بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بهینگی و دوگانی در مسائل برنامه ریزی چندهدفه فازی و بازه‌ای مقدار

نگارنده: اسماعیل فرامرزی

استادان راهنما

دکتر مریم قرآنی
دکتر مهرداد غزنوی

شهریور ۱۳۹۶

ما حصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به
آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است
به **پدر** و **مادرم** که نهال علم آموزی و تحقیق را در من پروراندند.
و به **همسرم** که باعث شکوفایی آن گردید.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند بي همتايي كه جزء او كسي شايسته ی پرستش نيست.
به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از اساتید فرهیخته و فرزانه جناب آقای **دکتر مهرداد غزنوی** و سرکار خانم **دکتر مریم قرآنی** که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند، اساتید ارجمندی که همواره با خلق نیکو و صبر و حوصله بی‌نظیرشان پاسخگوی تمامی سوالاتم بودند و با بزرگواری خود نقایص این حقیر را مورد اغماض قرار دادند.
از اساتید محترم جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی و جناب آقای دکتر محمد هادی نوری اسکندری که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را بر عهده گرفتند،بسیار سپاسگزارم.
برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت روز افزون از خداوند متعال مسئلت می‌نمایم.

اسماعیل فرامرزی
شهریور ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **اسماعیل فرامرزی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بهینگی و دوگانی در مسائل برنامه ریزی چندهدفه فازی و بازه‌ای مقدار** ، تحت راهنمایی **مریم قرآنی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

اسماعیل فرامرزی
شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

با توجه به این که مجموعه‌هایی وجود دارند که حالت قطعی ندارند و مبهم اند و معمولا شامل کلماتی مثل: حدودا، تقریبا ،نزدیک به و ... می‌باشند، استفاده از مفاهیم فازی برای پیشبرد اهداف تصمیم‌گیرنده امری ضروری است.همچنین فراگیری محاسبات بازه ای علیرغم این که پیچیده می‌باشند چون دقت بیشتری دارند و در مورد پایداری سیستم‌ها بحث می‌کنند اجتناب ناپذیر می‌باشد.

در این پایان نامه، مفاهیم پایه ای آنالیز فازی و روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی فازی که شامل مسائل متقارن و نامتقارن می‌باشند، معرفی می‌شوند. سپس با معرفی مسائل چندهدفه فازی، روش‌های دو مرحله‌ای برای حل این مسائل را ارائه می‌دهیم و روش برنامه‌ریزی خطی آرمانی در محیط فازی را بحث می‌کنیم. در ادامه شرایط بهینگی KKT را در مسائل چندهدفه بازه‌ای با معرفی مفاهیم جواب LU و LS و اثبات این که مفهوم LU کلی تر است، با استفاده از مفهوم مشتق تعمیم‌یافته ارائه می‌دهیم. استفاده کردن از مفهوم مشتق تعمیم‌یافته به جای مفهوم مشتق عمومی تر و جامع تر می‌باشد زیرا مسائلی وجود دارند که شامل توابع مشتق‌ناپذیر می‌باشند ولی دارای مشتق تعمیم‌یافته هستند. سپس قضایای دوگانی شامل دوگان ولف و موند وایر را در حالتی که مسائل داده شده شامل توابعی مشتق‌ناپذیرند، را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

مفاهیم فازی، مسائل متقارن و نامتقارن، برنامه‌ریزی آرمانی فازی، شرایط بهینگی KKT، مشتق تعمیم‌یافته، دوگان ولف و موند وایر

فهرست مطالب

فهرست تصاویر م

فهرست جداول س

۱ مقدمه‌ای برنظریه‌ی مجموعه‌های فازی ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ مفاهیم پایه‌ای در آنالیز فازی ۲

۳.۱ عملیات روی مجموعه‌های فازی ۳

۴.۱ اعداد فازی ۴

۱.۴.۱ اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای ۴

۲.۴.۱ عملیات ریاضی بر روی اعداد فازی ۶

۵.۱ حساب اعداد بازه‌ای ۷

۱.۵.۱ اعمال بازه‌ای معمولی ۷

۲.۵.۱ حساب بازه‌ای اعداد فازی ۸

۲ روش‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی تک هدفه ۱۱

۱.۲ مقدمه ۱۱

۲.۲ تصمیم‌گیری در شرایط فازی و برنامه‌ریزی خطی فازی ۱۲

۳.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی‌های فازی و تابع هدف قطعی ۱۴

۱.۳.۲ روش وردجیز در مدل نامتقارن ۱۵

۲.۳.۲ روش ورنرز با رویکرد مسائل متقارن ۱۷

۴.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی‌های قطعی و توابع هدف فازی . . . ۲۰

۵.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی و تابع هدف فازی ۲۳

۱.۵.۲ روش زیمرمن درحالت متقارن ۲۳

۲.۵.۲ روش چاناس با رویکرد مسائل نامتقارن ۲۵

۳ برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی ۲۹
۱.۳ معرفی . . . ۲۹
۲.۳ تعاریف اولیه . . . ۳۰
۳.۳ روش دومرحله‌ای برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی . . . ۳۱
۴.۳ روش جیمنز و بیلبائو . . . ۳۵
۵.۳ روش توسعه‌یافته وو و همکاران . . . ۳۸
۶.۳ برنامه‌ریزی خطی آرمانی در محیط فازی . . . ۴۰
۱.۶.۳ روش زیمرمن . . . ۴۱
۲.۶.۳ روش $\max - \min$ وزن دار . . . ۴۲

۴ شرایط بهینگی... ۴۷
۱.۴ معرفی . . . ۴۷
۲.۴ مقدمات . . . ۴۸
۳.۴ مشتق‌پذیری توابع بازه‌ای مقدار . . . ۴۹
۴.۴ مفاهیم جواب . . . ۵۱
۵.۴ شرایط بهینگی کروش_کان_تاکر . . . ۶۱

