بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش جبر- جبر ناجابجایی

رساله دکتری

بررسی توسیع‌هایی از حلقه هایی که خاصیّت (A)دارند

نگارنده: علی اصغر استاجی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

شهریورماه ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود **آقای علی اصغر استاجی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض – جبر ناجابجایی** به شماره دانشجویی **۹۲۴۶۲۵۵** ورودی بهمن ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ **۱۳۹۶/۰۶/۰۶** از رساله **نظری**■/ **عملی**☐ خود با عنوان: **بررسی توسیع هایی از حلقه هایی که خاصیت (A) دارند** دفاع و با اخذ نمره ...۲۰... به درجه : ...عالی... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ – ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	موقعیت علمی	امضاء
۱	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد راهنما	استاد	
۲	دکتر عبدالله آل هوز	استاد مدعو داخلی	استادیار	A.A
۳	دکتر ناهید اشرفی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۴	دکتر یحیی طالبی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۵	دکتر مهدی قوانمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی **آقای علی اصغر استاجی** بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

حقیر هر چه دارم از خداست پس تقدیم
می‌کنم به او که والاست

پایان‌نامه خود را تقدیم می‌کنم به همسرم
و دخترانم فاطمه، آتنا و سارا که در تمام
مراحل همراه من بودند.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای پروفسور دکتر ابراهیم هاشمی تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. هم‌چنین تشکر ویژه ای از برادر بزرگتر خودم آقای دکتر علی اکبر استاجی دارم، که در تمام مراحل زندگی مرا راهنما و الگوی خوبی بودن و از تمام کارکنان و اعضای هیات علمی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود به خاطر فراهم کردن محیطی مناسب برای تحقیق متشکرم، و در پایان جای دارد از داوران محترم ۱ــ دکتر عبدالله آل هوز ۲ــ سرکار خانم دکتر ناهید اشرفی ۳ــ دکتر یحیی طالبی ۴ــ دکتر مهدی قوتمند که داوری این رساله را بر عهده گرفتند تشکر و قدردانی نمایم.

امید دارم از لطف خداوند به نیکی طی کند اولاد آدم

علی اصغر استاجی
شهریورماه ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **علی اصغر استاجی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی توسیع‌هایی از حلقه هایی که خاصیّت** (A)**دارند** ، تحت راهنمایی **پرفسور دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علی اصغر استاجی
شهریورماه ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مطالعه خاصیّت (A) راست حلقه‌ها نقش مهمّی را در جبر ناجابجایی بازی می‌کند. در معنی لغوی، گوئیم حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست است هرگاه هر ایده‌آل دو طرفه با تولید متناهی مشمول در مقسوم علیه‌های صفر چپ حلقه دارای پوچ ساز راست باشد، از مهّمترین نتایج فصل اوّل پاسخ دادن به دو سئوال در خصوص خاصیّت (A) راست است، که در مرجع [۳۳]، مطرح شده است. ما به یکی از سئوالات پاسخ مثبت می‌دهیم و در واقع ثابت می‌کنیم، که اگر R یک حلقه‌ی دوئو راست باشد و M یک $u.p$ـ تکوار باشد، آن‌گاه R یک حلقه Mـ مک‌کوی راست و حلقه‌ی تکواری $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است و به دومین سئوال پاسخ منفی می‌دهیم و هم‌چنین چند مثال ساختاری نیز ارائه می‌دهیم.

در فصل دوم روی خاصیّت (A) راست توسیع‌های اور، بخصوص روی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب متمرکز می‌شویم و نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ی دوئو راست باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x,\alpha]]$ دارای خاصیّت (A) راست است، جائی‌که R یک حلقه‌ی نوتری راست و αـ سازگار باشد. بعلاوه برای حلقه‌ی دوئو راست و (α,δ)ـ سازگار نشان می‌دهیم:

۱. توسیع اور $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است.

۲. حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ زیپ راست است اگر و تنها اگر R حلقه‌ی زیپ راست باشد.

در فصل سوم ابتدا نشان می‌دهیم که ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه‌ی $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ اصلی و تولید شده توسط f_a می‌باشند، که در این‌جا a یک اتم از فریم L است. سپس نشان می‌دهیم که اگر L یک فریم $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ـ کاملاًمنظّم باشد، آن‌گاه ساکل حلقه‌ی $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ شامل تمام fهایی است که $coz(f)$ اتصالی از تعداد متناهی اتم باشد. هم‌چنین نشان می‌دهیم که $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ و $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L)$ دارای می‌باشند.

کلمات کلیدی:حلقه‌ی دوئو راست (چپ)، حلقه‌ی برگشت پذیر، خاصیّت (A) راست (چپ)، $u.p$– تکوار، حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های $R[x]$، حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$، (α,δ)ـ سازگار، حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha,\delta]$، حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\alpha,\delta]]$، مشبکه، قاب، fـ حلقه $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$، ایده‌آل‌های می‌نیمال، ساکل حلقه.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. E. Hashemi, A. AS. Estaji and M. Ziembowski, Answers to Some Questions Concerning Rings with Property (A), Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 60 (2017), no. 3, 651–664.

2. E. Hashemi, A. As. Estaji, and A. Alhevaz, On Ore extension and skew power series rings with some restrictions on zero-divisors, J. Algebra Appl. 16 (2017), no. 9, 1750164, 12 pp.

3. A. As. Estaji, E. Hashemi and A. A. Estaji, On Property (A) and socle of the f-ring $Frm(\mathcal{P}(\mathbb{R}), L)$, Categories and General Algebraic Structures with Applications, In Press.

4. Ali Asghar Estaji and Ebrahim Hashemi, On extensions of rings with Property (A), 25th Iranian Algebra Seminar Hakim Sabzevari University, July 19-20, 2016, 85-88.

فهرست مطالب

نمایه **۹۱**

فصل ۱

خاصیّت (A) روی حلقه‌ها

۱.۱ تاریخچه

در سرتاسر این پایان نامه R یک حلقه‌ی شرکت پذیر و یک دار در نظر گرفته شده و تمام تکوارها نابدیهی می‌باشند. این بخش را با تعاریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. عنصر a از حلقه‌ی R را مقسوم علیه صفر راست (چپ) گوئیم در صورتی‌که عنصر ناصفر $b \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $ba = \circ$ $(ab = \circ)$.

در حلقه‌ی جابجایی R مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین در حلقه‌های ناجابجایی مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر چپ و راست حلقه‌ی R را به ترتیب با

$$Z_l(R) = \{x \in R : \exists \circ \neq r \in R (xr = \circ)\}$$

و

$$Z_r(R) = \{x \in R : \exists \circ \neq r \in R (rx = \circ)\}.$$

نشان می‌دهیم. واضح است که در حلقه‌های جابجایی

$$Z_l(R) = Z_r(R) = Z(R)$$

که در این‌جا

$$Z_l(R) \cup Z_r(R) = Z(R).$$

تعریف ۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $\varnothing \neq S \subseteq R$ باشد. پوچ ساز راست و چپ S روی حلقه R را به ترتیب با

$$r_R(S) = \{r \in R : Sr = 0\}$$

و

$$l_R(S) = \{r \in R : rS = 0\}$$

نمایش می‌دهیم. بدیهی است که در حلقه‌های جابجایی پوچ ساز راست و چپ S با هم برابرند و آن را با $Ann(S)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. حلقه‌ی R را نوتری راست (چپ) گوئیم درصورتی‌که هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های راست (چپ) آن سرانجام متوقف شود. به عبارتی زنجیر صعودی زیر

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

از ایده‌آل راست (چپ) حلقه‌ی R سرانجام متوقف شود.هم‌چنین حلقه‌ی R را نوتری گوئیم در صورتی‌که هم نوتری راست و هم نوتری چپ باشد.

کاپلانسکی[1]در مرجع [۳۹، صفحه ۵۶]، روی حلقه‌های جابجایی و نوتری قضیه‌ی زیر را اثبات می‌کند:

گزاره ۴.۱. *اگر I ایده‌آلی با تولید متناهی و مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه جابجایی و نوتری R باشد، آن‌گاه $0 \neq r \in R$ به قسمی وجود دارد که $Ir = 0$. به عبارتی پوچ ساز ایده‌آل I مخالف صفر است.*

برهان. به مرجع [۳۹، صفحه ۵۶]، رجوع شود. □

هم‌چنین کاپلانسکی در مرجع [۳۹، صفحه ۶۳]، نشان داده است که حلقه‌ی غیر نوتری R و ایده‌آل ناصفر و با تولید متناهی I مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R به قسمی وجود دارد که پوچ ساز I برابر با صفر است. در واقع نشان می‌دهد شرط نوتری از شرایط اساسی برقراری گزاره ۴.۱ می‌باشد، که این مثال به شرح زیر است:

مثال ۵.۱. فرض کنیم R یک UFD باشد که PID نیست. (برای مثال: حلقه‌ی R می تواند حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های با دو متغیر روی یک میدان باشد.) $R-$ مدول $A = \oplus_{P\in spec(R)} \frac{R}{P}$ را در نظر می‌گیریم، که در این جا $spec(R)$ برابر با مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اوّل حلقه‌ی R می‌باشد. $Z(A)$ برابر با مجموعه‌ی تمام عناصر وارون ناپذیر R است. فرض کنیم p و q دو ایده‌آل اول و مجزای حلقه‌ی R به قسمی باشند که $I = \langle p, q\rangle \neq R$ واضح که $I \subseteq Z(A)$ اما پوچ ساز I در R برابر با صفر است.

---
[1] Kaplansky

برهان. به مرجع [۳۹، صفحه ۶۳]، رجوع شود. □

بر اساس گزاره ۴.۱، هوکابا[۲] و کلر[۳] در مرجع [۳۶]، خاصیّت (A) را روی حلقه‌های جابجایی به صورت تعریف زیر ارائه دادند:

تعریف ۶.۱. گوئیم حلقه‌ی R دارای **خاصیّت** $(\mathbf{A})$ است، هرگاه I ایده‌آلی با تولید متناهی و مشمول در مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R باشد، آن‌گاه پوچ ساز I مخالف صفر باشد.

در مرجع [۳۳]، هونگ[۴] و همکارانش در سال ۲۰۰۷ خاصیّت (A) راست را به حلقه‌های ناجابجایی بسط دادند که به صورت تعریف زیر ارائه می‌گردد:

تعریف ۷.۱. گوئیم حلقه‌ی R دارای **خاصیّت** $(\mathbf{A})$ **راست** (چپ) است، هرگاه I ایده‌آلی دوطرفه و با تولید متناهی و مشمول در $Z_l(R)$ $(Z_r(R))$ باشد، آن‌گاه $0 \neq r \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $Ir = 0$ $(rI = 0)$.

در مرجع [۳۳]، تعدادی از حلقه‌هایی که دارای خاصیّت (A) راست می‌باشند، ارائه شده است. به طور مثال: در این مقاله نشان داده‌اند که خاصیّت (A) در حلقه‌ها یک خاصیّت متقارن نیست، به عبارتی مثالی را ارائه داده‌اند [۳۳، مثال ۱.۲]، که نشان می‌دهد حلقه‌ای وجود دارد که دارای خاصیّت (A) راست است ولی دارای خاصیّت (A) چپ نمی‌باشد. همچنین در مرجع [۳۳، گزاره ۱.۳]، ثابت می‌کنند که حاصل ضرب مستقیم خانواده‌ی ازحلقه‌ها دارای خاصیّت (A) راست است اگر و فقط اگر هر عضو این خانواده دارای خاصیّت (A) راست باشد. همچنین در مرجع [۳۳، مثال ۱.۴]، نشان می‌دهند که شرط جابجایی بودن در ۴.۱، یک شرط اساسی است.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را پوچ توان گوئیم در صورتی‌که عدد صحیح نامنفی n به قسمی وجود داشته باشد که $a^n = 0$.

تعریف ۹.۱. گوئیم حلقه‌ی R کاهشی است اگر که R دارای عنصر پوچ توان ناصفر نباشد.

تعریف ۱۰.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را یک ایده‌آل پوچ ساز راست (چپ) گوئیم درصورتی‌که $X \subseteq R$ به قسمی وجود داشته باشد که $I = r_R(X)$ $(I = l_R(X))$. بعلاوه در صورتی‌که ایده‌آل I هم ایده‌آل پوچ ساز راست و هم ایده‌آل پوچ ساز چپ باشد آن را یک ایده‌آل پوچ ساز گوئیم.

تعریف ۱۱.۱. گوئیم حلقه‌ی R در شرط $(a.c.c)$ روی پوچ سازهای راست (چپ) صادق است درصورتی‌که هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های پوچ ساز راست (چپ) آن سرانجام متوقف شود. به عبارتی زنجیر صعودی مانند

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

[۲] Huckaba

[۳] Keller

[۴] Hong

از ایده‌آل‌های پوچ ساز راست (چپ) حلقه‌ی R سرانجام متوقف شود.

هونگ[۵] و همکارانش در مرجع [۳۳، گزاره ۱.۶]، ثابت کردند، حلقه‌های کاهشی که دارای تعداد متناهی ایده‌آل اوّل می‌نیمال باشند دارای خاصیّت (A) هستند، و از آن نتیجه می‌گیرند که، حلقه‌های کاهشی که در شرط زنجیر صعودی $(a.c.c)$ روی پوچ‌سازها صادق باشند نیز دارای خاصیّت (A) می‌باشند.

تعریف ۱۲.۱. حلقه‌ی R را برگشت پذیر گوئیم در صورتی‌که به ازای هر $a,b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $ba = 0$.

هونگ و همکارانش در مرجع [۳۳، گزاره ۱.۸]، ثابت می‌کنند، حلقه‌ی برگشت پذیری که تمام ایده‌آل‌های اوّل آن ماکسیمال باشند، دارای خاصیّت (A) می‌باشند. همچنین به عنوان نتیجه‌ای از آن نشان می‌دهند که حلقه کاهشی که تمام ایده‌آل‌های اوّل آن ماکسیمال باشند دارای خاصیّت (A) می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱. عنصر e از حلقه‌ی R را خود توان نامیم در صورتی‌که $e^2 = e$.

تعریف ۱۴.۱. حلقه‌ی R را دو منظّم نامیم در صورتی‌که هر ایده‌آل اصلی آن تولید شده توسط یک عنصر خود توان باشد.

تعریف ۱۵.۱. حلقه‌ی R را فون نیومن[۶] منظّم گوئیم، هرگاه برای هر $a \in R$، $b \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $aba = a$. همچنین آن را قویاً منظّم گوئیم، هرگاه برای هر $a \in R$ $b \in R$ موجود باشد به طوری‌که $a = a^2 b$.

تعریف ۱۶.۱. Rـ مدول E را انژکتیو گوئیم، هرگاه به ازای هر R تکریختی $g : A \to B$ و R همریختی $f : A \to E$ یک R همریختی $h : B \to E$ به قسمی وجود داشته باشد که $hg(A) = f(A)$.

تعریف ۱۷.۱. اگر حلقه‌ی R به عنوان Rـ مدول چپ (راست) انژکتیو باشد، آن را خود انژکتیو چپ (راست) می‌نامیم.

هونگ و همکارانش در مرجع [۳۳، گزاره ۱.۱۱]، نشان دادند که حلقه‌های دو منظّم دارای خاصیّت (A) راست هستند، و از آن نتیجه می‌گیرند [۳۳، نتیجه ۱.۱۲]، حلقه‌های قویاً منظّم که در شرط زنجیر صعودی $(a.c.c)$ روی پوچ‌سازهای صادق باشند دارای خاصیّت (A) راست می‌باشند.

هونگ و همکارانش در مرجع [۳۳، قضیه ۲.۳]، نشان می دهند، اگر حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست باشد، آن‌گاه حلقه ماتریس‌های مربعی $\mathbb{M}_n(R)$ روی حلقه‌ی R، دارای خاصیّت (A) راست می‌باشد.

بعلاوه آن‌ها در قضیه و گزاره زیر شرط معادل با خاصیّت (A) راست را ارائه می‌دهند:

---
[۵] Hong
[۶] Von Neumann

قضیه ۱۸.۱. *[۳۳، قضیه ۲.۳] برای عدد طبیعی $n \geq 1$. حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست است اگر و تنها اگر حلقه‌ی*

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} : a, a_{i,j} \in R \right\}$$

دارای خاصیّت (A) راست باشد.

گزاره ۱۹.۱. *[۳۳، گزاره ۲.۵] برای عدد طبیعی $n \geq 1$. حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست است اگر و تنها اگر حلقه‌ی*

$$V_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a_2, \cdots, a_n \in R \right\}$$

دارای خاصیّت (A) راست باشد.

همچنین هونگ و همکارانش به عنوان نتیجه‌ای از دو قضیه فوق نشان می‌دهند:

نتیجه ۲۰.۱. *[۳۳، نتیجه ۲.۶] برای عدد طبیعی $n \geq 1$. حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست است اگر و تنها اگر حلقه‌ی $R[x]/(x^n)$ دارای خاصیّت (A) راست باشد.*

تعریف ۲۱.۱. حلقه‌ی R را مک‌کوی[۷] راست نامیم، هرگاه برای چندجمله‌ای‌های ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ از $R[x]$، اگر $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه عنصر ناصفر $0 \neq c \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $f(x)c = 0$. بعلاوه حلقه‌ی R را مک‌کوی چپ نامیم، هرگاه برای چندجمله‌ای‌های ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ از $R[x]$، اگر $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه عنصر ناصفر $0 \neq c \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $cg(x) = 0$. همچنین حلقه‌ی R را مک‌کوی نامیم، در صورتی‌که R هم مک‌کوی راست و هم مک‌کوی چپ باشد.

[۷] McCoy

هونگ و همکارانش در مرجع [۳۳]، گزاره ۲.۹]، نشان دادند در حلقه‌های مک‌کوی راست، اگر حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست می‌باشد.

هم‌چنین آن‌ها در مرجع [۳۳، گزاره ۲.۱۰]، نشان دادند اگر حلقه‌ی R نیم جابجایی و مک‌کوی راست باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست می‌باشد، بعلاوه به عنوان نتیجه‌ای از آن در مرجع [۳۳، نتیجه ۲.۱۱]، نشان دادند، اگر حلقه‌ی R برگشت پذیر باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x]$ دارای خاصیّت (A) می‌باشد. هم‌چنین آن‌ها در مرجع [۳۳، نتیجه.۲.۱۲]، نشان می‌دهند برای حلقه‌ی R، اگر $R[x]$ نیم جابجایی باشد، آن‌گاه $R[x]$ دارای خاصیّت (A) است. بعلاوه در مرجع [۳۳، نتیجه ۲.۱۳]، نشان می‌دهند اگر حلقه‌ای جابجایی و یا کاهشی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x]$ دارای خاصیّت (A) می‌باشد.

در پایان مرجع [۳۳]، هونگ و همکارانش چهار سئوال زیر را مطرح نمودند که ما به دنبال حل آن‌ها هستیم.

سئوال ۱: فرض کنیم R یک حلقه دوئو راست باشد. آیا حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است؟

سئوال ۲: فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست باشد. آیا حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است؟

سئوال ۳: آیا حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ روی حلقه‌ی جابجایی R دارای خاصیّت (A) راست است؟

سئوال ۴: فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست باشد. آیا حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است؟

۲.۱ پاسخ مثبت به یکی از سئوالات مطرح شده

مطالب ذکر شده در این بخش در مرجع [۲۸]، به چاپ رسیده است.

تعریف ۲۲.۱. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را کاملاً اوّل نامیم اگر به ازای هر $a,b \in R$، از $ab \in P$ نتیجه شود که $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف ۲۳.۱. حلقه‌ی R را نیم جابجائی گوئیم اگر برای هر $a,b \in R$، $ab = \circ$ نتیجه دهد $aRb = \circ$.

گزاره ۲۴.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم جابجائی باشد و*

$$\mathcal{U} = \{l_R(a) : \circ \neq a \in R\}$$

یا

$$\mathcal{U} = \{r_R(a) : \circ \neq a \in R\}.$$

اگر P عضو ماکسیمال خانواده‌ی $\mathcal{U}$ باشد، آن‌گاه P یک ایده‌آل کاملاً اوّل R است.

برهان. فرض کنیم P عضو ماکسیمال از خانواده $\mathcal{U}$ باشد. بنابراین $a \in R$ $\neq 0$ به قسمی وجود دارد که $P = l_R(a)$. فرض کنیم $xy \in P$ و $y \notin P$. بنابراین $xya = 0$ و $ya \neq 0$. چون $ya \neq 0$ پس $x \in l_R(ya)$. فرض کنیم $t \in l_R(a)$. لذا $ta = 0$، در نتیجه چون R یک حلقه نیم جابجایی است $tRa = 0$. بنابراین $tya = 0$، و لذا $t \in l_R(ya)$. بنابراین $l_R(a) \subseteq l_R(ya)$ چون $l_R(a)$ ماکسیمال است، لازم می‌آید که $l_R(a) = l_R(ya)$، پس $x \in l_R(a)$. □

لم ۲۵.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم جابجایی باشد. در این صورت $Z_l(R)$ و $Z_r(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اوّل می‌باشند.*

برهان. قرار می‌دهیم $S = R \setminus Z_l(R)$. فرض کنیم $x \in Z_l(R)$. بنابراین عنصر ناصفر $a \in R$ $\neq 0$، به قسمی وجود دارد که $xa = 0$. قرار می‌دهیم $I = l_R(a)$. چون R یک حلقه‌ی نیم جابجایی است، I یک ایده‌آل دو طرفه می‌باشد. فرض کنیم:

$$\mathcal{U} = \{J \trianglerighteq R : I \subseteq J, J \cap S = \emptyset\}.$$

با استفاده از لم زورن می‌توان نشان داد، $\mathcal{U}$ شامل ایده‌آل اوّل ماکسیمال مانند P_x است. با توجه به گزاره ۲۴.۱، P_x یک ایده‌آل کاملاً اوّل است و چون $l_R(a) \subseteq P_x$ و $x \in l_R(a)$، لازم می‌آید که $x \in P_x$. در نتیجه به ازای هر $x \in Z_l(R)$ ایده‌آل اوّل P_x به قسمی وجود دارد که $x \in P_x$. لذا،

$$Z_l(R) = \bigcup_{x \in Z_l(R)} P_x.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$Z_r(R) = \bigcup_{x \in Z_r(R)} P_x.$$

□

نتیجه ۲۶.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم جابجایی و نوتری چپ باشد. در این صورت*

$$Z_l(R) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda،$$

که در این‌جا به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، ایده‌آل P_λ کاملاً اوّل و $|\Lambda| < \infty$. همچنین به ازای هر λ، ایده‌آل P_λ پوچ ساز راست یا چپ از یک عنصر مخالف صفر در R می‌باشد.

برهان. با توجه به لم ۲۵.۱، و نوتری بودن حلقه‌ی R حکم بدیهی می‌باشد. □

کاپلانسکی[۸] در مرجع [۳۹، قضیه ۸۱]، ثابت نمودند که اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و $J_1, J_2, \ldots, J_n$ ایده‌آل‌هائی در R باشند و S یک زیر حلقه از R مشمول در

$$J_1 \cup J_2 \ldots \cup J_n$$

[۸] Kaplansky

به قسمی باشند که حداقل ۲ − n تا از J_iها اوّل باشند، آن‌گاه S مشمول در یک J_k است. مشابه این قضیه را در حلقه‌های نیم جابجائی ارائه می‌دهیم که این قضیه معروف به قضیه عدم اجتناب از ایده‌آل‌های اوّل است:

گزاره ۲۷.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم جابجایی و $\{P_۱, P_۲, \ldots, P_n\}$ خانواده‌ای متناهی از ایده‌آل‌های کاملاً اوّل باشد. اگر S یک زیر حلقه مشمول در اجتماع P_iها باشد، آن‌گاه S مشمول در یک P_k است.*

برهان. فرض کنیم

$$S \subseteq P_۱ \cup P_۲ \cup \ldots \cup P_n$$

و n با این خاصیت کمترین باشد. هم‌چنین فرض کنیم به ازای هر i، $S \nsubseteq P_i$. بنابراین به ازای هر i، داریم $S \nsubseteq \bigcup_{i\neq j}^{n} P_j$. لذا $a_i \in S$ به قسمی وجود دارد که $a_i \notin \bigcup_{i\neq j}^{n} P_j$ امّا $a_i \in P_i$، به این ترتیب می‌توان عناصر

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n$$

را به قسمی یافت که به ازای هر $i \neq j$، $a_i \notin P_j$. چون S یک زیر حلقه می‌باشد پس

$$a_۱ + a_۲a_۳ \cdots a_n \in S.$$

بنابراین P_i به قسمی وجود دارد که

$$a_۱ + a_۲a_۳ \cdots a_n \in P_i.$$

اگر $i = ۱$، آن‌گاه چون $a_۱ \in P_۱$ نتیجه می‌گیریم $a_۲a_۳ \ldots a_n \in P_۱$، و چون $P_۱$ کاملاً اوّل است پس وجود دارد a_i به قسمی که $a_i \in P_۱$ که یک تناقض است. اگر $i \neq ۱$ باشد، آن‌گاه $a_۲a_۳ \ldots a_n \in P_i$، و در نتیجه $a_۱ \in P_i$، که یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۲۸.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R نیم جابجایی و نوتری چپ باشد. در این صورت R دارای خاصیّت (A) راست (چپ) است.*

برهان. فرض کنیم $I \subseteq Z_l(R)$. بنابراین با توجه به گزاره ۲۴.۱، $Z_l(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} P_i$ در نتیجه

$$I \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} P_i،$$

که در این‌جا به ازای هر i، P_i کاملاً اوّل و یک پوچ ساز چپ می‌باشند. بنا بر قضیه‌ی ۲۷.۱ برای $۱ \leq i \leq n$، $I \subseteq P_i$. بنابراین برای $۰ \neq a \in R$، داریم $Ia \subseteq P_ia = ۰$، پس $Ia = ۰$. □

ملاحظه ۲۹.۱. فرض کنیم K یک حلقه و $\{x_i | i \in I\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای آزاد تعویض ناپذیر روی K باشند (یعنی اگر $i \neq j$، آن‌گاه $x_ix_j \neq x_jx_i$، و برای هر $k \in K$ داشته باشیم $kx_i = x_ik$). Kـ حلقه‌ی آزاد تولید شده به وسیله $\{x_i | i \in I\}$ را با علامت $R = K\langle x_i : i \in I\rangle$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۰.۱. حلقه‌ی R را دوئو[۹] راست (چپ) گوئیم در صورتی‌که هر ایده‌آل راست (چپ) آن یک ایده‌آل دو طرفه باشد. حلقه‌ی R را دوئو نامیم در صورتی‌که هم دوئو راست و هم دوئو چپ باشد.

واضح است که هر حلقه‌ی دوئو راست یک حلقه‌ی نیم جابجایی است، ولی حالت برعکس آن درست نیست. برای مثال: Kـ جبر آزاد $K\langle x, y\rangle$ روی میدان K یک دامنه است که نه دوئو راست و نه دوئو چپ است، از طرفی هر دامنه یک حلقه نیم جابجایی است.

