دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

رشد ماکزیمم قدرمطلق چندجمله‌ای‌های مختلط

نگارش

نرجس سجادپور

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

آبان ۱۳۸۹

درود بر هم او که آفرید، آفرید چونان شمایی را
پدر و مادر عزیزم
به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌تان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودتان که در این سردترین
روزگاران بهترین پشتیبان است
به پاس قلب‌های بزرگتان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهتان به
شجاعت می‌گراید
و به پاس محبت‌های بی‌دریغ‌تان که هرگز فروکش نمی‌کند
این مجموعه را به شما تقدیم می‌کنم.

تشکر و قدردانی
با حمد و سپاس فراوان از خداوند منان که به من توفیق آموختن پرتوئی از دانش هستی و آشنایی با گوشه‌ای از حقایق آفرینش را عطا فرمود.
قلم از نگارش حق زحمات و مساعدت‌های اساتید گرانقدر و دوستان بزرگوار ناتوان است، اما وظیفه حکم می‌کند که هر چند ناچیز ولی در حد توان تشکر و قدردانی نمایم.
در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر زیره که با راهنمایی‌های حکیمانه خود افق‌های تازه‌ای برای اینجانب ایجاد نمودند و همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر هاشمی کمال تشکر را دارم.
همچنین لازم می‌دانم از خانواده و تمام دوستانی که مرا در این مهم یاری نمودند، تقدیر و تشکر کنم.

چکیده

یکی از قضایای اساسی و کاربردی در آنالیز مختلط، اصل ماکزیمم قدرمطلق می‌باشد. بنابر اصل ماکزیمم قدرمطلق، اگر تابع غیر ثابت $f(z)$ در یک میدان کراندار، تحلیلی و بر بستار آن پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ مقادیر ماکزیمم خود را بر روی مرز اختیار می‌کند. اصل فوق یک قضیه وجودی می‌باشد، به عبارت دیگر روشی برای به‌دست آوردن مقادیر ماکزیمم، ارائه نمی‌دهد.

در این پایان‌نامه تلاش می‌شود، تا تقریبی برای ماکزیمم قدرمطلق چند جمله‌ای‌های مختلط، با درنظر گرفتن موقعیت صفرها، ارائه شود.

واژه‌های کلیدی: اصل ماکزیمم قدرمطلق —رشد —صفرها—تعمیم دادن —چند جمله‌ای— مشتق چندجمله‌ای‌ها— نامساوی‌ها

مقدمه

یکی از مهم‌ترین قضایایی که به اکسترمم یک تابع تحلیلی می‌پردازد، اصل ماکزیمم قدرمطلق است. از آن‌جایی‌که چند جمله‌ای‌ها نقش مهمی در هر شاخه‌ای از ریاضیات دارند، و با توجه به این‌که چند جمله‌ای‌ها، توابع تحلیلی هستند، این قضیه بیان می‌کند که قدرمطلق یک چند جمله‌ای غیر ثابت ماکزیمم مقدارش را بر مرز ناحیه مورد بررسی اتخاذ می‌نماید.

با توجه به اینکه قضیه ماکزیمم قدرمطلق یک قضیه وجودی است، این قضیه روشی برای به‌دست آوردن مقادیر ماکزیمم قدرمطلق ارائه نمی‌دهد، بنابراین مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت تقریب این مقادیر انجام گرفته است و توسط بزرگانی چون آنکنی، ریولین، عزیز، زرگر، گویل، دوان، چان، برنشتاین، رحمان، شمیسر، گاردنر، توران، مالیک و بیدخام تلاش‌های گسترده‌ای در جهت بهبود و تعمیم این کرانها صورت گرفته است. ما نیز با ارائه این پایان‌نامه گامی در جهت تعمیم و بهبود آن‌ها برمی‌داریم.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم، به آهنگ رشد ماکزیمم قدرمطلق چند جمله‌ای‌ها، می‌پردازیم. در فصل سوم با ارائه سه بخش، به بررسی رشد ماکزیمم قدرمطلق مشتق چند جمله‌ای‌ها یا $p(z)$ با استفاده از مشتق، با توجه به موقعیت صفرها و ضرایب، می‌پردازیم. در فصل چهارم، به بررسی نامساوی‌های L^p برای چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

در این پایان‌نامه، سعی می‌کنیم برای ماکزیمم قدرمطلق چندجمله‌ای‌ها کران بدست آوریم و این کرانها را بهبود یا به حالتهای دیگر تعمیم دهیم.
برای این منظور، در این فصل، تعاریف و مفاهیم مقدماتی و چند قضیه پایه را آورده‌ایم.

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان‌نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود.

$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{C}$	مجموعه اعداد مختلط
$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup (\infty)$
$\mathbb{R}^n$	مجموعه n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی
$\Re$	قسمت حقیقی اعداد مختلط
P_n	کلاس تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n
$(p \star q)(z)$	حاصل‌ضرب آدامار p و q
$B(a;r)$	گوی باز به مرکز a و شعاع r

$\bar{B}(a;r)$	گوی بسته به مرکز a و شعاع r
$M(p,r)$	$\max_{\|z\|=r} \|p(z)\|$
$m = m(p,k)$	$\min_{\|z\|=k} \|p(z)\|$
$\|\|p\|\|_\infty$	$\max_{\|z\|=1} \|p(z)\|$
$M_p(g,\rho)$	L^p تابع g روی دایره‌ای به شعاع ρ و به مرکز مبدأ

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱ هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولاً با D نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱ یک میدان به همراه بعضی، هیچ یک و یا همگی نقاط مرزی‌اش را ناحیه گویند.

تعریف ۳.۱.۱ یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط، چند جمله‌ای مختلط نام دارد.

تعریف ۴.۱.۱ مجموعه X در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض x_1 و x_2 متعلق به X، و هر $t \in (0,1)$ داشته‌باشیم

$$tx_1+(1-t)x_2 \in X$$

تعریف ۵.۱.۱ تابع $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدب گفته می‌شود اگر به ازای هر دو نقطه مفروض x_1 و x_2 در $\mathbb{R}^n$ و هر $t \in (0,1)$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

تعریف ۶.۱.۱ تابع f را در z_0 تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

تعریف ۷.۱.۱ یک چند جمله‌ای $P(z)$ از درجه n خود معکوس[۱] نامیده می‌شود اگر $P(z) = Q(z)$ به‌طوری‌که $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

تعریف ۸.۱.۱ یک چند جمله‌ای $P(z)$ از درجه n خود معکوس[۲] نامیده می‌شود اگر $P(z) = Q(z)$ به‌طوری‌که $Q(z) = z^n P(\frac{1}{z})$.

تعریف ۹.۱.۱ ماتریس مربع A را هرمیتی گوییم، هرگاه

$$A = A^* = \bar{A}^\top$$

تعریف ۱۰.۱.۱ کهادی که قطر آن یک قسمت از قطر ماتریس A باشد را کهاد اصلی ماتریس A می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرم هرمیتی $H(x,x) := \sum_{\mu,v=1}^{n} h_{\mu v} x_\mu \bar{x}_v$

(۱) معین مثبت است، اگر برای تمام $x_1, ..., x_n$ های مخالف صفر، $H(x,x) > 0$.

(۲) نیمه معین مثبت است، اگر برای تمام $x_1, ..., x_n$ های مخالف صفر، $H(x,x) \geq 0$.

تعریف ۱۲.۱.۱ (قاعده علامت‌های دکارت) اگر برای چندجمله‌ای $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$، m تعداد تغییر علامت در جملات متوالی

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$$

و k تعداد ریشه‌های مثبت معادله $p(z) = 0$ باشد، آنگاه $k \leq m$ و $m - k$ عددی زوج است.

---

[۱] self inversive
[۲] self reciprocal

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر G یک زیرمجموعه باز $\mathbb{C}$ باشد، می‌گوییم تابع $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ هارمونیک است، هرگاه u دارای مشتق‌های جزئی دوم پیوسته باشد و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

تعریف ۱۴.۱.۱ تابع f در یک نقطه تکین دارد، اگر در آن نقطه تحلیلی نباشد. به‌علاوه، اگر تابع در یک همسایگی یک تکین تحلیلی باشد، آن‌گاه گوییم آن نقطه تکین تنها است.

تعریف ۱۵.۱.۱ اگر تابع f در نقطه $z = a$ یک تکین تنها داشته باشد،a تکین برداشتنی است، هرگاه تابعی تحلیلی مانند $g : B(a; R) \longrightarrow \mathbb{C}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $0 < |z - a| < R$، $g(z) = f(z)$.

تعریف ۱۶.۱.۱ اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تکین تنها داشته باشد و با $z \to z_0$، $f(z) \to \infty$، آن‌گاه در $z = z_0$ قطب دارد.

تعریف ۱۷.۱.۱ فضای مختلط H را یک فضای ضرب داخلی نامیم، اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H، یک عدد مختلط مانند $< x, y >$ به نام حاصلضرب داخلی x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

(۱) $< y, x > = \overline{< x, y >}$

(۲) اگر $x, y, z \in H$، آنگاه $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$

(۳) اگر $x, y \in H$ و α اسکالر باشد، آنگاه $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$

(۴) به ازای هر $x \in H$ ، $< x, x > \geq 0$

(۵) $< x, x > = 0$ فقط اگر $x = 0$.

از قواعد (۲) و (۳) در تعریف بالا داریم:

تعریف ۱۸.۱.۱ به ازای هر $y \in H$، نگاشت $x \longrightarrow < x, y >$ یک تابعک خطی بر H است.

۲.۱ قضایای پایه

در این بخش چند قضیه پایه‌ای از آنالیز مختلط که در فصول بعدی مورد نیاز هستند را می‌آوریم.

قضیه ۱.۲.۱ (اساسی جبر) اگر $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ $(a_n \neq 0)$ چند جمله‌ای از درجه n، آن‌گاه $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ موجودند به‌طوری‌که

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \tag{1}$$

که z_i ها لزوماً متمایز نیستند.

قضیه ۲.۲.۱ (اصل ماکزیمم قدرمطلق) اگر $f(z)$ در میدان کراندار D تحلیلی و بر بستار آن، $\bar{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ ماکزیممی بر مرز D دارد. به‌علاوه در نقاط درونی ماکزیمم ندارد، مگر این‌که تابع ثابت باشد.

قضیه ۳.۲.۱ (روشه[۳]) فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشند و بر C، $|g(z)| < |f(z)|$، دراین‌صورت $f(z) + g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند.

---

[۳] Rouche

فصل ۲

رشد ماکزیمم قدرمطلق چند جمله‌ای‌ها

در این فصل، به مطالعه کرانهایی برای ماکزیمم قدرمطلق چندجمله ای های مختلط می‌پردازیم.
برای این منظور، اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، آنگاه برای $R \geq ۱$،

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=۱} |p(z)| \tag{۱}$$

نامساوی (۱) به نامساوی برنشتاین [1] [۲۸] مشهور است . و اثبات آن را در پیوست (۱) آورده‌ایم.
آنکنی [2] و ریولین [3] [۱] برای چندجمله‌ای $p(z)$ که در $|z| < ۱$ صفری ندارد، نامساوی (۱) را بهبود دادند و برای $R \geq ۱$ نتیجه زیر را بدست آوردند. و ما اثبات آن را در پیوست (۱) آورده‌ایم .

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + ۱}{۲}\right) \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۲}$$

تساوی در (۲) برای چندجمله‌ای $p(z) = \alpha z^n + \beta$ با شرط $|\alpha| = |\beta| = ۱$ برقرار است.

[1] S. Bernstein
[2] N. C. Ankeny
[3] T. J. Rivlin

عزیز[۴] و محمد [۵][٦] نامساوی (۲) را برای چندجمله‌ای $p(z)$ از درجه n، که در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ صفری ندارد تعمیم دادند و قضیه زیر را بدست آوردند.

قضیه ۱.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، که در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ صفری نداشته باشد، آنگاه برای $R > ۱$ داریم

$$M(p,R) \leq \frac{(R^n + ۱)(R+k)^n}{(R+k)^n + (۱ + Rk)^n} M(p, ۱) \tag{۳}$$

البته قضیه فوق، به جز حالت $n = ۱$ برای $k > ۱$، کران را بهبود نمی‌دهد.
اما عزیز [۴] نامساوی (۲) را به شکل زیر بهبود داده است.

قضیه ۲.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، که در $|z| < ۱$ صفری نداشته باشد، آنگاه برای $R > ۱$ داریم

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^n + ۱}{۲}\right) M(p, ۱) - \left(\frac{R^n - ۱}{۲}\right) m(p, ۱) \tag{۴}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = \alpha z^n + \beta$ به طوری که $|\beta| \geq |\alpha|$ برقرار باشد، اتفاق می‌افتد.
حال در اینجا، سعی می‌کنیم تا کران بدست آمده در قضایای ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ را بهبود و تعمیم دهیم. برای این منظور به لم ها و قضایای زیر احتیاج داریم.

قضیه ۳.۱.۲ اگر $p(z) = c\prod_{v=۱}^{n}(z - z_v)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که z_v ها صفرهای آن باشند و $c \neq ۰$ و $|z_v| \geq k > ۱$ برای $۱ \leq v \leq n$ باشد(یعنی چندجمله‌ای در$|z| < k$ برای $k \geq ۱$

---
[۴] A. Aziz
[۵] Q. G. Mohammad

صفری نداشته باشد) آنگاه برای $1 < R \le k^2$

$$M(p,R) \le \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n M(p,1) \tag{5}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = \left(\frac{z+k}{1+k}\right)^n$ اتفاق می‌افتد.

برهان: صفرهای $p(z)$ را به فرم $z_v = r_v e^{i\theta_v}$ برای $1 \le v \le n$ نمایش می‌دهیم. در این صورت برای هر θ، $0 \le \theta < 2\pi$ داریم

$$\left|\frac{p(Re^{i\theta})}{p(e^{i\theta})}\right| = \prod_{v=1}^{n} \left|\frac{Re^{i\theta} - z_v}{e^{i\theta} - z_v}\right|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\left|\frac{Re^{i\theta} - z_v}{e^{i\theta} - z_v}\right| &= \left(\frac{R^2 + r_v^2 - 2Rr_v\cos(\theta-\theta_v)}{1 + r_v^2 - 2r_v\cos(\theta-\theta_v)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\frac{R^2 + r_v^2 + 2Rr_v}{1 + r_v^2 + 2r_v}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{(R+r_v)^2}{(1+r_v)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R+r_v}{1+r_v}.\end{aligned} \tag{6}$$

برای بدست آوردن نامساوی (۶)، تعریف می‌کنیم

$$f(t) = \frac{R^2 + r_v^2 - 2Rr_v t}{1 + r_v^2 - 2r_v t}$$

و از $f(t)$ مشتق می‌گیریم،

$$f'(t) = \frac{-2Rr_v(1 + r_v^2 - 2r_v t) + 2r_v(R^2 + r_v^2 - 2Rr_v t)}{(1 + r_v^2 - 2r_v t)^2}$$

چون مخرج مثبت است، صورت را تعیین علامت می‌کنیم، بدست می آوریم

$$2r_v(-R - Rr_v^2 + R^2 + r_v^2)$$

بنابراین

$$2r_v(R(R-1) - r_v^2(R-1))$$

بنابراین

$$۲r_v(R-۱)(R-r_v^۲)$$

در نتیجه

$$-۲r_v(R-۱)(r_v^۲-R) \qquad (۷)$$

با توجه به فرض قضیه، یعنی $۱<R\le k^۲$ و $r_v\ge k>۱$ و از (۷) نتیجه می‌گیریم

$$(R-۱)(r_v^۲-R)\ge ۰$$

بنابراین $f'(t)\le ۰$، پس تابع f نزولی است و در بازه $[-۱,۱]$ ، ماکزیمم مقدار خود را در $t=-۱$ می‌گیرد.

بنابراین برای $۱<R\le k^۲$ و هر θ حقیقی ،

$$\begin{aligned}\left|\frac{Re^{i\theta}-z_v}{e^{i\theta}-z_v}\right| &\le \frac{R+r_v}{۱+r_v}\\ &\le \frac{R+k}{۱+k}\end{aligned} \qquad (۸)$$

برای بدست آوردن نامساوی (۸)، تعریف می‌کنیم

$$g(r_v)=\frac{R+r_v}{۱+r_v}$$

بنابراین

$$g'(r_v)=\frac{۱-R}{(۱+r_v)^۲}$$

چون $R>۱$ ، پس $g'(r_v)<۰$ پس $g(r_v)$ نزولی است و چون $r_v\ge k$ ، بنابراین $g(r_v)\le g(k)$ یعنی تابع g ماکزیمم مقدار خود را در $g(k)$ می‌گیرد.

چون

$$\left|\frac{p(Re^{i\theta})}{p(e^{i\theta})}\right|=\prod_{v=۱}^{n}\left|\frac{Re^{i\theta}-z_v}{e^{i\theta}-z_v}\right|.$$

در نتیجه

$$|p(Re^{i\theta})| \leq |p(e^{i\theta})| \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n \leq M(p,۱) \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n$$

بنابراین برای $۱ < R \leq k^۲$ ،

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n M(p,۱)$$

و تساوی وقتی برقرار می‌شود که صفرهای p بر هم منطبق شوند و در دایره $|z| = k$ قرار بگیرند. $\square$

لم ۴.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، که در $|z| < k$ برای $k > ۰$ صفری نداشته باشد، آنگاه برای هر $R \geq ۱$ و $r \leq k$ و برای هر θ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ داریم

$$|p(Rre^{i\theta})| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n |R^n p(\frac{re^{i\theta}}{R})| - \left\{\left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n - ۱\right\} m(p,k) \qquad (۹)$$

برهان: حکم برای $R = ۱$ واضح است زیرا

$$|p(re^{i\theta})| \leq \left(\frac{r+k}{r+k}\right)^n |p(re^{i\theta})| - \left\{\left(\frac{r+k}{r+k}\right)^n - ۱\right\} m(p,k)$$

$$|p(re^{i\theta})| \leq |p(re^{i\theta})| - ۰$$

حال فرض می‌کنیم $R > ۱$ باشد. اگر $p(z)$ چندجمله‌ای باشد که همه صفرهایش در $|z| \geq k$ قرار بگیرد و $m = \min_{|z|=k} |p(z)| = m(p,k)$ ، بنابراین برای $|z| \leq k$ نتیجه می‌شود $m \leq |p(z)|$.

حال نشان می‌دهیم برای هر عدد مختلط α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ ، تمام صفرهای چندجمله‌ای $F(z) := p(z) + \alpha m$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرد. اگر $m = ۰$ ، آنگاه واضح است که $p(z)$ روی $|z| = k$ صفر دارد زیرا $m = \min_{|z|=k} |p(z)| = ۰$.

حال فرض می‌کنیم که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| > k$ قرار بگیرد، بنابراین $m = \min_{|z|=k} |p(z)| > ۰$.
در نتیجه $\frac{m}{p(z)}$ در $|z| \leq k$ تحلیلی است. و برای $|z| = k$ داریم $|\frac{m}{p(z)}| \leq ۱$. چون $\frac{m}{p(z)}$ ثابت نیست از اصل ماکزیمم قدرمطلق برای $|z| < k$ نتیجه می‌شود، $m < |p(z)|$.

حال برای اثبات اینکه صفرهای $F(z)$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرند، از فرض خلف استفاده می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم $F(z)$ یک صفری مانند $z_۰$ در $|z| < k$ بگیرد به طوری که $|z_۰| < k$ ، آنگاه

$$p(z_۰) + \alpha m = F(z_۰) = ۰$$

بنابراین

$$|p(z_۰)| = |\alpha m| \leq m$$

و این یک تناقض است. پس صفرهای $F(z)$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرد.

فرض می‌کنیم صفرهای $F(z)$ ، به صورت $R_۱e^{i\theta_۱}, R_۲e^{i\theta_۲}, ..., R_ne^{i\theta_n}$ باشد.آنگاه برای $j = ۱, ..., n$، $R_j \geq k$ و

$$F(z) = \prod_{j=۱}^{n} (z - R_j e^{i\theta_j})$$

بنابراین برای هر $R \geq ۱$ و $r \leq k$ و برای هر θ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ،

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(Rre^{i\theta})}{R^n F(\frac{re^{i\theta}}{R})}\right| &= \prod_{j=۱}^{n} \left|\frac{Rre^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{re^{i\theta} - RR_j e^{i\theta_j}}\right| \\
&= \prod_{j=۱}^{n} \left|\frac{\frac{Rre^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{e^{i\theta_j}}}{\frac{re^{i\theta} - RR_j e^{i\theta_j}}{e^{i\theta_j}}}\right| \\
&= \prod_{j=۱}^{n} \left|\frac{Rre^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{re^{i(\theta-\theta_j)} - RR_j}\right| \qquad (۱۰)
\end{aligned}$$

چون $R_j \geq k \geq r$ و $R \geq ۱$ بنابراین

$$\left|\frac{rRe^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{re^{i(\theta-\theta_j)} - RR_j}\right| = \left|\frac{Rr\cos(\theta-\theta_j) + iRr\sin(\theta-\theta_j) - R_j}{r\cos(\theta-\theta_j) + i\sin(\theta-\theta_j) - RR_j}\right| \qquad (۱۱)$$

از (۱۱) و اینکه $|z|^۲ = z\bar{z}$ بدست می‌آوریم،

$$\left|\frac{rRe^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{re^{i(\theta-\theta_j)} - RR_j}\right| = \left(\frac{R^۲r^۲ + R_j^۲ - ۲RrR_j\cos(\theta-\theta_j)}{r^۲ + R^۲R_j^۲ - ۲RrR_j\cos(\theta-\theta_j)}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{R^۲r^۲ + R_j^۲ + ۲RrR_j}{r^۲ + R^۲R_j^۲ + ۲RrR_j} \\ &\leq \left(\frac{Rr + R_j}{r + RR_j}\right) \\ &\leq \left(\frac{Rr + k}{r + Rk}\right) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

برای بدست آوردن اولین نامساوی در (۱۲)، تعریف می‌کنیم،

$$f(t) := \frac{R^۲r^۲ + R_j^۲ - ۲RrR_jt}{r^۲ + R^۲R_j^۲ - ۲RrR_jt}$$

از $f(t)$ مشتق می‌گیریم داریم

$$f'(t) = \frac{-۲RrR_j[(r + RR_j)^۲ - (Rr + R_j)^۲]}{(r^۲ + R^۲R_j^۲ - ۲RrR_jt)^۲}$$

با فرض اینکه $R_j \geq r$ ،

$$(r + RR_j)^۲ - (Rr + R_j)^۲ \geq ۰$$

بنابراین $f'(t) \leq ۰$. پس تابع f روی بازه $[-۱, ۱]$ نزولی است و ماکزیمم مقدار خود را در $t = -۱$ می‌گیرد و اولین نامساوی حاصل می‌شود.