۵ قضایای دوگانی در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار و مشتق ناپذیر ۷۳
۱.۵ معرفی . . . ۷۳
۲.۵ مقدمات . . . ۷۴
۳.۵ شرایط لازم بهینگی . . . ۷۹
۴.۵ دوگان موند ــ وایر . . . ۸۵
۵.۵ دوگان ولف . . . ۸۹

مراجع ۹۳

فهرست تصاویر

۱.۱ مجموعه‌های فازی محدب(سمت چپ) و غیر محدب(سمت راست) ۳
۲.۱ اجتماع دو مجموعه فازی ۳
۳.۱ اشتراک دو مجموعه فازی ۴
۴.۱ عدد فازی مثلثی ۵
۵.۱ عدد فازی ذوزنقه‌ای ۶

۱.۲ نمایش گرافیکی از μ_D و x^* ۱۳
۲.۲ توابع عضویت $\mu_\circ$ و μ_c در θ^* ۲۷

۱.۴ نمودار تابع $f_{۱۱}(x)$ تحت محدودیت‌ها ۵۳
۲.۴ نمودار تابع $f_{۱۲}(x)$ تحت محدودیت‌ها ۵۳
۳.۴ نمودار تابع $f_{۱۳}(x)$ تحت محدودیت‌ها ۵۴
۴.۴ سمت چپ نمودار رفتار $f_{۱۴}$ و سمت راست نمایش رفتار $f_{۱۴}^L$ و $f_{۱۴}^U$ ۵۵
۵.۴ سمت چپ نمودار رفتار $f_{۱۵}$ و سمت راست نمایش رفتار $f_{۱۵}^L$ و $f_{۱۵}^U$ ۵۵
۶.۴ نمودار رفتار $f_{۱۶}$ تحت محدودیت‌ها ۵۷
۷.۴ سمت چپ نمایش رفتار $f_{۱۷}$ و سمت راست نمایش رفتار $f_{۱۷}^L$ و $f_{۱۷}^U$ ۵۷
۸.۴ سمت چپ رفتار توابع $f_{۱۸}^L(x)$ و $f_{۱۸}^U(x)$ و سمت راست رفتار تابع $f_{۱۸}(x)$ ۵۸
۹.۴ رفتار تابع $f_{۱۹}(x)$ تحت محدودیت‌ها ۵۸
۱۰.۴ رفتار توابع $f_{۱۹}^L(x)$ و $f_{۱۹}^U(x)$ ۵۹
۱۱.۴ نمودار $F(x)$ ۶۵

۱.۵ نمودار رفتار تابع $(IVMP_۱)$ ۷۸
۲.۵ نمودار رفتار $F_۱(x)$ ۷۹
۳.۵ نمودار رفتار $F_۲(x)$ ۷۹

فهرست جداول

۱.۴ خلاصه‌ای از نقاط LU – بهینه ۵۵
۲.۴ خلاصه‌ای از نقاط LS – بهینه ۵۹

فصل ۱

مقدمه‌ای برنظریه‌ی مجموعه‌های فازی

۱.۱ مقدمه

همه‌ی مجموعه‌ها را نمی‌توان به صورت قطعی[۱] در نظر گرفت. به عنوان مثال فرض کنید مجموعه‌ی افراد بلند قد را در نظر بگیریم. در اینجا ویژگی «بلند قد بودن» یک ویژگی مبهم است. چون با توجه به نظر افراد مختلف یک فرد می‌تواند متعلق به این مجموعه باشد یا خیر؟. پس مجموعه‌هایی وجود دارند که با توجه به شرایط مختلف می‌توان برداشت‌های مختلفی از آن‌ها داشت، مثل مجموعه افراد مسن، مجموعه اعداد کوچک، مجموعه اجناس ارزان و ... که نظریه‌ی مجموعه‌های قطعی نمی‌تواند توصیف واقعی از آنچه که در ذهن داریم و در عمل، در زبان روزمره به کار می‌بندیم را ارائه دهد.برای مثال وقتی می‌خواهیم یک فرد قد بلند را معرفی کنیم شخصی با قد ۱۸۵ سانتی متری برای بازی فوتبال قد بلند و برای بسکتبال کوتاه قد محسوب می‌شود. مجموعه‌های فازی ابزار مناسبی برای این گونه مفاهیم‌اند. مطالب این فصل از منابع ([۱]،[۳]،[۶]،[۳۴]) ارائه شده است.

[۱] Crisp

۲.۱ مفاهیم پایه‌ای در آنالیز فازی

در این بخش به معرفی برخی از مفاهیم پایه‌ای فازی که در حالت تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. اگر X مجموعه مرجعی از اعضا مانند x باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | \, x \in X\}$$

که به $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت[۲] می‌گویند که عددی متعلق به بازه‌ی $[0,1]$ است. در مجموعه‌های فازی یک عضو از مجموعه می‌تواند با درجه‌ای که همان درجه عضویت است متعلق به مجموعه باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد. ارتفاع[۳] این مجموعه ($h(\tilde{A})$) و پشتیبان[۴] این مجموعه ($S(\tilde{A})$) را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$
$$S(\tilde{A}) = \{x \in X | \, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

تذکر ۱.۲.۱. اگر ارتفاع یک مجموعه فازی یک باشد، مجموعه را نرمال می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه عناصری از $\tilde{A}$ با درجه عضویت $(0 < \alpha \leq 1)$ مجموعه $\alpha -$ برش[۵] نامیده می‌شوند و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

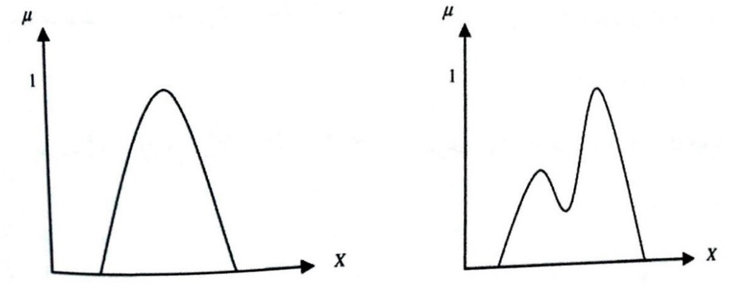
$$A_\alpha = \{x \in X | \, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر:

$$\forall \, x_1, x_2 \in X, \quad \lambda \in [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

قضیه ۱.۲.۱. مجموعه $\tilde{A}$ محدب است هرگاه همه αــ برش‌های آن محدب باشد.

