

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار ، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی روش‌های مختلف نمودارهای کنترل کیفیت وصفی در محیط فازی

نگارنده: میترا مهدی پور

استادان راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی
دکتر عباس پرچمی

آذر ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم میترا مهدی پوربوزانی با شماره دانشجویی ۹۴۳۹۲۰۴ رشته آمار و کاربردها گرایش آمار ریاضی تحت عنوان بررسی روش های مختلف نمودارهای کنترل کیفیت وصفی در محیط فازی که در تاریخ ۹۶/۹/۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ مردود ☒ قبول (با درجه: <u>بسیار</u>)			
نوع تحقیق: ☐ نظری ☐ عملی			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر عباس پرچمی	استادیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمد آرشی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر احمد نزاکتی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی



تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم بہ:
آسان حقیقت
و آسان کہ وصالش رامی جویند و آسان کہ خود، عین
حقیقت اند
تقدیم بہ پیرو مردم

سپاس گزاری...

با سپاس از چهار وجود مقدس:
آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...
موهایشان سپید شد تا ما رو سپید شویم...
و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...
پدر مهربان و همیشه خندانم
مادرم که لحظه‌ای طاقت ندیدنش را هیچ ندارم
همسرم اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.
استادانم
شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه زندگیست.

میترا مهدی پور
آذر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **میترا مهدی پور** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار** علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی روش های مختلف نمودارهای کنترل کیفیت وصفی در محیط فازی**، تحت راهنمایی **محمدرضا ربیعی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

میترا مهدی پور

آذر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

کنترل فرآیند آماری مجموعه‌ای قدرتمند و توانا از ابزارهایی است که با کاهش تغییرپذیری، ثبات و بهبود در کارایی فرآیند را به همراه دارد. نمودارهای کنترل یکی از ابزارهای هفت‌گانه کنترل فرآیند آماری محسوب می‌شوند. هدف این پایان‌نامه توضیح دیدگاه نمودار کنترلی در محیط فازی هست. نمودارهای کنترل در محیط غیرفازی دو حالت محدود صفر و یک را در بر می‌گیرند و اطلاعات کامل و مناسبی در مورد فرآیند تولید در اختیار کاربر قرار نمی‌دهند؛ به همین دلیل در این پژوهش با به کارگیری کیفیت فازی به تعمیم نمودارهای وصفی کنترل کیفیت از جمله نمودارهای نسبت اقلام معیوب و تعداد اقلام معیوب و تعداد نقص‌ها در هر واحد بازرسی و نمودار متوسط تعداد نقص‌ها در محیط فازی پرداخته می‌شود. استفاده از نمودارهای کنترل فازی در مواقعی که درجه بی‌کیفیتی اقلام معیوب برای کاربر مساوی نباشد، مناسب است. نتایج و پاسخ‌های این تعمیم با استفاده از معیارهایی مانند مشخصه منحنی عملکرد و ARL در زمان ایجاد تغییر در میانگین و یا واریانس فرآیند با کنترل کیفیت معمولی مقایسه می‌شود.

کلمات کلیدی: نمودارهای کنترل کیفیت، محیط فازی، نمودار نسبت و تعداد اقلام معیوب، نمودار تعداد نقص‌ها و متوسط تعداد نقص‌ها در هر واحد بازرسی، توزیع پواسن دو جمله‌ای

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مهدی پور م.، ربیعی م.ر، (۱۳۹۵). نمودار تعداد اقلام معیوب با استفاده از درجه عدم انطباق. هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، بیرجند، دانشگاه بیرجند.
۲. ربیعی م.ر، مهدی پور م، پرچمی ع. (۱۳۹۶). نمودار تعداد نقص های تعمیم یافته در یک واحد بازرسی. دومین کنفرانس محاسبات نرم، گیلان، دانشگاه گیلان.

فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
ش	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم مربوط به نمودارهای کنترل کیفیت آماری
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ کلیات و مفاهیم اولیه
۲	۱.۲.۱ تعاریف اولیه
۲	۲.۲.۱ دلایل کلی استفاده از بهبود کیفیت
۳	۳.۱ برخی اصطلاحات مهم در مهندسی کیفیت
۳	۱.۳.۱ مدیریت کیفیت جامع
۴	۴.۱ نمودارهای کنترل کیفیت آماری
۶	۵.۱ اصول آماری نمودار کنترل
۶	۱.۵.۱ اصول اولیه
۷	۲.۵.۱ فاز اول نمودارهای کنترل
۸	۳.۵.۱ فاز دوم در نمودارهای کنترل
۸	۶.۱ مراحل تهیه نمودارهای کنترل
۸	۱.۶.۱ خطاهای آماری نمودارهای کنترل
۹	۷.۱ بررسی تصادفی بودن داده‌ها
۱۰	۸.۱ نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های وصفی
۱۰	۱.۸.۱ نمودار نسبت اقلام معیوب (نمودار p)
۱۳	۲.۸.۱ تابع مشخصه‌ی عملکرد و محاسبات مربوط به متوسط طول دنباله
۱۵	۳.۸.۱ نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب (نمودار np)
۱۷	۴.۸.۱ نمودار کنترل برای عدم انطباق‌ها
۲۲	۹.۱ نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های متغیر
۲۲	۱.۹.۱ نمودار کنترل برای میانگین (نمودار $\bar{X}$)

۲۳	۲.۹.۱	نمودار کنترل برای دامنه (نمودار R)
۲۶	۱۰.۱	کنترل کیفیت چند متغیره
۳۵	۲	مفاهیم فازی
۳۵	۱.۲	مقدمه
۳۶	۲.۲	مجموعه‌های فازی
۳۸	۳.۲	عملگرهای مجموعه‌ای
۴۰	۱.۳.۲	α برش‌ها
۴۱	۴.۲	اصل توسیع
۴۲	۵.۲	اعداد فازی
۴۲	۱.۵.۲	اعداد فازی LR
۴۵	۳	نمودار کنترل فازی تعداد و نسبت اقلام معیوب
۴۵	۱.۳	مقدمه
۴۶	۲.۳	کیفیت فازی
۴۷	۳.۳	نمودارهای کنترل کیفیت فازی
۵۳	۱.۳.۳	نمودار کنترل فازی نسبت اقلام معیوب (نمودار $\tilde{p}$)
۵۴	۲.۳.۳	نمودار کنترل فازی تعداد اقلام معیوب
۵۴	۳.۳.۳	کاربرد در خودروسازی
۶۵	۴	نمودار تعداد و متوسط نقص‌ها با استفاده درج عدم انطباق
۶۵	۱.۴	مقدمه
۶۶	۲.۴	نمودار کنترل $\tilde{c}$
۷۰	۱.۲.۴	کاربرد در قطعه سازی
۷۰	۲.۲.۴	دستگاه اندازه گیری سه بعدی
۷۰	۳.۲.۴	تلورانس‌های ابعادی
۷۱	۴.۲.۴	طول تلورانس
	۵.۲.۴	مقایسه نمودار تعداد نقص‌ها در محیط کلاسیک و فازی با استفاده
۷۷		از معیار OC
۷۹	۳.۴	نمودار $\tilde{u}$
۸۰	۱.۳.۴	کاربرد در قطعه‌سازی
۸۹	۴.۴	نتیجه‌گیری
۸۹	۵.۴	پیشنهادهای تحقیق
۹۱	آ	توزیع پوآسن دوجمله‌ای

فهرست تصاویر

۵	۱.۱	والتر شوهارت، دانشمند در زمینه فیزیک و آمار
۱۲	۲.۱	نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب اولیه برای داده‌های جدول ۱.۱
۱۳	۳.۱	حدود کنترل بازنگری شده
۱۶	۴.۱	حدود کنترل نمودار np
۱۹	۵.۱	حدود کنترل نمودار c برای مثال ۴.۱
۲۰	۶.۱	حدود کنترل نمودار c بازنگری شده برای مثال ۴.۱
۲۲	۷.۱	نمودار کنترل برای متوسط تعداد نقص‌ها
۲۵	۸.۱	نمودار R برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه
۲۶	۹.۱	نمودار $\bar{x}$ برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه
۳۰	۱۰.۱	حدود کنترل نمودار T^2
۳۶	۱.۲	پروفسور عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار
۳۷	۲.۲	نمودار تابع نشانگر
۳۹	۳.۲	عملگرهای مجموعه‌ای
۴۰	۴.۲	نمودار توابع عضویت مجموعه‌های فازی A ، A^1 و A^2
۴۲	۵.۲	نمودار تابع عضویت عدد فازی به طور تقریبی صفر
۴۳	۶.۲	نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن به طور تقریبی صفر
۵۶	۱.۳	نمودار $\bar{X}$ برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه
۵۶	۲.۳	نمودار R برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه
۵۸	۳.۳	نمودار $\bar{X}$ و برای ۴۰ نمونه
۵۸	۴.۳	نمودار R برای ۴۰ نمونه‌ی
۵۹	۵.۳	نمودار $\tilde{p}$ برای ۴۰ نمونه‌ی ۵تایی
۵۹	۶.۳	نمودار $\tilde{np}$ برای ۴۰ نمونه‌ی ۵تایی
۶۲	۷.۳	توضیح زیر شکل اختیاری برای اضافه شدن لیست شکل‌ها
۶۳	۸.۳	توضیح زیر شکل اختیاری برای اضافه شدن لیست شکل‌ها

۷۱		دستگاه اندازه‌گیری CMM	۱.۴
۷۱		حدود تolerانس	۲.۴
۷۳		نقشه قطعه پایه فیلتر	۳.۴
۷۴		نمودار کنترل T^2 هتلینگ	۴.۴
۷۵		نمودار $\bar{x}$ و S سه مشخصه توأم	۵.۴
۷۷		نمودار $\bar{c}$	۶.۴
۷۹		توضیح زیر شکل اختیاری برای اضافه شدن لیست شکل‌ها	۷.۴
۸۲		نمودار کنترل T^2 هتلینگ	۸.۴
۸۴		توضیح زیر شکل اختیاری برای اضافه شدن لیست شکل‌ها	۹.۴

فهرست جداول

۲.۱	محاسبات مربوط به تهیه‌ی منحنی OC یک نمودار نسبت اقلام معیوب با
۱۴	$n = 50, LCL = 0.3\%, UCL = 3.697\%$
۳.۱	داده‌های مربوط به مثال ۴.۱
۱.۱	داده‌های مربوط به حدود کنترل آزمایشی مثال ۲.۱
۴.۱	داده‌های مربوط به مثال ۵.۱
۵.۱	داده‌های مربوط به مثال ۶.۱
۶.۱	داده‌های مربوط به مثال ۷.۱
۱.۲	جدول عملگرهای مجموعه‌ای
۱.۳	قطر داخل رینگ‌های تولید شده
۲.۳	فاز دوم نمونه‌گیری رینگ‌های پیستون تولیدی
۳.۳	درجه عدم انطباق مشاهدات (فاز اول)
۴.۳	درجه عدم انطباق مشاهدات (فاز دوم)
۵.۳	خطای نوع دوم برای $ k $ مختلف
۱.۴	حدود تolerانس مشخصات اندازه‌گیری شده
۷.۴	خطای نوع دوم برای $ k $ مختلف
۸.۴	داده‌های مربوط به مثال ۱.۴
۹.۴	مشخصات فنی مشخصه‌های مورد بررسی
۱۰.۴	خطای نوع دوم برای $ k $ مختلف
۲.۴	داده‌های مربوط به مثال به سه مشخصه کیفیت قطعه تولید شده در کارخانه
۳.۴	مشخصات فنی سه مشخصه کیفیت مورد بررسی
۴.۴	داده‌های مربوط به مثال به سه مشخصه کیفیت قطعه تولید شده در کارخانه
۵.۴	درجه انطباق مشاهدات هر مشخصه
۶.۴	درجه انطباق مشاهدات هر مشخصه

فصل ۱

مفاهیم مربوط به نمودارهای کنترل کیفیت آماری

دیدگاه کنترل کیفیت آماری، مبحثی طولانی و پرکاربرد در بخش‌های تولیدی می‌باشد که در این فصل برحسب نیاز به بیان مفاهیمی از جمله نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های وصفی شامل نمودار نسبت اقلام معیوب، نمودار تعداد اقلام معیوب، نمودار تعداد نقص‌ها در یک واحد بازرسی، نمودار متوسط نقص‌ها در چند واحد بازرسی و نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های متغیر شامل نمودار $\bar{x}$ ، نمودار R به همراه مثال پرداخته می‌شود. در انتها نمودارهای کنترل چند متغیره به همراه یک مثال بیان می‌شود. تمامی خروجی‌های مثال‌ها با استفاده از نرم افزار R انجام شده است.

مطالب این فصل و مثال‌ها برگرفته از کتاب مونته‌گمری [۵] است.

۱.۱ مقدمه

اگر محصولی بخواهد مشخصات مشتریان خود را داشته باشد و موجب جلب نظر مخاطبین محصول قرار بگیرد باید به وسیله‌ی یک فرآیند پایدار یا تکرار پذیر تولید گردد. به این معنا که فرآیند تولید باید از تغییر پذیری حداقلی در حول مقدار هدف مشخصات کیفی محصول

برخوردار باشد. کنترل فرآیند آماری^۱ مجموعه‌ای قدرتمند و توانمند از ابزارهای حل مشکل است که در ایجاد تثبیت عملکرد فرآیند و بهبود کارایی آن از طریق کاهش تغییرپذیری، مفید واقع گردد.

از یک سو علم آمار مجموعه‌ای از مهارت‌های مفیدی است که می‌توانند در زمان تصمیم‌گیری در مورد یک فرآیند یا جامعه با استفاده از داده‌های بدست آمده از تجزیه و تحلیل نمونه‌ای که از جامعه انتخاب شده است مفید و قابل استفاده واقع گردند. شیوه‌های آماری نقش بسزایی در بهبود کیفیت برعهده دارند. این شیوه‌های پیاده‌سازی شده اصول مورد نیاز برای تهیه نمونه، انجام آزمون، ارزیابی و استفاده از داده‌های حاصل جهت کنترل و بهبود فرآیند تولید را ارائه می‌نمایند. همچنین، آمار زبانی است که مهندسان طراحی و توسعه، بخش‌های ساخت، تدارکات، مدیریت و سایر کارکنان یک سازمان از آن به عنوان زبان مکالمه درباره‌ی کیفیت استفاده می‌کنند.

۲.۱ کلیات و مفاهیم اولیه

۱.۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف کیفیت

یک محصول همیشه باید خواسته‌های افرادی را که از آن استفاده می‌کنند برآورده نماید، پس می‌توان کیفیت را

- شایستگی جهت استفاده
 - تطابق با نیازهای مشتریان
 - برآورده کردن نیازهای امروز و فردای مشتری
- تعریف نمود.

۲.۲.۱ دلایل کلی استفاده از بهبود کیفیت

- تنگ‌تر شدن عرصه‌ی رقابت
- افزایش هزینه‌های نیروی کار، انرژی، مواد اولیه
- مسئولیت در قبال محصول
- افزایش بهره‌وری و کاهش هزینه‌ها

¹Statistical Process Control (SPC)

۳.۱ برخی اصطلاحات مهم در مهندسی کیفیت

مشخصه‌ی کیفی هر محصولی از عناصری تشکیل گردیده است که آن‌ها همگی با هم شایستگی جهت استفاده از آن را تعیین می‌نمایند. مشخصه‌های کیفی ممکن است چند نوع باشند:

۱. مقیاس کیفی (وصفی): کیفیت کالا در مقیاس کیفی به صورت نظری و در قالب مرغوب یا نامرغوب ارزیابی و دسته‌بندی می‌شود. مثلاً عنوان می‌شود که رنگ کالا مطابق استاندارد نبوده و کالا نامرغوب است.

۲. مقیاس کمی: کیفیت در مقیاس کمی به صورت پیوسته اندازه‌گیری می‌شوند. به طور مثال طول، جرم و دمای کالای تولیدی، هر کدام به عنوان یک مشخصه کیفیت، می‌توانند به وسیله‌ی یک مقیاس کمی اندازه‌گیری شوند.

مهندسی کیفیت مجموعه‌ای از فعالیت‌های مهندسی، مدیریتی و عملیاتی است که یک شرکت جهت کسب اطمینان از اینکه این مشخصه‌های کیفی در سطوح موردنظر یا اسمی قرار دارند به کار برده می‌شود.

برای اغلب سازمان‌ها این یک امر مشکل و پرهزینه است که بتوانند محصولاتی با مشخصه‌های کیفی عرضه نمایند که عاری از هرگونه عیب باشند. دلیل اصلی این مشکل وجود تغییرپذیری در اینگونه مشخصه‌هاست. در هر محصول مقدار مشخصی تغییرپذیری وجود دارد و در نتیجه هیچ دو محصولی با یکدیگر یکسان نخواهند بود. اگر تغییرات در یک مشخصه کیفی محصول کم باشد آن‌گاه روی نظر مشتری اثر محسوسی ایجاد نخواهد کرد اما این تغییرات زیاد باشد دیگر محصول قابل قبول نخواهد بود. بنابراین، می‌توان بهبود کیفیت را کاهش در تغییرپذیری فرآیند و محصول تعریف نمود زیرا تغییرپذیری را می‌توان فقط از طریق اصول آماری توضیح داد. بدین علت روش‌های آماری کاربرد زیادی در فعالیت‌های بهبود کیفیت دارند.

هدف اصلی مهندسی کیفیت، کاهش سیستماتیک تغییرپذیری مشخصه‌های کیفی کلیدی محصول می‌باشد. در مراحل اولیه موقعی که فقط نمونه‌گیری جهت پذیرش استفاده می‌گردد درصد زیادی از محصولات با استانداردهای مورد نیاز انطباق نخواهند داشت. با به کارگیری کنترل فرآیند آماری، فرآیند یک حالت ثبات به خود می‌گیرد و تغییرپذیری آن کاهش می‌یابد. هرچند این کافی نیست که محصولات تولید شده فقط با خواسته‌های مورد نظر انطباق داشته باشند، ولی با کاهش بیشتر تغییرپذیری نه تنها می‌توان هزینه‌ی کیفیت را کاهش داد بلکه می‌توان سازمان را از یک موقعیت رقابتی بهتری برخوردار نمود.

۱.۳.۱ مدیریت کیفیت جامع

کیفیت، یک ماهیت چند گانه است. مرجع گول [۱۰]، هشت بعد برای آن تعریف می‌کند. این ابعاد کیفیت عبارتند از:

۱. عملکرد^۲ (آیا محصول می‌تواند وظیفه‌ی مورد نظر را انجام دهد؟)
۲. قابلیت اطمینان^۳ (هرچند وقت یک‌بار محصول خراب می‌شود؟)
۳. قابلیت دوام^۴ (چه مدت محصول دوام می‌آورد؟)
۴. قابلیت تعمیر پذیری^۵ (به چه سادگی می‌توان محصول را تعمیر کرد؟)
۵. زیبایی^۶ (محصول چگونه به نظر می‌رسد؟)
۶. ویژگی‌ها^۷ (محصول چه کارهایی انجام می‌دهد؟)
۷. انطباق با استانداردها (آیا محصول به طور دقیق همان‌گونه که مورد نظر طراح بوده است تولید گردیده؟)
۸. کیفیت درک شده (محصول یا شرکت از چه شهرتی برخوردار است؟)

۴.۱ نمودارهای کنترل کیفیت آماری

ابزار هفت گانه که در کنترل فرآیند آماری (SPC) برای هرگونه فرآیندی می‌توان استفاده نمود عبارتند از :

- (آ) هیستوگرام (ب) برگه‌ی کنترل (ج) نمودار پاراتو
(د) نمودار علت و معلول (ه) نمودار تمرکز نقص‌ها (و) نمودار پراکندگی
(ز) نمودار کنترل

کنترل فرآیند آماری برای کلیه‌ی مدیران سازمان‌ها نه تنها یک نگرش، بلکه یک میل و آرزو برای برقراری یک سیستم پایدار در بخش کیفیت و بهره‌وری می‌باشد. در میان این ابزارهای معرفی شده، نمودار کنترل از لحاظ فنی پیچیده‌ترین و همچنین پراستفاده‌ترین آنها است. هر فرآیند تولید، همیشه علی‌رغم طراحی خوب یا نگهداری مناسب از آن، مقدار خاصی تغییرپذیری بطور ذاتی وجود دارد. این تغییرپذیری ذاتی را به طور معمول به عنوان یک سیستم پایدار «انحرافات تصادفی» می‌شناسیم. فرآیندی که فقط در حضور انحرافات تصادفی عمل کند را فرآیند تحت کنترل آماری می‌نامند.

²Performance

³Reliability

⁴Durability

⁵Serviceability

⁶Aesthetics

⁷Features

گونه‌های دیگر از تغییرپذیری نیز ممکن است گاه‌گاهی در خروجی یک فرآیند مشاهده گردد. تغییر پذیری در مشخصات کیفی کلیدی به طور معمول از سه منبع سرچشمه می‌گیرد: تنظیم نادرست دستگاه، خطاهای اپراتور و مواد اولیه معیوب. این منابع ایجاد تغییر پذیری که بخشی از انحرافات تصادفی محسوب نمی‌گردند را انحرافات بادلیل نامند. فرآیندی که در حضور انحرافات بادلیل عمل می‌کند را فرآیند خارج از کنترل می‌نامند.

اغلب فرآیندهای تولید به طور معمول درحالت تحت کنترل به سر می‌برند و این باعث می‌شود تا برای مدت طولانی محصولات قابل قبول تولید شود. با این حال در بعضی مواقع انحرافات بادلیل به وجود می‌آیند و باعث می‌گردند تا فرآیند به حالت خارج از کنترل تغییر پیدا کند. یکی از اهداف اصلی کنترل فرآیند آماری پی‌بردن سریع به وجود انحرافات بادلیل یا تغییرات در فرآیند است تا قبل از اینکه تعداد زیادی محصول معیوب تولید شود علل ایجاد چنین انحرافات بررسی و اقدامات اصلاحی انجام گیرد. نمودار کنترل یکی از روش‌های کنترل فرآیند در حین تولید است.

باید به خاطر داشت که هدف اصلی کنترل فرآیند آماری حذف تغییرپذیری فرآیند است. این امکان وجود ندارد که بتوان کل تغییرپذیری فرآیند را حذف نمود ولی نمودار کنترل را می‌توان به عنوان ابزاری مفید و اثرگذار جهت کاهش تغییرپذیری فرآیند استفاده نمود. نمودارهای کنترل به طور گسترده‌ای برای نظارت و بررسی یک فرآیند تولید استفاده می‌شود. قدرت نمودارهای کنترل نهفته در توانایی آنان برای شناسایی تغییرات روند و برای شناسایی شرایط غیر طبیعی در روند است.

نمودارهای کنترل در دهه ۱۹۲۰ توسط دکتر والتر شوهارت (شکل ۱.۱) که در آن زمان در آزمایشگاه‌های تلفن بل مشغول به کار بود ارائه گردید. به منظور درک جنبه‌های آماری که اساس SPC را تشکیل می‌دهند، ابتدا اصول تئوری شوهارت در مورد تغییر پذیری توضیح داده می‌شود.



شکل ۱.۱: والتر شوهارت، دانشمند در زمینه فیزیک و آمار

۵.۱ اصول آماری نمودار کنترل

۱.۵.۱ اصول اولیه

نمودار کنترل روش ارائه یک مشخصه کیفی که براساس اطلاعات نمونه، اندازه گیری می شود و به وسیله آن مهندسان کیفیت می توانند دلایل غیر تصادفی را از دلایل تصادفی در فرآیند تولید تشخیص داده و فرآیند را تحت کنترل دریاورند.

دکتر والتر شوهارت برای رسم نمودار کنترل یک مدل عمومی ارائه کرد. فرض کنید مشخصه مورد نظر به وسیله آماری W اندازه گیری می شود که میانگین و انحراف معیار W به ترتیب با μ_W و σ_W نشان داده می شوند. بنابراین، خط مرکز، حد کنترل بالا و حد کنترل پایین برابر خواهند بود با

$$\begin{cases} UCL = \mu_w + k\sigma_w \\ CL = \mu_w \\ LCL = \mu_w - k\sigma_w \end{cases} \quad (1.1)$$

در رابطه فوق، k فاصله حدود کنترل از خط مرکز را برحسب واحد انحراف معیار نشان می دهد. نمودارهای کنترلی که از چنین قانونی پیروی می کنند را نمودارهای کنترل شوهارت می نامند. همان طور که در رابطه ۱.۱ مشاهده می شود، نمودار کنترل شامل یک خط مرکز (CL)^۸ که مقدار متوسط آماری مشخصه کیفی را در حالتی که فرآیند تحت کنترل است نشان می دهد. دو خط افقی دیگر که حد کنترل بالا (UCL)^۹ و حد کنترل پایین (LCL)^{۱۰} نامیده می شوند، به ترتیب در بالا و پایین این نمودار نشان داده شده است. این حدود کنترل در یک فرآیند تولیدی تحت کنترل که در آن تنها منشاء تغییرات، پدیده های شانس یا احتمال است، به گونه ای انتخاب می شوند که اگر تغییرات در برابر زمان بر روی نموداری رسم شوند، آن گاه این تغییرات الگویی به طور کامل تصادفی به خود خواهند گرفت و به طور تقریبی همه ی نقاطی که براساس اطلاعات نمونه رسم می شوند بین این حدود قرار می گیرند. اگر نقطه ای خارج از حدود کنترل رسم شود، نتیجه گیری می شود که فرآیند در خارج از کنترل است و اقدامات اصلاحی برای تعیین و حذف منبع ایجاد انحراف یا انحرافات با دلیل نیاز است.

در کنترل کیفیت حدود مشخصه فنی هم مطرح می شود که مقادیر این حدود به فرآیند بستگی ندارد و با توجه به استانداردهای جهانی و انتظارات مشتری و به طور معمول توسط مدیریت یا طراحان محصول تعیین می گردد. شخصی هم که مسئول تعیین حدود مشخصه فنی است باید آگاهی کاملی در مورد تغییرپذیری فرآیند داشته باشد.

^۸Center Line

^۹Upper Control Limit

^{۱۰}Lower Control Limit

نمودارهای کنترل می‌توانند با توجه به آماره‌هایی که از نمونه‌ها استخراج می‌شوند، دو گروه کلی تقسیم شوند. اگر بتوان مشخصه‌ی کیفی را اندازه‌گیری و آن را به صورت عددی در مقیاس پیوسته ارائه کرد آن را یک متغیر^{۱۱} نامند. در این صورت آماره ممکن است بر اساس معیار تمایل مرکزی (میانگین) و یا معیار تغییر پذیری (انحراف معیار و یا دامنه‌ی نمونه) توصیف گردد. در نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های کیفی متغیر همواره باید دو پارامتر میانگین و انحراف معیار مشخصه‌های کیفی مورد بازرسی، بررسی شود. هرگاه که این دو تحت کنترل درآیند، فرآیند تحت کنترل است. همچنین نباید هیچ گونه روند غیرتصادفی در نمودارهای کنترل دیده شود. نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های متغیر شامل سه نمودار زیر است:

- نمودار کنترل $\bar{X}$

- نمودار کنترل R

- نمودار کنترل S

از طرفی خیلی از مشخصه‌های کیفی را ممکن است نتوان در مقیاس پیوسته یا حتی مقیاس کمی اندازه‌گیری کرد آن‌گاه آماره مورد استفاده ممکن است بر اساس معیار انطباق یا عدم انطباق و یا شمارش تعداد نقص‌ها بیان گردد. نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های وصفی شامل سه نمودار زیر می‌شود:

- نمودار کنترل برای نسبت اقلام معیوب (نمودار p)^{۱۲}

- نمودار کنترل نقص‌ها (نمودار c)

- نمودار کنترل تعداد متوسط نقص‌ها در هر محصول (نمودار u)

۲.۵.۱ فاز اول نمودارهای کنترل

در فاز اول در نمودارهای کنترل هرگونه روند و یا علت غیرتصادفی را شناسایی کرده و آن‌ها را برطرف می‌کنیم و وقتی فرآیند تحت کنترل قرار گرفت، میانگین و انحراف معیار مشخصه‌ی کیفی متغیر مورد بازرسی را تخمین می‌زنیم. برای تخمین پارامترهای میانگین و انحراف معیار از m نمونه n تایی که در زمان کنترل فرآیند اندازه‌گیری شده است، استفاده می‌شود. با استفاده از برآورد پارامترهای مورد نیاز حدود کنترل مربوطه مشخص می‌شود.

^{۱۱}variable

^{۱۲}p-Chart

۳.۵.۱ فاز دوم در نمودارهای کنترل

هدف فاز دوم تشخیص هرگونه ایجاد تغییر در میانگین و انحراف معیار مشخصه‌ی کیفی می‌باشد که در فاز اول آن‌ها را بعد از تحت کنترل درآوردن، تخمین زده بودیم.

۶.۱ مراحل تهیه‌ی نمودارهای کنترل

۱.۶.۱ خطاهای آماری نمودارهای کنترل

سوالاتی که ممکن است در دیدگاه نمودارهای کنترل پیش آید، این است که دقت کار با نمودارهای کنترل چقدر است و چه میزان خطا می‌تواند وجود داشته باشد؟ به طور معمول در این مورد یا هر آزمون دیگری ممکن است دو نوع اشتباه رخ دهد:

خطای نوع اول: کنترل آماری به طور واقعی وجود داشته باشد ولی نقطه خارج از حدود کنترل قرار گیرد. در مورد نمودارهای کنترل، ارتکاب خطای نوع اول مترادف با این است که در حالی که تولید به خوبی انجام می‌شود از آن اشکال گرفته و در پی تغییر آن باشیم که چنین اشتباهی به طور معمول بسیار زیان بخش است.

خطای نوع دوم: نقطه داخل حدود کنترل قرار گیرد در حالی که به طور واقعی کنترل آماری برقرار نباشد که این خطا را با β نمایش می‌دهند.

مثال ۱.۱. فرض کنید در یک فرآیند، توزیع مبنای مشخصه‌ی کیفیت X نرمال با پارامترهای $\mu_X = 10$ و $\sigma_X = 2$ باشد. اگر محدوده‌ی $\mu_X \pm 3\sigma_X$ اساس کار نمودار کنترل قرار گیرد، آن‌گاه خطای نوع اول، مساحت قسمت‌هایی از منحنی است که خارج از بازه‌ی

$$(LCL, UCL) = (9/94, 10/06)$$

قرار می‌گیرد که میزان آن در زیر محاسبه شده است.

$$\begin{aligned}\alpha &= Pr(X \leq 9/94) + Pr(X \geq 10/06) \\ &= Pr(Z \leq -3) + Pr(Z \geq 3) \\ &= 0/0013 + 0/0013 = 0/0026\end{aligned}$$

که در آن $Z \sim N(0, 1)$ است.

حال اگر میانگین توزیع به $10/1$ تغییر کرده باشد، آن‌گاه با احتمال زیر به تغییر توزیع پی

برده نمی‌شود.

$$\begin{aligned}\beta &= Pr(LCL \leq X \leq UCL) \\ &= Pr(9/94 \leq X \leq 10/06) \\ &= Pr(-8 \leq Z \leq -2) \\ &= 0/0228\end{aligned}$$

با توجه به نتایج فوق انتظار می‌رود هر چه اختلاف میان توزیع مبنا با توزیع واقعی فرآیند بیشتر باشد، با احتمال بیشتری به آن پی برده می‌شود.

