یک سیستم تاخیری می‌باشد. در این روش با استفاده از

^{۱۰}Keqin Gu

^{۱۱}kharitonov

^{۱۲}Chen Ghaong

^{۱۳}Xu

^{۱۴}James Lam

^{۱۵}Hanyong-shao

شبیه‌سازی، راست‌ترین مقدارهای ویژه از معادله مشخصه محاسبه می‌شود و سپس با استفاده از حساسیت راست‌ترین مقادیر ویژه نسبت به تغییرات در بهره^{۱۶}، مقدارهای ویژه به سمت چپ صفحه مختلط انتقال پیدا می‌کنند.

همانطور که در بخش قبل اشاره شد یک روش برای پایدارسازی سیستم‌های تاخیری، استفاده از تابع لامبرت می‌باشد. در این بخش، مسأله طراحی کنترل‌کننده پسخورد^{۱۷} به وسیله تخصیص مقدار ویژه برای سیستم‌های ناوردای زمانی خطی از معادلات دیفرانسیل تاخیری و با یک تاخیر منحصر بفرد را در نظر می‌گیریم. در ادامه، مثال‌هایی با استفاده از تابع لامبرت برای تعیین پایداری و تخصیص قطب برای یک سیستم از این معادلات ارائه می‌کنیم و چون برخلاف معادلات دیفرانسیل معمولی تخصیص همه مقدارهای ویژه برای یک سیستم از معادلات دیفرانسیل تاخیری به خاطر طیف نامتناهی آن عملاً شدنی نیست به همین دلیل سعی می‌شود راست‌ترین مقدارهای ویژه به محل‌های مورد نظر انتقال داده شوند. همچنین در طراحی کنترل‌کننده پسخورد برای یک سیستم که به وسیله معادلات دیفرانسیل تاخیری نشان داده می‌شود، چون تعداد نامتناهی ماتریس s_k وجود دارد در نتیجه قرار دادن یک تعداد متناهی و انتخاب شده از مقدارهای ویژه با استفاده از روش تخصیص قطب کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل معمولی [۴۷] ممکن است باعث شود سایر مقادیر ویژه کنترل نشده به سمت راست صفحه مختلط (که اصطلاحاً نیم صفحه راست (RHP)^{۱۸} نامیده می‌شود) انتقال پیدا کنند [۱۴]. اما این روش که در آن از تابع لامبرت برای کنترل یک سیستم استفاده می‌شود، براساس حدس مطرح شده در بخش قبلی، بدون از دست دادن پایداری، قوانین کنترل مناسبی را فراهم می‌کند.

۱.۷.۳ تخصیص مقدار ویژه

سیستم تاخیری اسکالر خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_dx(t-h), \quad (۶۰.۳)$$

جواب این سیستم با استفاده از تابع لامبرت بصورت زیر بدست می‌آید،

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{1}{h}W_k(a_dhe^{-ah})+a)t} C_k^I, \quad (۶۱.۳)$$

معادله مشخصه این سیستم همانطور که نشان دادیم بصورت $sI - a - a_de^{-sh} = 0$ می‌باشد که در آن،

$$s_k = \lambda_k = \frac{1}{h}W_k(a_dhe^{-ah}) + a, \quad k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty \quad (۶۲.۳)$$

^{۱۶} Gain

^{۱۷} Feedback Controller

^{۱۸} Right Half Plane

می‌باشد. از آنجایی که، راست‌ترین مقدار ویژه با استفاده از شاخه اصلی بدست می‌آید، پایداری سیستم تعیین می‌گردد. بنابراین می‌توان به راست‌ترین مقدار ویژه مقداری در صفحه مختلط که به دلخواه انتخاب می‌شود را اختصاص داد. فرض می‌کنیم مقدار ویژه مورد نظر که به دلخواه انتخاب می‌شود $\lambda_{desired}$ باشد به عبارت دیگر داشته باشیم،

$$\lambda_{desired} = \lambda_o = \frac{1}{h} W_o(a_d h e^{-ah}) + a, \quad (63.3)$$

این معادله را می‌توان برای بدست آوردن پارامتر مورد نظر، با استفاده از روش‌های عددی مانند تابع fsolve در نرم‌افزار MATLAB حل کرد.

۲.۷.۳ طراحی کنترل‌کننده پسخورد

حالت اسکالر

معادله دیفرانسیل تاخیری اسکالر زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_d x(t-h) + u(t), u(t) = Kx(t), \quad (64.3)$$

معادله مشخصه این سیستم بصورت،

$$sI - a - a_d e^{-sh} - K = 0, \quad (65.3)$$

می‌باشد. با استفاده از روش تقریبات پاده بجای عبارت نمایی در معادله مشخصه، می‌توان کسر زیر را جایگزین نمود،

$$e^{-sh} = \frac{e^{\frac{-sh}{\gamma}}}{e^{\frac{sh}{\gamma}}} \approx \frac{1 - \frac{sh}{\gamma}}{1 + \frac{sh}{\gamma}}, \quad (66.3)$$

رابطه (۶۶.۳) را در معادله (۶۵.۳) قرار می‌دهیم و بدست می‌آوریم،

$$s^2 h + s(\gamma - ah - Kh + a_d h) - \gamma(a + K) - \gamma a_d = 0, \quad (67.3)$$

به این ترتیب برای یک قطب مورد نظر می‌توان بهره کنترل K را بدست آورد. برای مثال با در نظر گرفتن پارامترهای $s = 1$, $h = 2$, $a_d = 1$, $a = 1$ معادله (۶۷.۳) بصورت زیر بدست می‌آید،

$$s^2 - s(1 + K) + 2 - 2K = 0, \quad (68.3)$$

از تئوری چندجمله‌ای‌ها می‌دانیم شرط لازم برای آنکه معادله (۶۸.۳) دارای دو قطب پایدار باشد آن است که ضرایب آن هم‌علامت و هیچ کدام صفر نباشند [۳]. بنابراین در این مثال باید داشته باشیم $K < -1$ که با قرار دادن K مساوی $-1/1$ نتیجه می‌گیریم معادله دارای دو قطب پایدار بصورت زیر است،

$$s_1, s_2 = -0.5 \pm 0.488i,$$

با قرار دادن این بهره کنترل به همراه پارامترهای $s, h = 1, a_2 = 2, a = 1$ در معادله سیستم (۶۴.۳) خواهیم داشت،

$$\dot{x}(t) = -0.1x(t) - 2x(t-1),$$

معادله مشخصه این سیستم بصورت $s + 0.1 + 2e^{-s}$ می باشد به دلیل وجود عبارت نمایی در معادله مشخصه از تابع لامبرت استفاده می کنیم و جواب های این معادله مشخصه را بصورت زیر محاسبه می کنیم،

$$s_k = W_k(-2e^{0.1}) - 0.1$$

برای $k = -3, -1, 0, \dots, 2$ و با استفاده از نرم افزار MATLAB به محاسبه مقادیر ویژه می پردازیم و بدست می آوریم،

$s_0 = 0.1449 + 1.7128i$	$s_{-1} = 0.1449 - 1.7128i$
$s_1 = -1.3602 + 7.6916i$	$s_{-2} = -1.3602 - 7.6916i$
$s_2 = -1.9550 + 14.0055i$	$s_{-3} = -1.9550 - 14.0055i$

جدول ۱.۳: مقادیر ویژه محاسبه شده برای سیستم (۶۴.۳) با $s, h = 1, a_d = 2, a = 1$ و $K = -1/1$

طیف ویژه این سیستم در شکل (۵.۳) نیز نشان داده شده است. طیف ویژه با کنترل کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از روش تقریبات پاده، شکست انتقال قطب به موقعیت مورد نظر و بنابراین پایدار کردن سیستم را نشان می دهد. اگر چه تقریب های پاده مرتبه بالاتر یا تقریب های کسری پیشرفته می تواند برای تقریب عبارت نمایی در معادله مشخصه استفاده شود اما چنین روش هایی محدودیت هایی در دقت مسأله ایجاد می کنند و ممکن است منجر به ناپایداری سیستم اصلی شوند [۱۵، ۱۶]. همچنین از معادله مشخصه سیستم (۶۴.۳) با قطب مورد نظر $\lambda_{desired}$ ، معادله خطی برای K بصورت زیر بدست می آید،

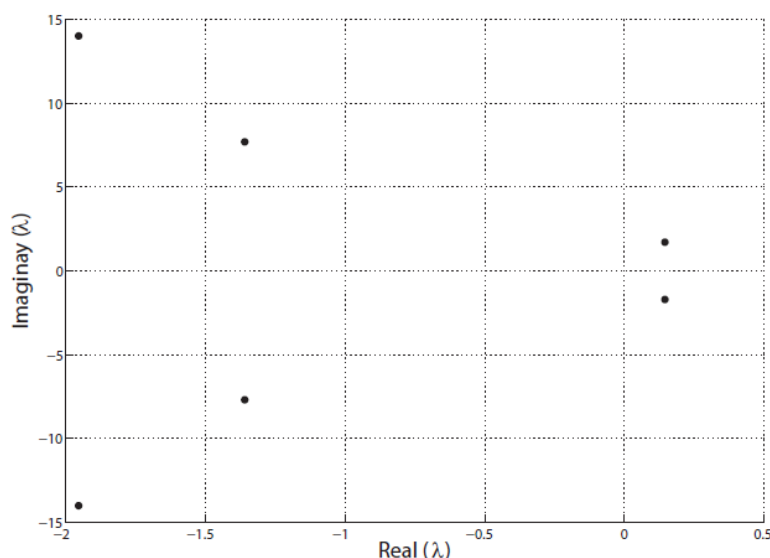
$$\lambda_{desired} - a - a_d e^{-\lambda_{desired} h} - K = 0. \quad (69.3)$$

برای مثال با در نظر گرفتن پارامترهای $s, h = 1, a_d = -1, a = 1$ و با جایگزین کردن $\lambda_{desired} = -1$ در معادله (۶۹.۳) بهره $K = 0.7183$ را بدست می آوریم. سپس با به کار بردن این بهره کنترل برای سیستم (۶۴.۳) بدست می آوریم،

$$\dot{x}(t) = 1.7183x(t) - x(t-1),$$

معادله مشخصه این سیستم بصورت،

$$s - 1.7183 + e^{-s} = 0,$$



شکل ۵.۳: طیف ویژه با کنترل کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از تقریب پاده می‌باشد. ریشه‌های این معادله را از رابطه،

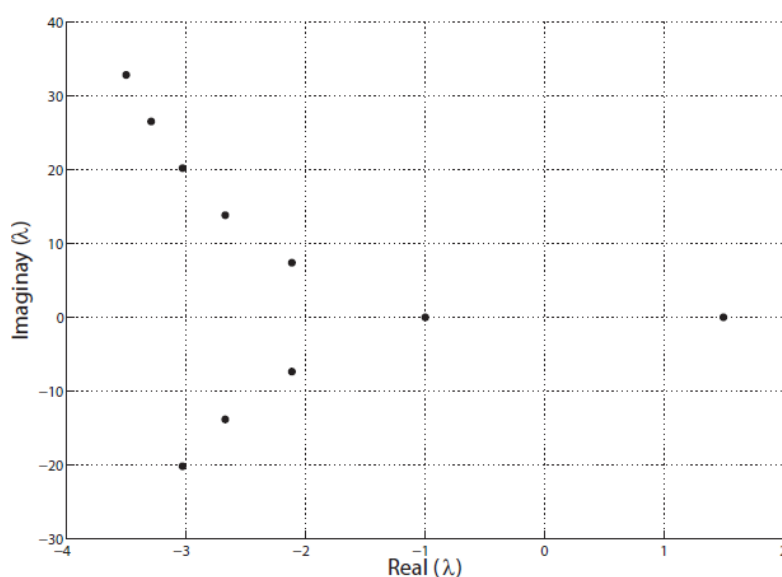
$$s_k = W_k(-e^{-1/7183}) + 1/7183,$$

محاسبه می‌کنیم. به این ترتیب برای $k = -4, \dots, 0, \dots, 4$ و با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB* مقدارهای ویژه را در جدول (۲.۷.۳) بدست می‌آوریم. طیف ویژه این سیستم در شکل (۶.۳)

$s_0 = 1/4938$	
$s_1 = -1/000$	$s_{-1} = -1/000$
$s_2 = -2/1177 + 7/3743i$	$s_{-2} = -2/1177 - 7/3743i$
$s_3 = -2/6749 + 13/8296i$	$s_{-3} = -2/6749 - 13/8296i$
$s_4 = -3/021 + 20/1893i$	$s_{-4} = -3/021 - 20/1893i$

جدول ۲.۳: مقادیر ویژه محاسبه شده برای سیستم ۸۳.۳ با $s = 1, a_d = -1, h = 1$ و $K = 0/7183$

نشان داده شده است. مشاهده می‌شود زمانی که یکی از قطب‌ها در موقعیت مطلوب ۱- قرار گیرد راست‌ترین قطب در سمت راست صفحه مختلط می‌باشد و اگر چه برای مقدار ویژه مورد نظر، بهره K بدست می‌آید اما هنگامی که بهره بدست آمده را در معادله (۶۹.۳) به کار می‌بریم تعداد نامتناهی قطب وجود دارد که در این معادله صدق می‌کنند و برخی از آن‌ها دارای قسمت‌های حقیقی بزرگتر از قطب مورد نظر هستند. به این ترتیب مشابه روش قبل، طیف ویژه با کنترل کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از روش خطی نیز شکست انتقال قطب به موقعیت مورد نظر و در نتیجه پایدار کردن سیستم را نشان می‌دهد. در ادامه نشان



شکل ۶.۳: طیف ویژه با کنترل کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از روش خطی

داده می شود که با استفاده از تابع لامبرت می توان قسمت حقیقی راست ترین قطب را دقیقاً به موقعیت مورد نظر انتقال داد و سیستم را پایدار کرد. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_d x(t-h) + u(t), u(t) = Kx(t), \quad (۷۰.۳)$$

معادله مشخصه این سیستم بصورت زیر می باشد،

$$s - a - a_d e^{-sh} - K = 0, \quad (۷۱.۳)$$

ریشه های معادله مشخصه یا همان مقادیر ویژه را با استفاده از تابع لامبرت بصورت زیر محاسبه می کنیم،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(a_d h e^{-(a+K)h}) + a + K, \quad (۷۲.۳)$$

حال در معادله سیستم (۶۴.۳) قرار می دهیم $s = 1$ ، $a_d = -1$ ، $h = 1$ و مقدار ویژه مورد نظر را مساوی با -1 در نظر می گیریم و با استفاده از تابع لامبرت K را به گونه ای می یابیم که،

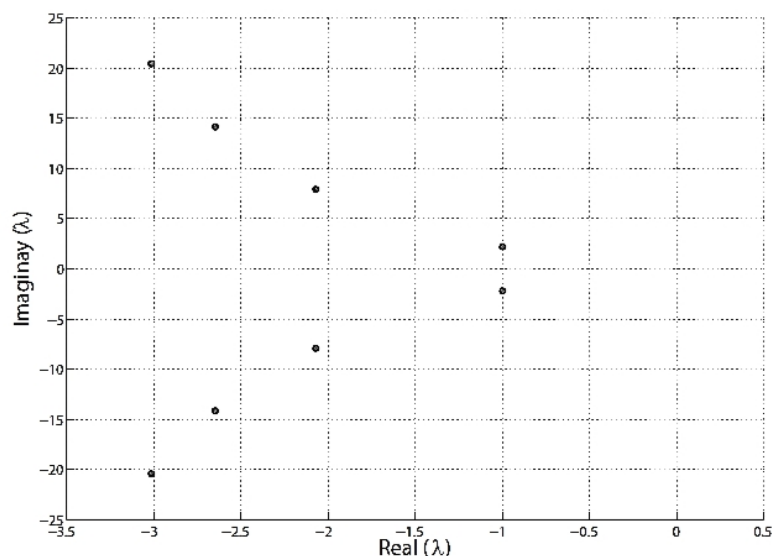
$$\text{Re}\{s_0 = \frac{1}{h} W_0(a_d h e^{-(a+K)h}) + a + K\} = -1,$$

باشد که با حل این معادله با استفاده از تابع fsolve در نرم افزار MATLAB، $K = -۳/۵۹۷۸$ بدست می آید.

همچنین برای $k = -۴, \dots, ۰, \dots, ۴$ سایر مقادیرهای ویژه بصورت زیر خواهند بود،

$s_0 = -1 - 2/1991i$	
$s_1 = -1 + 2/1991i$	$s_{-1} = -1 - 2/1991i$
$s_2 = -2/0.716 + 7/92.03i$	$s_{-2} = -2/0.716 - 7/92.03i$
$s_3 = -2/6486 + 14/1336i$	$s_{-3} = -2/6486 - 14/1336i$
$s_4 = -3/0.157 + 20/3999i$	$s_{-4} = -3/0.157 - 20/3999i$

جدول ۳.۳: مقادیر ویژه محاسبه شده برای سیستم (۸۳.۳) با $h = 1s$ ، $a_d = -1$ ، $a = 1$ و $K = -3/5978$



شکل ۷.۳: طیف ویژه با کنترل کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از روش تابع لامبرت

شکل (۷.۳) نیز طیف ویژه سیستم با بهره کنترل بدست آمده را نشان می‌دهد. طیف ویژه با کنترل کننده پسخورد طراحی شده با استفاده از تابع لامبرت، نشان می‌دهد که راست‌ترین مقدار ویژه دقیقاً در موقعیت مورد نظر قرار گرفته است.

مثال ۱.۷.۳. (سیستم هیدرولیکی) یک مدل خطی برای سیستم مخزن آب هیدرولیکی در نظر بگیرید [۴۴]،

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{A\rho} \left(u_{in}(t-h) - \frac{\rho g x(t)}{R} \right),$$

که در آن $A = 10m^2$ سطح مقطع عرضی است، $\rho = 1000kgm^{-3}$ چگالی آب، $g = 10ms^{-2}$ شتاب گرانشی، $h = 1s$ تاخیر، t زمان، $R = 10m^{-1}kg^{-1}$ مقاومت هیدرودینامیکی لوله خروجی، u_{in} سرعت جریان ورودی و $x(t)$ سطح تراز آب می‌باشد. در این مثال قصد داریم یک کنترل پسخورد مناسب $u_{in} = Kx(t)$ طراحی کنیم و قطب‌های سیستم حلقه بسته را به

موقعیت‌های خاص انتقال دهیم. ابتدا یادآوری می‌کنیم که سیستم حلقه بسته می‌تواند به وسیله معادلات دیفرانسیل تاخیری و بصورت زیر نشان داده شود،

$$\dot{x}(t) = -\frac{g}{AR}x(t) + \frac{K}{A\rho}x(t-h) = -\omega/\lambda x(t) - \omega/\lambda x(t-1),$$

بنابراین بدست می‌آوریم،

$$\lambda_k = \frac{1}{h}W_k\left(\frac{K}{A\rho}he^{\frac{g}{AR}h}\right) - \frac{g}{AR}, k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$

در بخش‌های قبل ثابت کردیم که، راست‌ترین قطب برای حالت اسکالر با استفاده از شاخه اصلی تابع لامبرت بدست می‌آید. همچنین هر شاخه از تابع لامبرت دارای برد مخصوص به خود است به‌طوری‌که برای شاخه اصلی $Re\{W_0(z)\} \geq -1$ پس در این مثال داریم،

$$Re\left\{\frac{1}{h}W_0\left(\frac{K}{A\rho}he^{\frac{g}{AR}h}\right) - \frac{g}{AR}\right\} \geq Re\left\{-\frac{1}{h} - \frac{g}{AR}\right\} \geq -\frac{1}{h} - \frac{g}{AR} \geq -1/1,$$

بنابراین نمی‌توان راست‌ترین مقدار ویژه مورد نظر را کمتر از $-1/1$ انتخاب کرد زیرا شرایط برای تخصیص مقدار ویژه به‌طور دلخواه برای سیستم‌هایی از معادلات دیفرانسیل تاخیری وجود ندارد و برای حالت اسکالر نیز با توجه به مقدار تاخیر زمانی و ضرایب سیستم، محدودیت در تخصیص مقدار ویژه وجود دارد. برای مثال، راست‌ترین مقدار ویژه را در موقعیت $-\omega/5$ قرار دهیم و k را متناظر با مقدار ویژه‌ای که در نظر می‌گیریم از حل معادله،

$$\lambda_{desired} = Re\left\{\frac{1}{h}W_0\left(\frac{K}{A\rho}he^{\frac{g}{AR}h}\right) - \frac{g}{AR}\right\},$$

و با استفاده از روش‌های عددی مانند تابع fsolve در نرم‌افزار MATLAB بدست می‌آوریم به‌طوری‌که برای این مثال $K = -2/4261$ بدست می‌آید.

حالت ماتریسی

سیستم‌هایی با تاخیر در ورودی

سیستم زیر از معادلات دیفرانسیل معمولی با تاخیر در ورودی را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h), \\ u(t) = Kx(t), \end{cases} \quad (73.3)$$

بنابراین سیستم حلقه بسته به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل تاخیری بصورت زیر تبدیل می‌شود،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-h), \quad (74.3)$$

الگوریتم زیر روش محاسباتی بدست آوردن بهره K را در حالت کلی شرح می‌دهد.

الگوریتم

گام اول برای $i = 1, \dots, n$ ، مقدارهای ویژه مورد نظر $\lambda_{desired}$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم،

$$\lambda_i(s_0) = \lambda_{i,desired}, \quad (75.3)$$

که در آن i امین مقدار ویژه از ماتریس s_0 است.

گام دوم دو ماتریس ضرایب جدید $A_d = BK$ ، $A = A$ را در معادله (۷۶.۳) قرار می‌دهیم،

$$W_k(A_d h Q_k) e^{W_k(A_d h Q_k) + A h} = A_d h, \quad (76.3)$$

و به روش عددی ماتریس Q_0 را بدست می‌آوریم. توجه کنید که K یک ماتریس مجهول و با همه درایه‌های نامعلوم می‌باشد و Q_0 یک تابع از مجهول K می‌باشد.

گام سوم ماتریس Q_0 بدست آمده را در معادله (۷۷.۳) قرار می‌دهیم،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(A_d h Q_k) + A, \quad (77.3)$$

سپس s_0 و مقدارهای ویژه آن را بصورت تابعی از ماتریس مجهول K محاسبه می‌کنیم.

گام چهارم معادله (۷۵.۳) را با استفاده از روش‌های عددی مانند fsolve در نرم‌افزار MATLAB حل می‌کنیم.