---
[۲] Membership function
[۳] Height
[۴] Support
[۵] α -cut



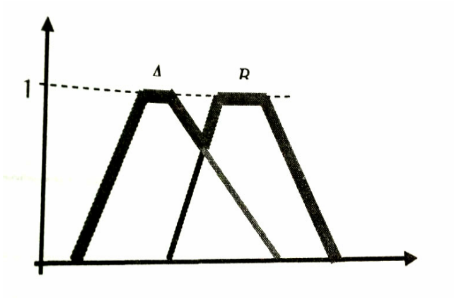
شکل ۱.۱: مجموعه‌های فازی محدب(سمت چپ) و غیر محدب(سمت راست)

۳.۱ عملیات روی مجموعه‌های فازی

فرض کنید X مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ مجموعه‌های فازی تعریف شده روی مجموعه مرجع باشند. در این صورت تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۱.۳.۱. اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی $\tilde{C}$ است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max_{x\in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$



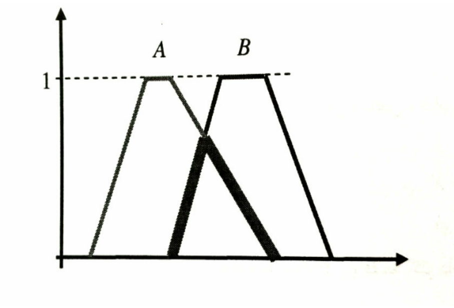
شکل ۲.۱: اجتماع دو مجموعه فازی

تعریف ۲.۳.۱. اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی $\tilde{C}$ است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min_{x\in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

تعریف ۳.۳.۱. متمم مجموعه $\tilde{A}$ مجموعه فازی است که با $\tilde{A}^c$ نمایش می‌دهیم و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X$$



شکل ۳.۱: اشتراک دو مجموعه فازی

۴.۱ اعداد فازی

بسیاری از پدیده‌های کمی با یک عدد مطلق و صریح قابل نمایش نمی‌باشند. مثلا وقتی قیمت خودرویی سوال می‌شود پاسخ می‌شنویم تقریبا ۲۰ میلیون، یا در جمله «من حدودا ساعت ۴ عصر به منزل رسیدم »زمان به‌صورت مبهم بیان شده است. در آزمایشگاه‌های مختلف اعدادی که به‌دست می‌آیند، به‌صورت تقریبی می‌باشد. در همه این موارد می‌توان از اعداد فازی استفاده کرد. معمولا به مفاهیم مبهمی که دارای اصطلاحاتی مانند تقریبا، حدودا، نزدیک‌به و ... باشد، مجموعه‌های فازی نسبت داده می‌شود که در اصل عدد فازی می‌باشند.

تعریف ۱.۴.۱. ([۲]) یک عدد فازی $\tilde{M}$، یک مجموعه محدب از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است به طوریکه:

۱. حداقل یک $x_\circ \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که به ازای آن $\mu_{\tilde{M}}(x_\circ) = ۱$

۲. $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد.

در حالت کلی $\tilde{M}$ یک عدد فازی نامیده می‌شود هرگاه نرمال و محدب باشد و $\alpha-$ برش‌های $\tilde{M}$ به ازای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ فاصله‌هایی بسته و کراندار باشند و تکیه‌گاه $\tilde{M}$ کران‌دار باشد.

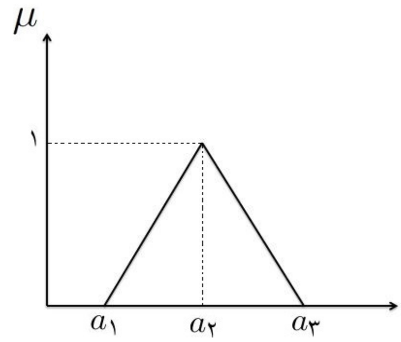
۱.۴.۱ اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای

دو حالت خاص از اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی[۶] و ذوزنقه‌ای[۷] هستند که اکثرا از این دو نوع عدد در محاسبات مربوط به برنامه‌ریزی خطی فازی و یا محاسبات تصمیم‌گیری فازی استفاده می‌شود.

[۶] Triangle
[۷] Trapeziodal

تعریف ۲.۴.۱. یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ نشان داده می‌شود که در آن $a_۱ < a_۲ < a_۳$ است و تابع عضویت آن به صورت زیر است.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq a_۱ \\ \frac{x-a_۱}{a_۲-a_۱} & a_۱ \leq x \leq a_۲ \\ \frac{a_۳-x}{a_۳-a_۲} & a_۲ \leq x \leq a_۳ \\ ۰ & x \geq a_۳ \end{cases}$$

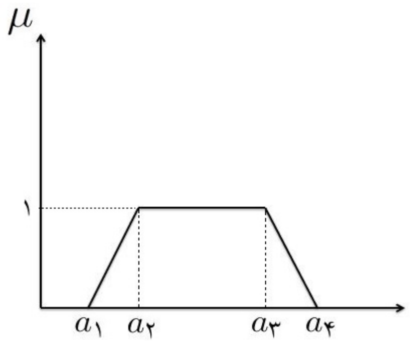


شکل ۴.۱: عدد فازی مثلثی

تعریف ۳.۴.۱. یک عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ نشان داده می‌شود که در آن $a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴$ است و تابع عضویت آن به صورت زیر است.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq a_۱ \\ \frac{x-a_۱}{a_۲-a_۱} & a_۱ \leq x \leq a_۲ \\ ۱ & a_۲ \leq x \leq a_۳ \\ \frac{a_۴-x}{a_۴-a_۳} & a_۳ \leq x \leq a_۴ \\ ۰ & x \geq a_۴ \end{cases}$$