نتیجه ۳۱.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست (چپ) و نوتری چپ (راست) باشد. در این صورت R دارای خاصیّت (A) راست (چپ) است.*

برهان. چون هر حلقه‌ی دوئو راست (چپ) یک حلقه‌ی نیم جابجایی است. پس با توجه به قضیه‌ی ۲۸.۱، R دارای خاصیّت (A) راست (چپ) است. □

با توجه به قضیه ۲۸.۱، اکنون می‌توانیم گزاره ۴.۱، را به عنوان نتیجه‌ای از آن داشته باشیم:

نتیجه ۳۲.۱. *اگر R حلقه‌ی جابجایی و نوتری باشد، آن‌گاه R دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. با توجه به قضیه ۲۸.۱، حکم بدیهی می‌باشد. □

۳.۱ حلقه‌ی تکواری

تعریف ۳۳.۱. تکواره M را یک $u.p$ـ تکوار نامیم، هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی متناهی و ناتهی $A, B \subseteq M$ عنصر $g \in M$ و $a \in A$ و $b \in B$ به قسمی وجود داشته باشند که $g = ab$ نمایشی منحصر بفرد داشته باشد.

لم ۳۴.۱. *اگر M یک $u.p$ـ تکوار باشد، آن‌گاه قانون حذف در M برقرار است.*

برهان. فرض کنیم $a, b, c \in M$ و $ab = ac$. کافی‌است مجموعه‌های $A = \{a\}$ و $B = \{b, c\}$ را در نظر بگیریم. چون M یک $u.p$ـ تکوار است پس AB دارای عنصری است که، نمایش آن منحصر بفرد می‌باشد. امّا طبق فرض $ab = ac$، پس باید $b = c$. □

لم ۳۵.۱. *فرض کنیم M یک $u.p$ـ تکوار باشد. در این صورت به ازای هر $1 \neq s \in M$ مجموعه‌ی $\{1, s, s^2, s^3, \dots\}$ نامتناهی است.*

برهان. فرض کنیم $\{1, s, s^2, s^3, \dots\}$ متناهی باشد. بنابراین برای $m, n \in \mathbb{Z}$، $s^m = s^n$. فرض کنیم $m \leq n$. پس $s^{n-m} = 1$. فرض کنیم k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $s^k = 1$. قرار می‌دهیم $A = \{1, s\}$ و $B = \{1, s, s^2, s^3, \dots, s^{k-1}\}$. واضح است که در AB عنصری نمی‌توان یافت که دارای نمایش منحصر به فرد باشد و این با $u.p$ـ تکوار بودن M در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. □

[۹] Duo

لم ۳۶.۱. *فرض کنیم M یک $u.p$ـ تکوار و $u \neq 1 \in M$ اگر برای اعداد صحیح مثبت l و $m_1, m_2, \ldots, m_l$ داشته باشیم*

$$s_{11}, \ldots, s_{1m_1}, s_{21}, \ldots, s_{2m_2}, \ldots, s_{l1}, \ldots, s_{lm_l} \in M،$$

آن‌گاه اعداد صحیح نامنفی $n_1, n_2, \ldots, n_l$ به قسمی وجود دارند که

$$\forall i, j \forall p, q (i \neq j \Rightarrow s_{ip}u^{n_i} \neq s_{jq}u^{n_j})$$

برهان. با توجه به لم ۳۵.۱، برای هر $1 \neq u \in M$، $\{1, u, u^2, \ldots, \}$ نامتناهی است. همچنین با توجه به لم ۳۴.۱، و برقراری قانون حذف،

$$\{s_{2q}, s_{2q}u, s_{2q}u^2, \ldots, \}$$

نامتناهی است. اگر به ازای هر عدد صحیح d وجود داشته باشد $i \neq j$ به طوری‌که $s_{1i} = s_{2j}u^d$، آن‌گاه با انتخاب دو عدد صحیح متمایز $d \neq d'$، $s_{2j}u^d = s_{2j}u^{d'}$، که با توجه به برقراری قانون حذف به تناقض می‌رسیم. بنابراین عدد صحیح نامنفی d به قسمی وجود دارد که به ازای هر i, j، $s_{1i} \neq s_{2j}u^d$. کافی‌است $n_1 = 0$ و $n_2 = d$ انتخاب کنیم. بنابراین با انجام تعداد متناهی این فرایند، حکم نتیجه می‌شود. □

غالباً در دروس مقدماتی جبر این مطلب را می‌آموزیم که اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و $f(x)$ یک مقسوم علیه صفر $R[x]$ باشد، آن‌گاه عنصر ناصفر $r \in R$ به قسمی وجود دارد که $f(x)r = 0$. این مطلب برای اوّلین بار توسط مک‌کوی[10] در مرجع [۵۰] اثبات می‌شود. نیلسن[11] بر همین اساس تعریف حلقه‌ی مک‌کوی را ارائه می‌دهد و در مرجع [۵۲]، نشان می‌دهد، هر حلقه برگشت پذیر مک‌کوی می‌باشد. همچنین کمی بعد از آن کامیلو[12] و نیلسن در مرجع [۹]، نشان دادند که، هر حلقه دوئو مک‌کوی می‌باشد.

فرض کنیم M یک تکواره و R یک حلقه باشد. عناصر حلقه $R[M]$ به فرم

$$\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$$

که در این‌جا $a_i \in R$ و $g_i \in M$ می‌باشند. همچنین با جمع و ضرب معمولی چند جمله‌ای‌ها $R[M]$ یک حلقه‌ی یک‌دار می‌باشد.

هاشمی[13] در مرجع [۲۵]، تعریف زیر را ارائه دادند:

تعریف ۳۷.۱. حلقه‌ی R را Mـ مک‌کوی راست نامیم، درصورتی‌که برای هر دوعنصر ناصفر α و β از $R[M]$، اگر $\alpha\beta = 0$، آن‌گاه $0 \neq r \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که $\alpha r = 0$. به طریق مشابه Mـ مک‌کوی چپ تعریف می‌شود. همچنین حلقه‌ی R را Mـ مک‌کوی گوئیم، در صورتی‌که R هم Mـ مک‌کوی راست و هم Mـ مک‌کوی چپ باشد.

[10] McCoy
[11] Nielsen
[12] Camillo
[13] Hashemi

نتایج زیر در مرجع [۴۷]، اثبات شده است:

گزاره ۳۸.۱. *فرض کنیم $M = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ و R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R یک حلقه مک‌کوی راست است؛*

۲. *R یک حلقه Mــ مک‌کوی راست است.*

برهان. به مرجع [۴۷]، رجوع شود. □

گزاره ۳۹.۱. *اگر R یک حلقه‌ی دوئو راست و M یک $u.p$ــ تکوار باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی Mــ مک‌کوی راست است.*

برهان. به مرجع [۴۷]، رجوع شود. □

تعریف ۴۰.۱. فرض کنیم

$$\gamma = c_1 g_1 + \cdots + c_n g_n \in R[M].$$

گوئیم طول γ برابر با n و می نویسیم $length(\gamma) = n$، اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم $c_i \neq 0$.

گزاره ۴۱.۱. *فرض کنیم M یک $u.p$ــ تکوار و R یک حلقه باشد. قرار می‌دهیم*

$$\alpha = a_1 g_1 + \cdots + a_m g_m \in R[M].$$

اگر $r_{R[M]}(\alpha R[M]) \neq 0$، آن‌گاه

$$r_{R[M]}(\alpha R[M]) \cap R \neq 0.$$

برهان. فرض کنیم

$$\beta = b_1 h_1 + \cdots + b_n h_n \in r_{R[M]}(\alpha R[M])$$

و β در میان اعضای $r_{R[M]}(\alpha R[M])$ دارای کمترین طول باشد. بنابراین i_1, j_1 به قسمی وجود دارند که $1 \leq j_1 \leq n$، $1 \leq i_1 \leq m$ و $g_{i_1} h_{j_1}$ در میان حاصل ضرب اعضای دو مجموعه‌ی

$$A = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\} \text{ و } B = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$$

نمایشی منحصر به فرد دارد، زیرا M یک $u.p$ــ تکوار است. بدون کاسته شدن از کلیّت اثبات فرض کنیم $i_1 = 1 = j_1$. بنابراین برای هر $r \in R$، داریم $a_1 r b_1 = 0$. هم‌چنین واضح است که

$$\alpha(R[M] a_1 r)\beta \subset \alpha R[M] \beta = 0.$$

بنابراین $a_1 r \beta \in r_{R[M]}(\alpha R[M])$. امّا $length(a_1 r \beta) \leq length(\beta)$. لذا با توجه به کمترین بودن طول β، داریم $a_1 r \beta = 0$. بنابراین با تکرار تعداد متناهی فرایند مانند بالا برای هر $1 \leq i \leq m$، داریم $a_i R \beta = 0$. لذا $\alpha R[M] b_1 = 0$. □

گزاره ۴۲.۱. *فرض کنیم M یک $u.p$ــ تکوار و R یک حلقه باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

۱. *$R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است؛*

۲. *الف) $\alpha R[M] \subseteq Z_l(R[M])$ و ب) $r_{R[M]}(\alpha R[M]) \neq 0$.*

برهان. $\Leftarrow$ فرض کنیم

$$I = \sum_{i=1}^{l} R[M]\alpha_i R[M] \subseteq Z_l(R[M])،$$

که در این‌جا

$$\alpha_i = a_{1i}s_{1i} + \cdots + a_{im_i}s_{im_i}.$$

فرض کنیم $u \neq 1 \in M$ با توجه به لم ۳۶.۱، اعداد صحیح نامنفی $n_1, \ldots, n_l$ به قسمی وجود دارند که

$$\forall i, j \forall p, q (i \neq j \Rightarrow s_{ip}u^{n_i} \neq s_{jq}u^{n_j}).$$

واضح است که

$$\alpha = \alpha_1 u^{n_1} + \cdots + \alpha_l u^{n_l} \in I.$$

بنابراین $\alpha R[M] \subseteq I$. با توجه به فرض مسئله و گزاره ۴۱.۱،

$$r_{R[M]}(\alpha R[M]) = r_{R[M]}(R[M]\alpha R[M]) \neq 0$$

و

$$r_{R[M]}(R[M]\alpha R[M]) \cap R \neq 0.$$

بنابراین $0 \neq r \in R$ به قسمی وجود دارد که $(R[M]\alpha R[M])r = 0$. چون $R\alpha R \subseteq R[M]\alpha R[M]$ و

$$\alpha_i = a_{1i}s_{1i} + \cdots + a_{im_i}s_{im_i}،$$

$(Ra_{ij}R)r = 0$. پس

$$Ir = (\sum_{i=1}^{l} R[M]\alpha_i R[M])r = 0.$$

لذا $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است.

$\Rightarrow$ بدیهی است.

□

قضیه ۴۳.۱. *اگر R یک حلقه‌ی دوئو راست و M یک $u.p$ــ تکوار باشد، آن‌گاه $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. فرض کنیم $\alpha \in R[M]$ و $\alpha R[M] \subseteq Z_l(R[M])$. با توجه به گزاره ۳۹.۱، $0 \neq r \in R$ به قسمی وجود دارد که $\alpha r = 0$. بنابراین $r \in r_{R[M]}(\alpha R[M])$. لذا با توجه به گزاره‌ی ۴۳.۱، $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

تعریف ۴۴.۱. فرض کنیم $(M,\leq)$ یک تکوار مرتب باشد. اگر برای هر $g_1,g_2,h\in M$ از $g_1<g_2$ نتیجه شود که $g_1h<g_2h$ و $hg_1<hg_2$، آن‌گاه $(M,\leq)$ را یک تکوار کاملاً مرتب اکید نامیم.

واضح است که هر تکوار کاملاً مرتب اکید یک $u.p$ــ تکوار است. امّا عکس این مطلب درست نیست. مارکس[۱۴] و همکارانش در مرجع [۴۶]، نشان دادند. $u.p$ــ تکواری وجود دارد که تکوار کاملاً مرتب اکید نیست.

نتیجه ۴۵.۱. *اگر R یک حلقه دوئو راست باشد و M یک تکوار کاملاً مرتب اکید باشد، آن‌گاه $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. با توجه به مطالب فوق هر تکوار کاملاً مرتب اکید یک $u.p$ــ تکوار است. لذا با توجه به قضیه ۴۳.۱، $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

اکنون ما قادریم که به سئوال (۱)، جواب مثبت بدهیم:

نتیجه ۴۶.۱. *اگر R یک حلقه‌ی دوئو راست باشد، آن‌گاه $R[x]$ و $R[x,x^{-1}]$ دارای خاصیّت (A) راست هستند.*

برهان. قرار می‌دهیم M را $u.p$ــ تکوار

$$M=\langle 1,x,x^2,\dots\rangle$$

واضح است که $R[M]=R[x]$. لذا با توجه به نتیجه‌ی ۴۵.۱، $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است. هم‌چنین اگر M را $u.p$ــ تکوار

$$M=\langle \dots,x^{-2},x^{-1},1,x,x^2,\dots\rangle$$

قرار دهیم، آن‌گاه حلقه‌ی $R[x,x^{-1}]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

هوکابا و کِلِر در مرجع [۳۵، قضیه۱]، نشان دادند، اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و نابدیهی مدرّج باشد، آن‌گاه R دارای خاصیّت (A) راست است. هم‌چنین نتیجه گرفتند که حلقه‌ی چند جمله‌ای $R[x]$ روی حلقه‌ی جابجایی R دارای خاصیّت (A) راست است. علاوه بر این نشان دادند در حلقه‌های ناجابجایی حتی اگر حلقه‌ی مورد نظر نیم اوّل باشد خاصیّت (A) راست برقرار نیست [۳۳، مثال ۲.۷]، بنابراین شرط دوئو راست در فرض قضیه‌ی ۴۳.۱، یک شرط لازم است و زائد نیست.

نتیجه ۴۷.۱. *اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و M یک $u.p$ــ تکوار باشد، آن‌گاه $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. واضح است که هر حلقه‌ی جابجایی یک حلقه‌ی دوئو راست است. بنابراین با توجه به نتیجه‌ی ۴۵.۱، $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

---
[۱۴] Marks

در زیر می‌خواهیم اثبات کنیم که تحت چه شرایطی خاصیّت (A) راست به حلقه‌ی چندجمله‌ای قابل انتقال است و به این ترتیب خانواده‌ای از حلقه‌ها را معرفی می‌کنیم که سئوال (۲)، برای آن‌ها برقرار است:

گزاره ۴۸.۱. *فرض کنیم M یک $u.p$ ـ تکوار و R یک حلقه‌ی M ـ مک‌کوی باشد. اگر R دارای خاصیّت (A) راست باشد، آن‌گاه $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. فرض کنیم $\alpha = a_\circ g_\circ + \cdots + a_m g_m \in R[M]$ به طوری باشد که

$$I = R[M]\alpha R[M] \subseteq Z_l(R[M]).$$

قرار می دهیم $J = \sum_{i=\circ}^{m} Ra_iR$. عنصر ناصفر

$$\circ \neq a = \sum_{i=\circ}^{N} r_j a_{ij} s_j \in J$$

را در نظر می‌گیریم، که در این‌جا

$$a_{ij} \in \{a_\circ, a_1, \ldots, a_m\}$$

و

$$i_\circ \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_N.$$

فرض کنیم

$$A = \{g_{l_\circ} \ldots g_{l_N} | \circ \leq l_t \leq m\}$$

و $1 \neq u \in M$. با توجه به لم ۳۶.۱، عدد صحیح مثبت t_1 به قسمی وجود دارد که $Au^{t_1} \cap A = \emptyset$. فرض کنیم t_1 حاصل کمترین است. هم‌چنین با توجه به لم ۳۶.۱، عدد صحیح و نامنفی t_2 به قسمی وجود دارد که

$$(Au^{t_1} \cup A) \cap Au^{t_2} = \emptyset$$

با توجه به مفروضات واضح است که $t_1 < t_2$. فرض کنیم t_2ی حاصل کمترین است. با تکرار تعداد متناهی از این فرآیند ما عدد صحیح نامنفی t_N را به قسمی بدست می‌آوریم که

$$(A \cup Au^{t_1} \cup \ldots \cup Au^{t_{N-1}}) \cap Au^{t_N} = \emptyset.$$

فرض کنیم $t_\circ = \circ$، پس $t_\circ < t_1 < \cdots < t_N$. هم‌چنین برای هر $i \neq j$،

$$Au^{t_1} \cap Au^{t_j} = \emptyset.$$

قرار می‌دهیم $X = \{g_\circ, g_1, \ldots, g_m\}$ عنصر

$$\beta = \sum_{j=\circ}^{N} r_j (g_{i_\circ} \ldots . g_{i_{j-1}} . \alpha . g_{j+1} \ldots . g_{i_N} u^{t_j}) s_j \in R[M]$$

را در نظر می‌گیریم. بعلاوه برای هر $j \in \{0, \dots, N\}$، داریم

$$A_j = g_{i_0} g_{i_1} \dots . g_{i_{j-1}} . X . g_{i_{j+1}} \dots . g_{i_N}.$$

چون برای هر $0 \leq n \leq N$، $A_n \subseteq A$. همچنین برای هر $p \neq q$، داریم

$$Au^{t_p} \cap Au^{t_q} = \emptyset.$$

بنابراین برای هر j، عنصر $r_j a_{i_j} s_j$ ضریبی از β است. همچنین این ضرایب به ترتیب در

$$g_{i_0} g_{i_1} g_{i_2} g_{i_3} \dots . g_{i_N} u^{t_0}\text{، } g_{i_0} g_{i_1} g_{i_2} g_{i_3} \dots . g_{i_N} u^{t_1} \text{ و } \dots \; g_{i_0} g_{i_1} g_{i_2} g_{i_3} \dots . g_{i_N} u^{t_N}$$

رخ می‌دهند. قرار می‌دهیم

$$\delta = \sum_{j=0}^{N} u^{t_N - t_j} \in R[M].$$

پس

$$g_{i_0} g_{i_1} g_{i_2} g_{i_3} \dots . g_{i_N} u^{t_N}$$

ضریبی در $\beta\delta$ می‌باشد که دقیقاً همان عنصر دلخواه a است. زیرا برای هر $p \neq q$، $Au^{t_p} \cap Au^{t_q} = \emptyset$ و t_i ها همگی اعداد صحیح مثبت و کمترین می‌باشند که در شرایط ذکر شده مسئله صادق هستند. امّا

$$\alpha\delta \in I \subseteq Z_l(R[M])$$

مخالف با صفر است. بنابراین $0 \neq r \in R$ به قسمی وجود دارد که $\alpha r = 0$. زیرا R یک حلقه‌ی Mــ مک‌کوی است. در نتیجه $ar = 0$. بعلاوه چون a یک عنصر دلخواه از J بود، نتیجه می‌شود $J \subseteq Z_l(R)$، و با توجه به فرض مسئله چون R دارای خاصیّت (A) راست است عنصر ناصفر $b \in R$ به قسمی وجود دارد که $Ib = 0$. بنابراین با توجه به گزاره‌ی ۴۳.۱، حلقه‌ی $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

نتیجه ۴۹.۱. *فرض کنیم M یک تکوار کاملاً مرتب اکید و R یک حلقه‌ی Mــ مک‌کوی باشد. اگر R دارای خاصیّت (A) راست باشد، آن‌گاه $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. می‌دانیم هر تکواره کاملاً مرتب اکید یک $u.p$ــ تکوار است. بنابراین با توجه به گزاره ۴۸.۱، $R[M]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

نتیجه ۵۰.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی مک‌کوی راست باشد. اگر R دارای خاصیّت (A) راست باشد، آن‌گاه $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. قرار می‌دهیم M را $u.p$ــ تکوار

$$M = \langle 1, x, x^2, \dots \rangle .$$

واضح است که $R[x] = R[M]$. لذا با توجه به نتیجه‌ی ۴۸.۱، $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

۴.۱ پاسخ منفی به یکی از سئوالات مطرح شده در خصوص خاصیّت (A)

در ابتدای این فصل می‌خواهیم مثالی ارائه کنیم که پاسخ منفی به سئوال (۴) می‌دهد.
برای یک جبر مانند B و زیر مجموعه‌ی $Y \subseteq B$ به ترتیب $Al_B(Y)$ و $Id_B(Y)$ را زیر جبر و ایده‌آل تولید شده توسط Y می‌نامیم.

مثال ۵۱.۱. حلقه‌ی R با خاصیّت (A) راست موجود است که حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست نیست.

برهان. فرض کنیم K یک میدان و U یک مجموعه ناشمارا باشد. با توجه به ناشمارا بودن U مجموعه‌های زیر

$$C(U) = \left\{I \subset U : \text{شمارا باشد } I\right\}$$

و

$$F(U) = \left\{J \subset U : \text{متناهی باشد } J\right\}$$

را می‌سازیم. قرار می‌دهیم $G = G_۱ \cup G_۲ \cup G_۳$، که دراین‌جا $G_۱$، $G_۲$ و $G_۳$ مجموعه‌ای از نمادها می‌باشند، که به ترتیب زیر

$$\begin{aligned} G_۱ &= \left\{c_I : I \in C(U)\right\} \\ G_۲ &= \left\{d_J : J \in F(U)\right\} \\ G_۳ &= \left\{a_i : i \in U\right\} \end{aligned}$$

معرفی می‌شوند. بنابراین Kـجبر $A = K\langle x : x \in G\rangle$ را داریم. قرار می‌دهیم Q را ایده‌آل تولید شده توسط

$$Y = \left\{\left(\bigcup_{c_I \in G_۱} \left\{c_I G\right\}\right) \cup \left(\bigcup_{d_J \in G_۲} \left\{d_J G\right\}\right) \cup \left(\bigcup_{J \in F(U)} \left\{D d_J\right\}\right) \cup \left(\bigcup_{I \in C(U)} \left\{B c_I\right\}\right)\right\}.$$

فرض کنیم D ایده‌آل تولید شده توسط

$$\left\{a_j \in G_۳ : j \in J\right\}$$

و B برابر با زیر جبر تولید شده توسط

$$\left\{a_i \in G_۳ : i \in I\right\}$$

باشد. قرار می‌دهیم

$$R = K\langle x : x \in G\rangle / Q.$$

بنابراین با توجه به روابط تعریف شده در حلقه‌ی R، روابط زیر

۱. برای هر $J \in F(U)$ و $I \in C(U)$، $c_I G = 0 = d_J G$

۲. برای هر $I \in C(U)$، $Al_A(\{a_i \in G_3 : i \in I\})c_I = 0$

۳. برای هر $J \in F(U)$، $Id_A(\{a_j \in G_3 : j \in J\})d_J = 0$

برقرارند. حال نشان می‌دهیم R دارای خاصیّت (A) راست است. فرض کنیم P ایده‌آلی از R و $a \in P$. نشان می‌دهیم اگر a دارای جمله‌ی ثابت باشد، آن‌گاه a نمی‌تواند یک مقسوم علیه صفر چپ باشد. فرض کنیم $a \in P$ و a_0 ثابت a باشد. اگر a یک مقسوم علیه صفر چپ باشد، آن‌گاه $0 \neq b \in R$ به قسمی وجود دارد که $ab = 0$. به عبارتی $ab \in Q$ در نتیجه باید $a_0 b \in Q$. امّا $a_0 \in K$ و K یک میدان است، پس $a_0^{-1} a_0 b \in Q$. بنابراین $b \in Q$ که تناقض است با $b \neq 0$. بنابراین، اگر P ایده‌آلی با تولید متناهی و مشمول در مقسوم علیه‌های صفر چپ R باشد، آن‌گاه تمام جملات P فاقد جمله‌ی ثابت می‌باشند. بنابراین، اگر

$$P = \langle f_1, \dots, f_2 \rangle،$$

آن‌گاه به ازای هر i، عنصر $f_i \neq 0$ عضوی از زیر جبر تولید شده توسط

$$\{a_1, a_2, \dots, a_t\}, c_{I_1}, \dots, c_{I_k}, d_{J_1}, \dots, d_{J_k}$$

می‌باشد. لذا به ازای هر $i = 1, 2, 3$، خانواده H_i با تعداد متناهی عضو به قسمی وجود دارند که $H_i \subseteq G_i$. قرار می‌دهیم $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. بنابراین $P \subseteq I(H)$. از طرفی چون $|H| < \infty$ است، برای $J \in F(U)$، $I(H)d_J = 0$. پس $Pd_J = 0$ و این یعنی، حلقه R دارای خاصیّت (A) راست است.