به طریق مشابه، آخرین نامساوی در (۱۲) نیز حاصل می‌شود.

حال با استفاده از (۱۰) و (۱۲) برای هر θ به طوری که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ و $R > ۱$ و $r \leq k$ نتیجه می‌شود

$$\left|F(Rre^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{Rr + k}{r + Rk}\right)^n R^n F(\frac{re^{i\theta}}{R})$$

حال $F(z)$ را با $p(z) + \alpha m$ جایگزین می‌کنیم و برای هر α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ و $R > ۱$ و $k \geq r$ ،

$$\left|p(Rre^{i\theta}) + \alpha m\right| \leq \left(\frac{Rr + k}{r + Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{re^{i\theta}}{R}) + R^n \alpha m\right| \qquad (۱۳)$$

چون $r \leq k$ و $R > ۱$ بنابراین $\frac{r}{R} \leq k$ و برای $|z| = ۱$ داریم $|\frac{rz}{R}| \leq k$.

حال آرگومان α در طرف راست نامساوی (۱۳) را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$\left|p\left(\frac{rz}{R}\right) + \alpha m\right| = \left|p(\frac{rz}{R})\right| - m|\alpha| \qquad (۱۴)$$

حال (۱۴) را در (۱۳) جایگزین می‌کنیم و برای $|z| = 1$ و $R \geq 1$ و $r < k$ بدست می‌آوریم

$$|p(Rrz)| - m|\alpha| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{rz}{R})\right| - \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n m|\alpha|$$

بنابراین برای $|z| = 1$ و $R \geq 1$ و $r < k$ ، اگر $|\alpha| \to 1$ داریم

$$|p(Rrz)| \leq \left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n \left|R^n p(\frac{rz}{R})\right| - \left\{\left(\frac{Rr+k}{r+Rk}\right)^n R^n - 1\right\} m(p,k).$$

□

عزیز و محمد [٦] لم زیر را ثابت کردند. اما در اینجا اثبات آن را با استفاده از لم قبل ارائه می‌دهیم.

لم ۵.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ آنگاه برای $R \geq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ ،

$$|p(Re^{i\theta})| + |q(Re^{i\theta})| \leq (R^n + 1)M(p,1) \tag{۱۵}$$

برهان: فرض می‌کنیم $M = \max_{|z|=1}|p(z)| = M(p,1)$. آنگاه برای $|z| = 1$ داریم $|p(z)| \leq M$.
به وسیله قضیه روشه، برای هر عدد حقیقی یا مختلط λ به طوری که $|\lambda| > 1$، چندجمله‌ای $F(z) = p(z) - \lambda M$ در $|z| < 1$ صفری ندارد.
حال لم ۴.۱.۲ را برای چندجمله‌ای $F(z)$ ، برای $r = 1 = k$ و هر $0 \leq \theta < 2\pi$ و $R > 1$ به کار می‌بریم،

$$\begin{aligned}|F(Re^{i\theta})| &\leq R^n|F(\frac{e^{i\theta}}{R})| - (R^n-1)m(F,1)\\ &\leq \left|R^n F(\frac{e^{i\theta}}{R})\right|\end{aligned} \tag{۱٦}$$

اگر $G(z) = z^n\overline{F(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، آنگاه $G(z) = q(z) - \bar{\lambda}z^n M$ و

$$|G(Re^{i\theta})| = |R^n e^{in\theta}\overline{F(\frac{e^{i\theta}}{R})}| = |R^n F(\frac{e^{i\theta}}{R})|$$

با استفاده از (۱۶)، برای $R \geq ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ داریم

$$|p(Re^{i\theta}) - \lambda M| = |F(Re^{i\theta})| \leq |G(Re^{i\theta})| = |q(Re^{i\theta}) - \bar{\lambda} R^n e^{in\theta} M| \qquad (۱۷)$$

آرگومان λ در طرف راست نامساوی بالا را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$|p(Re^{i\theta})| - |\lambda| M \leq |\lambda| R^n M - |q(Re^{i\theta})|$$

یا

$$|p(Re^{i\theta})| + |q(Re^{i\theta})| \leq (R^n + ۱)|\lambda| M$$

بنابراین برای $R \geq ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ، اگر $|\lambda| \to ۱$ ، آنگاه اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۶.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، که در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ صفری نداشته باشد، آنگاه برای $R > ۱$ داریم

$$\begin{aligned} M(p,R) \leq & \frac{(R+k)^n}{(R+k)^n + (۱+Rk)^n} \times \\ & \left\{ (R^n + ۱) M(p,۱) - \left(R^n - \left(\frac{۱+Rk}{R+k} \right)^n \right) m(p,k) \right\} \qquad (۱۸) \end{aligned}$$

این قضیه بهبودی از قضیه ۱.۱.۲ و تعمیمی[۶] از قضیه ۲.۱.۲ می‌باشد.

برهان: چون تمام صفرهای $p(z)$ در $|z| \geq k \geq ۱$ قرار می‌گیرد، از لم ۴.۱.۲ برای $r = ۱$ استفاده می‌کنیم. بنابراین برای $R \geq ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ،

$$|p(Re^{i\theta})| \leq \left(\frac{R+k}{۱+Rk} \right)^n \left| R^n p(\frac{e^{i\theta}}{R}) \right| - \left\{ \left(\frac{R+k}{۱+Rk} \right)^n R^n - ۱ \right\} m(p,k) \qquad (۱۹)$$

چون $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، بنابراین

$$|q(Re^{i\theta})| = |R^n p(\frac{e^{i\theta}}{R})| \qquad (۲۰)$$

[۶] برای $k = ۱$ ، قضیه ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود.

(۲۰) را در (۱۹) جایگزین می‌کنیم ،

$$|p(Re^{i\theta})| \leq \left(\frac{R+k}{1+Rk}\right)^n |q(Re^{i\theta})| - \left\{\left(\frac{R+k}{1+Rk}\right)^n R^n - 1\right\} m(p,k)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{(R+k)^n+(1+Rk)^n}{(1+Rk)^n}|p(Re^{i\theta})| \leq \\ \left(\frac{R+k}{1+Rk}\right)^n \left\{|p(Re^{i\theta})|+|q(Re^{i\theta})|\right\} - \left\{\left(\frac{R+k}{1+Rk}\right)^n R^n - 1\right\} m(p,k)\end{aligned} \quad (21)$$

با استفاده از (۲۱) و لم ۵.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned}\frac{(R+k)^n+(1+Rk)^n}{(1+Rk)^n}|p(Re^{i\theta})| &\leq \\ &\frac{(R+k)^n(1+R^n)}{(1+Rk)^n} M(p,1) - \left\{\left(\frac{R+k}{1+Rk}\right)^n R^n - 1\right\} m(p,1) \\ &= \left(\frac{R+k}{1+Rk}\right)^n \left[(R^n+1)M(p,1) - \left\{R^n - \left(\frac{1+Rk}{R+k}\right)^n\right\} m(p,k)\right]\end{aligned} \quad (22)$$

از (۲۲)، برای $R \geq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ داریم

$$\begin{aligned}M(p,R) \leq \frac{(R+k)^n}{(R+k)^n+(1+Rk)^n} \times \\ \left\{(R^n+1)M(p,1) - \left(R^n - \left(\frac{1+Rk}{R+k}\right)^n\right) m(p,k)\right\}\end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، که در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ صفری نداشته باشد، آنگاه برای $1 \leq R \leq k^2$ داریم

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n M(p,1) - \left\{\left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n - 1\right\} m(p,k) \quad (23)$$

این قضیه بهبودی از قضیه ۳.۱.۲ می‌باشد.

برهان: فرض می‌کنیم $m = \min_{|z|=k}|p(z)| = m(p,k)$، آنگاه برای $|z| = k$، $m \leq |p(z)|$.

چون $p(z)$ در $|z| < k$ صفری ندارد، مانند اثباتی که در لم ۴.۱.۲ ارائه شد، برای هر عدد حقیقی یا مختلط α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ ، تمام صفرهای چندجمله‌ای $F(z) := p(z) + \alpha m$ در $|z| \geq k$ قرار می‌گیرد. فرض می‌کنیم صفرهای $F(z)$ ، به صورت $R_۱e^{i\theta_۱}, R_۲e^{i\theta_۲}, ..., R_ne^{i\theta_n}$ باشد. آنگاه برای $j = ۱, ..., n$ ، $R_j \geq k$ و

$$F(z) = \prod_{j=۱}^{n} (z - R_je^{i\theta_j})$$

بنابراین برای هر $۱ \leq R \leq k^۲$ و برای هر θ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$، با اثباتی مشابه اثبات لم ۴.۱.۲ داریم

$$\left|\frac{F(Re^{i\theta})}{F(e^{i\theta})}\right| = \prod_{j=۱}^{n} \left|\frac{Re^{i\theta} - R_je^{i\theta_j}}{e^{i\theta} - R_je^{i\theta_j}}\right| \leq \prod_{j=۱}^{n} \left(\frac{R + R_j}{۱ + R_j}\right)$$
$$\leq \prod_{j=۱}^{n} \left(\frac{R + k}{۱ + k}\right) = \left(\frac{R + k}{۱ + k}\right)^n .$$

بنابراین برای هر $۱ \leq R \leq k^۲$ و برای هر θ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ،

$$|F(Re^{i\theta})| \leq \left(\frac{R + k}{۱ + k}\right)^n |F(e^{i\theta})| \qquad (۲۴)$$

حال در (۲۴)، $F(z)$ را با $p(z) + \alpha m$ جایگزین می‌کنیم و برای هر α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ و $۱ \leq R \leq k^۲$ ،

$$\left|p(Re^{i\theta}) + \alpha m\right| \leq \left(\frac{R + k}{۱ + k}\right)^n \left|p(e^{i\theta}) + \alpha m\right| \qquad (۲۵)$$

چون $p(z)$ در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ صفری ندارد و برای $|z| = k$ داریم $m \leq |p(z)|$.

بنابراین، برای $k \geq ۱$ و $|z| \leq k$ طبق اصل ماکزیمم قدرمطلق داریم $m \leq |p(z)|$.

قرار می‌دهیم $z = e^{i\theta}$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$، آنگاه

$$|z| = |e^{i\theta}| = ۱ \leq k$$

بنابراین، برای هر θ که $۰ \leq \theta < ۲\pi$ داریم $m \leq |p(e^{i\theta})|$.

حال آرگومان α در طرف راست نامساوی (۲۵) را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$|p(z) + \alpha m| = |p(z)| - m|\alpha|$$

بنابراین، نامساوی (۲۵) را می‌توان برای $1 \le R \le k^2$ و $0 \le \theta < 2\pi$ ، به صورت زیر نوشت.

$$|p(Re^{i\theta})| - m|\alpha| \le \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n \left\{p(e^{i\theta}) - m|\alpha|\right\}$$

بنابراین، برای $|z| = 1$ و $1 \le R \le k^2$ ، اگر $|\alpha| \to 1$ داریم

$$|p(Rz)| \le \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n |p(z)| - \left\{\left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n - 1\right\} m$$

بنابراین، برای $|z| = 1$ و $1 \le R \le k^2$ ،

$$M(p,R) \le \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n M(p,1) - \left\{\left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n - 1\right\} m(p,k).\Box$$

حال در ادامه این فصل، سعی می‌کنیم کران بدست آمده در لم ۵.۱.۲ را بهبود و تعمیم دهیم و کرانی برای توان s ام آن بدست آوریم. برای این منظور به تعاریف، لم ها و قضایای زیر احتیاج داریم.

تعریف ۸.۱.۲ فرض می‌کنیم $\varphi(z) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ و $\psi(z) := \sum_{v=0}^{\infty} b_v z^v$ در دیسک $D(0,\rho) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < \rho\}$ تحلیلی باشند، تابع

$$(\varphi \star \psi)(z) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v z^v$$

در $D(0,\rho^2)$ تعریف می‌شود که به آن حاصلضرب آدامار φ و ψ می‌گوییم.

تعریف ۹.۱.۲ می‌گوییم چندجمله‌ای Q حداکثر از درجه n، متعلق به B_n° است، اگر برای همه چندجمله‌ای های حداکثر از درجه n، به طوری که $||p||_\infty := \max_{|z|=1} |p(z)| \le 1$ داشته باشیم، $Q(0) = 1$ و $||Q \star p||_\infty := \max_{|z|=1} |(Q \star p)(z)| \le 1$.

لم ۱۰.۱.۲ فرم

$$x := (x_0, ..., x_n) \longmapsto \sum_{\mu,v=o}^{n} c_{v-\mu} x_\mu \bar{x}_v \qquad (c_{-k} = \bar{c}_k \quad , 0 \le k \le n)$$

نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر، وقتی قسمت حقیقی چندجمله‌ای $1 + \sum_{v=1}^{n} h_v z^v$ ، نامنفی باشد، آنگاه قسمت حقیقی چندجمله‌ای $c_0 + \sum_{v=1}^{n} c_v h_v z^v$ نیزبه ازای نقاط z روی دایره واحد، نامنفی باشد.

قضیه ۱۱.۱.۲ چندجمله‌ای $Q(z) := 1 + \sum_{v=1}^{n} c_v z^v$ متعلق به کلاس B_n° است، اگر و تنها اگر،

$$x := (x_0, ..., x_n) \longmapsto \sum_{\mu,v=o}^{n} c_{v-\mu} x_\mu \bar{x}_v \qquad (c_0 = 1, c_{-k} = \bar{c}_k \quad , 1 \le k \le n)$$

نیمه معین مثبت باشد.

لم ۱۲.۱.۲ ۱– فرم هرمیتی

$$\sum_{\mu,v=1}^{n} h_{v-\mu} x_\mu \bar{x}_v$$

معین مثبت است، اگر و تنها اگر، کهادهای اصلی ماتریس هرمیتی همگی مثبت باشند، یعنی

$$D_k := \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \dots & h_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad\qquad (k = 1, ..., n)$$

۲– فرم هرمیتی

$$\sum_{\mu,v=1}^{n} h_{v-\mu} x_\mu \bar{x}_v$$

نیمه معین مثبت است، اگر و تنها اگر، کهادهای اصلی ماتریس هرمیتی همگی نامنفی باشند.

این لم منسوب به گانتمچر[۷][۱۶] است.

[۷] F. R. Gantmacher

لم ۱۳.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۲$ باشد، آنگاه برای $R > ۱$ ،

$$M(p, R) + (R^n - R^{n-۲})|p(\circ)| \leq R^n M(p, ۱) \qquad (۲۶)$$

به طوری که ضریب $|p(\circ)|$ ، بهترین حالت ممکن برای همه $R \in (۱, \infty)$ است.

برهان: تعریف می‌کنیم $Q(z) = Q_\gamma(z) := ۱ + \sum_{k=۱}^{n} R^{-k} z^k + (۱ - R^{-۲}) e^{-i\gamma} z^n$

به طوری که γ ، یک پارامتر حقیقی است.

فرض می‌کنیم $Q^*(z) := z^n \overline{Q(\frac{۱}{\bar{z}})}$ و $(Q^* \star p)(z)$ حاصلضرب آدامار $Q^*(z)$ و $p(z)$ باشد.

اگر $\gamma \in [\circ, ۲\pi)$ ، آنگاه طرف چپ نامساوی (۲۶) با $R^n \max_{|z|=۱} |(Q^* \star p)(z)|$ برابر می‌شود، زیرا

$$\begin{aligned} Q^*(z) &= z^n (۱ + \sum_{k=۱}^{n} R^{-k} z^{-k} + (۱ - R^{-۲}) e^{i\gamma} z^{-n}) \\ &= z^n + \sum_{v=\circ}^{n-۱} R^{v-n} z^v + (۱ - R^{-۲}) e^{i\gamma} \end{aligned}$$

در این صورت

$$R^n((Q^* \star p)(z)) = a_n (Rz)^n + \sum_{v=\circ}^{n-۱} a_v (Rz)^v + a_\circ e^{i\gamma} (R^n - R^{n-۲})$$

بنابراین

$$R^n \max_{|z|=۱} |(Q^* \star p)(z)| = M(p, R) + (R^n - R^{n-۲})|p(\circ)|$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم اگر $||p||_\infty := \max_{|z|=۱} |p(z)| = M(p, ۱) \leq ۱$ ، آنگاه

$$||Q^* \star p||_\infty := \max_{|z|=۱} |(Q^* \star p)(z)| \leq ۱$$

برای این منظور، از قضیه ۱۱.۱.۲، استفاده می‌کنیم. و چون $||Q^* \star p||_\infty = ||Q \star p^*||_\infty$ و $||p^*||_\infty = ||p||_\infty$ کافی است، نشان دهیم

$$q(z, \alpha) := \sum_{k=\circ}^{n-۱} R^{-k} z^k + (R^{-n} + \alpha) z^n \in B_n^\circ$$

اگر و تنها اگر ، $\qquad |\alpha| \leq ۱ - R^{-۲}$

با استفاده از قضیه ۱۱.۱.۲ و لم ۱۲.۱.۲ به مطالعه ماتریس معین زیر می‌پردازیم.

$$M_{1}(\alpha,n) := \begin{pmatrix} 1 & R^{-1} & \dots & R^{-n+1} & R^{-n}+\alpha \\ R^{-1} & 1 & \dots & R^{-n+2} & R^{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R^{-n+1} & R^{-n+2} & \dots & 1 & R^{-1} \\ R^{-n}+\bar{\alpha} & R^{-n+1} & \dots & R^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

فرض می‌کنیم $\alpha_{1} := R^{-n}+\alpha$.

دترمینان $M_{1}(\alpha,n)$ به فرم زیر بدست می آید:

$$det M_{1}(\alpha,n) = C_n + (-1)^n 2 B_n \Re(\alpha_{1}) - A_n|\alpha_{1}|^{2}$$

وقتی که ، $C_{2} = (1-R^{-2})^{2} - R^{-4}$, $B_{2} = R^{-2}$, $A_{2} = 1$

و برای $n \geq 3$ داشته باشیم

$$A_n := \begin{vmatrix} 1 & R^{-1} & \dots & R^{-n+2} \\ R^{-1} & 1 & \dots & R^{-n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{-n+2} & R^{-n+3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$B_n := \begin{vmatrix} R^{-1} & 1 & R^{-1} & \dots & R^{-n+2} \\ R^{-2} & R^{-1} & 1 & \dots & R^{-n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ R^{-n+1} & R^{-n+2} & R^{-n+3} & \ddots & 1 \\ 0 & R^{-n+1} & R^{-n+2} & \dots & R^{-1} \end{vmatrix}$$

$$C_n := \begin{vmatrix} 1 & R^{-1} & \dots & R^{-n+1} & 0 \\ R^{-1} & 1 & \dots & R^{-n+2} & R^{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R^{-n+1} & R^{-n+2} & \dots & 1 & R^{-1} \\ 0 & R^{-n+1} & \dots & R^{-1} & 1 \end{vmatrix}$$

برای ارزیابی A_n که یک دترمینان از مرتبه $(n-1)$ است، برای $(n-2)$ سطر اول، سطر بعدی را در R^{-1} ضرب می‌کنیم و از سطر قبلی کم می‌کنیم. با این کار جملات روی قطر اصلی آن صفر می‌شود و A_n را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$A_n = (1-R^{-2})^{n-2}$$

برای ارزیابی B_n که یک دترمینان از مرتبه n است، برای $(n-۱)$ ستون اول، ستون بعدی را در $R^{-۱}$ ضرب می‌کنیم و ستون قبلی را از آن کم می‌کنیم، بنابراین

$$B_n = (-۱)^n R^{-n}(۱-R^{-۲})^{n-۲}$$

برای ارزیابی C_n که یک دترمینان از مرتبه $(n+۱)$ است، برای $(n-۱)$ ستون اول، ستون بعدی را در $R^{-۱}$ ضرب می‌کنیم و ستون قبلی را از آن کم می‌کنیم. سپس برای هر $(n-۱)$ سطر اول، سطر بعدی را در $R^{-۱}$ ضرب می‌کنیم و سطر قبلی را از آن کم می‌کنیم. اگر دترمینان را روی ستون اول بسط دهیم، آنگاه

$$C_n = (۱-R^{-۲})^n - (-۱)^n R^{-n} D_n$$

به طوری که D_n ، دترمینان از مرتبه n است که در آن، $(n-۱)$ جمله اول سطرهای D_n صفر، و بقیه جملات آن، $-R^{-n}$ است.
با بسط دترمینان، روی سطر اول داریم:

$$C_n = (۱-R^{-۲})^n - R^{-۲n}(۱-R^{-۲})^{n-۲}$$

بنابراین برای تمام $n \geq ۲$ ،

$$detM_۱(\alpha,n) = (۱-R^{-۲})^{n-۲}\left\{(۱-R^{-۲})^۲ - |\alpha|^۲\right\}$$

در نتیجه، $\quad |\alpha| < ۱-R^{-۲} \quad$ اگر و تنها اگر $\quad det(M_۱(\alpha,n)) > ۰$

بعلاوه، دترمینان‌هایی که منجر به کهادهای اصلی ماتریس $M_۱(\alpha,n)$ می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$m_{۱,۱} = ۱$$

$$m_{۲,۲} := \begin{vmatrix} ۱ & R^{-۱} \\ R^{-۱} & ۱ \end{vmatrix}$$

و

$$m_{k,k} := \begin{vmatrix} ۱ & R^{-۱} & \dots & R^{-(k-۱)} \\ R^{-۱} & ۱ & \dots & R^{-(k-۲)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{-(k-۱)} & R^{-(k-۲)} & \dots & ۱ \end{vmatrix} = (۱ - R^{-۲})^{k-۱} \qquad (۲ \leq k \leq n)$$

به طوری که، همه آنها برای $R > ۱$ ، مثبت هستند. بنابراین $q(z,\alpha) \in B_n^\circ$ اگر

$$|\alpha| < ۱ - R^{-۲}$$

و متعلق به B_n° نیست، اگر

$$|\alpha| > ۱ - R^{-۲}.$$

و این حکم را ثابت می‌کند. □

لم ۱۴.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به طوری که برای $|z| = ۱$، داشته باشیم $|p(z)| \leq M$ و $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، آنگاه برای $R > ۱$ و $|z| \leq ۱$ ،

$$|p(Rz) - p(z)| + |q(Rz) - q(z)| \leq M(R^n - ۱) \qquad (۲۷)$$

لم فوق در [۲۷] آمده است.