در ادامه به معرفی نمودارهای کنترل به طور جداگانه می‌پردازیم.

۷.۱ بررسی تصادفی بودن داده‌ها

همانطور که توضیح داده شد، برای اینکه فرآیندی تحت کنترل باشد، نه تنها باید کلیه نقاط بر روی نمودار کنترل بین حدود کنترل قرار بگیرد؛ بلکه قرار گرفتن نقاط بر روی نمودار باید به طور کامل تصادفی بوده و شکل خاصی پیدا نکند. به عبارت دیگر اگر نقاط به طور واقعی به صورت تصادفی باشند آن‌گاه باید انتظار داشت که توزیع نقاط در بالا و پایین خط مرکز از یکنواختی بیشتری برخوردار باشد. با توجه به توضیحات بالا چند مورد از قوانین حساس سازی که در عمل کاربرد دارند که با مشاهده‌ی یک یا بیش از یک مورد از موارد زیر می‌توان نتیجه‌گیری کرد که فرآیند در حالت خارج از کنترل به سر می‌برد:

- یک یا چند نقطه خارج از حدود کنترل
- یک دنباله به طول هشت نقطه در یک طرف خط مرکز
- دو از سه نقطه‌ی متوالی خارج از حدود هشدار دو انحراف معیار ولی داخل حدود کنترل
- چهار از پنج نقطه‌ی متوالی خارج از حدود یک انحراف معیار
- پانزده نقطه‌ی متوالی در بالا و پایین خط مرکز
- شش نقطه متوالی با روند صعودی یا نزولی
- چهارده نقطه متوالی با روند صعودی و نزولی پی در پی

آزمون تصادفی بودن که یک آزمون ناپارامتری در یک سطح اطمینان مشخص برای بررسی تصادفی بودن داده‌ها است را می‌توان برای حصول به تصادفی بودن داده‌ها و نمودارهای کنترل کیفیت به کار برد. این آزمون در فصل ۴ برای اطمینان به داده‌های جمع‌آوری شده از نظر تصادفی بودن انجام شده است.

۸.۱ نمودارهای کنترل برای مشخصه های وصفی

اغلب مشخصه های کیفی را نمی توان بسادگی اندازه گیری و در قالب عدد گزارش کرد. در بازرسی ها در این گونه موارد محصول به دو گروه خوب یا بد، قابل قبول یا غیر قابل قبول، سالم و یا معیوب تقسیم بندی می شود. مشخصه های کیفی که با چنین روشی تقسیم بندی می شوند را مشخصه های کیفی وصفی می نامند. در ادامه سه نمودار کنترل که در عمل از کاربرد زیادی برخوردار است ارائه می شوند، اولین نمودار به نسبت محصولات فاقد انطباق یا معیوب مربوط می گردد. در مواردی هم که به جای معیوب ها با تعداد نقص سر و کار داشته باشیم در چنین مواردی از دومین نمودار معرفی شده یعنی نمودار کنترل تعداد نقص ها استفاده می شود.

۱.۸.۱ نمودار نسبت اقلام معیوب (نمودار p)

نسبت اقلام معیوب جامعه (نمونه) عبارت است از نسبت تعداد اقلام معیوب جامعه به تعداد کل اقلام در جامعه (نمونه). یک محصول می تواند دارای چندین مشخصه کیفی باشد که توسط یک بازرس مورد آزمایش قرار می گیرد. اگر یک یا چند مشخصه کیفی محصولی با استاندارد مورد نظر انطباق نداشته باشد، محصول معیوب شناخته می شود. نسبت اقلام معیوب به طور معمول به صورت کسری و در بعضی مواقع به صورت درصد گزارش می گردد. اصول آماری نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب بر توزیع دوجمله ای استوار است. فرض کنید فرآیند تولیدی در حالت کنترل و پایدار به سر می برد و احتمال معیوب بودن هر محصول p است. تحت این شرایط هر محصول تولید شده به عنوان یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p عمل می کند. اگر D تعداد محصولات معیوب باشد آن گاه D از یک توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و p پیروی می کند به طوری که p درصد ضایعات فرآیند بوده و در طول نمونه گیری ثابت در نظر گرفته می شود. در نتیجه آماره ای که می خواهیم برای آن حدود کنترل نمودار شوهارت را محاسبه کنیم، نسبت اقلام معیوب نمونه تصادفی n تایی یعنی $\hat{p} = \frac{D}{n}$ می باشد. زمانی که نسبت اقلام معیوب فرآیند p معلوم نباشد، باید مقدار آن با توجه به داده های جمع آوری شده تخمین زده شود. در چنین شرایطی، روش متداول انتخاب m نمونه ی اولیه به اندازه n است. برآورد نسبت اقلام معیوب در هر نمونه n تایی عبارت است از:

$$\hat{p}_i = \frac{D_i}{n}, \quad i = 1, \dots, m$$

و برآورد نسبت کل برابر است با:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn}$$

که در آن D_i تعداد معیوب ها در i امین نمونه n تایی، $i = 1, \dots, m$ ، است. که حدود کنترل

نسبت اقلام معیوب به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\begin{cases} UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL = \bar{p} \\ LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{cases} \quad (2.1)$$

مثال ۲.۱. آب پرتغال غلیظ شده یخ زده در قوطی های شش اونسی بسته بندی می شود. این قوطی ها با دوخت مقوا و نصب یک صفحه ی فلزی در کف آنها توسط یک دستگاه شکل می گیرند. با بازرسی هر قوطی می توان پی برد که پس از پر شدن آیا قوطی از سمت اتصال صفحه ی زیر و یا محل درز نشت می کند یا خیر. قوطی های معیوب دارای اتصال صفحه و یا دوخت نامناسب هستند. می خواهیم به منظور بهبود نسبت قوطی های معیوب تولید شده به وسیله ی این دستگاه از یک نمودار کنترل استفاده نماییم.

جهت تهیه ی نمودار کنترل ۳۰ نمونه ی ۵۰ تایی ($m = 30, n = 50$) به طور تصادفی هر نیم ساعت طی سه شیفت متوالی، زمانی که دستگاه به طور مستمر کار می کرد، جمع آوری گردیده است. داده ها در جدول ۱.۱ نشان داده شده است.

از ۳۰ نمونه تهیه شده $\sum_{i=1}^{30} D_i = 347$ قوطی معیوب است، بنابراین

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{30} D_i}{mn} = \frac{347}{30 \times 50} = 0.2313$$

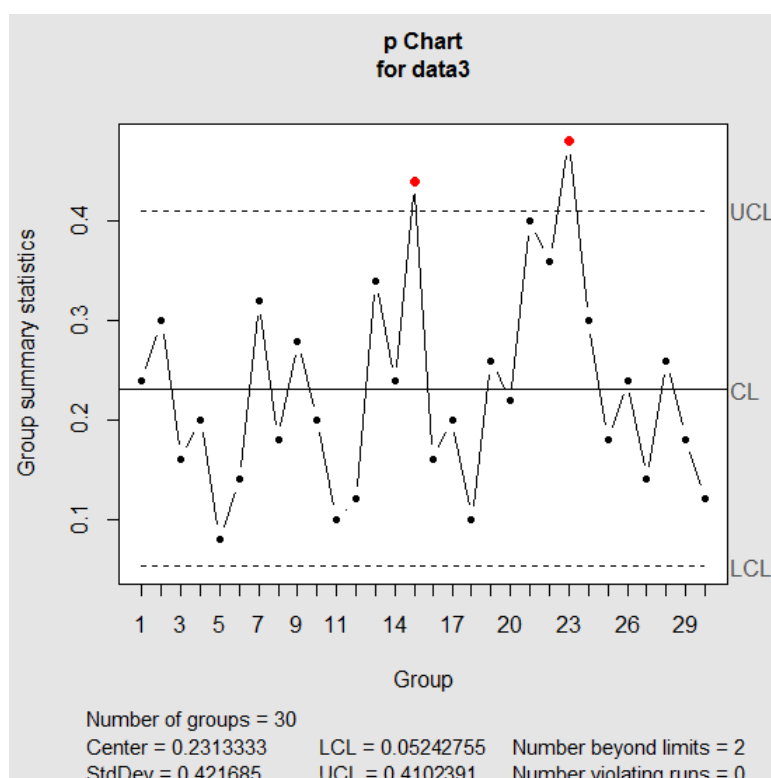
$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ &= 0.2313 + 0.1789 = 0.4102 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ &= 0.2313 - 0.1789 = 0.0524 \end{aligned}$$

برای رسم نمودار p با استفاده از نرم افزار R ابتدا کفایست پکیج qcc را فراخوانی کرد، سپس از دستور زیر استفاده نمود:

```
> qcc(data = data3, type = "p", sizes = 50)
```

نمودار کنترل با خط مرکز $\bar{p} = 0.2313$ و حدود کنترل محاسبه شده ی شکل ۲.۱ نشان داده شده است. نسبت اقلام معیوب هر نمونه بر روی نمودار رسم شده همانطور که نشان داده شده دو نقطه بالای حدود کنترل واقع شده اند و بنابراین فرآیند تحت کنترل نیست. با



شکل ۲.۱: نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب اولیه برای داده‌های جدول ۱.۱

بررسی دو نمونه ۱۵ و ۲۳، متوجه شدیم علل خارج از کنترل رسم شدن نمونه ۱۵ استفاده از مواد اولیه جدید و نمونه ۲۳ کار با دستگاه توسط یک اپراتور بی تجربه می‌باشد. بنابراین نمونه‌های شماره ۱۵ و ۲۳ از مجموعه‌ی نمونه‌ها حذف، و حدود کنترل جدید به صورت زیر محاسبه می‌شود:

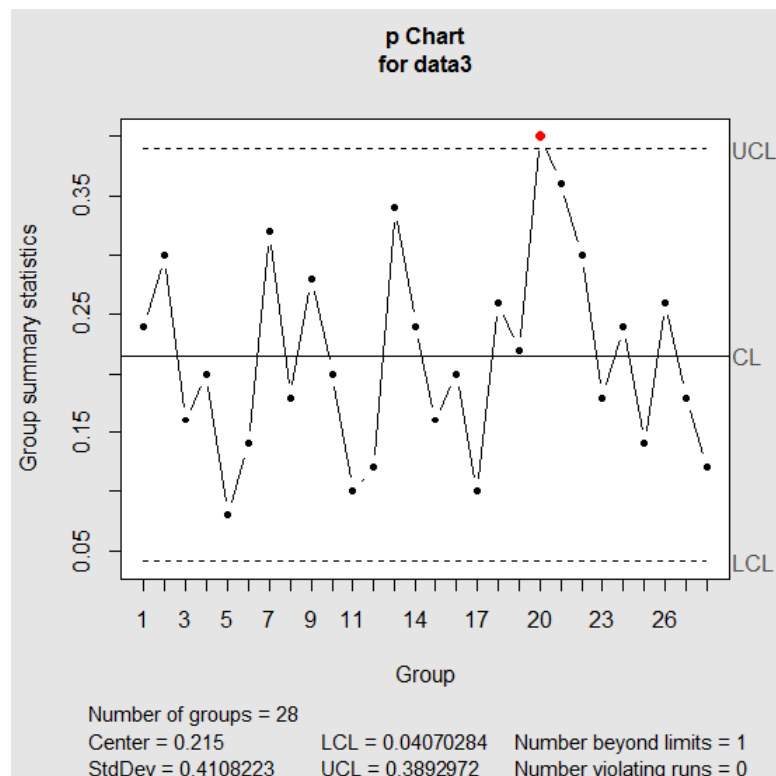
$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$= 0.215 + 3\sqrt{\frac{0.215(0.785)}{50}} = 0.3893$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$= 0.215 - 3\sqrt{\frac{0.215(0.785)}{50}} = 0.0407$$

با توجه به شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنیم که نمونه ۲۱ خارج از حد کنترل است اما با توجه به



شکل ۳.۱: حدود کنترل بازنگری شده

بررسی‌ها دلیلی منطقی برای این انحراف منعکس نمی‌کند، به همین دلیل این نقطه به همین صورت باقی خواهد ماند و همین حدود برای تولیدات آینده مناسب است (به صفحه‌ی ۲۰۷ مونتگومری [۵] مراجعه کنید).

۲.۸.۱ تابع مشخصه‌ی عملکرد و محاسبات مربوط به متوسط طول دنباله

تابع مشخصه عملکرد (OC) نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب، نموداری است که احتمال پذیرش اشتباهی، فرضیه‌ی تحت کنترل آماری بودن (یا احتمال خطای نوع II یا β) فرآیند را برحسب نسبت اقلام معیوب آن نشان می‌دهد. منحنی OC معیاری برای ارزیابی حساسیت نمودار کنترل و یا به عبارت دیگر توانایی پی بردن به تغییر در نسبت اقلام معیوب فرآیند است. اگر نسبت اقلام معیوب از مقدار اسمی خود یا $\bar{p}$ به مقدار دیگری نظیر p تغییر کند آن گاه می‌توان احتمال خطای نوع II نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}\beta &= P\{\hat{p} < UCL|p\} - P\{\hat{p} \leq LCL|p\} \\ &= P\{D < nUCL|p\} - P\{D \leq nLCL|p\}\end{aligned}$$

به طور مثال اگر $n = 50, LCL = 0.03, UCL = 0.3697$ برای یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب باشند، آن گاه با استفاده از این پارامترها مقدار β به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}\beta &= P\{D < (50)(0.3697)|p\} - P\{D \leq (50)(0.03)|p\} \\ &= P\{D \leq 18.49|p\} - P\{D \leq 1.52|p\}\end{aligned}$$

خطای نوع دوم به ازای متوسط اقلام معیوب متفاوت در نظر گرفته شده، در جدول ۲.۱ محاسبه شده است.

جدول ۲.۱: محاسبات مربوط به تهیه ی منحنی OC یک نمودار نسبت اقلام معیوب با $n = 50, LCL = 0.03, UCL = 0.3697$

$P\{D \leq 18 p\} - P\{D \leq 1 p\}$	$P\{D \leq 1 p\}$	$P\{D \leq 18 p\}$	p
0.0894	0.9106	1	0.01
0.4447	0.5553	1	0.03
0.7206	0.2794	1	0.05
0.9662	0.0338	1	0.1
0.9708	0.0291	0.9999	0.15
0.9973	0.0002	0.9975	0.2
0.9712	0.0001	0.9713	0.25
0.8594	0.0000	0.8594	0.3
0.6216	0.0000	0.6216	0.35
0.3356	0.0000	0.3356	0.4
0.1273	0.0000	0.1273	0.45
0.0325	0.0000	0.0325	0.5
0.0053	0.0000	0.0053	0.55

حال می توان متوسط طول دنباله (ARL) را نیز برای نمودار نسبت اقلام معیوب محاسبه نمود، به طور اساسی (ARL) متوسط تعداد نقاطی است که باید بر روی نمودار کنترل رسم گردند تا یک نقطه خارج از کنترل مشاهده شود. به طور کلی، برای چنین نمودارهایی می توان (ARL) را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$ARL = \frac{1}{\text{رسم یک نقطه خارج از کنترل}(p)}$$

در صورتی که فرآیند تحت کنترل باشد ARL از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$ARL = \frac{1}{\alpha}$$

و اگر فرآیند خارج از کنترل باشد آن گاه:

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta}$$

با استفاده از جدول ۲.۱ می توان مشاهده نمود که اگر فرآیند در سطح $\bar{p} = \hat{p}$ تحت کنترل باشد آن گاه احتمال رسم یک نقطه داخل حدود کنترل برابر با ۰/۹۹۷۳ خواهد بود. در این صورت $\bar{p} = ۰/۲$ و در نتیجه ARL برابر خواهد بود با:

$$ARL = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{۰/۰۰۲۷} = ۳۷۰/۳۷$$

بنابراین، اگر فرآیند به طور واقعی تحت کنترل باشد به طور متوسط حدودی بعد از هر ۳۷۰ نقطه که بر روی نمودار کنترل رسم می شود یک نقطه ی اشتباهی خارج از کنترل واقع می گردد. حال فرض کنید فرآیند به سطح خارج از کنترل $P = ۰/۳$ تغییر می یابد. جدول ۲.۱ نشان می دهد که اگر $p = ۰/۳$ باشد آنگاه $\beta = ۰/۸۵۹۴$ و در نتیجه ARL برابر خواهد بود با:

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - ۰/۸۵۹۴} = ۷/۱۱$$

یا به عبارت دیگر، به طور متوسط حدود هفت نمونه مورد نیاز است تا یک نقطه خارج از کنترل رسم شود و فرآیند خارج از کنترل اعلام گردد.

۳.۸.۱ نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب (نمودار np)

امکان این نیز وجود دارد که بتوان نمودار کنترل را به جای نسبت اقلام معیوب بر اساس تعداد اقلام معیوب تهیه نمود. که برای حدود کنترل تعداد اقلام معیوب (نمودار np)، کافی است حدود کنترل نمودار P در یک n ضرب شود.

$$\begin{cases} UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ CL = n\bar{p} \\ LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \end{cases} \quad (۳.۱)$$

اکثریت پرسنلی که آموزش های آماری نداشته اند، تفسیر نمودار np را نسبت به نمودار معمول نسبت اقلام معیوب ساده تر می نامند.

مثال ۳.۱. به منظور تهیه نمودار کنترل np با استفاده از داده های جدول ۱.۱ مقدار $\bar{p} =$

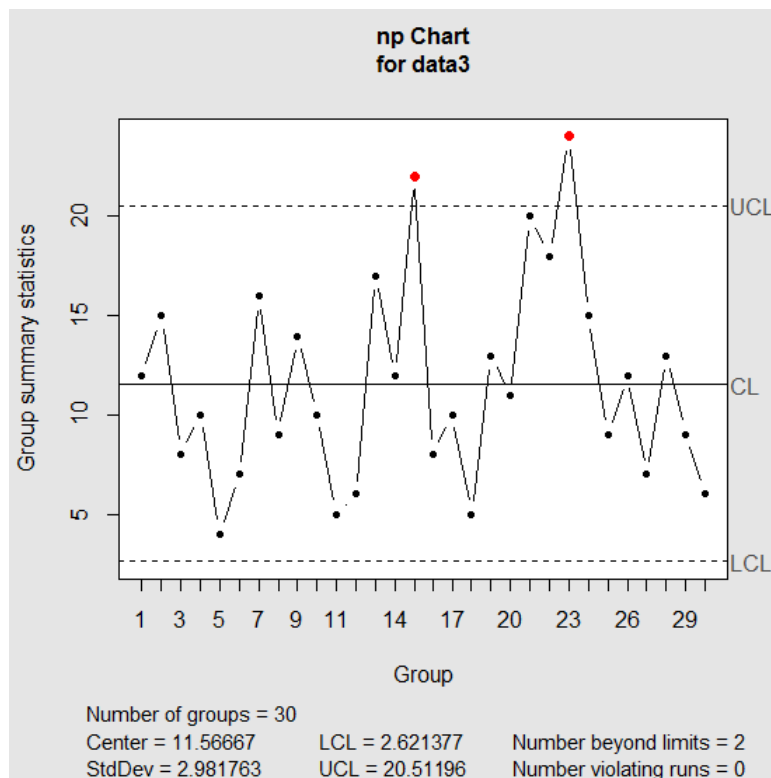
۲۳۱۳٪ بنابراین، حدود نمودار کنترل np به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} UCL &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ &= 50(0/215) + 3\sqrt{(50)(0/215)(0/785)} \\ &= 20/51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LCL &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ &= 0/215 - 3\sqrt{(50)(0/215)(0/785)} \\ &= 2/62 \end{aligned}$$

برای رسم نمودار np در R کافیت از دستور زیر استفاده نمود:

```
> qcc(data = data3, type = "np", sizes = 50)
```



شکل ۴.۱: حدود کنترل نمودار np

به مانند نمودار ۲.۱، در نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب ۴.۱ دو نمونه ۱۵ و ۲۳ خارج از کنترل قرار دارند.

۴.۸.۱ نمودار کنترل برای عدم انطباق‌ها

یک محصول فاقد انطباق یا ناقص محصولی است که یک یا چند مشخصه‌ی آن با مشخصات محصول انطباق نداشته باشد. هر یک از این مشخصات که با مشخصات محصول منطبق نباشد باعث ایجاد یک نقص یا عدم انطباق می‌گردد. با این حال، باتوجه به ماهیت نقص، ممکن است یک محصول چندین نقص داشته باشد ولی معیوب شناخته نشود. در بعضی مواقع به جای کار با نسبت اقلام معیوب ترجیح داده می‌شود که با تعداد نقص‌ها یا عدم انطباق‌ها کار شود.

این‌گونه نمودارهای کنترل را هم می‌توان برای تعداد کل نقص‌ها در یک محصول و هم برای متوسط تعداد نقص‌ها در هر محصول تهیه نمود. در این نمودارهای کنترل به طور معمول فرض می‌شود که مشاهده‌ی تعداد نقص‌ها در اندازه نمونه‌های ثابت به خوبی از توزیع پواسن پیروی می‌کند. لازمه‌ی این فرض آن است که تعداد مکان‌های بالقوه برای نقص‌ها بی‌نهایت زیاد و احتمال مشاهده‌ی یک نقص در هر یک از این مکان‌ها کم و ثابت باشد. از طرفی واحد بازرسی برای هر نمونه باید یکسان باشد. هم‌چنین در یک محصول می‌توان انواع مختلف نقص‌ها را با در نظر گرفتن این شرط که برای هر گروه نقص‌ها شرایط فوق صحت داشته باشد شمارش کرد.

نمودار تعداد کل نقص‌ها در یک واحد بازرسی (نمودار c)

واحد بازرسی به طور ساده تعدادی محصول است که حفظ سوابق و اطلاعات در مورد آن ساده باشد. واحد بازرسی یک گروه پنج‌تایی، ده‌تایی و یا تعدادی کمتر یا بیشتر از محصول مورد نظر است. فرض کنید X تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی بر اساس توزیع پواسن با پارامتر c به وقوع می‌پیوندد. بنابراین با توجه به میانگین و واریانس توزیع پواسن و حدود کنترل سه انحراف معیار، حدود کنترل نمودار تعداد نقص‌ها در یک واحد بازرسی به صورت زیر تهیه می‌گردد:

$$\begin{cases} UCL = c + 3\sqrt{c} \\ CL = c \\ LCL = c - 3\sqrt{c} \end{cases} \quad (4.1)$$

اگر مقدار استاندارد برای c وجود نداشته باشد می‌توان آن را به وسیله‌ی متوسط تعداد نقص‌های مشاهده شده در واحدهای بازرسی اولیه تخمین زد. روابط ۴.۱ به صورت زیر به

دست آیند.

$$\begin{cases} UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ CL = \bar{c} \\ LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{cases} \quad (5.1)$$

مثال ۴.۱. جدول ۳.۱ داده‌های مربوط به تعداد نقص‌ها در ۲۶ نمونه ۱۰۰ تایی از صفحات مدار چاپ شده را نشان می‌دهد. به منظور سهولت، یک واحد بازرسی برابر با ۱۰۰ صفحه از مدارهای چاپ شده تعریف شده است. چون در این ۲۶ نمونه تعداد کل ۵۱۶ نقص مشاهده شده است، c به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

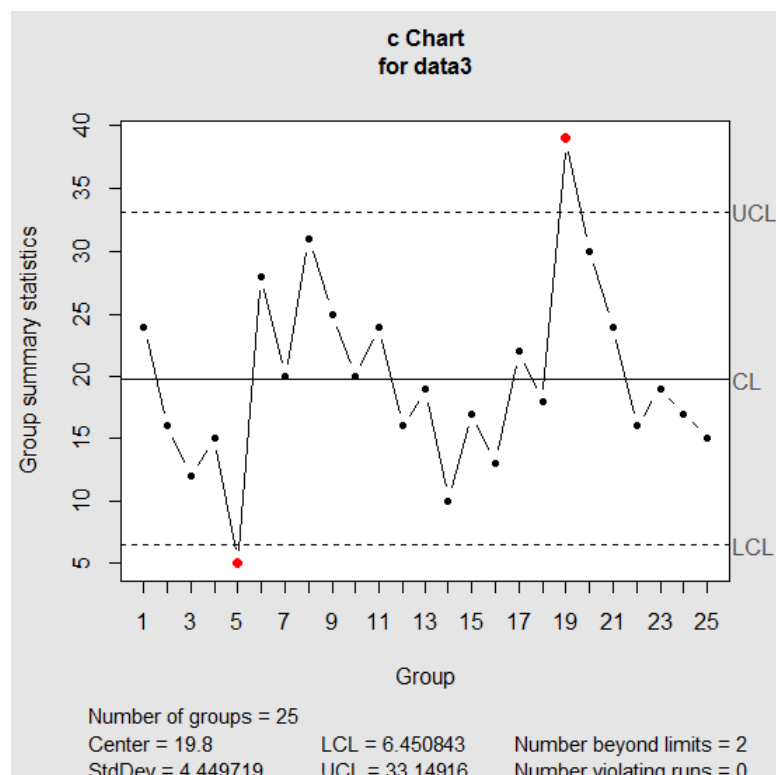
$$\bar{c} = \frac{516}{26} = 19.85$$

بنابراین حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$\begin{cases} UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19.85 + 3\sqrt{19.85} = 33.14 \\ CL = \bar{c} = 19.85 \\ LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 19.85 - 3\sqrt{19.85} = 6.45 \end{cases} \quad (6.1)$$

جدول ۳.۱: داده‌های مربوط به مثال ۴.۱

شماره نمونه	تعداد نقص‌ها	شماره نمونه	تعداد نقص‌ها
۱	۲۱	۱۴	۱۹
۲	۲۴	۱۵	۱۰
۳	۱۶	۱۶	۱۷
۴	۱۲	۱۷	۱۳
۵	۱۵	۱۸	۲۲
۶	۵	۱۹	۱۸
۷	۲۸	۲۰	۳۹
۸	۲۰	۲۱	۳۰
۹	۳۱	۲۲	۲۴
۱۰	۲۵	۲۳	۱۶
۱۱	۲۰	۲۴	۱۹
۱۲	۲۴	۲۵	۱۷
۱۳	۱۶	۲۶	۱۵



شکل ۵.۱: حدود کنترل نمودار c برای مثال ۴.۱

برای رسم نمودار کنترل c با استفاده از نرم افزار R کافی است از دستور زیر استفاده نمود:

```
> qcc(data = data3, type = "c", sizes = 5)
```

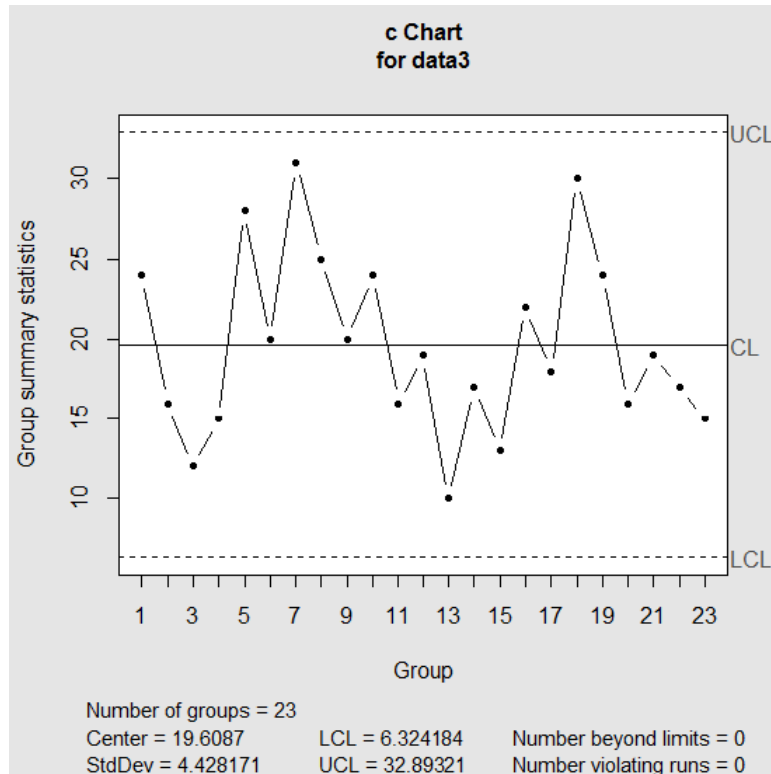
در شکل ۵.۱ مشاهده می کنیم که نمونه های شماره ۶ و ۲۰ خارج از کنترل رسم شده اند. بررسی نمونه ی ۶ این واقعیت را منعکس می کند که یک بازرسی جدید که آشنایی کافی با تمام نقص ها نداشته است صفحات مربوط به این نمونه را آزمایش کرده است و نقص های زیاد در نمونه ۲۰ به علت مشکل کنترل درجه حرارت در دستگاه لحیم کاری بوده است. بنابراین این دو نقطه از مجموعه نمونه ها حذف و حدود کنترل مجدد به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\bar{c} = \frac{472}{24} = 19.67$$

بنابراین، حدود کنترل جدید عبارتند از:

$$\begin{cases} UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19.6 + 3\sqrt{19.6} = 32.89 \\ CL = \bar{c} = 19.6 \\ LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 19.6 - 3\sqrt{19.6} = 6.32 \end{cases} \quad (7.1)$$

به علت اینکه طبق شکل ۶.۱ این نقاط در داخل حدود کنترل قرار می گیرند و روند خاصی از خود نشان نمی دهند، می توان این نمودار کنترل را برای کنترل تولیدات آتی استفاده کرد.



شکل ۴.۱: حدود کنترل نمودار c بازنگری شده برای مثال ۴.۱

متوسط تعداد نقص‌ها در هر محصول (نمودار u)

در اغلب موارد ترجیح داده می‌شود که چندین واحد بازرسی در یک نمونه استفاده شود و در نتیجه مکان‌های بلقوه برای مشاهده‌ی تعداد نقص‌ها افزایش یابد. برای طراحی نمودار کنترل براساس متوسط تعداد نقص‌ها در هر واحد بازرسی کافی است، در یک نمونه که شامل n واحد بازرسی است تعداد کل c نقص مشاهده می‌شود آن‌گاه متوسط تعداد نقص‌ها در هر واحد بازرسی برابر خواهد بود با:

$$u = \frac{c}{n}$$

باید توجه داشت که c یک متغیر تصادفی است که از توزیع پواسن پیروی می‌کند و در نتیجه حدود کنترل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n} \\ CL = \bar{u} \\ LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n} \end{cases} \quad (۸.۱)$$

مثال ۵.۱. یک تولید کننده رایانه قصد دارد از یک نمودار کنترل برای کنترل تعداد نقص‌ها در هر رایانه در خط مونتاژ نهایی خود استفاده کند بدین منظور، تعداد ۲۰ نمونه ۵ تایی از

رایانه ها تهیه و اطلاعات مربوط به تعداد نقص ها در هر واحد بازرسی جمع آوری می شود. با توجه به داده های جدول ۴.۱، متوسط تعداد نقص ها در هر واحد را به صورت زیر تخمین زد:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{20} u_i}{20}$$

بنابراین حدود کنترل عبارت است از:

$$\begin{cases} UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n} = 1/93 + 3\sqrt{\frac{1/93}{5}} = 3/79 \\ CL = \bar{u} = 1/93 \\ LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n} = 1/93 - 3\sqrt{\frac{1/93}{5}} = 0/07 \end{cases} \quad (9.1)$$

بدین ترتیب با استفاده از دستور

```
> qcc(data = data3, type = "u", sizes = 50)
```

نمودار کنترل u را خواهیم داشت.