تذکر ۱.۴.۱. اگر دریک عدد فازی ذوزنقه‌ای $a_۴ - a_۳ = a_۲ - a_۱$ باشد. آن‌گاه به آن عدد ذوزنقه‌ای فازی متقارن می‌گوییم. مثلا $A = (۲,۴,۸,۱۰)$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای متقارن است، چون: $a_۴ - a_۳ = a_۲ - a_۱ = ۲$



شکل ۵.۱: عدد فازی ذوزنقه‌ای

۲.۴.۱ عملیات ریاضی بر روی اعداد فازی

فرض کنید $*$ بیانگر هر یک از چهار عمل اصلی ریاضی باشد. دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشند. آن‌گاه معادله $\tilde{A} * \tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left(\tilde{A} * \tilde{B}\right)_{(z)} = \sup_{z=x*y} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \forall z \in \mathbf{R}\}$$

در نتیجه برای چهار عمل اصلی ریاضی در اعداد فازی داریم:

$$\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)_{(z)} = \sup_{z=x+y} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

$$\left(\tilde{A} - \tilde{B}\right)_{(z)} = \sup_{z=x-y} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

$$\left(\tilde{A} \times \tilde{B}\right)_{(z)} = \sup_{z=x\times y} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

$$\left(\tilde{A} / \tilde{B}\right)_{(z)} = \sup_{z=x/y} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

در ادامه عملیات ریاضی بر روی اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای را تعریف می‌کنیم.
اگر $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، قرینه‌ی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(-)\tilde{A} = (-a_۳, -a_۲, -a_۱)$$

در نتیجه تفاضل دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\tilde{B} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{B} - \tilde{A} = (b_۱ - a_۳, b_۲ - a_۲, b_۳ - a_۱)$$

توجه کنید اگر $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ یک عدد فازی مثلثی باشد مجموعه α ـ برش آن به صورت زیر است.

$$A_\alpha = [a_۱ + \alpha(a_۲ - a_۱), a_۳ - \alpha(a_۳ - a_۲)]$$

توجه کنید حاصل ضرب و تقسیم دو عدد فازی مثلثی یک عدد مثلثی نیست ولی به عنوان یک تقریب می توان فرض نمود که حاصل یک عدد فازی مثلثی است و مولفه‌های آن به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (a_۱ \times b_۱, a_۲ \times b_۲, a_۳ \times b_۳)$$

$$\tilde{A}/\tilde{B} = (a_۱/b_۳, a_۲/b_۲, a_۳/b_۱)$$

در ادامه این بخش عملیات ریاضی را برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعریف می‌کنیم.

اگر $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ و $\tilde{B} = (b_۱, b_۲, b_۳, b_۴)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند، جمع و تفریق این دو عدد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A}(+)\tilde{B} = (a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲, a_۳ + b_۳, a_۴ + b_۴).$$

$$\tilde{A}(-)\tilde{B} = (a_۱ - b_۴, a_۲ - b_۳, a_۳ - b_۲, a_۴ - b_۱).$$

توجه کنید مجموعه α ـ برش برای اعداد ذوزنقه‌ای فازی به صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha = [a_۱ + \alpha(a_۲ - a_۱), a_۴ - \alpha(a_۴ - a_۳)]$$

ضرب دو عدد فازی ذوزنقه‌ای را با استفاده از α ـ برش تعریف می‌کنیم.

۵.۱ حساب اعداد بازه‌ای

بازه یا فاصله،زیر مجموعه پیوسته‌ای از اعداد حقیقی است که بر دو نوع فاصله محدود یا کران‌دار و فاصله نامحدود یا بی‌کران است. در بعضی از روش‌ها استفاده از محاسبات بازه‌ای علیرغم اینکه محاسبات را پیچیده می‌کند ولی دقت بیشتری به نمایش می‌گذارد. همچنین محاسبات زیادی در مورد دقت و پایداری در محاسبات بازه‌ای مطرح شده است. در ادامه اعمال حساب بازه‌ای معمولی و فازی معرفی خواهند شد.

۱.۵.۱ اعمال بازه‌ای معمولی

تعریف ۱.۵.۱. منظور از بازه‌ی حقیقی $[\underline{x}, \overline{x}]$ مجموعه‌ای کران‌دار و بسته از اعداد حقیقی به‌صورت زیر است:

$$X = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$$

که درآن $\underline{x}$ نقطه‌ی ابتدا و $\overline{x}$ نقطه‌ی انتهای بازه‌ی X نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R = \{X = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$$

اگر $\underline{x} = \overline{x}$ آن‌گاه بازه X به‌صورت یک عدد حقیقی درمی‌آید. بنابراین: $R \subseteq \mathbb{R}$.

تعریف ۲.۵.۱. اگر $*$ یک عمل بازه‌ای باشد، آن‌گاه داریم:

$$X * Y = \{x * y,\, x \in X, y \in Y\}$$

که در آن $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ و $x, y \in \mathbb{R}$

حال می‌توان کلیه اعمال بازه‌ای را تعریف نمود. جمع بازه‌ای بدین گونه تعریف می‌گردد: اگر $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ و $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ دو بازه دلخواه باشند، آن‌گاه داریم:

$$X + Y = [\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \tag{۱.۱}$$

اکنون با توجه به این‌که $-Y = [-\overline{y}, -\underline{y}]$ ، برای تفریق بازه‌ای داریم:

$$X - Y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \tag{۲.۱}$$

با توجه به تعریف ۲.۵.۱ ضرب بازه‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$X \cdot Y = [\min S, \max S], \qquad S = \{\bar{x}\bar{y}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \underline{x}\underline{y}\} \tag{۳.۱}$$

حال با توجه به این که $\frac{1}{Y} = [\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}]$ با شرط $\circ \notin Y$ تقسیم بازه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X/Y = X \cdot \frac{1}{Y}, \quad \circ \notin Y \tag{۴.۱}$$