لم ۱۵.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به طوری که برای $|z| = ۱$، داشته باشیم $|p(z)| \leq M$ ، آنگاه برای $|z| \leq ۱$ ،

$$|p'(z)| + |np(z) - zp'(z)| \leq Mn \qquad (۲۸)$$

برهان: اگر $z_\circ$ هر نقطه دلخواه از دیسک واحد باز باشد، آنگاه

$$|p'(z_\circ)| + |np(z_\circ) - z_\circ p'(z_\circ)|$$
$$\leq \max_{|z|=1} \{|p'(z)| + |np(z) - zp'(z)|\}$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم نامساوی برای $|z| = 1$ ، برقرار است.

فرض می‌کنیم z یک نقطه از دایره واحد باشد و $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$. طرفین نامساوی (۲۷) را بر $R - 1$ تقسیم می‌کنیم و $R \longrightarrow 1$ ،

$$\lim_{R\longrightarrow 1} \frac{|p(Rz) - p(z)|}{R - 1} + \lim_{R\longrightarrow 1} \frac{|q(Rz) - q(z)|}{R - 1} \leq \lim_{R\longrightarrow 1} \frac{M(R^n - 1)}{R - 1}$$

بنابراین ،

$$|p'(z)| + |q'(z)| \leq Mn$$

در نتیجه به ازای هر z ، $|z| = 1$ داریم

$$|p'(z)| + |np(z) - zp'(z)| \leq Mn$$

□

نتیجه ۱۶.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، آنگاه برای $|z| = 1$،

$$|p'(z)| + |q'(z)| \leq nM(p, 1) \qquad (۲۹)$$

این نتیجه منسوب به مالیک [8] [۲۴] است.

قضیه ۱۷.۱.۲ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n ، $n \geq 3$ باشد. آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت s و $R \geq 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ و $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$،

$$|p(Re^{i\theta})|^s + |q(Re^{i\theta})|^s \leq (R^{ns} + 1)\{M(p, 1)\}^s$$

[8] M. A. Malik

$$-\left(\frac{R^{ns}-۱}{ns}-\frac{R^{ns-۲}-۱}{ns-۲}\right)||p'(۰)|-|q'(۰)||s\{M(p,۱)\}^{s-۱} \quad (۳۰)$$

برهان: چندجمله‌ای $G(z)=p'(z)+\alpha q'(z)$ برای $|\alpha|=۱$ ، یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $(n-۱)$ به طوری که $n-۱\geq ۲$ ، است. بنابراین اگر $|\alpha|=۱$ و $t\geq ۱$ و $۰\leq\theta<۲\pi$ ، آنگاه بنا به لم ۱۳.۱.۲ و نتیجه ۱۶.۱.۲ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|p'(te^{i\theta})+\alpha q'(te^{i\theta})| &\leq t^{n-۱}\max_{|z|=۱}|p'(z)+\alpha q'(z)| \\ &-(t^{n-۱}-t^{n-۳})|p'(۰)+\alpha q'(۰)| \\ &\leq t^{n-۱}nM(p,۱) \\ &-(t^{n-۱}-t^{n-۳})|p'(۰)+\alpha q'(۰)|\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|p'(te^{i\theta})|+|q'(te^{i\theta})| &\leq nt^{n-۱}M(p,۱) \\ &-(t^{n-۱}-t^{n-۳})||p'(۰)|-|q'(۰)|| \qquad (۳۱)\end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned}\{p(Re^{i\theta})\}^s-\{p(e^{i\theta})\}^s &= \int_۱^R \frac{d}{dt}\{p(te^{i\theta})\}^s dt \\ &= \int_۱^R s\{p(te^{i\theta})\}^{s-۱}p'(te^{i\theta})e^{i\theta}dt\end{aligned}$$

بنابراین

$$|\{p(Re^{i\theta})\}^s-\{p(e^{i\theta})\}^s|\leq s\int_۱^R|p'(te^{i\theta})||p(te^{i\theta})|^{s-۱}dt$$

لم ۱۳.۱.۲ ایجاب می‌کند

$$|\{p(Re^{i\theta})\}^s-\{p(e^{i\theta})\}^s|\leq s\int_۱^R|p'(te^{i\theta})|t^{n(s-۱)}\{M(p,۱)\}^{s-۱}dt. \qquad (۳۲)$$

به طریق مشابه

$$
\begin{aligned}
|\{q(Re^{i\theta})\}^s - \{q(e^{i\theta})\}^s| &\leq s\int_{۱}^{R} t^{n(s-۱)}|q'(te^{i\theta})|\{M(q,۱)\}^{s-۱}dt \\
&= s\int_{۱}^{R} |q'(te^{i\theta})|\{M(p,۱)\}^{s-۱}t^{n(s-۱)}dt
\end{aligned}
$$

حال طرفین نامساوی بالا را با نامساوی (۳۲) جمع می‌کنیم ،

$$
\begin{aligned}
&|\{p(Re^{i\theta})\}^s - \{p(e^{i\theta})\}^s| + |\{q(Re^{i\theta})\}^s - \{q(e^{i\theta})\}^s| \\
&\leq s\{M(p,۱)\}^{s-۱}\int_{۱}^{R} t^{n(s-۱)}\left(|p'(te^{i\theta})| + |q'(te^{i\theta})|\right)dt \qquad (۳۳)
\end{aligned}
$$

از نامساوی (۳۱) استفاده می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&\leq sn\{M(p,۱)\}^s\int_{۱}^{R} t^{ns-۱}dt \\
&-s\{M(p,۱)\}^{s-۱}||p'(۰)| - |q'(۰)||\int_{۱}^{R}(t^{ns-۱} - t^{ns-۳})dt.
\end{aligned}
$$

از طرفی ،

$$
\begin{aligned}
&|p(Re^{i\theta})|^s - |p(e^{i\theta})|^s + |q(Re^{i\theta})|^s - |q(e^{i\theta})|^s \\
&\leq |\{p(Re^{i\theta})\}^s - \{p(e^{i\theta})\}^s| + |\{q(Re^{i\theta})\}^s - \{q(e^{i\theta})\}^s|
\end{aligned}
$$

چون $|p(e^{i\theta})| = |q(e^{i\theta})| \leq M(p,۱)$ ، بنابراین

$$
\begin{aligned}
&|p(Re^{i\theta})|^s + |q(Re^{i\theta})|^s \\
&\leq |\{p(Re^{i\theta})\}^s - \{p(e^{i\theta})\}^s| + |\{q(Re^{i\theta})\}^s - \{q(e^{i\theta})\}^s| + ۲(M(p,۱))^s
\end{aligned}
$$

حال از نامساوی (۳۳) داریم

$$
\begin{aligned}
|p(Re^{i\theta})|^s + |q(Re^{i\theta})|^s &\leq (R^{ns} - ۱)(M(p,۱))^s \\
&-s(M(p,۱))^{s-۱}||p'(۰)| - |q'(۰)||\left(\frac{R^{ns} - ۱}{ns} - \frac{R^{ns-۲} - ۱}{ns - ۲}\right) + ۲(M(p,۱))^s \\
&= (R^{ns} + ۱)(M(p,۱))^s - s(M(p,۱))^{s-۱}||p'(۰)| - |q'(۰)||\left(\frac{R^{ns} - ۱}{ns} - \frac{R^{ns-۲} - ۱}{ns - ۲}\right)
\end{aligned}
$$

□

نکته ۱۸.۱.۲ برای $s = ۱$ ، نامساوی (۳۰) به صورت زیر در می آید.

$$|p(Re^{i\theta})| + |q(Re^{i\theta})| \leq (R^n + ۱)M(p, ۱) - \left(\frac{R^n - ۱}{n} - \frac{R^{n-۲} - ۱}{n - ۲}\right) ||p'(۰)| - |q'(۰)||$$

چون $R \geq ۱$ ، بنابراین $\left(\frac{R^n-۱}{n} - \frac{R^{n-۲}-۱}{n-۲}\right) \geq ۰$ ، در نتیجه قضیه ۱۷.۱.۲ بهبودی از لم ۵.۱.۲ می‌باشد.

با استفاده از نامساوی (۳۰) به طور بدیهی، نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$|p(Re^{i\theta})|^s + |q(Re^{i\theta})|^s \leq (R^{ns} + ۱)(M(p, ۱))^s$$

بنابراین قضیه ۱۷.۱.۲ تعمیمی از لم ۵.۱.۲ نیز می‌باشد.

فصل ۳

رشد ماکزیمم قدرمطلق مشتق چندجمله‌ای‌ها یا $p(z)$ با استفاده از مشتق

اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، با استفاده از نامساوی برنشتاین [۱] [۱۰] بر روی مشتق چند جمله‌ای‌های مثلثاتی، برای $|z| = ۱$ نامساوی زیر به‌دست می‌آید.

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq n \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۱}$$

تساوی در نامساوی (۱) فقط وقتی $p(z)$ تمام صفرهایش را در مبدأ بگیرد برقراراست. بنابراین، با ایجاد یک شرط مناسبی روی موقعیت صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ ، می توان کران نامساوی (۱) را بهبود داد.

بر اساس حدس اردوش [۲]، اگر $p(z)$ صفری در $|z| < ۱$ نداشته باشد، می‌توان نامساوی زیر که بعداً به وسیله لکس [۳] [۲۳] اثبات شده را جایگزین نامساوی (۱) کرد. که اثبات آن را در پیوست (۲) آورده‌ایم.

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۲}$$

از طرف دیگر توران [۴] [۲۹] نشان داد، اگر $p(z)$ تمام صفرهایش را در $|z| < ۱$ بگیرد، آنگاه

[۱] S. Bernsteion
[۲] P. Erdös
[۳] P. D. Lax
[۴] P. Turán

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۳)$$

و اثبات آن را در پیوست (۲) آورده ایم.

مالیک[۵] [۲۴]، برای چندجمله‌ای $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ که صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد، نامساوی (۲) را به صورت زیر تعمیم داد.

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۱+k} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۴)$$

از طرفی، چان[۶] و مالیک [۱۲] نامساوی (۴) را برای چند جمله‌ای‌هایی که به فرم $p(z) = a_۰ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ نوشته می‌شوند و هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ ندارند، به صورت زیر تعمیم دادند.

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۱+k^t} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۵)$$

حال در این فصل، سعی می‌کنیم این کران‌ها را بهبود و یا به حالت‌های دیگر تعمیم دهیم.

۱.۳ بررسی چند جمله‌ای‌هایی که به فرم $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ نوشته می‌شوند، با توجه به موقعیت صفرهایشان.

در ابتدای این بخش، کرانی برای ماکزیمم قدرمطلق چندجمله‌ای $p(z)$ با استفاده از مشتق، بدست می‌آوریم.

برای این منظور، در فصل (۲) دیدیم:

اگر $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آنگاه برای $R \geq ۱$ ،

$$M(p,R) \leq R^n M(p,۱) \qquad (۶)$$

[۵] M. A. Malik
[۶] T. N. Chan

و اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که صفری در $|z|<1$ نداشته باشد، آنگاه برای $R\geq 1$ ،

$$M(p,R)\leq \left(\frac{R^n+1}{2}\right) M(p,1) \tag{7}$$

حال، در اینجا چند سوأل مطرح می‌شود.

سوأل (۱): اگر در نامساوی (۷)، شرطی را که چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z|<1$ صفری ندارد را به حالتی که $p(z)$ در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ صفری ندارد تعمیم دهیم یا اگر $p(z)=a_n\prod_{v=1}^{n}(z-z_v)$ به طوری که $|z_v|\geq k_v\geq 1$ ، آنگاه کران چه تغییری می‌کند؟

سوأل (۲): چون در نامساوی (۷)، تساوی برای $p(z)=\lambda+\mu z^n$ به طوری که $|\lambda|=|\mu|$ ، برقرار است، آیا امکان دارد تمام ضرایب $a_{n-1},...,a_2,a_1$ در چندجمله‌ای $p(z)=\sum_{v=1}^{n} a_v z^v$ صفر باشند؟ یا در حالت کلی، آیا امکان دارد کران در نامساوی (۷) به تعداد یا تمام ضرایب $a_n,a_{n-1},...,a_2,a_1$ بستگی داشته باشد؟

برای پیدا کردن جواب این سوأل ها به لم ها و قضایای زیر احتیاج داریم.

لم ۱.۱.۳ اگر $p(z)=a_n\prod_{v=1}^{n}(z-z_v)$ و $a_n\neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $|z_v|\geq k_v\geq 1$ به طوری که $1\leq v\leq n$ ، آنگاه

$$M(p',1)\leq n\left\{\frac{\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}{\sum_{v=1}^{n}\frac{k_v+1}{k_v-1}}\right\} M(p,1) \tag{8}$$

تساوی برای $p(z)=(z+k)^n$ به طوری که $k\geq 1$ ، برقرار است. این لم منسوب به گویل و لابل [7] [۱۹] است.

یادآوری ۲.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n\geq 2$ باشد، آنگاه برای $R>1$ ،

$$M(p,R)\leq R^n M(p,1)-(R^n-R^{n-2})|p(0)| \tag{9}$$

[7] G. Labelle

برای هر R ، ضریب $|p(0)|$ بهترین حالت ممکن است. این لم منسوب به فراپیر[۸]، رحمان [۹] و راچویا[۱۰] [۱۵] است.

لم ۳.۱.۳ اگر $p(z) = a_n \prod_{v=1}^{n}(z - z_v)$ و $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه $n > 2$ باشد و $|z_v| \geq k_v \geq 1$ به طوری که $1 \leq v \leq n$ ، آنگاه برای $R > 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ داریم

$$|p'(Re^{i\theta})| \leq nR^{n-1}\left\{\frac{\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}{\sum_{v=1}^{n}\frac{k_v+1}{k_v-1}}\right\}M(p,1) - (R^{n-1} - R^{n-3})|p'(0)| \qquad (10)$$

برهان: چون $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n > 2$ و چندجمله‌ای $p'(z)$ از درجه $n \geq 2$ است، با به کاربردن یادآوری ۲.۱.۳ برای $p'(z)$ ،

$$|p'(Re^{i\theta})| \leq R^{n-1}M(p',1) - (R^{n-1} - R^{n-3})|p'(0)| \qquad (11)$$

از ترکیب (۱۱) و لم ۱.۱.۳ نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۴.۱.۳ اگر $p(z) = a_n \prod_{v=1}^{n}(z - z_v)$ و $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $|z_v| \geq k_v \geq 1$ به طوری که $1 \leq v \leq n$ ، آنگاه

اگر $n > 2$

$$\begin{aligned} M(p,R) \leq \frac{(R^n+1)}{2}\left[1 - \left(\frac{R^n-1}{R^n+1}\right)\frac{1}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}\right]M(p,1) \\ -|p'(0)|\left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

و اگر $n = 2$

$$M(p,R) \leq \frac{(R^2+1)}{2}\left[1 - \left(\frac{R^2-1}{R^2+1}\right)\frac{(k_1-1)(k_2-1)}{(k_1k_2-1)}\right]M(p,1) - |p'(0)|\frac{(R-1)^2}{2} \qquad (13)$$

C. Frappier[۸]
Q. I. Rahman[۹]
S. Ruscheweyh[۱۰]

برهان: برای هر θ به طوری که $0 \le \theta < 2\pi$ ،

$$p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta}) = \int_1^R e^{i\theta} p'(re^{i\theta})dr$$

بنابراین

$$|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \le \int_1^R |p'(re^{i\theta})|dr \tag{14}$$

از ترکیب (۱۴) با لم ۳.۱.۳ داریم

$$\begin{aligned}|p(Re^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| \le{}& n\left\{\frac{\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}{\sum_{v=1}^n \frac{k_v+1}{k_v-1}}\right\} M(p,1)\int_1^R r^{n-1}dr \\ &- \int_1^R (r^{n-1} - r^{n-3})dr|p'(0)| \end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&= (R^n-1)\left\{\frac{\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}{\sum_{v=1}^n \frac{k_v+1}{k_v-1}}\right\} M(p,1) - \left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&= \frac{(R^n-1)}{\left(1+\frac{\sum_{v=1}^n \frac{k_v}{k_v-1}}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}\right)} M(p,1) - \left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&= \frac{(R^n-1)}{\left(\frac{n+\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}+1\right)} M(p,1) - \left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&= \frac{(R^n-1)}{\left(2+\frac{n}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}\right)} M(p,1) - \left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&= \frac{R^n-1}{2}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{n}\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}}\right\} M(p,1) - \left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&= \frac{R^n-1}{2}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}\right\} M(p,1) - \left(\frac{R^n-1}{n} - \frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|
\end{aligned}$$

بنابراین

$$|p(Re^{i\theta})| \le \frac{R^n-1}{2}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^n \frac{1}{k_v-1}}\right\} M(p,1) + M(p,1)$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&=\left\{\frac{R^n+1}{2}-\frac{\frac{R^n-1}{2}}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}\right\}M(p,1)-\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)| \\
&=\frac{R^n+1}{2}\left\{1-\left(\frac{R^n-1}{R^n+1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{k_v-1}}\right)\right\}M(p,1) \\
&\quad-\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|
\end{aligned}
$$

بنابراین نامساوی (۱۲) ثابت می‌شود.

حال، لم ۳.۱.۳ را برای چندجمله‌ای درجه ۲ می‌نویسیم و در این صورت

$$|p'(Re^{i\theta})|\le R\left\{1-\frac{(k_1-1)(k_2-1)}{(k_1k_2-1)}\right\}M(p,1)-(R-1)|p'(0)|$$

حال می‌توان با اثباتی مشابه نامساوی (۱۲) ، نامساوی (۱۳) را ثابت کرد. □

نکته ۵.۱.۳ چون برای $R>1$ تابع $\frac{(R^x-1)}{x}$ یک تابع صعودی از x است، بنابراین عبارت $\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right)|p'(0)|$ همیشه نامنفی است. در نتیجه کران نامساوی (۱۲) در قضیه ۴.۱.۳، بهبودی از نامساوی (۷) می‌باشد. در حقیقت، برای چندجمله‌ای $p(z)$ که صفرهایش در $|z|=1$ قرار دارد و $p'(0)=0$ ، همیشه کران نامساوی (۱۲) از کران نامساوی (۷) بهتر است.

نکته ۶.۱.۳ از صورت قضیه ۴.۱.۳ چنین به نظر می‌رسد که باید برای استفاده از آن، تمام صفرهای چندجمله‌ای را داشته باشیم، درصورتی که این لازم نیست. بدون شک، اگر تعدادی از صفرهای چندجمله‌ای معلوم باشد کارایی قضیه بالا می‌رود. به ویژه، اگر چندجمله‌ای $p(z)$ از حاصل ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای که صفرهایشان در $|z|\ge k_1>1$ و $|z|\ge k_2>1$ و...و $|z|\ge k_v>1$ به طوری که $1\le v\le n$ ، قرار می‌گیرند تشکیل شده باشد. در این صورت، برای هر یک از چندجمله‌ای‌هایی که صفرهایش در $|z|\ge k_v>1$ قرار می‌گیرد، $M(p,1)\ge 1$ می‌باشد.