مثال ۲.۷.۳. (سیستم آونگ) سیستم آونگ با پارامترهای $m = 1\text{ kg}$ ، $l = 2\text{ m}$

$h = 0.2\text{ s}$ ، $\theta_0 = 2^\circ$ ، $g = 10\text{ ms}^{-2}$ را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g \sin(\theta_0)}{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} T(t-h),$$

که در آن $\Delta(\theta) = \theta - \theta_0$

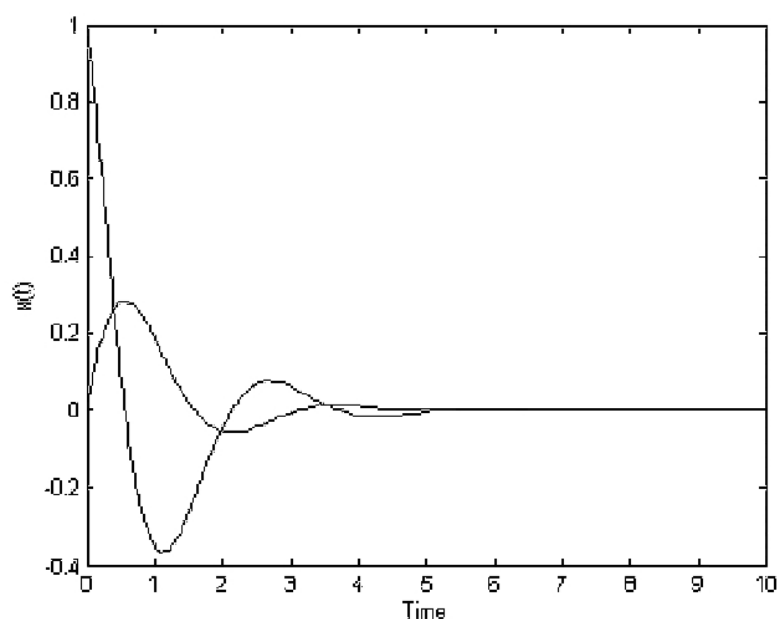
$$T(t) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + mgl \sin(\theta_0),$$

بنابراین با استفاده از پارامترهای داده شده، سیستم حلقه بسته بصورت،

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4/6985 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_1}{4} & \frac{K_2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t-0.2) \\ \Delta \dot{\theta}(t-0.2) \end{bmatrix},$$

و یا بصورت،

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4/6985 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t-0.2) \\ \Delta \dot{\theta}(t-0.2) \end{bmatrix},$$



شکل ۸.۳: پاسخ سیستم بعد از به کار بردن پسخورد $K = \begin{bmatrix} 5/1845 & -4/9190 \end{bmatrix}$

نشان داده می‌شود. این سیستم کنترل‌پذیر است زیرا،

$$\text{rank}[B:AB] = 2,$$

بنابراین هدف، پیدا کردن $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ به گونه‌ای است که راست‌ترین قطب‌های سیستم حلقه بسته در موقعیت $-1 \pm 2i$ قرار بگیرند.

با استفاده از نرم‌افزار MATLAB، $k_1 = 5/1845$ ، $k_2 = -4/9190$ را بدست می‌آوریم. شکل (۸.۳) نیز پاسخ سیستم را بعد از به کار بردن این پسخورد نشان می‌دهد.

سیستم‌هایی با تاخیر در متغیر حالت

سیستم زیر از معادلات دیفرانسیل با تاخیر در متغیر حالت را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t), \quad (78.3)$$

با در نظر گرفتن $u(t) = Kx(t) + K_d x(t-h)$ سیستم حلقه بسته بصورت زیر بدست می‌آید،

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (A_d + BK_d)x(t-h), \quad (79.3)$$

بهره‌های K_d, K برای این سیستم با تخصیص مقدار ویژه و با استفاده از الگوریتم زیر تعیین می‌شوند.

الگوریتم

گام اول ابتدا مقدارهای ویژه مورد نظر $\lambda_{i,desired}$ را برای $i = 1, \dots, n$ ، انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم،

$$\lambda_i(s_0) = \lambda_{i,desired}, \quad (۸۰.۳)$$

که در آن $\lambda_i(s_0)$ ، i امین مقدار ویژه از s_0 است.

گام دوم دو ماتریس ضرایب جدید $A_d = A_d + BK_d$ ، $A = A + BK$ را در معادله (۸۱.۳) به کار می‌بریم،

$$W_k(A_d h Q_k) e^{W_k(A_d h Q_k) + A h} = A_d h, \quad (۸۱.۳)$$

و این معادله را برای بدست آوردن Q_0 و برای شاخه اصلی حل می‌کنیم. توجه کنید که K_d, K ماتریس‌های مجهول و با همه درایه‌های نامعلوم می‌باشند و Q_0 یک تابع از مجهول K_d, K می‌باشد.

گام سوم ماتریس Q_0 بدست آمده را در معادله (۸۲.۳) قرار می‌دهیم،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(A_d h Q_k) + A, \quad (۸۲.۳)$$

و s_0 و مقدارهای ویژه آن را به صورت تابعی از ماتریس مجهول K_d, K محاسبه می‌کنیم.

گام چهارم معادله (۸۰.۳) را با استفاده از روش‌های عددی مانند fsolve در نرم‌افزار MATLAB حل می‌کنیم [۱۷].

سیستم‌هایی با تاخیر در متغیر حالت و ورودی

سیستم کنترل‌پذیر از معادلات دیفرانسیل با تاخیر در متغیر حالت و ورودی را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) + B_d u(t-h), \quad (۸۳.۳)$$

با در نظر گرفتن $u(t) = Kx(t)$ سیستم حلقه بسته بصورت زیر بدست می‌آید،

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + (A_d + B_d K)x(t-h), \quad (۸۴.۳)$$

بهره K با تخصیص مقدارهای ویژه و با استفاده از الگوریتم زیر تعیین می‌شود.

الگوریتم

گام اول ابتدا مقدارهای ویژه مورد نظر $\lambda_{i,desired}$ را برای $i = 1, \dots, n$ ، انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم،

$$\lambda_i(s_0) = \lambda_{i,desired}, \quad (۸۵.۳)$$

که در آن i امین مقدار ویژه از S_0 است.

گام دوم دو ماتریس ضرایب جدید $A_d = A_d + B_d K$ ، $A = A + B K$ را در معادله (۸۶.۳) به کار می‌بریم.

$$W_k(A_d h Q_k) e^{W_k(A_d h Q_k) + A h} = A_d h, \quad (۸۶.۳)$$

و این معادله را برای بدست آوردن Q_0 و برای شاخه اصلی حل می‌کنیم. توجه کنید که K ماتریس مجهول و با همه درایه‌های نامعلوم می‌باشد و Q_0 یک تابع از مجهول K می‌باشد.

گام سوم ماتریس Q_0 بدست آمده را در معادله (۸۷.۳) قرار می‌دهیم،

$$s_k = \frac{1}{h} W_k(A_d h Q_k) + A, \quad (۸۷.۳)$$

سپس s_0 و مقدارهای ویژه آن را به صورت تابعی از ماتریس مجهول K محاسبه می‌کنیم.

گام چهارم معادله (۸۵.۳) را با استفاده از روش‌های عددی مانند fsolve در نرم‌افزار MATLAB حل می‌کنیم.

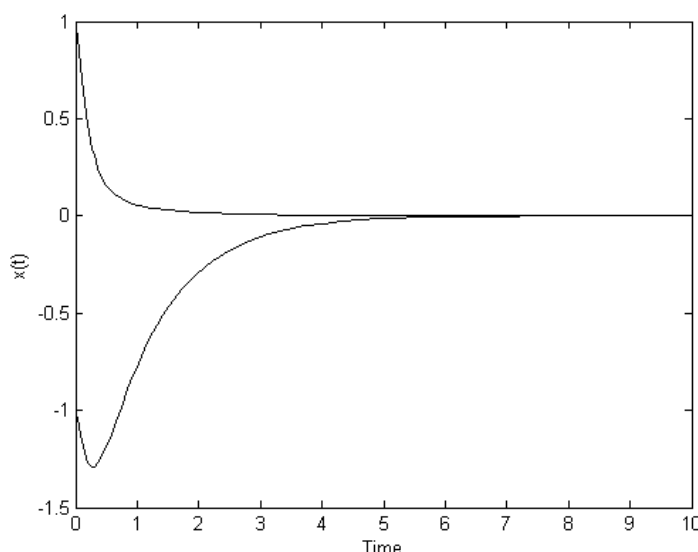
به این ترتیب کنترل‌کننده پسخورد K بدست می‌آید و سیستم حلقه بسته پایدار می‌شود.

مثال ۳.۷.۳. سیستم تاخیری زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-h), u(t) = Kx(t),$$

قبل از به کار بردن پسخورد (برای مثال $K = 0$) راست‌ترین مقدارهای ویژه یا همان مقدارهای ویژه s_0 ، $-1/1183$ و 0.1098 هستند و بنابراین زمانی که $h = 0.1s$ می‌باشد سیستم کنترل‌پذیر، ناپایدار است. بنابراین با استفاده از تخصیص مقدار ویژه می‌توان یک کنترل‌کننده پسخورد مناسب برای پایدار کردن سیستم کنترل‌پذیر طراحی کرد و با انتخاب پسخورد K مقدارهای ویژه را به موقعیت‌های مورد نظر در صفحه مختلط انتقال داد.

در این مثال نیز هدف پیدا کردن $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ به گونه‌ای است که راست‌ترین مقدار ویژه در



شکل ۹.۳: پاسخ سیستم بعد از به کار بردن پسخورد $K = \begin{bmatrix} -0.760 & -1.6548 \end{bmatrix}$ موقعیت ۱- قرار بگیرد که با استفاده از نرم افزار MATLAB ماتریس پسخورد حالت را بصورت زیر بدست می آوریم،

$$K = \begin{bmatrix} -0.760 & -1.6548 \end{bmatrix}, \quad (88.3)$$

و به این ترتیب سیستم حلقه بسته پایدار می شود. شکل (۹.۳) نیز پاسخ سیستم را بعد از به کار بردن پسخورد بدست آمده نشان می دهد. تا اینجا به بیان پایداری سیستم تک تاخیره با استفاده از روش لامبرت پرداختیم، اکنون به کمک قضایایی به آزمون پایداری می پردازیم.

۸.۳ آزمون پایداری

۱.۸.۳ سیستم‌هایی با تاخیر ثابت در متغیر حالت

سیستم تاخیر زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_d x(t-h), \quad (89.3)$$

که $A_0, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $0 < h < \infty$ می باشد.

مفهوم تابع لیاپانوف برای بهبود مشکلات پایداری در سیستم‌های تاخیر زمانی استفاده می گردد. در زیر به بیان قضایایی برای پایداری سیستم تاخیری می پردازیم.

قضیه ۱.۸.۳. فرض کنید تابع پیوسته $V(t, x_t) : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوریکه دو شرط زیر،

$$W_1(|x|) \leq V(t, x_t) \leq W_2(|x_t|) \quad ۱.$$

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -W_3(|x_t|) \quad ۲.$$

برقرار باشد، آن گاه جواب معادله (۸۹.۳) به طور یکنواخت پایدار مجانبی است.

W_1 و W_2 در قضیه فوق بصورت زیر تعیین می گردد،

$$\begin{cases} W_1(|x(t)|) = \lambda_{\min}(P_0)|x(t)|^2 \leq V(t, x_t), \\ W_2(|x(t)|) = [\lambda_{\max}(P_0) + h\lambda_{\max}(P_1)]|x(t)|^2 \geq V(t, x_t), \end{cases}$$

$P_0, P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس های معین مثبت و متقارن هستند و $\lambda_{\min}(P_0)$ کوچک ترین بخش حقیقی از مقدار ویژه ماتریس P_0 و $\lambda_{\max}(P_1)$ بزرگ ترین بخش حقیقی از مقدار ویژه ماتریس P_1 می باشد.

قضیه ۲.۸.۳. سیستم (۸۹.۳) پایدار مجانبی است اگر ماتریس معین مثبت و متقارن $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ وجود داشته باشند به طوریکه رابطه زیر برقرار باشد،

$$A_0^T P_0 + P_0 A_0 + P_1 + P_0 A_d P_1^{-1} A_d^T P_0 < 0. \quad (۹۰.۳)$$

برهان. فرض کنید $V(x_t)$ تابع لیاپانوفی بصورت زیر باشد،

$$V(x_t) = x(t)^T P_0 x(t) + \int_{t-h}^t x(s)^T P_1 x(s) ds, \quad (۹۱.۳)$$

طبق قضیه (۱.۸.۳) شرایط کافی برای پایداری سیستم (۸۹.۳) بصورت،

$$W_1(|x(t)|) \leq V(t, x_t) \leq W_2(|x_t|) \quad ۱.$$

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -W_3(|x_t|) \quad ۲.$$

می باشد، از آنجایی که توابع W_1 و W_2 بصورت زیر انتخاب می شوند،

$$W_1(|x(t)|) = \lambda_{\min}(P_0)|x(t)|^2 \leq V(t, x_t),$$

$$V(t, x_t) \leq [\lambda_{\max}(P_0) + h\lambda_{\max}(P_1)]|x(t)|^2 = W_2(|x_t|),$$

بنابراین شرط اول به وضوح برقرار است. برای اثبات شرط (۲) به محاسبه مشتق تابع $V(x_t)$ می پردازیم،

$$\dot{V}(t) = x(t)^T \{A_0^T P_0 + P_0 A_0 + P_1\} x(t) + x(t)^T P_0 A_d x(t-h) + x(t-h)^T A_d^T P_0 x(t) - x(t-h)^T P_1 x(t-h),$$

سمت راست معادله بالا، یک فرم درجه دو را بیان می کند، به منظور اطمینان از پایداری مجانبی از سیستم (۸۹.۳) این فرم درجه دو باید معین منفی باشد. به عبارتی،

$$V(t)^T M V(t) < 0, \quad (۹۲.۳)$$

$V(t)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$V(t)^T = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t-h)^T \end{bmatrix},$$

در این صورت ماتریس M بصورت زیر بدست می‌آید،

$$M = \begin{bmatrix} A_o^T P_o + P_o A_o + P_l & P_o A_d \\ A_d^T P_o & -P_l \end{bmatrix},$$

نابرابری (۹۲.۳) بوسیله ماتریس‌های متقارن افزاز شده در زیر بازنویسی شده است. با اجرای لم (۱.۳.۲) در شرط (۹۲.۳) بدست می‌آوریم،

$$A_o^T P_o + P_o A_o + P_l < 0, \quad (93.3)$$

$$A_o^T P_o + P_o A_o + P_l + P_o A_d P_l^{-1} A_d^T P_o < 0, \quad (94.3)$$

که رابطه دوم مرتبط است، بنابراین عدد ثابت و مثبت C_3 وجود دارد به‌طوری‌که،

$$\dot{V}(x_t) \leq -C_3(|x_t|).$$

اگر شرط (۹۴.۳) برقرار باشد اثبات کامل است. $\square$

اکنون در این قسمت روشی تحلیلی بر اساس نتایج حاصل از توسان^{۱۹} (۱۹۸۱) و هرترز^{۲۰} (۱۹۸۴) معرفی می‌گردد.

سیستم تاخیر زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + A_d x(t-h), \quad (95.3)$$

معادله مشخصه سیستم فوق بصورت زیر می‌باشد،

$$\det [sI - A_o - A_d e^{-sh}] = 0, \quad (96.3)$$

قضیه ۳.۸.۳. مقدار $s = j\omega, (\omega \geq 0)$ ، یک ریشه موهومی برای معادله (۹۶.۳) برای برخی از $h \geq 0$ است اگر، $s = j\omega$ یک ریشه از معادله زیر،

$$\det \left[sI - A_o - A_d \left(\frac{1-sT}{1+sT} \right)^2 \right] = 0, \quad (97.3)$$

برای بعضی از اعداد نامنفی T ، باشد [۴۸].

^{۱۹}Thowsen

^{۲۰}Hertz

نتیجه ۱.۸.۳. فرض کنید $0 \leq T < \infty$ باشد، در این صورت e^{-sh} معادل $\frac{(1-sT)^2}{(1+sT)^2}$ در $s = j\omega$ است که h و T توسط رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند،

$$h = \frac{4}{\omega} \arctan(\omega T) + 2\pi \frac{m}{\omega}, \quad (98.3)$$

که در آن $m = 0, \pm 1, \dots$ است [۴۸].

نتیجه ۲.۸.۳. اگر $s = j\omega$ یک ریشه موهومی از معادله (۹۶.۳) برای $h = h_0$ باشد، آن‌گاه $s = j\omega$ یک ریشه موهومی برای همین معادله در $h = h_0 + \frac{2\pi m}{\omega}$ نیز می‌باشد [۴۸].

اکنون در زیر معیاری برای تعیین بازه مقادیر تاخیر برای اینکه سیستم پایدار مجانبی باشد بیان می‌نماییم. این عمل به اصطلاح روش تجزیه- τ نام دارد که مقدار تاخیر برای آن که سیستم پایدار مجانبی باشد تعیین می‌گردد.

۲.۸.۳ معیار راث هورویتز

در سیستم‌های مرتبه بالا و یا در صورتیکه بعضی از ضرایب معادله مشخصه غیر عددی باشند، پیدا کردن مقادیر ویژه برای تعیین پایداری سیستم می‌تواند بسیار مشکل و یا حتی غیرممکن باشد. در چنین حالتی اگر معادله مشخصه سیستم تعیین شده باشد، می‌توان از روش راث استفاده نمود. در این قسمت معیار راث را بیان و تشریح خواهیم کرد اما سعی در اثبات آن نداریم، اثبات آن مبتنی بر قضیه اشتوم است که به دنباله‌های چندجمله‌ای‌های حقیقی مربوط می‌شود که اثباتی پیچیده دارد و از نظر جبری حائز اهمیت زیادی است، نتیجه آن، در نظریه کنترل از اهمیت زیادی برخوردار است. چندجمله‌ای مشخصه،

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n, \quad (99.3)$$

حاصل ضرب دو نوع عامل است، همه دارای ضرایب مثبت هستند و در نتیجه،

۱. تمام ضرایب $a_1, a_2, \dots, a_n$ باید موجود باشند.

۲. همه باید مثبت باشند.

اگر (۱) و (۲) برقرار باشند برای معیار راث باید جدول زیر را از ضرایب و مقادیر وابسته بسازیم. برای تعیین ستون‌های آرایه راث بصورت زیر عمل می‌کنیم،

سطر اول	۱	۱	a_2	a_4	a_6
سطر دوم	۲	a_1	a_3	a_5	a_7
سطر سوم	۳	b_1	b_2	b_3	b_4
سطر چهارم	۴	c_1	c_2	c_3	c_4
سطر پنجم	۵	d_1	d_2	d_3	d_4
$\vdots$					
... سطر (n+۱)					

در سطر اول ضرایب $s^n, s^{n-2}, \dots$ را در $P(s)$ درج می‌کنیم. وقتی ضرایب درج شوند، صفر قرار می‌دهیم، بنابراین اگر $n = 5$ ، آن‌گاه $a_6 = a_7 = \dots = 0$.
در سطر دوم ضرایب $s^{n-1}, s^{n-3}, \dots$ را در $P(s)$ درج می‌کنیم. برای تولید ضرایب $b_1, b_2, \dots$ ، c_1, c_2 و غیره از نتایج زیر استفاده می‌کنیم:

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_3 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad d_3 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_4 \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

به این ترتیب ستون‌های آرایه راث ساخته می‌شود [۴].

قضیه ۴.۸.۳. برای آنکه سیستم با معادله مشخصه (۹۹.۳) پایدار باشد، باید درایه‌های ستون اول راث تغییر علامت نداشته باشد.

مثال ۱.۸.۳. سیستم بدون تاخیر با معادله مشخصه زیر مفروض است. محدوده K را چنان بیابید که سیستم پایدار گردد.

$$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + Ks + 4K.$$

S^4	$\boxed{1}$	۵	$4K$
S^3	$\boxed{4}$	K	۰
S^2	$\boxed{\frac{20-K}{4}}$	$4K$	۰
S^1	$\boxed{\frac{20K - K^2 - 16K}{20-K}}$	۰	۰
S^0	$\boxed{4K}$	۰	۰

طبق تعریف فوق، ستون اول آرایه راث نباید تغییر علامت داشته باشد، از آنجایی که ۱ و ۴ اعداد مثبتی هستند بنابراین باید $20 - K > 0$ باشد در نتیجه، $K < 20$ است. و همچنین $20K - K^2 - 16K > 0$ نیز باید برقرار باشد، بنابراین از این قسمت نیز، $K > 0$ و $K < 4$ نتیجه می‌گردد. در نهایت باید $0 < K < 4$ باشد تا سیستم بدون تاخیر پایدار گردد.

اکنون الگوریتمی برای تعیین بازه تاخیر برای آنکه سیستم پایدار باشد ارائه می‌دهیم.

الگوریتم

گام اول از آزمون پایداری استاندارد راث-هورویتز^{۲۱} آن مقادیر T برای آنکه چندجمله‌ای (۹۷.۳) ریشه‌های موهومی داشته باشد را تعیین کنید. از این به بعد این مقادیر خاص از T با $\hat{T}$ نشان داده می‌شود.

گام دوم برای هر $\hat{T}$ ، ریشه‌های موهومی مربوط از معادله (۹۷.۳) با $s = \pm j\hat{\omega}$ تعیین گردد.

گام سوم برای هر $\hat{T}$ با $\hat{\omega}$ مربوطه مقادیر $\hat{h}$ را با استفاده از نتیجه (۲.۸.۳) تحت محدودیت $\hat{h} \geq 0$ محاسبه کنید.

گام چهارم مسیر حرکت از ریشه‌های موهومی $j\hat{\omega}$ را بررسی کنید. مسیر مکان ریشه توسط علامت بخش حقیقی $(\frac{ds}{d\hat{h}})$ برای مقدار $s = j\hat{\omega}$ و $\hat{h}$ تعیین می‌گردد. اگر در یکی از نقاط $Re(\frac{ds}{d\hat{h}}) = 0$ و تعداد ریشه‌های $Re(\frac{ds}{d\hat{h}})$ فرد باشد، مکان ریشه تنها در محور موهومی دیده می‌شود که برای این مقدار از $\hat{h}$ سیستم ناپایدار است.

گام پنجم تحلیل پایداری سیستم (۹۵.۳) برای $h = 0$.

گام ششم بازه‌های مقادیر تاخیر برای این که سیستم پایدار مجانبی باشد را از نتایج و مراحل ۴ و ۵ دنبال کنید.

^{۲۱}Routh (-Hurwitz)

مثال ۲.۸.۳. همه مقادیر تاخیر ثابت h به طوری که سیستم،

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_2(t-h), \end{cases}$$

پایدار مجانبی باشد را پیدا کنید.