مثال ۱.۵.۱. با توجه به تعریف ۲.۵.۱ داریم:

$$[\circ, ۲] + [-۱, ۱] = [-۱, ۳],$$

$$[-۱, \circ] - [-۱, ۲] = [-۱ - ۲, \circ - (-۱)] = [-۳, ۱],$$

$$[-۲, \circ] \times [۲, ۳] = [\min\{-۴, -۶, \circ\}, \max\{-۴, -۶, \circ\}] = [-۶, \circ],$$

$$[۱, ۲]/[-۵, -۳] = [\min\{\frac{-۱}{۵}, \frac{-۱}{۳}, \frac{-۲}{۵}, \frac{-۲}{۳}\}, \max\{\frac{-۱}{۵}, \frac{-۱}{۳}, \frac{-۲}{۵}, \frac{-۲}{۳}\}] = [\frac{-۲}{۳}, \frac{-۱}{۵}].$$

۲.۵.۱ حساب بازه‌ای اعداد فازی

اعداد فازی همانند مجموعه‌های فازی ممکن است بوسیله‌ی مجموعه αـ برش‌های خود مشخص شوند.اگر مجموعه αـ برش‌های دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت $\tilde{A} = [\tilde{a}^l_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha]$ و $\tilde{B} = [\tilde{b}^l_\alpha, \tilde{b}^u_\alpha]$ نمایش دهیم. آن‌گاه حساب بازه‌ای اعداد فازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.جمع و تفریق بین دو عدد فازی را به‌صورت زیر داریم:

$$[\tilde{A} \oplus \tilde{B}]_\alpha = [\tilde{a}^l_\alpha + \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha + \tilde{b}^u_\alpha]$$

$$[\tilde{A} \ominus \tilde{B}]_\alpha = [\tilde{a}^l_\alpha - \tilde{b}^u_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha - \tilde{b}^l_\alpha]$$

بعلاوه برای هر دو عدد فازی ضرب و تقسیم را به‌صورت زیر داریم:

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \times \tilde{B}_\alpha = [\min\{\tilde{a}^l_\alpha \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^l_\alpha \tilde{b}^u_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha \tilde{b}^u_\alpha\}, \max\{\tilde{a}^l_\alpha \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^l_\alpha \tilde{b}^u_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha \tilde{b}^u_\alpha\}]$$

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha / \tilde{B}_\alpha = [\min\{\tilde{a}^l_\alpha / \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^l_\alpha / \tilde{b}^u_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha / \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha / \tilde{b}^u_\alpha\}, \max\{\tilde{a}^l_\alpha / \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^l_\alpha / \tilde{b}^u_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha / \tilde{b}^l_\alpha, \tilde{a}^u_\alpha / \tilde{b}^u_\alpha\}]$$

که $\circ \notin [\tilde{b}^l_\alpha, \tilde{b}^u_\alpha]$ و ضرب یک عدد فازی در اسکالر $\lambda > \circ$ نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(\lambda \tilde{A})_\alpha = \lambda . \tilde{A}_\alpha = [\lambda \tilde{a}^l_\alpha, \lambda \tilde{b}^u_\alpha].$$

فصل ۲

روش‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی تک هدفه

۱.۲ مقدمه

هدف از حل‌کردن مسائل برنامه‌ریزی خطی در محیط قطعی ماکزیمم یا مینیمم کردن توابع هدف خطی با قیود خطی است. اما در برخی از موقعیت‌های عملی تصمیم‌گیرنده[۱] ممکن است توابع هدف و قیود دقیق نداشته باشد که در این مواقع می‌تواند آن‌ها را در مفهوم فازی بررسی کند. در بسیاری از حالت‌های عملی امکان مشخص نمودن دقیق تابع هدف و قیود به‌صورت عبارت‌های دقیق و قطعی وجود ندارد که در این حالت‌ها مفهوم فازی ضرورت پیدا می‌کند. در این مفهوم انحراف از محدودیت‌ها تا سطح دلخواهی مجاز است. ([۳]) تعریف برنامه‌ریزی خطی فازی یکتا نیست و مدل‌های مختلفی را در شرایط متفاوت میتوان بررسی کرد.که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: ۱. برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن ۲. برنامه‌ریزی خطی فازی نامتقارن ۳. برنامه‌ریزی خطی فازی با پارامترهای فازی ۴. برنامه‌ریزی خطی فازی با متغیرهای فازی ۵. برنامه‌ریزی خطی فازی کامل

[۱] Decision maker

۲.۲ تصمیم‌گیری در شرایط فازی و برنامه‌ریزی خطی فازی

تصمیم‌گیری در شرایط فازی بوسیله مجموعه شدنی ممکن X مشخص می‌شود که در آن مجموعه توابع هدف با $G_i(i = ۱,۲,\ldots,p)$ و قیود مسئله با $C_j(j = ۱,۲,\ldots,n)$ نشان داده می‌شود. در بررسی‌کردن مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی بلمن[۲] و زاده[۳] [۶] پیشگام بودند که تقارن بین توابع هدف و قیود مسئله از ویژگی اصلی این نوع برنامه‌ریزی فازی بود. اگر اشتراک توابع هدف و محدودیت‌ها را D بنامیم، در این صورت داریم:

$$D = (G_۱ \cap G_۲ \cap \cdots \cap G_p) \cap (C_۱ \cap C_۲ \cap \cdots \cap C_n) \qquad (۱.۲)$$

بنابراین تصمیم فازی D را که به صورت مجموعه فازی (۱.۲) باشد، می توان بصورت زیر نوشت:

$$\mu_D : X \longrightarrow [۰,۱]$$
$$\mu_D(x) = \min_{i,j}\big(\mu_{G_i}(x), \mu_{C_j}(x)\big)$$

در صورت امکان می‌توان α را بین صفر و یک انتخاب کرد و تمام نقاط $x^* \in X$ که $\mu_D(x^*) \geq \alpha$ می‌باشد را تعیین کرد. این یعنی تصمیم x^* حداقل درجه α از تابع عضویت هدف را دارد.