بنابراین برای چندجمله‌ای $p(z)$ که از حاصلضرب این چندجمله‌ای ها حاصل شده نیز، $M(p,1) \geq 1$ می‌باشد. در نتیجه، قضیه ۴.۱.۳ یک بهبودی از نامساوی (۷) برای $M(p,R)$ به ما می‌دهد.

اگر چندجمله‌ای $p(z)$ هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، نتایج زیر را از قضیه ۴.۱.۳ بدست می‌آوریم.

نتیجه ۷.۱.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد ، آنگاه

اگر $n > 2$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^n + k}{1+k}\right) M(p,1) - |a_1| \left(\frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n-2}\right) \tag{16}$$

اگر $n = 2$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^2 + k}{1+k}\right) M(p,1) - |a_1| \frac{(R-1)^2}{2} \tag{17}$$

به ویژه، اگر $k = 1$ ، آنگاه

نتیجه ۸.۱.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد ، آنگاه

اگر $n > 2$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^n + 1}{2}\right) M(p,1) - |a_1| \left(\frac{R^n - 1}{n} - \frac{R^{n-2} - 1}{n-2}\right) \tag{18}$$

اگر $n = 2$

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R^2 + 1}{2}\right) M(p,1) - |a_1| \frac{(R-1)^2}{2} \tag{19}$$

تساوی در نامساوی‌های (۱۸) و (۱۹) برای $p(z) = \lambda + \mu z^n$ با $|\mu| = |\lambda|$ ، برقرار می‌شود.

برای چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از ۱ ، نتایج ۷.۱.۳ و ۸.۱.۳ ، تعمیمی از نامساوی (۷) می‌باشد.

اگر در نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) ، طرفین را بر R^n تقسیم کنیم و $R \longrightarrow \infty$ ، آنگاه

نتیجه ۹.۱.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$|a_n| + \frac{|a_1|}{n} \leq \left(\frac{1}{1+k}\right) M(p, 1) \tag{۲۰}$$

به ویژه، اگر $k = 1$ ، آنگاه

نتیجه ۱۰.۱.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد که هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$|a_n| + \frac{|a_1|}{n} \leq \frac{1}{2} M(p, 1) \tag{۲۱}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای $p(z) = \lambda + \mu z^n$ با $|\mu| = |\lambda|$ ، برقرار می‌شود.

یادآوری ۱۱.۱.۳ در ابتدای فصل ۳ دیدیم، مالیک برای چندجمله‌ای $p(z)$ که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، نشان داد

$$M(p', 1) \leq \frac{n}{1+k} M(p, 1) \tag{۲۲}$$

□

حال در اینجا، سعی می‌کنیم نامساوی (۲۲) را تعمیم و بهبود دهیم. برای این منظور، لم‌ها و قضایای زیر مورد نیاز است.

لم ۱۲.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$M(p',1)\leq n\frac{(n|a_0|+k^2|a_1|)}{(1+k^2)n|a_0|+2k^2|a_1|}M(p,1) \tag{۲۳}$$

این لم منسوب به گویل، رحمان و شمیسر[11] [۲۱] است. در اینجا اثبات این لم را نمی‌آوریم ولی بعداً در بخش ۲.۳ اثباتی از تعمیم این لم را می آوریم.

لم ۱۳.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k>0$ نداشته باشد ، آنگاه برای $0\leq rR\leq k^2$ و $r\leq R$ و $m(p,k)=\min_{|z|=k}|p(z)|$ داریم

$$M(p,r)\geq\left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n M(p,R)+\left[1-\left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n\right]m(p,k) \tag{۲۴}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ اتفاق می‌افتد. این لم منسوب به عزیز و زرگر[12] [۹] است.

لم ۱۴.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ نداشته باشد ، آنگاه برای $0\leq r\leq\rho\leq k$ داریم

$$\begin{aligned}M(p,\rho)&\\&\leq\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\left[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right]M(p,r)\\&-\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)(r+k)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right)-n(\rho-r)\right\}\right]m(p,k)\end{aligned} \tag{۲۵}$$

---

[11] G. Schmeisser

[12] A. B. Zargar

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ اتفاق می‌افتد.

برهان: چون $p(z)$ هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq ۱$ ندارد، بنابراین چندجمله‌ای $T(z)=p(tz)$ هیچ صفری در $|z|<\frac{k}{t}$ برای $۰\leq t\leq k$ ندارد. برای چندجمله‌ای $T(z)$، از لم ۱۲.۱.۳ استفاده می‌کنیم و k را با $\frac{k}{t}\geq ۱$ جایگزین می‌کنیم، بدست می آوریم

$$M(T',۱)\leq n\left\{\frac{(n|a_۰|+\frac{k^۲}{t^۲}|ta_۱|)}{(۱+\frac{k^۲}{t^۲})n|a_۰|+۲\frac{k^۲}{t^۲}|ta_۱|}\right\}M(T,۱)$$

بنابراین

$$M(p',t)\leq n\left\{\frac{(n|a_۰|t+k^۲|a_۱|)}{(t^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲t|a_۱|}\right\}M(p,t) \qquad (۲۶)$$

حال برای $۰\leq r\leq \rho\leq k$ و $۰\leq\theta<۲\pi$ و به وسیله نامساوی (۲۶) داریم

$$\begin{aligned}|p(\rho e^{i\theta})-p(re^{i\theta})|&\leq\int_r^\rho|p'(te^{i\theta})|dt\\&\leq\int_r^\rho n\left\{\frac{(n|a_۰|t+k^۲|a_۱|)}{(t^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲t|a_۱|}\right\}M(p,t)dt \qquad (۲۷)\end{aligned}$$

لم ۱۳.۱.۳ را برای $R=t$ به کار می‌بریم به طوری که $۰\leq r\leq t\leq\rho\leq k$ و $۰\leq rt\leq k^۲$،

$$\begin{aligned}|p(\rho e^{i\theta})-p(re^{i\theta})|&\leq\int_r^\rho n\left\{\frac{(n|a_۰|t+k^۲|a_۱|)}{(t^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲t|a_۱|}\right\}\\&\times\left(\frac{t+k}{r+k}\right)^n\left\{M(p,r)-\left(۱-\left(\frac{r+k}{t+k}\right)^n\right)m(p,k)\right\}dt\\&\leq n\left\{\frac{(n|a_۰|\rho+k^۲|a_۱|)}{(\rho^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲\rho|a_۱|}\right\}\\&\times\int_r^\rho\left(\frac{t+k}{r+k}\right)^n\left\{M(p,r)-\left(۱-\left(\frac{r+k}{t+k}\right)^n\right)m(p,k)\right\}dt\end{aligned}$$

برای $۰\leq r\leq\rho\leq k$ بدست می آوریم

$$\begin{aligned}&M(p,\rho)\\&\leq\left[۱+\frac{n(k+\rho)}{(k+r)^n}\left\{\frac{(n|a_۰|\rho+k^۲|a_۱|)}{(\rho^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲\rho|a_۱|}\right\}\int_r^\rho(k+t)^{n-۱}dt\right]M(p,r)\\&-n\left\{\frac{(n|a_۰|\rho+k^۲|a_۱|)}{(\rho^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲\rho|a_۱|}\right\}\int_r^\rho\left(\left(\frac{t+k}{r+k}\right)^n-۱\right)dt\ m(p,k)\\&\leq\left[۱-\left\{\frac{(k+\rho)(n|a_۰|\rho+k^۲|a_۱|)}{(\rho^۲+k^۲)n|a_۰|+۲k^۲\rho|a_۱|}\right\}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left\{\frac{(k+\rho)(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\Bigg] M(p,r)\\
&-n\left[\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\int_r^\rho\left(\frac{(t+k)^{n-1}}{(r+k)^{n-1}}-1\right)dt\right] m(p,k)\\
&=\Bigg[\left(\frac{\rho^2 n|a_0|+k^2 n|a_0|+2k^2\rho|a_1|-kn|a_0|\rho-k^3|a_1|-n|a_0|\rho^2-\rho k^2|a_1|}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right)\\
&\quad + \left(\frac{nk|a_0|\rho+k^3|a_1|+|a_0|\rho^2 n+k^2\rho|a_1|}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right)\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\Bigg] M(p,r)\\
&-n\left[\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\int_r^\rho\left(\frac{(t+k)^{n-1}}{(r+k)^{n-1}}-1\right)dt\right] m(p,k)\\
&=\Bigg[\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\\
&\quad + \left\{1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\Bigg] M(p,r)\\
&-n\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\int_r^\rho\left(\frac{(t+k)^{n-1}}{(r+k)^{n-1}}-1\right)dt\right] m(p,k)\\
&=\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\left[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left\{1-\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^n\right\}\right] M(p,r)\\
&-n\left\{\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right\}\frac{1}{(r+k)^{n-1}}\\
&\quad\times\left\{\frac{(\rho+k)^n-(r+k)^n}{n}-(\rho-r)\right\} m(p,k)\\
&=\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\Bigg[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\\
&\quad\times\frac{(\rho-r)}{(k+\rho)\left\{1-\frac{k+r}{k+\rho}\right\}}\left\{1-\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^n\right\}\Bigg] M(p,r)\\
&-\Bigg[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\\
&\quad\times(r+k)\left\{\left\{\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right\}-n(\rho-r)\right\}\Bigg] m(p,k)\\
&\le\left(\frac{k+\rho}{k+r}\right)^n\left[1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right] M(p,r)\\
&-\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)(r+k)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right)-n(\rho-r)\right\}\right] m(p,k)
\end{aligned}
$$

□

قضیه ۱۵.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n}a_vz^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ نداشته باشد، آنگاه برای $0\leq r\leq\rho\leq k$ داریم

$$M(p',\rho)\leq\frac{n(\rho+k)^{n-1}}{(k+r)^n}\left\{1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\times\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right\}M(p,r) \qquad (28)$$

این قضیه منسوب به دوان[13] و میر[14] [۱۳] است. و تعمیمی از نامساوی (۲۲) می‌باشد.

قضیه ۱۶.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n}a_vz^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ نداشته باشد، آنگاه برای $0\leq r\leq\rho\leq k$ داریم

$$\begin{aligned}M(p',\rho)\leq&\frac{n(\rho+k)^{n-1}}{(k+r)^n}\\&\times\left\{1-\frac{k(k-\rho)(n|a_0|-k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right)\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1}\right\}M(p,r)\\&-n\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)\left[\frac{(n|a_0|\rho+k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0|+2k^2\rho|a_1|}\right.\\&\left.\times\left\{\left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n-1\right)-n(\rho-r)\right\}\right]m(p,k)\end{aligned} \qquad (29)$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=(z+k)^n$ اتفاق می‌افتد. این قضیه گسترشی از قضیه ۱۵.۱.۳ می‌باشد.

برهان: چون چندجمله‌ای $p(z)=\sum_{v=0}^{n}a_vz^v$ هیچ صفری در $|z|<k$ برای $k\geq 1$ ندارد، بنابراین چندجمله‌ای $F(z)=p(\rho z)$ هیچ صفری در $|z|<\frac{k}{\rho}$ برای $\frac{k}{\rho}\geq 1$ ندارد. با استفاده از نامساوی (۲۲) برای چندجمله‌ای $F(z)$ ،

$$M(F',1)\leq\frac{n}{1+\frac{k}{\rho}}M(F,1)$$

[13] K. K. Dewan
[14] A. Mir

بنابراین

$$M(p',\rho) \leq \frac{n}{\rho+k} M(p,\rho) \tag{۳۰}$$

اکنون اگر $0 \leq r \leq \rho \leq k$ ، آنگاه از نامساوی (۳۰) و با استفاده از لم ۱۴.۱.۳ داریم

$$\begin{aligned} M(p',\rho) \leq & \frac{n(\rho+k)^{n-1}}{(k+r)^n} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{k(k-\rho)(n|a_0| - k|a_1|)n}{(k^2+\rho^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|} \left(\frac{\rho-r}{k+\rho}\right) \left(\frac{k+r}{k+\rho}\right)^{n-1} \right\} M(p,r) \\ & -n\left(\frac{k+r}{k+\rho}\right) \left[\frac{(n|a_0|\rho + k^2|a_1|)}{(\rho^2+k^2)n|a_0| + 2k^2\rho|a_1|} \right. \\ & \left. \times \left\{ \left(\left(\frac{\rho+k}{r+k}\right)^n - 1 \right) - n(\rho - r) \right\} \right] m(p,k) \end{aligned}$$

□

یادآوری ۱۷.۱.۳ در ابتدای فصل ۳ دیدیم، توران برای چندجمله‌ای $p(z)$ از درجه n که تمام صفرهایش در $|z| < 1$ قرار می‌گیرد، نشان داد

$$M(p',1) \geq \frac{n}{2} M(p,1) \tag{۳۱}$$

□

حال در اینجا، سعی می‌کنیم نامساوی (۳۱) را تعمیم و بهبود دهیم.

قضیه ۱۸.۱.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $|z| \leq k \leq 1$ قرار بگیرد و مبدأ صفر مرتبه t ام آن باشد، آنگاه برای $|z| = 1$ داریم

$$M(p',1) \geq \frac{n+kt}{1+k} M(p,1) \tag{۳۲}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = z^t(z+k)^{n-t}$ به طوری که $0 < t \leq n$ ، اتفاق می‌افتد. این قضیه منسوب به عزیز و شاه[15] [8] است که تعمیمی از نامساوی (۳۱) می‌باشد.

[15] W. M. Shah

قضیه ۱۹.۱.۳ اگر $p(z)=\sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $|z| \leq k \leq 1$ قرار بگیرد و مبدأ صفر مرتبه t ام آن باشد، آنگاه

$$M(p',1) \geq \frac{n+kt}{1+k}M(p,1)+\frac{n-t}{(1+k)k^t}m(p,k) \tag{۳۳}$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=z^t(z+k)^{n-t}$ به طوری که $0<t\leq n$ ، اتفاق می‌افتد. این قضیه بهبودی از قضیه ۱۸.۱.۳ می‌باشد.

برهان: اگر $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$ ، آنگاه برای $|z|=k$ ، $m \leq |p(z)|$. بنابراین برای $|z|=k$ داریم

$$m|\frac{z}{k}|^t \leq |p(z)|$$

چون تمام صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k \leq 1$ قرار می‌گیرد و مبدأ یک صفر مرتبه t ام آن است، بنابراین برای هر عدد مختلط α به طوری که $|\alpha|<1$ ، طبق قضیه روشه، تمام صفرهای چندجمله‌ای $G(z)=p(z)+\frac{\alpha m}{k^t}z^t$ در $|z|\leq k$ برای $k \leq 1$ قرار می‌گیرد به طوری که مبدأ یک صفر مرتبه t ام آن است و $m>0$.

بنابراین می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$G(z)=z^t H(z) \tag{۳۴}$$

بنابراین، $H(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-t$ است که تمام صفرهایش در $|z|\leq k$ برای $k \leq 1$ قرار می‌گیرد. از (۳۴) بدست می آوریم

$$\frac{zG'(z)}{G(z)}=t+\frac{zH'(z)}{H(z)} \tag{۳۵}$$

اگر $z_1, z_2, ..., z_{n-t}$ صفرهای $H(z)$ باشند، آنگاه $|z_v| \leq k \leq 1$ و از (۳۵) داریم

$$\Re\left\{\frac{e^{i\theta}G'(e^{i\theta})}{G(e^{i\theta})}\right\}=t+\Re\left\{\frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})}\right\}$$

$$= t + \Re \sum_{v=1}^{n-t} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_v}$$

$$= t + \sum_{v=1}^{n-t} \Re \left(\frac{1}{1 - z_v e^{-i\theta}} \right) \tag{۳۶}$$

به طوری که، $e^{i\theta}$ ها برای $0 \le \theta < 2\pi$ ، صفر $H(z)$ نیستند. یعنی $e^{i\theta}$ ها خارج دایره $|z| \le k \le 1$ هستند. اکنون اگر $|w| \le k \le 1$ ، آنگاه

$$\Re \left(\frac{1}{1 - w} \right) \ge \frac{1}{1 + k}$$

در نامساوی (۳۶) از نتیجه بالا استفاده می‌کنیم ،

$$|\frac{G'(e^{i\theta})}{G(e^{i\theta})}| \ge \Re \left(\frac{e^{i\theta} G'(e^{i\theta})}{G(e^{i\theta})} \right)$$

$$= t + \sum_{v=1}^{n-t} \Re \left(\frac{1}{1 - z_v e^{-i\theta}} \right)$$

$$\ge t + \frac{n-t}{1+k}$$

بنابراین

$$|G'(e^{i\theta})| \ge \frac{n+tk}{1+k} |G(e^{i\theta})| \tag{۳۷}$$

به طوری که، $e^{i\theta}$ ها برای $0 \le \theta < 2\pi$ ، صفر $G(z)$ نیستند. چون نامساوی (۳۷) به طور بدیهی، برای نقاط $e^{i\theta}$ ، $0 \le \theta < 2\pi$ که صفرهای $p(z)$ نباشند، برقرار است، بنابراین برای $|z| = 1$ داریم

$$|G'(z)| \ge \frac{n+tk}{1+k} |G(z)| \tag{۳۸}$$

در (۳۸)، $G(z)$ را با $p(z) + \frac{\alpha m}{k^t} z^t$ به طوری که $|\alpha| < 1$ جایگزین می‌کنیم و برای $|z| = 1$ داریم

$$|p'(z) + \frac{\alpha t m}{k^t} z^{t-1}| \ge \frac{n+tk}{1+k} |p(z) + \frac{\alpha m}{k^t} z^t| \tag{۳۹}$$

آرگومان α را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که برای $|z| = 1$ ،

$$|p(z) + \frac{\alpha m}{k^t} z^t| = |p(z)| + |\alpha| \frac{m}{k^t}$$

با جایگذاری آن در (۳۹)، برای $|z| = 1$ داریم

$$|p'(z)| + \frac{t|\alpha| m}{k^t} \ge \frac{n+tk}{1+k} \left[|p(z)| + |\alpha| \frac{m}{k^t} \right]$$

حال، $|\alpha| \longrightarrow ۱$ و برای $|z| = ۱$ ،

$$|p'(z)| \geq \frac{n+tk}{۱+k}|p(z)| + \left[\frac{n+tk}{۱+k} - t\right]\frac{m}{k^t}$$
$$= \frac{n+tk}{۱+k}|p(z)| + \frac{n-t}{۱+k} \cdot \frac{m}{k^t}$$

بنابراین

$$M(p', ۱) \geq \frac{n+kt}{۱+k}M(p, ۱) + \frac{n-t}{(۱+k)k^t}m(p,k)$$

□

اگر در قضیه ۱۹.۱.۳ ، $k = ۱$ ، آنگاه

نتیجه ۲۰.۱.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $|z| \leq ۱$ قرار بگیرد و مبدأ صفر مرتبه t ام آن باشد، آنگاه برای $|z| = ۱$ ،

$$M(p', ۱) \geq \frac{n+t}{۲}M(p, ۱) + \frac{n-t}{۲}m(p,k) \qquad (۴۰)$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = (z+k)^n$ اتفاق می‌افتد.

نکته ۲۱.۱.۳ برای $t = ۰$ نتیجه ۲۰.۱.۳ منجر به نتیجه‌ای می‌شود که منسوب به عزیز و داوود[۱۶] [۵] است.

۲.۳ بررسی چند جمله‌ای‌هایی که به فرم $p(z) = a_۰ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $۱ \leq t \leq n$ نوشته می‌شوند، با توجه به موقعیت صفرهایشان.

اگر تعدادی از ضرایب چندجمله‌ای $p(z) = \sum_{v=۰}^{n} a_v z^v$ ، صفر باشند، آنگاه می‌توان $p(z)$ را به صورت $p(z) = a_۰ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ نوشت.

[۱۶] Q. A. Dawood

یادآوری ۱.۲.۳ در ابتدای فصل (۳) دیدیم، چان و مالک برای چندجمله‌ای $p(z) = a_\circ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد، نشان دادند

$$M(p', ۱) \leq \frac{n}{۱ + k^t} M(p, ۱) \tag{۴۱}$$

حال در اینجا، سعی می‌کنیم نامساوی (۴۱) را تعمیم و بهبود دهیم. برای این منظور به تعاریف، لم ها و قضایای زیر احتیاج داریم.

لم ۲.۲.۳ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < ۱$ نداشته باشد ، آنگاه برای $|z| = ۱$ ،

$$|p'(z)| \leq |np(z) - zp'(z)| \tag{۴۲}$$

این لم منسوب به برنشتاین [۱۰] است.

تعریف ۳.۲.۳ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، تابع $p_۱(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_۱(z) = np(z) - (z - z_\circ)p'(z)$$

در این صورت، $p_۱(z)$ حداکثر از درجه $n - ۱$ می‌باشد و آن را مشتق قطبی $p(z)$ نسبت به قطب $z_\circ$ می‌نامیم. بعلاوه، مشتق قطبی، یک تعمیمی از مفهوم مشتق معمولی است یعنی
اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ و $R > \circ$ داشته باشیم

$$|z_\circ| > \frac{۱}{\varepsilon} \quad , \quad M = \max_{|z|=R} |np(z) - zp'(z)| \quad , \quad P_۱(z) = \frac{p_۱(z)}{z_\circ}$$

آنگاه

$$|P_۱(z) - p'(z)| = \frac{|np(z) - zp'(z)|}{|z_\circ|} < M\varepsilon$$

بنابراین

$$\lim_{z_\circ \longrightarrow \infty} \left(\frac{p_\text{۱}(z)}{z_\circ}\right) = p'(z)$$

تعریف ۴.۲.۳ ناحیه‌هایی را که نقاط داخلی دایره، تحت انتقال $z = \frac{\alpha Z+\beta}{\gamma Z+\delta}$ ، پایا می‌ماند را ناحیه‌های دایره‌ای می‌نامیم که شامل نقاط داخل یا خارج دایره بسته یا نیم صفحه بسته است.