ماتریس A_0 و A_1 از سیستم فوق بصورت،

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

می باشند بنابراین معادله مشخصه بصورت زیر محاسبه می گردد،

$$\det(sI - A_0 - A_1 e^{-sh}) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{-sh} \end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1+e^{-sh} \end{bmatrix} \right) = 0,$$

در نهایت معادله مشخصه سیستم بصورت زیر بدست می آید ،

$$P(s, e^{-sh}) = s^2 + se^{-sh} + s + 1 = 0,$$

معادله کمکی (۹۷.۳) بصورت زیر،

$$s^2 + s \left(\frac{1-sT}{1+sT} \right) + s + 1 = 0,$$

$$s^2(1+sT)^2 + s(1-sT)^2 + s(1+sT)^2 + (1+sT)^2 = 0,$$

$$T^2 s^4 + 2T(1+T)s^3 + (1+T^2)s^2 + 2(1+T)s + 1 = 0,$$

می باشد و ستون اول آرایه راث بصورت زیر محاسبه می گردد،

S^4	T^2	$(1+T^2)$	۱
S^3	$2T(1+T)$	$2(1+T)$	۰
S^2	$T^2 - T + 1$	۱	۰
S^1	$\frac{2(T-1)^2(1+T)}{T^2 - T + 1}$	۰	۰
S^0	۱	۰	۰

همه عناصر در ستون اول به ازای تمام $T \in (0, \infty)$ مثبت هستند بجز برای یکی مانده به آخر (یعنی ضریب s^1) که به ازای $T = 1 = \hat{T}$ صفر است که منجر به یک جفت ریشه موهومی در

$s = \pm j$ می‌گردد. بنابراین $\hat{T} = 1$ و $\hat{\omega} = 1$ مسیری از مکان ریشه در $s = j$ و $h = \pi + 2\pi|m|$ را بررسی می‌کند.

$$\frac{ds}{dh} = \frac{s^2 e^{-sh}}{2s + 1 + e^{-sh}(1 - sh)}, \quad (100.3)$$

برای محاسبه $Re[\frac{ds}{dh}]$ از بسط e^{-sh} کمک می‌گیریم. برای $s = j$ و $h = (2|m| + 1)\pi$ بدست می‌آوریم،

$$e^{-sh} = e^{-jh} = \cos h - j \sin h,$$

$$Re[\frac{ds}{dh}] = Re\left(\frac{s^2 e^{-sh}}{2s + 1 + e^{-sh}(1 - sh)}\right) = Re\left(\frac{s^2 \cos h - s^2 j \sin h}{2s + 1 + (1 - sh)(\cos h - j \sin h)}\right),$$

روشن است که h ضریب فردی از عدد π است، بنابراین $\cos h = -1$ و $\sin h = 0$ می‌باشند. در نتیجه بدست می‌آوریم که،

$$Re[\frac{ds}{dh}] = Re[j \frac{-1}{2+h}] = 0,$$

بنابراین تعداد ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم،

$$\left. \frac{d^2 s}{dh^2} \right|_{s=j, h=(2|m|+1)\pi} = \frac{-2(1-j)}{(2+h)^2},$$

از آنجایی که $\frac{d^2 s}{dh^2}$ منفی شده است بنابراین یک تابعی نزولی می‌باشد، در نتیجه تعداد ریشه‌های $Re(\frac{ds}{dh})$ ، یک (فرد) است، بنابراین مکان ریشه تنها در محور موهومی دیده می‌شود، اما از آن عبور نمی‌کند، بنابراین سیستم برای هر مقداری بجز در نقطه $h = (2|m| + 1)\pi$ پایدار مجانبی است [۴۸].

معیار پایداری راث در تحلیل سیستم‌های کنترل خطی کاربرد محدودی دارد، زیرا این معیار راهی برای بهبود پایداری نسبی یا پایدار کردن یک سیستم ناپایدار نشان نمی‌دهد. ولی می‌توان اثر تغییر یک یا دو پارامتر سیستم را با بررسی مقادیری که باعث ناپایداری می‌شود، بررسی کرد. در واقع به کمک این معیار گستره پایداری یک پارامتر را بررسی می‌کنیم.

۳.۸.۳ سیستم‌های با تاخیر متغیر با زمان در متغیر حالت

سیستم تاخیر زمانی زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_d x(t - h(t, x(t))), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t). \end{cases} \quad (101.3)$$

قضیه ۵.۸.۳. سیستم (۱۰۱.۳) پایدار مجانبی مستقل از تاخیر است اگر نامساوی زیر،

$$\mu(A_0) + \|A_d\| < 0, \quad (102.3)$$

به ازای هر $\alpha = 1, 2, \infty$ برقرار باشد که $\mu(A_\alpha)$ اندازه ماتریس است و بصورت های زیر تعریف می گردد،

$$\begin{cases} \mu(A)_1 = \max_j [Re(a_{jj}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|], \\ \mu(A)_2 = \alpha \lambda_{\max}(A^T + A), \\ \mu(A)_\infty = \max_i [Re(a_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|]. \end{cases}$$

قضیه ۶.۸.۳. سیستم خطی تاخیری زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-d(t)), & t \geq t_0, \\ \dot{d}(t) \leq d < 1, \end{cases} \quad (10.3.3)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و تاخیر متغیر با زمان که بصورت $d(t) \in [0, h]$ محدود می گردد. در اینجا A و A_1 ماتریس های ثابت $n \times n$ می باشند. سیستم (۱۰.۳.۳) بطور یکنواخت برای همه تاخیرهای $d(t)$ با شرط $\dot{d}(t) \leq d < 1$ پایدار مجانبی است، هرگاه ماتریس های $n \times n$ ، $P > 0$ و $Q > 0$ وجود داشته باشند به طوریکه LMI^{۲۲} (نامساوی ماتریس خطی) (۱۰.۴.۳) برقرار باشد.

$$W = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_1 \\ A_1^T P & -(1-d)Q \end{bmatrix} < 0, \quad (10.4.3)$$

برهان. تابع لیپانوف برای سیستم (۱۰.۳.۳) به فرم زیر می باشد،

$$V(t, x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^t x(s)^T Q x(s) ds, \quad (10.5.3)$$

که P و Q ماتریس های معین مثبت $n \times n$ می باشند. توجه داشته باشید که تابع V در سیستم (۱۰.۵.۳) بدلیل وجود $d(t)$ به t وابسته است. اکنون مشتق تابع لیپانوف را می یابیم،

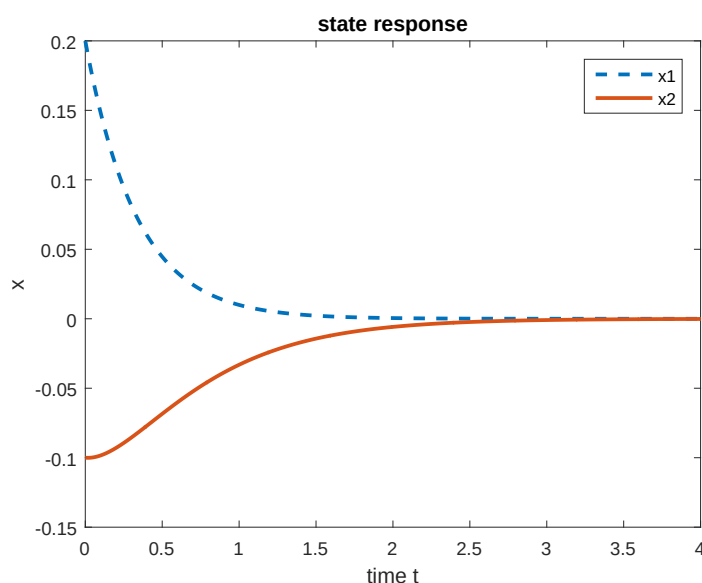
$$\dot{V}(t, x_t) = 2x(t)^T P \dot{x}(t) + x(t)^T Q x(t) - (1 - \dot{d}(t))x(t-d(t))^T Q x(t-d(t)), \quad (10.6.3)$$

عبارت $\dot{x}(t)$ رابطه (۱۰.۳.۳) را در (۱۰.۶.۳) جایگزین می کنیم و بدست می آوریم،

$$\dot{V}(t, x_t) \leq 2x(t)^T P \dot{x}(t) + x(t)^T Q x(t) - (1-d)x(t-d(t))^T Q x(t-d(t)) =$$

$$\begin{bmatrix} x(t)^T & x(t-d(t))^T \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix} \leq -a|x(t)|^2. \quad (10.7.3)$$

بنابراین طبق نامساوی (۱۰.۴.۳) سیستم (۱۰.۳.۳) پایدار می باشد [۴۱]. □



شکل ۱۰.۳: رفتار سیستم با تاخیر در متغیر حالت برای مثال (۳.۸.۳)

مثال ۳.۸.۳. سیستم (۱۰.۳.۳) با ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

و $d = 0.3$ را در نظر بگیرید.

برای بدست آوردن ماتریس‌های P و Q که شرایط قضیه فوق را برآورده سازد با استفاده از نرم‌افزار MATLAB ماتریس‌های P و Q را بصورت زیر بدست می‌آوریم، (نمودار (۱۰.۳) را ببینید).

$$P = \begin{bmatrix} 0.3805 & -0.2800 \\ -0.2800 & 0.3292 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0585 & -0.1040 \\ -0.1040 & 0.3763 \end{bmatrix},$$

سیستم با یک تاخیر متغیر با زمان در متغیر حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-d(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0], \end{cases} \quad (10.8.3)$$

که در آن $x(t)$ متغیر حالت، A و A_1 ماتریس‌های حقیقی، ثابت و مشخصی می‌باشند و $d(t)$ تاخیر متغیر با زمان که در شرایط زیر صدق می‌کند،

$$\begin{aligned} 0 &\leq h_1 \leq d(t) \leq h_2, \\ \dot{d}(t) &\leq \mu, \end{aligned} \quad (10.9.3)$$

$\phi(t)$ یک تابع اولیه حقیقی و پیوسته بر روی $[-h_2, 0]$ می باشد. هدف، یافتن معیارهای جدید پایداری وابسته به تاخیر برای سیستم (۱۰۸.۳) می باشد. در این بخش، یک لم را معرفی می کنیم که نقش مهمی در استخراج نتایج دارد.

لم ۱۰۸.۳. برای هر ماتریس معین مثبت و متقارن $M > 0$ ، عدد $y > 0$ و تابع برداری $w : [0, y] \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوریکه نامساوی زیر برقرار است:

$$\left(\int_0^y w(s) ds \right)^T M \left(\int_0^y w(s) ds \right) \leq y \left(\int_0^y w(s)^T M w(s) ds \right).$$

برهان. براحتی از لم مکمل شر دیده می شود که،

$$\begin{bmatrix} w^T(s) M w(s) & w^T(s) \\ w(s) & M^{-1} \end{bmatrix} \geq 0,$$

برای هر $0 \leq s \leq y$. با انتگرال گیری از 0 تا y از نامساوی بالا بدست می آوریم که،

$$\begin{bmatrix} \int_0^y w^T(s) M w(s) ds & \int_0^y w^T(s) ds \\ \int_0^y w(s) ds & y M^{-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

با استفاده از مکمل شر اثبات کامل است [۱۸]. $\square$

ابتدا به معرفی نمادهایی که به کار خواهیم برد می پردازیم: I ماتریس واحد با ابعاد مناسب می باشد و برای ماتریس حقیقی و متقارن X ، نماد $X > 0$ بدین معناست که ماتریس X معین مثبت است و جمله متقارن در یک ماتریس با نماد $*$ مشخص می گردد. اکنون یک معیار پایداری وابسته به تاخیر برای سیستم (۱۰۸.۳) ارائه می دهیم.

قضیه ۷.۸.۳. سیستم (۱۰۸.۳) با شرایط (۱۰۹.۳) برای $h_1 \leq h_2$ و $0 \leq \mu$ داده شده پایدار مجانبی است، اگر ماتریس های $P > 0$ ، $Q_i > 0$ ، $(i = 1, 2, 3)$ و $Z_j > 0$ ، $(j = 1, 2)$ وجود داشته باشد به طوریکه LMIs زیر برقرار باشد،

$$\phi_1 = \phi - \begin{bmatrix} 0 & -I & I & 0 \end{bmatrix}^T Z_2 \begin{bmatrix} 0 & -I & I & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (110.3)$$

$$\phi_2 = \phi - \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I \end{bmatrix}^T Z_2 \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (111.3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \phi = & \begin{bmatrix} \Upsilon & P A_1 & Z_1 & 0 \\ * & -(1-\mu)Q_3 - 2Z_2 & Z_2 & 0 \\ * & * & -Q_1 - Z_1 - Z_2 & 0 \\ * & * & * & -Q_2 - Z_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A & A_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T (h_1^2 Z_1 + h_2^2 Z_2) \begin{bmatrix} A & A_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (112.3)$$

با

$$\Upsilon = PA + A^T P + \sum_{i=1}^3 Q_i - Z_1,$$

$$h_{12} = h_2 - h_1.$$

برهان. تابع لیپانوف را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x(t)^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^t x(\alpha)^T Q_3 x(\alpha) d\alpha + \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t x(\alpha)^T Q_i x(\alpha) d\alpha \\ & + \int_{-h_1}^0 \int_{t+s}^t h_1 \dot{x}(\alpha)^T Z_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha ds + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^t h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha ds, \end{aligned} \quad (113.3)$$

که $x_t = x(t + \theta)$ ، $0 \leq \theta \leq h$. سپس در ادامه مشتق نسبت به زمان تابع لیپانوف را محاسبه می‌نماییم،

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & \Upsilon x(t)^T P (Ax(t) + A_1 x(t - d(t))) + \sum_{i=1}^3 x(t)^T Q_i x(t) \\ & - \sum_{i=1}^2 x(t - h_i)^T Q_i x(t - h_i) - (1 - \mu) x(t - d(t))^T Q_3 x(t - d(t)) \\ & + (Ax(t) + A_1 x(t - d(t)))^T \times (h_1^2 Z_1 + h_{12}^2 Z_2) (Ax(t) + A_1 x(t - d(t))) \\ & - \int_{t-h_1}^t h_1 \dot{x}(\alpha)^T Z_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha - \int_{t-h_2}^{t-h_1} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (114.3)$$

با استفاده از لم (۱.۸.۳) داریم که،

$$\begin{aligned} & - \int_{t-h_1}^t h_1 \dot{x}(\alpha)^T Z_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ & \leq - (x(t) - x(t - h_1))^T Z_1 (x(t) - x(t - h_1)), \end{aligned} \quad (115.3)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} & - \int_{t-h_2}^{t-h_1} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha = \\ & - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ & = - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} (h_2 - d(t)) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} (d(t) - h_1) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ & - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} (d(t) - h_1) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} (h_2 - d(t)) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

تعریف کنید،

$$\beta = \frac{(d(t) - h_1)}{h_{12}},$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} & - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} (d(t) - h_1) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha = -\beta \int_{t-h_2}^{t-d(t)} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ & \leq -\beta \int_{t-h_2}^{t-d(t)} (h_2 - d(t)) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} & - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} (h_2 - d(t)) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha = -(\beta - \beta) \int_{t-d(t)}^{t-h_1} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ & \leq -(\beta - \beta) \int_{t-d(t)}^{t-h_1} (d(t) - h_1) \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

بنابر لم (۱.۸.۳) بدست می‌آوریم که،

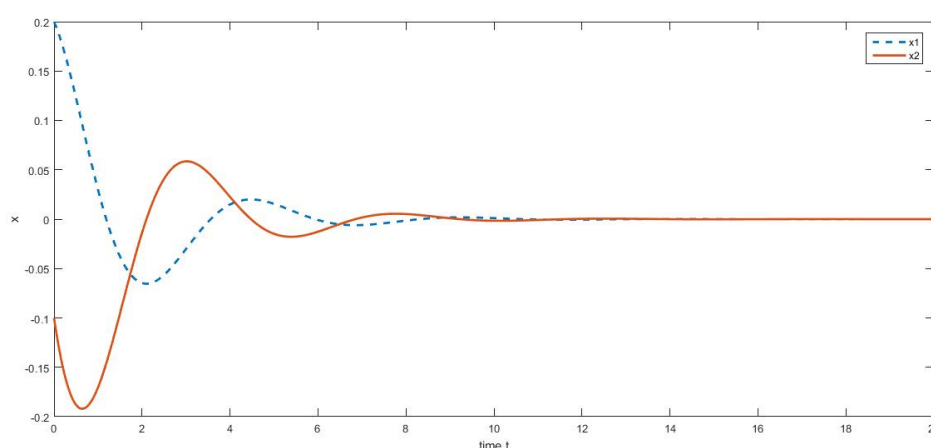
$$\begin{aligned} & - \int_{t-h_2}^{t-h_1} h_{12} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ & \leq - (x(t-d(t)) - x(t-h_2))^T Z_2 (x(t-d(t)) - x(t-h_2)) \\ & \quad - (x(t-h_1) - x(t-d(t)))^T Z_2 (x(t-h_1) - x(t-d(t))) \quad (۱۱۶.۳) \\ & \quad - \beta (x(t-d(t)) - x(t-h_2))^T Z_2 (x(t-d(t)) - x(t-h_2)) \\ & \quad - (\beta - \beta) (x(t-h_1) - x(t-d(t)))^T Z_2 (x(t-h_1) - x(t-d(t))), \end{aligned}$$

با ترکیب روابط (۱۱۶.۳) - (۱۱۴.۳) داریم که،

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) & \leq x(t)^T \left[PA + A^T P + \sum_{i=1}^3 Q_i - Z_1 + A^T (h_1^T Z_1 + h_{12}^T Z_2) A \right] x(t) \\ & \quad + \Upsilon x(t)^T [PA_1 + A^T (h_1^T Z_1 + h_{12}^T Z_2) A_1] x(t-d(t)) + \Upsilon x(t)^T Z_1 x(t-h_1) \\ & \quad + x(t-d(t))^T [-(\beta - \mu) Q_2 - \Upsilon Z_2 + A_1^T (h_1^T Z_1 + h_{12}^T Z_2) A_1] x(t-d(t)) \\ & \quad + \Upsilon x(t-d(t))^T Z_2 x(t-h_1) + \Upsilon x(t-d(t))^T Z_2 x(t-h_2) \\ & \quad - x(t-h_1)^T (Q_1 + Z_1 + Z_2) x(t-h_1) - x(t-h_2)^T (Q_2 + Z_2) x(t-h_2) \\ & \quad - \beta (x(t-d(t)) - x(t-h_2))^T Z_2 (x(t-d(t)) - x(t-h_2)) \\ & \quad - (\beta - \beta) (x(t-h_1) - x(t-d(t)))^T Z_2 (x(t-h_1) - x(t-d(t))) \\ & \quad = \zeta(t)^T \phi \zeta(t) - \beta (x(t-d(t)) - x(t-h_2))^T Z_2 (x(t-d(t)) - x(t-h_2)) \\ & \quad - (\beta - \beta) (x(t-h_1) - x(t-d(t)))^T Z_2 (x(t-h_1) - x(t-d(t))) \\ & \quad = \zeta(t)^T [(\beta - \beta) \phi_1 + \beta \phi_2] \zeta(t), \end{aligned}$$

که ϕ_1, ϕ_2, ϕ به ترتیب در (۱۱۰.۳)، (۱۱۱.۳)، (۱۱۲.۳) داده شده‌اند و

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t-d(t))^T & x(t-h_1)^T & x(t-h_2)^T \end{bmatrix}^T,$$



شکل ۱۱.۳: رفتار سیستم برای مثال (۴.۸.۳)

با توجه به اینکه $0 \leq \beta \leq 1$ برآورد دقیقی از $\dot{V}(x_t)$ که یک دامنه محدبی از ماتریس‌های $(1 - \beta)\phi_1 + \beta\phi_2$ است، استنتاج می‌گردد. با توجه به شرایط (۱۱۰.۳) و (۱۱۱.۳) سیستم (۱۰۸.۳) پایدار مجانبی است و اثبات تمام است [۱۲]. $\square$

مثال ۴.۸.۳. پایداری سیستم (۱۰۸.۳) با پارامترهای زیر را بررسی کنید،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

با بررسی پایداری توسط دستور LMI در نرم‌افزار MATLAB. $h_2 = 1$, $h_1 = 0.2$, $\mu = 0.3$ بدست می‌آوریم که،

$$P = \begin{bmatrix} 3.09/3750 & 53/9143 \\ 53/9143 & 169/3677 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.3489 & -0.2384 \\ -0.2384 & 1.3513 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 29/1103 & 6/3920 \\ 6/3920 & 38/4219 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 120/5804 & 30/5596 \\ 30/5596 & 259/5789 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0.4589 & -0.2386 \\ -0.2386 & 1.2803 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 57/3687 & 15/9669 \\ 15/9669 & 46/2948 \end{bmatrix}.$$

پایداری این سیستم در نمودار (۱۱.۳) نمایش داده شده است.

فصل ۴

سیستم‌های کنترل خطی با دو تاخیر زمانی

۱.۴ مقدمه

برای سال‌ها سیستم با تاخیر زمانی توجه قابل قبولی را به خود اختصاص داده است. زیرا اغلب در سیستم‌های عملی مختلف همراه هستند. بدلیل آن‌که اغلب زمان تاخیر، علت اصلی نوسان است، واگرایی و اغتشاش اثرات قابل توجهی بر پایداری برای سیستم‌های با تاخیر زمانی خواهد گذاشت. با توجه به اینکه معیار پایداری شامل اطلاعاتی از تاخیر است آن را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: معیار پایداری مستقل از تاخیر و وابسته به تاخیر.

معیار پایداری مستقل از تاخیر برای تاخیرهای با اندازه کوچک محافظه‌کارانه است. در اینجا بیشتر به پایداری وابسته به تاخیر توجه شده است.

برای نتایج وابسته به تاخیر، به مقالات [۲۵]–[۱۹] مراجعه کنید. در این میان، مقالات [۲۳، ۲۴، ۲۵] سیستم‌هایی با بازه تاخیر متغیر با زمان هستند. شایان ذکر است که سیستم‌های پرش مارکوف با تاخیر دارای کاربردهای گسترده‌ای در صنایع است. برای این نوع از سیستم‌ها می‌توان به نتایجی که به تازگی منتشر شده است مراجعه کرد [۲۶، ۲۷، ۲۸].

سیستم کنترل شبکه بدلیل مزایای خود در کاهش هزینه، کاهش وقت و قدرت مورد نیاز، نصب و راه‌اندازی ساده و قابلیت اطمینان بالا توجه زیادی را به خود جلب کرده است. در میان

نتایج گزارشات اخیر بر اساس نظریه مدل‌سازی، مشکلات طراحی کنترل H^∞ برای سیستم کنترل شبکه در [۲۹] بررسی می‌گردد و کنترل رویداد حاصل برای سیستم‌های کنترل شبکه از طریق کنترل پس‌خورد خروجی پویا در [۳۰] مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تحلیل پایداری برای سیستم‌های با دو تاخیر زمانی در متغیر ورودی در سال ۲۰۰۷ ابتدا توسط جامز لم^۱، هویجان گائو^۲ و چنگ هانگ ونگ^۳ انجام شد و معیارهای پایداری وابسته به تاخیر بدست آمد [۳۱]، تحقیقات زیر توسط افراد بالا و تانگون چن^۴ در سال ۲۰۰۸ بوسیله ساخت یک تابع لیاپانوف جدید صورت گرفت [۳۲]. اخیرا پایداری در این مدل سیستم‌ها در [۳۳، ۳۴، ۳۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۳۳] پین-لین لیو^۵ در سال ۲۰۱۴ با بدست آوردن نتایج جایگزین متغیرهای کمکی معرفی می‌کند در حالیکه در [۳۴]، شو^۶، ژانگ^۷، ژو^۸، میاو^۹ بدون ارائه متغیر کمکی، با استفاده از روش چندوجهی محدب نتایج پایداری جدیدی را بدست آورده‌اند. در [۳۵] زیاهوا جی^{۱۰}، با اجرای جدید نابرابری انتگرال نتایج پایداری را بهبود بخشید. با این حال در [۳۵]–[۳۱] معین مثبت بودن تابع لیاپانوف که یک شرط ضروری است، سهوا نادیده گرفته شده است. بنابراین هنوز هم روش‌هایی برای بهبود در مقالات وجود دارد. در اینجا دو تاخیر ورودی افزوده را در نظر می‌گیریم و از آنجایی که شرط اولیه برای عملکرد سیستم‌های کنترل شبکه، پایداری است و یک سیستم کنترل شبکه ناپایدار، کارهای مورد انتظار را اجرا نمی‌کند، بر روی پایداری سیستم‌های کنترل شبکه با دو تاخیر ورودی افزوده متمرکز می‌شویم.