مجموعه‌ی شمارای $\{u_0, u_1, \dots\}$ ازعناصر U را انتخاب می‌کنیم و با استفاده از آن‌ها نمادهای a_{u_i} را ارائه می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_{u_i} x^i \in R[[x]].$$

ایده‌آل تولید شده توسط f را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم $\langle f \rangle$ مشمول در مقسوم علیه‌های صفر چپ R است. بنابراین به ازای هر $a \in \langle f \rangle$، خانواده‌ی

$$g_1, g_1, g_2, h_2, \dots, g_l, h_l$$

از عناصر $R[[x]]$ به قسمی وجود دارند که

$$a = \sum_{i=1}^{l} g_i f h_i$$

اگر $a \neq 0$ باشد، به عبارتی $a \notin Q$، آن‌گاه مجموعه‌ی شمارای C به قسمی وجود دارد که a عضو زیر جبر تولید شده توسط عناصر

$$\{a_k \in G_3 : k \in C\}،$$

$d_{J'}$ها و $c_{I'}$ها است. علاوه براین

$$\begin{aligned} a_k c_C &= ۰ \\ d_{J'} c_C &= ۰ \\ c_{I'} c_C &= ۰. \end{aligned}$$

بنابراین $ac_C = ۰$، به عبارتی

$$\langle f \rangle \subseteq Z_l(R)$$

در ادامه نشان می‌دهیم $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست نمی‌باشد. عنصر ناصفر و دلخواه

$$g = \sum_{i=t}^{\infty} r_t x^i \in R[[x]]$$

را به قسمی در نظر می‌گیریم که $r_t \neq ۰$، که در این‌جا $t \geq ۰$. بنابراین مجموعه‌ی شمارایی چون I به قسمی وجود دارد که $i \in I$، در نتیجه $\left\{r_i\right\}_{i=t}^{\infty} \subset I$ و چون $g \neq ۰$، عدد صحیح نامنفی k به قسمی وجود دارد که r_t متعلق به زیر جبر تولید شده توسط

$$۱, a_{v_۱}, \ldots, a_{v_k}, d_{J_۱}, \ldots, d_{J_k}, c_{I_۱}, \ldots, c_{I_k}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & v_۱, \ldots, v_k \in U \\ & J_۱, \ldots, J_k \in F(U) \\ & I_۱, \ldots, I_k \in C(U). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$S = \left\{v_۱, \ldots, v_k\right\} \cup \bigcup_{i=۱}^{k} J_i \cup \bigcup_{i=۱}^{k} I_i \subseteq I.$$

بنابراین $U \setminus S \neq \varnothing$. فرض کنیم $u \in (U \setminus S)$. از این رو $a_u \in G_۳$. پس به ازای هر $۱ \leq i \leq k$، داریم $a_u c_{I_i} \neq ۰$ و $a_u d_{J_i} \neq ۰$. نشان می‌دهیم $fa_u g \neq ۰$. چون به ازای هر $۱ \leq i \leq k$، $|J_i| < \infty$، پس $|\bigcup_{i=۱}^{k} J_i| < \infty$، در نتیجه کوچکترین q به قسمی وجود دارد که $u_q \notin \bigcup_{i=۱}^{k} J_i$. بنابراین به ازای هر $۱ \leq i \leq k$، $a_{u_q} d_{J_i} \neq ۰$. مدعی می‌شویم ضریب x^{u_q+t} مخالف باصفر است. امّا ضریب x^{u_q+t} برابر است با

$$a_{u_q} a_u r_t + a_{u_{q-۱}} a_u r_{t+۱} + \cdots + a_{u_۰} a_u r_{t+u_q}$$

در واقع $a_{u_q} a_u r_t \neq ۰$. از طرفی دیگر $fa_u \in \langle f \rangle$ امّا $fa_u g \neq ۰$ پس $fa_u \notin Z_l(R)$ که تناقض است. پس $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست نیست. □

گزاره ۵۲.۱. *اگر R یک حلقه‌ی برگشت پذیر و نوتری باشد، آن‌گاه $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. واضح است که هر حلقه‌ی برگشت پذیر یک حلقه‌ی نیم جابجایی است. بنابراین با توجه به نتیجه‌ی ۲۶.۱، $Z(R) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$، که در این‌جا $|\Lambda| < \infty$ و به ازای هر λ، ایده‌آل P_λ کاملاً اوّل است و برای عنصر ناصفر $d_\lambda \in R$، $P_\lambda = ann(d_\lambda)$. فرض کنیم $\lambda \in \Lambda$. چون P_λ یک ایده‌آل کاملاً اوّل است و

$$\frac{R[[x]]}{P_\lambda[[x]]} \cong \frac{R}{P_\lambda}[[x]]$$

ایده‌آل $P_\lambda[[x]]$ کاملاً اوّل در $R[[x]]$ است. واضح است که به ازای هر $\lambda \in \Lambda$،

$$P_\lambda[[x]] = r_{R[[x]]}(d_i) = l_{R[[x]]}(d_i).$$

اگر نشان دهیم

$$Z(R[[x]]) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda[[x]]،$$

آن‌گاه با توجه به گزاره ۲۷.۱، و این که حلقه‌ی R برگشت پذیر و نوتری است. نتیجه می‌شود که $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است. امّا

$$Z(R[[x]]) = \Big[\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda_1} r_{R[x]}(f_{\lambda_1}(x))\Big] \cup \Big[\bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2} l_{R[x]}(f_{\lambda_2}(x))\Big]،$$

که در این‌جا ایده‌آل راست $r_{R[x]}(f_{\lambda_1}(x))$ ماکسیمال و مشمول در $Z_r(R[[x]])$. هم‌چنین به طور مشابه برای هر $\lambda_2 \in \Lambda_2$ ایده‌آل راست $l_{R[x]}(f_{\lambda_2}(x))$ ماکسیمال و مشمول در $Z_l(R[[x]])$ می‌باشد. فرض کنیم $\lambda_1 \in \Lambda_1$ و

$$f_{\lambda_1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

و

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in r_{R[x]}(f_{\lambda_1})(x).$$

می‌توان فرض کرد $b_0 \neq 0 \neq a_0$. بنابراین

۱. $a_0 b_0 = 0$

۲. $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$

۳. $a_1 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$

۴. $\vdots$

اگر رابطه‌ی (۲)، را از چپ در b_0 ضرب کنیم. بدست می‌آوریم $b_0^2 a_1 = 0 = a_1 b_0^2$. زیرا R یک حلقه‌ی برگشت پذیر است. اگر رابطه‌ی (۳)، را از سمت چپ در b_0^2 ضرب کنیم، $b_0^3 a_2 = 0 = a_2 b_0^3$. زیرا R یک حلقه‌ی برگشت پذیر است. بنابراین، به طریق مشابه و با تکرار این فرآیند می‌توان نشان داد برای هر $n \geq 2$،

$$b_0^n a_{n-1} = 0 = a_{n-1} b_0^n.$$

چون

$$ann(b_0) \subseteq ann(b_0^2) \subseteq ann(b_0^3) \subseteq \dots .$$

و R یک حلقه‌ی نوتری است. $k > 0$ به قسمی وجود دارد که برای هر $k \leq t$،

$$ann(b_0^k) = ann(b_0^t).$$

بنابراین برای هر i، $b_0^k a_i = 0 = a_i b_0^k$. لذا $b_0^k(f_{\lambda_1}(x)) = 0$. فرض کنیم k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که،

$$b_0^{k-1}(f_{\lambda_1}(x)) = 0.$$

اگر $k > 1$ باشد، آن‌گاه $b_0^k(f_{\lambda_1}(x)) \neq 0$. چون $r_{R[x]}(f_{\lambda_1}(x))$ یک ایده‌آل راست ماکسیمال مشمول در $Z(R[[x]])$ است و

$$r_{R[x]}(f_{\lambda_1}(x)) \subseteq r_{R[x]}(b_0^{k-1} f_{\lambda_1}(x)).$$

نتیجه می‌شود

$$r_{R[x]}(f_{\lambda_1}(x)) = r_{R[x]}(b_0^{k-1} f_{\lambda_1}(x))،$$

از طرفی چون R یک حلقه‌ی برگشت پذیر است و $b_0^k(f_{\lambda_1}(x)) = 0$،

$$b_0^{k-1}(f_{\lambda_1}(x))b_0 = 0.$$

بنابراین $f_{\lambda_1}(x)b_0 = 0$. که یک تناقض است. لذا $k = 1$. با بحثی مشابه می‌توانیم نشان دهیم برای هر $0 \leq j$، $f_{\lambda_1}(x)b_j = 0$. پس

$$f_{\lambda_1}(x)b_0 = 0 = a_0 g(x).$$

قرار می‌دهیم I را برابر با ایده‌آل چپ تولید شده توسط ضرایب $f_{\lambda_1}(x)$ و J را ایده‌آل راست تولید شده توسط ضرایب $g(x)$. بنابراین $I \cup J \subseteq Z(R)$. لذا، با توجه به قضیه‌ی ۲۷.۱، $m, n \in \lambda$ به قسمی وجود دارند که $J \subseteq P_n$ و $I \subseteq P_m$. درنهایت بدست می‌آوریم

$$f_{\lambda_1}(x) \in P_m[[x]]$$

و

$$g(x) \in P_n[[x]].$$

پس

$$Z(R[[x]]) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda[[x]].$$

□

مثال ۵۳.۱. (حلقه‌های بالا مثلثی) فرض کنیم R و S دو حلقه باشند و M یک (R,S)ـ دومدول باشد. یعنی؛ M یک R مدول چپ و S مدول راست است که برای هر $r \in R$ و $s \in S$ و $m \in M$، $(rm)s = r(ms)$ قرار می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} R & M \\ \circ & S \end{bmatrix}.$$

می‌توان نشان داد که A با دو عمل جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها یک حلقه تشکیل می‌دهد. گاهی A را با علامت $R \oplus M \oplus S$ نیز نشان می‌دهند. اگر $R = S$ و M یک (R,R)ـ دومدول باشد، آن‌گاه

$$\left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ \circ & r \end{bmatrix} : r \in R, m \in M \right\},$$

را توسیع بدیهی R به وسیله‌ی M می‌نامیم و با نماد $T(R,M)$ نشان می‌دهیم. می‌توان هر عنصر از $T(R,M)$ را به (r,m) نیز نشان داد. بنابراین عمل ضرب با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$(r_۱, m_۱)(r_۲, m_۲) := (r_۱ r_۲, r_۱ m_۲ + m_۱ r_۲).$$

گزاره ۵۴.۱. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند و M یک (R,S)ـ دومدول باشد و فرض کنیم $A = R \oplus M \oplus S$. در این صورت:*

۱. *A نوتری چپ (راست) است اگر و تنها اگر، R و S نوتری چپ (راست) باشند و M به عنوان Rـ مدول (Sـ مدول) نوتری باشد.*

۲. *A آرتینی چپ (راست) است اگر و تنها اگر، R و S آرتینی چپ (راست) باشند و M به عنوان Rـ مدول (Sـ مدول) آرتینی باشد.*

در مثال زیر نشان می‌دهیم که شرط برگشت پذیر بودن حلقه‌ی R در گزاره‌ی ۵۲.۱ یک شرط لازم است و زائد نمی‌باشد. مشابه با این مثال را می‌توان در مرجع [۳۳، صفحه ۲۴]، نیز دید. فرض کنیم F یک میدان و

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ \circ & F \end{pmatrix}.$$

قرار می‌دهیم

$$R[[x]] = \begin{pmatrix} F[[x]] & F[[x]] \\ \circ & F[[x]] \end{pmatrix}.$$

واضح است که، $R[[x]]$ یک حلقه‌ی نوتری راست و چپ می‌باشد. همچنین اگر دو ایده‌آل با تولید متناهی

$$I = \begin{pmatrix} F[[x]] & F[[x]] \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

و

$$J = \begin{pmatrix} \circ & F[[x]] \\ \circ & F[[x]] \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیریم، آن‌گاه $I \subseteq Z_l(R[[x]])$ و $J \subseteq Z_r(R[[x]])$. امّا برای تمام عناصر ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ از $R[[x]]$ داریم $If(x) \neq \circ$ و $g(x)J \neq \circ$.

گزاره ۱.۵۵. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی کاهشی باشد. اگر R دارای تعداد متناهی ایده‌آل اوّل می‌نیمال باشد، آن‌گاه $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. فرض کنیم $\{P_1, \ldots, P_n\}$ مجموعه تمام ایده‌آل‌های اوّل می‌نیمال حلقه‌ی R باشند، در این صورت چون R یک حلقه‌ی کاهشی است، داریم:

$$P_1 \cap \ldots \cap P_n = \circ$$

واضح است که برای هر $i \in I$، ایده‌آل $P_i[[x]]$ یک ایده‌آل اوّل $R[[x]]$ است. فرض کنیم Q یک ایده‌آل اوّل می‌نیمال $R[[x]]$ باشد. بنابراین

$$P_1[[x]] \cap \ldots \cap P_n[[x]] = \bigcap_{i=1}^{n} P_i[[x]] = \circ.$$

لذا برای هر i، $P_i[[x]] \subseteq Q$ و چون Q یک ایده‌آل اوّل می‌نیمال است، داریم $P_i[[x]] = Q$. لذا مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اوّل می‌نیمال $R[[x]]$ مشمول در

$$\{P_1[[x]], \ldots, P_n[[x]]\}.$$

بنابراین با توجه به کاهشی بودن $R[[x]]$ و بنابر [۳۳، قضیه.۱.۶]، $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

۱.۵ مثال‌هایی در خصوص انتقال خاصیّت (A) به حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها

همان‌طور که می‌دانیم طبق قضیه پایه هیلبرت خاصیّت نوتری بودن از حلقه‌ی R به حلقه‌ی چند جمله‌ای آن انتقال می‌یابد. در این بخش نشان می‌دهیم حلقه‌هایی وجود دارند که دارای خاصیّت (A) راست می‌باشند ولی حلقه‌ی چند جمله‌ای آن‌ها دارای خاصیّت (A) راست نمی‌باشد:

تعریف ۱.۵۶. فرض کنیم α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. تابع جمعی $\delta : R \to R$ را یک تابع αــ مشتق می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$، داشته باشیم $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

تعریف ۵۷.۱. فرض کنیم α یک درون ریختی و δ یک تابع αـ مشتق از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب روی R را به $R[x;\alpha,\delta]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن چند جمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x,\alpha,\delta]$ به صورت طبیعی تعریف می‌شوند به طوری‌که برای هر $a \in R$، داریم $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$. اگر α تابع همانی باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ را به صورت $R[x,\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های مشتق روی R می‌نامیم.

مثال ۵۸.۱. حلقه R با خاصیّت (A) راست به قسمی وجود دارد که حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب $R[x,\sigma]$ دارای خاصیّت (A) راست نیست.

برهان. فرض کنیم K یک میدان و R یک Kـ جبر با مجموعه‌ی مولد

$$G = \left\{a_{i,j}, b_k : i, j, k \geq 1\right\}$$

باشد که در روابط زیر صدق می‌کنند:

۱. برای هر تک جمله‌ای w از مولدها، اگر $l > q$، آن‌گاه $a_{i,l} w a_{i,k} = 0$.

۲. برای هر j و $x \in G$، $b_j x = 0$.

۳. برای هر n و $i_1, \ldots, i_n \leq m$، $a_{i_1,j_1} \ldots a_{i_n,j_n} . b_m = 0$.

برای هر i, j و k، درون ریختی σ از حلقه‌ی R را به صورت زیر در نظر می‌گیریم $\sigma(a_{i,j}) = a_{i,j+1}$ و $\sigma(b_k) = b_k$. فرض کنیم Q ایده‌آل تولید شده توسط $a_{1,1}x$ از $R[x,\sigma]$ باشد. برای هر $f \in R[x,\sigma]$ عدد صحیح مثبت m به قسمی وجود دارد که $deg(f) \leq m$. انتخاب می‌کنیم $b_m \in G$. بنابراین

$$a_{1,1} x f b_m = 0.$$

لذا با انتخاب m به اندازه‌ی کافی بزرگ به ازای هر $f \in R[x,\sigma]$، داریم $a_{1,1} x f b_m = 0$، به عبارتی $Q \subseteq Z_l(R[x,\sigma])$. با توجه به روابط تعریف شده روی عناصر G به ازای هر $k \geq 1$، عنصر ناصفر

$$a_{2,1} a_{3,1} . \ldots . a_{k,1} \in R[x,\sigma]$$

را داریم. قرار می‌دهیم

$$a = a_{1,1} x a_{2,1} a_{3,1} \ldots . a_{k,1} x = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,2} . \ldots . a_{k,2} x^2 \in Q.$$

واضح است که $a \neq 0$. مدعی می‌شویم پوچ ساز Q روی R برابر صفر است. اگر عنصر ناصفر $r \in R$ به طوری وجود داشته باشد که $ar = 0$، آن‌گاه باید عنصر b_m به قسمی وجود داشته باشد که $m \geq k$ برای هر k امّا چون k دلخواه است چنین mی وجود ندارد. لذا پوچ ساز Q برابر با صفر است، به عبارتی $R[x,\sigma]$ دارای خاصیّت (A) راست نیست. در ادامه نشان می‌دهیم R دارای

خاصیّت (A) راست می‌باشد. رادیکال جیکبسن حلقه‌ی R یعنی، $J(R)$ شامل تمام جملاتی است که جمله‌ی ثابت آن‌ها برابر صفر است. هم‌چنین $J(R)$ موضعاً پوچ توان می‌باشد. ایده‌آل با تولید متناهی I از حلقه‌ی R را در نظر می‌گیریم. اگر عنصر $g \in I$ به قسمی وجود داشته باشد که جمله ثابت آن ناصفر باشد، آن‌گاه g در R وارون پذیر است و در نتیجه $I = R$. بنابراین با توجه به این حالت باید تمام عناصر I دارای ثابت صفر باشند. در نتیجه $I \subseteq J$ که در این‌جا J ایده‌آلی از R و تولید شده توسط عناصر

$$D = \left\{a_{i,j}, bk : i, j, k \leq p\right\}$$

است، که در این‌جا p یک عدد صحیح نامنفی می‌باشد. برای عنصر ناصفر

$$\alpha = a_{۱,۱}a_{۲,۱}\ldots . a_{p,۱}$$

داریم $J\alpha = ۰$ و لذا $I\alpha = ۰$. بنابراین حلقه‌ی R دارای خاصیّت (A) راست می‌باشد.

□

در این قسمت می‌خواهیم با تکواره‌ی آزاد S تولید شده توسط x, y به سئوال (۲) در حالت خاص پاسخ دهیم، لذا به این تعاریف نیاز داریم. مجموعه‌ی $\mathcal{M}$ را برابر با مجموعه‌ی تمام تک جمله‌ای‌ها روی x, y می‌گیریم. برای یک تک جمله‌ای $w \in \mathcal{M}$ طول w را با $l(w)$ نشان می‌دهیم. اگر

$$w = z_۱z_۲\ldots z_n \in \mathcal{M}$$

که $z_i \in \{x, y\}$، آن‌گاه برای هر $j \leq n$، $\pi(j, w) = z_j$:

لم ۵۹.۱. *اگر* $f(x) \in R\langle x, y\rangle$ *و*

$$f(x)R\langle x, y\rangle \subseteq Z_l(R\langle x, y\rangle)،$$

آن‌گاه برای هر $a \in R$ *عنصر ناصفر* $b \in R$ *به قسمی وجود دارد که* $f(x)ab = ۰$.

برهان. فرض کنیم $A = R\langle x, y\rangle$ و

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m_i} r_{ij}w_{ij} \in A$$

را در نظرمی‌گیریم، که در این‌جا $r_{ij} \in R$ و w_{ij} تک جمله‌ای‌هایی می‌باشند که برحسب اندیس iام آن دارای طولی برابر می‌باشند، به عبارتی دیگر برای هر t, p, q، داریم $l(w_{tp}) = l(w_{tq})$. هم‌چنین

$$l(w_{۱۱}) \leq l(w_{۲۱}) \leq \cdots \leq l(w_{n۱}).$$

فرض کنیم $f(x)A \subseteq Z_l(A)$. قرار می‌دهیم $d = l(w_{n۱})$. بنابراین برای هر $a \in R$، $f(x)axyx \in Z_l(A)$. پس عنصر $۰ \neq h(x) \in A$ به قسمی وجود دارد که $f(x)axy^{۳d}xh(x) = ۰$. حال نشان می‌دهیم برای هر دو تک جمله‌ای متفاوت w_{ij} و w_{kl} که در ضرب $f(x)axy^{۳d}xh(x)$ ظاهر می‌شوند،

$$w_{ij}xy^{۳d}x\mathcal{M} \cap w_{kl}xy^{۳d}x\mathcal{M} = \emptyset.$$

در واقع اگر $i = k$، آن‌گاه چون $w_{ij} \neq w_{il}$ این ادعا به اثبات می‌شود. فرض کنیم $i < k$، قرار می‌دهیم $v = l(w_{ij})$ و $u = l(w_{kl})$، طبق تعریف جمله‌های $A = R < x, y >$ واضح است که $v < u$ و در نتیجه $-d \leq v - u < ۰$. امّا $l(w_{ij}xy^{۳d}x) = v + ۳d + ۲$. بنابراین

$$\pi(v + ۳d + ۲, w_{ij}xy^{۳d}x) = x.$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \pi(v + ۳d + ۲, w_{kl}xy^{۳d}x) &= \pi(u + (v - u + ۳d + ۲), w_{kl}xy^{۳d}x) \\ &= \pi(v - u + ۳d + ۲, xy^{۳d}x) \end{aligned}$$

هم‌چنین چون d بزرگترین طول است

$$۲d + ۲ \leq ۳d + ۲ + v - u < ۳d + ۲$$

در نتیجه $\pi(v - u + ۳d + ۲, xy^{۳d}x) = y$، لذا ادعا اثبات می‌شود. بنابراین اگر b یک ضریب ناصفر از h باشد، آن‌گاه به ازای هر i, j، داریم $r_{ij}ab = ۰$. □

مثال ۶۰.۱. اگر R دارای خاصیّت (A) راست باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $R\langle x, y\rangle$ نیز دارای خاصیّت (A) راست است.

برهان. فرض کنیم $S = R\langle x, y\rangle$ و

$$J = \langle f_۱(x), \ldots, f_n(x)\rangle$$

به طوری باشد که $J \subseteq Z_l(S)$. دنباله‌ی نه لزوماً متمایز $g_۱(x), \ldots, g_m(x)$ از عناصر

$$\{f_۱(x), \ldots, f_n(x)\}$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a_۱, a_۲, \ldots, a_m \in R$. اگر بزرگترین طول تک جمله‌ای‌های ظاهر شده در $f_i(x)$ها ها برابر با p باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$f(x) = g_۱(x)a_۱x^p + g_۲(x)a_۲x^{۲p} + \cdots + g_m(x)a_mx^{mp}$$

واضح است که $f(x) \in J$ در نتیجه

$$f(x)R\langle x, y\rangle \subseteq Z_l(S)$$

لذا کافی‌است در لم قبل قرار دهیم $a = ۱$ و در نتیجه عنصر ناصفر $b \in R$ به قسمی وجود دارد که $f(x)b = ۰$. قرار می‌دهیم I ایده‌آلی از R تولید شده توسط ضرایب $f_i(x)$ها. بنابراین با توجه به این که $f(x)b = ۰$ تمام ضرایب $f_i(x)$ ها مقسوم علیه صفر می‌باشند، به عبارتی $I \subseteq Z_l(R)$. پس با توجه به فرض مسئله چون R دارای خاصیّت (A) راست است عنصر ناصفر $c \in R$ به قسمی وجود دارد که $Ic = ۰$، در نتیجه $Jc = ۰$. □

فصل ۲

خاصیّت (A) روی حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب

۱.۲ مقدمه

در این فصل به سئوالات مطرح شده در مرجع [۳۳]، از دیدگاهی کاملاً ناجابجایی پاسخ می‌دهیم. به این صورت که با استفاده از توسیع اور $R[x;\alpha,\delta]$ یا همان حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب به برخی سئوالات پاسخ مثبت و به برخی دیگر درصورت نوتری بودن حلقه‌ی R پاسخ مثبت می‌دهیم. مطالب این فصل در مرجع [۲۷]، به چاپ رسیده است.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم α یک درون ریختی از حلقه‌ی R باشد. تابع جمعی $\delta : R \to R$ را یک تابع αـ مشتق نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$، داشته باشیم

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b).$$

مثال ۲.۲. فرض کنیم α یک درون ریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی سری‌های توانی اریب روی R را به $R[[x;\alpha]]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن همان سری‌های توانی $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ با ضرایبی از R هستند. جمع و ضرب روی آن به صورت طبیعی تعریف می‌شوند به طوری‌که برای هر $a \in R$، داشته باشیم

$$xa = \alpha(a)x.$$

مثال ۳.۲. فرض کنیم α یک درون ریختی و δ یک تابع αـ مشتق از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب روی R را به $R[x;\alpha,\delta]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن چند جمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$ دو عمل جمع و ضرب روی آن به صورت طبیعی تعریف می‌شوند به طوری‌که برای هر $a \in R$، داشته باشیم

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a).$$

اگر α تابع همانی باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ را به $R[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های مشتق روی R می‌نامیم، هرگاه $\delta = 0$، به‌جای $R[x;\alpha,\delta]$ از $R[x;\alpha]$ استفاده می کنیم.

در سرتاسر این فصل $f(x)$ معرف یک چند جمله‌ای از حلقه‌ی اریب $R[x;\alpha,\delta]$ یا $R[[x;\alpha]]$ می‌باشد و $C_{f(x)}$ معرف مجموعه‌ی تمام ضرایب ناصفر چند جمله‌ای $f(x)$ می‌باشد.

تعریف ۴.۲. به ازای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی A از حلقه‌ی R نمادهای AR و RA به ترتیب نشان دهنده‌ی ایده‌آل راست و چپ تولید شده توسط A است. هم‌چنین $\langle A \rangle$ نشان دهنده‌ی یک ایده‌آل دو طرفه تولید شده توسط A است.

بر طبق تعریف کوهن[۱] در مرجع [۱۱]، حلقه‌ی R را برگشت پذیر نامیم، اگر به ازای هر $a,b \in R$، از $ab = 0$، نتیجه بگیریم $ba = 0$. و هم‌چنین کوهن در مرجع [۱۱]، حلقه‌ی R را کاهشی نامید، اگر R دارای عنصر پوچ توان ناصفر نباشد. قبل از کوهن حلقه‌های برگشت پذیر تحت عنوان حلقه‌های کاملاً انعکاسی توسط مارکس[۲] در مرجع [۴۶] مطالعه شده است، در دست نوشته تاگانباو[۳] در مرجع [۵۶]، در خصوص مشبکه‌های توزیع پذیر مفهوم حلقه‌های برگشت پذیر ظاهر شد و این مفهوم تحت عنوان حلقه‌های جابجایی باصفر مورد مطالعه قرار گرفتند که تعریفی دقیقاً معادل با حلقه‌های برگشت پذیر داشتند. طبق تحقیقات بل[۴] در مرجع [۷]، حلقه‌ی R را نیم جابجایی نامیم، اگر به ازای هر $a,b \in R$ از $ab = 0$ نتیجه بگیریم $aRb = 0$. در مرجع [۳۳]، که در فصل اوّل راجع به آن بحث شد. چهار سئوال مطرح گردید، که ما در این فصل براساس تعریف ارائه شده توسط هنگ و همکارانش خاصیّت (A) راست (چپ) حلقه‌های دوئو راست (چپ) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، و ثابت می‌کنیم که اگر R نوتری راست، دوئو راست و αـ سازگار باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سریهای توانی اریب $R[[x;\alpha]]$ دارای خاصیّت (A) راست است. بنابراین به عنوان نتیجه‌ای از آن، اگر R حلقه‌ی جابجایی و نوتری باشد، آن‌گاه $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است و با استفاده از خاصیّت نوتری بودن حلقه به سئوال (۳)، پاسخ مثبت می‌دهیم. علاوه بر این نشان خواهیم داد که اگر حلقه R دوئو راست و (α,δ)ـ سازگار باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است. تحت شرایط خاص نتیجه می گیریم که

[۱] Cohn
[۲] Marks
[۳] Tuganbaev
[۴] Bell

اگر R حلقه دوئو راست باشد، آن‌گاه $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است، و به این ترتیب به سئوال (۱)، پاسخ مثبت می‌دهیم. همچنین با استفاده از حلقه‌ی چند جمله‌ای اریب نشان می‌دهیم، اگر R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ)ـ سازگار باشد، آن‌گاه R یک حلقه زیپ راست است اگر و تنها اگر $R[x; \alpha, \delta]$ یک حلقه زیپ راست باشد.

۲.۲ بررسی توسیع اریب حلقه‌هایی که خاصیّت (A) دارند

در زیر تعاریف ابتدایی و قضایا و لم‌های مورد نیاز برای ادامه‌ی بحث را بدون اثبات می‌آوریم:

ملاحظه ۵.۲. فرض کنیم α یک درون ریختی و δ یک تابع αـ مشتق باشد. برای اعداد صحیح $j \geq i \geq 0$، معرفی می کنیم f_i^j، برابر با مجموعه‌ی تمام حروفی که می‌توان توسط α و δ نوشت. به این شرط که i تا از این حروف α و تعداد $(j-i)$ تا از حروف δ باشند. برای مثال: $f_j^j = \{\alpha^j\}$، $f_0^j = \{\delta^j\}$ و

$$f_{j-1}^j = \{\alpha^{j-1}\delta, \alpha^{j-2}\delta\alpha, \dots, \delta\alpha^{j-1}\}.$$

نماد معرفی شده در بالا در ضرب چند جمله‌ای‌ها ظاهر می‌شود و می‌توان نشان داد که در حالت کلی

$$x^j r = \sum_{i=0}^{j} f_i^j(r) x^i.$$

واضح است که هر عضو f_i^j یک نگاشت جمعی بر روی R می‌باشد و برای هر $a \in R$ و $0 \leq i \leq j$، می‌نویسیم

$$f_i^j(a) = \{\beta(a) : \beta \in f_i^j\}.$$

براساس تعریف هاشمی در مرجع [۲۹]، حلقه R را αـ سازگار می‌نامیم در صورتی‌که به ازای هر $a, b \in R$،

$$ab = 0 \iff a\alpha(b) = 0.$$

هم‌چنین حلقه‌ی R را δـ سازگار می‌نامیم در صورتی‌که به ازای هر $a, b \in R$،

$$ab = 0 \Rightarrow a\delta(b) = 0.$$

بعلاوه حلقه‌ی R را (α, δ)ـ سازگار می‌نامیم در صورتی‌که R هم αـ سازگار و هم δـ سازگار باشد.

در زیر لمی را بیان می‌کنیم که در سرتاسر این فصل از آن استفاده می‌کنیم و در مرجع [۲۹، لم‌های ۲.۱و۲.۳] بیان و اثبات شده است:

لم ۶.۲. *در صورتی‌که R یک حلقه (α, δ)ـ سازگار باشد، آن‌گاه نتایج زیر را داریم.*

۱. *به ازای هر عدد صحیح مثبت n از $ab = 0$ نتیجه بگیریم $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.*

۲. به ازای هر عدد صحیح مثبت چون k از $\alpha^k(a)b = 0$ نتیجه بگیریم $ab = 0$.