قضیه ۵.۲.۳ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq \text{۲}$ باشد و $\alpha \in \mathbb{C}$. در این صورت اگر K یک ناحیه دایره‌ای باشد که تمام صفرهای $p(z)$ را شامل شود به طوری که نقطه α را شامل نشود، آنگاه تمام صفرهای مشتق قطبی $p(z)$ را نیز شامل می‌شود.

این قضیه منسوب به لاگرانژ[۱۷] است.

قضیه ۶.۲.۳ اگر $p(z) = a_\circ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq \text{۱}$ نداشته باشد، آنگاه

$$M(p', \text{۱}) \leq n \left\{ \frac{\text{۱} + \frac{t}{n}\left|\frac{a_t}{a_\circ}\right| k^{t+\text{۱}}}{\text{۱} + k^{t+\text{۱}} + \frac{t}{n}\left|\frac{a_t}{a_\circ}\right|(k^{t+\text{۱}} + k^{\text{۲}t})} \right\} M(p, \text{۱}) \qquad (\text{۴۳})$$

برهان: فرض می‌کنیم $k = \text{۱}$ ، آنگاه بنا بر لم ۱۵.۱.۲ و لم ۲.۲.۳ برای $|z| = \text{۱}$ داریم

$$\text{۲}|p'(z)| \leq |p'(z)| + |np(z) - zp'(z)| \leq nM(p, \text{۱})$$

[۱۷] Laguerre

بنابراین حکم ثابت می‌شود.

حال، فرض می‌کنیم $k > ۱$ ، بدون اینکه از کلیت مسئله چیزی کم شود فرض می‌کنیم $a_n \neq ۰$ ، آنگاه به وسیله قضیه ۵.۲.۳ برای $|\xi| < k$ و $|z| < k$ داریم

$$\xi p'(z) + np(z) - zp'(z) \neq ۰$$

واضح است نتیجه بالا برقرار است، فقط اگر، برای $|z| \leq k$ ،

$$\left|\frac{p'(z)}{np(z) - zp'(z)}\right| \leq \frac{۱}{k} \tag{۴۴}$$

با استفاده از نامساوی (۴۴)، تابع زیر را تعریف می‌کنیم که در $|z| < ۱ + \varepsilon$ برای $\varepsilon > ۰$ تحلیلی است.

$$\varphi(z) := \frac{kp'(kz)}{np(kz) - kzp'(kz)}$$

در این صورت، برای $|z| \leq ۱$ ، $|\varphi(z)| \leq ۱$. بعلاوه، $\varphi(۰) = ... = \varphi^{(t-۲)}(۰) = ۰$ بنابراین تابع،

$$\Phi(z) := \frac{\varphi(z)}{z^{t-۱}} = \sum_{v=۰}^{\infty} c_v z^v \qquad (c_۰ := \frac{t}{n} \cdot \frac{a_t}{a_۰} k^t)$$

در $|z| < ۱ + \varepsilon$ برای $\varepsilon > ۰$ تحلیلی است و برای $|z| = ۱$ ، $|\Phi(z)| \leq ۱$.

به وسیله اصل ماکزیمم قدرمطلق، $|c_۰| = |\Phi(۰)| \leq ۱$. وقتی که $|c_۰| < ۱$ ، تابع

$$\omega(z) := \frac{\Phi(z) - c_۰}{\bar{c}_۰ \Phi(z) - ۱}$$

در تعدادی دیسک باز که شامل دیسک واحد بسته است، تحلیلی است. و برای $|z| = ۱$ ، $|\omega(z)| \leq ۱$.

چون $\omega(۰) = ۰$ ، نتیجه می‌گیریم برای $|z| < ۱$ ، $|\omega(z)| \leq |z|$. به عبارت دیگر، اگر $|z_۰| < ۱$ ، آنگاه

$$\omega(z_۰) := \frac{\Phi(z_۰) - c_۰}{\bar{c}_۰ \Phi(z_۰) - ۱}$$

در دیسک بسته $|z| \leq |z_۰|$ قرار می‌گیرد.

از طرف دیگر، $\Phi(z_۰) := \frac{\omega(z_۰) - c_۰}{\bar{c}_۰ \omega(z_۰) - ۱}$ در دیسک بسته $|z| \leq \frac{|z_۰| + |c_۰|}{|c_۰||z_۰| + ۱}$ قرار می‌گیرد. بنابراین برای

$1 < |z|$ ،

$$|\varphi(z)| \leq |z|^{t-1} \cdot \frac{|z| + \left(\frac{t}{n}\right)\left|\frac{a_t}{a_0}\right| k^t}{\left(\frac{t}{n}\right)\left|\frac{a_t}{a_0}\right| k^t |z| + 1} \tag{۴۵}$$

البته برای $|c_0| = 1$ ، بدیهی می‌باشد. حال اگر در نامساوی (۴۵) قرار دهیم $|z| = \frac{1}{k}$ ، آنگاه برای $|z| = 1$ ،

$$|p'(z)| \leq \frac{1}{k^{t+1}} \cdot \frac{1 + \left(\frac{t}{n}\right)\left|\frac{a_t}{a_0}\right| k^{t+1}}{\left(\frac{t}{n}\right)\left|\frac{a_t}{a_0}\right| k^{t-1} + 1} |np(z) - zp'(z)|$$

حال، اگر از لم ۱۵.۱.۲ استفاده کنیم، قضیه ثابت می‌شود. □

نکته ۷.۲.۳ چون $\left(\frac{t}{n}\right)\left|\frac{a_t}{a_0}\right| k^t = |c_0| = |\Phi(0)| \leq 1$ ، در نتیجه نامساوی (۴۱)، از نامساوی (۴۳) حاصل می‌شود. بنابراین قضیه ۶.۲.۳، بهبودی از نامساوی (۴۱) می‌باشد.

نکته ۸.۲.۳ اگر در قضیه ۶.۲.۳ قرار دهیم $t = 1$ ، آنگاه لم ۵.۱.۳ حاصل می‌شود. بنابراین قضیه ۶.۲.۳ تعمیمی از لم ۵.۱.۳ می‌باشد.

قضیه ۹.۲.۳ اگر $p(z) = a_0 + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $t \geq 1$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد و $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ ، آنگاه

$$M(p', 1) \leq n \left\{ \frac{1 + \left(\frac{t}{n}\right) \frac{|a_t|}{|a_0| - m} k^{t+1}}{1 + k^{t+1} + \left(\frac{t}{n}\right) \frac{|a_t|}{|a_0| - m}(k^{t+1} + k^{2t})} \right\} (M(p, 1) - m) \tag{۴۶}$$

این قضیه منسوب به گاردنر[۱۸]، گویل و ویمز [۱۹] [۱۸] است.

اگر $m = ۰$ ، آنگاه نامساوی (۴۶)، همان نامساوی (۴۳) می‌باشد. بنابراین، قضیه ۹.۲.۳، گسترشی از قضیه ۶.۲.۳ می‌باشد.

قضیه ۱۰.۲.۳ اگر $p(z) = a_۰ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $t \geq ۱$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد، آنگاه برای $R > ۱$ و $|z| = ۱$ ،

$$|p(Rz) - p(z)| \leq (R^n - ۱) \left\{ \frac{۱ + \left\{\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right\} \left|\frac{a_t}{a_۰}\right| k^{t+۱}}{۱ + k^{t+۱} + \left\{\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right\} \left|\frac{a_t}{a_۰}\right| (k^{t+۱} + k^{۲t})} \right\} M(p, ۱) \qquad (۴۷)$$

این قضیه منسوب به عزیز و شاه[۸] است.

نکته ۱۱.۲.۳ اگر $\max_{|z|=۱} |p(Rz) - p(z)|$ را با $\max_{|z|=۱} |p(z)|$ جایگزین کنیم و در قضیه ۱۰.۲.۳، طرفین نامساوی (۴۷) را بر $R - ۱$ تقسیم کنیم و $R \longrightarrow ۱$ ، آنگاه قضیه ۶.۲.۳ حاصل می‌شود.

حال در اینجا، سعی می‌کنیم قضیه ۱۰.۲.۳ را گسترش دهیم. برای این منظور، به لم‌های زیر احتیاج داریم.

لم ۱۲.۲.۳ اگر $p(z) = a_۰ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $t \geq ۱$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد، آنگاه برای $R > ۱$ و $|z| = ۱$ و $q(z) = z^n \overline{p\left(\frac{۱}{\bar{z}}\right)}$ ،

$$|q(Rz) - q(z)| \geq k^{t+۱} \left\{ \frac{\left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right) \left|\frac{a_t}{a_۰}\right| k^{t-۱} + ۱}{\left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right) \left|\frac{a_t}{a_۰}\right| k^{t+۱} + ۱} \right\} |p(Rz) - p(z)| \qquad (۴۸)$$

این لم منسوب به عزیز و شاه[۸] است.

---
[۱۸] R. B. Gardner
[۱۹] A. Weems

لم ۱۳.۲.۳ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $t \leq |z|$ برای $t \leq 1$ قرار بگیرد، آنگاه برای $|z| = 1$ و $R \geq 1$ ،

$$|p(Rz) - p(z)| \geq \left(\frac{R^n - 1}{t^n}\right) m(p,t) \tag{۴۹}$$

این لم منسوب به عزیز و رادر[۲۰] [۷] است.

لم ۱۴.۲.۳ تابع $S(x) = k^{t+1}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\left(\frac{|a_t|}{x}\right)k^{t-1}+1}{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\left(\frac{|a_t|}{x}\right)k^{t+1}+1}\right\}$ یک تابع نانزولی از x است.

برهان: با استفاده از آزمون مشتق اول، لم ثابت می‌شود. □

لم ۱۵.۲.۳ اگر $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k > 0$ نداشته باشد، آنگاه برای $|z| < k$ ، $|p(z)| > m$ به طوری که $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$. به ویژه، $|a_0| > m$.

این لم منسوب به گاردنر، گویل و مازوکولا[۲۱] [۱۷] است.

لم ۱۶.۲.۳ اگر $p(z) = a_0 + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $t \geq 1$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه برای $R > 1$ و $|z| = 1$ و $q(z) = z^n\overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ و $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ ،

$$k^{t+1}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\frac{|a_t|}{|a_0|-m}k^{t-1}+1}{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\frac{|a_t|}{|a_0|-m}k^{t+1}+1}\right\}|p(Rz) - p(z)| \leq |q(Rz) - q(z)| - (R^n - 1)m \tag{۵۰}$$

اگر $m = 0$ باشد، این لم به لم ۱۲.۲.۳ تبدیل می‌شود. **برهان:** چون تمام صفرهای $p(z)$ در $|z| \geq k \geq 1$ قرار می‌گیرد و $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ ، بنابراین برای $|z| = k$ ، $m \leq |p(z)|$. بنابراین،

---
[۲۰] N. A. Rather
[۲۱] S. R. Musukula

با استفاده از قضیه روشه، برای $m > ۰$ و هر عدد مختلط α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ ، چندجمله‌ای $h(z) = p(z) - \alpha m$ ، هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ ندارد.

حال با استفاده از لم ۱۲.۲.۳ برای چندجمله‌ای $h(z) = p(z) - \alpha m$ و هر عدد مختلط α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ و $|z| = ۱$ و $R > ۱$ داریم

$$k^{t+۱}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_۰-m|}k^{t-۱}+۱}{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_۰-m|}k^{t+۱}+۱}\right\}|p(Rz)-p(z)| \leq |q(Rz)-q(z)-m\bar{\alpha}(R^n-۱)z^n| \quad (۵۱)$$

چون برای هر α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ داریم

$$|a_۰ - \alpha m| \geq |a_۰| - |\alpha| m \geq |a_۰| - m \quad (۵۲)$$

با استفاده از لم ۱۵.۲.۳ داریم $|a_۰| > m$ ، از ترکیب نامساوی‌های (۵۱) و (۵۲) و لم ۱۴.۲.۳ برای هر α به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ و $|z| = ۱$ و $R > ۱$ داریم ،

$$k^{t+۱}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_۰|-m}k^{t-۱}+۱}{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_۰|-m}k^{t+۱}+۱}\right\}|p(Rz)-p(z)| \leq |q(Rz)-q(z)-m\bar{\alpha}(R^n-۱)z^n| \quad (۵۳)$$

همچنین، تمام صفرهای $q(z)$ در $|z| \leq \frac{۱}{k} \leq ۱$ قرار می‌گیرد بنابراین با استفاده از لم ۱۳.۲.۳ برای $q(z)$ به جای $p(z)$ و $\frac{۱}{k}$ به جای t داریم

$$|q(Rz) - q(z)| \geq (R^n - ۱)k^n \min_{|z|=\frac{۱}{k}} |q(z)|$$

اما

$$\min_{|z|=\frac{۱}{k}} |q(z)| = \frac{۱}{k^n} \min_{|z|=k} |p(z)|$$

بنابراین، برای $|z| = ۱$ و $R > ۱$ داریم

$$|q(Rz) - q(z)| \geq (R^n - ۱)m \quad (۵۴)$$

اکنون، آرگومان α را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که $|\alpha| = ۱$ و طرف راست نامساوی (۵۳) را برای $|z| = ۱$ و $R > ۱$ به صورت زیر می‌نویسیم.

$$|q(Rz) - q(z) - m\bar{\alpha}(R^n - ۱)z^n| = |q(Rz) - q(z)| - (R^n - ۱)m \quad (۵۵)$$

چون نامساوی (۵۴) برقرار است، بنابراین (۵۵) خوش تعریف است.

حال، با ترکیب نامساوی‌های (۵۳) و (۵۵)، برای $|z| = ۱$ و $R > ۱$ داریم

$$k^{t+۱}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-۱}+۱}{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+۱}+۱}\right\}|p(Rz)-p(z)| \leq |q(Rz)-q(z)|-(R^n-۱)m$$

□

لم ۱۷.۲.۳ اگر $p(z)=a_\circ+\sum_{v=t}^{n}a_v z^v$ برای $t \geq ۱$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد و $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$ ، آنگاه

$$k^{t+۱}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-۱}+۱}{\left(\frac{R^t-۱}{R^n-۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+۱}+۱}\right\} \geq k^t \tag{۵۶}$$

برهان: برای $R > ۱$ و $۱ \leq t \leq n$ ، ادعا می‌کنیم:

$$\frac{R^t-۱}{R^n-۱} \leq \frac{t}{n} \tag{۵۷}$$

حال، برای اثبات (۵۷)، کافی است $R > ۱$ و $۱ \leq t \leq n-۱$ را در نظر بگیریم.

برای $R > ۱$ و $۱ \leq t \leq n-۱$ داریم

$$\begin{aligned}
&t(R^n-۱)-n(R^t-۱)\\
&= tR^n-nR^t+(n-t)\\
&= tR^t(R^{n-t}-۱)-(n-t)(R^t-۱)\\
&= (R-۱)\{tR^t(R^{n-t-۱}+R^{n-t-۲}+\ldots+۱)-(n-t)(R^{t-۱}+R^{t-۲}+\ldots+R+۱)\}\\
&\geq (R-۱)\{t(n-t)R^t-(n-t)tR^{t-۱}\}\\
&= t(n-t)(R-۱)^۲R^{t-۱}\\
&> \circ.
\end{aligned}$$

بنابراین برای $R > ۱$ و $۱ \leq t \leq n-۱$ ، بدست می‌آوریم

$$t(R^n-۱) > n(R^t-۱)$$

بنابراین، نامساوی (۵۷) حاصل می‌شود. از طرفی، نامساوی زیر را برای $t \geq ۱$ ، داریم

$$\frac{|a_t|k^t}{|a_\circ| - m} \leq \frac{n}{t} \tag{۵۸}$$

از ترکیب (۵۷) و (۵۸) بدست می آوریم

$$\frac{|a_t|k^t}{|a_\circ| - m} \leq \frac{R^n - ۱}{R^t - ۱}$$

واضح است نامساوی بالا، معادل نامساوی زیر است.

$$\left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right)\frac{|a_t|k^t}{|a_\circ| - m}(k - ۱) \leq (k - ۱)$$

بنابراین،

$$\left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right)\frac{|a_t|k^{t+۱}}{|a_\circ| - m} + ۱ \leq \left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right)\frac{|a_t|k^t}{|a_\circ| - m} + k$$

بنابراین، لم ۱۷.۲.۳ ثابت می‌شود. □

لم ۱۸.۲.۳ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آنگاه برای $R > ۱$ ،

$$|p(Rz) - p(z)| + |q(Rz) - q(z)| \leq (R^n - ۱)M(p, ۱) \tag{۵۹}$$

این لم منسوب به عزیز[۳] است.

قضیه ۱۹.۲.۳ اگر $p(z) = a_\circ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $t \geq ۱$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد و $m = \min_{|z|=k}|p(z)|$ ، آنگاه برای $R > ۱$ و $|z| = ۱$ ،

$$|p(Rz) - p(z)| \leq (R^n - ۱)\left\{\frac{۱ + \left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ| - m}k^{t+۱}}{۱ + k^{t+۱} + \left(\frac{R^t - ۱}{R^n - ۱}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ| - m}(k^{t+۱} + k^{۲t})}\right\} \times \{M(p, ۱) - m\}$$
(۶۰)

برهان: چون $p(z) = a_\circ + \sum_{v=t}^{n} a_v z^v$ برای $t \geq 1$ ، هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ ندارد، با استفاده از لم ۱۶.۲.۳ داریم

$$k^{t+1}\left\{\frac{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-1}+1}{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+1}+1}\right\}|p(Rz)-p(z)| \leq |q(Rz)-q(z)|-(R^n-1)m \qquad (61)$$

با اضافه کردن $|p(Rz)-p(z)|$ به طرفین نامساوی (۶۱) و ترکیب آن با لم ۱۸.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned}\left\{1+k^{t+1}\left(\frac{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t-1}+1}{\left(\frac{R^t-1}{R^n-1}\right)\frac{|a_t|}{|a_\circ|-m}k^{t+1}+1}\right)\right\}|p(Rz)-p(z)| \\ \leq |p(Rz)-p(z)|+|q(Rz)-q(z)|-(R^n-1)m \\ \leq (R^n-1)\{M(p,1)-m\}\end{aligned}$$

بنابراین، قضیه ثابت می‌شود. □

نکته ۲۰.۲.۳ اگر طرفین نامساوی (۶۰) را بر $R-1$ تقسیم کنیم و $R \longrightarrow 1$ ، آنگاه نامساوی (۴۶) حاصل می‌شود.

نکته ۲۱.۲.۳ اگر در نامساوی (۶۰)، $m = \circ$ ، آنگاه نامساوی (۴۷) حاصل می‌شود. بنابراین، قضیه ۱۹.۲.۳ بهبودی از قضیه ۱۰.۲.۳ می‌باشد.

۳.۳ بررسی مشتق s ام چند جمله‌ای $p(z)$ ، با توجه به موقعیت صفرهایش.

یادآوری ۱.۳.۳ در ابتدای فصل ۲ دیدیم، اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد، آنگاه برای $R > 1$ ،

$$M(p,R) \leq \frac{(1+R^n)}{2}M(p,1) \qquad (62)$$

حال در اینجا، سعی می‌کنیم نامساوی (۶۲) را به طور همزمان، هم برای چندجمله‌ای $p(z)$ و هم برای مشتق s ام آن به طوری که $0 \leq s < n$ ، تعمیم دهیم. برای این منظور به قضیه و لم‌های زیر احتیاج داریم.

قضیه گاوس — لوکاس: هر مجموعه محدب که شامل همه صفرهای یک چندجمله‌ای است، شامل تمام نقاط بحرانی آن نیز می‌باشد.

لم ۲.۳.۳ فرض کنیم $P(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $|z| \leq 1$ قرار می‌گیرد. اگر $p(z)$ چند جمله‌ای حداکثر از درجه n باشد، به‌طوری‌که

$$|p(z)| \leq |P(z)|, \qquad |z| = 1 \tag{۶۳}$$

آنگاه برای $0 \leq s < n$،

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \left|P^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| \geq 1. \tag{۶۴}$$

برهان: با استفاده از نامساوی (۶۳) و با به‌کار بردن اصل ماکزیمم قدرمطلق در تابع $\frac{p(z)}{P(z)}$،

$$|p(z)| \leq |P(z)|, \qquad |z| \geq 1 \tag{۶۵}$$

بنابراین چند جمله‌ای

$$p(z) - \lambda P(z)$$

برای هر λ به طوری که $|\lambda| > 1$ ، هیچ صفری در $|z| > 1$ ندارد.