۲.۴ سیستم‌هایی با تاخیر متغیر با زمان در ورودی

۱.۲.۴ معرفی سیستم کنترل شبکه با دو تاخیر

هنگامی که دستگاه فیزیکی یک سیستم خطی است و کنترلگر پس‌خورد حالت با ماتریس بهره K نشان داده شود، سیستم کنترل شبکه با دو تاخیر بصورت زیر می‌باشد،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - d_1(t) - d_2(t)), \\ u(t - d_1(t) - d_2(t)) = Kx(t - d_1(t) - d_2(t)), \end{cases}$$

^۱James Lam

^۲Huijun Gao

^۳Changhong Wang

^۴Tongwen Chen

^۵Pin-Lin Liu

^۶H. Shao

^۷Z. Zhang

^۸X. Zhu

^۹G. Miao

^{۱۰}Xiaohua Ge

در نتیجه بدست می‌آوریم،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d_1(t) - d_2(t)), \quad (1.4)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و A و B ماتریس‌های ثابت حقیقی مشخصی هستند، $d_1(t)$ و $d_2(t)$ دو تاخیر متغیر با زمان در ورودی می‌باشند. برای دو تاخیر فوق مفروضات زیر را معرفی می‌کنیم،

$$0 \leq d_1(t) \leq h_1, \quad 0 \leq d_2(t) \leq h_2, \quad (2.4)$$

$$\dot{d}_1(t) \leq \mu_1, \quad \dot{d}_2(t) \leq \mu_2, \quad (3.4)$$

در ابتدا پایداری وابسته به سیستم (۱.۴) را در نظر می‌گیریم. با جدا کردن کل بازه تاخیر به زیربازه‌ها، یک تابع لیاپانوف جدید می‌سازیم که اطلاعاتی از حالت $x(t - h_1)$ و $x(t - h)$ ارائه می‌دهد.

نتایج بدست آمده از پایداری، به هر دو تاخیر وابسته است و نسبت به تک تاخیره دارای محافظه‌کاری کمتری است. عبارتی دقت محاسبه ماتریس K برای حالتیکه تعداد تاخیرها بیشتر است، بالاتر می‌رود. اکنون نتایج پایداری را برای مسئله پایداری پسخورد حالت بکار می‌بریم که با تعیین شرایط وابسته به تاخیر برای کنترلگر، ماتریس بهره حالت K بدست می‌آید، به‌طوریکه سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی باشد.

ابتدا به معرفی نمادهایی که به کار خواهیم برد می‌پردازیم: T مخفف ترانهاده ماتریس است، و E_i پایه سطر i -ام $\{I_n, I_n, I_n, I_n, I_n\}$ و $diag\{I_n, I_n, I_n, I_n, I_n\}$ و $E_{ij} = E_i - E_j$, $(i, j = 1, \dots, 5)$ است. برای ماتریس حقیقی و متقارن X و Y نماد $X > Y$ بدین معناست که $X - Y$ معین مثبت می‌باشد.

۲.۲.۴ تحلیل پایداری

در این بخش مشکلات تحلیل پایداری را بیان می‌کنیم و ماتریس پسخورد حالت K را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی باشد. یک روش معمول برای حل این مشکل، جمع دو تاخیر $d_1(t)$ و $d_2(t)$ در یک تاخیر است.

$$d(t) = d_1(t) + d_2(t), \quad (4.4)$$

در این صورت سیستم (۱.۴) بصورت زیر تغییر می‌کند:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d(t)),$$

$$0 \leq d(t) \leq h, \quad \dot{d}(t) \leq \mu, \quad (5.4)$$

که h و μ بصورت زیر خواهند بود:

$$h = h_1 + h_2, \quad (6.4)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

اکنون سیستم با دو تاخیر به یک سیستم با یک تاخیر زمانی تبدیل شده است که می‌توان از روش‌های پایداری که در فصل قبل بیان گردید استفاده نمود.

مثال ۱.۲.۴. به سیستم (۱.۴) با پارامترهای داده شده توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 1 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

$$\text{و } \mu_2 = 0.2, \mu_1 = 0.1, h_2 = 2, h_1 = 1$$

در این حالت سیستم (۱.۴) بصورت،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-3), \\ h = h_1 + h_2 = 1 + 2 = 3, \end{cases} \quad (7.4)$$

که سیستمی با یک تاخیر است تبدیل می‌گردد و K را می‌توان از طریق روش لامبرت که در فصل قبل بیان شد محاسبه کرد.

مجموع دو تاخیر بصورت یک تاخیر مناسبی نمی‌باشد. از طرفی، از نقطه نظر مهندسی دو تاخیر ممکن است خواص متفاوتی داشته باشند که مجموع آن‌ها در یک تاخیر کار مناسبی نباشد و از طرف دیگر، از نقطه نظر ریاضی هنگامی که $d_1(t) + d_2(t)$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد نیازی نیست ماکزیمم $d_1(t)$ و $d_2(t)$ را همزمان داشته باشیم، بعبارت دیگر اگر از کران بالا برای تاخیر $d_1(t) + d_2(t)$ استفاده می‌کنیم در واقع از ماکزیمم‌های $d_1(t)$ و $d_2(t)$ استفاده می‌نماییم که ماکزیمم $d(t)$ به‌طور معمول از $h = h_1 + h_2$ کمتر است. اکنون یک نتیجه جدید برای پایداری سیستم کنترل خطی (۱.۴) با دو تاخیر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۴. سیستم کنترل خطی (۱.۴) با شرایط داده شده در (۲.۴) و (۳.۴) برای پارامترهای K, h_1, h_2, μ_1 و μ_2 پایدار مجانبی است، هرگاه ماتریس‌های متقارن $Q_2 = Q_2^T, P = P^T, Q_4 = Q_4^T, Q_i > 0, (i = 1, 3), Z_j > 0, (j = 1, 2), X_k$ و Y وجود داشته باشند به‌طوری‌که LMIs (نامساوی‌های ماتریس خطی) زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1}{h}P + Z_1 & -Z_1 \\ * & Z_1 + h_1Q_4 \end{bmatrix} > 0, \quad (8.4)$$

$$\begin{bmatrix} P + Z_2 & -Z_2 \\ * & Z_2 + hQ_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (9.4)$$

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} Z_1 & X_i \\ X_i^T & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (10.4)$$

$$\Omega_\Delta = \begin{bmatrix} Z_2 & Y \\ Y^T & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (11.4)$$

$$\phi - h_1^{-1} M_1^T \Omega M_1 - h_2^{-1} E_{\Delta 4}^T Z_2 E_{\Delta 4} < \circ, \quad (12.4)$$

$$\phi - h_1^{-1} M_2^T \Omega_4 M_2 - h_2^{-1} M_3^T \Omega_5 M_3 < \circ, \quad (13.4)$$

که در آن،

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & PBK & \circ & \circ & \circ \\ * & -(\mathbf{I} - \mu)Q_3 & \circ & \circ & \circ \\ * & * & -(\mathbf{I} - \mu_1)Q_1 & \circ & \circ \\ * & * & * & -Q_2 & \circ \\ * & * & * & * & Q_2 - Q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ (BK)^T \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} [h_1 Z_1 + h_2 Z_2] \begin{bmatrix} A^T \\ (BK)^T \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}^T,$$

$$\varphi_{11} = PA + A^T P + Q_1 + Q_3 + Q_4,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 & X_2 \\ * & Z_1 & X_3 \\ * & * & Z_1 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{32} \\ E_{25} \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{35} \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} E_{52} \\ E_{24} \end{bmatrix}, \quad (14.4)$$

h و μ در (۶.۴) بیان شده است [۳۶].

برهان. ابتدا کل بازه تاخیر $[-h, \circ]$ را به $[-h, -h_1]$ و $[-h_1, \circ]$ تقسیم نموده، سپس تابع لیاپانوفی همانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V(t) = & x(t)^T P x(t) + \int_{t-d_1(t)}^t x(\alpha)^T Q_1 x(\alpha) d\alpha + \int_{t-d(t)}^t x(\alpha)^T Q_3 x(\alpha) d\alpha \\ & + \int_{-h_1}^{\circ} x(t+\alpha)^T Q_4 x(t+\alpha) d\alpha + \int_{-h}^{-h_1} x(t+\alpha)^T Q_2 x(t+\alpha) d\alpha \\ & + \int_{-h_1}^{\circ} \int_{t+s}^t \dot{x}(\alpha)^T Z_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha ds + \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+s}^t \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha ds, \end{aligned} \quad (15.4)$$

که قبلاً $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$ تعریف کردیم.

روشن است که تابع لیاپانوف می‌تواند اطلاعاتی از حالت $x(t - h_1)$ و همچنین $x(t - h)$ در اختیار قرار دهد.

تحت شرایط قضیه (۴.۲.۱)، ابتدا نشان می‌دهیم که تابع لیاپانوف ذکر شده در بالا معین مثبت است.

از لم (۱.۸.۳) می‌توان نتایج زیر را دریافت کرد،

$$\int_{-h_1}^{\circ} \int_{t+s}^t \dot{x}(\alpha)^T Z_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha ds \geq \frac{1}{h_1} \int_{-h_1}^{\circ} [x(t) - x(t+s)]^T Z_1 [x(t) - x(t+s)] ds, \quad (16.4)$$

و به همین ترتیب،

$$\int_{-h}^{-h_1} \int_{t+s}^t \dot{x}(\alpha)^T Z_{\Upsilon} \dot{x}(\alpha) d\alpha ds \geq \frac{1}{h} \int_{-h}^{-h_1} [x(t) - x(t+s)]^T Z_{\Upsilon} [x(t) - x(t+s)] ds, \quad (17.4)$$

از طرف دیگر،

$$x(t)^T P x(t) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 x(t)^T P x(t) ds + \frac{1}{h} \int_{-h}^{-h_1} x(t)^T p x(t) ds, \quad (18.4)$$

با توجه به اینکه $Q_i > 0, (i = 1, 3)$ می‌باشد، از (۱۵.۴) تا (۱۸.۴) را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \frac{1}{h} \int_{-h_1}^0 x(t)^T P x(t) ds + \frac{1}{h} \int_{-h}^{-h_1} x(t)^T P x(t) ds + \int_{-h_1}^0 x(t+s)^T Q_{\Phi} x(t+s) ds \\ &\quad + \int_{-h}^{-h_1} x(t+s)^T Q_{\Upsilon} x(t+s) ds + \frac{1}{h_1} \int_{-h_1}^0 [x(t) - x(t+s)]^T Z_{\Lambda} [x(t) - x(t+s)] ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{-h}^{-h_1} [x(t) - x(t+s)]^T Z_{\Upsilon} [x(t) - x(t+s)] ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-h_1}^0 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{h} P + \frac{1}{h_1} Z_{\Lambda} & -\frac{1}{h_1} Z_{\Lambda} \\ * & \frac{1}{h_1} Z_{\Lambda} + Q_{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix} ds \\ &\quad + \int_{-h}^{-h_1} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{h} P + \frac{1}{h} Z_{\Upsilon} & -\frac{1}{h} Z_{\Upsilon} \\ * & \frac{1}{h} Z_{\Upsilon} + Q_{\Upsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix} ds, \end{aligned}$$

در این صورت با توجه به شرایط (۸.۴) و (۹.۴) به این نتیجه می‌رسیم که تابع لیاپانوف (۱۵.۴) معین مثبت می‌باشد به عبارتی $V(t) > 0$. اکنون باید مشتق تابع لیاپانوف را محاسبه کنیم. در ابتدا مشتق انتگرال دوگانه زیر را محاسبه می‌نماییم،

$$\frac{d}{dt} \int_{-h_1}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}(\alpha)^T Z_{\Lambda} \dot{x}(\alpha) d\alpha ds =$$

$$\int_{-h_1}^0 \dot{x}(t)^T Z_{\Lambda} \dot{x}(t) ds - \int_{-h_1}^0 \dot{x}(t+s)^T Z_{\Lambda} \dot{x}(t+s) ds,$$

انتگرال قسمت دوم عبارت بالا با تغییر متغیر $t+s=u$ محاسبه می‌گردد، بنابراین بدست می‌آوریم،

$$= \dot{x}(t)^T h_1 Z_{\Lambda} \dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T Z_{\Lambda} \dot{x}(s) ds,$$

به همین ترتیب،

$$\frac{d}{dt} \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+s}^t \dot{x}(\alpha)^T Z_{\Upsilon} \dot{x}(\alpha) d\alpha ds = \dot{x}(t)^T h_{\Upsilon} Z_{\Upsilon} \dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)^T Z_{\Upsilon} \dot{x}(s) ds,$$

بنابراین مشتق تابع لیاپانوف بصورت،

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \Upsilon x(t)^T P(AX(t) + BKx(t-d(t)) + x(t)^T (Q_1 + Q_{\Upsilon} + Q_{\Phi})x(t) \\ &\quad + x(t-h_1)^T (Q_{\Upsilon} - Q_{\Phi})x(t-h_1) - x(t-h)^T Q_{\Upsilon} x(t-h) \\ &\quad - (\lambda - \mu)x(t-d(t))^T Q_{\Upsilon} x(t-d(t)) - (\lambda - \mu_1)x(t-d_1(t))^T Q_1 x(t-d_1(t)) \quad (19.4) \\ &\quad + [Ax(t) + BKx(t-d(t))]^T (h_1 Z_1 + h_{\Upsilon} z_{\Upsilon}) [Ax(t) + BKx(t-d(t))] \\ &\quad - \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)^T Z_{\Upsilon} \dot{x}(s) ds, \end{aligned}$$

حالت (i): ابتدا حالتی را که $h_1 \leq d(t)$ هست را بوسیله لم (۱.۸.۳) بررسی می‌کنیم،

$$\begin{aligned} &-h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &= -h_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds - h_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds - h_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &\leq -\frac{h_1}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds - \frac{h_1}{d_{\Upsilon}(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \frac{h_1}{h_1 - d(t)} \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \\ &= -\int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds - \frac{d_{\Upsilon}(t)}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \frac{h_1 - d(t)}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds - \frac{d_1(t)}{d_{\Upsilon}(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \frac{h_1 - d(t)}{d_{\Upsilon}(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds - \frac{d_1(t)}{h_1 - d(t)} \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \frac{d_{\Upsilon}(t)}{h_1 - d(t)} \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds, \quad (20.4) \end{aligned}$$

اکنون از نامساوی ماتریسی خطی (۱۰.۴) که بصورت زیر است،

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 \\ X_1^T & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

بدست می‌آوریم که،

$$\begin{aligned} & -\frac{d_2(t)}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds - \frac{d_1(t)}{d_2(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \\ & \leq -2 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds X_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (21.4)$$

به‌طور مشابه،

$$\begin{aligned} & -\frac{h_1-d(t)}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds - \frac{d_1(t)}{h_1-d(t)} \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \\ & \leq -2 \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T ds X_2 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (22.4)$$

و همچنین،

$$\begin{aligned} & -\frac{h_1-d(t)}{d_2(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds - \frac{d_2(t)}{h_1-d(t)} \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T ds Z_1 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \\ & \leq -2 \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T ds X_3 \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (23.4)$$

اکنون از روابط (۲۰.۴) الی (۲۳.۴) نتیجه می‌شود که،

(۲۴.۴)

$$-\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds \leq -\frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 & X_2 \\ * & Z_1 & X_3 \\ * & * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h_1}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \end{bmatrix},$$

از طرفی محاسبه می‌کنیم،

$$-\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s) ds \leq -\frac{1}{h_2} \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)^T ds Z_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds, \quad (25.4)$$

حال تعریف می‌کنیم،

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t-d(t))^T & x(t-d_1(t))^T & x(t-h)^T & x(t-h_1)^T \end{bmatrix}^T,$$

اکنون از شرایط (۱۹.۴) و (۲۴.۴) و (۲۵.۴) بدست می‌آوریم که،

$$\dot{V}(t) \leq \zeta(t)^T (\phi - h_1^{-1} M_1^T \Omega M_1 - h_2^{-1} E_{24}^T Z_2 E_{24}) \zeta(t),$$

این رابطه با شرط (۱۲.۴) بیان می‌کند که، $\dot{V}(t)$ معین منفی است. حالت (ii): اکنون حالت $h_1 < d(t)$ را در نظر می‌گیریم، در این حالت بدست می‌آوریم که:

$$-\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds = -\int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h_1}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds,$$

همچنین داریم،

$$-\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s) ds = -\int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}(s)^T Z_2 \dot{x}(s) ds,$$

اکنون در زیر مشابه (۲۴.۴) مشتق گرفته می‌شود، از شرط (۱۰.۴) داریم،

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} Z_1 & X_4 \\ X_4^T & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$-\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T Z_1 \dot{x}(s) ds \leq -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h_1}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & X_4 \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h_1}^{t-d_1(t)} \dot{x}(s) ds \end{bmatrix},$$

و از اینکه،

$$\Omega_5 = \begin{bmatrix} Z_2 & Y \\ Y^T & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

نتیجه زیر را بدست می‌آوریم،

$$-\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(\alpha)^T Z_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \leq -\frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} \int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_2 & Y \\ * & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \end{bmatrix},$$

اکنون از شرط (۱۹.۴) بدست می‌آوریم که،

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T(t) (\phi - h_1^{-1} M_4^T \Omega_4 M_4 - h_2^{-1} M_5^T \Omega_5 M_5) \zeta(t),$$

بنابراین تحت شرط (۱۳.۴) مشتق تابع لیاپانوف معین منفی است. در نتیجه از حالت (i) و (ii) اثبات شد که $\dot{V}(t)$ معین منفی است، بنابراین قضیه برقرار است. $\square$

یادآوری ۱.۲.۴. با تقسیم بازه تاخیر $[-h, 0]$ به دو زیربازه $[-h, -h_1]$ و $[-h_1, 0]$ و معرفی حالت $x(t-h)$ و $x(t-h_1)$ تابع لیاپانوف (۱۵.۴) که وابسته به زیربازه‌هاست ساخته می‌شود. توجه داشته باشید که با تقسیم زیربازه‌ها، تابع لیاپانوف ممکن است به نتایج محافظه‌کاری کمتری منجر شود. بعبارتی، متناظر با دو زیربازه و با معرفی متغیرهای متفاوت برای دو حالت مختلف، تابع $\dot{V}(t)$ را برآورد می‌کنیم که قصد دارد به معیارهای پایداری با محافظه‌کاری کمتر برسد.

نتیجه ۱.۲.۴. در اینجا، برای استخراج نتایج ساده از برخی از نابرابری‌های محافظه‌کارانه بعنوان مثال، لم (۱.۸.۳) استفاده شده است. یک نتیجه با محافظه‌کاری کمتر در هزینه، از پیچیدگی بیشتری برخوردار است که با استفاده از یک نابرابری پیشرفته در [۲۷] محقق می‌گردد. البته هنوز هم بررسی قضیه (۱.۲.۴) با محاسبه دست کاری دشوار است، برای حل این مشکل از نرم‌افزار MATLAB قسمت (LMIs) کمک می‌گیریم.

قضیه ۲.۲.۴. سیستم (۱.۴) با تاخیرهای (۲.۴) و (۳.۴) را در نظر بگیرید. μ_1, μ_2, h_1, h_2 داده شده‌اند، کنترلگر پس‌خورد حالت K پایداری مجانبی سیستم را تضمین می‌کند، هرگاه ماتریس‌های متقارن $\tilde{Q}_4 = \tilde{Q}_4^T, \tilde{Q}_3 = \tilde{Q}_3^T, \bar{P} = \bar{P}^T, \hat{K}, \tilde{Y}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که LMIs زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1}{h} \bar{P} + \tilde{Z}_1 & -\tilde{Z}_1 \\ * & \tilde{Z}_1 + h_1 \tilde{Q}_4 \end{bmatrix} > 0, \quad (26.4)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} + \tilde{Z}_2 & -\tilde{Z}_2 \\ * & \tilde{Z}_2 + h \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (27.4)$$

$$\tilde{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & \tilde{X}_i \\ \tilde{X}_i^T & \tilde{Z}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (28.4)$$

$$\tilde{\Omega}_\Delta = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_2 & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^T & \tilde{Z}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (29.4)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_i & \Gamma \\ \Gamma^T & \Lambda \end{bmatrix} < 0, \quad (i = 1, 2) \quad (30.4)$$

که در آن،

$$\Upsilon_1 = \Psi - h_1^{-1} M_1^T \tilde{\Omega} M_1 - h_2^{-1} E_{\Delta 4}^T \tilde{Z}_2 E_{\Delta 4}, \quad (31.4)$$

$$\Upsilon_2 = \Psi - h_1^{-1} M_2^T \tilde{\Omega}_4 M_2 - h_2^{-1} M_3^T \tilde{\Omega}_\Delta M_3, \quad (32.4)$$

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ -h_1^{-1} \bar{P} \tilde{Z}_1^{-1} \bar{P}, -h_2^{-1} \bar{P} \tilde{Z}_2^{-1} \bar{P} \right\}, \quad (33.4)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{P} A^T & \bar{P} A^T \\ \hat{K}^T B^T & \hat{K}^T B^T \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad (34.4)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & B\hat{K} & \circ & \circ & \circ \\ * & -(1-\mu)\tilde{Q}_3 & \circ & \circ & \circ \\ * & * & -(1-\mu_1)\tilde{Q}_1 & \circ & \circ \\ * & * & * & -\tilde{Q}_2 & \circ \\ * & * & * & * & \tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_4 \end{bmatrix}, \quad (35.4)$$

$$\Psi_{11} = A\bar{P} + \bar{P}A^T + \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_3 + \tilde{Q}_4,$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 \\ * & \tilde{Z}_1 & \tilde{X}_3 \\ * & * & \tilde{Z}_1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{32} \\ E_{25} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{35} \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} E_{52} \\ E_{24} \end{bmatrix},$$

بعلاوه، اگر شرایط فوق برقرار باشد، کنترلگر بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K = \hat{K}\bar{P}^{-1}. \quad (36.4)$$

برهان. با کمک قضیه (۱.۲.۴) اثبات را شروع می‌کنیم، اگر P منفرد باشد، بدیهی است که $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچکی وجود دارد به‌طوری‌که $P + \varepsilon_1$ نامنفرد است و قضیه (۱.۲.۴) با جابجایی P با $P + \varepsilon_1$ برقرار است. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم P نامنفردی وجود دارد به‌طوری‌که قضیه برقرار باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P^{-1}, & \tilde{Z}_i &= P^{-1}Z_iP^{-1}, \quad (i=1,2), \\ \tilde{Q}_j &= P^{-1}Q_jP^{-1}, & \tilde{X}_j &= P^{-1}X_jP^{-1}, \quad j=(1,2,3,4), \\ \tilde{Y} &= P^{-1}YP^{-1}, & J_1 &= \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}, \\ J &= \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}, \end{aligned}$$

با این نمادها و (۳۶.۴) در صورت قضیه و یک تبدیل مناسب بوسیله J_1 بترتیب از معادلات (۱۱.۴)–(۸.۴) به معادلات (۲۹.۴)–(۲۶.۴) خواهیم رسید، همچنین با انجام یک تبدیل مناسب بوسیله J به معادلات (۱۳.۴)–(۱۲.۴) می‌توانیم بدست آوریم،

$$\Psi - \Gamma\Lambda^{-1}\Gamma^T - h_1^{-1}M_1^T\tilde{\Omega}M_1 - h_2^{-1}E_{\Delta 4}^T\tilde{Z}_2E_{\Delta 4} < 0,$$

$$\Psi - \Gamma\Lambda^{-1}\Gamma^T - h_1^{-1}M_2^T\tilde{\Omega}_4M_2 - h_3^{-1}M_3^T\tilde{\Omega}_5M_3 < 0,$$

که Γ ، Λ و Ψ بترتیب در (۳۵.۴)–(۳۳.۴) داده شده است. با استفاده از نمادهای (۳۱.۴) و (۳۲.۴) بدست می‌آوریم،

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_i & \Gamma \\ \Gamma^T & \Lambda \end{bmatrix} < 0, \quad (i=1,2),$$

□

یعنی نامساوی (۳۰.۴) برقرار است. در نتیجه اثبات کامل است.