۳. به ازای هر عدد صحیح مثبت چون n, m از $ab = 0$ نتیجه بگیریم

$$\alpha^n(a)\delta^m(b) = \delta^m(a)\alpha^n(b) = 0.$$

۴. برای تمام j ،$0 \leq i \leq j$ از $ab = 0$ نتیجه بگیریم $af_i^j(b) = 0$.

۵. اگر $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ و $r \in R$، آن‌گاه $f(x)r = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر $0 \leq i \leq n$، $a_ir = 0$.

۶. اگر $f(x) \in R[x;\alpha,\delta]$ و $r \in R$، آن‌گاه $rf(x) = 0$ اگر و تنها اگر $rxf(x) = 0$.

۷. اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i \in R[[x;\alpha]]$ و $r \in R$ آن‌گاه $f(x)r = 0$ اگر و تنها اگر برای هر i، $a_ir = 0$.

۸. اگر $f(x) \in R[[x;\alpha]]$ و $r \in R$، آن‌گاه $rf(x) = 0$ اگر و تنها اگر $rxf(x) = 0$.

در زیر خاصیّت جالبی از حلقه‌های برگشت پذیر و دوئو راست را تحت عنوان یک لم ارائه می‌کنیم. هم‌چنین گام استقراء آن توسط مازورک[۵] در مرجع [۴۷، لم ۲.۲]، برای حلقه‌های برگشت پذیر و دوئو راست اثبات شده است، را به عنوان یک لم در زیر می‌آوریم.

لم ۷.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ی برگشت پذیر یا دوئو راست باشد. اگر F زیر مجموعه‌ی متناهی از عناصر ناصفر R و $a \in R$، به قسمی باشد که $a^2F = 0$، آن‌گاه $b \in R$ به قسمی وجود دارد که $aFb = \{0\}$ و $Fb \neq 0$.*

برهان. فرض کنیم R حلقه برگشت پذیری باشد و $a^2F = 0$. بنابراین $aFa = 0$. اگر $aF = \{0\}$ آن‌گاه انتخاب می‌کنیم $b = 1$. اگر $aF \neq \{0\}$، آن‌گاه $Fa \neq \{0\}$. بنابراین انتخاب می‌کنیم $b = a$.
فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست باشد و

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}.$$

با استقراء روی n اثبات را کامل می‌کنیم. اگر $n = 1$، آن‌گاه $aaf_1 = 0$ و اگر $af_1 = 0$، آن‌گاه انتخاب می‌کنیم $b' = 1$. اگر $af_1 \neq 0$، آن‌گاه چون R یک حلقه‌ی دوئو راست است پس $c \in R$ به قسمی وجود دارد که

$$af_1 = f_1c \neq 0.$$

بنابراین انتخاب می‌کنیم $b = c$. لذا حکم برای گام استقراء برقرار است. فرض کنیم حکم برای کمتر از n برقرار و مجموعه‌ی

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

[۵] Mazurek

مفروض باشد. اگر

$$a^{2}\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = 0،$$

آن‌گاه $a^{2}\{f_1\} = 0$ در نتیجه بنا به فرض استقراء $0 \neq b' \in R$ به قسمی وجود دارد که $f_1 b' \neq 0$ و $a\{f_1\}b' = 0$. قرار می‌دهیم $F_1 = \{f_2 b', f_3 b', \ldots, f_n b'\}$. اگر $F_1 = 0$، آن‌گاه انتخاب می‌کنیم $b = b'$. اگر $F_1 \neq 0$، آن‌گاه واضح است که $a^{2}F_1 = 0$ و بنا به فرض استقراء عنصر $b'' \in R$ به قسمی وجود دارد که $F_1 b'' \neq 0$. برای اتمام اثبات کافی‌است انتخاب کنیم $b = b'b''$. □

لم ۸.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست باشد. اگر F زیر مجموعه متناهی از عناصر ناصفر R و $a \in R$ به قسمی باشند که $a^{k}F = 0$، آن‌گاه $0 \neq b \in R$ به قسمی وجود دارد که $aFb = \{0\}$ و $Fb \neq 0$.*

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست باشد و برای عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $a^{k}F = 0$. برهان را به استقراء روی k دنبال می‌کنیم. اگر $k = 1$، قرار می‌دهیم $b = 1$. اگر $k = 2$، آن‌گاه با توجه به لم ۷.۲، حکم برقرار است. فرض کنیم $k \geq 3$، و حکم برای تمام n های کوچکتر از k برقرار باشد. برای $n = k$،

$$a^{k}F = 0 \Rightarrow a^{2}a^{k-2}F = 0.$$

اگر $a^{k-2}F = 0$، آن‌گاه بنا به فرض استقراء عنصر $b \in R$ به قسمی وجود دارد که $Fb \neq \{0\}$ و $aFb = \{0\}$. اگر $a^{k-2}F \neq \{0\}$، قرار می‌دهیم $F_1 = a^{k-2}F$. بنابراین $a^{2}F_1 = 0$. لذا بنا به فرض استقراء عنصر $b' \in R$ به قسمی وجود دارد که $F_1 b' \neq \{0\}$ و $aF_1 b' = 0$، به عبارتی دیگر $a^{k-1}Fb' = 0$ و $Fb' \neq \{0\}$. لذا بنا به فرض استقراء عنصر $b'' \in R$ به قسمی وجود دارد که $Fb'b'' \neq \{0\}$ و $aFb'b'' = 0$. قرار می‌دهیم $b = b'b''$. □

گزاره ۹.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی R نوتری راست، دوئو راست و αـ سازگار باشد. اگر*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

و

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$$

دو عنصر ناصفر از حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\alpha]]$ به قسمی باشند که $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه عنصر ناصفر $r \in R$، به قسمی وجود دارد که $g(x)r \neq \{0\}$، و به ازای هر i, j، داریم $a_i b_j r = 0$.

برهان. چون R یک حلقه نوتری راست است، ایده‌آل‌های راست تولید شده توسط ضرایب f, g یعنی، $C_f R$ و $C_g R$ با تولید متناهی می‌باشند. فرض کنیم

$$C_f R = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle$$

و

$$C_g R = \langle b_0, \ldots, b_n \rangle.$$

می‌توان فرض کرد $a_0 \neq 0 \neq b_0$. چون $f(x)g(x) = 0$، ۱. $a_0 b_0 = 0$.

۲. $a_0 b_1 + a_1 \alpha(b_0) = 0$.

۳. $a_0 b_2 + a_1 \alpha(b_1) + a_2 \alpha^2 (b_0) = 0$.

۴. $\vdots$

چون R یک حلقه αـ سازگار است پس باتوجه به رابطه‌ی (۱) و لم ۶.۲، به ازای هر عدد صحیح مثبت k، $a_0 \alpha^k (b_0) = 0$. همچنین چون R یک حلقه‌ی دوئو راست است، R یک حلقه‌ی نیم جابجایی است. بنابراین $a_0 R \alpha^k (b_0) = 0$. اگر رابطه‌ی (۲) را از چپ در a_0 ضرب کنیم،

$$a_0^2 b_1 + a_0 a_1 \alpha(b_0) = 0.$$

چون $a_0 a_1 \alpha(b_0) = 0$، پس $a_0^2 b_1 = 0$. اگر رابطه‌ی (۳) را از چپ در a_0^2 ضرب کنیم، با توجه به αـ سازگاری و نیم جابجایی بودن R، $a_0^3 b_2 = 0$. مشابه با همین بحث می‌توان نشان داد که به ازای هر $0 \le j \le n$، داریم $a_0^{n+1} b_j = 0$. بنابراین $a_0^{n+1} g(x) = 0$. چون

$$C_g R = \langle b_0, \dots, b_n \rangle .$$

قرار می‌دهیم

$$F = \{b_0, \dots, b_n\}.$$

بنابراین $a_0^{n+1} F = 0$. لذا با توجه به لم ۸.۲، عنصر $r_0 \in R$ به قسمی وجود دارد که

$$a_0 F r_0 = 0 \text{ و } F r_0 \neq \{0\}.$$

بنابراین بنا به لم ۶.۲، $g r_0 \neq 0$. قرار می‌دهیم

$$g_1 = g r_0 \text{ و } f_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

بنابراین $f g r_0 = f_1 g_1 = 0$. با استفاده از لم ۶.۲، و تکرار بحث فوق می‌توان $r_1 \in R$، را به قسمی یافت که

$$a_1 x g_1 r_1 = 0.$$

امّا $g_1 r_1 \neq 0$. قرار می‌دهیم $r_2 = r_0 r_1$. بنابراین

$$a_0 g_1 r_2 = a_1 g r_2 = 0،$$

امّا $g_1 r_2 \neq 0$. لذا با تکرار مکرر بحث فوق $r \in R$ به قسمی وجود دارد که $g r \neq 0$، اما

$$a_0 g_1 r = a_1 g r = \dots = a_m g r = 0.$$

بنابراین به ازای تمام i,jها، داریم $a_ib_jr=0$. زیرا

$$C_fR=\langle a_0,\dots,a_m\rangle$$

و R یک حلقه نیم جابجایی است. □

نتیجه ۱۰.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی R نوتری راست، دوئو راست و αـ سازگار باشد. اگر*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in Z_l(R[[x;\alpha]])،$$

آن‌گاه عنصر ناصفر $c\in R$ به قسمی وجود دارد که $f(x)c=0$.

برهان. فرض کنیم $f(x)\in Z_l(R[[x;\alpha]])$. بنابراین $0\neq g(x)\in R[[x;\alpha]]$ به قسمی وجود دارد که $f(x)g(x)=0$. با توجه به گزاره ۹.۲، عنصر $r\in R$ به قسمی وجود دارد که $gr\neq 0$ و به ازای هر i,j، داریم $a_ib_jr=0$. چون $gr\neq 0$ وجود دارد jیی که $b_jr\neq 0$. قرار می‌دهیم $c=b_jr$. لذا به ازای هر i، $a_ic=0$. با توجه به لم ۶.۲، $f(x)c=0$. □

قضیه ۱۱.۲. *اگر حلقه‌ی R نوتری راست، دوئو راست و αـ سازگار باشد، آن‌گاه $R[[x;\alpha]]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. چون هر حلقه دوئو راست نیم جابجایی است و همچنین R حلقه‌ی نوتری می‌باشد. بنا به لم ۲۵.۱،

$$Z_l(R)=\bigcup_{i=1}^{n}P_i،$$

که در این‌جا به ازای هر i، ایده‌آل P_i کاملاً اوّل است و به ازای هر $1\leq i\leq n$، $0\neq d_i\in R$ به قسمی وجود دارد که $P_i=l_R(d_i)$. فرض کنیم ایده‌آل

$$J=\langle f_1,f_2,\dots,f_n\rangle$$

به قسمی باشد که $J\subseteq Z_l(R[[x;\alpha]])$. قرار می‌دهیم

$$I=\left\langle\bigcup_{i=1}^{n}C_{f_i}\right\rangle.$$

بنابراین با توجه به این که R حلقه نیم جابجایی و نوتری راست است و با استفاده از نتیجه‌ی ۱۰.۲، I با تولید متناهی است و $I\subseteq Z_l(R)$. بنابراین بنا به قضیه عدم اجتناب از ایده‌آل‌های اوّل $1\leq i\leq n$، به قسمی وجود دارد که $I\subseteq P_i$. امّا $P_i=l_R(d_i)$. بنابراین

$$Id_i\subseteq P_id_i=0.$$

پس $Id_i=0$ در نتیجه $Jd_i=0$. لذا $R[[x;\alpha]]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

در قضیه‌ی فوق با شرایط موجود بر حلقه R، اگر α تابع همانی باشد، آن‌گاه $R[[x;\alpha]]$ همان $R[[x]]$ است و در نتیجه $R[[x]]$ با توجه به مفروضات قضیه ۱۱.۲، دارای خاصیّت (A) راست است.

نتیجه ۱۲.۲. *اگر حلقه‌ی R نوتری راست، دوئو راست باشد، آن‌گاه $R[[x]]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. با توجه به قضیه ۱۱.۲، برهان بدیهی است. □

با توجه به بحث قبل برای پاسخ دادن به سئوال (۳) مطرح شده در مقاله‌ی هونگ باید به حلقه‌ی R شرط نوتری راست را اضافه کنیم. در این قسمت مثالی از مرجع [۳۳]، را می‌آوریم که در آن اهمیّت جابجایی بودن در اثبات قضیه ۴.۱ را نشان می‌دهد:

مثال ۱۳.۲. گیریم F یک میدان باشد حلقه‌ی

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ \circ & F \end{pmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم، R یک حلقه‌ی نوتری چپ و نوتری راست است امّا R نه دارای خاصیّت (A) راست است و نه دارای خاصیّت (A) راست در واقع کافی است ایده‌آل‌های با تولید متناهی

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

و

$$J = \begin{pmatrix} \circ & F \\ \circ & F \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیریم، آن‌گاه واضح است که $I \subseteq Z_l(R)$ و $J \subseteq Z_r(R)$ امّا عناصر ناصفر $a, b \in R$ وجود ندارند به طوری‌که $Ia = \circ$ و $bJ = \circ$.

در زیر مثالی ارائه می‌شود که در آن نشان می‌دهیم در حلقه‌های ناجابجایی و نوتری مانند R حلقه سری‌های توانی آن $R[[x]]$ نه دارای خاصیّت (A) راست و نه دارای خاصیّت (A) چپ است. بنابراین به این نکته توجه داریم که شرط دوئو راست در نتیجه‌ی ۱۲.۲، یک شرط لازم است و زاید نیست.

مثال ۱۴.۲. فرض کنیم F یک میدان دلخواه باشد. قرار می‌دهیم

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ \circ & F \end{pmatrix}.$$

چون

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

امّا

$$۰ \neq \begin{pmatrix} ۰ & F \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & F \\ ۰ & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم R یک حلقه نیم جابجایی نیست. واضح است که اگر

$$R[[x]] \cong \begin{pmatrix} F[[x]] & F[[x]] \\ ۰ & F[[x]] \end{pmatrix},$$

آن‌گاه $R[[x]]$ یک حلقه نوتری راست و چپ است. ایده‌آل‌های با تولید متناهی

$$I = \begin{pmatrix} F[[x]] & F[[x]] \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

و

$$J = \begin{pmatrix} ۰ & F[[x]] \\ ۰ & F[[x]] \end{pmatrix}$$

از $R[[x]]$ رادر نظر می‌گیریم واضح است که $I \subseteq Z_l(R[[x]])$ و $J \subseteq Z_r(R[[x]])$. امّا عناصر ناصفر $g(x)$ و $f(x)$ در $R[[x]]$ وجود ندارند که $If(x) = ۰$ و $g(x)J = ۰$.

اگر

$$f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta]$$

و $a_m \neq ۰$، آن‌گاه گوئیم $f(x)$ از درجه‌ی m است و می‌نویسیم $deg(f(x)) = m$.

لم ۱۵.۲. *فرض کنیم R یک حلقه نیم جابجایی و (α, δ)ـ سازگار باشد. اگر*

$$۰ \neq g(x) = b_۰ + b_۱ x + \cdots + b_n x^n \in R[x; \alpha, \delta]$$

و

$$۰ \neq f(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_m x^m \in R[x; \alpha, \delta]$$

به قسمی موجود باشند که $f(x)g(x) = ۰$، آن‌گاه به ازای هر $۰ \leq j \leq n$، داریم $a_m^{n+۱-j} b_j = ۰$.

برهان. چون $f(x)g(x) = ۰$، پس $a_m \alpha^m(b_n) = ۰$. لذا بنا به لم ۶.۲، $a_m b_n = ۰$، زیرا R یک حلقه αـ سازگار است. بنابراین با توجه به نیم جابجایی بودن R و لم ۶.۲، به ازای هر $۰ \leq i \leq j$، داریم $a_m R f_i^j(b_n) = ۰$. پس

$$۰ = a_m f(x)g(x) = (a_m a_۰ + a_m a_۱ x + \cdots + a_m a_m x^m)(b_۰ + \cdots + b_{n-۱} x^{n-۱}).$$

لذا $a_m^۲ \alpha(b_{n-۱}) = ۰$، در نتیجه چون R یک حلقه αـ سازگار است، $a_m^۲ b_{n-۱} = ۰$. بنابراین با تکرار متناهی این فرایند به ازای هر $۰ \leq i \leq j$، داریم $a_m^{n+۱-j} b_j = ۰$. □

قضیه ۱۶.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی R دوئو راست و (α,δ)ـ سازگار باشد. اگر برای دو عنصر ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ از $R[x;\alpha,\delta]$، $f(x)g(x)=0$، آن‌گاه عنصر $R \ni r \neq 0$ به قسمی وجود دارد که $f(x)r=0$.*

برهان. فرض کنیم

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

و

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$$

دو عنصر ناصفر حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ باشد و $a_m \neq 0 \neq b_n$. اگر $m=0$، آن‌گاه $f(x)=a_0$. بنابراین

$$a_0(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)=0،$$

در نتیجه به ازای هر $0 \leq j \leq n$، داریم $a_0b_j=0$. فرض کنیم $m \geq 1$ و حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. فرض کنیم $a_mg(x)=0$. لذا بنا به لم ۶.۲، $a_mx^mg(x)=0$، و چون R یک حلقه دوئو راست است $a_mIg=0$. لذا در این حالت قرار می‌دهیم

$$f_1(x)=a_0+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}،$$

در نتیجه $f_1(x)g(x)=0$. امّا

$$deg(f_1(x)) \leq n-1 \leq deg(f(x))،$$

در نتیجه بنا به فرض استقراء عنصر ناصفر $b \in I_g$ به قسمی وجود دارد که $f_i(x)b=0$، به عبارتی $f(x)b=0$.

۲. فرض کنیم $a_mg(x) \neq 0$. بنابراین $0 \leq t \leq m$ به قسمی وجود دارد که

$$a_mb_{t+1}=\cdots=a_mb_n=0.$$

امّا $a_mb \neq 0$. پس a_m پوچ ساز حداقل $m-t$ ضریب از g می‌باشد. لذا با توجه به لم ۱۵.۲، $k \geq 2$ به قسمی وجود دارد که $a_m^kb_t=0$. امّا $a_m^{k-1}b_t \neq 0$. چون R یک حلقه دوئو راست است، پس عنصر $c \in R$ به قسمی وجود دارد که $a_m^{k-1}b_t=b_tc$. اگر قرار دهیم $g_1(x)=g(x)c$، آن‌گاه واضح است که $f(x)g_1(x)=0$ و $0 \neq I_{g_1} \subseteq I_g$ پس می‌توان بدون کاسته شدن از کلیت برهان به جای $g(x)$ از $g_1(x)$ استفاده می‌کنیم. امّا چون

$$a_m(a_m^{k-1}b_t)=a_m^kb_t=0،$$

$a_mb_t=0$. لذا با توجه به لم ۶.۲، به ازای هر $0 \leq i \leq j$، داریم $a_mb_tf_i^j(c)=0$. همچنین با این ساختار a_m پوچ ساز حداقل $m-t+1$ ضریب در $g_1(x)$ است. بنابراین بعد از تکرار تعداد متناهی از فرآیندفوق که در حالت اخیر رخ داد اثبات تمام است. □

گزاره ۱۷.۲. *فرض کنیم R یک حلقه (α,δ)ـ سازگار باشد. اگر*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \in R[x;\alpha,\delta]$$

که $r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta]) \neq 0$، آن‌گاه

$$r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta]) \cap R \neq 0.$$

برهان. فرض کنیم

$$0 \neq g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta])$$

و با این شرط $g(x)$ دارای کمترین درجه در میان عناصر ناصفر

$$r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta])$$

باشد. بنابراین $f(x)g(x) = 0$ در نتیجه $a_m R b_n = 0$. زیرا R یک حلقه (α,δ)ـ سازگار است. در نتیجه به ازای هر $r \in R$،

$$f(x)(R[x;\alpha,\delta]a_m r)g(x) \subseteq f(x)R[x;\alpha,\delta]g = 0،$$

به عبارتی

$$a_m r g(x) \in r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta]).$$

بنابراین چون $deg(a_m r g(x)) \leq deg(g(x))$، باید $a_m r g(x) = 0$، زیرا $deg(g(x))$ را کمترین در نظر گرفته بودیم. پس با توجه به لم ۶.۲، برای هر $t \geq 0$، داریم $a_m R x^t g(x) = 0$. بعد از تکرار تعداد متناهی از این فرآیند می‌توانیم نشان دهیم، به ازای هر $0 \leq i \leq m$ و $t \geq 0$، داریم $a_i R x^t g(x) = 0$. بنابراین $f(x)R[x;\alpha,\delta]b_n = 0$. □

گزاره ۱۸.۲. *فرض کنیم R یک حلقه (α,δ)ـ سازگار باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

۱. $R[x;\alpha,\delta]$ *دارای خاصیّت (A) راست است؛*

۲. *الف)* $f(x)R[x;\alpha,\delta] \subseteq Z_l(R[x;\alpha,\delta])$ *و ب)* $r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta]) \neq 0$.

برهان. ابتدا فرض کنیم

$$I = \sum_{i=0}^{l} R[x;\alpha,\delta]f_i(x)R[x;\alpha,\delta] \subseteq Z_l(R[x;\alpha,\delta]).$$

که در این‌جا

$$f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{im_i}x^{m_i}.$$

قرار می‌دهیم

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)x^{m_1+1} + f_3(x)x^{m_1+m_2+2} + \cdots + f_{m_l}(x)x^{m_1+\cdots+m_{l-1}+l-1}$$

واضح‌است که $f(x) \in I$، در نتیجه $f(x)R[x;\alpha,\delta] \subseteq I$. بنابراین با توجه به فرض

$$r_{R[x;\alpha,\delta]}(R[x;\alpha,\delta]f(x)R[x;\alpha,\delta]) = r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta]) \neq 0$$

در نتیجه با توجه به گزاره ۱۷.۲،

$$r_{R[x;\alpha,\delta]}(R[x;\alpha,\delta]f(x)R[x;\alpha,\delta]) \cap R \neq 0.$$

بنابراین برای عنصر ناصفر $r \in R$، داریم

$$(R[x;\alpha,\delta]f(x)R[x;\alpha,\delta])r = 0.$$

چون

$$Rf(x)R \subseteq R[x;\alpha,\delta]f(x)R[x;\alpha,\delta]$$

و R یک حلقه (α,δ)ـ سازگار است، پس بنا به لم ۲.۶، به ازای هر i,j، داریم

$$(Ra_{ij}R)r = 0.$$

لذا باتوجه به لم ۲.۶،

$$Ir = (\sum_{i=1}^{l} R[x;\alpha,\delta]f_i(x)R[x;\alpha,\delta])r = 0.$$

بنابراین $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است.

برعکس: کافی‌است ایده‌آل تولید شده توسط $\langle f(x)\rangle$ را در نظر بگیریم. □

نیلسن[۶] در مرجع [۵۲]، تعریف حلقه‌ی مک‌کوی را برای حلقه‌های شرکت پذیر و یکدار ارائه داد، و به دلیل این که مک‌کوی[۷] در مرجع [۵۰]، این خاصیّت را در مورد حلقه‌های جابجایی بررسی کرده بود، نام مک‌کوی راست (چپ) و مک‌کوی را انتخاب نمودند، و بعد از این تحقیق، تحقیقات زیادی در خصوص مک‌کوی بودن یک حلقه انجام گرفت. هم‌چنین در مرجع [۲۴]، این مفهوم به توسیع اور $R[x;\alpha,\delta]$ تعمیم داده شد:

تعریف ۱۹.۲. حلقه R را (α,δ)ـ مک‌کوی اریب نامیم، هرگاه برای هر دو عنصر ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ از $R[x;\alpha,\delta]$، اگر $f(x)g(x) = 0$، آن گاه عنصر $0 \neq c \in R$ به قسمی وجود داشته باشد که به ازای هر i، داشته باشیم $a_i x^i c = 0$.

هم‌چنین در مرجع [۲۴]، قضیه [۳.۶]، گزاره زیر ثابت شده است:

گزاره ۲۰.۲. *اگر R یک حلقه برگشت پذیر و (α,δ)ـ سازگار باشد، آن‌گاه R یک حلقه (α,δ)ـ مک‌کوی مک‌کوی اریب است.*

[۶] Nielsen
[۷] McCoy

بعلاوه آن‌ها در مرجع [۲۴]، نشان دادند که:

گزاره ۲.۲۱. *اگر R یک حلقه‌ی (α,δ) ـ سازگار و دوئو راست باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی (α,δ) ـ مک‌کوی اریب است.*

قضیه ۲.۲۲. *اگر R حلقه‌ای (α,δ) ـ سازگار و دوئو راست باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. فرض کنیم $f(x)\in R[x;\alpha,\delta]$ و

$$f(x)R[x;\alpha,\delta]\subseteq Z_l(R[x;\alpha,\delta]).$$

بنابراین $f(x)\in Z_l(R[x;\alpha,\delta])$. پس با توجه به قضیه‌ی ۲.۱۶، عضو ناصفر $c\in R$ به قسمی وجود دارد که $f(x)c=0$. لذا با توجه به این‌که R حلقه‌ای نیم جابجایی است و با کمک از لم ۲.۶، داریم $f(x)R[x;\alpha,\delta]c=0$. بنابراین، این نتیجه می‌دهد

$$r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta])\neq 0.$$

حال با توجه به گزاره ۲.۱۸، حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

با توجه به تعریف ارائه شده توسط فیث[۸] در مرجع [۱۶]، داریم:

تعریف ۲.۲۳. حلقه‌ی R را قویاً کراندار راست (چپ) گوئیم در صورتی‌که هر ایده‌آل راست (چپ) ناصفر از R مشمول در یک ایده‌آل ناصفر R باشد.

تعریف ۲.۲۴. حلقه R را قویاً کراندار گوئیم در صورتی‌که R هم قویاً کراندار راست و هم قویاً کراندار چپ باشد.

بر اساس تحقیقات انجام شده در مرجع [۱۶]، داریم:

گزاره ۲.۲۵. *اگر R یک حلقه دوئو باشد، آن‌گاه R یک حلقه قویاً کراندار راست (چپ) و نیم جابجایی است.*

طبق تحقیقات انجام شده در مرجع [۳۷]، تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۲.۲۶. حلقه‌ی R را قویاً AB راست (چپ) نامیم در صورتی‌که هر پوچ ساز راست (چپ) ناصفر از R کراندار باشد.

تعریف ۲.۲۷. حلقه‌ی R را قویاً AB نامیم اگر R هم قویاً AB راست و هم قویاً AB چپ باشد.

طبق تحقیقات انجام شده در مرجع [۳۷]، گزاره‌های زیر را داریم:

[۸] Faith

گزاره ۲۸.۲. *اگر R یک حلقه‌ی قویاً کراندار راست باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی نیم جابجایی است.*

گزاره ۲۹.۲. *اگر R یک حلقه‌ی نیم جابجایی باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی قویاً AB راست است.*

امّا در مرجع [۳۷]، نشان داده می‌شود که برعکس مطالب فوق برقرار نمی‌باشند.