با استفاده از قضیه گاوس—لوکاس واضح است، چند جمله‌ای

$$p^{(s)}(z) - \lambda P^{(s)}(z), \qquad 1 \leq s < n$$

برای هر λ به طوری که $|\lambda| > ۱$ ، هیچ صفری در $|z| > ۱$ ندارد، بنابراین

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \left|P^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| > ۱$$

از این‌رو

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \left|P^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| \geq ۱, \quad ۱ \leq s < n$$

و به این ترتیب اثبات لم ۲.۳.۳ کامل می‌شود. □

لم ۳.۳.۳ اگر $p(z)$ چند جمله‌ای از درجه n باشد و

$$q(z) = z^n \overline{p(\frac{۱}{\overline{z}})}$$

آنگاه برای $۰ \leq s < n$

$$\left|p^{(s)}(z)\right| + \left|q^{(s)}(z)\right| \leq \left\{\left|\frac{d^s}{dz^s}(۱)\right| + \left|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right|\right\} M(p,۱), \qquad |z| \geq ۱ \qquad (۶۶)$$

برهان: با در نظر گرفتن چند جمله‌ای

$$t(z) = p(z) - \lambda M(p,۱) \qquad |\lambda| > ۱$$

که حداکثر از درجه n است، تمام صفرهای چند جمله‌ای

$$T(z) = z^n \overline{t(\frac{۱}{\overline{z}})} = q(z) - \overline{\lambda} M(p,۱) z^n,$$

در $|z| \leq ۱$ قرار دارد و

$$|t(z)| \leq |T(z)| \qquad |z| = ۱$$

بنابراین با به‌کار بردن لم ۲.۳.۳ در چند جمله‌ای $t(z)$ و $T(z)$ برای $۰ \leq s < n$ و $|\lambda| > ۱$ ،

$$\left|p^{(s)}(z) - \lambda M(p,۱)\frac{d^s}{dz^s}(۱)\right| \leq \left|q^{(s)}(z) - \overline{\lambda} M(p,۱)\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right|, \qquad |z| \geq ۱.$$

λ را طوری انتخاب می‌کنیم که،

$$|p^{(s)}(z)| - |\lambda| M(p,1) |\frac{d^s}{dz^s}(1)| \leq \left| |\lambda| M(p,1) |\frac{d^s}{dz^s}(z^n)| - |q^{(s)}(z)| \right|, \qquad |z| \geq 1. \quad (67)$$

با به‌کار بردن لم ۲.۳.۳ در چند جمله‌ای $q(z)$ و $z^n M(p,1)$ ، برای $0 \leq s < n$ داریم

$$\left|q^{(s)}(z)\right| \leq M(p,1) \left|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right|, \qquad |z| \geq 1,$$

حال با جایگذاری آن در نامساوی (۶۷) داریم

$$\left|p^{(s)}(z)\right| - |\lambda| M(p,1) \left|\frac{d^s}{dz^s}(1)\right| \leq |\lambda| M(p,1) \left|\frac{d^s}{dz^s}(z^n)\right| - \left|q^{(s)}(z)\right|, \qquad |z| \geq 1, |\lambda| > 1, 0 \leq s < n.$$

حال، اگر در نامساوی بالا، $|\lambda| \to 1$ ، نامساوی (۶۶) به‌دست می‌آید. □

لم ۴.۳.۳ اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد و $M(p,1) = 1$ ، آنگاه برای $1 \leq R \leq k^2$ داریم

$$M(p,R) \leq \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n.$$

لم فوق منسوب به عزیز و محمد[۲۲] [۶] است و نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = \left(\frac{z+k}{1+k}\right)^n$ برقرار است.

لم ۵.۳.۳ اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq 1$ نداشته باشد، آنگاه

$$|p(z)| \leq 1, \qquad |z| \leq 1$$

[۲۲] Q. G. Mohammad

برای $|z| \geq ۱$ و $s \geq ۱$ ایجاب می‌کند:

$$\left|p^{(s)}(z)\right| \leq \frac{n(n-۱)...(n-s+۱)}{(۱+k^s)}.$$

لم بالا منسوب به گویل و رحمان[۲۰] است.

از لم (۴.۳.۳) به سادگی می‌توان لم زیر را به‌دست آورد.

لم ۶.۳.۳ اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برا ی $k \geq ۱$ نداشته باشد، آنگاه برای $۰ \leq s < n$

$$M\left(p^{(s)}, ۱\right) \leq \left(\frac{۱}{۱+k^s}\right) M(p,۱) \left[\left\{\frac{d^s}{dx^s}(۱+x^n)\right\}_{x=۱}\right].$$

نتیجه حاصل، بهترین نتیجه ممکن و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = (z+k)^n$ برقرار است.

قضیه ۷.۳.۳ اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ برای $k \geq ۱$ نداشته باشد و $۰ \leq s < n$، آنگاه

اگر $R \geq k$

$$M\left(p^{(s)}, R\right) \leq \left(\frac{۱}{۲}\right) \left\{\frac{d^s}{dR^s}\left(R^n + k^n\right)\right\} \left(\frac{۲}{(۱+k)}\right)^n M(p,۱), \qquad (۶۸)$$

و اگر $۱ \leq R \leq k$ ،

$$M\left(p^{(s)}, R\right) \leq \left(\frac{۱}{R^s + k^s}\right) \left[\left\{\frac{d^s}{dx^s}(۱+x^n)\right\}_{x=۱}\right] \left(\frac{R+k}{۱+k}\right)^n M(p,۱). \qquad (۶۹)$$

تساوی در (۶۸)، برای چندجمله‌ای $p(z) = z^n + ۱$ با $k = ۱$ و $s = ۰$ ، و تساوی در (۶۹) برای چندجمله‌ای $p(z) = (z+k)^n$ با $s = ۱$ ، برقرار است.

برهان: فرض می‌کنیم چند جمله‌ای $P(z) = p(kz)$ ، آنگاه چند جمله‌ای

$$Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{۱}{\overline{z}}\right)}$$

دارای مشخصات

$$|P(z)| \leq |Q(z)|, \qquad |z| = 1$$

و تمام صفرهایش در $|z| \geq 1$ قرار دارد. بنابراین با به‌کار بردن لم ۲.۳.۳ در چند جمله‌ای $P(z)$ و $Q(z)$ برای $0 \leq s < n$ و $t \geq 1$،

$$\left|P^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left|Q^{(s)}(te^{i\theta})\right|. \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{70}$$

با استفاده از لم ۳.۳.۳ برای $t \geq 1$ و $0 \leq s < n$ داریم

$$\left|P^{(s)}(te^{i\theta})\right| + \left|Q^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left\{\frac{d^s}{dt^s}(1+t^n)\right\} M(P,1), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

و باترکیب نامساوی (۷۰) خواهیم داشت

$$\left|P^{(s)}(te^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{d^s}{dt^s}(1+t^n)\right\} M(P,1),$$

و این معادل است با

$$\left|p^{(s)}(kte^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{1}{2k^s}\right)\left\{\frac{d^s}{dt^s}(1+t^n)\right\} M(p,k).$$

آنگاه با استفاده از لم ۴.۳.۳ در نامساوی بالا

$$\left|p^{(s)}(kte^{i\theta})\right| \leq \left(\frac{1}{2k^s}\right)\left(\frac{2k}{1+k}\right)^n M(p,1)\left\{\frac{d^s}{dt^s}(1+t^n)\right\}, \tag{71}$$

بنابراین با فرض $kt = R$ در نامساوی (۷۱)

$$M\left(p^{(s)}, R\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{d^s}{dR^s}(R^n+k^n)\right\}\left(\frac{2}{1+k}\right)^n M(p,1),$$

که همان نامساوی (۶۸) می‌باشد.

با به‌کار بردن لم ۶.۳.۳ در چند جمله‌ای $p(Rz)$ برای $1 \leq R \leq k$ ، که هیچ صفری در $|z| < \frac{k}{R}$ نداشته باشد، آنگاه برای $0 \leq s < n$

$$M\left(p^{(s)}, R\right) \leq \left(\frac{1}{R^s+k^s}\right) M(p,R)\left[\left\{\frac{d^s}{dx^s}(1+x^n)\right\}_{x=1}\right],$$

با ترکیب نامساوی بالا و لم ۴.۳.۳، نامساوی (۶۹) به‌دست می‌آید. □

فصل ۴

نامساوی‌های L^p برای چند جمله‌ای‌ها

۱.۴

در این فصل، P_n را کلاس تمام چندجمله‌ای‌ها حداکثر از درجه n و $M_p(g,\rho)$ را L^p تابع g روی دایره‌ای به شعاع ρ و به مرکز مبدأ، می‌نامیم.

در این صورت، برای هر تابع تام φ و $r > 0$ و $0 < p < \infty$ ،

$$M_p(\varphi, r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

با استفاده از یک نتیجه کلاسیکی از هاردی [1] [۲۲]، $M_p(\varphi, r)$ یک تابع اکیداً صعودی از r است، مگر اینکه φ یک تابع ثابت باشد. اگر $r > 0$ و $p \longrightarrow \infty$ ، آنگاه

$$M_p(\varphi, r) \longrightarrow \max_{|z|=r} |\varphi(z)|$$

اگر و تنها اگر برای $r > 0$ ،

$$M(\varphi, r) := \max_{|z|=r} |\varphi(z)|$$

که همان، $M_\infty(\varphi, r)$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم، P_n کلاس تمام چندجمله‌ای‌ها حداکثر از درجه n باشد. اگر f متعلق به P_n باشد آنگاه

[1] G. H. Hardy

$f^*(z) := z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ نیز متعلق به P_n می‌باشد و برای $R > ۱$ و $p > ۰$ داریم

$$M_p(f,R) = R^n M_p(f^*, \frac{۱}{R}) \leq R^n M_p(f^*, ۱) = R^n M_p(f, ۱)$$

در نامساوی بالا، تساوی برقرار است، فقط اگر، f^* ثابت باشد.

بنابراین برای $۱ < R < \infty$ و $۰ < p \leq \infty$ ،

$$M_p(f,R) < R^n M_p(f,۱) \qquad (۰ < p \leq \infty \, , ۱ < R < \infty) \qquad (۲)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = cz^n$ برقرار است.

همچنین، اگر f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد و $۰ < p \leq \infty$ ، آنگاه

$$M_p(f',۱) \leq n M_p(f,۱) \qquad (۰ < p \leq \infty) \qquad (۳)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = cz^n$ برقرار است. که اثبات آن را در پیوست (۳) آورده‌ایم. اگر در نامساوی (۳)، $p = \infty$ ، آنگاه نامساوی (۳)، همان نامساوی برنشتاین است. زیگموند[۲][۳۰] نامساوی (۳) را برای $p \in [۱,\infty)$ و ارسطو[۳][۲] آن را برای حالت $۰ < p < ۱$ ، ثابت کرد.

قضیه ۱.۱.۴ اگر f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد، آنگاه

$$M_p(f',\rho) \leq n\rho^{n-۱} M_p(f,۱) \qquad (۰ < p \leq \infty \, , ۱ \leq \rho < \infty) \qquad (۴)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای $f(z) = cz^n$ برقرار است.

برهان: نامساوی (۴)، فوراً از (۲) و (۳) حاصل می‌شود. □

حال نشان می‌دهیم در (۴)، محدودیت روی ρ را می‌توان ساده‌تر نوشت. برای این منظور، به نکات زیر احتیاج داریم.

---

[۲] A. Zygmund
[۳] V. V. Arestov

فرض می‌کنیم

$$\mho_m(\rho) := \begin{pmatrix} 1 & \frac{m-1}{m\rho} & \cdots & \frac{1}{m\rho^{m-1}} & 0 \\ \frac{m-1}{m\rho} & 1 & \cdots & \frac{2}{m\rho^{m-2}} & \frac{1}{m\rho^{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m\rho^{m-1}} & \frac{2}{m\rho^{m-2}} & \cdots & 1 & \frac{m-1}{m\rho} \\ 0 & \frac{1}{m\rho^{m-1}} & \cdots & \frac{m-1}{m\rho} & 1 \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

حال، دترمینان ماتریس، یعنی $det\mho_m(\rho)$ را در نظر می‌گیریم که یک چندجمله‌ای از $\frac{1}{\rho}$ است و برای $0 < \rho < \infty$ ، یک تابع پیوسته از ρ می‌باشد.

نکته ۲.۱.۴ فرض می‌کنیم $\rho_m = \rho_{m,m+1}$ ، بزرگترین ریشه‌ای باشد که در بازه $(0, 1)$ ، $det\mho_m(\rho) = 0$.

واضح است که $det\mho_m(\rho)$ یک چندجمله‌ای از درجه $m^2 - 1$ در $\frac{1}{\rho}$ است. برای m بزرگ، محاسبه ρ_m به طور دقیق، مشکل است. حال، وقتی m به بینهایت میل می‌کند باید برآوردی از ρ_m بدست آوریم. خواهیم دید، $det\mho_m(\rho)$ در بازه (ρ_m, ∞) ، مثبت اکید است.

حال در اینجا، سعی می‌کنیم قضیه ۱.۱.۴ را تعمیم دهیم. برای این منظور، به تعاریف ۸.۱.۲ و ۹.۱.۲ و لم ۱۰.۱.۲ و قضیه ۱۱.۱.۲ و لم ۱۲.۱.۲ از فصل (۲) و به لم‌های زیر احتیاج داریم.

لم ۳.۱.۴ اگر (c_{jk}) یک ماتریس هرمیتی معین مثبت $(n+1) \times (n+1)$ باشد، آنگاه برای $v = 1, ..., n$ داریم

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{v,1} & \cdots & c_{v,v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{v+1,v+1} & \cdots & c_{v+1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+1,v+1} & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+1,1} & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

این لم منسوب به فیشر[۴] [۱۴] است.

لم ۴.۱.۴ فرض کنیم P_n یک فضای خطی از تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n با نرم $||f||_\infty := \max_{|z|=1} |f(z)|$ باشد. همچنین، $t_0, ..., t_n$ ، $(n+1)$ عدد مختلط دلخواه باشند و تابعک

[۴] E. Fischer

خطی تعریف شده روی P_n را با L نمایش می‌دهیم به طوری که

$$f \longmapsto t_\circ a_\circ + ... + t_n a_n \qquad\qquad (f(z) := \sum_{v=\circ}^{n} a_v z^v)$$

بعلاوه، تعریف می‌کنیم $N := ||L||$ ، آنگاه

برای هر تابع محدب نانزولی φ روی $[\circ, \infty)$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{|\sum_{v=\circ}^{n} t_v a_v e^{iv\theta}|}{N}\right) d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|\sum_{v=\circ}^{n} a_v e^{iv\theta}|) d\theta \qquad (۵)$$

این لم منسوب به رحمان[٢٦] است.

قضیه ۵.۱.۴ فرض می‌کنیم برای $\circ < p < \infty$ ، $M_\infty(\varphi, r) := \max_{|z|=r} |\varphi(z)|$ و $M_p(\varphi, r)$ در (۱) صدق کند. بعلاوه، ρ_m بزرگترین ریشه‌ای باشد که در بازه $(\circ, ۱)$ ، $det\mho_m(\rho) = \circ$. برای هر چندجمله‌ای f حداکثر از درجه n و $۱ \le p \le \infty$ ، اگر داشته باشیم

$$\prod_{j=\circ}^{k-۱} \rho_{n-j} \le \rho < \infty$$

آنگاه

$$M_p(f^{(k)}, \rho) \le \frac{n!}{(n-k)!} \rho^{n-k} M_p(f, ۱) \qquad (k = ۱, ..., n) \qquad (٦)$$

برهان: با استفاده از قضیه ۱.۱.۴، نامساوی (٦) برای همه $p \in (\circ, \infty]$ و هر $\rho \ge ۱$ برقرار است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم اگر $p \in [۱, \infty]$ آنگاه نامساوی (٦) برای $\prod_{j=\circ}^{k-۱} \rho_{n-j} \le \rho < \infty$ نیز برقرار است.

ابتدا حالت $p = \infty$ و $k = ۱$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ρ_m در نکته ۲.۱.۴ صدق کند. در این صورت، ثابت خواهیم کرد اگر

$$q(z) = q_{n,\rho}(z) := \circ + z + ۲\rho z^۲ + ... + v\rho^{v-۱} z^v + ... + n\rho^{n-۱} z^n \qquad (\rho > \circ)$$

آنگاه برای هر چندجمله‌ای f حداکثر از درجه n داریم

$$||q \star f||_\infty := \max_{|z|=1} |(q \star f)(z)| \leq n\rho^{n-1} ||f||_\infty \qquad (\rho_n \leq \rho < 1) \qquad (7)$$

اگر f متعلق به P_n باشد، آنگاه $f^*(z) := z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ نیز متعلق به P_n می‌باشد. از طرفی، $||f^*||_\infty = ||f||_\infty$. بنابراین، نامساوی (۷) برقرار است، اگر و تنها اگر،

$$||q \star f^*||_\infty \leq n\rho^{n-1} ||f||_\infty \qquad (\rho_n \leq \rho < 1 \ , \ f \in P_n) \qquad (8)$$

بنابراین، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} Q_\rho(z) &:= \frac{1}{n\rho^{n-1}} q^*(z) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \cdot z^n q\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{v=0}^{n} v\rho^{v-1} z^{n-v} \\ &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{v=0}^{n} (n-v)\rho^{n-v-1} z^v \\ &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} (n\rho^{n-1} + \sum_{v=1}^{n} (n-v)\rho^{n-v-1} z^v) \\ &= 1 + \sum_{v=1}^{n} \frac{(n-v)\rho^{n-v-1}}{n\rho^{n-1}} \cdot z^v \end{aligned}$$

تا اینجا ثابت کردیم،

$$||Q_\rho \star f||_\infty \leq 1 \qquad (\rho_n \leq \rho < 1 \ , \ f \in P_n \ , \ ||f||_\infty \leq 1)$$

و چون $Q_\rho(0) = 1$ ، بنابراین طبق تعریف ۹.۱.۲، Q متعلق به کلاس B_n° است. بنابراین اگر

$$c_0 = c_0(\rho) := 1$$

و

$$c_{-v}(\rho) = c_v(\rho) := \frac{(n-v)\rho^{n-v-1}}{n\rho^{n-1}} \qquad (v = 1, ..., n)$$

آنگاه بنا بر لم ۱۰.۱.۲، کافی است نشان دهیم فرم هرمیتی

$$\varphi(x_0, ..., x_n) = \sum_{\mu, v=o}^{n} c_{v-\mu} x_\mu \bar{x}_v$$

برای $1 \leq \rho < \rho_n$ ، معین مثبت است.

برای این منظور، باید ثابت کنیم که کهادهای اصلی $det\mho_n(\rho)$ برای $1 \leq \rho < \rho_n$ ، مثبت اکید هستند.

حال، کار را با ارزیابی $det\mho_n(1)$ ، شروع می‌کنیم. برای این منظور،

$$n^{n+1}det\mho_n(1) := \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 1 & 0 \\ n-1 & n & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n & n-1 \\ 0 & 1 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

برای بدست آوردن این دترمینان، عملیات زیر را انجام می‌دهیم.

(۱) تفریق سطر $(j-1)$ ام از سطر j ام و جایگذاری آن در سطر $(j-1)$ ام، برای $j = n+1, n, ..., 2$.

(۲) جمع سطر دوم با سطر آخر و جایگذاری در سطر آخر.

(۳) جمع ستون آخر با ستون اول و جایگذاری در ستون اول.