توجه داشته باشید که علت غیرخطی بودن نامساوی (۳۰.۴)، Λ تعریف شده در (۳۳.۴) است. قضیه (۲.۲.۴) یک شکل شدنی غیرمحدب برای پایداری را نشان می‌دهد. با استفاده از روش زیر می‌توان این مشکل را به حداقل رساند،

$$\min tr(P\bar{P} + Y_1\tilde{Z}_1 + Y_2\tilde{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_1 + Z_2\bar{Z}_2),$$

بنابر نامساوی‌های (۲۶.۴) تا (۲۹.۴) و

$$\begin{bmatrix} Z_j & I \\ I & \bar{Z}_j \end{bmatrix} \geq \circ, \begin{bmatrix} Y_j & I \\ I & \tilde{Z}_j \end{bmatrix} \geq \circ, \begin{bmatrix} Y_j & P \\ P & Z_j \end{bmatrix} \geq \circ (j=1,2), \begin{bmatrix} \Upsilon_i & \Gamma \\ \Gamma^T & \bar{\Lambda} \end{bmatrix} < \circ (i=1,2), \begin{bmatrix} P & I \\ I & \bar{P} \end{bmatrix} \geq \circ,$$

با $\bar{\Lambda} = diag\{-h_1^{-1}\bar{Z}_1, -h_2^{-1}\bar{Z}_2\}$ ، Υ_i و Γ که در قضیه فوق داده شده است. شرایط قضیه (۲.۲.۴) شدنی است اگر شرط،

$$\min tr(P\bar{P} + Y_1\tilde{Z}_1 + Y_2\tilde{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_1 + Z_2\bar{Z}_2) = \Delta n,$$

برقرار باشد [۳۷]. برای مقابله با غیرخطی بودن قضیه (۲.۲.۴) روندی را جایگزین می‌کنیم، توجه داشته باشید که اگر رابطه، $(\bar{P} - \tilde{Z}_i)\tilde{Z}_i^{-1}(\bar{P} - \tilde{Z}_i) \geq \circ$ برقرار باشد، در نتیجه

$$\bar{P}\tilde{Z}_i^{-1}\bar{P} \geq -\tilde{Z}_i + 2\bar{P}, \quad (i=1,2),$$

حاصل می‌گردد. از این شرایط و قضیه (۲.۲.۴) نتایج زیر بدست می‌آید که کمی محافظه کارانه‌تر است.

قضیه ۳.۲.۴. سیستم (۱.۴) با تاخیرهای (۲.۴) و (۳.۴) را در نظر بگیرید. h_1, h_2, μ_1 و μ_2 داده شده‌اند، ماتریس بهره کنترلگر پس‌خورد حالت K وجود دارد که تضمین می‌کند سیستم پایدار مجانبی است. اگر ماتریس‌های $\hat{K}$ ، $\bar{P} = \bar{P}^T$ ، $\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_2^T$ ، $\tilde{Q}_4 = \tilde{Q}_4^T$ ، $\tilde{Q}_i > \circ$ ، $(i=1,3)$ ، $\tilde{Z}_j > \circ$ ، $(j=1,2)$ و $\tilde{Y}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که LMIs زیر برقرار باشد،

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1}{h}\bar{P} + \tilde{Z}_1 & -\tilde{Z}_1 \\ * & \tilde{Z}_1 + h_1\tilde{Q}_4 \end{bmatrix} > \circ,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} + \tilde{Z}_2 & -\tilde{Z}_2 \\ * & \tilde{Z}_2 + h_2\tilde{Q}_2 \end{bmatrix} > \circ,$$

$$\tilde{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & \tilde{X}_i \\ \tilde{X}_i^T & \tilde{Z}_1 \end{bmatrix} \geq \circ, \quad (i=1,2,3,4),$$

$$\tilde{\Omega}_\Delta = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_2 & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^T & \tilde{Z}_2 \end{bmatrix} \geq \circ,$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_i & \Gamma \\ \Gamma^T & \bar{\Lambda} \end{bmatrix} < \circ (i=1,2),$$

که $\Upsilon_i, (i = 1, 2)$ در قضیه (۲.۲.۴) داده شده است و

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}\{h_1^{-1}(\tilde{Z}_1 - 2\bar{P}), h_2^{-1}(\tilde{Z}_2 - 2\bar{P})\},$$

می‌باشد. بعلاوه اگر شرایط فوق را حفظ کنیم، یک ماتریس کنترل مطلوب توسط $K = \hat{K}\bar{P}^{-1}$ بدست می‌آید.

برای نشان دادن اثربخشی این روش کنترل، مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۴. سیستم (۱.۴) با پارامترهای داده شده در زیر را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

برای $h_1 = 0.5, h_2 = 1, \mu_1 = 0.1$ و $\mu_2 = 0.2$ باید شرایط LMIs قضیه (۳.۲.۴) بررسی گردد تا ماتریس پس‌خورد حالت مناسب تعیین گردد. برای حل این مثال باید M_1, M_2 و M_3 تعریف گردد که نیاز به محاسبه E_{ij} ها می‌باشد.

$$\begin{aligned} E_{13} &= E_1 - E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{32} &= E_3 - E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{25} &= E_2 - E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ M_1 &= \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{32} \\ E_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

به همین ترتیب ماتریس‌های M_2 و M_3 را بدست می‌آوریم،

$$M_2 = \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} E_{52} \\ E_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

اکنون به محاسبه ماتریس $M_1^T \tilde{\Omega} M_1$ و $E_{54}^T \tilde{Z}_2 E_{54}$ که در Υ_1 بکار رفته و همچنین $M_2^T \tilde{\Omega}_4 M_2$ و $M_3^T \tilde{\Omega}_5 M_3$ که در Υ_2 بکار برده شده است، می‌پردازیم.

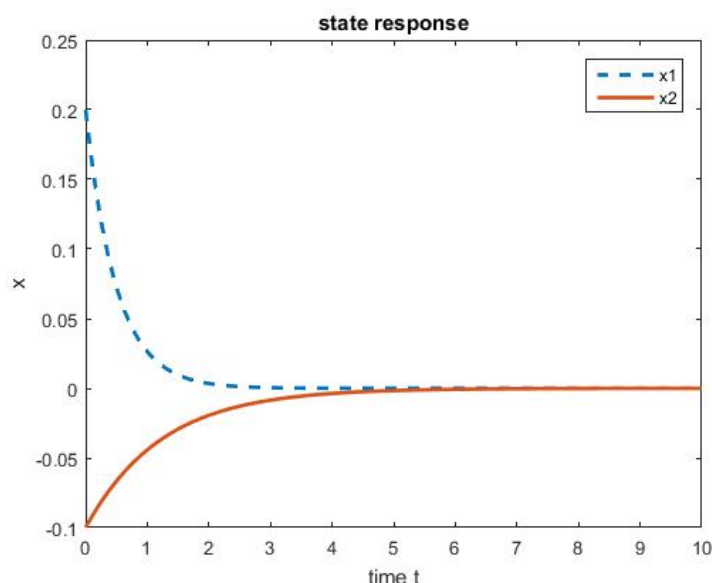
$$M_1^T \tilde{\Omega} M_1 = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & -\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 & -\tilde{Z}_1 + \tilde{X}_1 & 0 & -\tilde{X}_2 \\ * & 2\tilde{Z}_1 - 2\tilde{X}_3 & \tilde{X}_1 - \tilde{X}_2 - \tilde{Z}_1 + \tilde{X}_3 & 0 & \tilde{X}_3 - \tilde{Z}_1 \\ * & * & 2\tilde{Z}_1 - 2\tilde{X}_1 & 0 & \tilde{X}_2 - \tilde{X}_3 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \tilde{Z}_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 E_{\Delta f}^T \tilde{Z}_r E_{\Delta f} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Z}_r & -\tilde{Z}_r \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{Z}_r & \tilde{Z}_r \end{bmatrix}, \\
 M_r^T \tilde{\Omega}_f M_r &= \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 & 0 & -\tilde{Z}_1 + \tilde{X}_f & 0 & -\tilde{X}_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{Z}_1 + \tilde{X}_f^T & 0 & 2\tilde{Z}_1 - \tilde{X}_f^T - \tilde{X}_f & 0 & \tilde{X}_f - \tilde{Z}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{X}_f^T & 0 & \tilde{X}_f^T - \tilde{Z}_1 & 0 & \tilde{Z}_1 \end{bmatrix}, \\
 M_r^T \tilde{\Omega}_\Delta M_r &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\tilde{Z}_r - \tilde{Y}^T - \tilde{Y} & 0 & \tilde{Y} - \tilde{Z}_r & -\tilde{Z}_r + \tilde{Y}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Y}^T - \tilde{Z}_r & 0 & \tilde{Z}_r & -\tilde{Y}^T \\ 0 & -\tilde{Z}_r + \tilde{Y} & 0 & -\tilde{Y} & \tilde{Z}_r \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

سپس ماتریس Υ_1 و Υ_2 را تشکیل می‌دهیم که از آن در ساخت نامساوی‌های دو ماتریس آخر استفاده می‌نماییم. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB بدست می‌آوریم که،

$$\begin{aligned}
 \hat{K} &= \begin{bmatrix} -0/1894 & 0/4878 \\ 0/4878 & 1/4013 \end{bmatrix}, & \bar{P} &= \begin{bmatrix} 12/2863 & -0/0056 \\ -0/0056 & 11/8430 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{Q}_r &= \begin{bmatrix} 1/3111 & 0/0251 \\ 0/0251 & 0/9755 \end{bmatrix}, & \tilde{Q}_f &= \begin{bmatrix} -1/6917 & -0/1043 \\ -0/1043 & -2/0257 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 2/4766 & -0/0158 \\ -0/0158 & 2/9643 \end{bmatrix}, & \tilde{Q}_r &= \begin{bmatrix} 4/7668 & -0/0412 \\ -0/0412 & 5/7196 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{Z}_1 &= \begin{bmatrix} 0/5489 & 0 \\ 0 & 0/5602 \end{bmatrix}, & \tilde{Z}_r &= \begin{bmatrix} 6/8150 & -0/0402 \\ -0/0402 & 9/9626 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{X}_1 &= \begin{bmatrix} 0/8033 & -0/1656 \\ -0/1656 & 1/5251 \end{bmatrix}, & \tilde{X}_r &= \begin{bmatrix} 0/0647 & -0/0035 \\ -0/0035 & 0/2294 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{X}_r &= \begin{bmatrix} 1/1927 & 0/0783 \\ 0/0783 & 1/5233 \end{bmatrix}, & \tilde{X}_f &= \begin{bmatrix} 2/8906 & -0/0588 \\ -0/0588 & 5/3759 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{Y} &= \begin{bmatrix} 0/5207 & 0/0158 \\ 0/0158 & 2/7719 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

و بنابراین طبق قضیه ماتریس پس‌خورد حالت K را از رابطه $K = \hat{K} \bar{P}^{-1}$ بصورت زیر بدست



شکل ۱.۴: واکنش حالت سیستم برای مثال (۲.۲.۴)

می‌آوریم،

$$K = \begin{bmatrix} -0.0724 & 0.0412 \\ 0.0398 & 0.1183 \end{bmatrix},$$

در این صورت سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی می‌باشد. با شرایط اولیه $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$ نمودار واکنش سیستم در شکل (۱.۴) نشان داده شده است.

مثال ۳.۲.۴. در سیستم (۱.۴) و پارامترهای داده شده بصورت:

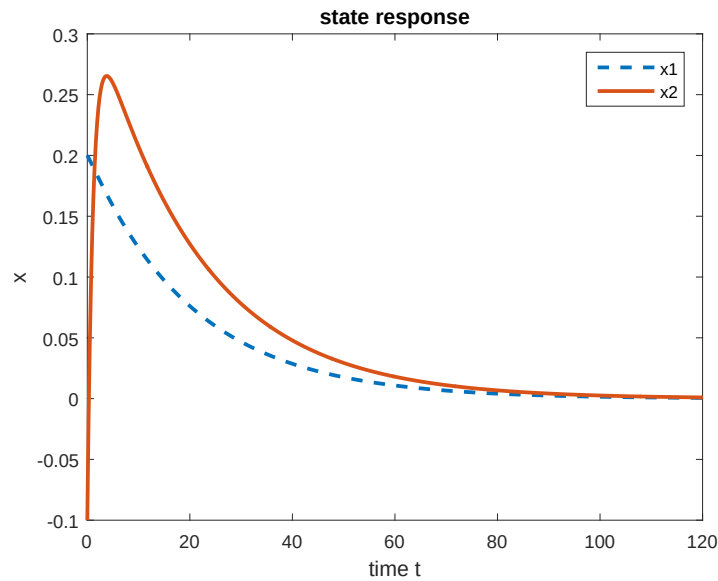
$$A = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 1 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

روشن است زمانی که $K = 0$ باشد، سیستم ناپایدار است. با این حال، در قضیه (۳.۲.۴) برای $h_1 = 1, h_2 = 2, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.2$ LMIs را می‌یابیم که شدنی باشد.

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1.1665 & 1.5843 \\ 1.5843 & 17.8683 \end{bmatrix}, \hat{K} = \begin{bmatrix} -0.9667 & -1.6770 \end{bmatrix},$$

بنابر قضیه (۳.۲.۴)، یک کنترلگر پس‌خورد حالت $K = \hat{K}\bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.8071 & -0.0223 \end{bmatrix}$ وجود دارد به‌طوری‌که سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی است.

شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، واکنش حالت سیستم حلقه بسته در نمودار (۲.۴) نمایش داده شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، مسیر حالت سیستم حلقه بسته به صفر همگرا است.



شکل ۲.۴: واکنش حالت سیستم برای مثال (۳.۲.۴)

۳.۴ سیستم‌هایی با دو تاخیر ثابت در متغیر حالت

سیستم خطی شامل دو تاخیر ثابت در متغیر حالت بصورت زیر می‌باشد،

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h_1) + A_2 x(t - h_2), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (37.4)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و h_i ها ثابت‌های تاخیر زمانی هستند. $A_i \in \mathbb{R}^n$ ها ماتریس‌های ثابت و شرط اولیه $\phi(t)$ ، نشان‌دهنده تابع پیوسته بردار افزوده از $t \in [-h, 0]$ است. برای h_1 و h_2 بترتیب کران بالای $\bar{h}_1$ و $\bar{h}_2$ انتخاب می‌گردد به‌طوری‌که سیستم (۳۷.۴) به‌ازای،

$$0 \leq h_1 \leq \bar{h}_1, \quad 0 \leq h_2 \leq \bar{h}_2,$$

پایدار باشد. بنابراین، دامنه h_1 و h_2 برای اطمینان از پایداری سیستم (۳۷.۴) محافظه‌کارانه می‌باشد، زیرا پایداری از صفر تا کران بالا را تضمین می‌کند. در حالت خاص، معیار پایداری برای سیستم خطی با یک تاخیر،

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + (A_1 + A_2)x(t - h), \quad (38.4)$$

معادل سیستم (۳۷.۴) با دو تاخیر برای حالت $h_1 = h_2 = h$ می‌باشد. معیار پایداری وابسته به تاخیر در زیر، رابطه بین h_1 و h_2 را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۴. برای اسکالرهایی داده شده $(i = 1, 2)$ ، $h_i \geq 0$ ، سیستم Σ پایدار مجانبی است، اگر ماتریس‌های معین مثبت و متقارن $P = P^T > 0$ ، $Q_i = Q_i^T > 0$ ، $(i = 1, 2)$ و ماتریس‌های

نیمه‌معین مثبت متقارن $(i = 1, 2, 3)$ ، $W_i = W_i^T \geq 0$ ، $X_{ii} = X_{ii}^T \geq 0$ ، $Y_{ii} = Y_{ii}^T \geq 0$ ، $Z_{ii} = Z_{ii}^T \geq 0$ و ماتریس‌های $(i = 1, 2, 3)$ ، N_i ، S_i ، T_i و $(1 \leq i < j \leq 3)$ ، X_{ij} ، Y_{ij} ، Z_{ij} وجود داشته باشند به‌طوری‌که LMIs زیر برقرار باشند،

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{12}^T & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{13}^T & \phi_{23}^T & \phi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (39.4)$$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & N_1 \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} & N_2 \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} & N_3 \\ N_1^T & N_2^T & N_3^T & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (40.4)$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & S_1 \\ Y_{12}^T & Y_{22} & Y_{23} & S_2 \\ Y_{13}^T & Y_{23}^T & Y_{33} & S_3 \\ S_1^T & S_2^T & S_3^T & W_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (41.4)$$

$$\psi_3 = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & KT_1 \\ Z_{12}^T & Z_{22} & Z_{23} & KT_2 \\ Z_{13}^T & Z_{23}^T & Z_{33} & KT_3 \\ KT_1^T & KT_2^T & KT_3^T & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (42.4)$$

$$K = \begin{cases} 1 & h_1 \geq h_2, \\ -1 & h_1 < h_2, \end{cases} \quad (43.4)$$

9

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + N_1 + N_1^T + S_1 + S_1^T + A_0^T H A_0 + h_1 X_{11} \\ &\quad + h_2 Y_{11} + |h_1 - h_2| Z_{11}, \\ \phi_{12} &= P A_1 - N_1 + N_2^T + S_2^T - T_1 + A_0^T H A_1 + h_1 X_{12} + h_2 Y_{12} + |h_1 - h_2| Z_{12}, \\ \phi_{13} &= P A_2 + N_3^T + S_3^T - S_1 + T_1 + A_0^T H A_2 + h_1 X_{13} + h_2 Y_{13} + |h_1 - h_2| Z_{13}, \\ \phi_{22} &= -Q_1 - N_2 - N_2^T - T_2 - T_2^T + A_1^T H A_1 + h_1 X_{22} + h_2 Y_{22} + |h_1 - h_2| Z_{22}, \\ \phi_{23} &= -N_3^T - S_2 + T_2 - T_3 + A_1^T H A_2 + h_1 X_{23} + h_2 Y_{23} + |h_1 - h_2| Z_{23}, \\ \phi_{33} &= -Q_2 - S_3 - S_3^T + T_3 + T_3^T + A_2^T H A_2 + h_1 X_{33} + h_2 Y_{33} + |h_1 - h_2| Z_{33}, \\ H &= h_1 W_1 + h_2 W_2 + |h_1 - h_2| W_3. \end{aligned}$$

برهان. در ابتدا حالت $h_1 \geq h_2$ را در نظر بگیرید. تابع لیاپانوف-کراسوفسکی زیر را انتخاب

کنید [۳۸]،

$$V(x_t) := x(t)^T P x(t) + \int_{t-h_1}^t x(s)^T Q_1 x(s) ds + \int_{t-h_2}^t x(s)^T Q_2 x(s) ds \\ + \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T W_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T W_2 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-h_1}^{-h_2} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T W_3 \dot{x}(s) ds d\theta, \quad (44.4)$$

اکنون مشتق تابع لیاپانوف فوق را محاسبه می‌نماییم،

$$\dot{V}(x_t) = \Upsilon x(t)^T P [A_0 x(t) + A_1 x(t-h_1) + A_2 x(t-h_2)] \\ + x(t)^T Q_1 x(t) - x(t-h_1)^T Q_1 x(t-h_1) \\ + x(t)^T Q_2 x(t) - x(t-h_2)^T Q_2 x(t-h_2) \\ + h_1 \dot{x}(t)^T W_1 \dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)^T W_1 \dot{x}(s) ds \\ + h_2 \dot{x}(t)^T W_2 \dot{x}(t) - \int_{t-h_2}^t \dot{x}(s)^T W_2 \dot{x}(s) ds \\ + (h_1 - h_2) \dot{x}(t)^T W_3 \dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^{t-h_2} \dot{x}(s)^T W_3 \dot{x}(s) ds, \quad (45.4)$$

با استفاده از فرمول نیوتن لایب-نیتز، روشن است که برای هر ماتریس $(S_i, N_i, (i = 1, 2, 3))$ عبارات زیر برقرار است،

$$\Upsilon [x(t)^T N_1 + x(t-h_1)^T N_2 + x(t-h_2)^T N_3] \times [x(t) - x(t-h_1) - \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s) ds] = 0, \quad (46.4)$$

$$\Upsilon [x(t)^T S_1 + x(t-h_1)^T S_2 + x(t-h_2)^T S_3] \times [x(t) - x(t-h_2) - \int_{t-h_2}^t \dot{x}(s) ds] = 0, \quad (47.4) \\ (48.4)$$

$$\Upsilon [x(t)^T T_1 + x(t-h_1)^T T_2 + x(t-h_2)^T T_3] \times [x(t-h_2) - x(t-h_1) - \int_{t-h_1}^{t-h_2} \dot{x}(s) ds] = 0,$$

عبارتی، برای هر ماتریس $(Z_{ii} = Z_{ii}^T \geq 0, Y_{ii} = Y_{ii}^T \geq 0, X_{ii} = X_{ii}^T \geq 0, (i = 1, 2, 3))$ و عبارات زیر برقرار است،

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_1) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{12}^T & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{13}^T & \Lambda_{23}^T & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_1) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix} = 0, \quad (49.4)$$

که Λ_{ij} بصورت زیر تعریف می‌گردد،

$$\Lambda_{ij} = h_1 (X_{ij} - X_{ij}) + h_2 (Y_{ij} - Y_{ij}) + (h_1 - h_2) (Z_{ij} - Z_{ij}), \quad 1 \leq i \leq j \leq 3,$$

اگر سمت چپ شرایط (۴۹.۴)–(۴۶.۴) را به $\dot{V}(x_t)$ اضافه کنیم آن گاه، بر اساس این رابطه که برای هر $r \geq 0$ و هر تابع $f(t)$ برقرار است،

$$\int_{t-r}^t f(s)ds = rf(t),$$

$\dot{V}(x_t)$ را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم،

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & \xi_1(t)^T \phi \xi_1(t) - \int_{t-h_1}^t \xi_2(t,s)^T \psi_1 \xi_2(t,s)ds \\ & - \int_{t-h_2}^t \xi_2(t,s)^T \psi_2 \xi_2(t,s)ds - \int_{t-h_1}^{t-h_2} \xi_2(t,s)^T \psi_3 \xi_2(t,s)ds, \end{aligned} \quad (50.4)$$

که در آن،

$$\xi_1(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t-h_1)^T & x(t-h_2)^T \end{bmatrix}^T, \quad \xi_2(t,s) = \begin{bmatrix} \xi_1(t)^T & \dot{x}(s)^T \end{bmatrix}^T, \quad (51.4)$$

$\phi < 0$ اگر $K = 1$ ، ψ_3 ، تعریف شده است که در (۴۲.۴)–(۳۹.۴) $\psi_i, (i=1,2,3)$ و $\phi \geq 0$ ، $(i=1,2,3)$ آن گاه برای هر $\xi_1(t) \neq 0$ عبارت $\dot{V}(x_t) < 0$ برقرار می‌باشد. بنابراین Σ پایدار مجانبی است هرگاه LMIs (۴۲.۴)–(۳۹.۴) برقرار باشد. اکنون اگر $h_1 < h_2$ باشد، تابع لیپانوف بصورت زیر تغییر می‌کند،

$$\begin{aligned} V(x_t) := & x(t)^T Px(t) + \int_{t-h_1}^t x(s)^T Q_1 x(s)ds + \int_{t-h_2}^t x(s)^T Q_2 x(s)ds + \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T W_1 \dot{x}(s)dsd\theta \\ & + \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T W_2 \dot{x}(s)dsd\theta + \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T W_3 \dot{x}(s)dsd\theta, \end{aligned} \quad (52.4)$$

در این صورت عبارت (۴۸.۴) بصورت زیر بازنویسی می‌گردد،

$$\begin{aligned} & \Psi [x(t)^T T_1 + x(t-h_1)^T T_2 + x(t-h_2)^T T_3] \times [x(t-h_2) - x(t-h_1) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}(s)ds] = 0, \\ & \text{سپس این حالت نیز مشابه حالت قبل اثبات می‌شود اما توجه داشته باشید که در این حالت،} \end{aligned} \quad (53.4)$$

$K = -1$ می‌باشد. $\square$

۴.۴ سیستم‌هایی با دو تاخیر متغیر با زمان در متغیر حالت

سیستم کنترل خطی زیر با دو تاخیر زمانی افزوده در متغیر حالت را در نظر بگیرید،

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d_1(t)-d_2(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (54.4)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ متغیر حالت، $d_1(t)$ و $d_2(t)$ دو مولفه تاخیر افزوده در متغیر حالت می‌باشند. فرض کنید که دو تاخیر دارای شرایط زیر باشند،

$$\begin{aligned} 0 \leq d_1(t) \leq h_1 < \infty, \quad 0 \leq d_2(t) \leq h_2 < \infty, \\ \dot{d}_1(t) \leq \mu_1 < \infty, \quad \dot{d}_2(t) \leq \mu_2 < \infty, \end{aligned} \quad (55.4)$$

پایداری سیستم فوق را با قضیه زیر بیان می‌نماییم.