طبق شکل ۷.۱، داده های اولیه وجود هیچگونه مشکلی را منعکس نمی کنند و در نتیجه فرآیند تحت کنترل آماری است.

تابع مشخصه ی عملکرد نمودار c و u

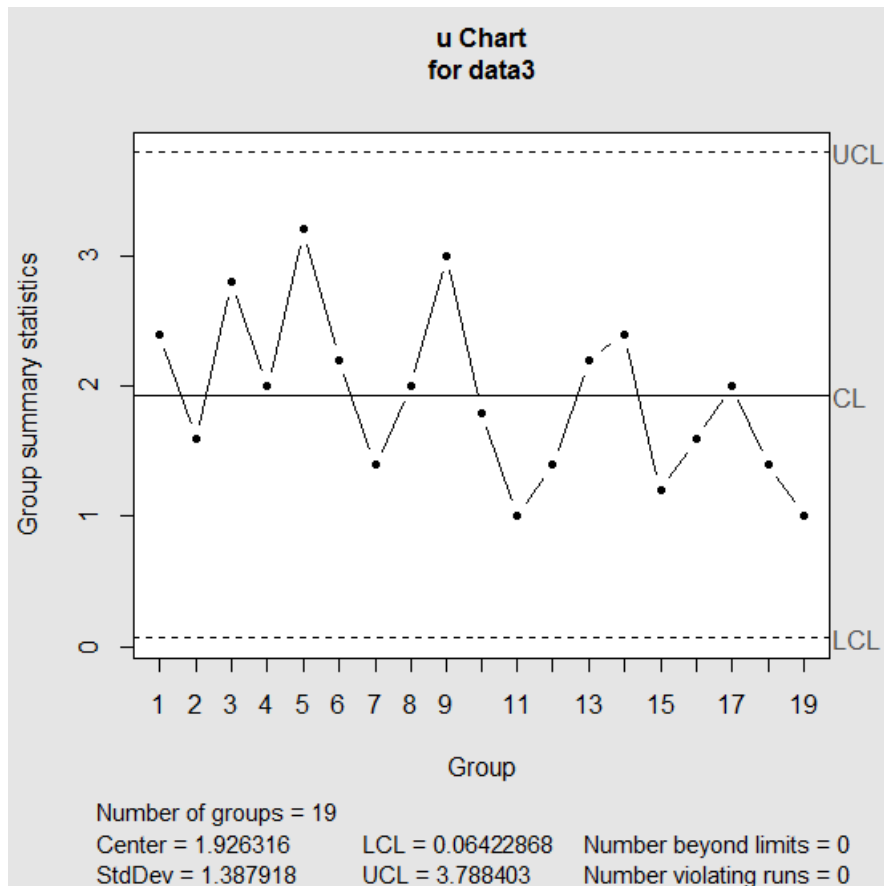
منحنی های مشخصه ی عملکرد (OC) نمودارهای c و u را می توان بر اساس توزیع پواسن رسم نمود. منحنی OC نمودار c ، احتمال خطای نوع β را بر حسب متوسط تعداد نقص ها یا c نشان می دهد. رابطه ی مورد نیاز برای محاسبه ی β به صورت زیر است:

$$\beta = P\{x < UCL|c\} - P\{x \leq LCL|c\}$$

که در اینجا x متغیر توزیع پواسن با پارامتر c است.

احتمال خطای نوع دوم که برای رسم منحنی OC نمودار u مورد نیاز است به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned} \beta &= P\{x < UCL|u\} - P\{x \leq LCL|u\} \\ &= P\{c < nUCL|u\} - P\{c \leq nLCL|u\} \\ &= P\{nLCL < c \leq nUCL|u\} \end{aligned}$$



شکل ۷.۱: نمودار کنترل برای متوسط تعداد نقص‌ها

۹.۱ نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های متغیر

بسیاری از مشخصه‌های کیفی را می‌توان در قالب اندازه‌ی عددی بیان کرد. به عنوان مثال مشخصه‌های کیفی قابل اندازه‌گیری نظیر ابعاد، وزن و یا حجم را مشخصه‌های کیفی متغیر می‌نامند. نمودارهای کنترل برای این مشخصه‌های کیفی کاربرد زیادی در عمل دارند و به طور معمول اینگونه نمودارهای کنترل نسبت به نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های وصفی از کارایی بیشتری برخوردار هستند و اطلاعات زیادتری در مورد عملکرد فرآیند به ما می‌دهند.

۱.۹.۱ نمودار کنترل برای میانگین (نمودار $\bar{X}$)

فرض کنید مشخصه‌ی کمی کیفیت دارای توزیع $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد. در این صورت بر اساس نمونه تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ از فرآیند تولید داریم $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ و در نتیجه $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$. بنابراین احتمال واقع شدن میانگین نمونه بین

$$(\mu - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}}, \mu + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{X}})$$

برابر $1 - \alpha$ است. به طور معمول به جای $Z_{\alpha/2}$ از ۳ استفاده می‌شود تا حدود کنترل سه انحراف معیار حاصل گردند. واقع شدن یک نقطه خارج از این حدود کنترل بیانگر این است که میانگین فرآیند دیگر برابر با μ نیست. مشخصه کیفی مورد بحث ما از توزیع نرمال پیروی می‌کند و در اغلب اوقات μ و σ نامعلوم هستند. بنابراین به مانند برآورد پارامتر در نمودارهای وصفی، در این بخش هم باید با استفاده از نمونه‌های اولیه‌ای که در زمان تحت کنترل بودن فرآیند تهیه شده‌اند تخمین زد. فرض کنید تعداد m نمونه که هر کدام شامل n مشاهده است به منظور ارزیابی یک مشخصه کیفی تهیه می‌گردد. اگر $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ میانگین نمونه‌ها باشند آن‌گاه بهترین تخمین برای میانگین فرآیند، میانگین کل است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}$$

و اگر $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_m$ دامنه‌های m نمونه باشند.

اگر توزیع مشخصه کیفی نرمال باشد آن‌گاه یک رابطه‌ی شناخته شده بین دامنه‌ی نمونه و انحراف معیار آن وجود دارد. متغیر تصادفی $W = \frac{R}{\sigma}$ دامنه‌ی نسبی نامیده می‌شود. با توجه به این که میانگین W برابر با d_4 است در این صورت برآورد انحراف معیار فرآیند برابر است با

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_4}$$

دامنه‌ی متوسط را از رابطه‌ی ۱۰.۱ می‌توان محاسبه نمود:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} \quad (10.1)$$

آنگاه برآورد انحراف معیار فرآیند برابر است با

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_4}$$

که مقادیر مختلف d_4 برای اندازه نمونه‌های متفاوت، به طور جداگانه به دست می‌آید. آنگاه حدود نمودار $\bar{X}$ برابر خواهد بود با:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_4\sqrt{n}}\bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_4\sqrt{n}}\bar{R}$$

۲.۹.۱ نمودار کنترل برای دامنه (نمودار R)

همان‌گونه که مطرح شد، با تحت کنترل بدون همزمان دو مقدار میانگین و پراکندگی یک فرآیند تولیدی، می‌توان ادعا کرد که فرآیند تولیدی مربوط به محصولی که با مقیاس کمی اندازه‌گیری می‌شود، تحت کنترل است.

به منظور تعیین حدود کنترل نیاز به تخمینی از σ_R داریم. می‌توان $\hat{\sigma}_R$ را با در نظر گرفتن توزیع دامنه‌ی نسبی $W = \frac{R}{\sigma}$ تعیین کرد. بدین صورت که d_3 ، انحراف معیار W تابع معلومی از n است. بنابراین انحراف معیار R برابر خواهد بود با $\sigma_R = d_3 \sigma$ و چون σ نامعلوم است می‌توان σ_R را به صورت زیر تخمین زد:

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_4}$$

بنابراین حدود نمودار کنترل R عبارت خواهند بود از:

$$UCL = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_4}$$

$$CL = \bar{R}$$

$$LCL = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_4}$$

اگر

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_4}$$

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_4}$$

آن‌گاه حدود کنترل نمودار R به رابطه‌های زیر ساده خواهند شد:

$$UCL = \bar{R}D_4$$

$$CL = \bar{R}$$

$$LCL = \bar{R}D_3$$

که D_3 و D_4 برای اندازه نمونه‌های مختلف در جدول کتاب کنترل کیفیت مونته‌گمری موجود می‌باشد. در مثال زیر به طور کاربردی، دو نمودار بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد:

مثال ۶.۱. رینگ‌های پیستون موتور اتومبیلی در یک کارخانه به وسیله یک فرآیند آهنگری تولید می‌شود. به منظور کنترل قطر داخل رینگ‌های تولید شده به وسیله این فرآیند، در نظر داریم از نمودارهای $\bar{X}$ و R استفاده کنیم. بدین منظور تعداد بیست و پنج نمونه که هر کدام شامل پنج رینگ است زمانی که تصور می‌شود فرآیند تحت کنترل قرار دارد، تهیه می‌گردد. جدول ۵.۱ داده‌های مربوط به این ۲۵ نمونه است. در زمان تهیه نمودارهای کنترل $\bar{X}$ و R بهتر است ابتدا نمودار R بررسی شود. به این دلیل که حدود نمودار $\bar{X}$ بستگی به تغییر پذیری فرآیند دارد و اگر تغییر پذیری تحت کنترل نباشد این حدود بی‌معنا خواهند بود.

خط مرکز نمودار R برابر خواهد بود با:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = 0.023$$

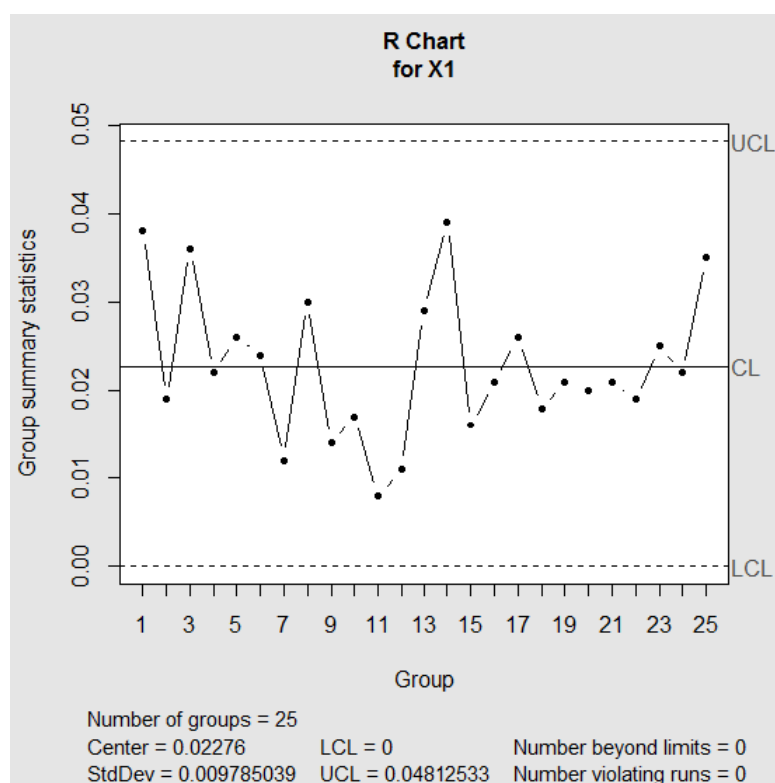
برای اندازه نمونه‌های $n = 5$ ، $d_2 = 2.326$ و $d_3 = 0.864$ به دست می‌آید. بنابراین حدود کنترل نمودار R برابر خواهد بود با:

$$LCL = 0.023(0) = 0$$

$$UCL = 0.023(2.115) = 0.049$$

```
> qcc(data = data3, type = "R", sizes = 5)
```

همانطور که در شکل ۸.۱ نشان داده شده است، هیچ‌گونه روندی که حالت خارج از کنترل را نشان دهد مشاهده نمی‌گردد. برای تهیه نمودار $\bar{x}$ ، خط مرکز این نمودار برابر است با:



شکل ۸.۱: نمودار R برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه

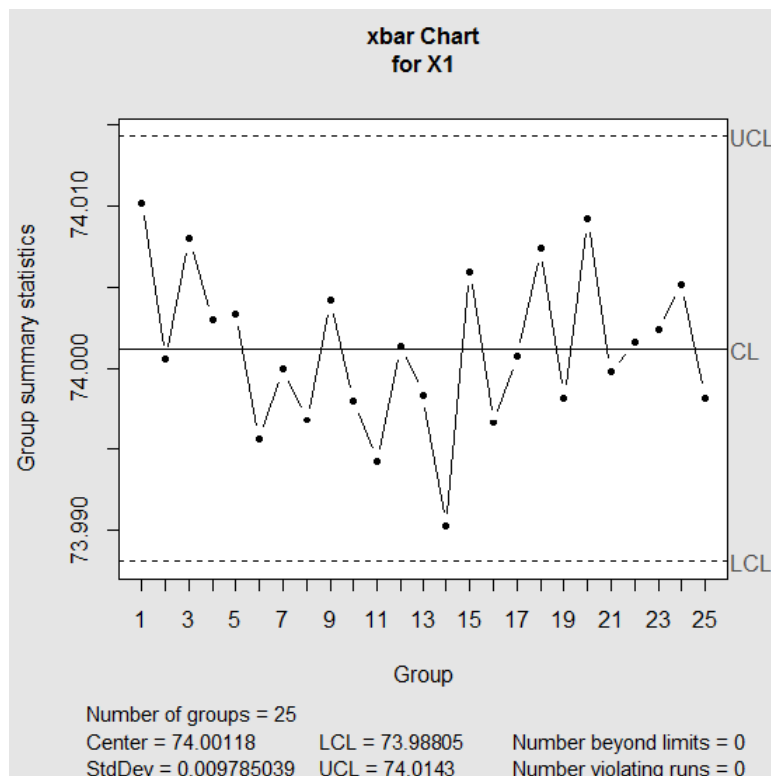
$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}}{25} = \frac{1850.28}{25} = 74.01$$

در این صورت حدود کنترل نمودار $\bar{x}$ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$UCL = 74.001 + \frac{3}{2.326\sqrt{5}}(0.23) = 74.014$$

$$LCL = 74.001 - \frac{3}{2.326\sqrt{5}}(0.23) = 73.988$$

```
> qcc(data = data3, type = "xbar", sizes = 5)
```



شکل ۹.۱: نمودار $\bar{x}$ برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه

وقتی که میانگین‌های نمونه‌ها بر روی این نمودار رسم می‌شوند هیچ‌گونه اثری از حالت خارج از کنترل مشاهده نمی‌گردد. بنابراین با توجه به دو شکل ۸.۱ و ۹.۱ نتیجه می‌گیریم که فرآیند در سطوحی که نمودارها منعکس می‌کنند، تحت کنترل قرار دارند.

۱۰.۱ کنترل کیفیت چند متغیره

در بسیاری از مواقع لازم است دو یا چند مشخصه کیفیت کمی به طور هم‌زمان تحت بررسی و کنترل قرار گیرند. به عنوان مثال، فرض کنید کارا بودن و مفید بودن یک قطعه به وسیله

بررسی همزمان قطر داخلی (x_1) و قطر خارجی آن (x_2) صورت می‌گیرد. نمایش و تفسیر همزمان دو یا چند مشخصه کیفیت، که به طور مستقل از یکدیگر رسم شده‌اند، می‌تواند گمراه کننده باشد.

در این بخش قصد داریم تا روش برای بررسی تحت کنترل بودن توام میانگین‌های چندین مشخصه کیفیت را مرور و مطرح سازیم.

نمودار کنترل کی دو

در میان نمودارهای کنترل چند متغیره، نمودار کنترل کی دو (که مشهور به نمودار کنترل T^2 هتلینگ نیز می‌باشد) به دلیل سادگی در فهم و به کارگیری آن برای اپراتورها و همچنین به دلیل شباهت زیاد آن به نمودار کنترل تک متغیره‌ی شوهارت از محبوبیت خاصی در نمودارهای کنترل چند متغیره نسبت به نمودارهای کنترل دیگر برخوردار است. اگر مشاهدات را به صورت ماتریس زیر در نظر بگیریم:

$$\underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

آماره‌ای که برای هر نمونه بر روی نمودار کنترل رسم می‌شود از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\chi_o^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

در رابطه فوق

$$\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]$$

بردار میانگین‌های تحت کنترل برای هر مشخصه‌ی کیفی و σ ماتریس کوواریانس را نشان می‌دهد. آنگاه حد کنترل بالا برای این نمودار برابر است با

$$UCL = \chi_{\alpha, p}^2$$

در رسم نمودار کنترل کی دو، به طور معمول پارامترهای μ و Σ مجهول بوده و در ابتدا باید آنها را براساس n نمونه‌ی m تایی p -متغیره برآورد نمود. در این صورت برای هر نمونه می‌توان میانگین‌ها و واریانس‌های نمونه را از رابطه‌های زیر محاسبه نمود:

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (12.1)$$

$$s_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (13.1)$$

$$s_{ihk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad \begin{cases} j \neq h \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (14.1)$$

میانگین آماره‌های $\bar{x}_{jk}$ ، s_{jk}^2 و s_{ihk} برای m نمونه از رابطه‌های زیر تعیین می‌گردند:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$s_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_{jk}^2$$

$$s_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_{ihk}$$

که در واقع این حجم اطلاعات را می‌توان در قالب دو ماتریس

$$\bar{x} = [\bar{x}_j]_{p \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^2 & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \cdots & \bar{s}_{1p} \\ & \bar{s}_2^2 & \bar{s}_{23} & \cdots & \bar{s}_{2p} \\ & & \bar{s}_3^2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bar{s}_p^2 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری دو برآوردگر $\bar{X}$ و $\bar{S}$ به جای دو پارامتر مجهول μ و Σ ، در این صورت آماره آزمون تبدیل خواهد شد به

$$T^2 = n(\bar{X} - \bar{\bar{X}})' \bar{S}^{-1} (\bar{X} - \bar{\bar{X}}) \quad (15.1)$$

نمودار کنترل که بر اساس آماره‌ی فوق تهیه می‌گردد را به طور معمول نمودار کنترل هتلینگ T^2 نامند. همانند نمودارهای کنترل تک متغیره‌ی شوهارت، نمودار کنترل کی‌دو نیز از اتصال

چندین نقطه در بستر زمان پدید می‌آید. برای رسم i امین نقطه از نمودار کنترل کی دو بر اساس مشاهدات نمونه‌ای $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، پس از محاسبه‌ی بردار میانگین‌های نمونه‌ای

$$\bar{x}' = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p]$$

کافیست نقاط (i, t_i^2) را رسم کنیم که در آن i شماره‌ی نمونه و t_i^2 مقدار مشاهده شده‌ی آماره‌ی T^2 به ازای i امین نمونه تصادفی می‌باشد. این روند به ازای $i = 1, 2, 3, \dots$ ادامه می‌یابد و در انتها نقاط را به ترتیب به یکدیگر متصل می‌سازیم. در فاز اول کنترل کیفیت همانطور که در بخش‌های قبل بیان شد هدف اصلی تهیه‌ی مجموعه‌ای از مشاهدات است که در شرایط تحت کنترل تولید شده باشند. حدود کنترل در این مرحله برای نمودار کنترل T^2 عبارتند از:

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha; p, mn-m-p+1}$$

$$LCL = 0$$

مثال ۷.۱. در یک کارخانه نساجی، مقاومت کششی (X_1) و قطر الیاف (X_2) دو مشخصه کیفیت مهم در فرآیند تولید نخ پارچه بوده که باید به طور توأم تحت کنترل قرار گیرند. براساس $m = 20$ نمونه‌ی $n = 4$ تایی $p = 2$ متغیره، مقادیر زیر با توجه به جدول برآورد شده‌اند:

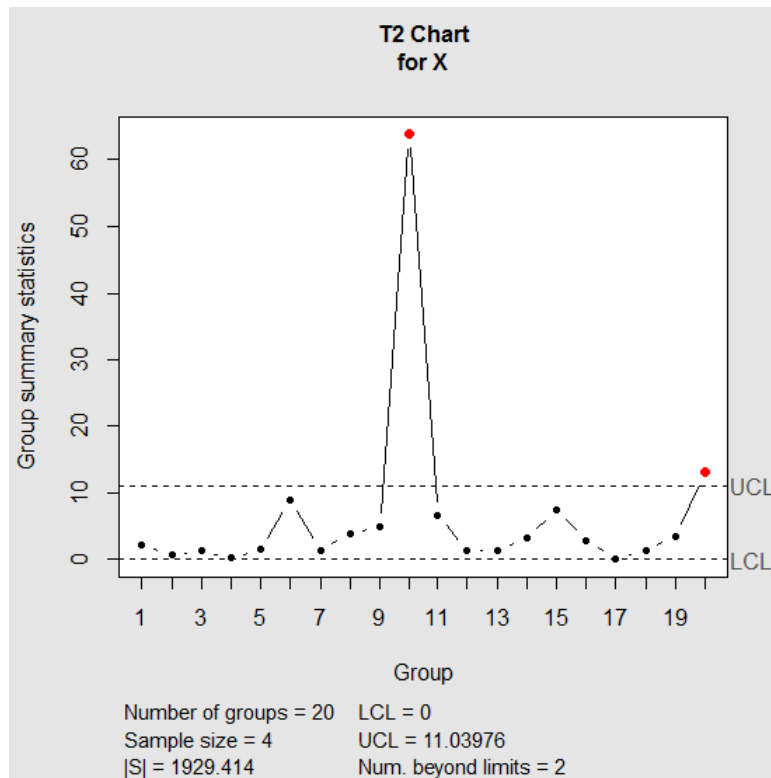
$$\widehat{T^2} = \frac{4}{(\bar{s}_1^2)(\bar{s}_2^2) - (\bar{s}_{12})^2} [\bar{s}_2^2(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1)^2 + \bar{s}_1^2(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2)^2 - 2(\bar{s}_{12})(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1)(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2)]$$

بر اساس داده‌های $m = 20$ نمونه‌ی مقدماتی $n = 4$ تایی می‌توان حد کنترل بالایی فرآیند را طبق فرمول محاسبه نمود بنابراین به ازای $\alpha = 0.001$ داریم:

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha; p, mn-m-p+1} \\ &= \frac{2(19)(3)}{20(4) - 20 - 2 + 1} F_{1-0.001; 2, 20(4) - 20 - 2 + 1} \\ &= \frac{114}{59} F_{0.999; 2, 179} \\ &= 11.039 \end{aligned}$$

X1 = matrix(c(72, 56, 55, 44, 97, 83, 47, 88, 57, 26, 46,
49, 71, 71, 67, 55, 49, 72, 61, 35, 84, 87, 73, 80, 26, 89, 66,
50, 47, 39, 27, 62, 63, 58, 69, 63, 51, 80, 74, 38, 79, 33, 22,
54, 48, 91, 53, 84, 41, 52, 63, 78, 82, 69, 70, 72, 55, 61, 62,
41, 49, 42, 60, 74, 58, 62, 58, 69, 46, 48, 34, 87, 55, 70, 94,

```
49, 76, 59, 57, 46), ncol = 4)
X2 = matrix(c(23, 14, 13, 9, 36, 30, 12, 31, 14, 7, 10,
11, 22, 21, 18, 15, 13, 22, 19, 10, 30, 31, 22, 28, 10, 35, 18,
11, 10, 11, 8, 20, 16, 19, 19, 16, 14, 28, 20, 11, 28, 8, 6,
15, 14, 36, 14, 30, 8, 35, 19, 27, 31, 17, 18, 20, 16, 18, 16,
13, 10, 9, 16, 25, 15, 18, 16, 19, 10, 30, 9, 31, 15, 20, 35,
12, 26, 17, 14, 16), ncol = 4)
X = list(X1 = X1, X2 = X2) # a list of matrices, one for each variable
q = mqcc(X, type = "T2")
```



شکل ۱۰.۱: حدود کنترل نمودار T^2

همان‌طور که در شکل ۱۰.۱ نمایش داده شد، حالت خارج از کنترل توأم دو مشخصه کنار هم نشان می‌دهد.

جدول ۱.۱: داده‌های مربوط به حدود کنترل آزمایشی مثال ۲.۱

شماره نمونه	تعداد قطعات معیوب در هر نمونه	درصد معیوب هر نمونه
۱	۱۲	۰/۲۴
۲	۱۵	۰/۳
۳	۸	۰/۱۶
۴	۱۰	۰/۲
۵	۴	۰/۰۸
۶	۷	۰/۱۴
۷	۱۶	۰/۳۲
۸	۹	۰/۱۸
۹	۱۴	۰/۲۸
۱۰	۱۰	۰/۲
۱۱	۵	۰/۱
۱۲	۶	۰/۱۲
۱۳	۱۷	۰/۳۴
۱۴	۱۲	۰/۲۴
۱۵	۲۲	۰/۴۴
۱۶	۸	۰/۱۶
۱۷	۱۰	۰/۲
۱۸	۵	۰/۱
۱۹	۱۳	۰/۲۶
۲۰	۱۱	۰/۲۲
۲۱	۲۰	۰/۴
۲۲	۱۸	۰/۳۶
۲۳	۲۴	۰/۴۸
۲۴	۱۵	۰/۳
۲۵	۹	۰/۱۸
۲۶	۱۲	۰/۲۴
۲۷	۷	۰/۱۴
۲۸	۱۳	۰/۲۶
۲۹	۹	۰/۱۸
۳۰	۶	۰/۱۲

جدول ۴.۱: داده‌های مربوط به مثال ۵.۱

شماره نمونه	n	مجموع تعداد نقص‌ها	متوسط تعداد نقص‌ها
۱	۵	۱۰	۲
۲	۵	۱۲	۲/۴
۳	۵	۸	۱/۶
۴	۵	۱۴	۲/۸
۵	۵	۱۰	۲
۶	۵	۱۶	۳/۲
۷	۵	۱۱	۲/۲
۸	۵	۷	۱/۴
۹	۵	۱۰	۲
۱۰	۵	۱۵	۳
۱۱	۵	۹	۱/۸
۱۲	۵	۵	۱
۱۳	۵	۷	۱/۴
۱۴	۵	۱۱	۲/۲
۱۵	۵	۱۲	۲/۴
۱۶	۵	۶	۱/۲
۱۷	۵	۸	۱/۶
۱۸	۵	۸	۲
۱۹	۵	۷	۱/۴
۲۰	۵	۵	۱
جمع		۱۹۳	۳۸/۶

جدول ۵.۱: داده‌های مربوط به مثال ۶.۱

شماره نمونه	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	$\bar{x}_i$	R_i
۱	۷۴/۰۳	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۱۹	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۰۸	۷۴/۰۱	۰/۰۳۸
۲	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۰۱	۷۴/۰۱۱	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۰۱	۰/۰۱۹
۳	۷۳/۹۸۸	۷۴/۰۲۴	۷۴/۰۲۱	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۰۸	۰/۰۳۶
۴	۷۴/۰۰۲	۷۳/۹۹۶	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۳	۰/۰۲۲
۵	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۱۵	۷۳/۹۸۹	۷۴/۰۱۴	۷۴/۰۰۳	۰/۰۲۶
۶	۷۴/۰۰۹	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۷	۷۳/۹۸۵	۷۳/۹۹۳	۷۳/۹۹۶	۰/۰۲۴
۷	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۹۴	۷۴/۰۰۰	۷۴/۰۰۵	۷۴	۰/۰۱۲
۸	۷۳/۹۸۵	۷۴/۰۰۳	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۱۵	۷۳/۹۸۸	۷۳/۹۹۷	۰/۰۳
۹	۷۴/۰۰۸	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۰۴	۰/۰۱۴
۱۰	۷۳/۹۹۸	۷۴	۷۳/۹۹	۷۴/۰۰۷	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹۸	۰/۰۱۷
۱۱	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹	۷۳/۹۹۴	۰/۰۰۸
۱۲	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۰۰	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰	۷۳/۹۹۶	۷۴/۰۰۱	۰/۰۱۱
۱۳	۷۳/۹۸۳	۷۴/۰۰۲	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۷	۷۴/۰۱۲	۷۳/۹۹۸	۰/۰۲۹
۱۴	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۶۷	۷۳/۹۹۴	۷۴	۷۳/۹۸۴	۷۳/۹۹	۰/۰۳۹
۱۵	۷۴/۰۱۲	۷۴/۰۱۴	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۹	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۰۶	۰/۰۱۶
۱۶	۷۴	۷۳/۹۸۴	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۶	۷۳/۹۹۷	۰/۰۲۱
۱۷	۷۳/۹۹۴	۷۴/۰۱۲	۷۳/۹۸۶	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۰۱	۰/۰۲۶
۱۸	۷۴/۰۰۶	۷۴/۰۱	۷۴/۰۱۸	۷۴/۰۰۳	۷۴	۷۴/۰۰۷	۰/۰۱۸
۱۹	۷۳/۹۸۴	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۷	۷۳/۹۹۸	۰/۰۲۱
۲۰	۷۴	۷۴/۰۱	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۹	۰/۰۲
۲۱	۷۳/۹۸۸	۷۴/۰۰۱	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۹۶	۷۴	۰/۰۳۳
۲۲	۷۴/۰۰۴	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۹۰	۷۴/۰۰۶	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۲	۰/۰۱۹
۲۳	۷۴/۰۱	۷۳/۹۸۹	۷۳/۹۹۰	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۱۴	۷۴/۰۰۲	۰/۰۲۵
۲۴	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۸	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۰۰	۷۴/۰۱	۷۴/۰۰۵	۰/۰۲۲
۲۵	۷۳/۹۸۲	۷۳/۹۸۴	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۱۷	۷۴/۰۱۳	۷۳/۹۹۸	۰/۰۳۵

جدول ۶.۱: داده‌های مربوط به مثال ۷.۱

شماره نمونه	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
۱	۷۲	۸۴	۷۹	۴۹	۲۳	۳۰	۲۸	۱۰
۲	۵۶	۸۷	۳۳	۴۲	۱۴	۳۱	۸	۹
۳	۵۵	۷۳	۲۲	۷۴	۱۳	۲۲	۶	۱۶
۴	۴۴	۸۰	۵۴	۵۸	۹	۲۸	۱۵	۲۵
۵	۹۷	۲۶	۴۸	۶۲	۳۶	۱۰	۱۴	۱۵
۶	۸۳	۸۹	۹۱	۵۸	۳۰	۳۵	۳۶	۱۸
۷	۴۷	۶۶	۵۳	۶۹	۱۲	۱۸	۱۴	۱۶
۸	۸۸	۵۰	۸۴	۴۶	۳۱	۱۱	۳۰	۱۹
۹	۵۷	۴۷	۴۱	۴۸	۱۴	۱۰	۸	۱۰
۱۰	۲۶	۳۹	۵۲	۳۴	۷	۱۱	۳۵	۳۰
۱۱	۴۶	۲۷	۶۳	۶۰	۱۰	۸	۱۹	۹
۱۲	۴۹	۶۲	۷۸	۸۷	۱۱	۲۰	۲۷	۳۱
۱۳	۷۱	۶۳	۸۲	۵۵	۲۲	۱۶	۳۱	۱۵
۱۴	۷۱	۵۸	۶۹	۷۰	۲۱	۱۹	۱۷	۲۰
۱۵	۶۷	۶۹	۷۰	۹۴	۱۸	۱۹	۱۸	۳۵
۱۶	۵۵	۶۳	۷۲	۴۹	۱۵	۱۶	۲۰	۱۲
۱۷	۴۹	۵۱	۵۵	۷۶	۱۳	۱۴	۱۶	۲۶
۱۸	۷۲	۸۰	۶۱	۵۹	۲۲	۲۸	۱۸	۱۷
۱۹	۶۱	۷۴	۶۲	۵۷	۱۹	۲۰	۱۶	۱۴
۲۰	۳۵	۳۸	۴۱	۴۶	۱۰	۱۱	۱۳	۱۶

فصل ۲

مفاهیم فازی

در این فصل به بیان برخی مفاهیم اساسی که در فصل‌های بعدی به آن نیاز داریم، پرداخته می‌شود. از این راستا که مفاهیمی مربوط به مجموعه‌های فازی و اعداد فازی و عملگرهای مجموعه‌ای اعداد فازی همراه با مثال بیان می‌شود. انتهای این فصل شامل مختصری از آنچه که در فصل‌های بعدی بیان می‌شود، است. نمودارهای این فصل با استفاده از نرم افزار جئوجبرا رسم شده است و مطالب این فصل برگرفته از کتاب مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی [۱] است.