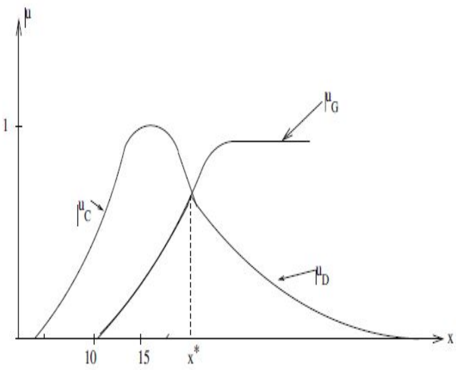
می‌توانیم $x^* \in X$ را یک تصمیم بهینه تعریف کنیم اگر $\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \mu_D(x)$. (برای اینکه x^* بتواند تمام محدودیت‌های مجموعه D را شامل شود به صورت max در نظر گرفته می‌شود.)

مثال ۱.۲.۲. ([۳۶]) با توجه به شکل ۱.۲ مسئله فازی را برای پیدا کردن عدد حقیقی **x** در همسایگی ۱۵ یا بزرگ تر از ۱۰ در نظر بگیرید. تابع هدف و محدودیت‌ها را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\mu_G(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱۰ \\ \left(۱ + (x - ۱۰)^{-۲}\right)^{-۱} & x > ۱۰ \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \left(۱ + (x - ۱۵)^{۴}\right)^{-۱}$$

[۲] Bellman
[۳] Zadeh



شکل ۱.۲: نمایش گرافیکی از μ_D و x^*

با توجه به شکل ۱.۲ اگر بخواهیم اعداد حقیقی x در همسایگی ۱۵ را پیدا کنیم تابع عضویت می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_C(x) = \left(1 + (x - 15)^4\right)^{-1}$$

همچنین اگر بخواهیم اعداد حقیقی بزرگتر از ۱۰ را پیدا کنیم، می‌توانیم از تابع عضویت زیر استفاده کنیم:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & x \le 10 \\ \left(1 + (x - 10)^{-2}\right)^{-1} & x > 10 \end{cases}$$

بلمن و زاده [۶] مجموعه تصمیم D را برابر با $G \cap C$ و به صورت $\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x))$ در نظر گرفتند. شکل ۱.۲ مسئله تصمیم فازی را نشان می‌دهد که x^* نقطه بهینه می‌باشد.

ما در تلاشیم که روشی که بلمن و زاده [۶] ارائه دادند را به عنوان یک قاعده کلی بیان کنیم و در مورد آن بحث کنیم. هدف مسائل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم با توابع خطی و قیود خطی درحالت مساوی یا نامساوی است. در حالت کلی این مسائل (Lp) به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \max\ c^T X \\ s.t. \quad & AX \le b \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

که شرایط زیر را داریم:

$$X \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

در اصطلاحات علمی X یک بردار از متغیرهای تصمیم و b یک بردار از منابع تصمیم‌گیری و c یک بردار هزینه و A ماتریس محدودیت می‌باشد. با فرمول‌بندی بالا می‌توان **A, b , c**

را به صورت قطعی در نظر گرفت. بنابراین همه‌ی اجزای مسئله به صورت قطعی هستند. وقتی تصمیم‌گیرنده در محیط فازی تصمیم می‌گیرد، ممکن است برای مسئله برنامه‌ریزی خطی حالت‌های مختلفی پیش بیاید. برخی از این حالت‌ها عبارتند از: ۱. رسیدن به نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم تابع هدف برای تصمیم‌گیرنده مطلوب نباشد بلکه می‌خواهد برخی از انتظاراتش برآورده شود که قطعی نیستند. برای مثال وقتی تصمیم‌گیرنده بخواهد به حجم فروش بهبود بخشد. ۲. قیود ممکن است مبهم باشند و علامت $\leq$ به مفهوم قطعی نباشد تا سطح خاصی مورد قبول باشد. برای مثال ممکن است تصمیم گیرنده بگوید تلاش کنید تا با ۱۳۰۰ نفر از مشتریان تماس بگیرید اگر با کمتر از ۱۲۰۰ نفر از مشتریان تماس گرفته شود مناسب نیست. ۳. در حالت سوم ممکن است بردارهای b و c و ماتریس A قطعی نباشند و تصمیم‌گیرنده بخواهد با اعداد فازی و نامساوی‌های فازی و توابع رتبه‌بندی فازی، مسئله را حل کند. بنابراین طبق مطالبی که در بالا دیدیم، مدل‌سازی برنامه‌ریزی خطی فازی یگانه نیست و همچنین می‌توان مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی را به دو دسته‌ی متقارن و نامتقارن تقسیم کرد. مدل متقارن پایه روش بحث فازی که به وسیله بلمن و زاده [۶] مطرح شده، می‌باشد.در برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن بهینه‌سازی تابع هدف و برقراری قیدها به صورت فازی می‌باشد در صورتی‌که در حالت نامتقارن فقط برقراری محدودیت‌ها بصورت فازی در نظر گرفته می‌شود. در ادامه این فصل ابتدا به مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی در حالت نامتقارن می‌پردازیم، توجه کنید در صورتی‌که مجموعه تصمیم فازی را مجموعه Xهایی که در محدودیت‌های فازی صدق می‌کنند، در نظر بگیریم به طوری که درجه عضویت X در این مجموعه برابر حداقل درجه ارضای محدودیت‌ها باشد، آن‌گاه به‌ازای هر برش α از این مجموعه، تابع هدف مقدار متفاوتی خواهد داشت، زیرا اندازه فضای تصمیم تغییر می‌کند و در نتیجه مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع هدف بر روی این فضا تغییر خواهد کرد.سپس به مسائل در حالت متقارن که تابع هدف و قیود فازی هستند، می‌پردازیم.