(۴) بسط روی سطر آخر. داریم

$$n^{n+1}det\mho_n(1) = 2\Delta_1$$

به طوری که

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

می‌توان با بسط روی ستون اول، Δ_1 را به صورت

$$\Delta_1 = n\Delta_2$$

نوشت به طوری که

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

حال به منظور بدست آوردن $\Delta_۲$ ، برای $۲ \leq j \leq n-۱$ ، سطر اول را با سطر jام جمع و در سطر jام جایگزین می‌کنیم داریم

$$\Delta_۲ = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & \dots & ۲ & ۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۲ \end{vmatrix}_{(n-۱)\times(n-۱)} = ۲^{n-۲}$$

بنابراین،

$$n^{n+۱} det\mho_n(۱) = n ۲^{n-۱}$$

در نتیجه

$$det\mho_n(۱) = \frac{۲^{n-۱}}{n^n}.$$

یادآوری می‌کنیم که $\mho_n(\rho)$ یک ماتریس $(n+۱)\times(n+۱)$ است. برای $\ell = ۱,...,n+۱$ کهاد اصلی از مرتبه ℓ ، دترمینان ماتریس زیر است.

$$\mho_{n,\ell}(\rho) := \begin{pmatrix} ۱ & \frac{n-۱}{n\rho} & \dots & \frac{n-\ell+۲}{n\rho^{\ell-۲}} & \frac{n-\ell+۱}{n\rho^{\ell-۱}} \\ \frac{n-۱}{n\rho} & ۱ & \dots & \frac{n-\ell+۳}{n\rho^{\ell-۳}} & \frac{n-\ell+۲}{n\rho^{\ell-۲}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n-\ell+۲}{n\rho^{\ell-۲}} & \frac{n-\ell+۳}{n\rho^{\ell-۳}} & \dots & ۱ & \frac{n-۱}{n\rho} \\ \frac{n-\ell+۱}{n\rho^{\ell-۱}} & \frac{n-\ell+۲}{n\rho^{\ell-۲}} & \dots & \frac{n-۱}{n\rho} & ۱ \end{pmatrix}_{\ell\times\ell}$$

به سادگی می‌توان دید، $\mho_{n,n+۱}(\rho)$ همان $\mho_n(\rho)$ است. بنابراین،

$$det\mho_{n,n+۱}(۱) = det\mho_n(۱) = \frac{۲^{n-۱}}{n^n}.$$

با روش مشابهی که $det\mho_{n,n+۱}(۱)$ را محاسبه کردیم، می‌توان کهادهای $det\mho_{n,۱}(۱),...,det\mho_{n,n}(۱)$ را نیز محاسبه کرد. بنابراین،

$$det\mho_{n,\ell}(۱) = \frac{۲n-\ell+۱}{n^\ell}۲^{\ell-۲} \qquad (\ell = ۱,...,n+۱)$$

حال می‌دانیم $det\mho_{n,n+1}(\rho),...,det\mho_{n,1}(\rho)$ توابع پیوسته از ρ در بازه $(0,\infty)$ و همگی آنها برای $\rho=1$، مثبت اکید هستند. بنابراین، برای هر $\ell\in\{1,...,n+1\}$، یک عدد مثبت $\rho_{n,\ell}\in(0,1)$ وجود دارد به طوری که برای $\rho_{n,\ell}<\rho\le 1$ ،

$$det\mho_{n,\ell}(\rho)>0 \qquad , \qquad det\mho_{n,\ell}(\rho_n,\ell)=0.$$

ادعا می‌کنیم

$$\rho_{n,n+1}\ge\rho_{n,\ell} \qquad (\ell=1,...,n). \tag{9}$$

برای این منظور، اگر $\mho_n(\rho)$ را به صورت (c_{jk}) که یک ماتریس $(n+1)\times(n+1)$ است، بنویسیم، آنگاه

$$\begin{vmatrix} c_{v+1,v+1} & \cdots & c_{v+1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+1,v+1} & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \mho_{n,n+1-v}(\rho) \qquad (v=1,...,n).$$

حال، برای اثبات نامساوی (۹) از فرض خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم نامساوی (۹) برقرار نباشد، یعنی یک عدد صحیح $v\in\{1,...,n\}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\rho_{n,v}=\max_{1\le\ell\le n}\rho_{n,\ell}>\rho_{n,n+1} \tag{10}$$

بنابراین، به وسیله قسمت (۱) لم ۱۲.۱.۲ ، ماتریس $\mho_n(\rho)$ برای $\rho_{n,v}<\rho\le 1$ ، معین مثبت است. آنگاه، ترکیب لم ۳.۱.۴ با (۱۰) ایجاب می‌کند که

$$det\mho_{n,v}(\rho)det\mho_{n,n+1-v}(\rho)\ge det\mho_{n,n+1}(\rho) \qquad (\rho_{n,v}<\rho\le 1) \tag{11}$$

اگر $\rho\longrightarrow\rho_{n,v}$ ، آنگاه طرف چپ (۱۱) به صفر میل می‌کند در حالی که طرف راست آن به $det\mho_{n,n+1}(\rho_{n,v})$ میل می‌کند و این یک مقدار مثبت اکید است اگر، (۱۰) برقرار باشد، و این یک تناقض است. در نتیجه نامساوی (۹) برقرار است. بنابراین، ماتریس $\mho_n(\rho)$ برای $\rho_n<\rho\le 1$ ، نیمه معین مثبت است و به وسیله قسمت (۲) لم ۱۲.۱.۲ ، همه کهادهای اصلی $\mho_n(\rho)$ برای $\rho_n<\rho\le 1$، نامنفی است. از طرفی، به وسیله پیوستگی، برای $\rho=\rho_n$ نیز، کهادهای اصلی $\mho_n(\rho)$

نامنفی است. حال با به کار بردن دوباره قسمت (۲) لم ۱۲.۱.۲، ماتریس $\mho_n(\rho)$ برای $\rho_n \leq \rho \leq 1$ ، نیمه معین مثبت است. با استفاده از قضیه ۱۱.۱.۲، برای $\rho_n \leq \rho \leq 1$ نتیجه می‌شود که

$$M_\infty(f', \rho) \leq n\rho^{n-1} M_\infty(f, 1) \tag{۱۲}$$

در نتیجه اثبات نامساوی (۶) برای $p = \infty$ و $k = 1$ کامل می‌شود.

حال، حالتی را که $p \in [1, \infty)$ و $\rho \in [\rho_n, 1]$ باشد را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$t_v := v\rho^{v-1} \qquad\qquad (v = 0, 1, ..., n)$$

آنگاه تابعک خطی L روی فضای خطی P_n متشکل از تمام چندجمله‌ای‌های f حداکثر از درجه n، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f \longmapsto t_0 a_0 + ... + t_n a_n \qquad\qquad (f(z) := \sum_{v=0}^{n} a_v z^v)$$

به وسیله (۱۲)، نرم $||L||$ از این تابعک، $n\rho^{n-1}$ است. لم ۴.۱.۴ با $N = n\rho^{n-1}$ نشان می‌دهد اگر $k = 1$ ، آنگاه (۶) برای $p \in [1, \infty)$ برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم (۶) برای $k = 2, ...$ نیز برقرار است.

فرض می‌کنیم $1 \leq p < \infty$ ، می‌دانیم

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\rho_n e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq n\rho_n^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

از طرفی، با به کار بردن نامساوی (۶) برای حالت $k = 1$ و چندجمله‌ای $f'(\rho_n z)$ که یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $(n-1)$ است، به جای چندجمله‌ای f، و برای $\rho_{n-1} \leq \rho < \infty$ داریم

$$\begin{aligned}\rho_n\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(\rho_n\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} &\leq (n-1)\rho^{n-2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\rho_n e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq n(n-1)\rho_n^{n-1}\rho^{n-2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

بنابراین، برای هر $p \in [1, \infty)$ ، اگر $\rho_n\rho_{n-1} \leq \rho < \infty$ ، آنگاه نامساوی زیر برقرار است.

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq n(n-1)\rho^{n-2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \tag{۱۳}$$

بنابراین، اثبات نامساوی (٦) برای حالت $k=۲$ و $۱ \leq p < \infty$ کامل می‌شود. فرض می‌کنیم در (۱۳)، $p \longrightarrow \infty$ ، آنگاه نامساوی (٦) برای حالت $p=\infty$ نیز برقرار می‌شود. با تکرار روش فوق، نامساوی (٦) برای $k>۲$ و $p \in [۱,\infty]$ ، برقرار می‌شود. □

نکته ٦.۱.۴ در قضیه ۵.۱.۴ شرط $۱ \leq p \leq \infty$ ، یک شرط لازم است. زیرا، در غیر این صورت، برای $p>۰$ ، اگر $p \longrightarrow ۰$ ، آنگاه

$$M_p(\varphi,r) \longrightarrow \exp\left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|\varphi(re^{i\theta})|d\theta\right)$$

حال، تعریف می کنیم

$$M_\circ(\varphi,r) := \exp\left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|\varphi(re^{i\theta})|d\theta\right) \qquad (\circ < r < \infty)$$

با استفاده از قضیه ینسن [5]، یعنی

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|e^{i\theta}-a|d\theta = \begin{cases} \circ & |a| \leq ۱ \\ \log|a| & |a| > ۱ \end{cases}$$

می‌توان نشان داد اگر f یک چندجمله‌ای به فرم $f(z) := a_m\prod_{\mu=۱}^{m}(z-z_\mu)$ باشد، آنگاه

$$\exp\left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta\right) = |a_m|\prod_{\mu=۱}^{m}\max\{|z_\mu|,۱\}$$

بنابراین،

$$M_\circ(f,۱) = |a_m|\prod_{\mu=۱}^{m}\max\{|z_\mu|,۱\}$$

حال، تعریف می کنیم $f(z) := (z-۱)^n$. آنگاه، با استفاده از تساوی بالا، بدست می آوریم

$$M_\circ(f,۱) = ۱$$

حال، با روش مشابهی بدست می آوریم

$$M_\circ(f',\rho) = n\rho^{n-۱}\prod_{v=۱}^{n-۱}\max\{\rho^{-۱},۱\} = n \qquad (\circ < \rho < ۱)$$

---

[5] Jensen

بنابراین،

$$M_\circ(f',\rho)=nM_\circ(f,1) \qquad (0<\rho<1)$$

در نتیجه، نامساوی (۶) برای $p\in[0,1)$ برقرار نیست.

نکته ۷.۱.۴ قضیه ۵.۱.۴، تعمیمی از قضیه ۱.۱.۴ می‌باشد.

نکته ۸.۱.۴ فرض کنیم $f(z):=z^n+z^{n-1}$. آنگاه

$$M_\infty(f,1)=2$$

و

$$M_\infty(f^{(k)},\rho)=\frac{n!}{(n-k)!}\rho^{n-k}+\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\rho^{n-k-1} \qquad (k=1,\dots,n-1)$$

بنابراین برای $0\le\rho<1-\frac{k}{n}$،

$$M_\infty(f^{(k)},\rho)>\frac{n!}{(n-k)!}\rho^{n-k}M_\infty(f,1)$$

این نشان می‌دهد که $\prod_{j=0}^{k-1}\rho_{n-j}$ نمی‌تواند کوچکتر از $1-\frac{k}{n}$ باشد.

قضیه ۹.۱.۴ برای هر چندجمله‌ای $f(z):=\sum_{v=0}^{n}a_vz^v$ حداکثر از درجه n و $k=1,\dots,n$، اگر $\rho\ge 1-\frac{k}{n}$، آنگاه

$$\{M_2(f^{(k)},\rho)\}^2+\left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^2\rho^{2n-2k}\sum_{v=0}^{k-1}|a_v|^2\le\left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^2\rho^{2n-2k}\{M_2(f,1)\}^2 \quad (14)$$

این نامساوی برای هر $\rho < ۱ - \frac{k}{n}$ برقرار نیست. از طرفی، ضریب $\sum_{v=۰}^{k-۱} |a_v|^۲$ نمی‌تواند با عدد بزرگتری جایگزین شود. به ویژه، برای $k = ۱$ ، نامساوی (۱۴) به شکل زیر است.

$$M_۲(f', \rho) \le n\rho^{n-۱}\sqrt{\{M_۲(f, ۱)\}^۲ - |a_۰|^۲} \qquad (\rho \ge ۱ - \frac{۱}{n})$$

برهان: می‌توان چندجمله‌ای f را به صورت زیر نوشت:

$$f(z) = \sum_{\mu=۰}^{n} a_{n-\mu} z^{n-\mu}$$

آنگاه

$$f^{(k)}(z) = \sum_{\mu=۰}^{n-k} \frac{(n-\mu)!}{(n-k-\mu)!} a_{n-\mu} z^{n-k-\mu}$$

در نتیجه،

$$\{M_۲(f^{(k)}, \rho)\}^۲ = \sum_{\mu=۰}^{n-k} \left\{\frac{(n-\mu)!}{(n-k-\mu)!}\right\}^۲ |a_{n-\mu}|^۲ \rho^{۲(n-k-\mu)}$$
$$= \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \sum_{\mu=۰}^{n-k} \left\{\frac{(n-\mu)!}{(n-k-\mu)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!}\right\}^۲ |a_{n-\mu}|^۲ \rho^{۲(n-k-\mu)}$$

اکنون، می‌نویسیم

$$\frac{(n-\mu)!}{(n-k-\mu)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{\prod_{\lambda=۰}^{\mu-۱}(n-k-\lambda)}{\prod_{\lambda=۰}^{\mu-۱}(n-\lambda)} = \prod_{\lambda=۰}^{\mu-۱} \left(۱ - \frac{k}{n-\lambda}\right) \le \left(۱ - \frac{k}{n}\right)^n$$

بنابراین،

$$\left\{\frac{(n-\mu)!}{(n-k-\mu)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!}\right\}^۲ \rho^{۲(n-k-\mu)} \le \rho^{۲(n-k)} \qquad (\frac{n-k}{n} \le \rho < \infty)$$

در نتیجه، اگر $\rho \ge ۱ - \frac{k}{n}$ ، آنگاه

$$\{M_۲(f^{(k)}, \rho)\}^۲ \le \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲(n-k)} \sum_{\mu=۰}^{n-k} |a_{n-\mu}|^۲$$

حال، اگر نامساوی بالا را در نامساوی (۱۴) جایگزین کنیم، بدست می‌آوریم

$$\{M_۲(f^{(k)}, \rho)\}^۲ \le \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲(n-k)} \sum_{\mu=۰}^{n-k} |a_{n-\mu}|^۲ + \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲(n-k)} \sum_{v=۰}^{k-۱} |a_v|^۲$$
$$= \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲(n-k)} \sum_{v=۰}^{n} |a_v|^۲$$

که همان نامساوی (٦)، برای حالت $p = ۲$ می‌باشد. بنابراین، برای $\rho \geq ۱ - \frac{k}{n}$ ، به یک عبارت همیشه درست رسیدیم، پس نامساوی (۱۴) برای $\rho \geq ۱ - \frac{k}{n}$ برقرار می‌شود.

ادعا می‌کنیم، نامساوی (۱۴) برای $۰ < \rho < ۱ - \frac{k}{n}$ برقرار نیست. در حقیقت،

$$\left\{\frac{(n-۱)!}{(n-k-۱)!}\right\}^۲ \rho^{۲n-۲k-۲} > \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲n-۲k} \qquad (۰ < \rho < ۱ - \frac{k}{n})$$

برای این منظور، چندجمله‌ای f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم به طوری که $a_{n-۱} \neq ۰$ و $k \leq n - ۱$ ،

$$f(z) := a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + \sum_{v=۰}^{k-۱} a_v z^v$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}
\{M_۲(f^{(k)}, \rho)\}^۲ &+ \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲n-۲k} \sum_{v=۰}^{k-۱} |a_v|^۲ \\
&= \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ |a_n|^۲ \rho^{۲n-۲k} + \left\{\frac{(n-۱)!}{(n-k-۱)!}\right\}^۲ |a_{n-۱}|^۲ \rho^{۲n-۲k-۲} \\
&+ \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲n-۲k} \sum_{v=۰}^{k-۱} |a_v|^۲ \\
&> \left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲n-۲k} \{M_۲(f, ۱)\}^۲ \qquad (۰ < \rho < ۱ - \frac{k}{n})
\end{aligned}$$

می‌دانیم، $\left\{\frac{n!}{(n-k)!}\right\}^۲ \rho^{۲n-۲k}$ ، ضریب $\sum_{v=۰}^{k-۱} |a_v|^۲$ در نامساوی (۱۴) می‌باشد. برای اینکه نشان دهیم، نمی‌توان آن را با مقدار بزرگتری جایگزین کرد، هر چندجمله‌ای به فرم $f(z) := a_n z^n + \sum_{v=۰}^{k-۱} a_v z^v$ را با $\sum_{v=۰}^{k-۱} |a_v| > ۰$ در نظر می‌گیریم. □

نکته ۱۰.۱.۴ قضیه ۹.۱.۴، کاربردی از قضیه ۵.۱.۴ می‌باشد.

قضیه ۱۱.۱.۴ اگر f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد و هیچ صفری در $|z| < ۱$ نداشته باشد و $f_۰(z) := ۱ + z^n$ ، آنگاه

$$M_p(f', ۱) \leq \frac{n}{M_p(f_۰)} M_p(f, ۱) \qquad (۰ < p \leq \infty) \qquad (۱۵)$$

به طوری که برای هر $p \in (0,\infty)$ ،

$$M_p(f_0) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{in\theta}|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}p+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{16}$$

(۱۶) برقرار است زیرا

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \qquad (\Re p > 0 \ , \ \Re q > 0)$$

تساوی در (۱۵) برای $f(z) := c(1+z^n)$ برقرار است. این لم منسوب به لکس [۲۳] است. برای حالت $p=\infty$ ، نامساوی (۱۵)، به طور مستقل توسط پولیا[۶] و زگو[۷]، با شرط اینکه تمام صفرهای f روی دایره واحد قرار بگیرد، ثابت شد. بعداً لکس، نامساوی (۱۵) را برای $0 < p < \infty$ ، با شرط اینکه f، داخل دایره واحد هیچ صفری نداشته باشد، ثابت کرد. همچنین، برای $1 \le p < \infty$ ، نامساوی (۱۵)، توسط بروجن [۸][۱۱] ثابت شد. و برای $0 < p < 1$ ، رحمان و شمیسر، نامساوی (۱۵) را ثابت کردند.

قضیه ۱۲.۱.۴ اگر f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد و هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد و $f_0(z) := 1+z^n$ ، آنگاه

$$M_p(f',\rho) \le \frac{n}{M_p(f_0)}\rho^{n-1}M_p(f,1) \qquad (0 < p \le \infty \ , \ 1 \le \rho < \infty) \tag{17}$$

تساوی برای $f(z) := c(1+z^n)$ برقرار است.

برهان: از ترکیب (۲) و (۱۵)، قضیه ثابت می‌شود.

[۶] G. Pólya
[۷] G. Szego
[۸] N. G. De Bruijn

قضیه ۱۳.۱.۴ اگر f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد و ρ_n بزرگترین ریشه در بازه $(۰, ۱)$ باشد به طوری که $det\mho_n(\rho) = ۰$ ، آنگاه

$$M_p(f', \rho) \le n\rho^{n-۱} M_p(f, ۱) \qquad (۱ \le p \le \infty \ , \ \rho_n \le \rho < \infty) \qquad (۱۸)$$

این قضیه حالت خاصی از قضیه ۵.۱.۴ می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر در قضیه ۵.۱.۴، $k = ۱$ ، آنگاه قضیه ۱۳.۱.۴ حاصل می‌شود. نامساوی (۱۸) نه تنها برای $۱ \le \rho$[۹]، بلکه برای $\rho \ge \rho_n$ به طوری که $\rho_n < ۱$ ، نیز برقرار است.

حال در اینجا، یک سوأل مطرح می‌شود، آیا در نامساوی‌های (۱۷) و (۱۸) می‌توان شرط $\rho \ge ۱$ را با شرط $\rho < ۱$ ، جایگزین کرد؟

جواب این سوأل به p بستگی دارد.

نامساوی (۱۷) را در نظر می‌گیریم. برای $p = \infty$ ، جواب منفی است زیرا

$$f(z) := \left(\frac{۱ + z}{۲}\right)^n$$

برای این چندجمله‌ای،

$$M_\infty(f, ۱) = ۱ \qquad , \qquad M_\infty(f', \rho) = \frac{n}{۲}\left(\frac{۱ + \rho}{۲}\right)^{n-۱}$$

بنابراین برای $\rho \in (۰, ۱)$ ، اگر $n \ge ۲$ ،

$$M_\infty(f', \rho) = \frac{n}{۲} M_\infty(f, ۱) \left(\frac{۱ + \rho}{۲}\right)^{n-۱} > \frac{n}{۲} M_\infty(f, ۱)\rho^{n-۱}$$

در نتیجه، برای حالت $p = \infty$ ، نامساوی (۱۷) برای هر $\rho \in (۰, ۱)$ برقرار نیست، حتی اگر چندجمله‌ای f ، تمام صفرهایش را روی دایره واحد بگیرد.

نکته ۱۴.۱.۴ فرض کنیم $f(z) := c\prod_{v=۱}^{n}(z - e^{i\theta_v})$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش را روی دایره واحد می‌گیرد. آنگاه

$$z^n \overline{f\left(\frac{۱}{\bar{z}}\right)} = z^n \bar{c} \prod_{v=۱}^{n} \left(\frac{۱}{z} - e^{-i\theta_v}\right)$$

---

[۹] قضیه ۱.۱.۴

$$= \bar{c}\prod_{v=1}^{n}(1-e^{-i\theta_v}z)$$
$$= \frac{\bar{c}\prod_{v=1}^{n}(1-e^{-i\theta_v}z)}{c\prod_{v=1}^{n}(z-e^{i\theta_v})}\cdot c\prod_{v=1}^{n}(z-e^{i\theta_v})$$
$$= (-1)^n\cdot\frac{\bar{c}}{c}\cdot e^{-i\sum_{v=1}^{n}\theta_v}\cdot c\prod_{v=1}^{n}(z-e^{i\theta_v}) = e^{i\gamma}f(z).$$

بنابراین، اگر f یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش را روی دایره واحد می‌گیرد، آنگاه یک عدد حقیقی γ وجود دارد به طوری که $z^n\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \equiv e^{i\gamma}f(z)$. حال، اگر چندجمله‌ای $f(z) := \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ ، تمام صفرهایش را روی دایره واحد بگیرد، آنگاه

$$\bar{a}_0 z^n + ... + \bar{a}_k z^{n-k} + ... + \bar{a}_n \equiv e^{i\gamma}(a_n z^n + ... + a_{n-k}z^{n-k} + ... + a_0)$$

بنابراین برای $k = 0, 1, ..., n$ ، $a_{n-k} = e^{-i\gamma}\bar{a}_k$. به ویژه،

$$|a_{n-k}| = |a_k| \qquad (k = 0, 1, ..., n) \qquad (19)$$

حال، نامساوی (۱۸) را در نظر می‌گیریم. برای $p = 2$، حداقل برای چندجمله‌ای‌هایی که تمام صفرهایشان را روی دایره واحد می‌گیرند، جواب سؤال مثبت می‌باشد. برای اثبات آن به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۱۵.۱.۴ اگر $u(x) := x^2 4^{1-x} + (1-x)^2 4^x$ ، آنگاه برای $0 \le x \le 1$ ، $u(x) \le 1$.

این لم منسوب به قاضی [۱۰] و رحمان[۲۵] است.

قضیه ۱۶.۱.۴ اگر $f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد به طوری که در (۱۹) صدق کند، آنگاه برای $\rho \ge 2^{-\frac{1}{n}}$ داریم

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \le \frac{1}{2}n^2\rho^{2n-2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^2 d\theta \qquad (20)$$

---
[10] M. A. Qazi

در این قضیه، حداقل در موردی که n زوج است، شرط روی ρ را نمی‌توان ساده‌تر نمود.