قضیه ۱.۴.۴. سیستم (54.4) با تاخیرهای $d_1(t)$ و $d_2(t)$ که در شرط (55.4) صدق کند، پایدار مجانبی است هرگاه ماتریس‌های $P > 0$ ، $Q_1 \geq Q_2 > 0$ ، $Q_3 \geq Q_4 > 0$ ، $M_1 \geq M_3 \geq M_4 > 0$ ، $M_2 > 0$ وجود داشته باشند که در رابطه زیر صدق کنند [31]،

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & -N_1 + N_2^T & -N_5 + N_6^T & PA_d & A^T \Pi_{55} & N_1 & 0 & N_5 & 0 \\ * & \Pi_{22} & 0 & -N_2 + N_4^T & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & -N_3 + N_4^T & 0 & 0 & 0 & N_6 & N_7 \\ * & * & * & \Pi_{44} & A_d^T \Pi_{55} & 0 & N_4 & 0 & N_8 \\ * & * & * & * & -\Pi_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h_1^{-1} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -h_2^{-1} M_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -h_2^{-1} M_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -h_1^{-1} M_4 \end{bmatrix} < 0$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= A^T P + PA + Q_1 + Q_3 + N_1 + N_5 + N_5^T, \\ \Pi_{22} &= -(1 - \mu_1)(Q_1 - Q_2) - N_2 - N_2^T + N_3 + N_3^T, \\ \Pi_{33} &= -(1 - \mu_2)(Q_3 - Q_4) - N_6 - N_6^T + N_7 + N_7^T, \\ \Pi_{44} &= -(1 - \mu_1 - \mu_2)(Q_2 + Q_4) - N_4 - N_4^T - N_8 - N_8^T, \\ \Pi_{55} &= (h_1 M_1 + h_2 M_2 + h_2 M_3 + h_1 M_4). \end{aligned}$$

می‌باشند.

برهان. ابتدا تابع لیاپانوف-کراسوفسکی را بصورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t), \\ V_1(t) &= x(t)^T P x(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-d_1(t)}^t x(s)^T Q_1 x(s) ds + \int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t-d_1(t)} x(s)^T Q_2 x(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\Psi}(t) &= \int_{-h_1}^{\circ} \int_{\beta}^{\circ} \dot{x}(t+\alpha)^T M_1 \dot{x}(t+\alpha) d\alpha d\beta + \int_{-h_1-h_2}^{h_1} \int_{\beta}^{\circ} \dot{x}(t+\alpha)^T M_2 \dot{x}(t+\alpha) d\alpha d\beta, \\
 V_{\Phi}(t) &= \int_{t-d_2(t)}^t x(s)^T Q_3 x(s) ds + \int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t-d_2(t)} x(s)^T Q_4 x(s) ds, \\
 V_{\Delta}(t) &= \int_{-h_2}^{\circ} \int_{\beta}^{\circ} \dot{x}(t+\alpha)^T M_2 \dot{x}(t+\alpha) d\alpha d\beta + \int_{-h_1-h_2}^{h_2} \int_{\beta}^{\circ} \dot{x}(t+\alpha)^T M_3 \dot{x}(t+\alpha) d\alpha d\beta,
 \end{aligned}
 \tag{۵۶.۴}$$

که $M_i > \circ$ ، $Q_i > \circ$ ، $P > \circ$ ماتریس‌هایی مشخص می‌باشند. سپس، مشتق تابع لیاپانوف برای سیستم (۵۴.۴) را بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\
 &= [Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t))]^T P x(t) \\
 &\quad + x(t)^T P [Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t))], \\
 \dot{V}_2(t) &= x(t)^T Q_1 x(t) - x(t - d_1(t))^T (Q_1 - Q_2) x(t - d_1(t)) \\
 &\quad + \dot{d}_1(t) x(t - d_1(t))^T (Q_1 - Q_2) x(t - d_1(t)) \\
 &\quad - (\mathbf{1} - \dot{d}_1(t) - \dot{d}_2(t)) x(t - d_1(t) - d_2(t))^T Q_2 x(t - d_1(t) - d_2(t)) \\
 &\leq x(t)^T Q_1 x(t) - x(t - d_1(t))^T (Q_1 - Q_2) x(t - d_1(t)) \\
 &\quad + \mu_1 x(t - d_1(t))^T (Q_1 - Q_2) x(t - d_1(t)) \\
 &\quad - (\mathbf{1} - \mu_1 - \mu_2) x(t - d_1(t) - d_2(t))^T Q_2 x(t - d_1(t) - d_2(t)), \\
 \dot{V}_3(t) &= h_1 \dot{x}(t)^T M_1 \dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^t \dot{x}(\alpha)^T M_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\
 &\quad + h_2 \dot{x}(t)^T M_2 \dot{x}(t) - \int_{t-h_1-h_2}^{t-h_1} \dot{x}(\alpha)^T M_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\
 &\leq h_1 \dot{x}(t)^T M_1 \dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^t \dot{x}(\alpha)^T M_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\
 &\quad + \int_{t-h_1}^{t-d_1(t)} \dot{x}(\alpha)^T M_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha + h_2 \dot{x}(t)^T M_2 \dot{x}(t) \\
 &\quad - \int_{t-h_1-h_2}^{t-h_1} \dot{x}(\alpha)^T M_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha - \int_{t-h_1}^{t-d_1(t)} \dot{x}(\alpha)^T M_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\
 &\leq h_1 \dot{x}(t)^T M_1 \dot{x}(t) - \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}(\alpha)^T M_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\
 &\quad + h_2 \dot{x}(t)^T M_2 \dot{x}(t) - \int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t-d_1(t)} \dot{x}(\alpha)^T M_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha, \\
 \dot{V}_4(t) &\leq x(t)^T Q_3 x(t) - x(t - d_2(t))^T (Q_3 - Q_4) x(t - d_2(t)) \\
 &\quad + \mu_2 x(t - d_2(t))^T (Q_3 - Q_4) x(t - d_2(t)) \\
 &\quad - (\mathbf{1} - \mu_1 - \mu_2) x(t - d_1(t) - d_2(t))^T Q_4 x(t - d_1(t) - d_2(t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_\Delta(t) &\leq h_2 \dot{x}(t)^T M_2 \dot{x}(t) - \int_{t-d_2(t)}^t \dot{x}(\alpha)^T M_2 \dot{x}(\alpha) d\alpha \\ &\quad + h_1 \dot{x}(t)^T M_1 \dot{x}(t) - \int_{t-d_1(t)-d_2(t)}^{t-d_2(t)} \dot{x}(\alpha)^T M_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

از اینجا به بعد اثبات همانند قسمت تاخیر ثابت می‌باشد و در نهایت نشان می‌دهیم که $\dot{V}(t)$ با شرایط LMIs بیان شده در قضیه، معین منفی است. $\square$

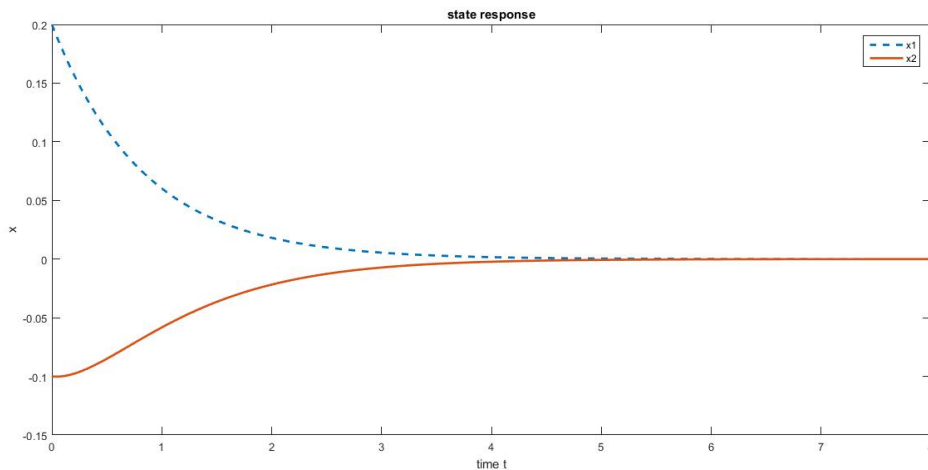
مثال ۱.۴.۴. سیستم (۵۴.۴) با پارامترهای داده شده در زیر را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

در قضیه (۱.۴.۴) برای $h_2 = 1$, $h_1 = 0.3$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.2$ LMI را می‌یابیم که شدنی باشد. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB بدست می‌آوریم که،

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 0.6163 & -0.1103 \\ -0.1103 & 0.300 \end{bmatrix}, & N_1 &= \begin{bmatrix} -0.9745 & 0.1273 \\ 0.1273 & -0.0726 \end{bmatrix}, \\ N_2 &= \begin{bmatrix} 0.2258 & -0.0303 \\ -0.0303 & 0.0156 \end{bmatrix}, & N_3 &= \begin{bmatrix} -0.3986 & 0.0903 \\ 0.0903 & -0.0308 \end{bmatrix}, \\ N_4 &= \begin{bmatrix} 0.2537 & -0.0576 \\ -0.0576 & 0.0224 \end{bmatrix}, & N_5 &= \begin{bmatrix} -0.4765 & 0.0944 \\ 0.0944 & -0.0344 \end{bmatrix}, \\ N_6 &= \begin{bmatrix} 0.4718 & -0.0936 \\ -0.0936 & 0.0343 \end{bmatrix}, & N_7 &= \begin{bmatrix} -0.1746 & 0.0363 \\ 0.0363 & -0.0123 \end{bmatrix}, \\ N_8 &= \begin{bmatrix} 0.1660 & -0.0346 \\ -0.0346 & 0.0120 \end{bmatrix}, & M_1 &= \begin{bmatrix} 0.5544 & -0.0706 \\ -0.0706 & 0.0396 \end{bmatrix}, \\ M_2 &= \begin{bmatrix} 0.2219 & -0.0513 \\ -0.0513 & 0.0150 \end{bmatrix}, & M_3 &= \begin{bmatrix} 0.4593 & -0.0922 \\ -0.0922 & 0.0280 \end{bmatrix}, \\ M_4 &= \begin{bmatrix} 0.4214 & -0.0889 \\ -0.0889 & 0.0310 \end{bmatrix}, & Q_1 &= \begin{bmatrix} 0.3849 & -0.0559 \\ -0.0559 & 0.0261 \end{bmatrix}, \\ Q_2 &= \begin{bmatrix} 0.3233 & -0.0566 \\ -0.0566 & 0.0265 \end{bmatrix}, & Q_3 &= \begin{bmatrix} 0.5948 & -0.1022 \\ -0.1022 & 0.0415 \end{bmatrix}, \\ Q_4 &= \begin{bmatrix} 0.2476 & -0.0380 \\ -0.0380 & 0.0189 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

در این صورت سیستم (۱.۴.۴) پایدار مجانبی می‌باشد. با شرایط اولیه $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$ نمودار واکنش سیستم در شکل (۳.۴) نشان داده شده است.



شکل ۳.۴: رفتار سیستم برای مثال (۱.۴.۴)

از آنجایی که تابع لیپانوف منحصر بفرد نیست پس می‌توان چندین تابع لیپانوف یافت که شرایط پایداری را حفظ کنند. بنابراین LMI‌های دیگری برای بررسی پایداری سیستم وجود دارد. اکنون شرایط پایداری برای سیستم (۵۴.۴) با شرایط (۵۵.۴) را در قالب یک قضیه دیگر بیان می‌نماییم.

قضیه ۲.۴.۴. سیستم (۵۴.۴) با شرایط بیان شده در (۵۵.۴) پایدار مجانبی است هرگاه ماتریس‌های $R_1 = R_1^T, Q_2 = Q_2^T \geq Q_3 = Q_3^T \geq 0, Q_1 = Q_1^T \geq 0, P = P^T > 0$ و $R_2 = R_2^T \geq R_3 = R_3^T \geq 0$ وجود داشته باشند که در LMI زیر صدق کنند،

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & L_1 & M_1 & N_1 \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} & L_2 & M_2 & N_2 \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} & L_3 & M_3 & N_3 \\ * & * & * & \Omega_{44} & L_4 & M_4 & N_4 \\ * & * & * & * & -h^{-1}R_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h_1^{-1}R_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -h_2^{-1}R_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (57.4)$$

که در آن،

$$d(t) = d_1(t) + d_2(t), \quad h = h_1 + h_2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

$$\Omega_{11} = Q_1 + Q_2 + G_1 A + A^T G_1^T + L_1 + L_1^T + M_1 + M_1^T,$$

$$\Omega_{12} = A^T G_2^T + L_2^T - M_1 + M_2^T + N_1,$$

$$\Omega_{13} = G_1 A_d + A^T G_2^T - L_1 + L_2^T - N_1 + M_3,$$

$$\begin{aligned}\Omega_{14} &= P - G_1 + A^T G_{\mathcal{F}}^T + L_{\mathcal{F}}^T + M_{\mathcal{F}}^T, \\ \Omega_{22} &= -(1 - \mu_1)(Q_2 - Q_3) - M_2 - M_{\mathcal{F}}^T + N_2 + N_{\mathcal{F}}^T, \\ \Omega_{23} &= G_2 A_d - L_2 - M_{\mathcal{F}}^T - N_2 + N_{\mathcal{F}}^T, \\ \Omega_{24} &= -G_2 - M_{\mathcal{F}}^T + N_{\mathcal{F}}^T, \\ \Omega_{33} &= -(1 - \mu)(Q_1 + Q_3) + G_3 A_d + A_d^T G_3 - L_3 - L_{\mathcal{F}}^T - N_3 - N_{\mathcal{F}}^T, \\ \Omega_{34} &= -G_3 + A_d^T G_{\mathcal{F}}^T - L_{\mathcal{F}}^T - N_{\mathcal{F}}^T, \\ \Omega_{44} &= hR_1 + h_1 R_2 + h_2 R_3 - G_{\mathcal{F}} - G_{\mathcal{F}}^T.\end{aligned}$$

تابع لیاپانوف بکار برده شده در روند اثبات این قضیه بصورت زیر می‌باشد [۳۵]،

$$\begin{aligned}V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t), \\ V_1(t) &= x(t)^T P x(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-d(t)}^t x(s)^T Q_1 x(s) ds + \int_{t-d_1(t)}^t x(s)^T Q_2 x(s) ds + \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} x(s)^T Q_3 x(s) ds, \\ V_3(t) &= \int_{t-h}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{t-h_1}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)^T R_2 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{t-h}^{t-h_1} \int_{\theta}^t \dot{x}(s)^T R_3 \dot{x}(s) ds d\theta,\end{aligned}$$

اکنون مثالی را ارائه می‌دهیم که قضیه، (۱.۲.۴) با قضیه‌های دیگر از مراجع [۳۵]–[۳۱] مقایسه می‌کند.

مثال ۲.۴.۴. سیستم کنترل شبکه (۱.۴) را در نظر بگیرید، در اینجا عملیات فیزیکی بوسیله

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

داده شده است، با

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ماتریس بهره پسخورد حالت منفی بصورت زیر بدست می‌آید،

$$K = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

دو تاخیر در سیستم کنترل شبکه درگیر هستند. یک تاخیر $d_1(t)$ از گره حسگر به گره کنترل، و دیگری تاخیر $d_2(t)$ از گره کنترل به گره محرک است. در حال حاضر مشاهده می‌شود که سیستم کنترل شبکه بصورت زیر است،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d_1(t) - d_2(t)),$$

در مراجع [۳۵]–[۳۱] فرض بر این است که،

$$\dot{d}_1(t) \leq 0.1, \quad \dot{d}_2(t) \leq 0.1,$$

در اینجا برای کران بالای داده شده h_1 از $d_1(t)$ قصد داریم کران بالای مجاز h_2 از $d_2(t)$ را بیابیم که تضمین کند سیستم پایدار مجانبی باقی بماند.

برای h_1 و h_2 از $0 \leq d_1(t) \leq h_1$ و $0 \leq d_2(t) \leq h_2$ از جدول زیر روشن است که معیارهای پایداری قضیه (۱.۲.۴) نسبت به بقیه قضا یا و مراجع کمتر محافظه کارانه است، شایان ذکر است که قضیه (۱.۲.۴) دارای متغیر تصمیم کمتری نسبت به مراجع دیگر می باشد.

روش	h_1	۱	۱.۲	۱.۵
قضیه ۱.۴.۴	h_2	۰.۴۱۵	۰.۳۷۶	۰.۲۴۸
[۳۲]	h_2	۰.۵۱۲	۰.۴۰۶	۰.۲۸۳
[۳۳]	h_2	۰.۵۸۳	۰.۵۱۹	۰.۴۲۱
[۳۴]	h_2	۰.۵۹۵	۰.۴۶۳	۰.۳۱۲
قضیه ۲.۴.۴	h_2	۰.۸۷۳	۰.۶۷۳	۰.۳۷۳
قضیه ۱.۲.۴	h_2	۰.۹۸۸	۰.۸۳۶	۰.۵۶۳

جدول ۱.۴: کران بالای h_2 برای h_1 های مختلف

پیشنهادات

می‌توان سیستم‌های خطی چند تاخیره با دو تاخیر در متغیر حالت را به یک سیستم تک تاخیره با دو متغیر حالت تبدیل نمود. در این روش از تبدیل بعنوان یک ابزار مفید استفاده می‌گردد.
تبدیل سیستم چند تاخیره:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1 - Q_1) + A_2 x(t - \tau_2 - Q_2) + \dots + A_k x(t - \tau_k - Q_k), \quad (58.4)$$

به سیستم تک تاخیر، بصورت زیر می‌باشد،

$$\ddot{x}(t) = \bar{A}_0 \bar{x}(t) + \bar{A}_1 \bar{x}(t - \tau_k - Q_k) + \bar{f}(t), \quad (59.4)$$

ابتدا تعریف می‌کنیم،

$$\bar{x}_j := x(t - (j - 1)\tau^* - (j - 1)Q^*),$$

$$\tau_k - Q_k := k\tau^* - kQ^*,$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau^* - Q^*) \\ x(t - 2\tau^* - 2Q^*) \\ \vdots \\ x(t - (k - 1)\tau^* - (k - 1)Q^*) \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau^* - Q^*) + A_2 x(t - 2\tau^* - 2Q^*) + \dots + A_{k-1} x(t - (k - 1)\tau^* - (k - 1)Q^*)$$

$$+ A_k x(t - k\tau^* - kQ^*),$$

⋮

$$\dot{x}(t - (k - 1)\tau^* - (k - 1)Q^*) = A_0 x(t - (k - 1)\tau^* - (k - 1)Q^*) + A_1 x(t - k\tau^* - kQ^*) + \dots$$

$$+ A_{k-1} x(t - (\tau^* k - \tau^*) - (Q^* k - Q^*)) + A_k x(t - (\tau^* k - \tau^*) - (Q^* k - Q^*)),$$

9

$$\bar{x}(t - \tau_k - Q_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t - \tau_k - Q_k) \\ \bar{x}_2(t - \tau_k - Q_k) \\ \vdots \\ \bar{x}_k(t - \tau_k - Q_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t - k\tau^* - kQ^*) \\ x(t - (k + 1)\tau^* - (k + 1)Q^*) \\ \vdots \\ x(t - (\tau^* k - \tau^*) - (Q^* k - Q^*)) \end{bmatrix},$$

از این روابط ماتریس تبدیل $\bar{A}_0$ و $\bar{A}_1$ بصورت زیر بدست می‌آیند،

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{k-1} \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{k-2} \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & A_{k-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & A_0 \end{bmatrix}, \quad (60.4)$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{k-1} & A_k & 0 & \cdots & 0 \\ A_{k-2} & A_{k-1} & A_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & & A_k \end{bmatrix}, \quad (61.4)$$

اکنون از این روش می‌توانیم سیستم با چند تاخیر را به یک سیستم با یک تاخیر تبدیل نماییم و از روش‌های معمول پایداری آن را محاسبه نماییم. همچنین می‌توان برای اثبات پایداری سیستم‌هایی با چند تاخیر ثابت در متغیر حالت از روش مستقیم نامساوی‌های ماتریس خطی استفاده کرد. سیستم خطی با چندین تاخیر زمانی در متغیر حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - h_i), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (62.4)$$

که در آن $h_0 = 0$ و $h_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ ثابت‌های تاخیر زمانی هستند، $h = \max\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ تعریف می‌گردد و $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, (i = 0, 1, \dots, m)$ ماتریس‌های ثابت می‌باشند. فرض کنید،

$$0 = h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_m \quad (63.4)$$

تحلیل پایداری سیستم فوق نیز می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. بنابراین می‌توان پایداری را برای سیستم‌هایی با بیش از دو تاخیر نیز گسترش داد. پیشنهاد بعدی این است که می‌توان سیستم‌هایی با دو تاخیر زمانی همزمان در متغیر ورودی و متغیر حالت را در نظر گرفت و شرایطی بدست آورد که سیستم پایدار باقی بماند.