قضیه ۳۰.۲. *اگر حلقه‌ی R قویاً AB راست و (α,δ) ـ سازگار و (α,δ) ـ مک‌کوی اریب باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. اگر

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m\in R[x;\alpha,\delta]$$

و همچنین

$$f(x)R[x;\alpha,\delta]\subseteq Z_l(R[x;\alpha,\delta])،$$

آن‌گاه عنصر ناصفر

$$g(x)\in R[x;\alpha,\delta]$$

به قسمی وجود دارد که $f(x)g(x)=0$. بنابراین چون R یک حلقه (α,δ) ـ مک‌کوی اریب می‌باشد، عنصر ناصفر $c\in R$ به قسمی وجود دارد که به ازای هر $0\le i\le m$، $a_ix^ic=0$. چون R یک حلقه قویاً AB راست است پس ایده‌آل ناصفر I از R به قسمی وجود دارد که به ازای هر $0\le i\le m$، داریم $a_iI=0$. بنابراین با توجه به لم ۲.۶، به ازای هر عنصر ناصفر $b\in R$ و هر $0\le i\le m$، داریم $a_iRb=0$. لذا $f(x)R[x;\alpha,\delta]b=0$، به عبارت دیگر

$$r_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x)R[x;\alpha,\delta])\neq 0.$$

پس بنا به گزاره ۲.۱۸، حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ دارای خاصیّت (A) راست است. □

بنابراین با توجه به مطلب ذکر شده در فوق به عنوان یک مثال خاص از قضیه‌ی فوق می‌توانیم به سئوال (۱)، مطرح شده در مرجع [۳۳]، پاسخ مثبت بدهیم:

نتیجه ۳۱.۲. *اگر R یک حلقه دوئو راست باشد، آن‌گاه $R[x]$ دارای خاصیّت (A) راست است.*

برهان. کافی‌است در قضیه ۲.۳۰، α را درون ریختی همانی و $\delta=0$ در نظر بگیریم. □

براساس تحقیقات انجام شده توسط فیث در مرجع [۱۶]، تعاریف و گزاره‌های زیر را داریم:

تعریف ۳۲.۲. حلقه‌ی R را زیپ راست گوئیم، اگر برای هر $X\subseteq R$، که پوچ ساز راست $r_R(X)$ صفر باشد، آن‌گاه زیر مجموعه‌ی متناهی $Y\subseteq X$ به قسمی وجود داشته باشد که $r_R(Y)=0$.

گزاره ۳۳.۲. *حلقه‌ی R زیپ راست است، اگر برای ایده‌آل چپ L داشته باشیم $r_R(L)=0$، آن‌گاه ایده‌آل چپ با تولید متناهی $L_1\subset L$ به قسمی وجود داشته باشد که $r_R(L_1)=0$.*

تعریف ۳۴.۲. حلقه‌ی R زیپ است، در صورتی‌که R هم زیپ راست و هم زیپ چپ باشد.

مفهوم حلقه‌های زیپ با تحقیقات زلمانوویتز[۹] در مرجع [۵۷]، آغاز گردید، او ثابت کرد که:

گزاره ۳۵.۲. *اگر حلقه‌ی R در شرط زنجیر کاهشی روی پوچ سازهای راست صادق باشد، آن‌گاه R یک حلقه زیپ راست است.*

امّا برعکس گزاره فوق برقرار نمی‌باشد. فیث[۱۰] در مرجع [۱۷]، نشان داد که :

گزاره ۳۶.۲. *اگر R یک حلقه جابجایی زیپ و G یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی گروهی $R[G]$ تولید شده توسط G روی حلقه‌ی R یک حلقه زیپ است.*

سدو[۱۱] در مرجع [۱۰]، نشان داد که:

گزاره ۳۷.۲. *اگر R یک حلقه زیپ جابجایی باشد، آن‌گاه حلقه ماتریس‌های مربعی $\mathbb{M}at_n(R)$ یک حلقه زیپ راست است.*

همچنین فیث در مرجع [۱۷]، سئوالات زیر را مطرح نمود.

۱. چه زمانی یک حلقه زیپ راست نتیجه می‌دهد $R[x]$ یک حلقه زیپ راست است؟

۲. شناسائی حلقه‌هایی چون R که حلقه ماتریس‌های آن $\mathbb{M}at_n(R)$ زیپ راست باشد؟

۳. آیا فقط زمانی که حلقه‌ی R زیپ راست، و G یک گروه متناهی است. حلقه‌ی گروهی $R[G]$ زیپ راست است؟

هونگ و همکارانش در مرجع [۳۴]، بر اساس سئوالات مطرح شده توسط فیث در مرجع [۱۷]، مفهوم حلقه‌های زیپ را به حلقه‌های ناجابجایی توسیع می‌دهند و نتایج زیر را می‌گیرند:

گزاره ۳۸.۲. *حلقه R زیپ راست است اگر وتنها اگر $aUT\mathbb{M}_n(R)$ زیپ راست باشد، که در این‌جا $aUT\mathbb{M}_n(R)$ خلاصه شده زیر حلقه‌ی از ماتریس های بالا مثلثی روی حلقه $\mathbb{M}_n(R)$ می‌باشد، که مشمول در حلقه‌ی بالا مثلثی باشند که قطر اصلی آن‌ها ثابت می‌باشند.*

تعریف ۳۹.۲. حلقه‌ی R را آرمنداریز[۱۲] می‌نامیم اگر و فقط اگر برای هر دو چند جمله‌ای

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

و

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

از $R[x]$، اگر $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه به ازای هر i, j، داشته باشیم $a_i b_j = 0$.

[۹] Zelmanowitz
[۱۰] Faith
[۱۱] Cedo
[۱۲] Armendariz

گزاره ۴۰.۲. *اگر R یک حلقه آرمنداریز باشد، آن‌گاه گزارهای زیر معادلند:*

۱. R حلقه زیپ راست است؛

۲. $R[x]$ زیپ راست است؛

۳. $R[x, x^{-1}]$ یک حلقه زیپ راست است.

گزاره ۴۱.۲. *اگر R یک حلقه جابجایی و G یک $u.p$ـتکوار باشد که مشمول در یک زیر منوئید دوری نامتناهی است، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. R یک حلقه زیپ است؛

۲. $R[G]$ یک حلقه زیپ است.

ما می‌خواهیم در زیر خاصیّت زیپ را روی حلقه توسیع اور $R[x; \alpha, \delta]$ بررسی نمائیم و در حین اثبات قضیه، کاربرد دیگری از قضیه ۱۶.۲، را خواهیم دید.

قضیه ۴۲.۲. *اگر R یک حلقه دوئو راست و (α, δ)ـسازگار باشد، آن‌گاه گزارهای زیر معادلند:*

۱. *R یک حلقه زیپ راست است؛*

۲. *$R[x; \alpha, \delta]$ یک حلقه زیپ راست است.*

برهان. ۲ $\Leftarrow$ ۱ : فرض کنیم $R[x; \alpha, \delta]$ زیپ راست باشد و X زیر مجموعه‌ای از R به طوری باشد که $r_R(X) = 0$. اگر

$$f(x) \in r_{R[x;\alpha,\delta]}(X)،$$

آن‌گاه $C_{f(x)} \in r_R(X) = 0$، و در نتیجه $f(x) = 0$. لذا $r_{R[x;\alpha,\delta]}(X) = 0$ چون بنا به فرض $R[x; \alpha, \delta]$ زیپ راست است، پس زیر مجموعه متناهی $Y \subseteq X$ به قسمی وجود دارد که $r_{R[x;\alpha,\delta]}(Y) = 0$، از طرفی

$$r_R(Y) = r_{R[x;\alpha,\delta]}(Y) \cap R = 0$$

بنابراین R یک حلقه زیپ راست است.

۱ $\Leftarrow$ ۲ : فرض کنیم R یک حلقه زیپ راست و X یک زیر مجموعه از $R[x; \alpha, \delta]$ به قسمی باشد که $r_{R[x;\alpha,\delta]}(X) = 0$. قرار می‌دهیم $Y \subseteq R$ را زیر مجموعه تمام ضرایب عناصر در X، به عبارتی قرار می‌دهیم

$$Y = \left\{a_i : a_i \in C_{f(x)}, f(x) \in X\right\}.$$

بنابراین $r(Y) = 0$. لذا با توجه به لم ۶.۲ و با توجه به زیپ بودن حلقه R، زیر مجموعه متناهی

$$X_1 = \left\{a_1, a_2, \dots, a_m\right\}$$

از Y به قسمی وجود دارد که $r_R(X_1) = 0$. فرض کنیم به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, m$، $a_i \in C_{f_i(x)}$. بعلاوه

$$f_i(x) = b_{i0} + b_{i1}x + \cdots + b_{it_i}x^{t_i}.$$

هم‌چنین قرار می‌دهیم

$$f(x) = f_1(x) + x^{t_1+1}f_2(x) + x^{t_1+t_2+2}f_3(x) + \cdots + x^{t_1+t_2+\cdots+t_{m-1}+m-1}f_m(x)$$

اگر عنصر ناصفر $g(x)$ از $R[x;\alpha,\delta]$ به قسمی موجود باشد که برای هر $i = 1, \ldots, m$، داشته باشیم $f_i(x)g(x) = 0$، آن‌گاه $f(x)g(x) = 0$. بنابراین با توجه به قضیه ۱۶.۲، عضو ناصفر $c \in R$ به قسمی وجود دارد که $f(x)c = 0$، در نتیجه بنا به لم ۶.۲، برای هر i, j، داریم $b_{ij}c = 0$. بنابراین به ازای هر $i = 1, \ldots, m$، داریم $a_ic = 0$. پس

$$c \in r_R(\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}) = 0،$$

و این یک تناقض است. بنابراین $R[x;\alpha,\delta]$ یک حلقه زیپ راست است. □

نتیجه ۴۳.۲. *اگر R یک حلقه دوئو راست باشد، آن‌گاه R یک حلقه زیپ راست است اگر و تنها اگر $R[x]$ یک حلقه زیپ راست باشد.*

برهان. کافی‌است درقضیه ۴۲.۲، درون ریختی α را همانی و $\delta = 0$ در نظر بگیریم. □

فصل ۳

ساکل و خاصیّت $\mathcal{F}\mathcal{P}L$ روی (A) f ـ حلقه

۱.۳ مقدمه

تعریف ۱.۳. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را می‌نیمال گوئیم درصورتی‌که I کوچکترین ایده‌آل در میان ایده‌آل‌های R باشد، به عبارتی دیگر اگر $J \subseteq I$ و J ایده‌الی از R باشد، آن‌گاه $I = J$.

تعریف ۲.۳. ساکل حلقه R که به $\mathrm{Soc}(R)$ نمایش داده می‌شود، برابر با جمع مستقیم تمام ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه R می‌باشد.

مطالب ذکر شده در این بخش در مرجع [۱۵]، به چاپ رسیده است. کرمزاده[۱] در مرجع [۴۱]، ساکل حلقه‌ی $C(X)$ را شناسائی و آن‌را با $C_F(X)$، نشان می‌دهد:

گزاره ۳.۳. *در فضای هاسدرف کاملاً منظّم X، ساکل حلقه‌ی $C(X)$ برابر با ایده‌آل تمام توابعی است که در تمام نقاط بجز تعداد متناهی نقطه صفر می‌باشند.*

استاجی[۲] در مرجع [۱۴]، نشان می‌دهد که:

گزاره ۴.۳. *X یک P ـ فضا است اگر و تنها اگر $C(X)$ یک $\aleph_0$ ـ خودانژکتیو باشد.*

[۱] Karamzadeh

[۲] Estaji

یا به طور معادل X یک Pـ فضا است اگر و تنها اگر $C(X)/C_F(X)$ یک حلقه $\aleph_0$ـ خودانژکتیو باشد. برای اطلاع بیشتر به مرجع [۳]، مراجعه شود. دوب[۳]در مراجع [۱۲، ۱۳]، نشان می‌دهد ساکل حلقه حقیقی مقدار $\mathcal{R}L$، بر روی قاب کاملاً منظّم L ایده‌آلی است، شامل تمام نگاشت‌هایی که عناصر هم‌صفر آن‌ها اتصالی از اتم‌ها می‌باشند. که در این‌جا $\mathcal{R}L$ نسخه‌ای از توپولوژی بدون نقطه $C(X)$ است.

فرض کنیم L یک قاب و $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L := Frm(\mathcal{L}(\mathbb{R}), SL)$، که در این‌جا SL دوگانی از هم‌ـ قاب تمام زیر لکل‌های مشبکه L است. گوتیریز[۴]در مرجع [۲۱]، نشان می‌دهد، حلقه مشبکه‌ای مرتب $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ همتای حلقه بدون نقطه R^X می‌باشد، که در این‌جا X یک فضای توپولوژی می‌باشد. برای مطالعه بیشتر به مراجع [۲۰، ۲۲] و [۴۹]، رجوع شود. هم‌چنین کریمی فیض آبادی[۵]و همکاران در مرجع [۴۰]، نشان دادند که:

گزاره ۳.۵. *اگر L یک مشبکه باشد، آن‌گاه*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L := Frm(\mathcal{P}(\mathbb{R}), L)$$

یک fـ حلقه می‌باشد.

هم‌چنین آن‌ها مشخص کردند که:

گزاره ۳.۶. *اگر $\mathbb{X}$ یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه مجموعه تمام توابع از $\mathbb{X}$ به توی $\mathbb{R}$،*

$$R^X \cong \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(\mathbb{X})).$$

هم‌چنین آن‌ها نشان دادند که:

گزاره ۳.۷. *اگر L یک قاب دلخواه باشد، آن‌گاه $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ با زیر fـ حلقه توابع پیوسته حقیقی مقدار $\mathcal{R}(L)$، یک ریخت می‌باشد.*

خاصیّت (A) حلقه‌ها با تحقیقات کاپلانسکی شروع شد و با تعریف هوکابا[۶]و کیلر در مرجع [۳۶]، این مفهوم را به حلقه‌های جابجایی گسترش یافت. بعد از این تحقیقات نویسندگان زیادی روی خاصیّت (A) حلقه‌های جابجایی کار کردن از جمله می‌توان هنریکسن[۷]، کوئنتل[۸] و دیگر نویسندگان در مراجع [۲، ۳۰، ۳۵، ۳۶، ۵۵]، را نام برد.

در این فصل در ابتدا ایده‌آل‌های می‌نیمال fـ حلقه $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ را شناسایی می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم هر ایده‌آل می‌نیمال این حلقه تولید شده توسط f_a می‌باشد، که در این‌جا a یک

[۳] Dube
[۴] Gutierrez
[۵] Karimi
[۶] Huckaba
[۷] Henriksen
[۸] Quentel

اتم از قاب L می‌باشد. همچنین در انتها نشان می‌دهیم نه تنها $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ دارای خاصیّت (A) است. بلکه نشان می‌دهیم $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L)$ نیز دارای خاصیّت (A) است.

جهت اطّلاع بیشتر در این قسمت مفاهیم ابتدایی مشبکه را می‌آوریم. بنابراین از اثبات قضایا و لم‌ها صرف نظر می‌کنیم جهت مطالعه اثبات‌ها به کتاب پولتر[۹] در مراجع [۳۸، ۴۹]، مراجعه شود:

تعریف ۸.۳. فرض می‌کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی است و $T \subseteq P$. عضو $a \in P$ را مقطع یا بزرگ‌ترین کران پایین T می‌گوییم، هرگاه

(۱) a یک کران پایین برای T باشد، یعنی برای هر $t \in T$، $a \le t$.

(۲) برای هر کران پایین T مانند b داشته باشیم: $b \le a$.

علاوه بر این، مقطع T در صورت وجود یکتاست و با نماد $\bigwedge T$ نشان داده می‌شود.

به طور مشابه عضو $a \in P$ را اتصال یا کوچک‌ترین کران بالای T می‌گوییم، هرگاه

(۱) a یک کران بالا برای T باشد، یعنی برای هر $t \in T$، $t \le a$.

(۲) برای هر کران بالای T مانند b داشته باشیم: $a \le b$.

علاوه بر این، اتصال T در صورت وجود یکتاست و با نماد $\bigvee T$ نشان داده می‌شود.

ملاحظه ۹.۳. اگر P یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، واضح است که به انتفای مقدم هر عضو P کران بالایی برای $\varnothing$ است. بنابراین در صورت وجود کوچک‌ترین عضو در P، برابر $\bigvee \varnothing$ است و به طور کلی $\bigvee \varnothing$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای کوچک‌ترین عضو باشد. $\bigvee \varnothing$ را در صورت وجود، صفر می‌نامیم و با نماد $\bot_P$ نشان می‌دهیم و در صورتی‌که ابهامی نباشد از نماد $\bot$ استفاده می‌کنیم.

به طور مشابه $\bigwedge \varnothing$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای بزرگ‌ترین عضو باشد. عضو $\bigwedge \varnothing$ را در صورت وجود، یک می‌نامیم و با $\top_P$ نشان می‌دهیم و در صورتی‌که ابهامی نباشد از نماد $\top$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳. مجموعه‌ی مرتب جزئی M را یک مشبکه می‌گوییم، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی متناهی M دارای مقطع و اتصال باشد.

تعریف ۱۱.۳. مشبکه‌ای را که داری بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عنصر باشد، مشبکه‌ی کراندار می‌نامند.

بنابراین بنا به ملاحظه ۹.۳، نشان می‌دهد که در هر مشبکه $\bot$ و $\top$ وجود دارند، به عبارت دیگر در این رساله، مشبکه‌ها را کراندار در نظر می‌گیریم.

[۹] Pultr

گزاره ۱۲.۳. مشبکه $(M, \leq, \wedge, \vee)$ *را در نظر می‌گیریم. برای هر* $a, b, c \in M$*، گزاره‌های زیر برقرار* هستند.

(۱) $a \leq b$ *اگر و تنها اگر* $a \vee b = b$ *اگر و تنها اگر* $a \wedge b = a$.

(۲) *خودتوانی:* $a = a \wedge a = a \vee a$.

(۳) *شرکت‌پذیری:*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad \text{و} \qquad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

(۴) *قانون جذب:*

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad \text{و} \qquad a \wedge (a \vee b) = a.$$

لم ۱۳.۳. در هر مشبکه‌ی M *گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(۱) *به ازای هر* $x, y, z \in M$، $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$؛

(۲) *به ازای هر* $x, y, z \in M$، $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

مشبکه‌ای که در شرط‌های معادل معرفی شده در لم ۱۳.۳، صدق کند را مشبکه‌ی توزیع‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۳. عنصر a از مشبکه‌ی M را می‌گوییم:

(۱) ماکسیمال است، اگر $a \neq \top$ و هیچ x ای متعلق به M با شرط $a < x < \top$ موجود نباشد.

(۲) اوّل (نقطه) است، اگر $a \neq \top$ و از $a = x \wedge y$ نتیجه شود $a = x$ یا $a = y$.

(۳) اتم است، اگر $\perp < a$ و x ای متعلق به M با شرط $\perp < x < a$ موجود نباشد.

تعریف ۱۵.۳. مشبکه‌ی M را می‌گوییم:

(۱) متمم‌دار است، اگر هر عضو M دارای متمم باشد، یعنی برای هر $x \in M$، $y \in M$ به قسمی وجود داشته باشد که $x \vee y = \top$ و $x \wedge y = \perp$.

(۲) کامل است، هرگاه برای هر $S \subseteq M$، $\bigvee S$ و $\bigwedge S$ در M موجود باشند.

تعریف ۱۶.۳. می‌گوییم مشبکه‌ی کامل M به ترتیب در قانون توزیع پذیری نامتناهی اوّل و دوّم صدق می‌کند، اگر برای هر $a \in M$ و $S \subseteq M$:

(۱) $a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s : s \in S\}$.

(۲) $a \vee \bigwedge S = \bigwedge\{a \vee s : s \in S\}$.

تعریف ۱۷.۳. فرض می‌کنیم P مجموعه‌ی مرتب جزئی است. برای هر $x \in P$، مجموعه‌ی عضوهایی از P را که کوچک تر (بزرگ تر) یا مساوی x باشند با $\downarrow x$ ($\uparrow x$) نشان می‌دهیم. از این رو

$$\uparrow x = \{y \in P : x \leq y\} \quad \text{و} \quad \downarrow x = \{y \in P : y \leq x\}.$$

تعریف ۱۸.۳. زیرمجموعه‌ی ناتهی D از مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$ جهت دار از بالا است اگر برای هر $a, b \in D$، عضو $c \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $a \leq c$ و $b \leq c$.

تعریف ۱۹.۳. زیرمجموعه‌ی D از یک مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی پایینی است، اگر $a \in D$ و $b \leq a$، آنگاه $b \in D$، به عبارت دیگر می‌توان گفت هر زیرمجموعه‌ی دلخواه مانند D از یک مجموعه‌ی مرتب جزئی مانند $(P, \leq)$، یک مجموعه‌ی پایینی است هرگاه $\downarrow D = \bigcup_{x \in D} \downarrow x = D$. به طور مشابه مجموعه‌ی D را مجموعه‌ی بالایی می‌گوییم، هرگاه $\uparrow D = \bigcup_{x \in D} \uparrow x = D$.

تعریف ۲۰.۳. زیرمجموعه‌ی غیر تهی I از مشبکه M را ایده‌آل نامیم، هرگاه:

(۱) I مجموعه‌ی جهت دار باشد.

(۲) برای هر $a, b \in M$، اگر $a \leq b$ و $b \in I$، آنگاه $a \in I$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های مشبکه M را با $Id(M)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که اشتراک هر خانواده از ایده‌آل‌ها، ایده‌آل است. هم‌چنین برای هر زیرمجموعه‌ی غیر تهی S از مشبکه‌ی M، ایده‌آل تولید شده توسط S، برابر با اشتراک تمام ایده‌آل‌های شامل S است و آن را با نماد $< S >$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\{\perp\} =< \emptyset >$.

لم ۲۱.۳. *زیرمجموعه‌ی غیر تهی I از مشبکه‌ی M، ایده‌آل است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in L$ داشته باشیم:*

$$a \vee b \in I \quad \Leftrightarrow \quad a \in I \quad \text{و} \quad b \in I.$$

گزاره ۲۲.۳. *مجموعه‌ی $Id(M)$ را در نظر می‌گیریم. $Id(M)$ با رابطه‌ی شمول مشبکه است به طوری‌که برای هر $I, J \in Id(M)$:*

$$I \wedge J = I \cap J = \{a \wedge b : a \in I, b \in J\}$$

و

$$I \vee J = \langle I \cup J \rangle = \{x \in M : x \leq a \vee b \text{ به قسمی وجود داشته باشند که } b \in J \text{ و } a \in I\}$$

هم‌چنین $\{\perp\}$ و M به ترتیب برابر با $\perp_{Id(M)}$ و $\top_{Id(M)}$ هستند. در حالت خاص

$$(\downarrow a) \wedge (\downarrow b) =\downarrow (a \wedge b) \quad \text{و} \quad (\downarrow a) \vee (\downarrow b) =\downarrow (a \vee b).$$

تعریف ۲۳.۳. مشبکه‌ی M را در نظر می‌گیریم. $a \in M$ را شبه متمم‌دار می‌گوییم، اگرمجموعه‌ی

$$\{x \in M : a \wedge x = \perp\}$$

دارای بزرگ‌ترین عضو باشد و آن را با نماد a^* نشان می‌دهیم. اگر هر عضو M شبه متمم‌دار باشد، آنگاه مشبکه‌ی M را شبه متمم‌دار می‌نامند.

گزاره ۲۴.۳. *فرض می‌کنیم M مشبکه‌ای توزیع‌پذیر و شبه متمم‌دار است. در این صورت برای هر $a, b \in M$ شرایط زیر برقرار هستند.*

(۱) $a \leq a^{**}$.

(۲) *اگر* $a \leq b$، *آنگاه* $b^* \leq a^*$.

(۳) $a \wedge b = \perp$ *اگر و تنها اگر* $a^{**} \wedge b = \perp$.

(۴) $a^* = a^{***}$.

(۵) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.

(۶) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$.

(۷) $a^* \vee b^* \leq (a \wedge b)^*$.

(۸) $(a \vee a^*)^* = \perp$.

گزاره ۲۵.۳. *فرض کنید M مشبکه‌ای توزیع‌پذیر باشد و $\top \neq a \in M$. در این صورت ایده‌آل ماکسیمال I از M به قسمی وجود دارد که $a \in I$.*

گزاره ۲۶.۳. *در یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر M هر عضو ماکسیمال، اوّل است.*

تعریف ۲۷.۳. برای هر مشبکه‌ی توزیع‌پذیر M، عناصر اوّل (ماکسیمال) $Id(M)$ را ایده‌آل‌های اوّل (ماکسیمال) M می‌گوییم.

گزاره ۲۸.۳. *برای مشبکه‌ی توزیع‌پذیر M ایده‌آل اصلی $a \downarrow$ اوّل است اگر و تنها اگر a یک عضو اوّل M باشد.*

تعریف ۲۹.۳. فرض می‌کنیم P و Q مجموعه‌های مرتب جزئی هستند. تابع $f : P \longrightarrow Q$ را حافظ ترتیب می‌گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in P$، اگر $a \leq b$، آنگاه داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$.

تعریف ۳۰.۳. مشبکه‌های N و M را در نظر می‌گیریم. تابع $f : N \longrightarrow M$ را یک همریختی مشبکه‌ای می‌گوییم، هرگاه:

(۱) $f(\perp_N) = \perp_M$ و $f(\top_N) = \top_M$.

(۲) برای هر $x, y \in N$، $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ و $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

یک همریختی مشبکه‌ای یک به یک و پوشا (دوسویی) را یکریختی می‌گوییم.

۲.۳ قاب‌ها

در این بخش به بیان مختصری از مفهوم قاب و قاب‌های منظّم، کاملاً منظّم می‌پردازیم.

تعریف ۳۱.۳. مشبکه‌ی کامل L، یک قاب[۱۰] است هرگاه برای هر زیرمجموعه ی دلخواه S از L و به ازای هر $a \in L$ شرط توزیع پذیری زیر برقرار باشد:

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee_{s \in S} (a \wedge s).$$

از این به بعد، در سرتاسر این رساله ، L نمایش یک قاب است.

تعریف ۳۲.۳. فرض می‌کنیم L یک قاب است و $M \subseteq L$. M زیرقابی از L است، هرگاه M تحت مقطع متناهی و اتصال دلخواه بسته باشد و به عبارت دیگر M خودش با همان اعمال $\wedge$، $\vee$، $\perp$ و $\top$ در قاب L، یک قاب باشد.

گزاره ۳۳.۳. *برای هر $a \in L$، a^* وجود دارد و*

$$a^* = \bigvee \{x \in L : a \wedge x = \perp\}.$$

تعریف ۳۴.۳. عنصر a از قاب L را چگال می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم $a^* = \perp$.

تعریف ۳۵.۳. همریختی مشبکه‌ای که هر اتصال دلخواه را حفظ می‌کند، همریختی قابی (یا نگاشت قابی) می‌گوییم.

گزاره ۳۶.۳. *قاب‌ها و همریختی‌های قابی میان آن‌ها تشکیل یک رسته می‌دهند، که اشیاء این رسته قاب‌ها و ریخت‌های آن همریختی‌های قابی هستند. این رسته را با نماد Frm نشان می‌دهیم.*

تعریف ۳۷.۳. نگاشت قابی $h : L \longrightarrow M$ را چگال می‌گوییم، اگر $h(x) = \perp_M$، آنگاه نتیجه شود $x = \perp_L$.

گزاره ۳۸.۳. *هر نگاشت قابی یک تابعگون است و دارای الحاقی راست است.*

گزاره ۳۹.۳. *فرض کنید L و M دو قاب و $F : L \longrightarrow M$ و $G : M \longrightarrow L$ همریختی‌های قابی باشند. در این صورت F الحاقی چپ G است، هرگاه برای هر $a \in L$ و $b \in M$،*

$$F(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq G(b).$$

---

[۱۰] Frame

گزاره ۴۰.۳. *هر همریختی قابی* $h : L \to M$ *داری الحاقی راست* $h_* : M \to L$ *است که برای هر* $a \in L$ *و* $b \in M$*،*

$$h(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq h_*(b).$$

همچنین h_**، مقطع دلخواه و عناصر اوّل را حفظ می‌کند.*

تعریف ۴۱.۳. دوگان رسته **Frm** را لُکل[۱۱] می‌گویند و آن را با نماد **Loc** نشان می‌دهیم. اشیاء این رسته، لُکل نامیده می‌شوند.