۱.۲ مقدمه

نظریه آمار و نظریه مجموعه‌های فازی، هر دو برای مطالعه الگوها و سیستم‌های شامل عدم قطعیت آماری تعریف شده‌اند، نظریه آمار برای مطالعه الگوهای مبنی بر عدم قطعیت آماری و نظریه مجموعه‌های فازی برای مطالعه الگوهای مبنی بر عدم قطعیت امکانی (ناشی از ابهام و نادقیق بودن) مناسب است. این دو نظریه نه متناقض یکدیگرند و نه یکی دیگری را شامل می‌شود. گر چه طبیعت و کاربرد هر یک از این دو نظریه متفاوت از دیگری است، اما این باعث نمی‌شود که نتوان در یک مساله از هر دو نظریه استفاده کرد. در واقع می‌توان روش‌های نظریه‌های آمار و فازی را با هدف توصیف و تحلیل بهتر مسایل دنیای واقعی، با هم تلفیق کرد. در بین تغییرات مختلف در تمامی علوم و ریاضیات در قرن اخیر یک تغییری که مورد توجه قرار

گرفت، مفهوم عدم قطعیت است به طوری که این دیدگاه قدیمی بر این اصرار دارد که عدم قطعیت در علم مطلوب نیست و باید تلاش شود به وسیله تمامی معانی ممکن از آن دوری شود. مطابق با دیدگاه قدیمی، علم باید برای قطعیت در تمامی ابعادش (دقت، ویژگی، تیزی، سازگاری و ...) تلاش کند. اما با توجه به دیدگاه مدرن، عدم قطعیت اجتنابناپذیر است و به طور اساسی به صورت علمی بررسی می‌شود و آن نه تنها یک آفت نیست بلکه در حقیقت یک منفعت در علم به حساب می‌آید.

منطق فازی اولین بار توسط پروفسور لطفعلی عسگرزاده معروف به زاده (شکل ۱.۲)، در پی تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ در صحنه محاسبات نو ظاهر شد.

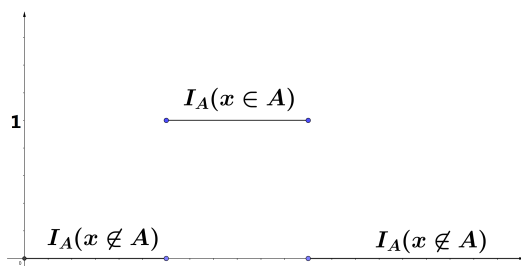


شکل ۱.۲: پروفسور عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار

در این مقاله پروفسور عسگرزاده نظریه‌ای را معرفی کرد که در آن اجزا مجموعه‌هایی با کران‌های نادقیق هستند.

۲.۲ مجموعه‌های فازی

در نظریه مجموعه‌ها، یک مجموعه معمولی با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود، در این صورت که اگر یک عضو مجموعه مرجع، آن ویژگی را دارا باشد عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد، عضو آن مجموعه نیست. با فرض این که x یک مجموعه مرجع باشد، برای هر زیر مجموعه معمولی A از مجموعه مرجع که با یک ویژگی خوش تعریف بیان می‌شود، می‌توان یک تابع نشانگر به مانند شکل ۲.۲ تعریف کرد که برای هر عضو متعلق به A مقدار یک و برای هر عضو غیر متعلق به A مقدار صفر بگیرد.



$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

شکل ۲.۲: نمودار تابع نشانگر

بیشتر مفاهیمی که در زندگی روزمره به کار می‌بریم و بر اساس آن‌ها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق هستند و مجموعه‌هایی با کران‌هایی تقریبی می‌باشند. به عنوان مثال لامپ‌های با طول عمر زیاد، ضریب هوش پایین، مسافت‌های طولانی، نرخ تورم بالا، فشار خون نامنظم همگی غیر صریح می‌باشند. نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای برای درجه‌بندی و تجزیه و تحلیل این گونه مفاهیم است. یک عکس سیاه و سفید به طور مطلق سیاه و سفید نیست، بلکه سطوح خیلی زیادی از سایه‌های خاکستری در آن وجود دارد.

تعریف ۱.۲. یک زیر مجموعه فازی از مجموعه مرجع χ توسط یک تابع $\mu_A(x) : \chi \rightarrow [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از χ ، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۲. فرض کنید $\chi = 1, 2, \dots, 7$ ، می‌خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی کوچکتر از ۷ را داشته باشند. برای مدل‌سازی این مجموعه کافی است تابع عضویت مجموعه فازی را مشخص کنیم. تعیین این تابع بستگی به نظر تصمیم‌گیرنده دارد. به طور مثال یک تابع عضویت برای مدل‌سازی مفهوم فوق این گونه است

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0.9 & x = 2 \\ 0.7 & x = 3 \\ 0.5 & x = 4 \\ 0.3 & x = 5 \\ 0.1 & x = 6 \\ 0 & x = 7 \end{cases}$$

مجموعه فازی A را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهیم.

$$A = \{(1, 1), (2, 0.9), (3, 0.7), (4, 0.5), (5, 0.3), (6, 0.1), (7, 0)\}$$

برای مثال $\mu_A(3) = 0.7$ بدین معنی است که از نظر تصمیم‌گیرنده عدد ۳ به اندازه ۰/۷ به مجموعه فازی اعداد کوچک تعلق دارد. بدیهی است که افراد مختلف ممکن است دیدگاه‌های گوناگونی درباره‌ی مفهوم کوچک داشته باشند و هر فرد مفهوم کوچک را به نوع متفاوتی مدل‌سازی کند.

۳.۲ عملگرهای مجموعه‌ای

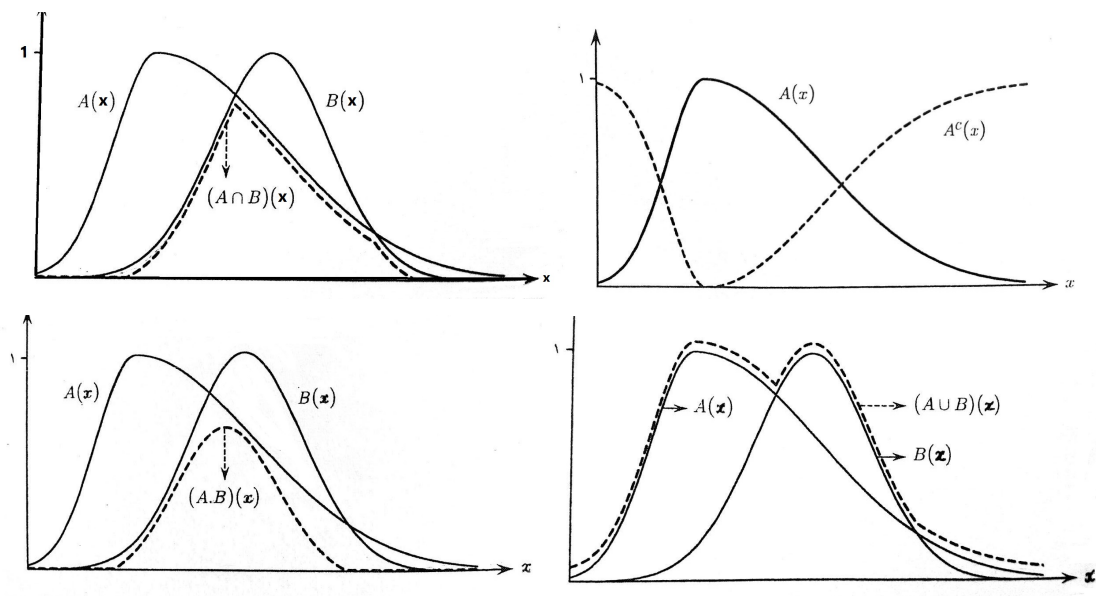
عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی به صورت یک تعمیم طبیعی این عملگرها برای مجموعه‌های معمولی تعریف می‌شوند. در ادامه فرض می‌شود که X مجموعه مرجع و $A, B, \dots$ مجموعه‌های فازی از X هستند.

ملاحظه ۱.۲. از این پس، برای کوتاهی، به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسیم $A(x)$. همچنین در حالت گسسته، x هایی از X را که برای آن‌ها $A(x) = 0$ نخواهیم نوشت.

تعریف ۲.۲. گوییم مجموعه فازی A ، زیر مجموعه‌ی مجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، اگر برای هر $x \in X$ ، $A(x) \leq B(x)$. دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$ ، اگر برای هر $x \in X$ ، $A(x) = B(x)$.
تعریف‌هایی از عملگرهای متمم، اشتراک، اجتماع، ضرب و حاصل جمع در جدول ۱.۲ و شکل ۳.۲ خلاصه شده است.

جدول ۱.۲: جدول عملگرهای مجموعه‌ای

$A^c(x) = 1 - A(x)$	متمم
$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)], \forall x \in X$	اشتراک
$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)], \forall x \in X$	اجتماع
$(A.B)(x) = A(x)B(x), \forall x \in X$	ضرب
$(A + B)(x) = A(x) + B(x) - A(x)B(x), \forall x \in X$	حاصل جمع



شکل ۳.۲: عملگرهای مجموعه‌ای

تعریف ۳.۲. اگر A یک مجموعه فازی باشد، آن گاه αA که در آن $\alpha \in [0, 1]$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $(\alpha A)(x) = \alpha A(x)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۲. توان m ام ($m > 0$) مجموعه فازی A ، که با A^m نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $A^m(x) = [A(x)]^m$ تعریف می‌شود.

به عنوان دو حالت خاص از تعریف بالا، عملگرهای تمرکز و اتساع بر مجموعه فازی A این‌گونه تعریف می‌شوند.

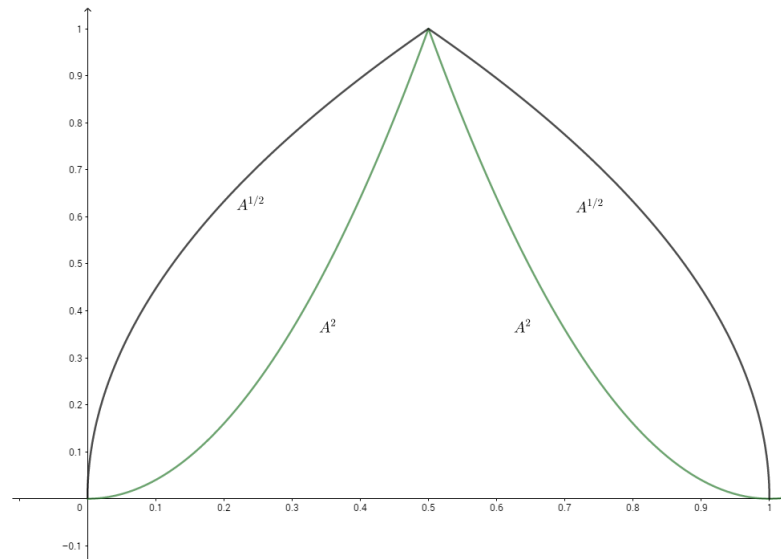
$$CON(A) = A^2 \text{ (تمرکز)}, \quad DIL(A) = A^{0.5} \text{ (اتساع)}$$

مثال ۲.۲. فرض کنید $\theta \in [0, 1]$ مجموعه مقادیر ممکن برای پارامتر θ در یک توزیع دو جمله‌ای باشد. مجموعه فازی A با تابع عضویت زیر یک توصیف برای فرضیه فازی: θ به طور تقریبی برابر $\frac{1}{4}$ است، می‌باشد.

$$A(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{4} \\ 2(1 - \theta) & \frac{1}{4} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم فرضیه فازی: θ بسیار نزدیک به $\frac{1}{4}$ است را مدل سازی کنیم می‌توانیم از A^2 استفاده کنیم. همچنین فرضیه فازی: θ به طور نسبی $\frac{1}{4}$ است را با مجموعه فازی $A^{\frac{1}{2}}$ مدل سازی می‌کنیم. خواهیم داشت

$$A^2(\theta) = \begin{cases} 4\theta^2 & 0 \leq \theta < \frac{1}{4} \\ 4(1 - \theta)^2 & \frac{1}{4} \leq \theta \leq 1 \end{cases} \quad A^{\frac{1}{2}}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2\theta} & 0 \leq \theta < \frac{1}{4} \\ \sqrt{2(1 - \theta)} & \frac{1}{4} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$



شکل ۴.۲: نمودار توابع عضویت مجموعه‌های فازی A ، A^2 و $A^{1/2}$

۱.۳.۲ α برش‌ها

تعریف ۵.۲. مجموعه عناصری از χ که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A دست کم به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، $-\alpha$ برش A (مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و با A_α نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$$

مثال ۳.۲. فرض کنید $\chi = \{0, 1, 2, \dots\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات شبانه‌روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی A از χ بیانگر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$A = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0.8 & x = 1 \\ 0.6 & x = 2 \\ 0.4 & x = 3 \\ 0.2 & x = 4 \end{cases}$$

در این صورت چند $-\alpha$ برش A عبارتند از

$$A_{0.8} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad A_{0.5} = \{0, 1, 2\}$$

$$A_{0.6} = \{0, 1, 2\} \quad A_{0.85} = \{0\}$$

۴.۲ اصل توسیع

فرض کنید $X = X_1 \times \dots \times X_n$ مجموعه مرجع و $X_1, X_2, \dots, X_n$ مجموعه فازهای n به ترتیب از $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد. به علاوه $A_1, \dots, A_n$ مجموعه فازهای n بر X باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازهای $A_1, \dots, A_n$ به صورت مجموعه فاز B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$B(y) = f(A_1, \dots, A_n)(y) = \begin{cases} \sup_{x_1, \dots, x_n} \min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

مثال ۴.۲. فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، A_1 مجموعه فاز 5 به طور تقریبی و A_2 مجموعه فاز 6 به طور تقریبی به صورت زیر باشند.

$$A_1(x) = \begin{cases} 0.8 & x = 3 \\ 0.7 & x = 4 \\ 1 & x = 5 \\ 0.7 & x = 6 \\ 0.3 & x = 7 \end{cases} \quad A_2(x) = \begin{cases} 0.6 & x = 5 \\ 1 & x = 6 \\ 0.6 & x = 7 \end{cases}$$

آنگاه بر اساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فاز 5 به طور تقریبی و 6 به طور تقریبی را انجام داد. به طور مثال

$$\begin{aligned} (A_1 \oplus A_2)(x) &= \max_{x_1+x_2=8} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \max\{\min\{A_1(3), A_2(5)\}, \min\{A_1(4), A_2(4)\}\} = \max\{0.3, 0.6\} = 0.6 \\ (A_1 \oplus A_2)(x) &= \max_{x_1+x_2=9} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} = \min\{A_1(3), A_2(6)\} = \min\{0.3, 0.6\} = 0.3 \end{aligned}$$

$$(A_1 \oplus A_2)(x) = \begin{cases} 0.3 & x_1 + x_2 = 8 \\ 0.6 & x_1 + x_2 = 9 \\ 0.7 & x_1 + x_2 = 10 \\ 1 & x_1 + x_2 = 11 \\ 0.7 & x_1 + x_2 = 12 \\ 0.6 & x_1 + x_2 = 13 \\ 0.3 & x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

۵.۲ اعداد فازی

اعداد فازی، که زیر مجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. در این بخش اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آنها، مرسوم به اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم.

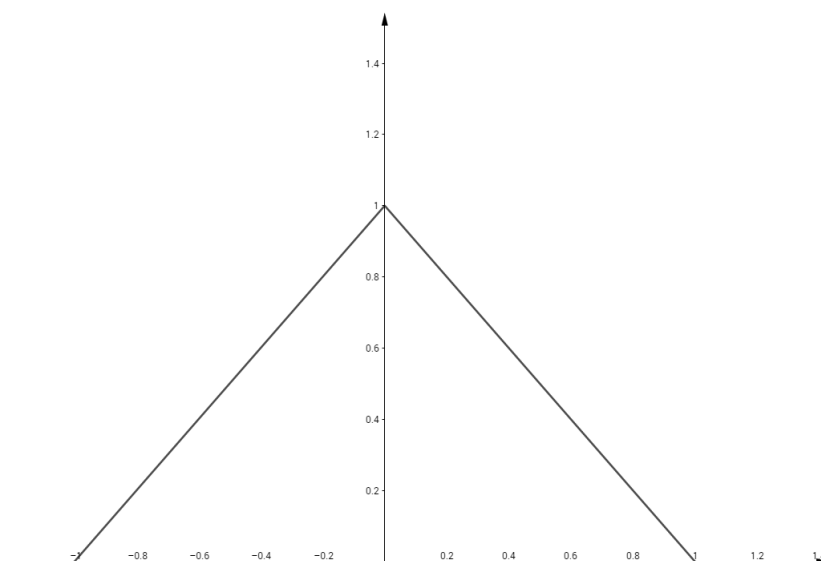
تعریف ۶.۲. مجموعه فازی N از $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (اعداد حقیقی) گوییم، اگر

۱. N نرمال و تک‌نمایی باشد. یعنی یک و به طور دقیق یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$

۲. α - برش‌های N ، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند.

مثال ۵.۲. مجموعه فازی L با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان L را یک مدل سازی برای عدد فازی به طور تقریبی صفر تعیین کرد.

$$L(x) = 1 - |x| \quad -1 \leq x \leq 1$$



شکل ۵.۲: نمودار تابع عضویت عدد فازی به طور تقریبی صفر

۱.۵.۲ اعداد فازی LR

تعریف ۷.۲. اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد

$$N(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آن گاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌نامیم.

تعریف ۸.۲. فرض کنید $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این صورت

الف) N را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$

ب) N را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = e^{-x^2}$.

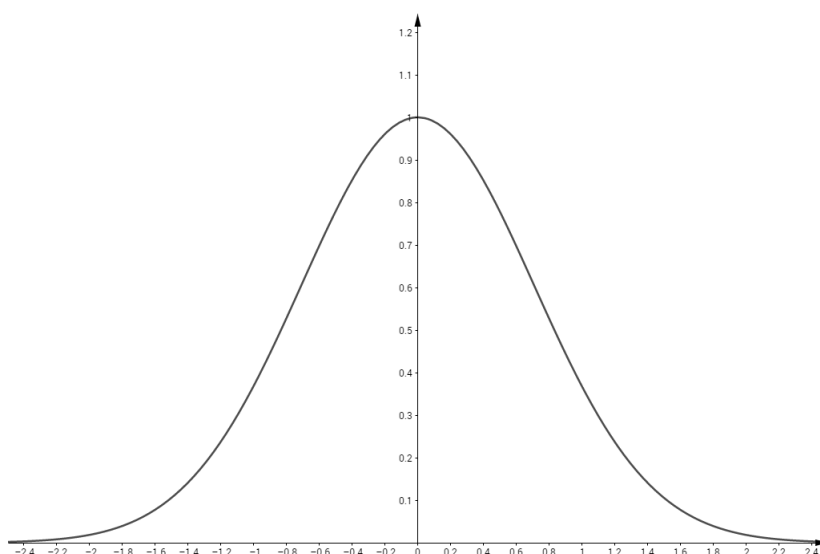
ج) N را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$

تعریف ۹.۲. اگر برای عدد فازی N ، $L = R$ و $\alpha = \beta$ ، آن گاه N را یک عدد فازی متقارن می‌نامیم و با $N = (m, \alpha)$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن N ، مثلثی، نرمال یا سهموی باشد، به ترتیب از نمادهای $N = (m, \alpha)_T$ و $N = (m, \alpha)_N$ و $N = (m, \alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۶.۲. فرض کنید M یک عدد فازی LR متقارن باشد و $L(x) = R(x) = e^{-x^2}$ و $m = 0$ و $\alpha = \beta$ در این صورت

$$M(x) = \begin{cases} L(\frac{0-x}{1}) = e^{-x^2} & x \leq 0 \\ R(\frac{x-0}{1}) = e^{-x^2} & x > 0 \end{cases}$$

یعنی $M(x) = e^{-x^2}$ ، $x \in R$. نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن M که می‌توان آن را یک عدد فازی به طور تقریبی صفر تعبیر کرد.



شکل ۶.۲: نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن به طور تقریبی صفر

ساختار فصل‌های دیگر به صورت زیر است:

- در فصل دوم به مفاهیم مربوط به نمودارهای کنترل کیفیت آماری پرداخته می‌شود.
- فصل سوم به نمودارهای کنترل نسبت اقلام معیوب (امیرزاده و همکاران ۲۰۰۹) و همچنین تعداد اقلام معیوب (مهدی‌پور و همکاران، ۱۳۹۶) با استفاده از درجه‌ی عدم انطباق می‌پردازیم.
- در فصل چهارم به نمودار تعداد نقص‌ها در یک واحد بازرسی ($\tilde{c}$) (ربیعی و همکاران ۱۳۹۶) و همچنین نمودار متوسط نقص‌ها در چند واحد بازرسی ($\tilde{u}$) پرداخته می‌شود.

فصل ۳

نمودار کنترل تعداد و نسبت اقلام معیوب با استفاده از درجه عدم انطباق

فصل سوم شامل معرفی نمودار نسبت اقلام معیوب با کیفیت فازی به همراه مثالی کاربردی برای مقایسه می‌باشد [۶] و نمودار تعداد اقلام معیوب نیز بیان می‌شود [۳] که برای مقایسه نتیجه حاصل از کیفیت فازی با کیفیت کلاسیک از دو معیار منحنی مشخصه عملکرد (OC) و متوسط طول دنباله (ARL) استفاده شده است.

۱.۳ مقدمه

بعد از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی توسط پروفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵، یکی از روش‌های پیشنهاد شده در حوزه نمودارهای کنترل استفاده از کیفیت فازی است. در این روش با استفاده از آماره تعداد اقلام معیوب (ناقص) است که این آماره تابعی از یک مشخصه کیفی می‌باشد و به صورت کمی اندازه گیری شده است. با استفاده از این آماره معرفی شده حدود کنترل برای نمودار تعداد اقلام معیوب با استفاده از درجه عدم انطباق معرفی می‌شود. استفاده از این نمودارهای کنترل در مواقعی که درجه بی‌کیفیتی اقلام معیوب برای کاربر مساوی نباشد، مناسب است. در این فصل به تفصیل در مورد این روش بحث می‌کنیم. در این فصل و فصل بعد از نرم افزار R استفاده شده است.

دامنه‌ی مربوط به یک مشخصه‌ی کمی به طور معمول بازه‌ای پیوسته در نظر گرفته می‌شود و با توجه به ماهیت این متغیر، می‌تواند بطور پیوسته در این محدوده تغییر کند. لذا مقادیر ثبت شده از یک متغیر کمی حاوی اطلاعات زیاد و دقیقی از متغیر مربوطه می‌باشند. اما در مقابل، مقادیر مشاهده شده از یک مشخصه کیفیت که به کمک یک مقیاس کیفی (وصفی) اندازه‌گیری شده باشند، اطلاعات بسیار کمی را از مشخصه مربوطه در بر دارند؛ زیرا این متغیرها تنها مجاز به اختیار کردن دو مقدار صفر و یک (که به ترتیب به منزله‌ی خوب/بد، باکیفیت/بی‌کیفیت، قابل قبول/غیرقابل قبول و سالم/معیوب هستند) می‌باشند که با استفاده از این روش سعی شده است تا این کمبود اطلاعات نهفته در داده‌های متغیر کیفی برطرف گردد.

۲.۳ کیفیت فازی

حدود مشخصه فنی همان پراکندگی مجاز است که توسط مهندسان ساخت، مشتری و یا طراحان محصول برای رسیدن به هدف مشخص تعیین می‌شود. حدود مشخصه فنی بالا با USL ^۱ و پایین با LSL ^۲ نشان داده می‌شوند. اگر مقدار مشخصه کیفیت اندازه‌گیری شده یک محصول تولیدی با استانداردها و حدود مشخصه فنی تطابق داشته باشد (متعلق به حدود مشخصه فنی باشد) آن گاه آن محصول سالم و در غیر این صورت محصول معیوب شناخته می‌شود. گفتنی است که این حدود بدون در نظر گرفتن کیفیت عوامل تولیدی و حدود کنترل تعیین می‌شوند. به این ترتیب می‌توان درجه کیفیت و درجه بی‌کیفیتی مقدار مشخصه کیفیت y را به ترتیب با توابع $Q(y)$ و $1 - Q(y)$ نشان داد که در آن‌ها

$$Q(y) = \begin{cases} 1 & y \in [LSL, USL] \\ 0 & y \notin [LSL, USL] \end{cases}$$

تابع نشانگر بازه‌ی $[LSL, USL]$ است.

Y با مجموعه‌ی مرجع (دامنه‌ی) χ در نظر بگیرید. همان طور که مطرح شد، کیفیت معمولی به وسیله‌ی بازه‌ی $[LSL, USL]$ مشخص می‌شود که می‌توان آن را با تابع نشانگر $I_{[LSL, USL]}(y)$ نیز نمایش داد. برای یک محصول با حدود مشخصه معلوم، $y \in [LSL, USL]$ به معنای با کیفیت بودن آن کالا است و در مقابل $I_{[LSL, USL]}(y) = 0$ به معنای بی‌کیفیتی آن کالا می‌باشد.

تعریف ۱.۳. تابع عضویت کیفیت فازی $\tilde{Q}$ تابعی از χ به بازه‌ی $[0, 1]$ است به طوری که اگر Y مشخصه کیفیت مشاهده شده برای یک کالا باشد آن گاه $\tilde{Q}(y)$ میزان کیفیت فازی آن کالا را نشان دهد.

^۱Upper Specification Limits

^۲Lower Specification Limits

به عبارت دیگر، $\tilde{Q} \in F(X)$ کیفیت فازی برای مشخصه کیفیت Y است اگر و تنها اگر $\tilde{Q}$ نشان دهنده‌ی میزان کیفیت آن کالا به ازای هر $Y \in X$ باشد که در آن مجموعه $F(X)$ تمام مجموعه‌های فازی روی X است.

بنابراین در کیفیت فازی، مقدار $\tilde{Q}(y)$ میزان کیفیت یک محصول است که مقدار مشخصه کیفیت آن برابر Y است و میزان بی‌کیفیتی آن یعنی $\tilde{N}(y)$ از رابطه‌ی $\tilde{Q}(y) = 1 - \tilde{N}(y)$ به دست می‌آید.

در کیفیت فازی حالت‌های بیشتری نسبت به دو حالت محدود صفر و یک (سالم و معیوب) می‌توان برای کیفیت یک محصول در نظر گرفت و بر اساس نمودارهای کنترل قضاوت منصفانه‌تری در مورد تحت کنترل بودن یک فرآیند تولیدی ارائه نمود.

در واقع اگر ملاک کیفیت فازی را در رسم نمودار کنترل یک کالا لحاظ کنیم، آن‌گاه داده‌های ثبت شده برای مشخصه کیفیت حاوی اطلاعات بیشتری، نسبت به کیفیت غیرفازی هستند؛ زیرا در این حالت، دیگر داده‌های ثبت شده لزوماً مقادیر صفر یا یک نبوده و مجازند تا هر عددی از بازه‌ی $[0, 1]$ را به عنوان درجه‌ی کیفیت کالا اختیار کنند و همین موضوع سبب ارتقاء ارزش داده‌های ثبت شده برای یک متغیر کیفی در حالت کیفیت فازی می‌گردد. بدیهی است که استنتاج به کمک این داده‌ها و بر اساس نمودارهای کنترل شوهارت، جهت بررسی تحت کنترل بودن و یا تحت کنترل نبودن فرآیند، بسیار معتبرتر از روش‌های سنتی خواهد بود.

۳.۳ نمودارهای کنترل کیفیت فازی

برخی از نمودارهای کنترل شوهارت مبتنی بر آمارهای ترسیم می‌شوند که مفهوم «تعداد» را در بردارد. به عنوان نمونه می‌توان به نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب (نمودار کنترل np) و همچنین نمودار کنترل تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی (نمودار کنترل c) اشاره کرد.

در کیفیت معمولی و غیر فازی، مفهوم «تعداد» را می‌توان به کمک مفهوم تابع نشانگر به صورت زیر بازنویسی نمود. فرض کنید $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از مشخصه کیفی Y باشد، آن‌گاه با در نظر گرفتن مفهوم کیفیت غیرفازی که در بخش قبل معرفی شد، $N(Y_1), \dots, N(Y_n)$ نیز یک نمونه تصادفی n تایی از متغیر تصادفی $N(Y)$ است به‌طوری‌که به ازای $i = 1, \dots, n$ داریم $N(Y_i) \in \{0, 1\}$. در این صورت می‌توان تعداد بی‌کیفیتی‌ها (به طور مثال تعداد نقص‌ها، یا تعداد اقلام معیوب) در یک نمونه‌ی تصادفی n تایی را به صورت مجموع n عدد صفر یا یک (که به ترتیب نشانگر باکیفیتی و بی‌کیفیتی کالاها می‌باشند)، یعنی $\sum_{i=1}^n N(Y_i)$ ، نشان داد.

بر اساس این ترفند که به طور معمول برای تعمیم تعاریف معمولی به تعاریف فازی متداول و شایع است، قضیه زیر خط مرکزی و حدود کنترل نمودارهای شوهارت را مبتنی بر کیفیت

فازی تعمیم می‌دهد. این تعمیم برای حالتی است که آماره‌ی نمودارهای کنترل براساس مشخصه کیفیتی با مفهوم «تعداد» باشد.