مراجع

- [۱] خاکی صدیق ع، (۱۳۷۳)، ”اصول کنترل مدرن“، چاپ اول، انتشارات دانشگاه تهران.
- [۲] وزواز ع، (۱۳۹۳)، ”نخستین درس در معادلات انتگرال“، چاپ دوم، انتشارات گسترش علوم پایه.
- [۳] خاکی صدیق ع، (۱۳۸۱)، ”سیستم‌های کنترل خطی“ چاپ دوم، انتشارات دانشگاه پیام نور، صفحه ۸۱
- [۴] وحیدیان ع. و بزرگ‌نیا ا، (۱۳۷۲)، ”مقدمه‌ای بر نظریه کنترل و کنترل بهینه“، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، صفحه ۸۱-۱۲۲
- [۵] رضوانی ن، (۱۳۹۲)، پایان‌نامه ارشد: ”تخصیص مقدار ویژه برای سیستم‌های نوردای زمانی خطی با تاخیر زمانی“، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود،
- [6] Wiboonjaroen W. and Sujitjron S. (2012), ”Stabilization of State-derivative Feedback Control with Time Delay” **Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology**, 4,18, pp 3201-3208
- [7] Corless R.M. Gonnet G.H. Hare D.E.G. Jeffrey J. and Knuth D.E. (1996), ” On the lambert W function” **Advances in Computational Mathematics**, 5,4, pp 329-359
- [8] Yi S. Nelson P.W. and Ulsoy A.G. (2010), ” Eigenvalue assignment via the lambert W function for control of time-delay systems” **Jornal of Vibration and Control**,, pp 1-20
- [9] Ivanoviene I. and Rimasi J. (2010), ”Analysis of delay differential equations using the lambert function” **Mathematical Modelling and Analysis**, pp 1-15
- [10] Yi S. Nelson P.W. and Ulsoy A.G. (2007), ” Chatter Stability analysis using the lambert function and bifurcation analysis” **Mathematical Biosciences and Engineering** , 4, 2, pp 355-38

- [11] Xu S. and Lam J. (2005), "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems" **IEEE Trans Automat Control**, 50, pp 384-387
- [12] Shao H. (2009), "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay" **Automatica**, 45,3 pp 744-749
- [13] Manitius A. and Olbrot A.W. (1993), "Finite spectrum assignment problem for systems with delays" **IEEE Transactions on Automatica Control**, 24,4, pp 541-553
- [14] Michiels W. Engelborghs K. Vansevenant P. and Roose D. (2002), "Continuous pole placement for delay equations" **Automatica**, 38,5, pp 747-761
- [15] Richard J.P. (2003), "Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems" **Automatica**, 39,10, pp 1667-1964
- [16] Silva G.J. Datta A. and Bhattacharyya S.P. (2001), "Controller design via pade approximation can lead to instability" in **Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control**, pp 4733-4737
- [17] Yi S. Nelson P.W. and Ulsoy A.G (2010), "Eigenvalue assignment via the lambert W function for control of time-delay systems" **Jornal of Vibration and Control**, pp 1-22
- [18] Gu K. (2000), "An integral inequality in the stability problem of time-delay systems" **IEEE conference on decision and control**, pp 2805-2810
- [19] Zhu X.L. and Yang G.H. (2010), "New results of stability analysis for systems with time-varying delay" **int.J.Robust and Nonlinear Control**, 20,5, pp 596-606
- [20] Zhu X.L. Wang Y. and Yang G.H. (2010), "New stability criteria for continuous-time systems with interval time-varying delay" **IET Control Theory and Appl**, 4,6, pp 1101-1107
- [21] Xu S. and Lam J. (2005), "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems" **IEEE Trans. Automat. Control**, 50, pp 384-387
- [22] Xu S. Lam J. and Zou Y. (2008), "An improved characterization of bounded real ness for singular delay systems and its applications" **Int.J. Robust and Nonlinear Control**, 18,3, pp 263-277
- [23] He Y. Wang Q. Lin C. and Wu M. (2007), "Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay" **Automatica**, 43, pp 371-376

- [24] Shao H. (2007), "Improved delay-dependent stability criteria for systems with a delay in a range" **Automatica**, 44,12, pp 3215-3218
- [25] Shao H. (2007), "New delay-dependent stability criteria for systems with interval time-varying delay" **Automatica**, 45,3, pp 744-749
- [26] Shen H. Xu S. Lu J. and Zhou J. (2012), "Passivity-based control for uncertain stochastic jumping systems with mode-dependent round-trip time delays" **J.Franklin Inst**, 394, pp 1665-1680
- [27] Shen H. Park J.H. and Wu Z. (2012), "Reliable mixed passive and H^∞ filtering for semi-Markov jump systems with randomly occurring uncertainties and sensor failures" **Int.J. Robust Nonlinear Control**, doi:10.1002/rnc.3255
- [28] Shen H, Park J.H. Zhang L. and Wu Z.G. (2014), "Robust extended dissipative control for sampled-data Markov jump systems" **Int.J. Control**, 87, pp 1549-1564
- [29] Peng C. and Yang T. (2013), "Event-triggered communication and H^∞ control co-design for networked control systems" **Automatica**, 49, pp 1326-1332
- [30] Zhang X.M. and Ha Q.L. (2014), "Event-triggered dynamic output feedback control for networked control systems" **IET Control Theory and Appl**, 8,4, pp 226-234
- [31] Lam J. and Gao H. and Wang C. (2007), "Stability analysis for continuous systems with two additive time-varying delay components" **Sys. Control Lett** , 56, pp 16-24
- [32] Gao H. Chen T. and Lam J. (2008), "A new delay system approach to network-based control" **Automatica** , 44, pp 39-52
- [33] Li P. (2014), "Further results on delay-range-dependent stability with additive time-varying delay systems" **ISA Trans** , 53, pp 258-266
- [34] Shao H. Zhang Z. Zhu X. and Miao G. (2014), " H^∞ control for a networked control model of systems with two additive time-varying delays" **Abstract and Applied Analysis Article ID 923436**,
- [35] Ge X. (2014), "Comments and an improved result on stability analysis for continuous system with additive time-varying delays: a less conservative result" **Appl Math Comput** , 241, pp 42-46

- [36] Shao H. and Zhang Z. (2015), "Delay-dependent state feedback stabilization for a networked control model with two additive input delays" **Applied Mathematics and Computation**, 265, pp 748-758
- [37] Ghaoui L.E. Oustry F. and Rami M.A. (1997), " A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems" **IEEE Trans. Automat. Control**, 42, pp 1171-1176
- [38] He Y. Wuyz M. and She J.H. (2006), "Delay-Dependent Stability Criteria for Linear Systems with Multiple Time Delays" **IEE Proceedings-Control Theory and Applications** , 153,4, pp 447-452
- [39] George A. and Baker J.R. (1996), "**Pade Approximants**", Department Of Mathematics University Of Bradford.
- [40] Ogata K. (1971), "**Modren Control Engineering**", Prentice Hall, pp. 30
- [41] Fridman E. (2014), "**Introduction to Time-Delay Systems**", Springer International Publishing Switzerland, pp. 61
- [42] Gahinet P. Nemirovski A. Laub A.J. and Chilali M. (1995), "**LMI Control Toolbox**", Math Works, pp. 59-63
- [43] Shinozaki H. (2007), "**Lambert W function approach to stability and stabilization problems for linear time-delay systems**", Kyoto Institute of Technology, pp 5-21
- [44] Duan S. (2011), "**Stability of uncertain piecewise affine time-delay systems with application to all wheel drive clutch control**", Mechanical Engineering, pp 82
- [45] Hale J.K. and Lunel S.M.V. (1993), "**Introduction to Functional Differential Equations**", Springer New York
- [46] Gu K. Kharitonov V.L. Chen J. (2003), " **Stability of Time-Delay Systems**" Birkhäuser Boston
- [47] Chen C.T. (1984), "**Linear system theory and design**", Holt, Rinehart and Winston, New York
- [48] Schoen G.M. (1962), "**Stability and Stabilization of Time-Delay Systems**", Swiss federal institute of technology zurich, pp. 45-76

- [49] Datta B.N. (1994), "**Numerical linear algebra and applications**", Cole publishing company, pp. 273

پیوست آ

برنامه نویسی

```
% DDE_Sol = find_Sk(A,Ad,h,N,Q_initial)
% The argument N and Q_initial are optional
% Find Sk for each branch given A, Ad and h for a DDE system
%  $\dot{x}(t) = A*x(t) + Ad*x(t-h)$ 
% Q_initial is the initial condition for Qk
% N is the index of the branches of interest;
function DDE_Sol = find_Sk(A,Ad,h,N,Q_initial,thredhold)
options_def = optimset('Display','iter');
if nargin < 3
error('No enough input arguments')
elseif nargin < 4
N = 0; % default is to solve for principal branch
Q_initial = expm(-A*h);
options = options_def;
elseif nargin < 5
Q_initial = expm(-A*h);
```

```

options = options_def;
elseif nargin <6
options = options_def;
else
if thredhold~=0 % if the thredhold is specified
options = options_def;
options.TolFun = thredhold;
else
options = options_def;
end
end
dim_Ad = length(Ad); % system order
DDE_Sol = {};
if dim_Ad == 1 % scalar case
if Ad == 0
warning('First order ODE; x = exp(A*t)*x_0')
else
for i = 1: length(N)
DDE_Sol{i}.Sk = lambertw(N(i),Ad*h*exp(-A*h))/h+A;
DDE_Sol{i}.branchID = N(i);
error1 = norm(lambertw(N(i),Ad*h*exp(-A*h))-Ad*h-h*DDE_Sol{i}.Sk);
error2 = norm(DDE_Sol{i}.Sk*eye(length(A))-A-Ad*expm(-DDE_Sol{i}.Sk*h));
DDE_Sol{i}.error = [error1 error2];
end
end
else % matrix case
for i =1: length(N)
[DDE_Sol{i}.Sk,DDE_Sol{i}.Q,error1,error2]=
QS_matrix(A,Ad,h,N(i),Q_initial,options);
DDE_Sol{i}.branchID = N(i);
DDE_Sol{i}.error = [error1 error2];
end
end
% currentQ =DDE_Sol{i}.Q % display the Q for current iteration

```

```
% Find CI_k for the kth branch given A, Ad, h and Sk for this branch
% Important assumption: Any two eigenvalues from different branches are
% distinct !
% When Ad is invertible, S should be a matrix; when Ad is singular, S
% should be a scalar
% If the solution is unique, uniqueness=1; otherwise uniqueness=0
function [CI, uniqueness]= find_CI(A,Ad,h,S,g0,x0)
sys_order = length(A);
% scalar case
if sys_order==1
CI=(x0+Ad*preshape_conv(g0,S,h))/(1+Ad*h*exp(-S*h));
uniqueness = 1;
return
end
% matrix case
if length(S)==sys_order % general case, S is a matrix
E = eig(S);
syms s
L1_num = 1;
for i=1:sys_order
L1_num = L1_num*(s-E(i));
end
char_eqn = det(s*eye(sys_order)-A-Ad*expm(-s*h));
L1 = diff(L1_num)/diff(char_eqn);
R_matrix = [];
L_matrix = [];
for k =1:sys_order
R1_num = adjugate(eye(sys_order)*E(k) - S);
L1_num = subs(L1,s,E(k));
L2_num = adjugate(E(k)*eye(sys_order)-A-Ad*exp(-E(k)*h));
L3_num = x0+Ad*preshape_conv(g0,E(k),h); % (x0+Ad*G(Sk))
R_matrix = [R_matrix;R1_num]; % stacked right side
L_matrix = [L_matrix;L1_num*L2_num*L3_num]; % stacked left side
end
```

```
uniqueness = rank(L_matrix)==sys_order;
% for having an unique solution, matrix should have full column rank
CI = pinv(R_matrix)*L_matrix;
elseif sys_order>1 && length(S)==1 % hybrid branch case, S is a scalar
syms s
char_eqn = det(s*eye(sys_order)-A-Ad*expm(-s*h));
L1 = 1/diff(char_eqn);
L1_num = subs(L1,s,S);
L2_num = adjugate(S*eye(sys_order)-A-Ad*exp(-S*h));
L3_num = x0+Ad*preshape_conv(g0,S,h);
CI = L1_num*L2_num*L3_num;
uniqueness = (L1_num~=0);
else
error('Dimension of A and S are not compatible');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% [CN, uniqueness]= find_CN(S,A,Ad,h)
% Find CN_k for the kth branch given A, Ad, h and Sk for this branch
% Important assumption: Any two eigenvalues from
different branches are distinct !
% When Ad is invertible, S should be a matrix;
when Ad is singular, S should be a scalar
% If the solution is unique, uniqueness=1; otherwise uniqueness=0
function [CN, uniqueness]= find_CN(A,Ad,h,S)
E = eig(S);
sys_order = length(A);
% scalar case
if sys_order == 1
CN = 1/(1+Ad*h*exp(-S*h));
uniqueness = 1;
return
end
% matrix case
if length(S) == sys_order % general case, S is a matrix
syms s
```

```

L1_num = 1;
for i=1:sys_order
L1_num = L1_num*(s-E(i));
end
char_eqn = det(s*eye(sys_order)-A-Ad*expm(-s*h)); % char eqn.
L1 = diff(L1_num)/diff(char_eqn);
R_matrix = [];
L_matrix = [];
for k =1:sys_order
R1_num = adjugate(eye(sys_order)*E(k) - S);
L1_num = subs(L1,s,E(k));
L2_num = adjugate(E(k)*eye(sys_order)-A-Ad*exp(-E(k)*h));
R_matrix = [R_matrix;R1_num]; % stacked right side
L_matrix = [L_matrix;L1_num*L2_num]; % stacked left side
end
uniqueness = rank(L_matrix)==sys_order;
% for having an unique solution, matrix should have full column rank
CN = pinv(R_matrix)*L_matrix;
% use generalized pseudo inverse to calculate the solution
elseif sys_order>1 && length(S)==1 % hybrid branch case, S is a scalar
syms s
char_eqn = det(s*eye(sys_order)-A-Ad*expm(-s*h));
L1 = 1/diff(char_eqn);
L1_num = subs(L1,s,S);
L2_num = adjugate(S*eye(sys_order)-A-Ad*exp(-S*h));
CN = L1_num*L2_num;
uniqueness = (L1_num~=0);
else
error('Dimension of A and S are not compatible');
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5
% calculate matrix lambert w function
function W = lambertw_matrix(K,X)
if nargin == 1 % Only calculate principal branches

```

```
X = K;
K = 0;
end
rank_X = rank(X);
dim_X = length(X); % system order
LMW = zeros(dim_X);
[V,D] = jordan(X); % transform to Jordan form
% check superdiagonal terms
super_diag = [];
if dim_X==1;
super_diag = 0;
else
for i = 2:dim_X
super_diag = [super_diag D(i-1,i)];
end
end
% calculate the Lambert W func. for diagonal terms
for i = 1:dim_X
if D(i,i)==0
% use principal branch for 0 eigenvalue
LMW(i,i)=lambertw(0,D(i,i));
% warning('Ad is singular, hybrid branch is used')
else
LMW(i,i)=lambertw(K,D(i,i));
end
end
% calculate the Lambert W func. for other upper triangle terms
if sum(super_diag)==0
flag =0; % all jordan blocks have a size of 1
else
flag =1; % some jordan blocks have a size > 1
block_start = 1; % where an jordan block begins
block_end = 1; % where an jordan block ends
for j=2:dim_X
```

```

if j>=block_end
if super_diag(j-1)==1
block_start = j-1;
if ~isempty(find(super_diag(j-1:end)==0))
block_end = min(find(super_diag(j-1:end)==0))+j-2;
else
block_end = dim_X;
end
for k1 =block_start:block_end
for k2 = k1: block_end
if D(block_start,block_start)~=0
LMW(k1,k2)=der_lambertw(K,D(block_start,block_start),k2-k1)/factorial(k2-k1);
% (k2-k1)th deritive of lambertw(D(i))/(k2-k1)!
end
end
end
end
end
end
end
end
W = V*LMW*V^-1; % similarity transformation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Piecewise controllability test for a system of DDEs
%  $\dot{x}(t) = A*x(t) + A_d*x(t-T)+B*u(t)$ 
% Check the linear independence of the rows of  $(sI-A-A_d*exp(-s*h))^{-1}*B$ 
% Let  $[C_1(s);C_2(s); \dots ;C_n(s)]= (sI-A-A_d*exp(-s*h))B$ ;
% If there exist  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , such that
%  $[C_1(p_1) \ C_1(p_2) \ \dots \ C_1(p_n); \dots ; C_n(p_1) \ C_n(p_2) \ \dots C_n(p_n)]$  has full
% rank, then  $C_1(s), C_2(s), \dots ,C_n(s)$  are linearly independent
function contr_flag = pwcontr_test(A,Ad,B,h)
thred = 1e-5;
if nargin < 4
error('No enough input arguments')
end

```

```

dim = length(A); % dimension of the system
syms s
char = s*eye(dim)-A-Ad*exp(-s*h);
contr_gram = char^-1*B;
runs = 10;
% test 10 times. If failed everytime, the system is NOT piecewise controllable;
if passed for a run, the system is piecewise controllable
contr_flag = 0; % default is set to be not piecewise controllable
for j = 1:runs
p = 10*rand(dim,1); % random variable [p1 p2 p3 ... pn]
contr_matrix = [];
for i = 1:dim
contr_matrix = [contr_matrix subs(contr_gram, p(i))];
% formulating the matrix [C(p1) C(p2) .... C(pn)]
end
if det(contr_matrix) > thred
contr_flag =1;
disp('The system of DDEs is piecewise controllable.')
break;
end
end
if contr_flag==0
disp('The system of DDEs is NOT piecewise controllable.')
end
%%%%%%%%%%%%%%
% Find a feedback gain K to place the rightmost eigenvalue
% of the closed-loop at desired place
% contr mode 1: u = -K*x(t)
% the closed-loop system is x_dot(t) = (A-B*K)*x(t) + Ad*x(t-h)
% contr mode 2: u = -Kd*x(t-h)
% the closed-loop system is x_dot(t) = A*x(t) + (Ad-B*Kd)*x(t-h)
% contr mode 3: u = -K*x(t) - Kd*x(t-h)
% the closed-loop system is x_dot(t) = (A-B*K)*x(t) + (Ad-B*Kd)*x(t-h)
% observer mode 4: observer gain is L

```

```

% the closed-loop system is  $\dot{x}(t) = (A-L*C)*x(t) + A_d*x(t-h)$ 
% default mode is 1.
% K = place_dde(A,Ad,B,h,branch,pole_desired,contr_mode,K0,Q_ini,thredhold)
% The arguments contr_mode, K0, Q_ini and thredhold are optional
% pole_desired must be a scalar. For complex values, e.g.,
%   you can use either -1+i or -1-i.
function K =
    place_dde(A,Ad,B,h,branch,pole_desired,contr_mode,K0,Q_ini,thredhold)
options_K_def = optimset('Display','final');
th2 = 0;
[B_row, B_col] = size(B);
if nargin <=5
warning('No enough input arguments.')
elseif nargin ==6
contr_mode = 1;% default mode 1:  $u(t) = -Kx(t)$ 
K0 = ones(B_col,length(A));
Q_ini = expm(-A*h); % use  $e^{(-Ah)}$  to initialize Q
elseif nargin ==7 % only contr mode is selected
if contr_mode <=2
K0 = ones(B_col,length(A)); Q_ini = expm(-A*h); % mode 1 and 2
elseif contr_mode ==3
K0 = [ones(B_col,length(A)) zeros(B_col,length(A))]; Q_ini = expm(-A*h);
elseif contr_mode ==4
K0 = ones(length(A),B_row); Q_ini = expm(-A*h); % observer mode
else
warning('mode must be <= 4');
end
elseif nargin ==8
Q_ini = expm(-A*h);
elseif nargin ==10
if thredhold(1)~=0
options_K_def.TolFun = thredhold(1);
end
if thredhold(2)~=0

```

```
th2 = thredhold(2);
end
end
if length(pole_desired)>1
warning('Pole_desired is a scalar, please enter either
a real number, or a complex number');
end
K = fsolve(@find_K,K0,options_K_def,A,Ad,B,h,branch,
pole_desired,contr_mode,Q_ini,th2)
function rtn=find_K(X,A,Ad,B,h,branch,pole_desired,contr_mode,
Q_initial,thredhold2)
[B_row, B_col] = size(B);
% calculate the closed-loop system
if contr_mode == 1
K = X; Kd = zeros(B_col,length(A));A_cl = A-B*K;Ad_cl = Ad-B*Kd;
elseif contr_mode ==2
Kd = X; K = zeros(B_col,length(A));A_cl = A-B*K;Ad_cl = Ad-B*Kd;
elseif contr_mode ==3
K = X(:,1:length(A)); Kd = X(:,length(A)+1:end);A_cl = A-B*K;Ad_cl = Ad-B*Kd;
elseif contr_mode ==4
A_cl = A-X*B;Ad_cl = Ad;
end
% can do the assignment for only one branch!
if length(branch)~=1
error('Please select one and only one branch');
end
% find the solution for the closed-loop system
DDE_Sol = find_Sk(A_cl,Ad_cl,h,branch,Q_initial,thredhold2);
% showing the current result
eig_S = eig(DDE_Sol{1}.Sk)
% calcuete the errors of eigenvalues
if isreal(pole_desired)
rtn = (max(real(eig_S))-pole_desired)^2; % match only the real part
else
```


[illegible]

```

A1=[0 0;-1 1];
mu=0.3;
h1=1
h2=1.5
h12=h2-h1;
setlmis([])
P=lmivar(1,[2,1]);
Q1=lmivar(1,[2,1]);
Q2=lmivar(1,[2,1]);
Q3=lmivar(1,[2,1]);
Z1=lmivar(1,[2,1]);
Z2=lmivar(1,[2,1]);
lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([1 1 1 Q1],1,1);
lmiterm([1 1 1 Z1],-1,1);
lmiterm([1 1 1 Q2],1,1);
lmiterm([1 1 1 Z1],-1,1);
lmiterm([1 1 1 Q3],1,1);
lmiterm([1 1 1 Z1],-1,1);
lmiterm([1 1 1 Z1],(A^2)*(h1^2),1);
lmiterm([1 1 1 Z2],(A^2)*(h12^2),1);
lmiterm([1 1 2 P],1,A1);
lmiterm([1 1 2 Z1],(A*A1)*h1^2,1);
lmiterm([1 1 2 Z2],(A*A1)*h12^2,1);
lmiterm([1 1 3 Z1],1,1);
lmiterm([1 2 1 P],1,A1);
lmiterm([1 2 1 Z1],(A1*A)*h1^2,1);
lmiterm([1 2 1 Z2],(A1*A)*h12^2,1);
lmiterm([1 2 2 Q3],-(1-mu),1);
lmiterm([1 2 2 Z2],-2,1);
lmiterm([1 2 2 Z1],(A1^2)*h1^2,1);
lmiterm([1 2 2 Z2],(A1^2)*h12^2,1);
lmiterm([1 2 2 Z2],1,1);
lmiterm([1 2 3 Z2],1,1);