ملاحظه ۴۲.۳. (۱) نگاشت بین لُکل‌ها، نگاشت پیوسته نامیده می‌شود که دوگان نگاشت قابی در رسته **Frm** است.

(۲) فرض می‌کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع پیوسته است. در این صورت نگاشت

$$f^{-1} : \mathfrak{O}(Y) \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$$

با ضابطه‌ی

$$f^{-1}(V) = \{U \in \mathfrak{O}(X) : f(U) \subseteq V\}$$

نگاشت قابی است و آن را با $f^* : Y \longrightarrow X$ نشان می‌دهند. الحاقی راست $f^* : X \longrightarrow Y$ نگاشت $f_* : X \longrightarrow Y$ است.

برای مطالعه دقیق‌تر لُکل‌ها، به مراجع [۳۸، ۴۹] رجوع شود.

تعریف ۴۳.۳. برای دو عضو a و b از یک قاب مانند L، می‌گوییم a به خوبی زیرb است به شرط این که $a^* \vee b = \top$ و آن را با نماد $a \prec b$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۴۴.۳. *فرض می‌کنیم* $a, b, c, d \in L$*. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.*

(۱) $b \prec a$ *اگر و تنها اگر* $x \in L$ *به قسمی وجود داشته باشد که* $a \vee x = \top$ *و* $b \wedge x = \bot$*.*

(۲) $a \prec a$ *اگر و تنها اگر* a *متمم‌دار باشد.*

(۳) *اگر* $b \prec a$*، آنگاه* $b \leq a$*.*

(۴) *اگر* $d \leq b \prec a \leq c$*، آنگاه* $d \prec c$*.*

(۵) *اگر* $b \prec a$ *و* $d \prec c$*، آنگاه* $d \wedge b \prec c \wedge a$ *و* $d \vee b \prec c \vee a$*.*

(۶) $a \vee b \prec c$ *اگر و تنها اگر* $a \prec c$ *و* $b \prec c$*.*

(۷) $c \prec a \wedge b$ *اگر و تنها اگر* $c \prec a$ *و* $c \prec b$*.*

---
[۱۱] Locale

(۸) *اگر* $a < b$، *آنگاه* $b^* < a^*$.

تعریف ۴۵.۳. فرض می‌کنیم L یک قاب است و $a, c \in L$. یک دنباله‌ی درونیاب میان a و c، دنباله‌ی $(x_{ik}) \subseteq L$ است که $i = 0, 1, 2, \ldots$ و $k = 0, 1, \ldots, 2^i$ به طوری‌که

(۱) $x_{00} = a$ و $x_{01} = c$.

(۲) $x_{ik} < x_{i(k+1)}$ و $x_{ik} = x_{(i+1)2k}$.

اگر برای $a, c \in L$، یک دنباله درونیاب میان a و c موجود باشد، می‌گوییم a به طور کامل زیر (کاملاً زیر) c است و می‌نویسیم $a << c$.

گزاره ۴۶.۳. *فرض می‌کنیم* $a, b, c, d \in L$. *در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

(۱) *اگر* $a << c$، *آنگاه* $a < c$.

(۲) $a << a$ *اگر و تنها اگر* a *متمم‌دار باشد.*

(۳) *اگر* $d \leq b << a \leq c$، *آنگاه* $d << c$.

(۴) *اگر* $b << a$ *و* $d << c$، *آنگاه* $b \vee d << a \vee c$ *و* $b \wedge d << a \wedge c$.

(۵) *اگر* $a << b$، *آنگاه* $c \in L$ *به قسمی وجود دارد که* $a << c << b$.

(۶) *اگر* $a << b$، *آنگاه* $b^* << a^*$.

تعریف ۴۷.۳. یک مقیاس[۱۲] خانواده‌ی $\{a_i\}_{i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \subseteq L$ است که برای هر $i, j \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$، اگر $i < j$ ، آنگاه $a_i < a_j$.

گزاره ۴۸.۳. *فرض می‌کنیم* a *و* b *دو عنصر از قاب* L *باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(۱) $a << b$؛

(۲) *مقیاس* $\{a_i\}_{i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}}$ *به قسمی وجود دارد که* $a_0 = a$، $a_1 = b$ *و برای* $r, s \in [0, 1]$، *اگر* $r < s$، *آن‌گاه نتیجه شود که* $a_r < a_s$.

تعریف ۴۹.۳. می‌گوییم قاب L:

(۱) منظّم است، اگر برای هر $a \in L$ داشته باشیم $a = \bigvee_{x < a} x$.

(۲) کاملاً منظّم است، اگر برای هر $a \in L$ داشته باشیم $a = \bigvee_{x << a} x$.

---
[۱۲] scale

گزاره ۵۰.۳. *قاب‌های منظّم و همریختی‌های قابی بین آن‌ها تشکیل یک رسته می‌دهند که اشیاء این رسته قاب‌های منظّم و ریخت‌های آن همریختی‌های قابی هستند.*

رسته‌ی حاصل از قاب‌های منظّم و همریختی‌های قابی را به اختصار با **rFrm** نشان می‌دهیم.

گزاره ۵۱.۳. *قاب‌های کاملاً منظّم و همریختی‌های قابی بین آن‌ها تشکیل یک رسته می‌دهند که اشیاء این رسته قاب‌های کاملاً منظّم و ریخت‌های آن همریختی‌های قابی هستند.*

رسته‌ی حاصل از قاب‌های کاملاً منظّم و همریختی‌های قابی را به اختصار با **crFrm** نشان می‌دهیم.

گزاره ۵۲.۳. *هر قاب کاملاً منظّم، منظّم است.*

گزاره ۵۳.۳. *فرض کنید L یک قاب منظّم است و $a \in L$. در این صورت a عضو ماکسیمال L است اگرو تنها اگر a عضوی اوّل از L باشد.*

تعریف ۵۴.۳. هر نگاشت قابی $f : L \longrightarrow \mathbf{2}$ را یک نقطه‌ی L می‌گوییم . مجموعه همه نقاط L را با نماد ΣL نشان می‌دهیم و آن را طیف L می‌گوییم، که در این‌جا $\mathbf{2} = \{\perp, \top\}$ و $\perp < \top$.

گزاره ۵۵.۳. *برای هر قاب L، مجموعه $\mathcal{A} = \{\Sigma_a : a \in L\}$ یک توپولوژی روی ΣL تشکیل می‌دهد و برای هر $a \in L$،*

$$\Sigma_a = \{f \in \Sigma L : f(a) = \top\}.$$

تعریف ۵۶.۳. می‌گوییم قاب L دارای به اندازه کافی نقطه[۱۳] است، هرگاه برای هر $a, b \in L$، اگر $a \nleq b$، آنگاه نقطه $f : L \longrightarrow \mathbf{2}$ در ΣL به قسمی وجود داشته باشد که $f(a) = \top$ و $f(b) = \perp$، یعنی $f \in \Sigma_a - \Sigma_b$.

گزاره ۵۷.۳. *قاب L فضایی است اگر و تنها اگر $\eta_L : L \longrightarrow \mathfrak{O}\Sigma L$ با ضابطه $\eta_L(a) = \Sigma_a$ یک‌ریختی قابی باشد.*

تعریف ۵۸.۳. زیرمجموعه ناتهی F از یک مشبکه L پالایه است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in L$،

$$a \wedge b \in F \Leftrightarrow a, b \in F.$$

هر پالایه از قاب L، $\top_L$ را شامل می‌شود.

تعریف ۵۹.۳. می‌گوییم پالایه F از قاب L:

(۱) اوّل است، هر گاه $F \neq L$ و اگر $a \vee b \in F$، آن‌گاه $a \in F$ یا $b \in F$.

[۱۳] enough points

(۱) کاملاً اوّل است، هر گاه برای هر $S \subseteq L$،

$$\bigvee S \in F \Leftrightarrow S \cap F \neq \emptyset.$$

در این بخش به معرفی حلقه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی یک قاب، یعنی $\mathcal{R}L$ و بیان چگونگی رابطه میان اعضای آن می‌پردازیم و رابطه‌ای را که اعضای این حلقه با اعضای قاب L دارند، بیان می‌نماییم. همچنین عناصر همصفر یک قاب و ویژگی آن‌ها را گردآوری می‌کنیم.

تعریف ۶۰.۳. قابی که توسط زوج‌های مرتب (p, q) که $p, q \in \mathbb{Q}$، تحت روابط زیر تولید شده است، قاب اعداد حقیقی می‌گوییم و آن را با نماد $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم

(R_1) $(p, q) \wedge (r, s) = (p \vee r, q \wedge s)$.

(R_2) اگر $p \leq r < q \leq s$، آنگاه $(p, q) \vee (r, s) = (p, s)$.

(R_3) $(p, q) = \bigvee\{(r, s) : p < r < s < q\}$.

(R_4) $\bigvee\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\} = \top$.

برای $p, q \in \mathbb{Q}$، قرار می‌دهیم:

(۱) $[\![p, q]\!] = \{t \in \mathbb{R} : p < t < q\}$.

(۲) $\langle p, q\rangle = \{t \in \mathbb{Q} : p < t < q\}$.

لم ۶۱.۳. *نگاشت تعریف شده‌ی زیر یک‌ریختی قابی است.*

$$\begin{aligned} h : \mathcal{L}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{O}(\mathbb{R}) \\ (p, q) &\longmapsto [\![p, q]\!] = \{t \in \mathbb{R} : p < t < q\} \end{aligned}$$

$$h\Big(\bigvee_{\alpha \in I}(p_\alpha, q_\alpha)\Big) = \bigvee_{\alpha \in I} h(p_\alpha, q_\alpha).$$

یک‌ریختی تعریف شده در لم فوق را همریختی کانونی می‌نامیم.

گزاره ۶۲.۳. *برای قاب $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$، اگر $p, q \in \mathbb{Q}$ و $p < q$، آنگاه*

$$(p, q) \leq (r, s) \quad \Leftrightarrow \quad r \leq p \quad \text{و} \quad q \leq s$$

برای هر $p, q \in \mathbb{Q}$، قرار می‌دهیم:

$$(p, \ldots) = \bigvee\{(p, q) | q \in \mathbb{Q}\} = \bigvee\{(p, q) : p < q \in \mathbb{Q}\}$$

و

$$(\ldots, q) = \bigvee\{(p, q) | p \in \mathbb{Q}\} = \bigvee\{(p, q) : q > p \in \mathbb{Q}\}.$$

گزاره ۶۳.۳. *برای هر $p,q \in \mathbb{Q}$ که $p < q$ در قاب $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ، داریم:*

(۱) $(p,\ldots) \wedge (\ldots,q) = (p,q)$.

(۲) $(p,\ldots) \vee (\ldots,q) = \top$.

(۲) $(q,\ldots) \vee (\ldots,p) = (p,q)^*$.

نتیجه ۶۴.۳. *برای هر $p,q,r,s \in \mathbb{Q}$ در قاب $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ، داریم:*

(۱) *اگر* $p < r < s < q$ *، آنگاه* $(r,s) \prec (p,q)$.

(۲) *اگر* $p < r < s < q$ *، آنگاه* $(r,s) \prec\prec (p,q)$.

نتیجه ۶۵.۳. *برای هر $q,s \in \mathbb{Q}$ در قاب $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ، داریم:*

(۱) *اگر* $s < q$ *، آنگاه* $(\ldots,s) \prec (\ldots,q)$.

(۲) *اگر* $s < q$ *، آنگاه* $(\ldots,s) \prec\prec (\ldots,q)$.

گزاره ۶۶.۳. *برای هر $p,q \in \mathbb{Q}$ ، قابی که توسط $(p,\ldots)$ ، $(\ldots,q)$ و تحت روابط:*

(R'_1) *اگر* $p \geq q$ *، آنگاه* $(p,\ldots) \wedge (\ldots,q) = \bot$ ؛

(R'_2) *اگر* $p < q$ *، آنگاه* $(p,\ldots) \vee (\ldots,q) = \top$ ؛

(R'_3) $(p,\ldots) = \bigvee\{(r,\ldots) : p < r\}$ ؛

(R'_4) $(\ldots,q) = \bigvee\{(\ldots,s) : s < q\}$ ؛

(R'_5) $\bigvee_{p\in\mathbb{Q}}(p,\ldots) = \top$ و

(R'_6) $\bigvee_{q\in\mathbb{Q}}(\ldots,q) = \top$.

تولید شده باشد، برابر با قاب $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ است.

گزاره ۶۷.۳. *برای هر فضای توپولوژی X ،*

$$Top(X,\mathbb{R}) \cong Frm(\mathfrak{L}(\mathbb{R}), \mathfrak{O}(X))$$

که در اینجا هر $h : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$ متناظر است با $\overline{h} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده با ضابطه‌ی

$x \in h(p,q)$ *اگر و تنها اگر* $p < \overline{h}(x) < q$.

با توجّه به گزاره قبلی یک تابع پیوسته حقیقی مقدار روی یک قاب به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۶۸.۳. همریختی قابی $L \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ را یک تابع پیوسته حقیقی مقدار روی قاب L می‌گوییم. مجموعه همه‌ی توابع پیوسته حقیقی روی قاب L را با $\mathcal{R}L$ نشان می‌دهیم. می‌گوییم برای هر $\alpha, \beta \in \mathcal{R}L$، $\alpha \leq \beta$ اگر و تنها اگر برای هر $p \in \mathbb{Q}$ ، $\alpha(p, \ldots) \leq \beta(p, \ldots)$.

گزاره ۶۹.۳. *$(\mathcal{R}L, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است و برای هر $\alpha, \beta \in \mathcal{R}L$، $\alpha \leq \beta$ اگر و تنها اگر برای هر $q \in \mathbb{Q}$، $\beta(\ldots, q) \leq \alpha(\ldots, q)$.*

تعریف ۷۰.۳. یک دم نزولی[۱۴] در قاب L، نگاشت $\sigma : \mathbb{Q} \longrightarrow L$ است به طوری که اگر $r < s$، آنگاه $\sigma(s) \prec \sigma(r)$ و $\bigvee\{\sigma(r) : r \in \mathbb{Q}\} = \bigvee\{\sigma(r)^* : r \in \mathbb{Q}\} = \top$.

لم ۷۱.۳. *فرض می‌کنیم σ یک دم نزولی در قاب L باشد. در این صورت تابع پیوسته حقیقی یکتای $\alpha : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow L$ به قسمی وجود دارد که:*

(۱) *برای هر $r \in \mathbb{Q}$، $\alpha(r, \ldots) = \bigvee\{\sigma(s) : s > r\}$.*

(۲) *برای هر $r \in \mathbb{Q}$، $\alpha(\ldots, r) = \bigvee\{\sigma(s)^* : s < r\}$.*

(۳) *برای هر $r \in \mathbb{Q}$، $\alpha(r, \ldots) \leq \sigma(r) \leq \alpha(\ldots, r)^*$.*

لذا در حالت کلی تابع ثابت در $\mathcal{R}L$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

ملاحظه ۷۲.۳. فرض می‌کنیم $r \in \mathbb{Q}$. در این صورت واضح است که $\mathbf{r} : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow L$ با ضابطه‌ی

$$\mathbf{r}(p, q) = \begin{cases} \top & p < r < q \\ \bot & r \notin (p, q) \end{cases}$$

به $\mathcal{R}L$ تعلق دارد.

لم ۷۳.۳. *فرض می‌کنیم α و β متعلق به $\mathcal{R}L$ هستند و به ترتیب توسط دم‌های نزولی σ و δ تعیین می‌شوند. در این صورت $\alpha \leq \beta$ اگر و تنها اگر برای هر $p > q$ در $\mathbb{Q}$ داشته باشیم $\sigma(p) \leq \delta(q)$.*

تعریف ۷۴.۳. فرض می‌کنیم A یک حلقه است. حلقه‌ی A با یک رابطه‌ی مرتب جزئی، حلقه‌ی مرتب جزئی است به شرط این که :

(۱) برای هر $a, b, x \in A$ که $a \leq b$ داشته باشیم $a + x \leq b + x$.

(۲) برای هر $a, b \in A$ اگر $a, b \geq 0$، آنگاه $ab \geq 0$.

تعریف ۷۵.۳. حلقه‌ی مرتب جزئی A را که برای هر $a, b \in A$، $a \vee b \in A$ و $a \wedge b \in A$ حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای می‌گوییم

[۱۴] Trale decrease

در یک حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای مانند A، به ازای هر $a \in A$ قرار می‌دهیم

$$|a| = a \vee (-a)\text{،}\qquad a^- = (-a) \vee \circ \qquad \text{و} \qquad a^+ = a \vee \circ.$$

تعریف ۷۶.۳. حلقه مرتب مشبکه‌ای A را که برای هر $f, g, h \in A$ و $h \geq \circ$ در شرط زیر صدق کند، یک fــ حلقه می‌نامند.

$$(f \wedge g)h = fh \wedge gh.$$

گزاره ۷۷.۳. *با عمل*

O_1: *برای* $\diamond = +, ., \wedge, \vee$*، تعریف می‌کنیم :*

$$(\alpha \diamond \beta)(p, q) = \bigvee\{\alpha(r, s) \wedge \beta(t, u) : \langle r, s\rangle \diamond \langle t, u\rangle \subseteq \langle p, q\rangle\}$$

که در این‌جا:

$$\langle r, s\rangle \diamond \langle t, u\rangle = \{x \diamond y : x \in \langle r, s\rangle, y \in \langle t, u\rangle\}.$$

$\mathcal{R}L$ *یک* f *ــ حلقه است. همچنین داریم:*

O_2: $(-\alpha)(p, q) = \alpha(-q, -p)$.

اعمال فوق روی $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *تعریف شده‌اند، در واقع* $\mathcal{R}L$ *با عمل زیر یک* f *ــ حلقه است.*

O'_1: *برای هر* $a \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *و* $\diamond = +, ., \wedge, \vee$*، تعریف می‌کنیم :*

$$(\alpha \diamond \beta)(a) = \bigvee_{\alpha \in I} (\alpha \diamond \beta)(p_\alpha, q_\alpha)$$

که در این‌جا $a = \bigvee_{\alpha \in I}(p_\alpha, q_\alpha)$*. علاوه بر این داریم:*

O'_2: $(-\alpha)(a) = \bigvee_{\alpha \in I}(-\alpha)(p_\alpha, q_\alpha)$.

ملاحظه ۷۸.۳. برای هر $\alpha, \beta \in \mathcal{R}L$، تعریف می‌کنیم:

$$\alpha^+ = \alpha \vee \mathbf{0}\text{،}\qquad \alpha^- = (-\alpha) \vee \mathbf{0}\text{،}\qquad \alpha = \alpha^+ - \alpha^- \qquad \text{و} \qquad |\alpha| = \alpha \vee (-\alpha).$$

همچنین داریم:

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \qquad \text{و} \qquad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

تعریف ۷۹.۳. یک عضو $\alpha \in \mathcal{R}L$ را کران دار می‌گوییم، هر گاه $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود داشته باشد که $|\alpha| \leq \mathbf{n}$.

گزاره ۸۰.۳. *مجموعه‌ی همه اعضای کران دار از* $\mathcal{R}L$ *یک زیرحلقه آن است و با نماد* $\mathcal{R}^*L$ *نشان داده می‌شود.*

بناشفسکی[۱۵]در [۵]، نسخه توپولوژی بدون نقطه از مجموعه‌های همصفر روی فضای توپولوژی را به صورت زیر تعریف کرده‌اند و آن را یک عنصر همصفر در یک قاب می‌نامند.

تعریف ۸۱.۳. برای هر $\alpha \in \mathcal{R}L$، قرار می‌دهیم:

$$cozf = \bigvee\{f(p,\circ) \vee f(\circ,q)\ :\ p,q \in \mathbb{Q}\} = f((-\infty,\circ) \vee (\circ,+\infty)).$$

عنصر $a \in L$ را عنصر همصفر می‌گوییم هرگاه $\alpha \in \mathcal{R}L$ به قسمی وجود داشته باشد که $a = coz(\alpha)$. مجموعه‌ی عناصر همصفر قاب L را با $CozL$ نشان می‌دهیم.

در گزاره زیر ویژگی‌های عنصرهای همصفر را بیان می‌کنیم و از آنجا که این خواص برای این عناصر بسیار پرکاربرد و واضح هستند هر جا که لازم هستند بدون این‌که به این گزاره اشاره شود، استفاده می‌کنیم.

گزاره ۸۲.۳. *برای هر* $\alpha,\beta \in \mathcal{R}L$، *روابط زیر برقرار هستند.*

(۱) $coz\alpha = \perp$ *اگر و تنها اگر* $\alpha = \mathbf{0}$.

(۲) $coz(\alpha) = coz(|\alpha|)$.

(۳) *اگر* $\mathbf{0} \leq \alpha \leq \beta$، *آنگاه* $coz(\alpha) \leq coz(\beta)$.

(۴) $coz(\alpha+\beta) \leq coz(\alpha) \vee coz(\beta)$. هم‌چنین *اگر* $\alpha,\beta \geq \mathbf{0}$، *آنگاه*

$$coz(\alpha+\beta) = coz(\alpha) \vee coz(\beta).$$

(۵) $coz(\alpha^{۲}+\beta^{۲}) = coz\alpha \vee coz\beta$.

(۶) $coz(\alpha\beta) = coz(\alpha) \wedge coz(\beta)$.

(۷) *برای هر* $n \in \mathbb{N}$، $coz(\alpha^n) = coz(\alpha)$.

(۸) $coz\alpha = \top$ *اگر و تنها اگر* α *عنصری وارون‌پذیر در* $\mathcal{R}L$ *باشد.*

(۹) *اگر* $\alpha,\beta \geq \mathbf{0}$، *آنگاه* $coz(\alpha \wedge \beta) = coz(\alpha) \wedge coz(\beta)$.

(۱۰) *برای هر* $p \in \mathbb{Q}$، $coz(\alpha - \mathbf{p}) = \alpha(\ldots,p) \vee \alpha(p,\ldots)$.

گزاره ۸۳.۳. *برای هر* $\alpha \in \mathcal{R}L$، *اگر* $p,q \in \mathbb{Q}$ *که* $p<q$، *آن‌گاه*

$$\alpha^{+}(p,q) = \begin{cases} \alpha(p,q) & p \geq \circ \\ \alpha(\ldots,-q) & p < \circ < q \\ \perp & q \leq \circ \end{cases}.$$

---

[۱۵] Banaschewski

گزاره ۸۴.۳. برای هر $a,b \in L$، $a << b$ اگر و تنها اگر $\alpha \in \mathcal{R}L$ به قسمی وجود داشته باشد که $a \leq \alpha(\frac{1}{2},\ldots) \leq \alpha(0,\ldots) \leq b$.

گزاره ۸۵.۳. برای هر $a \in L$، روابط زیر معادل هستند:

(۱) $a \in CozL$؛

(۲) $a = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n$ به طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n << a$ ؛

(۳) $a = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$ به طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n << a_{n+1}$.

نتیجه ۸۶.۳. قاب L، کاملاً منظّم است اگر و تنها اگر توسط $CozL$ تولید شود.

گزاره ۸۷.۳. فرض می‌کنیم $\{a_i\}_{i\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ یک مقیاس است. در این صورت برای هر r,s متعلق به $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ اگر $r < s$، آنگاه $a_r << a_s$.

نتیجه ۸۸.۳. فرض کنیم L یک قاب است. اگر $a \in CozL$، آنگاه یک مقیاس $\{a_n\}_{n\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ به قسمی وجود دارد که $a = \bigvee_{n\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} a_n$ و برعکس.

گزاره ۸۹.۳. برای هر $x,y \in L$ که $x << y$، یک $c \in CozL$ به قسمی وجود دارد که $x << c << y$.

در هر قاب کاملاً منظّم L عناصر متمم‌دار، همصفرند. هر همریختی قابی عضو همصفر را حفظ می‌کند.

یک تابع حقیقی مقدار روی قاب L برابر با همریختی قابی $f : P(\mathbb{R}) \to L$ است. که در این‌جا فرض بر این است که $(P(\mathbb{R}),\subseteq)$ یک قاب بولی می‌باشد. مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار روی قاب L را با $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ نمایش می‌دهیم. در مرجع [۴۰]، نشان دادند که:

گزاره ۹۰.۳. مجموعه $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ با عمل $\diamond : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک زیر f ـ حلقه از $\mathcal{R}L$ می‌باشد. $f,g \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$، $f \diamond g : P(\mathbb{R}) \to L$ با

$$(f \diamond g)(X) = \bigvee\{f(Y) \wedge g(Z) : Y \diamond Z \subset X\}$$

که این‌جا $\diamond \in \{+,-,\wedge,\vee\}$ و $Y \diamond Z = \{y \diamond z : y \in Y, z \in Z\}$.

به ازای هر $X \in P(\mathbb{R})$ و $c \in \mathbb{R}$، یک تابع ثابت حقیقی مقدار روی قاب L در $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ برابر با

$$\mathbf{c}(X) = \begin{cases} \top & \text{if } c \in X \\ \bot & \text{if } c \notin X \end{cases}$$

می‌باشد.

بر اساس تعریف ارائه شده توسط زرقانی[۱۶] در مرجع [۵۸]، داریم:

[۱۶] Zarghani

تعریف ۹۱.۳. برای هر $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$، قرار می‌دهیم $z(f) = f(\{0\})$. عنصر $a \in L$ را عنصر صفر می‌گوئیم، هرگاه $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ به قسمی وجود داشته باشد که $a = z(f)$.

قضیه ۹۲.۳. [۵۸]، *برای تمام توابع حقیقی مقدار* $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ *، گزاره‌های زیر را برقرارند.*

۱. *برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *،* $z(f) = z(-f) = z(|f|) = z(f^n)$.

۲. $z(fg) = z(f) \vee z(g)$.

۳. *به ازای هر* $f, g \geq 0$ *،* $z(f+g) \geq z(f) \wedge z(g)$.

۴. $z(f+g) = z(f) \wedge z(g)$.

۵. $z(f) = \top$ *اگر و فقط اگر* $f = 0$.

۶. $z(f) = \bot$ *اگر و فقط اگر* f *یک عنصر معکوس پذیر در* $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ *باشد.*

برهان. آخرین گزاره را اثبات می‌کنیم، و بقیه گزارها اثباتی بدیهی دارند. فرض کنیم f یک عنصر معکوس پذیر از $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ باشد. بنابراین $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ به قسمی وجود دارد که $fg = \mathbf{1}$. لذا با توجه به قسمت (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \bot &= z(1) \\ &= z(fg) \\ &= z(f) \vee z(g) \end{aligned}$$

و در نتیجه $z(f) = \bot$.

برعکس: فرض کنیم که $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ و $z(f) = \bot$. قرار می‌دهیم

$$g(X) := \bigvee \{f\{\frac{1}{x}\} : x \in X - \{0\}\}$$

و نشان می‌دهیم g عضوی از $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ است. و g یک وارون ضربی f در $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ است. برهان را در چهار مرحله چک می‌کنیم:

مرحله اول. چون بنا به فرض $f\{0\} = \bot$، نشان می‌دهیم $g(\mathbb{R}) = \top$.