قضیه ۱.۳. [۴] فرض کنید مشخصه کیفی Y به وسیله‌ی آماره‌ی W ، که به نوعی مفهوم تعداد را در بر دارد، اندازه گیری می‌شود. در این صورت، مدل کلی حدود کنترل و خط مرکزی در نمودارهای کنترل شوهارت مبتنی بر کیفیت فازی $\tilde{Q}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} LCL &= n \left(1 - \mu_{\tilde{Q}} - k \frac{\sigma_{\tilde{Q}}}{\sqrt{n}} \right) = n \left(\mu_{\tilde{N}} - k \frac{\sigma_{\tilde{N}}}{\sqrt{n}} \right) \\ CL &= n \left(1 - \mu_{\tilde{Q}} \right) = n \mu_{\tilde{N}} \\ UCL &= n \left(1 - \mu_{\tilde{Q}} + k \frac{\sigma_{\tilde{Q}}}{\sqrt{n}} \right) = n \left(\mu_{\tilde{N}} + k \frac{\sigma_{\tilde{N}}}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

برهان. در حالتی که کیفیت بوسیله مجموعه فازی $\tilde{Q} = 1 - \tilde{N}$ تعریف شود، متغیر تصادفی $\tilde{N}(Y_i) \in [0, 1]$ میزان و درجه‌ی بی‌کیفیتی i امین عضو از نمونه تصادفی را نشان می‌دهند و در نتیجه می‌توان مجموع درجات بی‌کیفیتی‌ها در نمونه n تایی را بوسیله‌ی آماره‌ی

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^n \tilde{N}(Y_i) = \sum_{i=1}^n (1 - \tilde{Q}(Y_i))$$

که تعمیم یافته‌ی آماره‌ی تعداد بی‌کیفیتی‌ها (W) است، نشان داد. به عبارت دیگر، تعداد بی‌کیفیتی‌ها برابر مجموع درجات عضویت به مجموعه‌ی فازی کالاهای بی‌کیفیت است. توجه داشته باشید که تعداد بی‌کیفیتی‌ها (نقص‌ها یا معایب) با نماد $w_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ و مجموع درجات بی‌کیفیتی‌ها با نماد $\tilde{w}_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ نشان داده شده‌اند. به‌طوری‌که $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{Z}^+$ به ترتیب مجموعه‌های اعداد صحیح مثبت و اعداد حقیقی مثبت هستند. بنابراین به منظور محاسبه‌ی حدود کنترل نمودارهای کنترل شوهارت که مبتنی بر نظریه مجموعه‌های فازی می‌باشند، کافی است در فرمول‌های کلی حدود نمودار کنترل از آماره‌ی $\tilde{W}$ به جای W استفاده شود. در نتیجه با توجه به فرمول کلی نمودارهای شوهارت، حد کنترل پایینی نمودار کنترل شوهارت برای این آماره برابر است با

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_{\tilde{W}} - k \sigma_{\tilde{W}} \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n (1 - \tilde{Q}(Y_i)) \right] - k \sqrt{\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n (1 - \tilde{Q}(Y_i)) \right]} \\ &= n - E \left[\sum_{i=1}^n \tilde{Q}(Y_i) \right] - k \sqrt{\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n \tilde{Q}(Y_i) \right]} \\ &= n - n E[\tilde{Q}(Y)] - k \sqrt{n \text{Var}[\tilde{Q}(Y)]} \\ &= n \left(1 - \mu_{\tilde{Q}} - k \frac{\sigma_{\tilde{Q}}}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

که در آن $\mu_{\tilde{Q}}$ و $\sigma_{\tilde{Q}}$ به ترتیب میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی $\tilde{Q}(Y)$ است که با استفاده از قضیه زیر با توجه به فرضیه نرمال بودن مشخصه کیفیت به دست می‌آیند. به همین ترتیب می‌توان برای CL و UCL نیز اثبات مشابهی را مطرح کرد. $\square$

قضیه ۲.۳. [۶] فرض کنید مشخصه کیفیت $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ و دارای تابع عضویت کیفیت دوزنقه‌ای

$$\tilde{Q}(Y) = T(a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & Y < a \\ \frac{Y-a}{b-a} & a \leq Y < b \\ 1 & b \leq Y \leq c \\ \frac{d-Y}{d-c} & c < Y < d \\ 0 & Y \geq d \end{cases}$$

بنابراین

(i)

$$\mu_{\tilde{N}} = E(\tilde{N}(Y)) = 1 - E(\tilde{Q}(Y)) \quad Var(\tilde{N}(Y)) = Var(\tilde{Q}(Y))$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Q}} = E(\tilde{Q}(Y)) &= \frac{\sigma}{b-a} \left(\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \frac{\mu-a}{b-a} \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \left(\phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \frac{\sigma}{c-d} \left(\varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \frac{\mu-d}{c-d} \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} E(\tilde{Q}^2(Y)) &= \frac{\sigma}{(b-a)^2} \left((\mu-a)\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - (b+\mu-2a)\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \left(\phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \frac{\sigma}{(c-d)^2} \left((c+\mu-2d)\varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - (\mu-d)\varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \frac{\sigma^2 + (\mu-d)^2}{(c-d)^2} \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-d}{\sigma}\right) \right) \\ &+ \frac{\sigma^2 + (\mu-a)^2}{(b-a)^2} \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \end{aligned}$$

که در آن $\phi(\circ)$ و $\varphi(\circ)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع احتمال نرمال استاندارد هستند.

برهان. قسمت (ii)

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{Q}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}(y)f(y)dy \\ &= \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right) \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy + \int_b^c \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy \\ &\quad + \int_c^d \left(\frac{d-y}{d-c}\right) \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b y \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy - \frac{a}{b-a} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy \\ &\quad + \int_b^c \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy + \frac{d}{d-c} \int_c^d \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy \\ &\quad - \frac{1}{d-c} \int_c^d y \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2}(y-\mu)^2} dy\end{aligned}$$

با تبدیل متغیر $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ و تعیین کران‌های انتگرال داریم:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu)\varphi(z)dz - \frac{a}{b-a} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z)dz \\ &\quad + \int_{\frac{b-\mu}{\sigma}}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \varphi(z)dz + \frac{d}{d-c} \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z)dz - \frac{1}{d-c} \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu)\varphi(z)dz \\ &= \frac{\sigma}{b-a} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} z\varphi(z)dz + \frac{\mu}{b-a} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z)dz \\ &\quad - \frac{a}{b-a} \left[\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right] + \left[\phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right] \\ &\quad + \frac{d}{d-c} \left[\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right] - \frac{\sigma}{d-c} \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} z\varphi(z)dz - \frac{\mu}{d-c} \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z)dz \\ &= \frac{\sigma}{b-a} \left[\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right] + \frac{\mu}{b-a} \left[\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right] \\ &\quad - \frac{a}{b-a} \left[\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right] + \left[\phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right] + \frac{d}{d-c} \left[\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\sigma}{d-c} \left[\varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) \right] - \frac{\mu}{d-c} \left[\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right]\end{aligned}$$

زیرا

$$\int_{k_1}^{k_2} z\varphi(z) = \varphi(k_1) - \varphi(k_2)$$

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{Q}^r(y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}^r(y) f(y) dy \\
 &= \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^r \frac{1}{\sqrt{r}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{r\sigma^r}(y-\mu)^r} dy + \int_b^c \frac{1}{\sqrt{r}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{r\sigma^r}(y-\mu)^r} dy \\
 &\quad + \int_c^d \left(\frac{d-y}{d-c}\right)^r \frac{1}{\sqrt{r}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{r\sigma^r}(y-\mu)^r} dy \\
 &= \frac{1}{(b-a)^r} \int_a^b (y^r + a^r - r ay) \frac{1}{\sqrt{r}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{r\sigma^r}(y-\mu)^r} dy + \int_b^c \frac{1}{\sqrt{r}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{r\sigma^r}(y-\mu)^r} dy \\
 &\quad + \frac{1}{(d-c)^r} \int_c^d (y^r + d^r - r yd) \frac{1}{\sqrt{r}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{r\sigma^r}(y-\mu)^r} dy
 \end{aligned}$$

با تبدیل متغیر $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ و تغییر کران‌های انتگرال داریم:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(b-a)^r} \left(\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu)^r \varphi(z) dz + a^r \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz - r a \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu) \varphi(z) dz \right) \\
 &\quad + \int_{\frac{b-\mu}{\sigma}}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz \\
 &\quad + \frac{1}{(d-c)^r} \left(\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu)^r \varphi(z) dz + d^r \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz - r d \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu) \varphi(z) dz \right) \\
 &= \frac{1}{(b-a)^r} \left(\sigma^r \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} z^r \varphi(z) dz + \mu^r \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz + r \mu \sigma \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} z \varphi(z) dz \right) \\
 &\quad + \frac{1}{(b-a)^r} \left(a^r \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz - r a \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu) \varphi(z) dz \right) \\
 &\quad + \int_{\frac{b-\mu}{\sigma}}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz \\
 &\quad + \frac{1}{(d-c)^r} \left(\sigma^r \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} z^r \varphi(z) dz + \mu^r \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz + r \mu \sigma \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} z \varphi(z) dz \right) \\
 &\quad + \frac{1}{(d-c)^r} \left(d^r \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz - r d \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu) \varphi(z) dz \right)
 \end{aligned}$$

آن گاه در ادامه عبارت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(b-a)^2} \left[\sigma^2 \left(-\frac{b-\mu}{\sigma} \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) + \frac{a-\mu}{\sigma} \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(b-a)^2} \left[\mu^2 \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) + 2\mu\sigma \left(\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(b-a)^2} \left[a^2 \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz - 2a \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu) \varphi(z) dz \right] + \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz \\
 &+ \frac{1}{(d-c)^2} \left[\sigma^2 \left(-\frac{d-\mu}{\sigma} \varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + \frac{c-\mu}{\sigma} \varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(d-c)^2} \left[\mu^2 \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) + 2\mu\sigma \left(\varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(d-c)^2} \left[d^2 \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \varphi(z) dz - 2d \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} (z\sigma + \mu) \varphi(z) dz \right] \\
 &= \frac{1}{(b-a)^2} \left[\sigma \left((\mu-b) \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) + (a-\mu) \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) + \sigma^2 \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(b-a)^2} \left[\mu^2 \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) - 2\mu\sigma \left(\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(b-a)^2} \left[a^2 \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) + 2a\sigma \left(\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &- \frac{1}{(b-a)^2} \left[2a\mu \left(\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] + \left(\phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \right) \\
 &+ \frac{1}{(d-c)^2} \left[\sigma \left((\mu-d) \varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + (c-\mu) \varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) + \sigma^2 \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(d-c)^2} \left[\mu^2 \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) - 2\mu\sigma \left(\varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(d-c)^2} \left[d^2 \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) + 2d\sigma \left(\varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\
 &- \frac{1}{(d-c)^2} \left[2c\mu \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۳. در حالت خاص، اگر یک تابع عضویت مثلثی خواهد بود، داریم :

$$(i) \quad \mu_{\tilde{N}} = E(\tilde{N}(Y)) = 1 - E(\tilde{Q}(Y)) \quad \text{Var}(\tilde{N}(Y)) = \text{Var}(\tilde{Q}(Y))$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \mu_{\tilde{Q}} = E(\tilde{Q}(X)) &= \frac{\sigma}{m-a} \left(\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right) \right) \\
 &+ \frac{\mu-a}{m-a} \left(\phi\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right) \\
 &+ \frac{\sigma}{m-d} \left(\varphi\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) \right) \\
 &+ \frac{\mu-d}{m-d} \left(\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad E(\tilde{Q}^r(X)) &= \frac{\sigma}{(m-a)^r} ((\mu-a)\varphi(\frac{a-\mu}{\sigma}) - (m+\mu-2a)\varphi(\frac{m-\mu}{\sigma})) \\
 &+ \frac{\sigma}{(m-d)^r} ((m+\mu-2d)\varphi(\frac{m-\mu}{\sigma}) - (\mu-d)\varphi(\frac{d-\mu}{\sigma})) \\
 &+ \frac{\sigma^r + (\mu-d)^r}{(m-d)^r} (\phi(\frac{d-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{m-d}{\sigma})) \\
 &+ \frac{\sigma^r + (\mu-a)^r}{(m-a)^r} (\phi(\frac{m-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma}))
 \end{aligned}$$

برهان. کافی است در قضیه ۲.۳ عدد دوزنقه‌ای $\tilde{Q}(y) = T(a, b, c, d)$ مقدار $b = c = m$ در نظر گرفته شود. $\square$

۱.۳.۳ نمودار کنترل فازی نسبت اقلام معیوب (نمودار $\tilde{p}$)

نسبت تعداد اقلام معیوب بر اساس کیفیت فازی را از یک زمان به زمان دیگر، یا از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر، می‌توان بر روی نمودار کنترل $\tilde{p}$ رسم کرد. تنها وقتی استفاده از نمودار کنترل $\tilde{p}$ به جای نمودار کنترل p در عمل توجیه دارد که درجه‌ی بی کیفیتی تمامی اقلام معیوب از دیدگاه کاربر مساوی نباشد. برای رسم نمودار براساس اطلاعات m نمونه n تایی، کافی است نقاط $(i, \frac{\tilde{w}_i}{n})$ را به ازای $i = 1, \dots, m$ بر روی یک نمودار دو بعدی رسم کرده به طوریکه

$$\tilde{w}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{N}(y_i) = \sum_{j=1}^n (1 - \tilde{Q}(y_i))$$

مجموع درجات بی کیفیتی در نمونه i ام، y_i مقدار مشخصه کیفیت امین عضو نمونه i ام و $\tilde{Q}$ تابع عضویت کیفیت فازی است. اگر تمامی نقاط رسم شده بین حدود کنترل قرار داشته و هیچ گونه رفتار سیستماتیکی از خود نشان ندهند، آن گاه می‌توان تحت کنترل بودن آماره مربوطه را نتیجه گرفت. اما برای ترسیم نمودار کنترل شوهارت و تشخیص حدود کنترل تنها کافیتست مقادیر میانگین و انحراف معیار $\tilde{Q}(X)$ براساس داده‌ها برآورد کرد که این کار توسط روابط

$$\bar{\tilde{Q}} = \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{Q}(y_i)}{m}, \quad s_{\tilde{Q}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{s_i^r}{m}}$$

که در آن

$$s_i^r = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{Q}(y_i) - \bar{\tilde{Q}}(y_i))^r}{n-1}, \quad \bar{\tilde{Q}}(y_i) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{Q}(y_i)}{n}$$

لذا با توجه به قضیه ۲.۳ برآورد حدود کنترل نمودار $\tilde{p}$ برابرند با

$$\widehat{LCL} = (1 - \bar{\bar{Q}} - k \frac{s_{\bar{Q}}}{\sqrt{n}})$$

$$\widehat{CL} = 1 - \bar{\bar{Q}}$$

$$\widehat{UCL} = (1 - \bar{\bar{Q}} + k \frac{s_{\bar{Q}}}{\sqrt{n}})$$

۲.۳.۳ نمودار کنترل فازی تعداد اقلام معیوب

برای رسم نمودار براساس اطلاعات m نمونه n تایی، کفایست نقاط $(i, \tilde{w}_i)$ را به ازای $i = 1, \dots, m$ بر روی یک نمودار دو بعدی رسم کرد. برای محاسبه حدود کنترل نمودار فازی تعداد اقلام معیوب کفایست تا حدود کنترل $\tilde{np}$ را ضرب در حجم نمونه یعنی n کنیم. لذا برآورد حدود کنترل نمودار $\tilde{np}$ برابرند با

$$\widehat{LCL} = n(1 - \bar{\bar{Q}} - k \frac{s_{\bar{Q}}}{\sqrt{n}})$$

$$\widehat{CL} = n(1 - \bar{\bar{Q}})$$

$$\widehat{UCL} = n(1 - \bar{\bar{Q}} + k \frac{s_{\bar{Q}}}{\sqrt{n}})$$

۳.۳.۳ کاربرد در خودروسازی

رینگ‌های پیستون موتور اتومبیلی در یک کارخانه به وسیله یک فرآیند تولید می‌شود. به منظور کنترل قطر داخل رینگ‌های تولید شده به وسیله این فرآیند، در نظر داریم از نمودارهای $\bar{x}$ و R استفاده کنیم. بدین منظور تعداد بیست و پنج نمونه که هر کدام شامل پنج رینگ است، زمانی که تصور می‌شود فرآیند تحت کنترل قرار دارد، جدول ۱.۳ تهیه می‌گردد.

زمانی که نمودار کنترل میانگین‌های نمونه‌ها شکل ۱.۳ و نمودار کنترل انحراف معیار شکل ۲.۳ مشاهده می‌شود، هیچ‌گونه اثری از حالت خارج کنترل بودن مشاهده نمی‌گردد. با توجه به حالت کنترل فرآیند با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده، میانگین و انحراف معیار فرآیند تولید را به صورت

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = 74, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{0.00929}{0.94}$$

تخمین می‌زنیم.

سپس پانزده نمونه دیگر از فرآیند تولید رینگ‌های پیستون جمع‌آوری شده است. که نمودار کنترل میانگین ۴۰ نمونه با حدود کنترل به دست آمده از ۲۵ نمونه‌ی اولیه در شکل ۳.۳ و نمودار انحراف معیار این ۴۰ نمونه در شکل ۴.۳ رسم شده است.

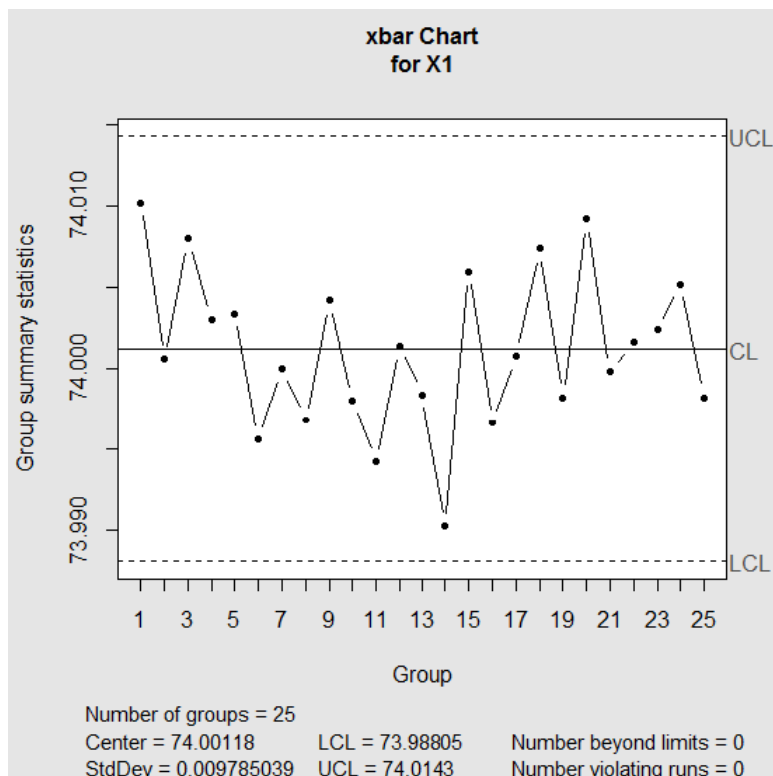
حال با توجه به اینکه مشخصات فنی قطر داخلی رینگ پیستون در حالت غیر فازی

$$74 \pm 0.05$$

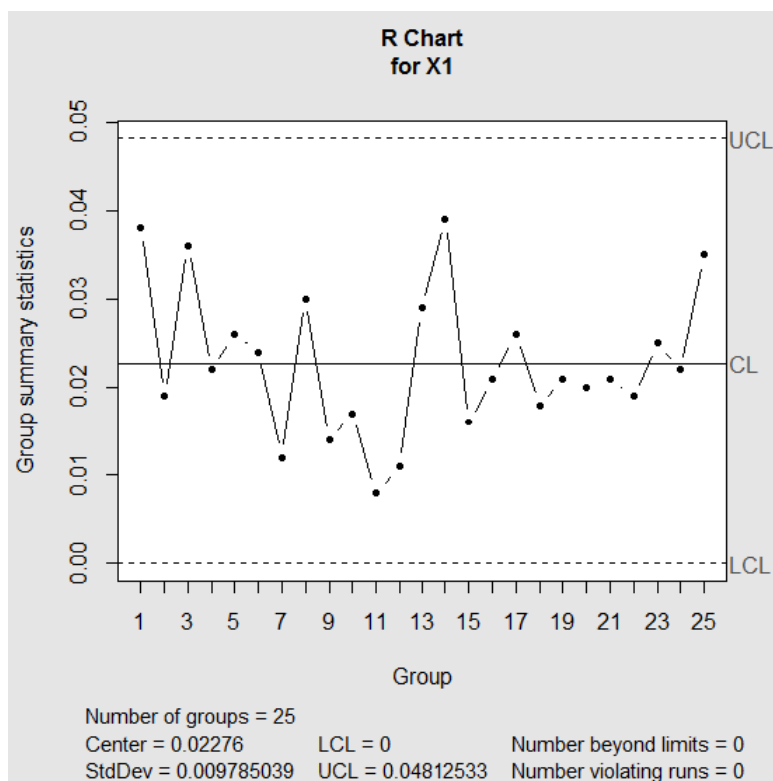
جدول ۱.۳: قطر داخل رینگ‌های تولید شده

شماره نمونه	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
۱	۷۴/۰۳	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۱۹	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۰۸
۲	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۰۱	۷۴/۰۱۱	۷۴/۰۰۴
۳	۷۳/۹۸۸	۷۴/۰۲۴	۷۴/۰۲۱	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۲
۴	۷۴/۰۰۲	۷۳/۹۹۶	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۹
۵	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۱۵	۷۳/۹۸۹	۷۴/۰۱۴
۶	۷۴/۰۰۹	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۷	۷۳/۹۸۵	۷۳/۹۹۳
۷	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۹۴	۷۴	۷۴/۰۰۵
۸	۷۳/۹۸۵	۷۴/۰۰۳	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۱۵	۷۳/۹۸۸
۹	۷۴/۰۰۸	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۴
۱۰	۷۳/۹۹۸	۷۴	۷۳/۹۹	۷۴/۰۰۷	۷۳/۹۹۵
۱۱	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹
۱۲	۷۴/۰۰۴	۷۴	۷۴/۰۰۷	۷۴	۷۳/۹۹۶
۱۳	۷۳/۹۸۳	۷۴/۰۰۲	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۷	۷۴/۰۱۲
۱۴	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۶۷	۷۳/۹۹۴	۷۴	۷۳/۹۸۴
۱۵	۷۴/۰۱۲	۷۴/۰۱۴	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۹	۷۴/۰۰۷
۱۶	۷۴	۷۳/۹۸۴	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۶
۱۷	۷۳/۹۹۴	۷۴/۰۱۲	۷۳/۹۸۶	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۷
۱۸	۷۴/۰۰۶	۷۴/۰۱	۷۴/۰۱۸	۷۴/۰۰۳	۷۴
۱۹	۷۳/۹۸۴	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۹۷
۲۰	۷۴	۷۴/۰۱	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۲	۷۴/۰۰۳
۲۱	۷۳/۹۸۸	۷۴/۰۰۱	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۹۶
۲۲	۷۴/۰۰۴	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۹	۷۴/۰۰۶	۷۴/۰۰۹
۲۳	۷۴/۰۱	۷۳/۹۸۹	۷۳/۹۹	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۱۴
۲۴	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۸	۷۳/۹۹۳	۷۴	۷۴/۰۱
۲۵	۷۳/۹۸۲	۷۳/۹۸۴	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۱۷	۷۴/۰۱۳

است، برای درجه انطباق تابع عضویت مثلثی ۱.۳ را در نظر می‌گیریم.



شکل ۱.۳: نمودار $\bar{X}$ برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه



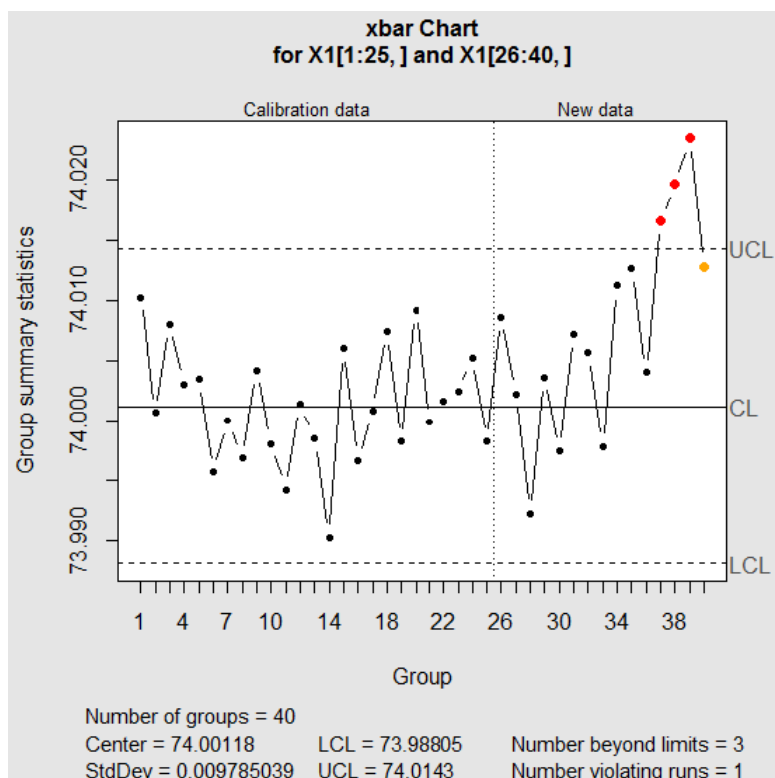
شکل ۲.۳: نمودار R برای ۲۵ نمونه‌ی اولیه

جدول ۲.۳: فاز دوم نمونه‌گیری رینگ‌های پیستون تولیدی

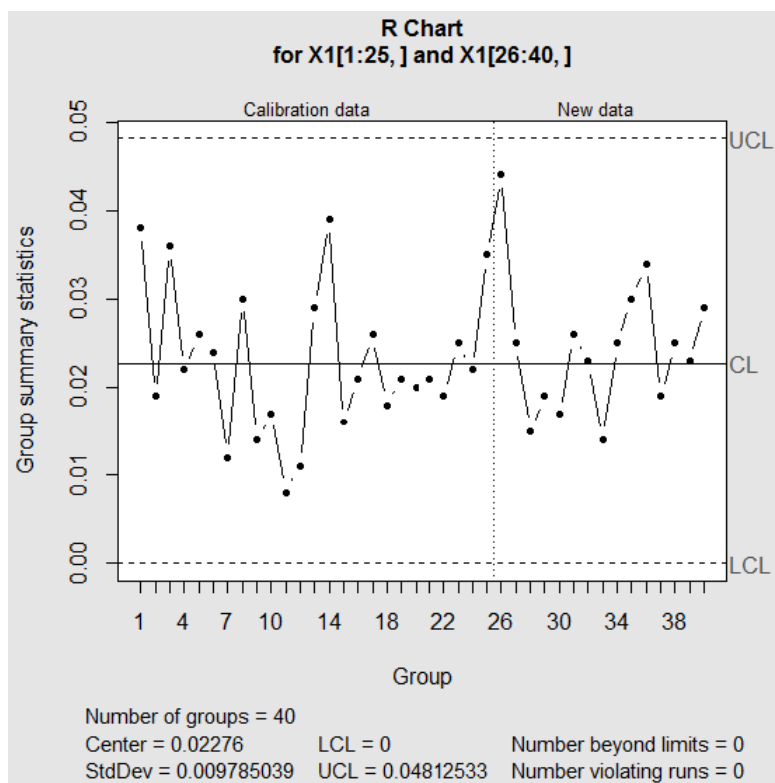
شماره نمونه	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
۱	۷۴/۰۱۲	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۳	۷۳/۹۸۶	۷۴/۰۰
۲	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۱	۷۳/۹۹	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۱
۳	۷۳/۹۸۷	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۸۵	۷۴/۰۰۰	۷۳/۹۹
۴	۷۴/۰۰۸	۷۴/۰۱	۷۴/۰۰۳	۷۳/۹۹۱	۷۴/۰۰۶
۵	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۸۶	۷۳/۹۹۷
۶	۷۳/۹۹۴	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۲	۷۴/۰۰۴
۷	۷۳/۰۰۸	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۱۸	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۵
۸	۷۳/۰۰۱	۷۴/۰۰۴	۷۳/۹۹۰	۷۳/۹۹۶	۷۳/۹۸۸
۹	۷۴/۰۱۵	۷۴	۷۴/۰۱۶	۷۴/۰۲۵	۷۴/۰۰۰
۱۰	۷۴/۰۳	۷۴/۰۰۵	۷۴	۷۴/۰۱۶	۷۴/۰۱۲
۱۱	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۹۰	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۱	۷۴/۰۲۴
۱۲	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۲	۷۴/۰۲۴	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۱۹
۱۳	۷۴/۰۳۵	۷۴/۰۱	۷۴/۰۱۲	۷۳/۰۱۵	۷۴/۰۲۶
۱۴	۷۴/۰۱۷	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۳۶	۷۴/۰۲۵	۷۴/۰۲۶
۱۵	۷۴/۰۱	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۲۹	۷۴	۷۴/۰۲

$$\tilde{Q}(y) = \begin{cases} 0 & y < 73/95 \\ \frac{y-73/95}{0/05} & 73/95 \leq y \leq 74 \\ \frac{74/05-y}{0/05} & 74 < y \leq 74/05 \\ 0 & y > 74/05 \end{cases} \quad (1.3)$$

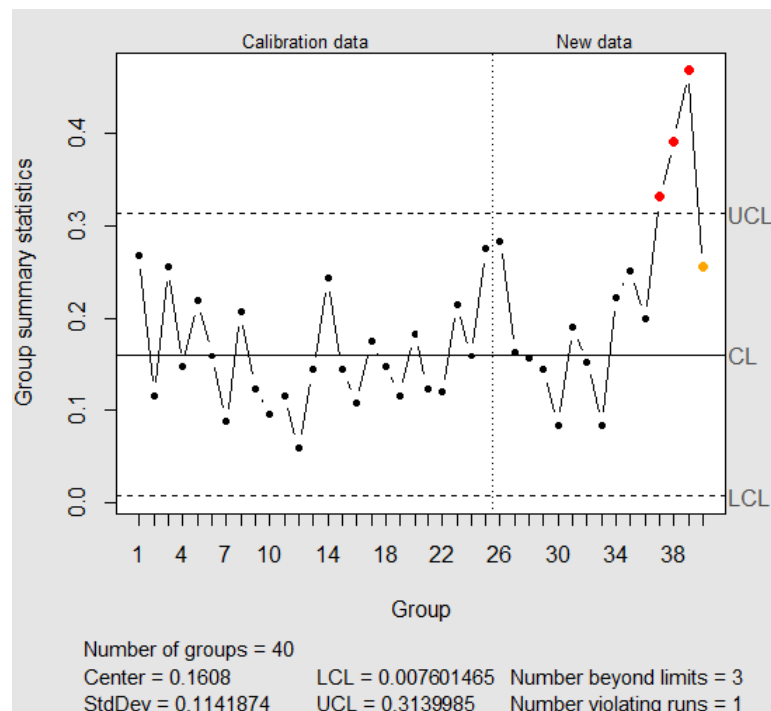
با توجه به تابع عضویت که برای قطر داخلی رینگ پیستون در نظر گرفت، به ازای هر مشاهده، ما یک درجه عدم انطباق متعلق به هر مشاهده مطابق جدول ۴.۳ و ۳.۳ خواهیم داشت. که بنابراین نمودار نسبت اقلام معیوب با بهره‌مندی از کیفیت فازی با استفاده از متوسط درجه عدم انطباق مشاهدات در شکل ۵.۳ رسم شده است.