۳.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی‌های فازی و تابع هدف قطعی

حالت کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی‌های فازی و تابع هدف قطعی بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \max\ c^T x \\ s.t.\quad & A_i x \lesssim b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (II) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که $\lesssim$ کمتر یا نامساوی فازی نامیده می‌شود و بدیهی است که می‌توان تابع عضویت مناسب برای هر قید انتخاب نمود.
در نمادگذاری معرفی شده توسط وردجیز[۴] [۲۸] این‌گونه مسائل برنامه‌ریزی خطی نوع $(P۱)$ در نظرگرفته می‌شود، لذا در ادامه این مسائل را به صورت $(P۱-FLP)$ نمایش می‌دهیم.

۱.۳.۲ روش وردجیز در مدل نامتقارن

وردجیز [۲۸] نشان داد که مسئله $(P۱-FLP)$ معادل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری قطعی است، لذا می‌توانیم برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی $(P۱-FLP)$ آن‌ها را تبدیل به مسائل برنامه‌ریزی خطی پارامتری قطعی کنیم و سپس مسائل را در حالت قطعی حل کنیم.
در این روش، قیود فازی با اختصاص دادن تابع عضویت برای هر قید، به قیود قطعی تبدیل می‌شوند. بنابراین فرض کنیم p_i مقدار ثابتی $(p_i > ۰)$ باشد که انحراف مجاز از سطر $i-$ ام محدودیت‌های مدل $(P۱-FLP)$ را نشان دهد. در این صورت می‌توانیم $\mu_i(x)$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} ۱ & A_ix \leq b_i \\ \in [۰,۱] & b_i \leq A_ix \leq b_i + p_i \\ ۰ & A_ix \geq b_i + p_i \end{cases}$$

در صورتی‌که x محدودیت $A_ix \leq b_i$ را به‌طور کامل برآورده سازد، $\mu_i(x)$ برابر یک خواهد بود. بنابراین می‌توانیم $\mu_i(A_i(x))$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\mu_i(A_i(x)) = \begin{cases} ۱ & A_ix \leq b_i \\ ۱ - \frac{A_ix-b_i}{p_i} & b_i \leq A_ix \leq b_i + p_i \\ ۰ & A_ix \geq b_i + p_i \end{cases}$$

که $A_i\ (i = ۱, \ldots, m)$، $i-$ امین سطر ماتریس A می‌باشد. اکنون برای $\alpha \in [۰,۱]$ فرض کنید:

$$X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq ۰, \quad \mu_i(A_ix) \geq \alpha, \quad (i = ۱,۲, \ldots, m)\}$$

بنابراین مسئله $(P۱-FLP)$ معادل مسئله زیر است.

$$\begin{aligned} &\max c^Tx \\ s.t. \quad &x \in X_\alpha \end{aligned}$$

[۴] Verdegay's

اکنون می‌توان با جایگذاری توابع عضویت $\mu_i(A_i(x))$ مسئله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ s.t. \quad & A_i x \le b_i + (1-\alpha)p_i,\ (i = 1, 2, \dots, m) \\ & x \ge 0 \\ & \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

که این مسئله معادل مسائل برنامه‌ریزی خطی پارامتری استاندارد با $\theta = (1-\alpha)$ است. بنابراین برای حل مسائل فازی به صورت $(P1-FLP)$ می‌توان آن‌ها را به مسائل قطعی پارامتری تبدیل نمود و سپس حل کرد، در نتیجه یک پاسخ برای $\alpha \in [0, 1]$ داریم که هر پاسخ در حقیقت یک تابع عضویت فازی است. در ادامه می‌توان مسئله $(P1-FLP)$ را به صورت مسئله قطعی پارامتری زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ s.t. \quad & A_i x \le b_i + p_i - \alpha p_i \\ & x \ge 0,\ \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید در مدل زیر مقادیر p_1 و p_2 برابر یک باشند. جواب مسئله را بیابید.

$$\max x_1 + x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 \lesssim 1 \\ x_2 \lesssim 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

داریم:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری در مسئله $(P1-FLP)$ داریم:

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$s.t. \begin{cases} \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

و در ادامه پس از ضرب کردن داریم:

$$\begin{aligned} & \max\ x_1 + x_2 \\ s.t.\quad & \alpha + x_1 \leq 2 \\ & \alpha + x_2 \leq 2 \\ & x \geq 0,\ \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

که با حل این مسئله مقادیر زیر بدست می‌آید.

$$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 2 \quad \alpha^* = 0 \quad Z^* = 4$$

۲.۳.۲ روش ورنرز با رویکرد مسائل متقارن

ورنرز[۵] [۳۰] برای به‌دست آوردن تابع عضویت توابع هدف حل دو مسئله برنامه‌ریزی خطی $(Lp(b))$ و $(Lp(b+p))$ را پیشنهاد داد. فرض کنید:

$$\begin{aligned} (LP(b)):\qquad & \max\ c^T x \\ s.t.\quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (LP(b+p)):\qquad & \max\ c^T x \\ s.t.\ & Ax \leq b+p \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)^T$ بردار تولورانس برای m محدودیت مسئله $(Lp(b+p))$ میباشد. فرض کنید Z_0 و Z_1 به ترتیب مقدار بهینه مسائل $(Lp(b))$ و $(Lp(b+p))$ باشند. اکنون می‌توانیم یک تابع عضویت برای تابع هدف قطعی مسئله (II) به صورت زیر ارائه دهیم:

$$\mu_0(c^T x) = \begin{cases} 1 & c^T x \geq Z_1 \\ 1 - \frac{Z_1 - c^T x}{Z_1 - Z_0} & Z_0 \leq c^T x \leq Z_1 \\ 0 & c^T x \geq Z_0 \end{cases}$$

به علاوه، توابع عضویت محدودیت‌ها به صورت زیر است:

$$\mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 & A_i x \leq b_i \\ 1 - \frac{A_i x - b_i}{p_i} & b_i \leq A_i x \leq b_i + p_i \\ 0 & A_i x \geq b_i + p_i \end{cases}$$