برهان: فرض می‌کنیم ضرایب چندجمله‌ای $f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ در شرط $|a_{n-k}| = |a_k|$ صدق کند. آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta &= \sum_{k=0}^{n} k^2|a_k|^2\rho^{2k-2} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)^2|a_{n-k}|^2\rho^{2n-2k-2}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)^2|a_k|^2\rho^{2n-2k-2}\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n} k^2|a_k|^2\rho^{2k-2} + \sum_{k=0}^{n}(n-k)^2|a_k|^2\rho^{2n-2k-2}\right\}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2\rho^{2k}+(n-k)^2\rho^{2n-2k}}{2\rho^2}|a_k|^2\\ &\leq \frac{1}{2}n^2\rho^{2n-2}\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2 = \frac{1}{2}n^2\rho^{2n-2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^2\,d\theta\end{aligned}$$

حال برای $\rho > 0$،

$$k^2\rho^{2k}+(n-k)^2\rho^{2n-2k} \leq n^2\rho^{2n} \qquad (k=1,\dots,n-1) \tag{21}$$

ρ_n^* را کوچکترین عدد مثبتی می‌گیریم که نامساوی (۲۱) برای هر $\rho \geq \rho_n^*$ و هر $k \in \{1,\dots,n-1\}$ برقرار باشد.

برای $n \geq 2$ و هر $k \in \{1,\dots,n-1\}$، تعریف می‌کنیم

$$h(\rho,n,k) := k^2\rho^{2k}+(n-k)^2\rho^{2n-2k}-n^2\rho^{2n}$$

به وسیله قاعده علامات دکارت، معادله $h(\rho,n,k)=0$ در بازه $(0,\infty)$، نمی‌تواند بیشتر از یک ریشه داشته باشد. اگر $0<\rho<1$ ، آنگاه

$$\left\{k^2\rho^{2k}+(n-k)^2\rho^{2n-2k}\right\}-n^2\rho^{2n} \geq \left\{2k(n-k)-n^2\rho^n\right\}\rho^n$$

بنابراین برای $0<\rho<1$ ، $h(\rho,n,k)>0$. از طرفی،

$$h(1,n,k) = -2k(n-k) < 0$$

بنابراین، به وسیله قضیه مقدار میانی، معادله $h(\rho, n, k) = 0$ در بازه $(0, 1)$، دقیقاً یک ریشه مثبت دارد. این ریشه را با $\eta_{n,k}$ یا η_k نمایش می‌هیم. بنابراین

$$k^2\rho^{2k} + (n-k)^2\rho^{2n-2k} \leq n^2\rho^{2n} \qquad (\eta_k \leq \rho < \infty) \qquad (22)$$

ادعا می‌کنیم

$$\eta_k = \eta_{n,k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (k = 1, ..., n-1) \qquad (23)$$

اگر نشان دهیم نامساوی (۲۱) برای $\rho = 2^{-\frac{1}{n}}$ برقرار است، نامساوی (۲۲) ثابت می‌شود. بنابراین برای $k = 1, ..., n-1$،

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 4^{1-\left(\frac{k}{n}\right)} + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 4^{\frac{k}{n}} \leq 1$$

با استفاده از لم ۱۵.۱.۴، قضیه ثابت می‌شود. □

نکته ۱۷.۱.۴ شرط $\rho \geq 2^{-\frac{1}{n}}$ در قضیه ۱۶.۱.۴، یک شرط لازم است زیرا اگر چندجمله‌ای $f(z) := z^{\frac{n}{2}}$ در شرط $f(z) \equiv z^n f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv z^n \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ صدق کند و n یک عدد طبیعی زوج باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = 1 \qquad , \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{n^2}{4}\rho^{n-2}$$

چون، برای هر $\rho \in (0, 2^{-\frac{1}{n}})$،

$$\frac{n^2}{4}\rho^{n-2} > \frac{1}{2}n^2\rho^{2n-2}$$

بنابرین، نامساوی (۲۰) برای $\rho \in (0, 2^{-\frac{1}{n}})$ برقرار نیست.

فصل ۵

پیوست‌ها

۱.۵ پیوست (۱)

قضیه ۱.۱.۵ فرض کنیم P یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $|z| \leq ۱$ قرار بگیرد. بعلاوه، p یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد به طوری که

$$|p(z)| \leq |P(z)| \qquad (|z| = ۱)$$

آنگاه

$$|p(z)| < |P(z)| \qquad (|z| > ۱) \tag{۱}$$

و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) := e^{i\alpha}P(z)$ به طوری که $\alpha \in \mathbb{R}$، اتفاق می‌افتد.
به ویژه، اگر

$$|p(z)| \leq M \qquad (|z| = ۱)$$

آنگاه

$$|p(Re^{i\theta})| < MR^n \qquad (R > ۱\ ,\ ۰ \leq \theta < ۲\pi) \tag{۲}$$

و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) := Me^{i\alpha}z^n$ به طوری که $\alpha \in \mathbb{R}$، اتفاق می‌افتد.

برهان: اگر P روی $|z| = ۱$ صفری داشته باشد این صفر، صفر p نیز خواهد بود. بنابراین تابع $F(z) = \frac{p(z)}{P(z)}$ در $|z| \geq ۱$ تحلیلی است. از طرفی $|F(z)| \leq ۱$ برای $|z| = ۱$. بنابراین طبق اصل ماکزیمم قدرمطلق

$$|F(z)| < ۱ \qquad\qquad \forall\ z \quad s.t \quad |z| > ۱$$

در نتیجه

$$|p(z)| < |P(z)| \qquad\qquad \forall\ z \quad s.t \quad |z| > ۱$$

بنابراین، نامساوی (۱) حاصل می‌شود.

برای اثبات نامساوی (۲)، کافی است در نامساوی (۱) قرار دهیم

$$P(z) := Mz^n.$$

$\square$

نکته ۲.۱.۵ اگر p یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد و $۰ < \rho < ۱$ ، آنگاه برای چندجمله‌ای $p(\rho z)$ می‌توان نامساوی (۲) را به صورت زیر نوشت به طوری که $R = \frac{۱}{\rho}$.

$$|p(\rho R e^{i\theta})| < MR^n = M\rho^{-n}$$

بنابراین،

$$|p(e^{i\theta})| \leq \rho^{-n} \max_{|z|=۱} |p(\rho z)|$$

بنابراین،

$$\max_{|z|=\rho<۱} |p(z)| \geq \max_{|z|=۱} |p(z)|\rho^n$$

در نتیجه،

$$\max_{|z|=R>۱} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=۱} |p(z)|$$

که همان نامساوی برنشتاین می‌باشد.

قضیه ۳.۱.۵ فرض کنیم p یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد و برای $|z| = ۱$ داشته باشیم، $|p(z)| \leq M$ و $q(z) := z^n \overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ ، آنگاه

$$|p(z)| + |q(z)| < M(|z|^n + ۱) \qquad (|z| > ۱) \qquad (۳)$$

برهان: اگر p ثابت باشد حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم، p ثابت نباشد. تعریف می‌کنیم

$$P(z) := Me^{i\gamma} - p(z) \qquad (\forall\ \gamma \in \mathbb{R})$$

در این صورت، $P(z)$ هیچ صفری در دیسک واحد باز ندارد. به ویژه، $P(۰) \neq ۰$. تعریف می‌کنیم

$$Q(z) := z^n \overline{P\left(\frac{۱}{\bar{z}}\right)} = Me^{-i\gamma}z^n - q(z)$$

به طوری که یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n است که تمام صفرهایش را در داخل دیسک واحد بسته می‌گیرد. چون،

$$|P(z)| = |Q(z)| \qquad (|z| = ۱)$$

بنا بر نامساوی (۱) قضیه ۱.۱.۵،

$$|P(z)| \leq |Q(z)| \qquad (|z| > ۱)$$

بنابراین،

$$|p(z)| - M \leq |Me^{i\gamma} - p(z)| \leq |Me^{-i\gamma}z^n - q(z)| \qquad (|z| > ۱) \qquad (۴)$$

از طرفی،

$$|p(z)| = |q(z)| \leq M \qquad (|z| = ۱)$$

و

$$M = \max_{|z|=۱} |p(z)| = \max_{|z|=۱} |q(z)|$$

حال بنا بر نامساوی (۲) قضیه ۱.۱.۵، با جایگزینی q به جای p،

$$|q(z)| \leq |Me^{-i\gamma}z^n| \qquad\qquad (|z| > ۱)$$

در نتیجه، می‌توان γ را طوری انتخاب کرد که تساوی زیر برقرار باشد.

$$|Me^{-i\gamma}z^n - q(z)| = M|z|^n - |q(z)| \qquad\qquad (|z| > ۱) \qquad\qquad (۵)$$

با جایگذاری (۵) در (۴)،

$$|p(z)| - M \leq M|z|^n - |q(z)|$$

بنابراین،

$$|p(z)| + |q(z)| \leq M(۱ + |z|^n)$$

□

نتیجه ۴.۱.۵ فرض کنیم p یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد. بعلاوه، برای $|z| < ۱$ داشته باشیم $p(z) \neq ۰$ و همچنین، برای $|z| = ۱$ داشته باشیم، $|p(z)| \leq M$. آنگاه

$$|p(z)| \leq \frac{۱}{۲}M(|z|^n + ۱) \qquad\qquad (|z| > ۱) \qquad\qquad (٦)$$

برهان: چندجمله‌ای $q(z)$ از درجه n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$q(z) := z^n \overline{p\left(\frac{۱}{\overline{z}}\right)}$$

به طوری که تمام صفرهای آن در $|z| \leq ۱$ قرار می‌گیرد. حال، در نامساوی (۱) قضیه ۱.۱.۵، قرار می‌دهیم $P = q$ ، بدست می آوریم

$$|p(z)| \leq |q(z)| \qquad\qquad (|z| > ۱) \qquad\qquad (۷)$$

با استفاده از قضیه ۳.۱.۵ و نامساوی (۷)، برای $|z| > ۱$،

$$۲|p(z)| \leq |p(z)| + |q(z)| \leq M(|z|^n + ۱)$$

بنابراین،

$$|p(z)| \leq \frac{۱}{۲} M(|z|^n + ۱) \qquad (|z| > ۱)$$

□

حال، نتیجه زیر از نتیجه ۴.۱.۵، حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۱.۵ اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < ۱$ نداشته باشد، آنگاه برای $R > ۱$،

$$\max_{|z|=R>۱} |p(z)| \leq \frac{R^n + ۱}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)| \qquad (۸)$$

۲.۵ پیوست (۲)

لم ۱.۲.۵ فرض کنیم p یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $S := \{p(z) \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ ، آنگاه

$$p(z) - \frac{1}{n} zp'(z) + \zeta \frac{1}{n} p'(z) \in S \qquad (|z| \leq 1 \ , \ |\zeta| \leq 1) \qquad (9)$$

لم فوق در [۲۷] آمده است.

قضیه ۲.۲.۵ فرض کنیم p یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد و برای $|z| \leq 1$ داشته باشیم $|p(z)| \leq M$ ، آنگاه

$$|p'(z)| \leq \frac{n}{2} M \qquad (10)$$

برهان: اگر برای $|z| \leq 1$ داشته باشیم $|p(z)| \leq M$ و برای $0 < \rho < 1$ تعریف کنیم

$$p_\rho(z) := p(\rho z)$$

و فرض کنیم

$$S_\rho := \{p_\rho(z) \ : \ |z| \leq 1\}$$

به طوری که در دیسک محذوف $\{\omega \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |\omega| < M\}$ مشمول شده باشد. بنا بر (۹)، شعاع هر دیسکی که در S_ρ قرار می‌گیرد باید کمتر از $\frac{M}{2}$ باشد. بنابراین،

$$|p'_\rho(z)| < \frac{n}{2} M \qquad (|z| \leq 1)$$

حال، $\rho \longrightarrow 1$ ،

$$|p'(z)| \leq \frac{n}{2} M \qquad (|z| \leq 1)$$

□

حال، نتیجه زیر از قضیه ۲.۲.۵، حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۲.۵ فرض کنیم p یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < ۱$ نداشته باشد، آنگاه

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)| \tag{۱۱}$$

قضیه ۴.۲.۵ فرض کنیم p یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که تمام صفرهایش در $|z| < ۱$ قرار می‌گیرد، آنگاه

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)| \tag{۱۲}$$

برهان: تعریف می‌کنیم

$$q(z) := z^n \overline{P\left(\frac{۱}{\overline{z}}\right)}$$

در این صورت $q(z)$ در $|z| < ۱$ هیچ صفری ندارد. بنابراین، می‌توان $q(z)$ را در نامساوی (۱۰) جایگزین کرد، و برای $M = \max_{|z|=۱} |p(z)|$ داریم

$$|q'(z)| \leq \frac{n}{۲} M$$

بنابراین،

$$|np(z) - zp'(z)| \leq \frac{n}{۲} M \qquad (|z| = ۱)$$

حال، $z_\circ$ را یک نقطه روی دایره واحد در نظر می‌گیریم به طوری که $|p(z_\circ)| = \max_{|z|=1} |p(z)| = M$ ، آنگاه

$$nM - |p'(z_\circ)| \leq \frac{n}{2}M$$

بنابراین،

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq |p'(z_\circ)| \geq \frac{n}{2}M$$

در نتیجه

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

□

۳.۵ پیوست (۳)

لم ۱.۳.۵ فرض کنیم f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه m باشد و برای $\beta \in \mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم $a(\beta, m) := \max\{|\beta|, |m-\beta|\}$. آنگاه برای هر تابع نانزولی $\varphi : (\circ, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ، به طوری که $\psi(u) := \varphi(e^u)$ ، در بازه $(-\infty, \infty)$ محدب است، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(|e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) - \beta f(e^{i\theta})|\right) d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(a(\beta, m)|f(e^{i\theta})|\right) d\theta. \qquad (۱۳)$$

لم فوق در [۲۷] آمده است.

قضیه ۲.۳.۵ فرض کنیم t یک چندجمله‌ای مثلثاتی حداکثر از درجه n باشد، آنگاه

$$\left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t'(\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{۱}{p}} \leq n \left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t(\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{۱}{p}} \qquad (\circ < p < \infty) \qquad (۱۴)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای‌های $t(\theta) := ce^{i(n\theta+\alpha)}$ و $t(\theta) := c\cos(n\theta + \alpha)$ به طوری که $c \neq \circ$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، برقرار می‌شود.

برهان: واضح است $e^{in\theta}t(\theta) \equiv f(e^{i\theta})$ ، وقتی که f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $۲n$ باشد به طوری که برای هر $\theta \in \mathbb{R}$ ، داشته باشیم $|t(\theta)| = |f(e^{i\theta})|$. همچنین،

$$e^{in\theta}t'(\theta) = ie^{i\theta}f'(e^{i\theta}) - inf(e^{i\theta}) \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

بنابراین،

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t'(\theta)|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\theta}f'(e^{i\theta}) - nf(e^{i\theta})|^p d\theta \qquad (\circ < p < \infty)$$

با استفاده از لم ۱.۳.۵، برای $m = ۲n$ و $\beta = n$ و $\varphi(|x|) := |x|^p$ داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t'(\theta)|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |nt(\theta)|^p d\theta \qquad (۰ < p < \infty)$$

و این با نامساوی (۱۴)، معادل است. □

حال، نتیجه زیر از قضیه ۲.۳.۵، حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۳.۵ فرض کنیم f یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد، آنگاه

$$\left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{۱}{p}} \leq n\left(\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{۱}{p}} \qquad (۰ < p < \infty) \qquad (۱۵)$$

کتاب‌نامه

[1] N. C. Ankeny and T. J. Rivillin, On a theorem of S. Bernstein, Pacific J. Math., 5 (1955), 849-852.

[2] V. V. Arestov, On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives, Math. USSR Izv., 18 (1982), 1-17; Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Mat. 45 (1981), 3-22.

[3] A. Aziz, Inequalities for the derivative of a polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 89 (1983), 259-266.

[4] A. Aziz, Growth of polynmials whose zeros are within or outside a circle, Bull. Austral. Math. Soc. 35 (1987) 247-256.

[5] A. Aziz and Q. M. Dawood, Inequalities for a polynomial and its derivative, J. Approx. Theory, 54 (1988) 306-313.

[6] A. Aziz and Q. M Mohammad, Growth of polynomials with zeros outside a circle, proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 549-553.

[7] A. Aziz and N. A. Rather, New L^q inequalities for polynomials, J. Math. Ineq. Appl., 1 (1998), 177-191.

[8] A. Aziz and W. M. Shah, Inequalities for the polynomial and its derivative, Math. Inequal. Appl., 7 (3) (2004), 379-391.

[9] A. Aziz and B. A. Zargar, Inequalities for the polynomial and its derivative, Math. Inequal. Appl., 1(4) (1998), 543-550.

[10] S. Bernstein, Sur l' order de la meilleure approximation des fonctions continues pardes polynômes de degré donné, Mémoires de l' Académie Royale de Belgique, 4 (1912), 1-103.

[11] N. G. de Bruijn, Inequalities concerning polynomials in the complex domain, Nederl. Akad. Wetench. Proc. Ser. A, 50 (1997), 1265-1272; Indag. Math., 9(1947), 591-598.

[12] T. N. Chan and M. A. Malik, On Erdös- Lax theorem, Proc. Indian Acad. Sci., 92 (1983), 191-193.

[13] K. K. Dewan and A. Mir, On the maximum modulus of a polynomials and its derivatives, International J. Math. Sci., 16 (2005), 2641-2645.

[14] E. Fischer, Über den Hadamardschen Determinantensatz, Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), 32-40.

[15] C. Frappier, Q. I. Rahman and St. Ruscheweyh, New inequalities for polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 69-99.

[16] F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices, vol, I, Chelsea, New York, 1959.

[17] R. B. Gardner, N. K. Govil and S. R. Musukula, Rate of growth of polynomials not vanishing inside a circle, J. Inequal. Pure Appl. Math. 6 (2) (2005), 1-9.

[18] R. B. Gardner, N. K. Govil and A. Weems, Some results concerning rate of growth of polynomials, East J. Approx., 10 (2004), 301-312.

[19] N. K. Govil and G. Labelle, On Berstein's inequality, J. Math. Anal. Appl. 126 (1987), 494-500.

[20] N. k. Govil and Q. I. Rahman, Functions of exponential type not vanishing in a half plane and related polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969)., 501-517.

[21] N. k. Govil, Q. I. Rahman and G. Schmeisser, On the derivative of a polynomial, Illinois J. Math., 23 (1979), 319-329.

[22] G. H. Hardy, On the mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London Math. Soc., (2) 14 (1915), 269-277.

[23] P. D. Lax, Proof of a conjectuer of P. Erdös on the derivative of a polynomial., Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 509-513.

[24] M. A. Malik, On the derivative of a polynomial, J. London Math. Soc., 1 (1969) 57-60.

[25] M. A. Qazi, Q. I. Rahman, A question concerning a polynomial inequality and an answer, Nonlinear Analysis theory, Methods and Applications, 71 (2009), 2710-2716.

[26] Q. I. Rahman, Functions of exponential type, Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969), 295-309.

[27] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Analytic theory of polynomials, Oxford University press, 2002.

[28] M. Riesz, Über einen satz des Herrn Serge Bernstein, Acta math. 40 (1916), 337-347.

[29] P. Turán,Über die ableitung von polynomen, Compositio Math., 7 (1939), 89-95.

[30] A. Zygmund, A remark on conjugate series, Proc. London Math. Soc., (2) 34 (1932), 392-400.

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

اصل .... Principle

اکیداً .... Strictly

بهبود .... Refinement

تحلیلی .... Analytic

تعمیم .... Generalization

چندجمله‌ای .... Polynomial

درجه .... Degree

صفر(ریشه) .... Zero

صفر شدن .... Vanish

قدر مطلق .... Modulus

قطبی .... Polar

کران .... Bound

مبدأ .... Origin

مختلط .... Complex

مشتق .... Derivative

ناحیه .... Region

نامساوی .... Inequality

واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی

تحلیلی .... Analytic

دلخواه .... Arbitrary

کران .... Bound

مختلط .... Complex

محدب .... Convex

مشتق .... Derivative

معادل .... Equivalent

تخمین زدن .... Estimate

بهبود .... Improved

نامساوی .... Inequality

قدرمطلق .... Modulus

به‌دست آوردن .... Obtain

مبدأ .... Origin

قطبی .... Polar

چندجمله‌ای .... Polynomial

معین مثبت .... Positive definite

اصل .... Principle

تظریف .... Refinement

ناحیه .... Region

برعکس کردن .... Revers

اکیداً .... Strictly

بقدر کافی .... Sufficiently

صفر شدن .... Vanish

Abstract

One of the basic and impeliment theorem in complex analysis is maximum modulus principle. As maximum modulus principle, if the function $f(z)$ be analytic in a domain C and continuous in a closed domain $\bar{C}$, Then either $|f(z)| = constant$ or $|f(z)|$ attains maximum values only on the boundary of the domain.

Above principle is existential theorem, On the otherwords, it can't obtain one the way to achive maximum values.

In this thesis, we try obtain proximate for maximum modulus complex polynomial, with pay athention to zeros position.