```

```
lmiterm([1 2 3 Z2],1,1);
lmiterm([1 3 1 Z1],1,1);
lmiterm([1 3 2 Z2],1,1);
lmiterm([1 3 2 Z2],1,1);
lmiterm([1 3 3 Q1],-1,1);
lmiterm([1 3 3 Z1],-1,1);
lmiterm([1 3 3 Z2],-1,1);
lmiterm([1 3 3 Z2],-1,1);
lmiterm([1 4 4 Q2],-1,1);
lmiterm([1 4 4 Z2],-1,1);
lmiterm([2 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([2 1 1 Q1],1,1);
lmiterm([2 1 1 Z1],-1,1);
lmiterm([2 1 1 Q2],1,1);
lmiterm([2 1 1 Z1],-1,1);
lmiterm([2 1 1 Q3],1,1);
lmiterm([2 1 1 Z1],-1,1);
lmiterm([2 1 1 Z1],(A^2)*(h1^2),1);
lmiterm([2 1 1 Z2],(A^2)*(h12^2),1);
lmiterm([2 1 2 P],1,A1);
lmiterm([2 1 2 Z1],(A*A1)*h1^2,1);
lmiterm([2 1 2 Z2],(A*A1)*h12^2,1);
lmiterm([2 1 3 Z1],1,1);
lmiterm([2 2 1 P],1,A1);
lmiterm([2 2 1 Z1],(A1*A)*h1^2,1);
lmiterm([2 2 1 Z2],(A1*A)*h12^2,1);
lmiterm([2 2 2 Q3],-(1-mu),1);
lmiterm([2 2 2 Z2],-2,1);
lmiterm([2 2 2 Z1],(A1^2)*h1^2,1);
lmiterm([2 2 2 Z2],(A1^2)*h12^2,1);
lmiterm([2 2 2 Z2],1,1);
lmiterm([2 2 3 Z2],1,1);
lmiterm([2 2 4 Z2],1,1);
lmiterm([2 3 1 Z1],1,1);
```

```

lmiterm([2 3 2 Z2],1,1);
lmiterm([2 3 3 Q1],-1,1);
lmiterm([2 3 3 Z1],-1,1);
lmiterm([2 3 3 Z2],-1,1);
lmiterm([2 4 2 Z2],1,1);
lmiterm([2 4 4 Q2],-1,1);
lmiterm([2 4 4 Z2],-1,1);
lmiterm([2 4 4 Z2],-1,1);
LMIs=getlmis;
[TMIN,XFEAS]=feasp(LMIs);
P=dec2mat(LMIs,XFEAS,P)
Q1=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q1)
Q2=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q2)
Q3=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q3)
Z1=dec2mat(LMIs,XFEAS,Z1)
Z2=dec2mat(LMIs,XFEAS,Z2)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A=[-2 0;0 -0.9];
B=[-1 0;-1 -1];
h1=2;
h2=3.2035;
mu1=0.1;
mu2=0.2;
h=h1+h2;
mu=mu1+mu2;
setlmis([])
P=lmivar(1,[2,1]);
Q1=lmivar(1,[2,1]);
Q3=lmivar(1,[2,1]);
Z1=lmivar(1,[2,1]);
Q4=lmivar(1,[2,1]);
Z2=lmivar(1,[2,1]);
Q2=lmivar(1,[2,1]);

```

```
X1=lmivar(1,[2,1]);
X2=lmivar(1,[2,1]);
X3=lmivar(1,[2,1]);
X4=lmivar(1,[2,1]);
Y=lmivar(1,[2,1]);
K=lmivar(1,[2,1]);
lmiterm([-1 1 1 P],h1/h,1);
lmiterm([-1 1 1 Z1],1,1);
lmiterm([-1 1 2 Z1],-1,1);
lmiterm([-1 2 1 Z1],-1,1);
lmiterm([-1 2 2 Z1],1,1);
lmiterm([-1 2 2 Q4],h1,1);
lmiterm([-2 1 1 P],1,1);
lmiterm([-2 1 1 Z2],1,1);
lmiterm([-2 1 2 Z2],-1,1);
lmiterm([-2 2 1 Z2],-1,1);
lmiterm([-2 2 2 Z2],1,1);
lmiterm([-2 2 2 Q2],h,1);
lmiterm([-3 1 1 Z1],1,1);
lmiterm([-3 1 2 X1],1,1);
lmiterm([-3 2 1 -X1],1,1);
lmiterm([-3 2 2 Z1],1,1);
lmiterm([-4 1 1 Z1],1,1);
lmiterm([-4 1 2 X2],1,1);
lmiterm([-4 2 1 -X2],1,1);
lmiterm([-4 2 2 Z1],1,1);
lmiterm([-5 1 1 Z1],1,1);
lmiterm([-5 1 2 X3],1,1);
lmiterm([-5 2 1 -X3],1,1);
lmiterm([-5 2 2 Z1],1,1);
lmiterm([-6 1 1 Z1],1,1);
lmiterm([-6 1 2 X4],1,1);
lmiterm([-6 2 1 -X4],1,1);
lmiterm([-6 2 2 Z1],1,1);
```

```

lmiterm([-7 1 1 Z2],1,1);
lmiterm([-7 1 2 Y],1,1);
lmiterm([-7 2 1 -Y],1,1);
lmiterm([-7 2 2 Z2],1,1);
lmiterm([8 1 1 P],A,1,'s');
lmiterm([8 1 1 Q1],1,1);
lmiterm([8 1 1 Q3],1,1);
lmiterm([8 1 1 Q4],1,1);
lmiterm([8 1 1 Z1],-inv(h1),1);
lmiterm([8 1 2 K],B,1);
lmiterm([8 1 2 X1],inv(h1),1);
lmiterm([8 1 2 X2],-inv(h1),1);
lmiterm([8 1 3 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 1 3 X1],-inv(h1),1);
lmiterm([8 1 5 X2],inv(h1),1);
lmiterm([8 2 1 K],B,1);
lmiterm([8 2 1 X1],inv(h1),1);
lmiterm([8 2 1 X2],-inv(h1),1);
lmiterm([8 2 2 Q3],-(1-mu),1);
lmiterm([8 2 2 Z1],-2*inv(h1),1);
lmiterm([8 2 2 X3],2*inv(h1),1);
lmiterm([8 2 3 X1],-inv(h1),1);
lmiterm([8 2 3 X2],inv(h1),1);
lmiterm([8 2 2 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 2 3 X3],-inv(h1),1);
lmiterm([8 2 5 X3],-inv(h1),1);
lmiterm([8 2 5 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 3 1 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 3 1 X1],-inv(h1),1);
lmiterm([8 3 2 X1],-inv(h1),1);
lmiterm([8 3 2 X2],inv(h1),1);
lmiterm([8 3 2 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 3 2 X3],-inv(h1),1);
lmiterm([8 3 3 Q1],-(1-mu1),1);

```

```
lmiterm([8 3 3 Z1],-2*inv(h1),1);
lmiterm([8 3 3 X1],2*inv(h1),1);
lmiterm([8 3 5 X2],-inv(h1),1);
lmiterm([8 3 5 X3],inv(h1),1);
lmiterm([8 4 4 Q2],-1,1);
lmiterm([8 4 4 Z2],-inv(h2),1);
lmiterm([8 5 1 X2],inv(h1),1);
lmiterm([8 5 2 X3],-inv(h1),1);
lmiterm([8 5 2 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 5 3 X2],-inv(h1),1);
lmiterm([8 5 3 X3],inv(h1),1);
lmiterm([8 5 4 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([8 5 5 Q2],1,1);
lmiterm([8 5 5 Q4],-1,1);
lmiterm([8 5 5 Z1],-inv(h1),1);
lmiterm([8 5 5 Z2],-inv(h2),1);
lmiterm([8 1 6 P],1,A');
lmiterm([8 1 7 P],1,A');
lmiterm([8 2 6 -K],1,B');
lmiterm([8 2 7 -K],1,B');
lmiterm([8 6 1 P],1,A');
lmiterm([8 6 2 -K],1,B');
lmiterm([8 7 1 P],1,A');
lmiterm([8 7 2 -K],1,B');
lmiterm([8 6 6 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([8 6 6 P],-2*inv(h1),1);
lmiterm([8 7 7 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([8 7 7 P],-2*inv(h2),1);
lmiterm([9 1 1 P],A,1,'s');
lmiterm([9 1 1 Q1],1,1);
lmiterm([9 1 1 Q3],1,1);
lmiterm([9 1 1 Q4],1,1);
lmiterm([9 1 1 Z1],-inv(h1),1);
lmiterm([9 1 2 K],B,1);
```



```

lmiterm([9 1 3 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([9 1 3 X4],-inv(h1),1);
lmiterm([9 1 5 X4],inv(h1),1);
lmiterm([9 2 1 K],B,1);
lmiterm([9 2 2 Q3],-(1-mu),1);
lmiterm([9 2 2 Z2],-2*inv(h2),1);
lmiterm([9 2 2 Y],inv(h2),1,'s');
lmiterm([9 2 4 Y],-inv(h2),1);
lmiterm([9 2 4 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([9 2 5 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([9 2 5 -Y],-inv(h2),1);
lmiterm([9 3 1 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([9 3 1 -X4],-inv(h1),1);
lmiterm([9 3 3 Q1],-(1-mu1),1);
lmiterm([9 3 3 Z1],-2*inv(h1),1);
lmiterm([9 3 3 X4],inv(h1),1,'s');
lmiterm([9 3 5 X4],-inv(h1),1);
lmiterm([9 3 5 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([9 4 2 -Y],-inv(h2),1);
lmiterm([9 4 2 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([9 4 4 Q2],-1,1);
lmiterm([9 4 4 Z2],-inv(h2),1);
lmiterm([9 4 5 -Y],inv(h2),1);
lmiterm([9 5 1 -X4],inv(h1),1);
lmiterm([9 5 2 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([9 5 2 Y],-inv(h2),1);
lmiterm([9 5 3 -X4],-inv(h1),1);
lmiterm([9 5 3 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([9 5 4 Y],inv(h2),1);
lmiterm([9 5 5 Q2],1,1);
lmiterm([9 5 5 Q4],1,1);
lmiterm([9 5 5 Z1],-inv(h1),1);
lmiterm([9 5 5 Z2],-inv(h2),1);
lmiterm([9 1 6 P],1,A');

```

```
lmiterm([9 1 7 P],1,A');
lmiterm([9 2 6 -K],1,B');
lmiterm([9 2 7 -K],1,B');
lmiterm([9 6 1 P],1,A');
lmiterm([9 6 2 -K],1,B');
lmiterm([9 7 1 P],1,A');
lmiterm([9 7 2 -K],1,B');
lmiterm([9 6 6 Z1],inv(h1),1);
lmiterm([9 6 6 P],-2*inv(h1),1);
lmiterm([9 7 7 Z2],inv(h2),1);
lmiterm([9 7 7 P],-2*inv(h2),1);
LMIs=getlmis;
[TMIN,XFEAS]=feasp(LMIs);
K=dec2mat(LMIs,XFEAS,K)
P=dec2mat(LMIs,XFEAS,P)
Z1=dec2mat(LMIs,XFEAS,Z1)
Q4=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q4)
Z2=dec2mat(LMIs,XFEAS,Z2)
Q2=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q2)
X1=dec2mat(LMIs,XFEAS,X1)
X2=dec2mat(LMIs,XFEAS,X2)
X3=dec2mat(LMIs,XFEAS,X3)
X4=dec2mat(LMIs,XFEAS,X4)
Y=dec2mat(LMIs,XFEAS,Y)
Q1=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q1)
Q3=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q3)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc
clear
A=[-0.2 0;0 -0.9];
Ad=[-1 0;-1 -1];
mu1=0.1;
mu2=0.2;
```

```
h1=1;
h2=2;
setlmis([])
P=lmivar(1,[2,1]);
N1=lmivar(1,[2,1]);
N2=lmivar(1,[2,1]);
N3=lmivar(1,[2,1]);
N4=lmivar(1,[2,1]);
N5=lmivar(1,[2,1]);
N6=lmivar(1,[2,1]);
N7=lmivar(1,[2,1]);
N8=lmivar(1,[2,1]);
M1=lmivar(1,[2,1]);
M2=lmivar(1,[2,1]);
M3=lmivar(1,[2,1]);
M4=lmivar(1,[2,1]);
Q1=lmivar(1,[2,1]);
Q2=lmivar(1,[2,1]);
Q3=lmivar(1,[2,1]);
Q4=lmivar(1,[2,1]);
lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([1 1 1 Q1],1,1);
lmiterm([1 1 1 Q3],1,1);
lmiterm([1 1 1 N1],1,1);
lmiterm([1 1 1 N5],1,1,'s');
lmiterm([1 1 2 N1],1,1);
lmiterm([1 1 2 -N2],1,1);
lmiterm([1 1 3 N5],-1,1);
lmiterm([1 1 3 -N6],1,1);
lmiterm([1 1 4 P],1,Ad);
lmiterm([1 1 5 M1],A'*h1,1);
lmiterm([1 1 5 M2],A'*h2,1);
lmiterm([1 1 5 M3],A'*h2,1);
lmiterm([1 1 5 M4],A'*h1,1);
```

```
lmiterm([1 1 6 N1],1,1);
lmiterm([1 1 8 N5],1,1);
lmiterm([1 2 1 N1],-1,1);
lmiterm([1 2 1 -N2],1,1);
lmiterm([1 2 2 Q1],-(1-mu1),1);
lmiterm([1 2 2 Q2],(1-mu1),1);
lmiterm([1 2 2 N2],-1,1,'s');
lmiterm([1 2 2 N3],-1,1);
lmiterm([1 1 1 -N4],1,1);
lmiterm([1 2 6 N2],1,1);
lmiterm([1 2 7 N3],1,1);
lmiterm([1 3 1 N5],-1,1);
lmiterm([1 3 1 -N6],1,1);
lmiterm([1 3 3 Q3],-(1-mu2),1);
lmiterm([1 3 3 Q4],(1-mu2),1);
lmiterm([1 3 3 N6],-1,1,'s');
lmiterm([1 3 3 N7],1,1,'s');
lmiterm([1 3 4 N7],-1,1);
lmiterm([1 3 4 -N8],1,1);
lmiterm([1 3 8 N6],1,1);
lmiterm([1 3 9 N7],1,1);
lmiterm([1 4 1 P],1,Ad);
lmiterm([1 4 2 N3],-1,1);
lmiterm([1 4 2 -N4],1,1);
lmiterm([1 4 3 N7],-1,1);
lmiterm([1 4 3 -N8],1,1);
lmiterm([1 4 4 Q2],-(1-mu1-mu2),1);
lmiterm([1 4 4 Q4],-(1-mu1-mu2),1);
lmiterm([1 4 4 N4],-1,1,'s');
lmiterm([1 4 4 N8],-1,1,'s');
lmiterm([1 4 5 M1],Ad'*h1,1);
lmiterm([1 4 5 M2],Ad'*h2,1);
lmiterm([1 4 5 M3],Ad'*h2,1);
lmiterm([1 4 5 M4],Ad'*h1,1);
```

```

lmiterm([1 4 7 N4],1,1);
lmiterm([1 4 9 N8],1,1);
lmiterm([1 5 1 M1],A'*h1,1);
lmiterm([1 5 1 M2],A'*h2,1);
lmiterm([1 5 1 M3],A'*h2,1);
lmiterm([1 5 1 M4],A'*h1,1);
lmiterm([1 5 4 M1],Ad'*h1,1);
lmiterm([1 5 4 M2],Ad'*h2,1);
lmiterm([1 5 4 M3],Ad'*h2,1);
lmiterm([1 5 4 M4],Ad'*h1,1);
lmiterm([1 5 5 M1],h1,1);
lmiterm([1 5 5 M2],h2,1);
lmiterm([1 5 5 M3],h2,1);
lmiterm([1 5 5 M4],h1,1);
lmiterm([1 6 1 N1],1,1);
lmiterm([1 6 2 N2],1,1);
lmiterm([1 6 6 M1],-inv(h1),1);
lmiterm([1 7 2 N3],1,1);
lmiterm([1 7 4 N4],1,1);
lmiterm([1 7 7 M2],-inv(h2),1);
lmiterm([1 8 1 N5],1,1);
lmiterm([1 8 3 N6],1,1);
lmiterm([1 8 8 M3],-inv(h2),1);
lmiterm([1 9 3 N7],1,1);
lmiterm([1 9 4 N8],1,1);
lmiterm([1 9 9 M4],-inv(h1),1);
LMIs=getlmis;
[TMIN,XFEAS]=feasp(LMIs);
P=dec2mat(LMIs,XFEAS,P)
N1=dec2mat(LMIs,XFEAS,N1)
N2=dec2mat(LMIs,XFEAS,N2)
N3=dec2mat(LMIs,XFEAS,N3)
N4=dec2mat(LMIs,XFEAS,N4)
N5=dec2mat(LMIs,XFEAS,N5)

```

N6=dec2mat(LMIs,XFEAS,N6)

N7=dec2mat(LMIs,XFEAS,N7)

N8=dec2mat(LMIs,XFEAS,N8)

M1=dec2mat(LMIs,XFEAS,M1)

M2=dec2mat(LMIs,XFEAS,M2)

M3=dec2mat(LMIs,XFEAS,M3)

M4=dec2mat(LMIs,XFEAS,M4)

Q1=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q1)

Q2=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q2)

Q3=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q3)

Q4=dec2mat(LMIs,XFEAS,Q4)

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Eigen Vector	بردار ویژه
Stability	پایداری
Asymptotic Stability	پایداری مجانبی
Nilpotent	پوچ‌توان
Nullity	پوچی
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف
Transfer Function	تابع تبدیل
Lambert Function	تابع لامبرت
Cost Function	تابع هزینه
Allocation Eigenvalue	تخصیص مقدار ویژه
Time Varying	تغییرپذیر با زمان
Pade Approximation	تقریب پاده
Multi Input-Multi Output	چند ورودی-چند خروجی
Sensor	حسگر
Open Loop	حلقه باز
Closed Loop	حلقه بسته
Attraction Area	حوزه جذب
Linear	خطی
Rightmost Eigenvalue	راست‌ترین مقدار ویژه
Full Rank	رتبه کامل
Imaginative Root	ریشه موهومی
Nonlinear	غیرخطی
Jordan Cononical Form	فرم متعارفی جردن
State Space	فضای حالت
Optimal Control	کنترل بهینه
Controlable	کنترل‌پذیر

Feedback Control	کنترل پس‌خورد
Schor lemma	لم شر
Libniz	لیبنیتز
State Transition Matrix	ماتریس انتقال حالت
Gain Matrix	ماتریس بهره
State Feedback Matrix	ماتریس پس‌خورد حالت
Modal Matrix	ماتریس مدال
Positive Definit Matrix	ماتریس معین مثبت
Negative Definit Matrix	ماتریس معین منفی
Symmetric	متقارن
Decision Variable	متغیر تصمیم
Finit	متناهی
Convex	محدب
Eigenvalue	مقدار ویژه
Delay Diffrential Equations	معادلات دیفرانسیل تاخیری
Ordinary Diffrential Equations	معادلات دیفرانسیل معمولی
Riccati Equation	معادله ریکاتی
Characteristic Equation	معادله مشخصه
Roth-Horwitz Criteria	معیار راث-هورویتز
unstable	ناپایدار
Infinite	نامتناهی
Linear Matrix Inequality	نامساوی ماتریس خطی
Time Invariant	ناوردای زمانی
Equilibrium Point	نقطه تعادل
Right Half Plane	نیم‌صفحه راست
Semi Positive Definit	نیمه‌معین مثبت
Homogenous	همگن
Single Input-Single Output	یک ورودی-یک خروجی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Allocation Eigenvalue	تخصیص مقدار ویژه
Asymptotic stability	پایداری مجانبی
Attraction Area	حوزه جذب
Characteristic Equation	معادله مشخصه
Closed Loop	حلقه بسته
Controlable	کنترل پذیر
Convex	محدب
Cost Function	تابع هزینه
Decision Variable	متغیر تصمیم
Delay	تاخیر
Delay Differential Equation	معادله دیفرانسیل تاخیری
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Feedback Controller	کنترل کننده پس‌خورد
Finite	متناهی
Full rank	رتبه کامل
Gain Matrix	ماتریس بهره
Homogenous	همگن
Imaginative Root	ریشه موهومی
Infinite	نامتناهی
Jordan Cononical Form	فرم متعارفی جردن
Lambert Function	تابع لامبرت
Leibnitz	لایبنیتز
Linear	خطی
Linear Matrix Inequality	نامساوی ماتریس خطی
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف

Modal Matrix	ماتریس مدال
Multi Input-Multi Output	چند ورودی-چند خروجی
Negative Definit matrix	ماتریس معین منفی
Nilpotent	پوچ‌توان
Nonlinear	غیرخطی
Nullity	پوچی
Open Loop	حلقه باز
Optimal Control	کنترل بهینه
Ordinary Differential Equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Pade Approximation	تقریب پاده
Positive Definit Matrix	ماتریس معین مثبت
Riccati Equation	معادله ریکاتی
Rightmost Eigenvalue	راست‌ترین مقدار ویژه
Right Half Plane	نیم‌صفحه راست
Roth-Horwitz Criteria	معیار راث-هورویتز
Schurs Lemma	لم شر
Semi Positive Definit	نیمه‌معین مثبت
Sensor	حسگر
Stability	پایداری
State Space	فضای حالت
State Transition Matrix	ماتریس انتقال حالت
State Feedback Matrix	ماتریس پس‌خورد حالت
Time Invariant	ناوردای زمانی
Time Varying	تغییرپذیر با زمان
Transfer Function	تابع انتقال
unstable	ناپایدار

Aabstract

In this thesis, we introduce a new method that introduced in recent years to control systems of single-delay differential equations and to stabilization them using the Lambert function. In this way, a new method for designing a controller by allocating a eigenvalue is presented, along with several examples. Using this method, one sub-set of eigenvalues can be transferred to a desirable position. For a system that is represented by delay differential equations, the system response is obtained based on the Lambert function and the stability is checked. If the system is not stable, after reviewing the system controllability, a stabilizing feedback is designed by allocating eigenvalues, and finally the closed loop system can be stable. In the following, we determine the time delay interval for the system to remain stable from the Roth-Horwitz criterion, and then we examine the stability criteria of the single-delay system using the linear matrix inequality method. Finally, the stability of linear systems two delays is expressed. In this chapter, we examine two delays of the variable with time at the input and two fixed delay and variable time delay in state variables. In this section, we must define the suitable Lyapunov function for systems with two delay times, and then we show that the created Lyapunov function is Positive definit and also its derivative is Negative definit. To establish these two conditions, linear Matrix Inequalities (LMIs) are created that guarantee the stability of systems with two time delays. In this thesis, we use the linear matrix inequality method to examine asymptotic stability and give example that can be analyzed by MATLAB software.

keywords: Linear control system, Stability, Lambert function, Time-delay, Allocation Eigenvalue, Feedback state controller, Delay differential equations, Lyapunov function, Linear matrix inequality



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Numerical Analysis

**Stability of linear continues Time-delay
system with two additive input delays**

By: Raviye Rahimi

Supervisor

Dr Hojat Ahsani tehrani

Advisor

Dr Ali Mesforush

January 2018