شکل ۳.۳: نمودار $\bar{X}$ و برای ۴۰ نمونه

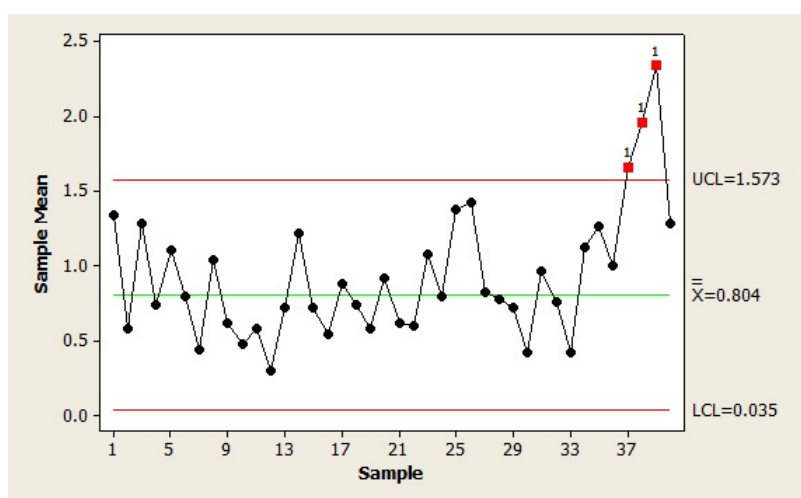


شکل ۴.۳: نمودار R برای ۴۰ نمونه‌ی



شکل ۵.۳: نمودار $\bar{p}$ برای ۴۰ نمونه ۵ تایی

با استفاده از مجموع درجه عدم انطباق مشاهدات نمودار $\bar{np}$ در شکل ۶.۳ نشان داده شده است.



شکل ۶.۳: نمودار $\bar{np}$ برای ۴۰ نمونه ۵ تایی

جدول ۳.۳: درجه عدم انطباق مشاهدات (فاز اول)

شماره نمونه	$\tilde{N}(y_1)$	$\tilde{N}(y_2)$	$\tilde{N}(y_3)$	$\tilde{N}(y_4)$	$\tilde{N}(y_5)$
۱	۰/۶	۰/۰۴	۰/۳۸	۰/۱۶	۰/۱۶
۲	۰/۱	۰/۱۶	۰/۰۲	۰/۲۲	۰/۰۸
۳	۰/۲۴	۰/۴۸	۰/۴۲	۰/۱	۰/۰۴
۴	۰/۰۴	۰/۰۸	۰/۱۴	۰/۳	۰/۱۸
۵	۰/۱۶	۰/۱۴	۰/۳	۰/۲۲	۰/۲۸
۶	۰/۱۸	۰/۱۲	۰/۶	۰/۳	۰/۱۴
۷	۰/۱	۰/۱۲	۰/۱۲	۰	۰/۱
۸	۰/۳	۰/۰۶	۰/۱۴	۰/۳	۰/۲۴
۹	۰/۱۶	۰/۱	۰/۱۸	۰/۱	۰/۰۸
۱۰	۰/۰۴	۰	۰/۲	۰/۱۴	۰/۱
۱۱	۰/۱۲	۰/۰۴	۰/۱۲	۰/۱	۰/۲
۱۲	۰/۰۸	۰	۰/۱۴	۰	۰/۰۸
۱۳	۰/۳۴	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۰۶	۰/۲۴
۱۴	۰/۱۲	۰/۶۶	۰/۱۲	۰	۰/۳۲
۱۵	۰/۲۴	۰/۲۸	۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۱۴
۱۶	۰	۰/۳۲	۰/۱	۰/۰۴	۰/۰۸
۱۷	۰/۱۲	۰/۲۴	۰/۲۸	۰/۱	۰/۱۴
۱۸	۰/۱۲	۰/۲	۰/۳۶	۰/۰۶	۰
۱۹	۰/۳۲	۰/۰۴	۰/۰۶	۰/۱	۰/۰۶
۲۰	۰	۰/۲	۰/۲۶	۰/۴	۰/۰۶
۲۱	۰/۲۴	۰/۰۲	۰/۱۸	۰/۱	۰/۰۸
۲۲	۰/۰۸	۰/۰۲	۰/۲	۰/۱۲	۰/۱۸
۲۳	۰/۲	۰/۲۲	۰/۲	۰/۱۸	۰/۲۸
۲۴	۰/۳	۰/۱۶	۰/۱۴	۰/۳۴	۰/۲
۲۵	۰/۳۶	۰/۳۲	۰/۱	۰/۲۸	۰/۲۶

شماره نمونه	$\tilde{N}(y_1)$	$\tilde{N}(y_2)$	$\tilde{N}(y_3)$	$\tilde{N}(y_4)$	$\tilde{N}(y_5)$
۲۶	۰/۲۴	۰/۳	۰/۶	۰/۳	۰
۲۷	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰	۰/۰۲
۲۸	۰/۲۶	۰/۰۲	۰/۳	۰	۰/۲
۲۹	۰/۱۶	۰/۲	۰/۰۶	۰/۱۸	۰/۱۲
۳۰	۰/۰۶	۰	۰/۰۲	۰/۲۸	۰/۰۶
۳۱	۰/۱۲	۰/۰۶	۰/۳	۰/۴	۰/۰۸
۳۲	۰/۱۶	۰/۰۴	۰/۳۶	۰/۱	۰/۱
۳۳	۰/۰۲	۰/۰۸	۰/۲	۰/۰۸	۰/۰۴
۳۴	۰/۳	۰	۰/۳۲	۰/۵	۰
۳۵	۰/۶	۰/۱	۰	۰/۳۲	۰/۲۴
۳۶	۰/۰۲	۰/۲	۰/۱	۰/۲	۰/۴۸
۳۷	۰/۳	۰/۴	۰/۴۸	۰/۱	۰/۳۸
۳۸	۰/۷	۰/۲	۰/۲۴	۰/۳	۰/۵۲
۳۹	۰/۳۴	۰/۲۶	۰/۷۲	۰/۵	۰/۵۲
۴۰	۰/۲	۰	۰/۵۸	۰	۰/۴

نمودار $\bar{X}$ برای ۴۰ مشاهده به مانند شکل ۵.۳ و ۶.۳ خارج از کنترل شدن فرآیند براثر تغییر میانگین را نشان می‌دهند. در شکل ۴ نمودار $\tilde{p}$ برای $\frac{\sum_{i=1}^5 \tilde{N}(y_i)}{5}$ با حدود کنترل

$$CL = 0/16, UCL = 0/31, LCL = 0$$

رسم شده است. در حالی که اگر تمامی مشاهدات را در نظر بگیریم، تمامی آن‌ها در بازه‌ی حدود مشخصه فنی هستند که با نگاه کنترل کیفیت معمولی درجه عدم انطباق صفر خواهند گرفت زیرا:

$$N(y) = \begin{cases} 0 & y \in [LSL, USL] \\ 1 & y \notin [LSL, USL] \end{cases}$$

به عبارت دیگر نمودار p در تمامی ۴۰ مشاهده حالت کنترل فرآیند را نشان می‌دهد. درواقع می‌توان دریافت که نمودار $\tilde{p}$ بر خلاف نمودار p خارج از کنترل رفتن فرآیند را بر اثر تغییر تشخیص خواهد داد.

در ادامه قصد داریم با استفاده از معیار OC به مقایسه دو نمودار $p, \tilde{p}$ بپردازیم. که این مقایسه برای نمودارهای $np, n\tilde{p}$ به طور مشابه برقرار است.

فرضیه‌های آزمون کیفیت به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} H_0: \text{فرآیند در کنترل است} \\ H_1: \text{فرآیند خارج از کنترل است} \end{cases}$$

با فرض $Y \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ اگر μ_0 و σ_0 به $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma_0$ ($\sigma_1^2 = k\sigma_0^2$) تغییر پیدا کند، آنگاه نسبت محصولات غیرمنطبق و میانگین و واریانس درجه عدم انطباق از مقادیر $p_0, \mu_{\tilde{N}_0}, \sigma_{\tilde{N}_0}^2$ به مقادیر $p_1, \mu_{\tilde{N}_1}, \sigma_{\tilde{N}_1}^2$ تغییر پیدا می‌کند.

$$p_0 = 1 - p(L \leq Y \leq U | H_0), \mu_{\tilde{N}_0} = E(\tilde{N}(Y) | H_0), \sigma_{\tilde{N}_0}^2 = Var(\tilde{N}(Y) | H_0)$$

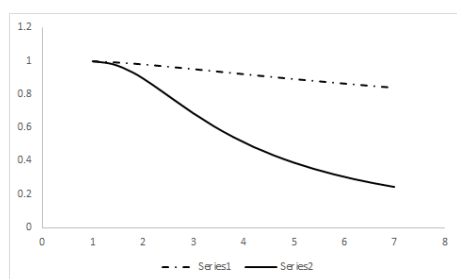
$$p_1 = 1 - p(L \leq Y \leq U | H_1), \mu_{\tilde{N}_1} = E(\tilde{N}(Y) | H_1), \sigma_{\tilde{N}_1}^2 = Var(\tilde{N}(Y) | H_1)$$

$$\beta_{np} = P\{np_0 - 3n\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} < n\hat{p} < np_0 + 3n\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} | H_1\}$$

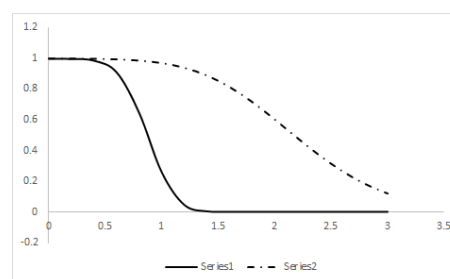
$$\beta_{\tilde{n}p} = P\{n(\mu_{\tilde{N}_0} - 3\frac{\sigma_{\tilde{N}_0}^2}{\sqrt{n}}) < n\tilde{N} < n(\mu_{\tilde{N}_0} + 3\frac{\sigma_{\tilde{N}_0}^2}{\sqrt{n}})\}$$

با توجه به میزان تغییرات مختلف در میانگین و واریانس، مقدار خطا را در جدول ۵.۳ با توجه به فرمول‌های ذکر شده، محاسبه کردیم. سپس در شکل ۷.۳ توانایی دو روش در تشخیص تغییرات در فرآیند با در نظر گرفتن k ‌های مختلف نشان داده شده است.

همانطور که در شکل ۷.۳ مشخص است، میزان خطا در نمودار کنترل p به نسبت بیشتر از میزان خطا نمودار کنترل $\tilde{p}$ می‌باشد. همچنین مقایسه از نظر معیار ARL در شکل ۸.۳ نشان داده شده است که توانایی بهتر نمودار نسبت اقلام معیوب با کیفیت فازی را در تشخیص تغییر در فرآیند را نشان می‌دهد.



(ب) با تغییر واریانس

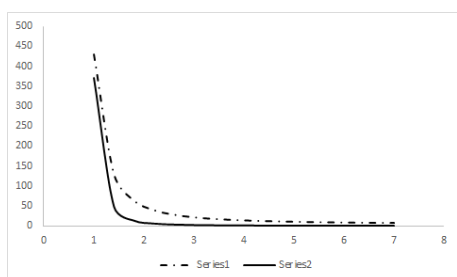


(آ) با تغییر میانگین

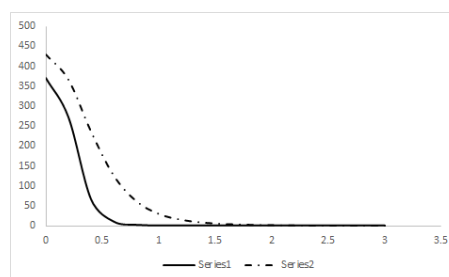
شکل ۷.۳: منحنی OC برای نمودار $\tilde{c}$ (—) و نمودار c (---)

جدول ۵.۳: خطای نوع دوم برای $|k|$ مختلف

با تغییر واریانس			با تغییر میانگین		
$\beta_{\tilde{p}}$	β_p	k	β_p	$\beta_{\tilde{p}}$	$ k $
۰/۹۹۷۳	۰/۹۹۷۶	۱	۰/۹۹۷۶	۰/۹۹۷۳	۰
۰/۹۷۹۷	۰/۹۹۲۲	۱/۴	۰/۹۹۷۲	۰/۹۹۶۳	۰/۲
۰/۹۲۹۵	۰/۹۸۴۰	۱/۸	۰/۹۹۵۸	۰/۹۸۵۰	۰/۴
۰/۸۵۴۰	۰/۹۷۳۸	۲/۲	۰/۹۹۲۱	۰/۹۰۹۰	۰/۶
۰/۷۶۸۸	۰/۹۶۲۶	۲/۶	۰/۹۸۴۰	۰/۶۴۳۴	۰/۸
۰/۶۸۵۳	۰/۹۵۰۸	۳	۰/۹۶۷۵	۰/۲۵۶۲	۱
۰/۶۰۹۰	۰/۹۳۸۷	۳/۴	۰/۹۳۶۹	۰/۰۴۴۱	۱/۲
۰/۵۴۱۶	۰/۹۲۶۶	۳/۸	۰/۸۸۶۴	۰/۰۰۲۸	۱/۴
۰/۴۸۳۱	۰/۹۱۴۷	۴/۲	۰/۸۱۲۱	۰	۱/۶
۰/۴۳۲۵	۰/۹۰۲۹	۴/۶	۰/۷۱۴۷	۰	۱/۸
۰/۳۸۸۹	۰/۸۹۱۵	۵	۰/۶۰۰۸	۰	۲
۰/۳۵۱۲	۰/۸۸۰۴	۵/۴	۰/۴۸۰۵	۰	۲/۲
۰/۳۱۸۵	۰/۸۶۹۶	۵/۸	۰/۳۶۵۲	۰	۲/۴
۰/۲۸۹۹	۰/۸۵۹۱	۶/۲	۰/۲۶۳۹	۰	۲/۶
۰/۲۶۴۹	۰/۸۴۹۰	۶/۶	۰/۱۸۱۵	۰	۲/۸
۰/۲۴۲۸	۰/۸۳۹۲	۷	۰/۱۱۹۲	۰	۳



(ب) با تغییر واریانس



(آ) با تغییر میانگین

شکل ۸.۳: منحنی ARL برای نمودار $\tilde{c}$ (-) و نمودار c (- -)

فصل ۴

نمودار تعداد نقص‌ها در یک و چند واحد بازرسی با استفاده از درجه‌ی عدم انطباق

این فصل در ادامه معرفی نمودارهای کنترل c و u در محیط فازی می‌پردازیم. در بخش اول این فصل نمودار تعداد نقص‌ها براساس کیفیت فازی (نمودار $\tilde{c}$) [۲] به تفصیل بیان می‌شود. به دنبال تعمیم نمودار تعداد نقص‌ها در یک واحد بازرسی، در بخش دوم این فصل نمودار متوسط تعداد نقص‌های فازی در چند واحد بازرسی به همراه مثال شرح داده می‌شود.

۱.۴ مقدمه

گاهی ممکن است وجود نقص در محصول آن را از « سالم » بودن نیندازد، بلکه کیفیت آن را کاهش دهد، به طور مثال وجود ناصافی یا لک در بدنه اتومبیل موجب رد شدن آن نمی‌شود ولی کیفیت آن را پایین می‌آورد. وجود زدگی در پارچه یا کاشی نمونه‌های دیگری از این نوع مشخصه می‌باشند. در مواردی که انجام شمارش کلی تعداد موارد نبود انطباق با مشخصه‌ها در هر قلم محصول، یا در هر گروه با تعداد برابر از اقلام همانند، مناسب باشد، ممکن است استفاده از شیوه‌ی نمودار کنترل رسم شده بر پایه‌ی توزیع پواسن منطقی باشد؛ و این کار به

معنی استفاده از نمودار c یا نمودار u است. که در فصل دوم به معرفی این نمودارها پرداخته شد. در دیدگاه نمودارهای کنترل تعداد نقص‌ها، تمامی نقص‌ها هم ارزش و یکسان در نظر گرفته می‌شود و تحت کنترل بودن آماره‌ی تعداد نقص‌ها که از توزیع پواسن تبعیت می‌کند، به وسیله‌ی نمودار کنترل بررسی می‌شود. این در حالی است که اهمیت این نقص‌ها از دید مصرف‌کننده و تولیدکننده در عمل به طور معمول یکسان نبوده و لذا در چنین مواردی استفاده از نمودار کنترل تعداد نقص‌ها در محیط کیفیت فازی جلوه می‌کند. در این فصل به معرفی دو نمودار کنترل $\bar{c}$ برای تعداد نقص‌ها در محیط کیفیت فازی و $\bar{u}$ برای متوسط تعداد نقص‌ها در هر محصول در محیط کیفیت فازی با یک مثال پرداخته خواهد شد.

۲.۴ نمودار کنترل فازی تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی

برای کنترل تعداد نقص‌ها براساس کیفیت فازی، به مانند نمودار کنترل c ، ابتدا لازم است یک واحد بازرسی یکسان برای هر نمونه تعریف و انتخاب گردد. واحد بازرسی میزان ثابتی از خروجی یک سیستم تولید که باید به طور منظم مورد بازرسی قرار گیرد. لذا واحد بازرسی می‌تواند شامل یک گروه سه تایی، پنج تایی و یا تعدادی کمتر یا بیشتر از محصول مورد نظر باشد.

همانطور که در فصل ۲ بیان شد، در نمودار کنترل c فرض می‌شود نقص‌ها یا عدم انطباق‌ها در واحد بازرسی دارای توزیع پواسن هستند. به عبارت دیگر X که تعداد نقص‌ها را مشخص می‌کند دارای توزیع پواسن با پارامتر c است. بنابراین آماره استفاده شده در نمودار c همان X می‌باشد.

پس از معرفی و تعیین واحد بازرسی، برای رسم نمودار کنترل c بر اساس اطلاعات m واحد بازرسی، کافی است نقاط (j, y_j) را به ازای $j = 1, 2, \dots, m$ بر روی صفحه رسم و به یکدیگر متصل کنیم.

فرض کنید $Y_1, \dots, Y_k$ ، مشاهدات k مشخصه کیفیت تشکیل دهنده‌ی یک واحد بازرسی باشند که

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \quad i = 1, \dots, k$$

آنگاه میزان درجه بی‌کیفیتی هریک از این k مؤلفه با تابع $N_i(Y_i)$ و میزان درجه کیفیت با تابع $Q_i(Y_i)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$N_i(Y_i) = \begin{cases} 0 & LSL \leq Y_i \leq USL \\ 1 & o.w \end{cases}, \quad N_i(y_i) = 1 - Q_i(y_i) \quad (1.4)$$

بنابراین تعداد نقص‌های یک واحد بازرسی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$X = \sum_{i=1}^k N_i(Y_i)$$

حال فرض کنید $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ مشخصات کیفی اندازه‌گیری شده باشد، آن‌گاه به ازای

$$N_i(Y_i) \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, k$$

و لذا چون $N_i(Y_i)$ ها مستقل و هریک دارای توزیع برنولی با پارامتر P_i (ناهم توزیع) هستند، بنابراین مجموع آن‌ها یعنی

$$X = \sum_{i=1}^k N_i(Y_i)$$

براساس پیوست آ دارای توزیع دوجمله‌ای پواسن با $\mu = \sum_{i=1}^k P_i$ و $\sigma^2 = \sum_{i=1}^k P_i(1 - P_i)$ است.

تابع $N(Y_i)$ مربوط به زمانی است که کارشناس مربوطه با استفاده از کنترل کیفیت معمولی بخواهد در مورد کالای تولیدی خود، تصمیم‌گیری نماید. اما اگر میزان بی‌کیفیتی هر کدام از نقص‌ها برای کارشناس اهمیت داشته باشد، آن‌گاه می‌توان با تعمیم نمودار کنترل c به محیط فازی یعنی به ازای هر مقدار Y_i میزان درجه بی‌کیفیتی مشخصه مشاهده شده $\tilde{N}_i(Y_i) \in [0, 1]$ بنابراین مجموع درجه‌ی بی‌کیفیتی یک واحد بازرسی در کیفیت فازی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_i) \quad (2.4)$$

با توجه به آماره معرفی شده در معادله ۲.۴ و معادله عمومی کنترل شوهارت، حدود کنترل نمودار $\bar{c}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} UCL &= E(\tilde{X}) + 3\sqrt{\text{var}(\tilde{X})} \\ &= E\left(\sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_i)\right) + 3\sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_i)\right)} \\ &= \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_i)) + 3\sqrt{\sum_{i=1}^k \text{Var}(\tilde{N}_i(Y_i)) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(\tilde{N}_i(Y_i), \tilde{N}_j(Y_j))} \\ CL &= E(\tilde{X}) = E\left(\sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_i)\right) = \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_i)) \\ LCL &= E(\tilde{X}) - 3\sqrt{\text{Var}(\tilde{X})} \\ &= E\left(\sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_i)\right) - 3\sqrt{\text{var}\left(\sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_i)\right)} \\ &= \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_i)) - 3\sqrt{\sum_{i=1}^k \text{Var}(\tilde{N}_i(Y_i)) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(\tilde{N}_i(Y_i), \tilde{N}_j(Y_j))} \\ E(\tilde{N}(Y_i)) &= 1 - E(\tilde{Q}(Y_i)), \quad \text{Var}(\tilde{N}(Y_i)) = \text{Var}(\tilde{Q}(Y_i)) \end{aligned}$$

با فرض استقلال مشخصه‌ها از هم داریم:

$$Cov(\tilde{N}_i(Y_i), \tilde{N}_j(Y_j)) = 0$$

بنابراین حدود کنترل نمودار $\tilde{c}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} UCL &= \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_i)) + 3\sqrt{\sum_{i=1}^k Var(\tilde{N}_i(Y_i))} \\ CL &= \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_i)) \\ LCL &= \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_i)) - 3\sqrt{\sum_{i=1}^k Var(\tilde{N}_i(Y_i))} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی حدود کنترل فوق نیاز به محاسبه‌ی $E(\tilde{N}_i(y_i))$ و $Var(\tilde{N}_i(y_i))$ داریم که در قضیه زیر به آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید که Y_i ‌های مشخصه‌های کیفیت مختلف با توزیع $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ و میزان انطباق دارای تابع عضویت دوزنقه‌ای

$$\tilde{Q}_i(Y_i) = T(a_i, b_i, e_i, d_i) = \begin{cases} 0 & Y_i < a_i \\ \frac{Y_i - a_i}{b_i - a_i} & a_i \leq Y_i < b_i \\ 1 & b_i \leq Y_i \leq e_i \\ \frac{d_i - Y_i}{d_i - e_i} & e_i < Y_i < d_i \\ 0 & Y_i \geq d_i \end{cases}$$

پس

(i)

$$\mu_{\tilde{N}_i} = E(\tilde{N}_i(Y_i)) = 1 - E(\tilde{Q}_i(Y_i)), \quad Var(\tilde{N}_i(Y_i)) = Var(\tilde{Q}_i(Y_i))$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Q}_i} = E(\tilde{Q}_i(Y_i)) &= \frac{\sigma_i}{b_i - a_i} \left(\varphi\left(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \varphi\left(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right) \\ &+ \frac{\mu_i - a_i}{b_i - a_i} \left(\phi\left(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \phi\left(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right) \\ &+ \left(\phi\left(\frac{e_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \phi\left(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right) \\ &+ \frac{\sigma_i}{e_i - d_i} \left(\varphi\left(\frac{e_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \varphi\left(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right) \\ &+ \frac{\mu_i - d_i}{e_i - d_i} \left(\phi\left(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \phi\left(\frac{e_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} E(\tilde{Q}_i^{\gamma}(Y_i)) &= \frac{\sigma_i}{(b_i - a_i)^{\gamma}} ((\mu_i - a_i)\varphi(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i}) - (b_i + \mu_i - \gamma a_i)\varphi(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &\quad + (\phi(\frac{e_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\sigma_i}{(e_i - d_i)^{\gamma}} ((e_i + \mu_i - \gamma d_i)\varphi(\frac{e_i - \mu_i}{\sigma_i}) - (\mu_i - d_i)\varphi(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\sigma_i^{\gamma} + (\mu_i - d_i)^{\gamma}}{(e_i - d_i)^{\gamma}} (\phi(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{e_i - d_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\sigma_i^{\gamma} + (\mu_i - a_i)^{\gamma}}{(b_i - a_i)^{\gamma}} (\phi(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i})) \end{aligned}$$

□

برهان. اثبات مشابه قضیه ۲.۳ انجام می‌گیرد.

قضیه ۲.۴. در حالت خاص، فرض کنید مشخصه کیفیت $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ و میزان انطباق دارای تابع عضویت مثلثی

$$\tilde{Q}_i(y_i) = T(a_i, m_i, d_i) = \begin{cases} 0 & y_i < a_i \\ \frac{y_i - a_i}{m_i - a_i} & a_i \leq y_i < m_i \\ \frac{d_i - y_i}{d_i - m_i} & m_i < y_i < d_i \\ 0 & y_i \geq d_i \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Q}_i} = E(\tilde{Q}(Y_i)) &= \frac{\sigma_i}{m_i - a_i} (\varphi(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \varphi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\mu_i - a_i}{m_i - a_i} (\phi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\sigma_i}{m_i - d_i} (\varphi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \varphi(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\mu_i - d_i}{m_i - d_i} (\phi(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i})) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} E(\tilde{Q}_i^{\gamma}(Y_i)) &= \frac{\sigma_i}{(m_i - a_i)^{\gamma}} ((\mu_i - a_i)\varphi(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i}) - (m_i + \mu_i - \gamma a_i)\varphi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &\quad + \frac{\sigma_i}{(m_i - d_i)^{\gamma}} ((m_i + \mu_i - \gamma d_i)\varphi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i}) - (\mu_i - d_i)\varphi(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\sigma_i^{\gamma} + (\mu_i - d_i)^{\gamma}}{(m_i - d_i)^{\gamma}} (\phi(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{m_i - d_i}{\sigma_i})) \\ &\quad + \frac{\sigma_i^{\gamma} + (\mu_i - a_i)^{\gamma}}{(m_i - a_i)^{\gamma}} (\phi(\frac{m_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{a_i - \mu_i}{\sigma_i})) \end{aligned}$$

□

برهان. اثبات مشابه قضیه ۲.۳ انجام می‌گیرد.

۱.۲.۴ کاربرد در قطعه سازی

مراحل تهیه نمودار تعداد نقص‌ها در محیط فازی با استفاده از داده‌های مربوط به قطعه تولیدی در یک کارخانه ماشین سازی به نام پایه فیلتر در این مثال با داده‌های واقعی، بیان می‌شود. در این کارخانه به دلیل تولید انبوه قطعات مختلف، در بخش کنترل کیفیت از دستگاه *CMM*^۱ برای اندازه‌گیری و بررسی مشخصه‌های قطعات تولید استفاده می‌شود. با گسترش روز افزون صنایع قطعه سازی و ایجاد رقابت در تولید قطعات با کیفیت برتر، اندازه‌گیری و کنترل کیفیت قطعات از جایگاه مهم و ویژه برخوردار است. چرا که اندازه‌گیری و بکارگیری روش‌های مناسب برای کنترل خط تولید، برای تولید قطعات همسان (در محدوده تolerانس) وظیفه واحد کنترل کیفیت بوده که با تهیه کردن سخت افزارها و نرم افزارها مورد نیاز و به کار گیری روش‌های مناسب برای کنترل قطعات تولید، بهترین راهنمای واحد تولید برای تولید قطعات با کیفیت مناسب و تیراژ ممکن است که در نتیجه از تولید قطعات معیوب جلوگیری می‌کند.

۲.۲.۴ دستگاه اندازه گیری سه بعدی

جهت کنترل اجباری بعضی از قطعات به مواردی بر می‌خوریم که نمی‌توان از وسایل اندازه‌گیری عمومی مانند کولیس، میکرومتر، ساعت‌های اندیکاتور و ... استفاده نمود در چنین مواردی می‌توان از دستگاه اندازه‌گیری سه بعدی *CMM* شکل ۱.۴ استفاده نمود. این دستگاه از یک میز دقیق به همراه سه خط کش دیجیتالی و الکترونیکی که بر روی آن یک بازو متحرک تعبیه شده است و با حرکت این بازو در فضا می‌توان مختصات نقاط مورد اندازه‌گیری را از روی خط‌کش‌ها یادداشت کرد. با استفاده از نرم افزار آن می‌توان گزارش‌های اندازه‌گیری شده را مورد بررسی قرار داد. تجزیه و تحلیل توسط یک رایانه که مجهز به نرم افزارهای ویژه می‌باشد انجام می‌شود. مزیت‌های اصلی این دستگاه در توانایی اندازه‌گیری منفرد نقاط با دقت بالا و حرکت تحت کنترل کامپیوتر می‌باشد. به تناسب سطح تکنولوژی، ماشین روی مشخصه‌هایی چون راست بودن، کجی، لنگی، قائمه بودن، گردی استوانه بودن، مربع مستطیل بودن، شیبدار بودن، توازی موقعیت، فرم، تقارن، هم محوری و نامحوری، پردازش‌های مختلفی را انجام می‌دهد.

۳.۲.۴ تلورانس‌های ابعادی

برای تولید قطعات در صنعت از روش‌های گوناگون ساخت استفاده می‌شود. هر روش ساخت دارای دقت خاصی است. از این رو اندازه‌های داده شده برای قطعه همواره با مقداری انحراف از اندازه حقیقی ساخته می‌شود. به همین دلیل در صنعت، هرگز نمی‌توان قطعه‌ای را تولید نمود که با دقت مطلق تولید شده باشد بلکه تنها می‌توان اندازه‌ها را به اندازه‌ی مورد هدف

^۱coordinate measuring machine

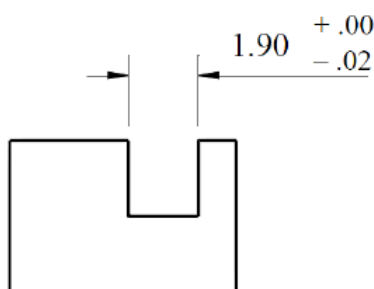


شکل ۱.۴: دستگاه اندازه‌گیری CMM

نزدیک نمود. بدیهی است هرچه دقت تولید بالا رود هزینه‌ی تولید نیز افزایش می‌یابد و لازم است از ابزار دقیق‌تر و کارگر ماهرتر استفاده شود. از این رو در طراحی، پارامتری جدید به نام تolerانس ابعادی وارد می‌شود.