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}) &= \bigvee \{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= \bot \vee \bigvee \{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= f\{0\} \vee \bigvee \{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= f(\mathbb{R}) \\ &= \top \end{aligned}$$

مرحله ۲. فرض کنیم $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq P(\mathbb{R})$. اگر برای تمام iها، $X_i = \emptyset$ یا $X_i = \{0\}$ باشد، آن‌گاه واضح است که

$$g(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bot = \bigvee_{i \in I} g(X_i),$$

و در سایر جاهای دیگر اگر $i \in I$ به قسمی وجود داشته باشد که $X_i \neq \emptyset, \{0\}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} g(\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i) &= \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in (\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i) - \{0\}\} \\ &= \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in \textstyle\bigcup_{i\in I}(X_i - \{0\})\} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I} \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in X_i - \{0\}\} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I} g(X_i) \end{aligned}$$

مرحله ۳. فرض کنیم $X, Y \in P(\mathbb{R})$. اگر $X, Y \in \{\emptyset, \{0\}\}$، آن‌گاه واضح است که،

$$g(X \cap Y) = \bot = g(X) \wedge g(Y),$$

و در سایر جاهای دیگر داریم

$$\begin{aligned} g(X \cap Y) &= \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in (X \cap Y) - \{0\}\} \\ &= \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in (X - \{0\}) \cap (Y - \{0\})\} \\ &= \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} \wedge f\{\tfrac{1}{y}\} : x \in X - \{0\}, y \in Y - \{0\}\} \\ &= \bigvee\{f\{\tfrac{1}{x}\} : x \in X - \{0\}\} \wedge \bigvee\{f\{\tfrac{1}{y}\} : y \in Y - \{0\}\} \\ &= g(X) \wedge g(Y)\,. \end{aligned}$$

مرحله ۴. در آخرین مرحله نشان می‌دهیم $fg = 1$. از طرفی داریم

$$\begin{aligned} (fg)(\{1\}) &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{y\}) : xy = 1\} \\ &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{\tfrac{1}{x}\}) : 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \\ &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge f(\{x\}) : 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \\ &= \bigvee\{f(\{x\}) : 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \\ &= f(\{0\}) \bigvee\{f(\{x\}) : 0 \neq x \in \mathbb{R}\} \\ &= f(\mathbb{R}) \\ &= \top \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (fg)(\{0\}) &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{y\}) : xy = 0\} \\ &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{y\}) : x = 0\} \vee \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{y\}) : y = 0\} \\ &= \bigvee\{\bot \wedge g(\{y\})\} \vee \bigvee\{f(\{x\}) \wedge \bot\} \\ &= \bot \end{aligned}$$

بنابراین اگر $r \neq \circ, 1$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(fg)(\{r\}) &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{y\}) : xy = r\}\\ &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge g(\{\tfrac{r}{x}\}) : \circ \neq x \in \mathbb{R}\}\\ &= \bigvee\{f(\{x\}) \wedge f(\{\tfrac{x}{r}\}) : x \neq \circ\}\\ &= \bigvee\{f(\emptyset) : x \neq \circ\}\\ &= \bot\end{aligned}$$

و در نتیجه $fg = \mathbf{1}$. و این برهان را کامل می‌کند. □

۳.۳ ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$

طبق تعریف ارائه شده توسط لمبک[۱۷]در مرجع [۴۳، صفحه ۶۳]، داریم:

گزاره ۹۳.۳. *در هر حلقه‌ی کاهشی، هر ایده‌آل می‌نیمال، توسط یک خود توان تولید می‌شود.*

گزاره ۹۴.۳. *اگر R یک حلقه کاهشی باشد و $e^2 = e \in R$، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *eR یک ایده‌آل می‌نیمال است؛*

۲. *eR یک میدان با همانی ضربی e است.*

ما در این بخش ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بنابراین نشان می‌دهیم، اگر I یک ایده‌آل می‌نیمال در $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ باشد و $a = \bigvee_{f\in I} coz(f)$، آن‌گاه I ایده‌آل تولید شده توسط f_a می‌باشد، که f_a در گزاره‌ی زیر معرفی خواهد شد.

گزاره ۹۵.۳. *اگر a یک عنصر متمم دار در قاب L باشد، آن‌گاه $f_a : P(\mathbb{R}) \to L$ با ضابطه‌ی*

$$f_a(X) = \begin{cases} \top & \text{اگر } \circ, 1 \in X \\ a' & \text{اگر } 1 \notin X \text{ و } \circ \in X \\ a & \text{اگر } 1 \in X \text{ و } \circ \notin X \\ \bot & \text{اگر } 1 \notin X \text{ و } \circ \notin X \end{cases}$$

یک تابع حقیقی مقدار روی قاب L می‌باشد.

---
[۱۷] Lambek

برهان. اگر $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} f_a(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) &= \begin{cases} \top & \text{اگر وجود داشته باشد } \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda \text{ به قسمی که } 1 \in X_{\lambda_2} \text{ و } 0 \in X_{\lambda_1} \\ a' & \text{اگر برای هر } \lambda \in \Lambda\text{، } 1 \notin X_\lambda \text{ و } 0 \in X_\lambda \\ a & \text{اگر برای هر } \lambda \in \Lambda\text{، } 1 \in X_\lambda \text{ و } 0 \notin X_\lambda \\ \bot & \text{اگر برای هر } \lambda \in \Lambda\text{، } 1 \notin X_\lambda \text{ و } 0 \notin X_\lambda \end{cases} \\ &= \bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_a(X_\lambda) \end{aligned}$$

همچنین برای هر $A, B \in P(\mathbb{R})$، داریم

$$f_a(A \cap B) = f_a(A) \wedge f_a(B).$$

چون $f_a(\mathbb{R}) = \top$ و $f_a(\emptyset) = \bot$، می‌توان نتیجه گرفت که f_a یک تابع حقیقی مقدار در قاب L است. □

از این به بعد، مگر در مواردی که ذکر خواهیم کرد f_a معرف یک تابع حقیقی مقدار از $P(\mathbb{R})$ به توی قاب L می‌باشد و ضابطه‌ی آن، همان ضابطه‌ی تعریف شده در ۹۵.۳ می‌باشد.

گزاره ۹۶.۳. *اگر a یک عنصر متمم دار از قاب L باشد، آن‌گاه $f_a^2 = f_a$.*

برهان. فرض کنیم x یک عنصر ناصفر از $\mathbb{R}$ باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} f_a^2(\{x\}) &= \bigvee_{0\neq y\in\mathbb{R}} f_a(\{y\}) \wedge f_a(\{\tfrac{x}{y}\}) \\ &= \bigvee_{0\neq y\in\mathbb{R}} f_a(\{y\} \cap \{\tfrac{x}{y}\}) \\ &= \begin{cases} f_a(\{1\}) & \text{اگر } x = 1, \\ \bot & \text{اگر } x \neq 1 \end{cases} \\ &= f_a(\{x\}). \end{aligned}$$

چون $z(f_a^2) = z(f_a)$، نتیجه می‌گیریم که $f_a^2(\{0\}) = f_a(\{0\})$. لذا $f_a^2 = f_a$. □

گزاره ۹۷.۳. *اگر a یک عنصر متمم دار در قاب L باشد، آن‌گاه برای هر $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ و $X \in P(\mathbb{R})$، داریم.*

$$f f_a(X) = \begin{cases} a' \vee f(X) & \text{اگر } 0 \in X, \\ a \wedge f(X) & \text{اگر } 0 \notin X \end{cases}$$

برهان. با توجه به قضیه ۹۲.۳،

$$f f_a(\{0\}) = z(f f_a) = z(f) \vee z(f_a) = f(\{0\}) \vee a'.$$

حال فرض کنیم x یک عنصر ناصفر از $\mathbb{R}$ باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} ff_a(\{x\}) &= \bigvee_{0\neq y\in\mathbb{R}} f(\{y\}) \wedge f_a(\{\tfrac{x}{y}\}) \\ &= f(\{x\}) \wedge f_a(\{1\}) \\ &= f(\{x\}) \wedge a. \end{aligned}$$

برای ادامه اثبات دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $X \in P(\mathbb{R})$ و $0 \in X$ باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} ff_a(X) &= ff_a(\{0\}) \vee ff_a(X \setminus \{0\}) \\ &= (f(\{0\} \vee a') \vee \bigvee_{x\in X\setminus\{0\}} ff_a(\{x\}) \\ &= (f(\{0\} \vee a') \vee \bigvee_{x\in X\setminus\{0\}} f(\{x\}) \wedge a \\ &= (f(\{0\} \vee a') \vee (a \wedge \bigvee_{x\in X\setminus\{0\}} f(\{x\})) \\ &= (f(\{0\} \vee a') \vee (a \wedge f(X \setminus \{0\})) \\ &= (f(\{0\} \vee a' \vee a) \wedge (f(\{0\} \vee a' \vee f(X \setminus \{0\})) \\ &= \top \wedge (a' \vee f(X)) \\ &= a' \vee f(X) \end{aligned}$$

حالت دوم: فرض کنیم $X \in P(\mathbb{R})$ و $0 \notin X$. لذا

$$\begin{aligned} ff_a(X) &= \bigvee_{x\in X} ff_a(\{x\}) \\ &= \bigvee_{x\in X} f(\{x\}) \wedge a \\ &= a \wedge \bigvee_{x\in X} f(\{x\}) \\ &= a \wedge f(X). \end{aligned}$$

پس برای هر $X \subseteq \mathbb{R}$

$$ff_a(X) = \begin{cases} a' \vee f(X) & \text{اگر } 0 \in X \\ a \wedge f(X) & \text{اگر } 0 \notin X \end{cases}$$

□

برای عنصر a از قاب L قرار می‌دهیم

$$\Re_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a) := \{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L \ : \ coz(f) \leq a\}.$$

واضح است که $\Re_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a)$ یک ایده‌آل از $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ می‌باشد.

گزاره ۳.۹۸. *اگر a یک عنصر متمم دار از قاب L باشد، آن‌گاه $\Re_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a)$ یک ایده‌آل اصلی تولید شده توسط f_a می‌باشد.*

برهان. اگر $0 \neq f \in \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$، آن‌گاه $coz(f) \leq a$ و $z(f) \geq a'$. فرض کنیم $X \in P(\mathbb{R})$ و $0 \in X$. لذا $a' \leq f(\{0\}) \leq f(X)$، با توجه به گزاره ۹۷.۳، داریم

$$f(X) = a' \vee f(X) = f f_a(X).$$

حال فرض می‌کنیم که $X \in P(\mathbb{R})$ و $0 \notin X$. چون

$$f(X) \subseteq f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = coz(f) \leq a,$$

با توجه به گزاره ۹۷.۳، نتیجه می‌گیریم که $f(X) = f(X) \wedge a = f f_a(X)$. بنابراین $\Re_{\mathcal{F_P}}(a) \subseteq < f_a >$. و چون $coz(f_a) = a$، $< f_a > \subseteq \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$. □

ملاحظه ۹۹.۳. با توجه به مطالب گفته شده نتایج زیر را داریم:

۱. $\Re_{\mathcal{F_P}}(\top) = \mathcal{F_P}L$ و $\Re_{\mathcal{F_P}}(\perp) = (0)$.

۲. برای هر جفت عنصر متمم دار از قاب L $a, b \in L$، داریم $f_a f_b = f_{a \wedge b}$.

۳. $f_a + f_{a'} = 1$.

لم ۱۰۰.۳. *اگر a یک اتم از قاب L باشد و $0 \neq g \in \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$، آن‌گاه $h : P(\mathbb{R}) \to L$ با ضابطه‌ی*

$$h(X) = \begin{cases} a' \vee \bigvee_{0 \neq x \in X} g(\{\frac{1}{x}\}) & \text{اگر } 0 \in X \\ a \wedge \bigvee_{x \in X} g(\{\frac{1}{x}\}) & \text{اگر } 0 \notin X \end{cases}$$

یک تابع حقیقی مقدار روی قاب L است.

برهان. فرض کنیم $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda \ : \ 0 \in X_\lambda\}$$

و

$$\Lambda_1 := \{\lambda \in \Lambda \ : \ 0 \notin X_\lambda\}$$

لذا

$$\begin{aligned}
\bigvee_{\lambda \in \Lambda} h(X_\lambda) &= \bigvee_{\lambda \in \Lambda_0} h(X_\lambda) \vee \bigvee_{\lambda \in \Lambda_1} h(X_\lambda) \\
&= \bigvee_{\lambda \in \Lambda_0} (a' \vee \bigvee_{0 \neq x \in X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \vee \bigvee_{\lambda \in \Lambda_1} (a \wedge \bigvee_{x \in X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \\
&= (a' \vee \bigvee_{\lambda \in \Lambda_0} \bigvee_{0 \neq x \in X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \vee (a \wedge \bigvee_{\lambda \in \Lambda_1} \bigvee_{x \in X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \\
&= (a' \vee \bigvee_{0 \neq x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \vee (a \wedge \bigvee_{x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \\
&= (a' \vee \bigvee_{0 \neq x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\}) \vee a) \wedge (a' \vee \bigvee_{0 \neq x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \\
&= h(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)
\end{aligned}$$

فرض کنیم که $A, B \in P(\mathbb{R})$. اگر $0 \notin A$ و $0 \notin B$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} h(A) \wedge h(B) &= (a \wedge \bigvee_{x\in A} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \wedge (a \wedge \bigvee_{y\in B} g(\{\tfrac{1}{y}\})) \\ &= a \wedge \bigvee_{x\in A, y\in B}(g(\{\tfrac{1}{x}\}) \wedge g(\{\tfrac{1}{y}\})) \\ &= a \wedge \bigvee_{x\in A, y\in B}(g(\{\tfrac{1}{x}\} \cap \{\tfrac{1}{y}\})) \\ &= a \wedge \bigvee_{x\in A\cap B} g(\{\tfrac{1}{x}\}) \\ &= h(A \cap B) \end{aligned}$$

اگر $0 \in A$ و $0 \notin B$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} h(A) \wedge h(B) &= (a' \vee \bigvee_{0\neq x\in A} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \wedge (a \wedge \bigvee_{y\in B} g(\{\tfrac{1}{y}\})) \\ &= (a' \wedge a \wedge \bigvee_{y\in B} g(\{\tfrac{1}{y}\})) \vee (a \wedge \bigvee_{0\neq x\in A, y\in B}(g(\{\tfrac{1}{x}\} \cap \{\tfrac{1}{y}\}))) \\ &= a \wedge \bigvee_{x\in A\cap B} g(\{\tfrac{1}{x}\}) \\ &= h(A \cap B) \end{aligned}$$

اگر $0 \in A$ و $0 \in B$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} h(A) \wedge h(B) &= (a' \vee \bigvee_{0\neq x\in A} g(\{\tfrac{1}{x}\})) \wedge (a' \vee \bigvee_{0\neq y\in B} g(\{\tfrac{1}{y}\})) \\ &= a' \vee (\bigvee_{0\neq x\in A} g(\{\tfrac{1}{x}\}) \wedge \bigvee_{0\neq y\in B} g(\{\tfrac{1}{y}\})) \\ &= a' \vee \bigvee_{0\neq x\in A, 0\neq y\in B} g(\{\tfrac{1}{x}\} \cap \{\tfrac{1}{y}\}) \\ &= a' \vee \bigvee_{0\neq x\in A\cap B} g(\{\tfrac{1}{x}\}) \\ &= h(A \cap B) \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $A, B \in P(\mathbb{R})$، $h(A\cap B) = h(A)\wedge h(B)$، و چون a یک اتم از قاب L و $\bot < coz(g) \leq a$ نتیجه می‌گیریم $coz(g) = a$. هم‌چنین

$$\begin{aligned} h(\mathbb{R}) &= a' \vee (\bigvee_{0\neq x\in A} g(\{\tfrac{1}{x}\}) \\ &= a' \vee coz(g) \\ &= a' \vee a \\ &= \top \end{aligned}$$

و

$$h(\emptyset) = (a \wedge \bigvee_{x\in\emptyset} g(\{\frac{1}{x}\})) = a \wedge \bot = \bot.$$

لذا h یک تابع حقیقی مقدار روی L است. $\square$

لم ۱۰۱.۳. *فرض کنیم a یک اتم از قاب L باشد و $g \in \Re_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a) \neq 0$. اگر $h \in \Re_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a)$، آن‌گاه $hg = f_a$.*

برهان. گیریم X زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. اگر $\{۰,۱\} \subseteq X$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
hg(X) &= hg(\{۰\}) \vee hg(\{۱\}) \vee hg(X \setminus \{۰,۱\})\\
&= (h(\{۰\}) \vee g(\{۰\})) \vee (\bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}((h(\{x\}) \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}))) \vee hg(X \setminus \{۰,۱\})\\
&= (a' \vee a') \vee (\bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}(a \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}) \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}))) \vee hg(X \setminus \{۰,۱\})\\
&= a' \vee (a \wedge \bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}} g(\{\tfrac{۱}{x}\})) \vee hg(X \setminus \{۰,۱\})\\
&= a' \vee (a \wedge coz(g)) \vee hg(X \setminus \{۰,۱\})\\
&= a' \vee a \vee hg(X \setminus \{۰,۱\})\\
&= \top\\
&= f_a(X)
\end{aligned}$$

اگر $۰ \in X$ و $۱ \notin X$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
hg(X) &= hg(\{۰\}) \vee hg(X \setminus \{۰\})\\
&= (h(\{۰\}) \vee g(\{۰\})) \vee (\bigvee_{۰\neq xy\in X}((h(\{x\}) \wedge g(\{y\})))\\
&= a' \vee (\bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}(a \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}) \wedge g(\{y\})))\\
&= a' \vee (\bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}(a \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\} \cap \{y\})))\\
&= a' \vee (a \wedge \bot)\\
&= a'\\
&= f_a(X)
\end{aligned}$$

اگر $۰ \notin X$ و $۱ \in X$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
hg(X) &= hg(\{۱\}) \vee hg(X \setminus \{۱\})\\
&= (\bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}((h(\{x\}) \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}))) \vee (\bigvee_{۱\neq xy\in X}((h(\{x\}) \wedge g(\{y\})))\\
&= (\bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}((a \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}) \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}))) \vee (\bigvee_{۱\neq xy\in X}(a \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\}) \wedge g(\{y\})))\\
&= (a \wedge \bigvee_{۰\neq x\in\mathbb{R}}(g(\{\tfrac{۱}{x}\})) \vee (\bigvee_{۱\neq xy\in X}(a \wedge g(\{\tfrac{۱}{x}\} \cap \{y\}))\\
&= (a \wedge coz(g)) \vee (\bigvee_{۱\neq xy\in X}(a \wedge \bot)\\
&= a\\
&= f_a(X)
\end{aligned}$$

اگر $X \not\ni$ ۰ و $X \not\ni$ ۱، آن‌گاه

$$\begin{aligned} hg(X) &= \bigvee_{xy\in X}((h(\{x\}) \wedge g(\{y\})) \\ &= \bigvee_{xy\in X}(a \wedge g(\{\tfrac{1}{x}\}) \wedge g(\{y\})) \\ &= (\bigvee_{xy\in X}(a \wedge g(\{\tfrac{1}{x}\} \cap \{y\})) \\ &= \bigvee_{xy\in X}(a \wedge \bot) \\ &= \bot \\ &= f_a(X) \end{aligned}$$

بنابراین $hg = f_a$. □

گزاره ۱۰۲.۳. *اگر a یک اتم از قاب L باشد، آن‌گاه $\Re_{\mathcal{F_P}}(a)$ یک ایده‌آل می‌نیمال از $\mathcal{F_P}L$ است.*

برهان. با توجه به لم‌های ۱۰۰.۳ و ۱۰۱.۳، $\Re_{\mathcal{F_P}}(a)$ یک میدان با عنصر همانی ضربی f_a است. بنابراین با توجه به لم‌های ۹۶.۳ و ۹۸.۳، $\Re_{\mathcal{F_P}}(a)$ یک ایده‌آل می‌نیمال از $\mathcal{F_P}L$ است. □

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یک دار باشد و $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R باشد. به ازای هر $a \in R$، قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{M}(a) = \{M \in \mathcal{M} : a \in M\}.$$

ایده‌آل I از R یک *zــایده‌آل* (به مفهوم لاماسون[۱۸]) نامیده می‌شود، اگر $\mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(b)$ و $a \in I$، آن‌گاه $b \in I$. چون به ازای هر $a, b \in R$،

$$\mathcal{M}(a) \subseteq \mathcal{M}(b) \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{M}(ab) = \mathcal{M}(b)$$

پس I یک zــایده‌آل است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}(a) \subseteq \mathcal{M}(b)$ و $a \in I$ نتیجه دهد $b \in I$.

یکی از مهمترین مطالب در این مورد این است که ایده‌آل‌های می‌نیمال حلقه‌ی R، zــایده‌آل هستند. جهت اطّلاع بیشتر به مرجع [۴۸]، مراجعه شود.

لم ۱۰۳.۳. *اگر I یک ایده‌آل می‌نیمال از $\mathcal{F_P}L$ باشد، آن‌گاه عنصر متمم دار a از قاب L به قسمی وجود دارد که*

$$I = \Re_{\mathcal{F_P}}(a).$$

برهان. چون $\mathcal{F_P}L$ یک حلقه کاهشی است، هر ایده‌آل می‌نیمال از $\mathcal{F_P}L$ توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود. بنابراین عنصر خود توان $e \in I$ به قسمی وجود دارد که $I = e\mathcal{F_P}L$. قرار می‌دهیم $a = coz(e)$. چون I یک zــایده‌آل است و $z(f_a) = a' = z(e)$، نتیجه می‌گیریم که $f_a \in I$. و با توجه به گزاره ۹۸.۳، داریم $\Re_{\mathcal{F_P}}(a) \subseteq I$ و با توجه به می‌نیمالیتی بودن I نتیجه می‌گیریم که $I = \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$. □

[۱۸] á la Mason

تعریف ۱۰۴.۳. قاب L را $\mathcal{F_P}$ ـ کاملاًمنظّم نامیم در صورتی که به ازای هر $a \in L$، خانواده $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F_P}$ به قسمی وجود داشته باشد که $a = \bigvee_{f \in \mathcal{A}} coz(f)$.

اگر L یک قاب $\mathcal{F_P}$ ـ کاملاًمنظّم باشد، آن‌گاه $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F_P}$ به قسمی وجود دارد که

$$a = \bigvee_{f \in \mathcal{A}} coz(f) = \bigvee_{f \in \mathcal{A}} coz(f \circ j).$$

و این نشان می‌دهد که قاب L کاملاً منظّم است.

گزاره ۱۰۵.۳. *فرض کنیم L یک قاب $\mathcal{F_P}$ ـ کاملاًمنظّم باشد. در این صورت برای ایده‌آل I از $\mathcal{F_P}L$ گزاره‌های زیر معادلند.*

۱. *ایده‌آل I، ایده‌آل می‌نیمال از $\mathcal{F_P}L$ است؛*

۲. *برای اتم a از قاب L، داریم $I = \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$.*

برهان. ۲ $\Rightarrow$ ۱ : با توجه به لم ۱۰۳.۳، عنصر a از L به قسمی وجود دارد که $I = \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$. فرض کنیم عنصر $s \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $\bot < s \leq a$. چون L یک قاب $\mathcal{F_P}$ ـ کاملاًمنظّم است، نتیجه می‌گیریم $g \in \mathcal{F_P}L$ به قسمی وجود دارد که $\bot < coz(g) \leq s \leq a$. و این نشان می‌دهد که $I \ni g \neq 0$ و در نتیجه چون I یک ایده‌آل از $\mathcal{F_P}L$ است، نتیجه می‌گیریم $I =< g >$. بنابراین $h \in \mathcal{F_P}L$ به قسمی وجود دارد که $f_a = hg$. از این رو $a = coz(f_a) \leq coz(g)$. لذا $coz(g) = s = a$، پس a یک اتم است و $I = \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$.

۱ $\Rightarrow$ ۲ : با توجه به گزاره ۱۰۲.۳، برهان بدیهی است. □

۴.۳ خاصیّت (A) روی f ـ حلقه $\mathcal{F_P}L$

آذر پناه[۱۹] و همکاران در مرجع [۲]، نشان می‌دهند $C(X)$ دارای خاصیّت (A) می‌باشد. ما دراین بخش، اولاً نشان می‌دهیم $\mathcal{F_P}L$ دارای خاصیّت (A) است و ثانیاً اگر قاب L دارای تعداد متناهی اتم باشد، آن‌گاه حلقه کسرهای $\mathcal{F_P}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L)$ دارای خاصیّت (A) می‌باشد.