۴.۲.۴ طول تolerانس

اندازه اختلاف بین حد بزرگترین و حد کوچکترین اندازه و یا اختلاف بین انحراف بالایی و پایینی تolerانس نامیده می‌شود. برای نمایش تolerانس در مقابل اندازه اسمی دو عدد نوشته می‌شود. مطابق شکل ۲.۴ عدد بالایی بیانگر انحراف بالایی و عدد پایینی بیانگر انحراف پایینی است. طول تolerانس تعدادی از مشخصات مورد بررسی در جدول ۱.۴ بیان شده است، همانطور که



شکل ۲.۴: حدود تolerانس

مشاهده می‌کنید مشخصات علاوه بر یک مقدار اسمی در ستون اول، دارای تolerانس مثبت و منفی هستند که عدد حاصل از مجموع مقدار مرکز و حد تolerانس مثبت، مقدار USL به دست خواهد آمد. بدین ترتیب حدود مشخصه فنی مورد نیاز را خواهیم داشت. در حال حاضر کارخانجات و مراکز صنعتی و تولیدی که دارای تولید انبوه هستند، این دستگاه نقش بسیار مهمی در تولیدات آنها دارد. در کارخانه مورد بررسی ما نیز به دلیل تولید

انبوه در قطعات مختلف، مدیریت برای تصمیم‌گیری سریع و راحت در بخش کنترل کیفیت از دستگاه اندازه‌گیری سه بعدی استفاده می‌کند. این دستگاه با دقت بالا مقادیر پیوسته‌ای هم‌زمان در مورد مشخصه‌های تعریف شده قطعات در اختیار قرار می‌دهد. داده‌ها و برگه کنترل کیفیت ثبت شده یکی از قطعات تولیدی توسط این دستگاه در ادامه موجود می‌باشد. در مثال پیش‌رو از مجموعه داده‌هایی که این دستگاه در روزهای مختلف ثبت کرده برای تحلیل و بررسی نمودار معرفی شده، استفاده نمودیم. مشخصه‌های اندازه‌گیری شده و اطلاعات این مشخصه‌ها در جدول ۱.۴ مشاهده می‌شود:

جدول ۱.۴: حدود تolerانس مشخصات اندازه‌گیری شده

	مشخصه	مرکز	تولرانس مثبت	تولرانس منفی
۱	loc۸	۲۱/۴	۰/۰۵	۰/۰۵
۲	loc۴/۱	-۲۱	۰/۱	۰/۱
۳	loc۴/۲	۱۶۶/۶۴۹۷	۰/۱	۰/۱
۴	loc۵/۱	-۴۵/۵	۰/۱	۰/۱
۵	loc۵/۲	۳	۰/۱	۰/۱
۶	loc۹/۱	۳۱	۰/۱	۰/۱
۷	loc۹/۲	-۳۳/۵	۰/۱	۰/۱

در یک کارخانه ماشین سازی، برای بازرسی محصولات تولیدی، در مرحله‌ی اول ۲۸ قطعه تولیدی به تصادف انتخاب و از هریک ۳ مشخصه کیفیت اندازه‌گیری می‌شود. این سه مشخصه مقادیر ابعادی پایه فیلتر خودرو هستند که در شکل ۳.۴ مشخص شده است. در این شکل سه موقعیت به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

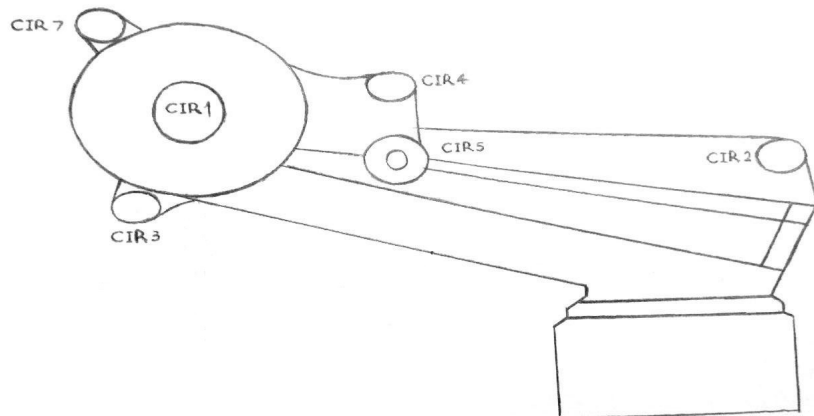
loc۴ : مربوط به موقعیت CIR۲

loc۵ : مربوط به موقعیت CIR۳

loc۸ : مربوط به موقعیت CIR۴

در جدول ۲.۴ مقادیر اندازه‌گیری سه مشخصه پایه فیلتر خودرو نشان داده شده‌اند. آزمون شاپیرو-ویلک [۱۵] فرضیه‌ی نرمال سه متغیره بودن داده‌های جدول ۲.۴ را با p - مقدار ۰/۳۴۸۳ به طور قوی می‌پذیرد. برای آزمون نرمال بودن چند متغیره در R ابتدا پکیج *mvShapiro.Test* را فراخوانی کرده سپس با اجرای دستور زیر برای بررسی مشخصه‌های مورد بررسی خواهیم داشت:

```
> mvShapiro.Test(data3)
```



شکل ۳.۴: نقشه قطعه پایه فیلتر

Villasenor-Alva and Gonzalez-Estrada

```
data: data3
```

```
MVW = 0.95999, p-value = 0.3483
```

برای بررسی تصادفی بودن مشاهدات مشخصه‌های کیفیت مورد بررسی با استفاده از دستور زیر به آزمون تصادفی بودن مشاهدات سه مشخصه پرداخته شد:

```
library(randtests)
```

```
> runs.test(loc8,alternative="right.sided")
```

Runs Test

```
data: loc8
```

```
statistic = -2.311, runs = 9, n1 = 14, n2 = 14, n = 28, p-value =  
0.9896
```

```
> runs.test(loc5,alternative="right.sided")
```

Runs Test

```
data: loc5
```

```
statistic = -0.77033, runs = 13, n1 = 14, n2 = 14, n = 28, p-value =
```

0.7794

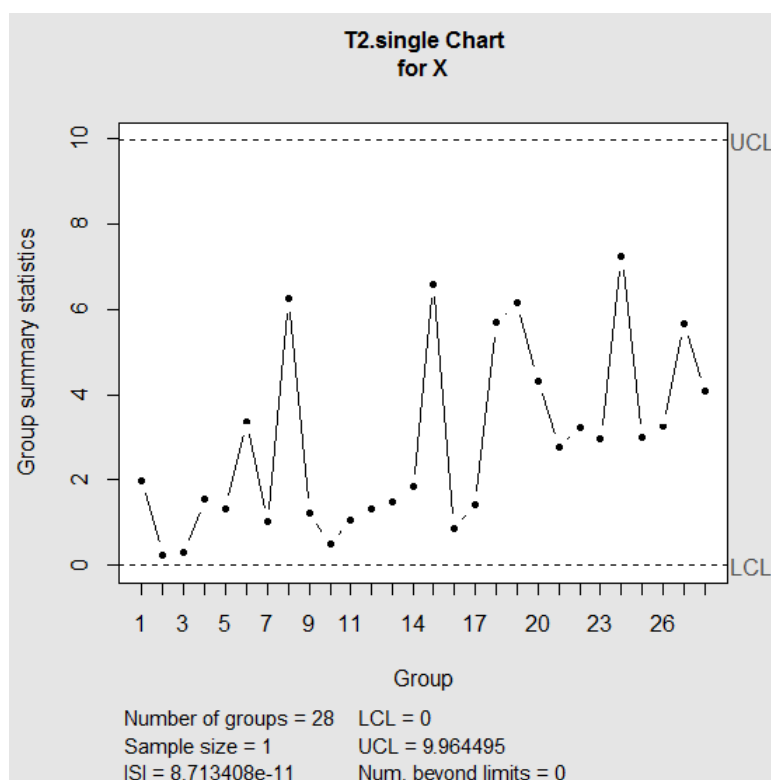
```
> runs.test(loc4, alternative="right.sided")
```

Runs Test

data: loc4

statistic = -1.9258, runs = 10, n1 = 14, n2 = 14, n = 28, p-value =
0.9729

حال با توجه به برقرار بودن فرضیه نرمال چند متغیره مشخصه‌های مورد بررسی، می‌توان از نمودار $T^2 - Hotelling$ که در شکل ۴.۴ رسم شده است، برای بررسی یک قطعه از نظر سه مشخصه به صورت توأم استفاده نمود.



شکل ۴.۴: نمودار کنترل T^2 هتلینگ

با توجه به تحت کنترل بودن نمودار فوق بردار میانگین برآورد شده و ماتریس واریانس و کواریانس به صورت زیر می‌باشد. برای به دست آوردن آن کافیه از دستورات زیر در R استفاده نمود:

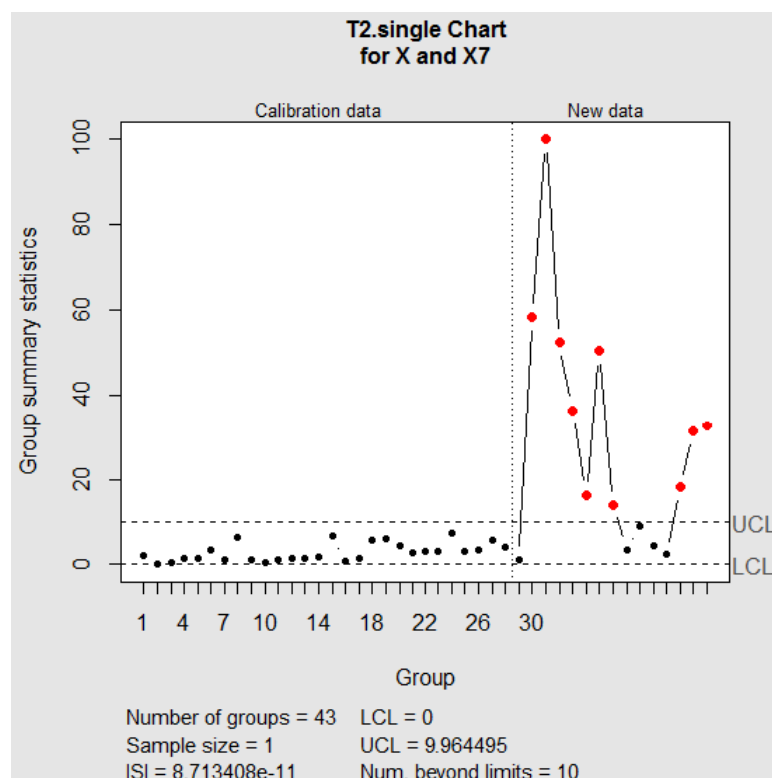
```
X = list(X1 = loc8, X2 = loc4, X3=loc5) # a list of matrices, one for each variable  
q = mqcc(X, type = "T2")
```

summary(q)

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_{locA}, \hat{\mu}_{locB}, \hat{\mu}_{locC}) = (21/3944, 2/98983, -20/9966)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0/00014980 & 0/00000000 & 0/00000000 \\ 0/000003094 & 0/00289459 & 0/00000000 \\ -0/0000002650 & 0/000006366 & 0/000020774 \end{bmatrix}$$

مشخصات فنی در نظر گرفته شده برای این سه مشخصه در جدول ۳.۴ آمده است (منظور از T مقدار هدف است): در فاز دوم کنترل، ۱۵ قطعه دیگر (جدول ۴.۴) را با توجه به این سه مشخصه، مورد بررسی قرار داده که با توجه به حدود کنترل توأم به دست آمده، نمودار کنترل برای ۴۳ قطعه مورد بررسی در شکل ۵.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۵.۴: نمودار $\bar{X}$ و S سه مشخصه توأم

همان طور که در شکل ۵.۴ مشاهده می‌شود از قطعه ۳۰ به بعد فرآیند تولید خارج از کنترل قرار می‌گیرند. اگر تصمیم گرفته شود نمودار نقص‌ها برای این سه مشخصه رسم شود. با توجه به رابطه‌ی ۱.۴، تمامی مشاهدات به دلیل داخل بازه مشخصه فنی بودن درجه عدم انطباق صفر می‌گیرند. بدین ترتیب فرآیند تولید داخل حدود کنترل می‌باشد. در صورتی که نمودار کنترل میانگین‌ها عدم کنترل فرآیند را نشان می‌دهد.

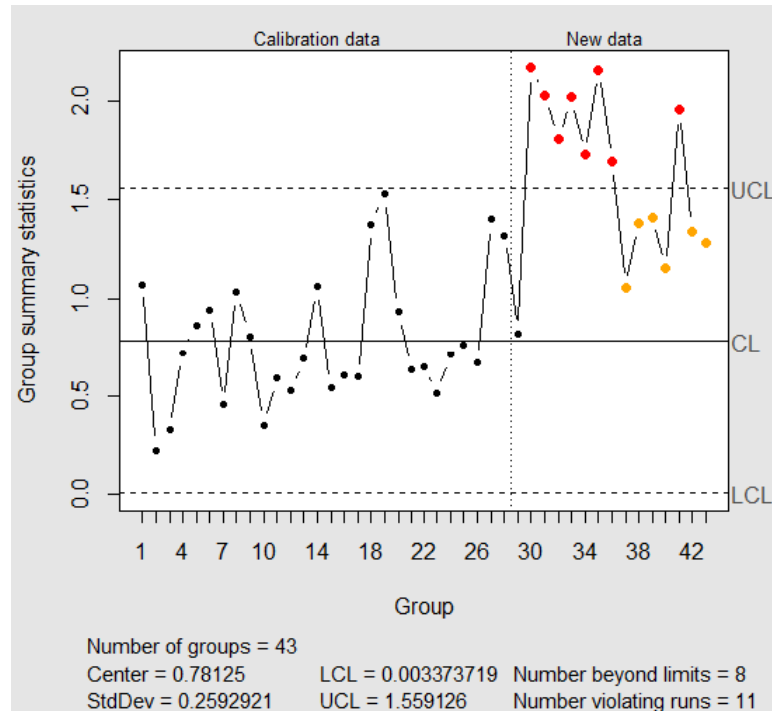
حال اگر برای کارشناس مربوطه یا مشتری میزان نقص برای هر مشاهده از اهمیت یکسانی برخوردار نباشد می‌توان برای تحلیل روند تولیدات از کیفیت فازی استفاده نمود. برای بررسی تعداد نقص‌ها با استفاده از درجه عدم انطباق ابتدا توابع عضویت مثلثی برای سه مشخصه مورد بررسی براساس حدود مشخصه فنی مشخص شده در جدول ۳.۴ به صورت روابط ۳.۴، ۴.۴ و ۵.۴ تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{Q}_1(y_{loc\lambda}) = \begin{cases} 0 & y_{loc\lambda} < 21/35 \\ \frac{y_{loc\lambda} - 21/35}{0/05} & 21/35 \leq y_{loc\lambda} \leq 21/4 \\ \frac{21/45 - y_{loc\lambda}}{0/05} & 21/4 < y_{loc\lambda} \leq 21/45 \\ 0 & y_{loc\lambda} > 21/45 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\tilde{Q}_2(y_{loc\delta}) = \begin{cases} 0 & y_{loc\delta} < 2/9 \\ \frac{y_{loc\delta} - 2/9}{0/1} & 2/9 \leq y_{loc\delta} \leq 3 \\ \frac{3/1 - y_{loc\delta}}{0/1} & 3 < y_{loc\delta} \leq 3/1 \\ 0 & y_{loc\delta-1} > 3/1 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\tilde{Q}_3(y_{loc\epsilon}) = \begin{cases} 0 & y_{loc\epsilon} < -21/1 \\ \frac{y_{loc\epsilon} + 21/1}{0/1033} & -21/1 \leq y_{loc\epsilon} \leq -21 \\ \frac{-21 - y_{loc\epsilon}}{0/1} & -21 < y_{loc\delta/1} \leq -20/9 \\ 0 & y_{loc\delta/1} > -20/9 \end{cases} \quad (5.4)$$

با استفاده از توابع عضویت فوق به ازای مشاهده هر مشخصه، می‌توان یک درجه انطباق به دست آورد (جدول ۵.۴ و ۶.۴): با استفاده از حدود کنترل معرفی شده برای نمودار کنترل $\bar{c}$ و مقادیری که در ستون آخر جدول ۶.۴ نوشته شده است، نمودار $\bar{c}$ به صورت شکل ۶.۴ به دست می‌آید: همان‌طور که در شکل ۶.۴ مشاهده می‌شود به مانند نمودار کنترل میانگین توأم در شکل ۵.۴، از مشاهده ۳۰ به بعد خارج از کنترل بودن فرآیند را نشان می‌دهد. در صورتی که زمانی بخواهیم نمودار تعداد نقص‌ها را در کنترل کیفیت معمول رسم کنیم، چون همه مشاهدات در بازه مشخصات فنی قرار دارند آنگاه تمامی این مشاهدات درجه انطباق یکسان یک را می‌گیرند، نمودار کنترل c حالت کنترل فرآیند را نشان خواهد داد، در صورتی که همان‌طور که مشخص شد از نمونه ۳۰ به بعد فرآیند خارج از کنترل است اما نمودار c توانایی تشخیص این تغییر را نداشت.



شکل ۶.۴: نمودار $\bar{c}$

۵.۲.۴ مقایسه نمودار تعداد نقص‌ها در محیط کلاسیک و فازی با استفاده از معیار OC

حال با استفاده از معیارهای OC و ARL به مانند فصل ۳ با استفاده از فرضیه‌های زیر به مقایسه دو نمودار $c, \bar{c}$ پرداخته خواهد شد.

$$\begin{cases} H_0: \text{فرآیند در کنترل است} \\ H_1: \text{فرآیند خارج از کنترل است} \end{cases}$$

فرضیه H_1 مبنی بر خارج از کنترل بودن فرآیند بدین معنا است که میانگین یا واریانس فرآیند در زمان کنترل به مقادیر دیگری تغییر یابد. به عبارت دیگر با فرض $Y_i \sim N(\mu_{oi}, \sigma_{oi})$ اگر μ_{oi} و σ_{oi} به $\mu_{\lambda i} = \mu_{oi} + k\sigma_{oi}$ ($\sigma_{\lambda i}^2 = k\sigma_{oi}^2$) تغییر پیدا کند، آنگاه نسبت محصولات غیر منطبق و میانگین و واریانس درجه عدم انطباق از مقادیر $p_{oi}, \mu_{\tilde{N}_{oi}}, \sigma_{\tilde{N}_{oi}}^2$ به مقادیر $p_{\lambda i}, \mu_{\tilde{N}_{\lambda i}}, \sigma_{\tilde{N}_{\lambda i}}^2$ تغییر پیدا می‌کند. برای به دست آوردن هرکدام از این کمیت‌ها در زمان قبل و بعد از تغییر در فرآیند می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده نمود.

$$p_{oi} = 1 - p(L_i \leq Y_i \leq U_i | H_0) \quad , \quad p_{\lambda i} = 1 - p(L_i \leq Y_i \leq U_i | H_1)$$

$$\mu_{\tilde{N}_{oi}} = E(\tilde{N}_i(Y_i) | H_0) \quad , \quad \mu_{\tilde{N}_{\lambda i}} = E(\tilde{N}_i(Y_i) | H_1)$$

$$\sigma_{\tilde{N}_{\lambda i}}^2 = Var(\tilde{N}_i(Y_i) | H_1) \quad , \quad \sigma_{\tilde{N}_{oi}}^2 = Var(\tilde{N}_i(Y_i) | H_0)$$

$$\beta_c = P \left(\sum_{i=1}^k p_i - 3 \sqrt{\sum_{i=1}^k p_i q_i} < \hat{X} < \sum_{i=1}^k p_i + 3 \sqrt{\sum_{i=1}^k p_i q_i} \right)$$

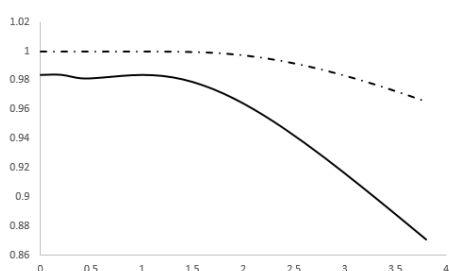
$$\beta_{\tilde{c}} = P \left(\sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{N}_{\circ i}} - 3 \sum_{i=1}^k \sigma_{\tilde{N}_{\circ i}}^2 < \hat{\tilde{X}} < \sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{N}_{\circ i}} + 3 \sum_{i=1}^k \sigma_{\tilde{N}_{\circ i}}^2 \right)$$

حال با توجه به فرمول‌های فوق به ازای k ‌های مختلفی محاسبات در جدول ۷.۴ آمده است. به ازای تغییرات مختلف به طور جداگانه در میانگین و واریانس، نمودارهای میزان خطای تعداد نقص‌ها در محیط فازی و در محیط کلاسیک به تفکیک در شکل ?? آمده است.

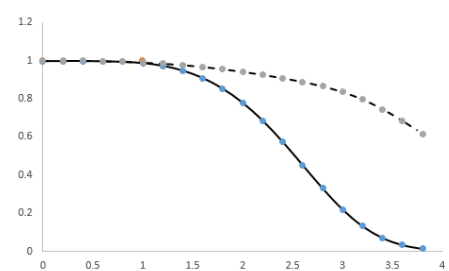
همانطور که مشاهده می‌شود در هر دو مورد نمودار OC برای $\tilde{c}$ پایین‌تر از c است که کارایی $\tilde{c}$ را نشان می‌دهد.

جدول ۷.۴: خطای نوع دوم برای $|k|$ مختلف

با تغییر واریانس			با تغییر میانگین		
$\beta_{\tilde{c}}$	β_c	$ k $	$\beta_{\tilde{c}}$	β_c	$ k $
۰/۹۸۳۸۹۴۵۸۲	۰/۹۹۹۹۹۹۶۹۳	۱	۰/۹۹۷۳	۰/۹۹۸۶	۰
۰/۹۸۰۸۱۷۸۴۳	۰/۹۹۹۸۷۶۴۲۷	۱/۴	۰/۹۹۷۶۶۴۲۷	۰/۹۹۸۹۸۰۴۱۶	۰/۲
۰/۹۷۱۱۰۷۴۴۲	۰/۹۹۸۷۳۱۰۹۹	۱/۸	۰/۹۹۷۴۶۴۹۶۸	۰/۹۹۸۵۷۷۰۱۳	۰/۴
۰/۹۵۵۹۹۷۹۵۲	۰/۹۹۵۶۱۶۶۲۴	۲/۲	۰/۹۹۶۴۴۱۹۳۸	۰/۹۹۷۱۳۶۸۸۸	۰/۶
۰/۹۳۷۱۶۳۰۲۱	۰/۹۹۰۴۱۴۰۵۴	۲/۶	۰/۹۹۳۵۶۳۷۹۵	۰/۹۹۴۲۰۲۴۹۷	۰/۸
۰/۹۱۶۰۰۵۴۶۳	۰/۹۸۳۴۳۰۳۹۴	۳	۰/۹۸۶۶۵۵۱۸۲	۰/۹۸۹۸۰۴۲۰۵	۱
۰/۸۹۳۵۶۳۴۸۶	۰/۹۷۵۰۴۸۰۶۱	۳/۴	۰/۹۷۲۴۸۵۰۳۳	۰/۹۸۴۱۰۰۴۸	۱/۲
۰/۸۷۰۵۶۷۷۶	۰/۹۶۵۶۰۶۸۷	۳/۸	۰/۹۴۷۴۷۹۳۱۹	۰/۹۷۶۷۱۳۴۱	۱/۴
۰/۸۴۷۵۱۸۶۱۴	۰/۹۵۵۳۸۱۹۲۲	۴/۲	۰/۹۰۸۴۳۶۹۰۸	۰/۹۶۷۱۰۸۰۷۹	۱/۶
۰/۸۲۴۷۵۱۴	۰/۹۴۴۵۸۹۰۳	۴/۶	۰/۸۵۲۷۷۶۵۸۵	۰/۹۵۵۱۸۰۳۰۲	۱/۸
۰/۸۰۲۴۸۵۵۲	۰/۹۳۳۳۹۵۷۷۹	۵	۰/۷۷۸۶۰۸۲۶۷	۰/۹۴۱۲۰۷۹۴۹	۲
۰/۷۸۰۸۵۹۵۵۶	۰/۹۲۱۹۳۲۱۷۲	۵/۴	۰/۶۸۵۲۶۹۴۶۷	۰/۹۲۵۴۶۳۶۴۹	۲/۲
۰/۷۵۹۹۵۵۹۸۱	۰/۹۱۰۲۹۹۴۳۱	۵/۸	۰/۵۷۴۶۴۹۳۲۸	۰/۹۰۷۹۱۶۲۴۴	۲/۴
۰/۷۳۹۸۱۸۴۵۹	۰/۸۹۸۵۷۶۸۶۷	۶/۲	۰/۴۵۲۷۹۳۳۹۲	۰/۸۸۸۰۳۷۷۴۵	۲/۶
۰/۷۲۰۴۶۳۹۴۱	۰/۸۸۶۸۲۷۰۷۱	۶/۶	۰/۳۳۰۲۸۵۵۱۱	۰/۸۶۴۴۹۷۹۷۶	۲/۸
۰/۷۰۱۸۹۱۱۵۷	۰/۸۷۵۰۹۹۷۹۶	۷	۰/۲۱۹۸۶۵۳۴۴	۰/۸۳۴۸۰۴۶۴۶	۳



(ب) با تغییر واریانس



(آ) با تغییر میانگین

شکل ۷.۴: منحنی OC برای نمودار $\tilde{c}$ (-) و نمودار c (- -)

۳.۴ نمودار متوسط تعداد نقص‌ها در هر محصول

باتوجه به نمودار تعداد نقص‌ها که در بخش قبل معرفی شد، گاهی مدیریت و یا کارشناس کارخانه به دنبال بررسی محصول تولیدی خود از نظر چند مشخصه کیفی می‌باشند، به عبارت دیگر به نوعی به دنبال اطلاعات خلاصه و کامل در مورد محصول و نحوه روند تولید می‌باشند. تفاوت نمودار متوسط تعداد نقص‌ها در هر محصول در این مورد می‌باشد که در هر بار نمونه‌گیری تصادفی تعداد بیشتری از یک واحد بازرسی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. با توجه به این مطلب به معرفی نمودار u براساس کیفیت فازی می‌پردازیم.

همانطور که در فصل ۲ نمودار تعداد نقص‌ها در هر محصول معرفی شد، آماره مورد استفاده برای متوسط تعداد نقص‌های یک محصول را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$U = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k N_i(Y_{ij})}{n}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، در کیفیت معمولی و غیرفازی، می‌توان مفهوم «تعداد» را با استفاده از تابع نشانگر بازنویسی نمود. فرض کنید $Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{k1}$ مشخصات کیفیت اندازه‌گیری شده در نمونه اول ($j=1$) باشد، آنگاه

$$N(Y_{ij}) \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n$$

خواهد بود. با توجه به این مطلب که $N(Y_{ij}) \sim b(p_i)$ آنگاه با توجه به توزیع دوجمله‌ای پواسن (پیوست آ) در اینجا نیز $\sum_{i=1}^k N_i(Y_{ij})$ دارای توزیع دوجمله‌ای پواسن می‌باشد. تابع $N(Y_{ij})$ مربوط به زمانی است که کارشناس مربوط با استفاده از کنترل کیفیت معمولی بخواهد در مورد کالای تولیدی خود، تصمیم‌گیری نماید. اما در دیدگاه کیفیت فازی می‌توان از کنترل کیفیت فازی استفاده نمود که به ازای هر مقدار Y_{ij} میزان درجه بی‌کیفیتی مشخصه مشاهده شده در نمونه j ام $\tilde{N}_i(Y_{ij}) \in [0, 1]$ به دست می‌آید. بنابراین متوسط درجه بی‌کیفیتی یک محصول در کیفیت فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{U} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_{ij})}{n} \quad (۶.۴)$$

با توجه به آماره معرفی شده در معادله ۶.۴ و معادله عمومی کنترل شوهارت، حدود کنترل نمودار $\bar{U}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} UCL &= E(\bar{U}) + 3\sqrt{Var(\bar{U})} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_{ij})\right) + \frac{3}{n}\sqrt{Var\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_{ij})\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_{ij})) + \frac{3}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k Var(\tilde{N}_i(Y_{ij})) + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i < j^*} Cov(\tilde{N}_i(Y_{ij}), \tilde{N}_{j^*}^*(Y_{ij}))} \\ CL &= E(\bar{u}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_{ij})\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_{ij})) \\ LCL &= E(\bar{U}) - 3\sqrt{var(\bar{U})} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_{ij})\right) - \frac{3}{n}\sqrt{var\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \tilde{N}_i(Y_{ij})\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_{ij})) - \frac{3}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k var(\tilde{N}_i(Y_{ij})) + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i < j^*} cov(\tilde{N}_i(Y_{ij}), \tilde{N}_{j^*}^*(Y_{ij}))} \\ E(\tilde{N}(Y_{ij})) &= 1 - E(\tilde{Q}(Y_{ij})) \quad , \quad Var(\tilde{N}(Y_{ij})) = Var(\tilde{Q}(Y_{ij})) \end{aligned}$$

در این پژوهش فرض بر استقلال دوبه دوئی همه مشخصه‌ها از یکدیگر هست و لذا

$$Cov(\tilde{N}_i(Y_{ij}), \tilde{N}_{j^*}^*(Y_{ij})) = 0$$

بنابراین حدود کنترل نمودار $\bar{U}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_{ij})) + \frac{3}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k Var(\tilde{N}_i(Y_{ij}))} \\ CL &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_{ij})) \\ LCL &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k E(\tilde{N}_i(Y_{ij})) - \frac{3}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k Var(\tilde{N}_i(Y_{ij}))} \end{aligned}$$

در صورتی که میزان انطباق دارای تابع عضویت دوزنقه‌ای و $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ باشد می‌توان برای محاسبه‌ی حدود کنترل فوق از قضیه فصل ۳ استفاده کرد.

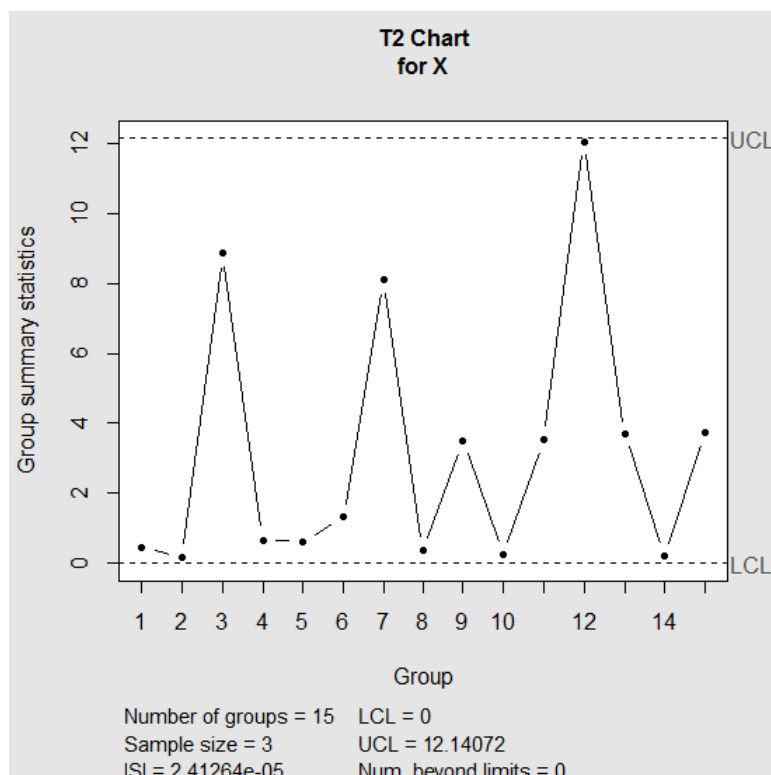
۱.۳.۴ کاربرد در قطعه‌سازی

مثال ۱.۴. در ادامه داده‌های مرتبط با کارخانه قطعه‌سازی که در بالا ذکر شد، جدول ۸.۴ داده‌ها مربوط به دو مشخصه loc۸، loc۵ که شامل ۱۵ نمونه ۳ تایی از قطعات تولیدی می‌باشد. برای تحلیل در نظر گرفته شده است.