گزاره ۱۰۶.۳. *f ـ حلقه $\mathcal{F_P}L$ دارای خاصیّت (A) است.*

برهان. فرض کنیم

$$I = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathcal{F_P}L \subseteq Z(\mathcal{F_P}L).$$

[۱۹] Azarpnah

چون $f = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \in I$، نتیجه می‌گیریم $0 < g \in \mathcal{F_P}L$ به قسمی وجود دارد که $fg = 0$. بنابراین $coz(fg) = \perp$. اگر $h = \sum_{i=1}^{n} f_ih_i \in I$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} coz(hg) &= coz(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_ih_ig) \\ &\leq \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} coz(|f_i||h_i|g) \\ &\leq \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} coz(f_i^2 g) \\ &= coz(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2 g) \\ &= coz(fg) \\ &= \perp \end{aligned}$$

بنابراین $hg = 0$، نتیجه می‌گیریم که، $g \in Ann(I)$. لذا $\mathcal{F_P}L$ دارای خاصیّت (A) است. □

لم ۱۰۷.۳. *اگر* $a_1, \ldots, a_n$ *اتم‌های دو به دو مجزا از قاب* L *باشند، آن‌گاه برای هر* $f \in \mathcal{F_P}L$ و $X \in P(\mathbb{R})$،

$$\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i}(X) = \begin{cases} (\bigwedge_{i=1}^{n} a_i') \vee f(X) & \text{اگر } 0 \in X, \\ (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(X) & \text{اگر } 0 \notin X \end{cases}$$

برهان. برهان را به استقراء روی تعداد عناصر متمم دار دنبال می‌کنیم. با توجه به گزاره ۹۷.۳، برای $n = 1$ حکم برقرار است. فرض کنیم $n > 1$ و قرار می‌دهیم $g = \sum_{i=1}^{n-1} ff_{a_i}$. در این صورت

$$\begin{aligned} g(\{0\}) \wedge ff_{a_n}(\{0\}) &= [(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i') \vee f(\{0\})] \wedge [a_n' \vee f(\{0\})] \\ &= (\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i') \vee f(\{0\}), \end{aligned}$$

و برای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} g(\{x\}) \wedge ff_{a_n}(\{0\}) &= [(\textstyle\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge f(\{x\})] \wedge [a_n' \vee f(\{0\})] \\ &= [(\textstyle\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge f(\{x\}) \wedge a_n'] \vee [(\textstyle\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge f(\{x\}) \wedge f(\{0\})] \\ &= (\textstyle\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge f(\{x\}) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g(\{0\}) \wedge ff_{a_n}(\{x\}) &= [(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i') \vee f(\{0\})] \wedge [a_n \wedge f(\{x\})] \\ &= [(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i') \wedge a_n \wedge f(\{x\})] \vee [f(\{0\}) \wedge a_n \wedge f(\{x\})] \\ &= a_n \wedge f(\{x\}) \end{aligned}$$

حال اگر $x, y \in \mathbb{R}$ و $x \neq 0 \neq y$، آن‌گاه

$$g(\{x\}) \wedge ff_{a_n}(\{y\}) = [(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge f(\{x\})] \wedge [a_n \wedge f(\{y\})] = \perp.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(g + ff_{a_n})(\{0\}) &= \bigvee_{x\in\mathbb{R}} g(\{x\}) \wedge ff_{a_n}(\{-x\}) \\ &= g(\{0\}) \wedge ff_{a_n}(\{0\}) \\ &= (\bigwedge_{i=1}^{n} a_i') \vee f(\{0\})\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(g + ff_{a_n})(\{x\}) &= \bigvee_{y\in\mathbb{R}} g(\{y\}) \wedge ff_{a_n}(\{x-y\}) \\ &= [g(\{0\}) \wedge ff_{a_n}(\{x\})] \vee [g(\{x\}) \wedge ff_{a_n}(\{0\})] \\ &= [a_n \wedge f(\{x\})] \vee [(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i) \wedge f(\{x\})] \\ &= (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(\{x\}).\end{aligned}$$

لذا اگر $0 \in X \subseteq \mathbb{R}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i})(X) &= (g + ff_{a_n})(\{0\}) \vee \bigvee_{0\neq x\in X}(g + ff_{a_n})(\{x\}) \\ &= [(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i') \vee f(\{0\})] \vee \bigvee_{0\neq x\in X}[(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(\{x\})] \\ &= [(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i') \vee f(\{0\})] \vee [(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge \bigvee_{0\neq x\in X} f(\{x\})] \\ &= (\bigwedge_{i=1}^{n} a_i') \vee f(X)\end{aligned}$$

و اگر $0 \notin X \subseteq \mathbb{R}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} ff_{a_i})(X) &= \bigvee_{x\in X}(g + ff_{a_n})(\{x\}) \\ &= \bigvee_{x\in X}[(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(\{x\})] \\ &= (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(X)\end{aligned}$$

و این استقراء را کامل می‌کند. □

نتیجه ۱۰۸.۳. *اگر $a_1, \ldots, a_n$ اتم‌های دو به دو مجزا از قاب L باشند، آن‌گاه برای هر $X \in P(\mathbb{R})$،*

$$\sum_{i=1}^{n} f_{a_i}(X) = f_b(X)،$$

که در اینجا $b = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$ می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $b = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$. بنابراین

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} f_{a_i})(X) &= \begin{cases} 1(X) \vee b' & \text{اگر } 0 \in X \\ 1(X) \wedge b & \text{اگر } 0 \notin X, \end{cases} \\ &= f_b(X)\end{aligned}$$

□

گزاره ۱۰۹.۳. *اگر L یک قاب $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ ــ کاملاًمنظّم باشد، آن‌گاه ساکل $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ شامل آن f هایی می‌باشد که $coz(f)$ آن‌ها اتصالی از تعداد متناهی اتم باشد.*

برهان. اگر $\mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L) = 0$، آن‌گاه چیزی برای اثبات وجود ندارد. حال فرض کنیم ساکل مخالف با صفر باشد. اگر $f \in \mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L)$، آن‌گاه اتم‌های $a_1, \ldots, a_k \in L$ و $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ به قسمی وجود دارند که

$$f = f_1 f_{a_1} + f_2 f_{a_2} + \cdots + f_k f_{a_k}.$$

با توجه به گزاره ۹۸.۳ و ۱۰۵.۳، نتیجه می‌گیریم که $coz(f) \leq \bigvee_{i=1}^{k} a_i$. بنابراین

$$coz(f) = \bigvee_{i=1}^{k} a_i \wedge coz(f).$$

چون a_i ها اتم می‌باشند، پس $a_i \wedge coz(f) = 0$ یا $a_i \wedge coz(f) = a_i$، و این نشان می‌دهد $coz(f)$ اتصال تعداد متناهی اتم می‌باشد.

برعکس: فرض کنیم برای اتم‌های $a_1, a_2, \ldots, a_k$ داشته باشیم $coz(f) = \bigvee_{i=1}^{k} a_i$، با توجه به گزاره ۹۸.۳ و ۱۰۵.۳، $R_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a_i)$ یک ایده‌آل می‌نیمال تولید شده توسط f_{a_i} می‌باشد. اگر $0 \notin X \subseteq \mathbb{R}$، آن‌گاه چون $f(X) \leq coz(f)$، با توجه به لم ۱۰۷.۳،

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f f_{a_i})(X) &= (\textstyle\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge f(X)\\ &= f(X)\end{aligned}$$

اگر $0 \in X \subseteq \mathbb{R}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f f_{a_i})(X) &= ((\textstyle\sum_{i=1}^{n} f f_{a_i})(\mathbb{R} \setminus X))\\ &= (f(\mathbb{R} \setminus X))\\ &= f(X)\end{aligned}$$

بنابراین

$$f = \sum_{i=1}^{n} f f_{a_i} \in \sum_{i=1}^{n} \Re_{\mathcal{F}_{\mathcal{P}}}(a_i) \subseteq \mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L).$$

□

یک عضو f از $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ را کران دار می‌گوییم، هر گاه $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود داشته باشد که $|f| \leq \mathbf{n}$. مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار کراندار قاب L را با $\mathcal{F}^{*}_{\mathcal{P}}L$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۱۰.۳. *برای $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$، گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. $f \in \mathcal{F}^{*}_{\mathcal{P}}L$؛

۲. عناصر $p, q \in \mathbb{Q}$ به قسمی وجود دارند $p < q$ و $f(\rrbracket p, q \llbracket) = \top$.

۳. عناصر $p, q \in \mathbb{Q}$ به قسمی وجود دارند $p < q$ و $f((-\infty, p[\![\cup]\!]q, +\infty)) = \bot$.

برهان. برهان بدیهی است. □

گزاره ۱۱۱.۳. *اگر L یک قاب $\mathcal{F_P}$ـ کاملاًمنظّم باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل می‌نیمال $\mathcal{F_P}L$ مشمول در توابع کراندار است.*

برهان. اگر I یک ایده‌آل می‌نیمال $\mathcal{F_P}L$ باشد و $f \in I$، آن‌گاه با توجه به گزاره ۱۰۵.۳، اتم a از قاب L به قسمی وجود دارد که $I = \Re_{\mathcal{F_P}}(a)$.
چون $f = ff_a$، با توجه به گزاره ۹۷.۳، برای تمام $n \in \mathbb{N}$، $f(]\!] -n, n[\![) = a' \vee f(]\!] -n, n[\![)$. با توجه به ماکسیمالیتی a' مطمئن می‌شویم

$$a' = f(]\!] -n, n[\![)$$

یا

$$f(]\!] -n, n[\![) = \top.$$

اگر برای تمام $n \in \mathbb{N}$، $a' = f(]\!] -n, n[\![)$، آن‌گاه

$$\top = f(\mathbb{R}) = \bigvee f(]\!] -n, n[\![) = a'.$$

که یک تناقض است. بنابراین $n \in \mathbb{N}$ به قسمی وجود دارد که $f(]\!] -n, n[\![) = \top$. لذا با توجه به گزاره ۱۱۰.۳، $f \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{P}}L$. □

نتیجه ۱۱۲.۳. *اگر L یک قاب $\mathcal{F_P}$ـ کاملاًمنظّم باشد، آن‌گاه*

$$\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L) = \mathrm{Soc}(\mathcal{F}^*_{\mathcal{P}}L).$$

برهان. چون $\mathcal{F_P}$ یک fـ حلقه کاهشی با عناصر کراندار معکوس پذیر است. آن‌گاه با توجه به [۱۲، گزاره ۳.۲] و گزاره ۱۱۱.۳،

$$\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L) = \mathrm{Soc}(\mathcal{F}^*_{\mathcal{P}}L).$$

□

گزاره ۱۱۳.۳. *فرض کنیم L یک قاب $\mathcal{F_P}$ـ کاملاًمنظّم باشد. اگر L دارای تعداد متناهی اتم باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرارند.*

۱. *حلقه‌ی کسرهای $\mathcal{F_P}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L)$ دارای خاصیّت (A) می‌باشد.*

۲. *حلقه‌ی کسرهای $\mathcal{F}^*_{\mathcal{P}}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L)$ دارای خاصیّت (A) راست می‌باشد.*

برهان. ۱) اگر $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعه تمام اتم‌های قاب L باشند، آن‌گاه با توجه به گزاره ۹۸.۳ و گزاره ۱۰۵.۳،

$$\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L) = \sum_{i=1}^{n} \Re_{\mathcal{F_P}}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} f_{a_i}\mathcal{F_P}L.$$

به ازای هر $f \in \mathcal{F_P}L$، قرار می‌دهیم

$$\bar{f} = f + \mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L).$$

فرض کنیم $I = \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle$ ایده‌آلی با تولید متناهی و مشمول در مقسوم علیه‌های صفر $\mathcal{F_P}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F_P}L)$ باشد. در نظر می‌گیریم $f = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$. چون

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} \bar{f_i}^2 \in I.$$

نتیجه می‌گیریم $0 \leq g \in \mathcal{F_P}L$ به قسمی وجود دارد که $\bar{f}\bar{g} = 0$ و $\bar{g} \neq 0$. پس برای

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \in A$$

داریم

$$coz(fg) = \bigvee_{j=1}^{r} a_{i_j}.$$

در نظر می‌گیریم $b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i'$. مدعی می‌شویم که عنصر ناصفر $\bar{f_b}\bar{g}$ پوچ ساز I است. به عبارتی $\bar{f_b}\bar{g} \in Ann(I)$. اگر $coz(f_b g) \leq \bigvee_{i=1}^{n} a_i$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} coz(f_b g) &= coz(f_b g) \wedge \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} a_i \\ &= b \wedge coz(g) \wedge \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} a_i \\ &= \bot \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$coz(g) \leq z(f_b) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i.$$

بنابراین $g \in Soc(\mathcal{F_P}L)$. که یک تناقض است. لذا $\bar{f_b}\bar{g} \neq 0$.

اگر $h = \sum_{i=1}^{n} f_i h_i$، آنگاه

$$\begin{aligned} coz(hf_b g) &= coz(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i h_i f_b g) \\ &\leq \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} coz(|f_i||h_i|f_b g) \\ &\leq \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} coz(f_i^2 f_b g) \\ &= coz(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2 f_b g) \\ &= coz(fgf_b) \\ &\leq \textstyle\bigvee_{j=1}^{r} a_{i_j} \wedge \textstyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i' \\ &= \bot \end{aligned}$$

بنابراین $\bar{h}\bar{f}_b\bar{g} = \circ$. که نتیجه می‌دهد $\bar{f}_b\bar{g} \in Ann(I)$. لذا $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L)$ دارای خاصیّت (A) می‌باشد.

۲ : با توجه به بحث انجام گرفته در قسمت (۱)، اثبات بدیهی است. □

مراجع

[1] Alhevaz A. and Kiani D. (2014), “McCoy property of skew Laurent polynomials and power series rings” **J. Algebra Appl.**, 13, no. 2, (23 pages).

[2] Azarpanah F., Karamzadeh O.A.S. and Rezai Aliabad A. (2000), “On ideals consisting entirely of zero divisors” **Comm. Algebra,** 28, 1061- 1073.

[3] Azarpanah F, Karamzadeh O.A.S. and Rahmati S. (2008), “C(X) vs C(X) modulo its Socle” **Colloq. Math.,** 111, 315-336.

[4] Ball R.N. and Walters-Wayland J. (2000), “C- and $C^\star$-quotients in pointfree topology” **Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.),** Vol.412, 62pp.

[5] Banaschewski B. (1997), “The real numbers in pointfree topology” **Textos de Mathemática (Series B),** Vol. 12, Departamento de Mathemática da Universidade de Coimbra, Coimbra.

[6] Banaschewski B. and Gilmour C. (2001), “Cozero bases of frames” **J. Pure Appl. Algebra,** 157, 1-22.

[7] Bell H.E. (1970), “Near-rings in which each element is a power of itself” **Bull. Austral. Math. Soc.,** 2, 363-368.

[8] Birkenmeier G.F. and Park J.D. (2003), “Triangular matrix representations of ring extensions” **J. Algebra,** 265, 457-477.

[9] Camillo V. and Nielsen P.P. (2008), “McCoy rings and zero-divisors” **J. Pure Appl. Algebra,** 212, 599-615.

[10] Cedo F. (1991), “Zip rings and Malcev domains” **Comm. Algebra,** 19, 1983-1991.

[11] Cohn P.M. (1999), “Reversiblerings” **Bull. London Math. Soc.,** 31, 641-648.

[12] Dube T. (2012), “A note on the socle of certain type of f-rings” **Bulletin of the Iranian Mathematical Society,** Vol. 38 No. 2, 517-528.

[13] Dube T. (2010), "Contrcting the socle in rings of continuous functions" **Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,** Vol. 123, 37-53.

[14] Estaji A.A. and Karamzadeh O.A.S. (2003), "On C(X) modulo its socle" **Comm. Algebra,** 31 no. 4, 1561-1571.

[15] Estaji A. As, Hashemi E. and Estaji A. A. (2017), "On Property (A) and socle of the f-ring $Frm(\mathcal{P}(\mathbb{R}), L)$" **Categories and General Algebraic Structures with Applications, In Press.**

[16] Faith C. (1989), "Rings with zero intersection property on annihilators: zip rings" **Publ. Mat.,** 33, 329-332.

[17] Faith C. (1991), "Annihilator ideals, associated primes and Kasch-McCoy commutative rings" **Comm. Algebra,** 19, 1967-1982.

[18] Faith C. (1976), "**Algebra II ring theory**" Springer-Verlag, Berlin.

[19] Feller E.H. (1958), "Properties of primary noncommutative rings" **Trans. Amer. Math. Soc.,** 89, 79-91.

[20] Ferreira M.J., Gutiérrez García J. and Picado J. (2009), "Completely normal frames and real-valued functions" **Topology and its Applications,** 156, 2932-2941.

[21] Gutiérrez García J, Kubiak T. and Picado J. (2009), "Localic real functions: A general setting" **J. Pure Appl. Algebra,** 213, 1064-1074.

[22] Gutiérrez García J. and Picado, J. (2011), "Rings of real functions in pointfree topology" **Topology and its Applications,** 158, 2264-2287.

[23] Habeb J.M. (1990), "A note on zero commutative and duo rings" **Math. J. Okayama Univ.,** 32, 73-76.

[24] Habibi M., Moussavi A. and Alhevaz A. (2013), "The McCoy condition on Ore extensions" **Comm. Algebra,** 41, 124-141.

[25] Hashemi E. (2010), "Extensions of zip rings" **Studia Sci. Math. Hung.,** 47, 522-528.

[26] Hashemi E. (2010), "McCoy rings relative to a monoid" **Comm. Algebra,** 38, 1075-1083.

[27] Hashemi E, Estaji A. As. and Alhevaz A. (2017), "On Ore extension and skew power series rings with some restrictions on zero-divisors" **Journal of Algebra and Its Applications,** Vol. 16, No. 5, 1750164-1-1750164-12.

[28] Hashemi E, Estaji A. As. and Ziembowski M. (2017), “Answers to some questions concerning rings with Property (A)” **Proc. Edinb. Math. Soc.,** (2) 60, no. 3, 651–664.

[29] Hashemi E. and Moussavi A. (2005), “Polynomial extensions of quasi- Baer rings” **Acta. Math. Hung.,** 107(3), 207-224.

[30] Henriksen M. and Jerison M. (1965), “The space of minimal prime ideals of a commutative ring” **Trans. Amer. Math. Soc.,** 115, 110-130.

[31] Hinkle G. Huckaba J.A. (1977), “The generalized Kronecker function ring and the ring R(X)” **J. Reine Angew. Math.,** 292, 25-36.

[32] Hirano Y. (2002), “On annihilator ideal of polynomial ring over a noncommutative ring” **J. Pure Appl. Algebra,** 168, 45-52.

[33] Hong C.Y., Kim K., Lee Y., and Ryu S.J. (2007), “Ring with property (A) and their estensions” **J. Algebra,** 315, 612-628.

[34] Hong C.Y., Kim N.Y., Kwak T.K. and Lee Y. (2005), “Extensions of zip rings” **J. Pure Appl. Algebra,** 195, 231-242.

[35] Huckaba J.A. (1988), “Commutative Ring with Zero -Divrsors” **Marcel Dekker Inc, New York**.

[36] Huckaba J.A. and Keller J.M. (1979), “Annihilation of ideals in commutative rings” **Pacific J. Math.,** 83, 375-379.

[37] Hwang S.U., Kim N.K. and Lee Y. (2009), “On rings whose right annihilator are bounded” **Glasg. Math. J.,** 51, 539-559.

[38] Johnstone P.T. (1982), “**Stone Space**” Cambridge Univ. Press.

[39] Kaplansky I. (1974), “**Commutative rings**” rev. ed. Chicago: Univ. of Chicago Press.

[40] Karimi Feizabadi A., Estaji A.A. and Zarghani M. (2016), “The ring of real-valued functions on a frame” **Categories and General Algebraic Structures with Applications,** Volume 5, Number 1, 85-102.

[41] Karamzadeh O.A.S. and Rostami M. (1985), “On the intrinsic lopology and some related ideals of C(X)” **Proc. Amer. Math. Soc.,** 93, 179-184.

[42] Lam T.Y. (2001), "**A First Course in Non-commutative Ring** " Second edition, Graduate Texts in Math. 131, Springer-Verlag, New York.

[43] Lambek J. (1976), "**Lecture Notes on Rings and Modules**" Chelsea Publishing Co., New York.

[44] Lucas T.G. (1986), "Tow annihilator conditions: Property (A) and (a.c)" **Comm. Algebra,** 14, 557-580.

[45] Marks G (2002), "Rrversible and symmetric rings" **J. Pure Algebra,** 174, 311-318.

[46] Marks G., Mazurek R. and Ziembowski M. (2009), "A new class of unique product monoids with applications to ring theory **Semigroup Forum,** 78, 210-225.

[47] Mazurek R. and Ziembowski M. (2015), "On right McCoy rings snd right McCoy rings relative to u.p- monoids" **Commun. Contemp. Math.,** 17, 1550049 (10 pages).

[48] Mason G. (1973), "z-ideals and prime z-ideals" **J. algebra,** 2, 280-297.

[49] Picado J. and Pultr A. (2012), "**Frames and Locales: Topology without points**" Frontiers in Mathematics, Springer Basel.

[50] McCoy N.H. (1942), "Remarks on divisors of zero" **Amer. Math. Monthly,** 46, 286-295.

[51] McCoy N.H. (1957), "Annihilators in polynomial rings" **Amer. Math. Monthly,** 64, 28-29.

[52] Nielsen P.P. (2006), "Semi-commutativity and the McCoy condition" **J. Algebra,** 298, 134-141.

[53] Oknski J. (1991), "**Semigroup Algebra**" Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics Vol. 138 Dekker, New York.

[54] Passman D.S. (1977), "**The Algebraic structure of group rings** " Wiley, New York.

[55] Quentel Y. (1971), "Sur la compacite du spectre minimal d'un anneau" **Bull. Soc. Math. France,** 99, 265-272.

[56] Tuganbaev A.A. (1998), "Semidistributive Modules and Rings" **Math. Appl.,** Vol. 449. Kluwer Academic Publishers.

[57] Zelmanowitz J.M. (1976), "The finite intersection property on annihilator right ideals " **Proc. Amer. Math. Soc.,** 57, 213-216.

[58] Zarghani M. and Karimi Feizabadi A. (2016), “Zero elements in lattice theory” **Extended Abstracts of the ۲۵th Iranian Algebra Seminar** July 20-21, 2016 Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran, 393-396.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتم	Atom
ایده‌آل اول	Prime ideal
ایده‌آل اول مینیمال	Minimal prime ideal
ایده‌آل پوچ ساز	Annihilator ideal
ایده‌آل چپ	Left ideal
ایده‌آل راست	Right ideal
ایده‌آل کاملاً اول	Completely prime ideal
ایده‌آل ماکسیمال	Maximal ideal
برگشت پذیر	Reversible
بروریختی قابی	Frame epimorphism
بخش همصفر	Cozero part
پوچ ساز	Annihilator
پوچ ساز چپ	Left annihilator
پوچ ساز راست	Right annihilator
تابع حافظ ترتیب	Order-preserving map
تابع چندجمله ای	Polynomial function
تابع مشتق	Derivation function
تابع αـ مشتق	α-derivation function
تکریختی	Monomorphism
$u.p$ـ تکوار	Unique product monoid
توپولوژی	Topology
توپولوژی بدون نقطه	Pointfree topology
Kـ حلقه‌ی آزاد	Free K-ring
حلقه‌ی آرمنداریز	Armendariz ring
حلقه‌ی برگشت پذیر	Reversible ring
حلقه‌ی تقلیل یافته	Reduced ring

حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب .... Skew polynomial ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران .... Laurent polynomial ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق .... Differential polynomial ring
حلقه‌ی دوئو .... Duo ring
حلقه‌ی زیپ چپ .... Left zip ring
حلقه‌ی زیپ راست .... Right zip ring
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب .... Skew power series ring
حلقه‌ی فون نیومن منظّم .... Von Neumann ragular ring
حلقه‌ی گروهی .... Group ring
حلقه‌ی مک‌کوی چپ .... Left McCoy ring
حلقه‌ی مک‌کوی راست .... Right McCoy ring
حلقه‌ی مک‌کوی .... McCoy ring
حلقه‌ی αـ سازگار .... α- compatible ring
حلقه‌ی δـ سازگار .... δ - compatible ring
حلقه‌ی (α, δ)ـ سازگار .... (α, δ) - compatible ring
خاصیّت (A) چپ .... Left property (A)
خاصیّت (A) راست .... Right property (A)
خاصیّت (A) .... Property (A)
خودتوان .... Idempotent
دوئو چپ .... Left duo
دوئو راست .... Right duo
ساکل .... Socle
شرط زنجیر افزایشی .... Ascending chain condition
زیر قاب .... Subframe
طیف .... Spectrum
عضو منظّم .... Ragular element
عضو همصفر .... Cozero element
فضای کاملاً منظّم .... Regular completely space
قاب .... Frame
قاب اعداد حقیقی .... Frame of reals
قاب بولی .... Boolean frame
قاب منظّم .... Regular frame
قاب کاملاً منظّم .... Completely Regular frame
مجموعه‌ی همصفر .... Cozero set

مقسوم علیه صفر چپ .... Left zero divisor
مقسوم علیه صفر راست .... Right zero divisor
مقسوم علیه صفر .... Zero divisor
مشبکه .... Lattice
مشبکه شبه متمم دار .... Pseudocomplemented lattice
مشبکه‌ی کامل .... Complete lattice
همریختی مشبکه‌ای .... Lattice homomorphism
همریختی f– حلقه‌ای .... F-ring homomorphism
یکریختی .... Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Annihilator .... پوچ ساز
Annihilator ideal .... ایده‌آل پوچ ساز
Atom .... اتم
Boolean frame .... قاب بولی
α-compatible ring .... حلقه‌ی αـ سازگار
δ-compatible ring .... حلقه‌ی δـ سازگار
(α, δ)-compatible ring .... حلقه‌ی (α, δ)ـ سازگار
Completely prime ideal .... ایده‌آل کاملاً اوّل
Category .... رسته
Cozero element .... عنصر همصفر
Completely regalar frame .... قاب کاملاً منظّم
Cozero set .... مجموعه‌ی صفر
Complete lattice .... مشبکه‌ی کامل
f-ring .... fـ حلقه
f-ring homomorphism .... همریختی fـ حلقه‌ای
free K-ring .... Kـ حلقه‌ی آزاد
Frame .... قاب
Frame epimorohism .... بروریختی قابی
Frame of reals .... قاب اعداد حقیقی
Interpolation .... درونریختی
Isomorphism .... یکریختی
Lattice orered ring .... حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای
Laurent polynomial ring .... حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران
Lattice .... مشبکه
Lattice homomorphism .... همریختی مشبکه‌ای
Left annihilator .... پوچ ساز چپ

پوچ ساز راست .... Right annihilator
ایده‌آل چپ .... Left ideal
استقرای ریاضی .... Mathematical induction
ایده‌آل ماکسیمال .... Maximal ideal
حلقه‌ی مک‌کوی .... McCoy ring
حلقه‌ی نوتری .... Noetherian ring
تابع حافظ ترتیب .... Order-preserving map
توپولوژی بدون نقطه .... Pointfree topology
ایده‌آل اوّل .... Prime ideal
خاصیّت (A) چپ .... Right property (A)
خاصیّت (A) راست .... Left property (A)
خاصیّت (A) .... Property (A)
مشبکه شبه متمم دار .... Pseudocomplemented lattice
حلقه‌ی تقلیل یافته .... Reduced ring
عضو منظّم .... Regular element
قاب منظّم .... Regular frame
قاب کاملاً منظّم .... Regular completely frame
حلقه‌ی برگشت پذیر .... Reversible ring
پوچ ساز راست .... Right annihilator
دوئو راست .... Right duo
ایده‌آل راست .... Right ideal
حلقه‌ی مک‌کوی راست .... Right McCoy ring
حلقه‌ی زیپ راست .... Right zip ring
حلقه‌ی نیم جابجایی .... Semicommutative ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب .... Skew polynomial ring
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب .... Skew power series ring
طیف .... Spectrum
ساکل .... Socle
تکوار مرتب اکید .... Strictly ordered monoid
تکوار کاملاً مرتب اکید .... Strictly totally ordered monoid
z– ایده‌آل قوی .... Strongly z-ideals
زیر قاب .... Subframe
$u.p$–تکوار .... Unique product monoid
حلقه‌ی فون نیومن منظّم .... Von Neumann regular ring

مجموعه‌ی بالایی .... Upper set
به طور ضعیف فضایی .... Weakly spatial
مقسوم علیه صفر چپ .... Left zero divisor
مقسوم علیه صفر راست .... Right zero divisor
مقسوم علیه صفر .... Zero divisor
zـ ایده‌آل .... Z-ideal

نمایه

Abstract

The study of rings with right Property (A), has done important role in noncommutative ring theory. Following literature, a ring R has right Property (A) if every finitely generated tow-sided ideal consisting entirely of left zero-divisors has a non-zero right annihilator. In the first chapter, we give answers to the two questions raised in [33], and related to Property (A). One of the questions has a positive answer and we get it as a simple conclusion of the fact which says that, if R is a right duo ring and M is a $u.p$-monoid, then R is right M-McCoy and the monoid ring $R[M]$ has right Property (A). The second question has nagative answer and we show it by constructing suitable example. In second chapter, which concerns the right Property (A) of Ore extensions as well as skew power series ring. We show that if R is a right duo ring, then the skew power series ring $R[[x;\alpha]]$ has right Property (A), when R is right Noetherian and α-compatible. Moreover, for a right duo ring R which is (α, δ)- compatible, it is shown that

1. the Ore extension ring $R[x;\alpha,\delta]$ has right Property (A).
2. $R[x;\alpha,\delta]$ is right zip if and only if R is right zip.

As a corollary of our results we provide answers to some open questions raised in third chapter of [33], and related to Property (A). In third chapter, we are concerned with Property (A) of a ring $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$. First we show that each minimal ideal of $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ is a principal ideal generated by f_a, where a is an atom of frame L. Then we show that if L is a $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$-completely regular frame then the socle of $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ consists of those f for which $coz(f)$ is a join of finitely many atoms. Also it is shown that $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L$ and $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L/\mathrm{Soc}(\mathcal{F}_{\mathcal{P}}L)$ have Property (A).

keywords:right duo ring, reversible ring, right Property (A), Unique product monoid, polynomial ring, power series ring, skew polynomial ring, skew power series ring, lattice, frame, minimal ideal, socle.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Noncommutative Algebra

On extensions of rings with Property (A)

By: Ali Asghar Estaji

Supervisor

Prof. Ebrahim Hashemi

August 2017