جدول ۸.۴: داده‌های مربوط به مثال ۱.۴

loc۵	loc۸	شماره نمونه	loc۵	loc۸	شماره نمونه
۲/۹۷۹	۲۱/۳۸۴۸	۲۴	۲/۹۳۲۹	۲۱/۳۹	۱
۲/۹۸۴	۲۱/۴۱۲۸	۲۵	۲/۹۹۴۳	۲۱/۳۸۴	۲
۳/۰۱۶	۲۱/۴۱۳۷	۲۶	۲/۹۶۵۷	۲۱/۳۹۷	۳
۳/۰۵۱	۲۱/۳۸۸۰	۲۷	۳/۰۴۹	۲۱/۴۲۷	۴
۳/۰۴۴	۲۱/۴۰۹	۲۸	۲/۹۳۷۸	۲۱/۳۸۱۹	۵
۲/۹۸۵	۲۱/۴۲۷	۲۹	۲/۹۹۴۲	۲۱/۳۹۳۲	۶
۲/۹۶۵۷	۲۱/۴۰۹	۳۰	۲/۹۷۵۴	۲۱/۳۹۹۱	۷
۲/۸۹۳	۲۱/۳۹۷	۳۱	۲/۹۴۲۴	۲۱/۳۹۹۰	۸
۲/۹۱۴	۲۱/۴۳	۳۲	۲/۹۲۰۹	۲۱/۳۹۳۲	۹
۲/۹۴۱	۲۱/۳۹	۳۳	۲/۹۳۶۶	۲۱/۴۱۰۴	۱۰
۲/۸۳۷	۲۱/۴۳	۳۴	۲/۹۳۱۳	۲۱/۷۳۱	۱۱
۲/۸۱۵	۲۱/۳۸۴	۳۵	۳/۰۱۰۹	۲۱/۳۸۳۸	۱۲
۲/۶۶۳	۲۱/۳۹۱	۳۶	۳/۰۳۵۶	۲۱/۳۷۰۱	۱۳
۲/۸۵۹	۲۱/۴۷۵	۳۷	۲/۹۴۸۴	۲۱/۳۹۲۴	۱۴
۳/۰۴۹۱	۲۱/۵۰۷	۳۸	۲/۹۹۷۸	۲۱/۳۹	۱۵
۲/۸	۲۱/۴۲۹	۳۹	۲/۹۸۵۶	۲۱/۳۸۵۱	۱۶
۲/۷۴۶۵	۲۱/۴۶	۴۰	۲/۹۹۵۹	۲۱/۳۸۱۲	۱۷
۲/۹۰۲	۲۱/۳۷	۴۱	۲/۹۷۰۳	۲۱/۳۹۰۳	۱۸
۲/۹۸۸۱	۲۱/۴۵۳۷	۴۲	۲/۹۳۲۹	۲۱/۳۸۶۵	۱۹
۲/۹۹۴۳	۲۱/۴۰۱۳	۴۳	۳/۱۱۱۵	۲۱/۳۹۵۷	۲۰
۳/۰۷۸۱	۲۱/۴۲۴۸	۴۴	۳/۰۹۸	۲۱/۳۹۴	۲۱
۲/۹۷	۲۱/۳۸۶۵	۴۵	۳/۰۵۷۱	۲۱/۳۹۵۷	۲۲
			۲/۹۶۵۵	۲۱/۳۸۷۴	۲۳

حال با توجه به برقرار بودن فرضیه نرمال چند متغیره‌ی بودن مشخصه‌های مورد بررسی، می‌توان از نمودار کنترل چند متغیره کمی با استفاده از $T^2 - Hotelling$ برای بررسی همزمان متغیرهای مورد مطالعه استفاده کرد.



شکل ۸.۴: نمودار کنترل T^2 هتلینگ

با توجه تحت کنترل بودن نمودار فوق بردار میانگین برآورد شده و ماتریس واریانس و کواریانس به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_{loc8}, \hat{\mu}_{loc5}) = (21/4117, 2/94573)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0/00314411 & -0/00144197 \\ -0/00144197 & 0/01144185 \end{bmatrix}$$

مشخصات فنی در نظر گرفته شده برای این دو مشخصه به صورت زیر می‌باشد:

جدول ۹.۴: مشخصات فنی مشخصه‌های مورد بررسی

loc8	loc5	
21/45	3/1	UCL
21/4	3	CL
21/35	2/9	LCL

با توجه به حدود مشخصه فنی مشخص شده در جدول ۹.۴ تابع عضویت مثلثی مربوط به

درجه انطباق هریک از مشخصات زیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{Q}(y_{loc\lambda}) = \begin{cases} 0 & y_{loc\lambda} < 21/35 \\ \frac{y_{loc\lambda} - 21/35}{0/05} & 21/35 \leq y_{loc\lambda} \leq 21/4 \\ \frac{21/45 - y_{loc\lambda}}{0/05} & 21/4 < y_{loc\lambda} \leq 21/45 \\ 0 & y_{loc\lambda} > 21/45 \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\tilde{Q}_2(y_{loc5}) = \begin{cases} 0 & y_{loc5-1} < 2/9 \\ \frac{y_{loc5} - 2/9}{0/1} & 2/9 \leq y_{loc5} \leq 3 \\ \frac{3/1 - y_{loc5}}{0/1} & 3 < y_{loc5} \leq 3/1 \\ 0 & y_{loc5} > 3/1 \end{cases} \quad (8.4)$$

حال با استفاده از معیارهای OC و ARL به مانند فصل ۳ با استفاده از فرضیه‌های زیر به مقایسه دو نمودار $u, \tilde{u}$ می‌پردازیم.

$$\begin{cases} H_0: \text{فرآیند در کنترل است} \\ H_1: \text{فرآیند خارج از کنترل است} \end{cases}$$

فرضیه H_1 مبنی بر خارج از کنترل بودن فرآیند بدین معنا است که میانگین یا واریانس فرآیند در زمان کنترل به مقادیر دیگری تغییر یابد. به عبارت دیگر با فرض $y_i \sim N(\mu_{oi}, \sigma_{oi})$ اگر μ_{oi} و σ_{oi} به $\mu_{1i} = \mu_{oi} + k\sigma_{oi}$ ($\sigma_{1i}^2 = k\sigma_{oi}^2$) تغییر پیدا کند، آنگاه نسبت محصولات غیر منطبق و میانگین و واریانس درجه عدم انطباق از مقادیر $p_{oi}, \mu_{\tilde{N}_{oi}}, \sigma_{\tilde{N}_{oi}}^2$ به مقادیر $p_{1i}, \mu_{\tilde{N}_{1i}}, \sigma_{\tilde{N}_{1i}}^2$ تغییر پیدا می‌کند. برای به دست آوردن هرکدام از این کمیت‌ها در زمان قبل و بعد از تغییر در فرآیند می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده نمود.

$$p_{oi} = 1 - p_i(L_i \leq Y_{ij} \leq U_i | H_0) \quad , \quad p_{1i} = 1 - p_i(L_i \leq Y_{ij} \leq U_i | H_1)$$

$$\mu_{\tilde{N}_{oi}} = E(\tilde{N}_i(Y_{ij}) | H_0) \quad , \quad \mu_{\tilde{N}_{1i}} = E(\tilde{N}_i(Y_{ij}) | H_1)$$

$$\sigma_{\tilde{N}_{oi}}^2 = Var(\tilde{N}_i(Y_{ij}) | H_1) \quad , \quad \sigma_{\tilde{N}_{1i}}^2 = Var(\tilde{N}_i(Y_{ij}) | H_0)$$

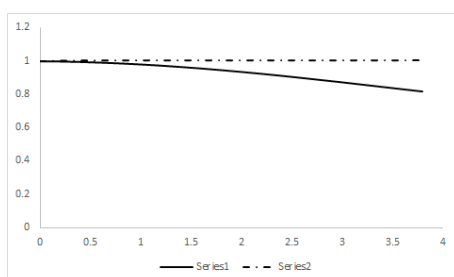
$$\beta_U = P\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k p_i - \frac{3}{n} \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^k p_i q_i} < \hat{U} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k p_i - \frac{3}{n} \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^k p_i q_i} \right\}$$

$$\beta_{\tilde{U}} = P\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{N}_{oi}} - \frac{3}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \sigma_{\tilde{N}_{oi}} < \hat{\tilde{U}} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{N}_{oi}} - \frac{3}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \sigma_{\tilde{N}_{oi}} \right\}$$

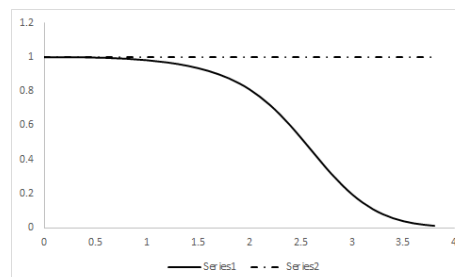
حال با توجه به فرمول‌هایی که در بالا ذکر شده به ازای k ‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود. در واقع به ازای تغییرات مختلف به طور جداگانه در میانگین و واریانس، میزان خطای نمودار تعداد نقص‌ها هم در محیط فازی و هم در محیط کلاسیک محاسبه می‌شود.

جدول ۱۰.۴: خطای نوع دوم برای $|k|$ مختلف

با تغییر واریانس			با تغییر میانگین		
$\beta_{\bar{u}}$	β_u	$ k $	β_u	$\beta_{\bar{u}}$	$ k $
۰/۹۹۷۳۰۰۲۰۴	۰/۹۹۹۱۷۱۲۴۵	۱	۰/۹۹۹۱۷۱۲۴۵	۰/۹۹۷۳	۰
۰/۹۹۶۰۵۹۱۲۴	۰/۹۹۹۵۶۱۳۳۹	۱/۴	۰/۹۹۹۳۲۸۹۷۳	۰/۹۹۷۰۹۱۲۵۶	۰/۲
۰/۹۹۳۱۹۸۶۸۶	۰/۹۹۹۷۵۸۱۷۸	۱/۸	۰/۹۹۹۵۴۹۱۱۸	۰/۹۹۶۰۴۸۹۴۶	۰/۴
۰/۹۸۹۲۰۲۸۶۸	۰/۹۹۹۸۵۳۲۲۷	۲/۲	۰/۹۹۹۷۵۸۲۹۶	۰/۹۹۳۳۹۵۱۹۳	۰/۶
۰/۹۸۴۱۶۵۳۵	۰/۹۹۹۸۹۹۱۴۹	۲/۶	۰/۹۹۹۸۸۹۴۸۹	۰/۹۸۸۲۶۶۸۶۵	۰/۸
۰/۹۷۸۰۹۷۷۰۵	۰/۹۹۹۹۲۱۴۲۲	۳	۰/۹۹۹۹۳۵۸۲۸	۰/۹۷۹۶۶۰۹۹۱	۱
۰/۹۷۱۰۰۴۰۹۲	۰/۹۹۹۹۳۲۲۳۴	۳/۴	۰/۹۹۹۹۴۴۲۴۹	۰/۹۶۶۲۹۱۰۵۱	۱/۲
۰/۹۶۲۹۰۳۳۱۴	۰/۹۹۹۹۳۷۵۰۷	۳/۸	۰/۹۹۹۹۵۷۲۳	۰/۹۴۶۳۲۱۵۳	۱/۴
۰/۹۵۳۸۳۴۹۴	۰/۹۹۹۹۴۰۱۶۴	۴/۲	۰/۹۹۹۹۷۹۰۲۶	۰/۹۱۶۸۵۸۴۱	۱/۶
۰/۹۴۳۸۵۹۰۴	۰/۹۹۹۹۴۱۶۵۹	۴/۶	۰/۹۹۹۹۹۴۶۱۵	۰/۸۷۳۲۷۶۹۰۵	۱/۸
۰/۹۳۳۰۵۲۸۹۹	۰/۹۹۹۹۴۲۷۰۹	۵	۰/۹۹۹۹۹۹۴۶۳	۰/۸۰۸۹۹۹۱۴۷	۲
۰/۹۲۱۵۰۶۴۰۴	۰/۹۹۹۹۴۳۶۵۶	۵/۴	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸۸	۰/۷۱۷۱۷۱۹۴۵	۲/۲
۰/۹۰۹۳۱۷۱۲	۰/۹۹۹۹۴۴۶۴۹	۵/۸	۱	۰/۵۹۵۷۸۵۲۹۸	۲/۴
۰/۸۹۶۵۸۵۷۰۲	۰/۹۹۹۹۴۵۷۳۵	۶/۲	۱	۰/۴۵۴۱۷۴۴۵	۲/۶
۰/۸۸۳۴۱۲۰۰۹	۰/۹۹۹۹۴۶۹۱۴	۶/۶	۱	۰/۳۱۳۰۴۳۲۹۷	۲/۸
۰/۸۶۹۸۹۲۰۶۱	۰/۹۹۹۹۴۸۱۶۱	۷	۱	۰/۱۹۴۰۱۲۵۵۸	۳



(ب) با تغییر واریانس



(آ) با تغییر میانگین

شکل ۹.۴: منحنی OC برای نمودار c (—) و نمودار $\bar{c}$ (---)

جدول ۲.۴: داده‌های مربوط به مثال به سه مشخصه کیفیت قطعه تولید شده در کارخانه

شماره نمونه	loc۸	loc۴	loc۵
۱	۲۱/۳۸۱۹	-۲۰/۹۹۱۵	۲/۹۳۷۸
۲	۲۱/۳۹۳۲	-۲۱/۰۰۲۸	۲/۹۹۴۲
۳	۲۱/۳۹۹۱	-۲۰/۹۹۳۹	۲/۹۷۵۴
۴	۲۱/۳۹۹	-۲۰/۹۸۷۵	۲/۹۴۲۴
۵	۲۱/۳۹۳۲	-۲۱/۰۰۱۲	۲/۹۲۹
۶	۲۱/۴۱۰۴	-۲۰/۹۹۰۱	۲/۹۳۶۶
۷	۲۱/۳۸۳۸	-۲۰/۹۹۸۱	۳/۰۱۰۹
۸	۲۱/۳۷۰۱	-۲۱/۰۰۸	۳/۰۳۵۶
۹	۲۱/۳۹۲۴	-۲۰/۹۸۶	۲/۹۴۸۴
۱۰	۲۱/۳۹	-۲۰/۹۸۷۲	۲/۹۹۷۸
۱۱	۲۱/۳۸۵۱	-۲۰/۹۸۵۱	۲/۹۸۵۶
۱۲	۲۱/۳۸۱۲	-۲۰/۹۸۹	۲/۹۹۵۹
۱۳	۲۱/۳۹۰۳	-۲۰/۹۸۰۴	۲/۹۷۰۳
۱۴	۲۱/۳۸۶۵	-۲۰/۹۸۸۱	۲/۹۳۲۹
۱۵	۲۱/۳۹۵۷	-۲۰/۹۶۰۳	۲/۹۹۴۳
۱۶	۲۱/۳۹۴	-۲۰/۹۸۵۵	۲/۹۶۵۷
۱۷	۲۱/۳۹۵۷	-۲۱/۰۰۲	۳/۰۴۹۱
۱۸	۲۱/۳۸۷۴	-۲۰/۹۸۷۵	۳/۱۱۱۵
۱۹	۲۱/۳۸۴۸	-۲۰/۹۷۵۹	۳/۰۹۸۳
۲۰	۲۱/۴۱۲۸	-۲۱/۰۱۰۳	۳/۰۵۷۱
۲۱	۲۱/۴۱۳۷	-۲۱/۰۰۱۱	۲/۹۶۵۵
۲۲	۲۱/۳۸۸	-۲۱/۰۲	۲/۹۷۹
۲۳	۲۱/۴۰۹	-۲۱/۰۱۷	۲/۹۸۴
۲۴	۲۱/۴۲۷	-۲۰/۹۹۹	۳/۰۱۶
۲۵	۲۱/۴۰۹	-۲۱/۰۰۷	۳/۰۵۱
۲۶	۲۱/۳۹۷	-۲۱/۰۱۷	۳/۰۴۴
۲۷	۲۱/۳۹	-۲۱/۰۲	۲/۸۹۳
۲۸	۲۱/۳۸۴	-۲۱/۰۱۴	۲/۹۱۴

جدول ۳.۴: مشخصات فنی سه مشخصه کیفیت مورد بررسی

	$loc4$	$loc5$	$loc8$
USL	-۲۱/۱	۳/۱	۲۱/۴۵
T	-۲۱	۳	۲۱/۴
LSL	-۲۰/۹	۲/۹	۲۱/۳۵

جدول ۴.۴: داده‌های مربوط به مثال به سه مشخصه کیفیت قطعه تولید شده در کارخانه

شماره نمونه	$loc8$	$loc4$	$loc5$
۲۹	۲۱/۳۹۱	-۲۱/۰۰۵	۲/۹۴۱
۳۰	۲۱/۴۷۵	-۲۰/۹۸۳	۲/۸۳۷
۳۱	۲۱/۵۰۷	-۲۱/۰۰۳	۲/۸۱۵
۳۲	۲۱/۴۲۹	-۲۰/۹۷۷	۲/۶۶۳
۳۳	۲۱/۴۶	-۲۱/۰۰۲	۲/۸۵۹
۳۴	۲۱/۳۷	-۲۰/۹۸۷	۲/۸
۳۵	۲۱/۴۵۳۷	-۲۰/۹۸۳۸	۲/۷۴۶۵
۳۶	۲۱/۴۳۳۵	-۲۰/۹۹۵۶	۲/۹۰۲
۳۷	۲۱/۴۰۱۳	-۲۱/۰۰۲۸	۲/۸۹۸۱
۳۸	۲۱/۴۲۴۸	-۲۰/۹۸۹۶	۳/۰۷۸۱
۳۹	۲۱/۳۷۹۳	-۲۱/۰۰۸	۲/۹۰۸۲
۴۰	۲۱/۳۹۱	-۲۰/۹۹۶	۲/۹۰۶۸
۴۱	۲۱/۳۷۰۴	-۲۰/۹۶۳۶	۳/۱۶۶۵
۴۲	۲۱/۴۱۴۲	-۲۱/۰۰۵۵	۲/۷۰۵۴
۴۳	۲۱/۴۱۳۵	-۲۰/۹۹۹۱	۲/۶۹۹۵

جدول ۵.۴: درجه انطباق مشاهدات هر مشخصه

شماره نمونه	$\tilde{Q}_1(y_i)$	$\tilde{Q}_2(y_i)$	$\tilde{Q}_3(y_i)$	$\sum_{i=1}^3 \tilde{Q}_i(y_i)$
۱	۰/۶۳۸	۰/۳۷۸	۰/۹۱	۱/۹۳۱
۲	۰/۶۳۸	۰/۹۴	۰/۹۷	۲/۷۷
۳	۰/۹۸۲	۰/۷۵	۰/۹۳	۲/۶۷
۴	۰/۹۸	۰/۴۲	۰/۸۷	۲/۲۷
۵	۰/۸۶۴	۰/۲۹	۰/۹۸	۲/۱۴
۶	۰/۷۹۲	۰/۳۶	۰/۹	۲/۰۵
۷	۰/۶۷۶	۰/۸۹	۰/۹۸۱	۲/۵۴
۸	۰/۴۰۲	۰/۶۴	۰/۹۲	۱/۹۶
۹	۰/۸۴۸	۰/۴۸۴	۰/۸۶	۲/۱۹
۱۰	۰/۸	۰/۹۷۸	۰/۸۷۲	۲/۶۵
۱۱	۰/۷۰۲	۰/۸۵۶	۰/۸۵۱	۲/۴
۱۲	۰/۶۲۴	۰/۹۵۹	۰/۸۹	۲/۴۷
۱۳	۰/۶۳۸	۰/۷۰۳	۰/۸۰۴	۲/۳۱
۱۴	۰/۸۰۶	۰/۳۲۹	۰/۸۸۱	۱/۹۴
۱۵	۰/۶۳۸	۰/۹۴۳	۰/۶۰۳	۲/۴۶
۱۶	۰/۷۳	۰/۶۵۷	۰/۸۵۵	۲/۳۹
۱۷	۰/۹۱۴	۰	۰/۹۸	۲/۴
۱۸	۰/۸۸	۰/۵	۰/۸۷	۱/۶۲
۱۹	۰/۹۱۴	۰/۰۱۷	۰/۷۵	۱/۴۷
۲۰	۰/۷۴۸	۰/۴۲	۰/۸۹	۲/۰۷
۲۱	۰/۷۲۶	۰/۶۵	۰/۷۵	۲/۳۷
۲۲	۰/۷۶	۰/۷۹	۰/۸۹	۲/۳۵
۲۳	۰/۸۲	۰/۸۴	۰/۹۸	۲/۴۹
۲۵	۰/۸۲	۰/۴۹	۰/۹۹	۲/۲۴
۲۶	۰/۹۴	۰/۵۶	۰/۹۳	۲/۳۳
۲۷	۰/۸	۰	۰/۸۳	۱/۶
۲۸	۰/۶۸	۰/۳۷۸	۰/۸۶	۱/۶۸

جدول ۶.۴: درجه انطباق مشاهدات هر مشخصه

شماره نمونه	$\tilde{Q}_1(y_i)$	$\tilde{Q}_2(y_i)$	$\tilde{Q}_3(y_i)$	$\sum_{l=1}^3 \tilde{Q}_l(y_i)$
۲۹	۰/۸۲	۰/۱۴	۰/۹۵	۲/۱۸
۳۰	۰/۹۴	۰/۴۱	۰/۸۳	۰/۸۳
۳۱	۰	۰	۰/۹۷	۰/۹۷
۳۲	۰	۰	۰/۷۷	۱/۱۹
۳۳	۰/۴۲	۰	۰/۹۸	۰/۹۸
۳۴	۰	۰	۰/۸۷	۱/۲۷
۳۵	۰	۰	۰/۸۳	۰/۸۳
۳۶	۰/۳۳	۰	۰/۹۵	۱/۳
۳۷	۰/۹۷۴	۰/۰۲	۰/۹۷	۱/۹۴
۳۸	۰/۵۰۴	۰	۰/۸۹	۱/۶۱
۳۹	۰/۵۸۶	۰/۲۱	۰/۹۲	۱/۵۸
۴۰	۰/۸۲	۰/۸۲	۰/۹۶	۱/۸۴
۴۱	۰/۴۰۸	۰/۶۸	۰/۶۳	۱/۰۴
۴۲	۰/۷۱۶	۰	۰/۹۴	۱/۶۶
۴۳	۰/۷۳	۰	۰/۹۹۱	۱/۷۲

نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای آینده تحقیق

۴.۴ نتیجه‌گیری

یکی از فرضیه‌های اصلی برای رسم نمودارهای کنترل کیفیت غیرفازی، هم‌ارزش و یکسان در نظر گرفتن تمامی نقص‌ها است. ولی در کنترل کیفیت فازی درجات بی‌کیفیتی / کیفیت برای اقلام معیوب / سالم یکسان در نظر گرفته نمی‌شود. نمودارهای کنترل با استفاده از کیفیت فازی توانایی تشخیص زمانی که فرآیند خارج از کنترل قرار می‌گیرد را دارد در صورتی که این نمودار با استفاده از کیفیت معمولی توانایی تشخیص حالت خارج از کنترل فرآیند تولید را ندارد تشخیص به موقع و زود هنگام خروج فرآیند از حالت کنترل از نظر هزینه می‌تواند کمک مناسبی به مراکز تولیدی کند. با استفاده از این نمودار معرفی شده می‌توان اطلاعات جامع خلاصه شده‌ای را در مورد فرآیند تولید بیان کرد و از طرفی به این دلیل که کارخانجات و مراکز تولیدی انبوه از دستگاه اندازه‌گیری سه بعدی برای بخش کنترل کیفیت استفاده می‌کنند، این نمودار معرفی شده کاربرد مناسبی در تحلیل کیفیت فرآیند تولید این کارخانجات خواهد داشت.

۵.۴ پیشنهادات تحقیق

در ادامه‌ی مباحث مطرح شده در این پایان نامه موارد ذیل قابل بحث می‌باشند:

- نمودارهای کنترل کیفیت کمی با استفاده از کیفیت فازی
- تعمیم روش به کار رفته در فصل ۴ زمانی که متغیرها مشخصه‌های کیفی مستقل نباشند.
- استفاده از کیفیت فازی در نمودارهای کنترل کیفیت *CUSUM* و *EWMA*
- کاربرد مفاهیم فازی در روش‌های طبقه‌بندی نقص‌ها در نمودارهای کنترل کیفیت

۹۰ نمودار تعداد و متوسط نقص‌ها با استفاده درج‌ع عدم انطباق

- استفاده از روش بوت استرپ در محاسبه‌ی نمودارهای کنترل کیفیت فازی هنگامی که تعداد داده‌ها کم است.

پیوست آ

توزیع پواسن دوجمله‌ای

در نظریه احتمالی و آمار، توزیع دوجمله‌ای پواسن یک توزیع گسسته از مجموع آزمایشات مستقل برنولی است. به عبارت دیگر، توزیع دوجمله‌ای پواسن بیانگر تعداد موفقیت‌ها در یک دنباله‌ای از n آزمایش مستقل با احتمال موفقیت $p_1, p_2, \dots, p_n$ رخ می‌دهد، می‌باشد. میانگین و واریانس در این توزیع برابر است با:

$$\mu = \sum_{i=1}^n p_i \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (1 - p_i)p_i$$

احتمال k موفقیت از مجموع n آزمایش به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$Pr(K = k) = \sum_{A \in F_k} \prod_{i \in A} p_i \prod_{i \in A^c} (1 - p_i)$$

که در آن مجموعه F_k شامل تمام زیر مجموعه‌های k تایی از $\{1, 2, \dots, n\}$ است. تعداد اعضای مجموعه F_k برابر است با

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

تا زمانی که هیچ کدام از احتمال‌های موفقیت برابر نیستند، می‌توان از فرمول زیر برای محاسبه k موفقیت استفاده کرد:

$$Pr(K = k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (1 - p_i) & k = 0 \\ \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} Pr(K = k-i) T(i) & k > 0 \end{cases}$$

که در آن $T(i) = \sum_{j=1}^n (\frac{p_j}{1-p_j})^i$ اگر $n > 20$ باشد، آنگاه احتمال k موفقیت از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$Pr(K = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n C^{-lk} \prod_{m=1}^n (1 + (C^l - 1)p_m)$$

که در آن

$$C = \exp(\frac{2i\pi}{n+1}) \quad i = \sqrt{-1}.$$

[۱۶]

مراجع

- [۱] طاهری س.م. و ماشینچی م. (۱۳۹۲)، *مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی* چاپ دوم، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان
- [۲] ربیعی، م.ر. مهدی‌پور م.، و پرچمی، ع. (۱۳۹۶)، دومین کنفرانس محاسبات نرم، ”نمودار تعداد اقلام نقص‌ها در یک واحد بازرسی با استفاده از درجه عدم انطباق”، گیلان، دانشکده فنی مهندسی شرق گیلان
- [۳] مهدی‌پور م.، ربیعی، م.ر. (۱۳۹۶)، هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، ”نمودار تعداد اقلام معیوب با استفاده از درجه عدم انطباق”، بیرجند، دانشگاه بیرجند
- [۴] پرچمی ع. (۱۳۹۶)، هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، ”کیفیت فازی: نمودارهای کنترل شوهارت”، بیرجند
- [۵] موننگمری د. (۱۳۸۹)، کنترل کیفیت آماری. (ترجمه نورالسنا ر). تهران: انتشارات دانشگاه علم و صنعت.
- [6] Amirzadeh, V., Mashinchi, M., & Parchami, A. (2009), ” Construction of p-charts using degree of nonconformity”, **Information Sciences**, 179,1, pp 150–160.
- [7] Daskalakis, C., Diakonikolas, I., & Servedio, A. (2015), ” Learning poisson binomial distributions”. **Algorithmica**, 179,1, pp 316-357.
- [8] Faraz, A., Baradaran Kazemzadeh, R., Bameni Moghadam, M., & Bazdar, A. (2010), ” Constructing a fuzzy Shewhart control chart for variables when uncertainty and randomness are combined” **Quality & Quantity**, 44,5, pp 905-914.
- [9] Gülbay, M., Kahraman, C., & Ruan, D. (2004), ” α -cut fuzzy control charts for linguistic data” **Intelligent Systems**, 19,12, pp 1173-1196.
- [10] Goel, A.L. (1968).”A Comparative and Economic Investigation of $\bar{X}$ and Cumulative Sum Control Chart,” Ph.D. Dissertation, University of Wisconsin, Madison.

-
- [11] Kahraman, A., Tolga, E., & Ulukan, Z. (1995), "Using triangular fuzzy numbers in the tests of control charts for unnatural patterns", **Emerging Technologies and Factory Automation**, 3, pp 291-298.
 - [12] Raz, T., & Wang, J. H. (1990), "Probabilistic and membership approaches in the construction of control charts for linguistic data", **Production Planning & Control**, 3, pp 144-152.
 - [13] Wang, j. h., & Raz, T. (1990), "on the construction of control charts using linguistic variables", **production research**, 21,3, pp 477-487.
 - [14] Zadeh, L. A. (1965), "Fuzzy sets ", **information and control**, 8,3, pp 338-353.
 - [15] Shapiro,s.s., & Wilk, M,B., (1965) , " An analysis of variance test for normality (complete sample) ", *Biometrika*, 52, 3-4, pp 591-611.
 - [16] Chen, S. X.,& Liu, J. S. (1997) , " Statistical applications of the Poisson-binomial and conditional Bernoulli distributions ", *Statistica Sinica*, pp .875-892 ISO 690

Aabstract

Control charts are one of the seven tools for controlling the statistical process. The purpose of this dissertation is to explain the concept of the control graph in a fuzzy environment. Control charts in the classical environment were first introduced in 1920 by Shewhart. Classical control charts include two limited states of zero and one that do not provide the user with complete and proper information about the production process. For this reason, using fuzzy quality, generalized descriptive quality control charts, such as the defective component ratio diagram, the number of defective items, and the number of defects per inspection unit and the average number of defects in the fuzzy environment. Fuzzy quality is used to generalize the number of defective items in the fuzzy state. It is appropriate to use fuzzy control charts in cases where the defective quality of the defective items is not equal to the user. The results and answers of this generalization by using criteria such as the characteristic curve of performance and *ARL*. At the time of the creation of the change in the mean or the variance of the process, it is compared with the standard quality control.

Keywords: Quality control charts, Fuzzy environment, p-chart, np-chart, c-chart, u-chart, Binomial Poisson Distribution



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Statistic

**Investigation on different methods of
descriptive quality control charts in a fuzzy
environment**

By: Mitra Mahdipour

Supervisors

Dr. Mohammad Reza Rabiei

Dr. Abbas Parchami

December 2017