---

[۵] Werners

اکنون با استفاده از توابع عضویت با نماد $\mu_i \; (i = 0, 1, \dots, m)$ با قرار دادن $\alpha = \min\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m\}$ و پیروی کردن از قاعده کلی بلمن و زاده، [۶] مسئله (II)، به شکل مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر تبدیل و حل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& \max \alpha \\
& \mu_0(x) \geq \alpha \\
s.t. \quad & \mu_i(x) \geq \alpha \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& \alpha \in [0, 1] \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

که با جایگذاری $\mu_i, \; (i = 0, 1, \dots, m)$، مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& \max \alpha \\
& c^T x \geq Z_1 - (1 - \alpha)(Z_1 - Z_0) \\
s.t. \quad & A_i x \leq b_i + (1 - \alpha) p_i \\
& \alpha \in [0, 1] \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\tag{۲.۲}
$$

مثال ۲.۳.۲. ([۲۴]) مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی نامتقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& \max x_2 \\
& x_1 + x_2 \lesssim 1 \\
s.t. \quad & x_1 \lesssim 0/5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

فرض کنید $p_1 = p_2 = 1$. با استفاده از روش ورنرز مسائل $LP(b)$ و $LP(b+p)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$
\begin{aligned}
LP(b): \qquad & \max \; x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 0/5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
LP(b+p): \qquad & \max x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 \leq 1/5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

با حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فوق داریم $Z_۰ = ۱$ و $Z_۱ = ۲$. لذا تولورانس این مسئله $P_۰ = Z_۱ - Z_۰ = ۲ - ۱ = ۱$ می‌باشد. اکنون با جایگذاری در مسئله قطعی روش ورنرز داریم:

$$\begin{aligned} & \max \ \alpha \\ & x_۲ \geq ۱ - (۱ - \alpha) \\ s.t. \quad & x_۱ + x_۲ \leq ۱ + (۱ - \alpha) \\ & x_۱ \leq ۰/۵ + (۱ - \alpha) \\ & x \geq ۰,\ \alpha \in [۰, ۱] \end{aligned}$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\begin{aligned} & \max \ \alpha \\ & \alpha - x_۲ \leq ۰ \\ s.t. \quad & x_۱ + x_۲ + \alpha \leq ۲ \\ & x_۱ + \alpha \leq ۱/۵ \\ & x \geq ۰,\ \alpha \in [۰, ۱] \end{aligned}$$

پس از حل کردن این مسئله به‌روش سیمپلکس داریم:

$$\begin{aligned} & \alpha^* = ۱ \\ & x_۱^* = ۰ \qquad x_۲^* = ۱ \end{aligned}$$

اکنون تابع عضویت محدودیت‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$\mu_۱(A_۱(x^*)) = ۱ - \frac{A_۱ x^* - b_۱}{P_۱} = ۱ - ۰ = ۱ = ۱$$
$$\mu_۲(A_۲(x^*)) = ۱ - \frac{A_۲ x^* - b_۱}{P_۲} = ۱ - (-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲} > ۱$$

همان‌طور که دیدیم تابع عضویت محدودیت دوم بیش‌تر از یک می‌شود که پذیرفتنی نیست. در واقع، در این مثال علاوه بر حل مسئله با روش ورنرز [۳۵] ،یکی از مشکلات این روش را نیز مطرح کردیم.

۴.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی‌های قطعی و توابع هدف فازی

فرم کلی این مسائل به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (P2-FLP): \qquad & \tilde{\max}\, c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید تابع عضویت هدف فازی بصورت زیر باشد:

$$\phi(c) = \inf_j \phi_j(c_j) \qquad \phi_j : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad j = 1,2,\ldots,n$$

وردجیز بیان کرد که جواب فازی مسئله $(P2-FLP)$ را می‌توان با حل کردن مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} LP(\phi,\alpha): \qquad & \max\, c^T x \\ & \phi(c) \ge (1-\alpha) \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0, \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

در حالت کلی حل مسئله $LP(\phi,\alpha)$ کار ساده‌ای نیست. زیرا تعداد قیود مسئله می‌تواند زیاد باشد. بنا به قضیه زیر مسئله معادل با $LP(\phi,\alpha)$ که $LP(\beta)$ می‌نامیم را معرفی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} LP(\beta): \qquad & \max\, \eta(\beta)^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0, \beta \in [0,1] \end{aligned}$$

که $\eta(\beta)$ یک تابع برداری $(\eta_1(\beta),\ldots,\eta_j(\beta))$ با $\eta_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\eta_j(\beta) = \phi_j^{-1}(1-\alpha)$ می‌باشد. در ادامه قضیه بعد آن‌را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۲. در مسئله $(P2-FLP)$ فرض کنید توابع عضویت $\phi_j : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], (j = 1,\ldots,n)$ پیوسته و یکنوای اکید باشد. آن‌گاه جواب فازی مسئله $(P2-FLP)$ با حل کردن مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری $(LP)_\beta$ به دست می‌آید.

برهان. برای حل مسئله $(P2-FLP)$ باید مسئله زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} LP(\phi,\alpha): \qquad & \max\, c^T x \\ s.t. \quad & \phi(c) \ge 1-\alpha \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0,\ \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

که $\phi(c) = \inf\limits_j \phi_j(c_j)$، اما چون ϕ_j پیوسته و یکنوای اکید می‌باشد، لذا ϕ_j^{-1} وجود دارد و به صورت زیر می‌باشد.

$$\phi_j(c_j) \geq 1 - \alpha \quad \rightarrow \quad c_j \geq \phi_j^{-1}(1 - \alpha)$$

بنابراین مسئله $Lp(\phi, \alpha)$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& c_j \geq \phi_j^{-1}(1-\alpha) \quad j = 1, \dots, n \\
s.t. \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0,\ \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}$$

که معادل است با:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& c_j = \phi_j^{-1}(1-\alpha)\ (j = 1, \dots, n) \\
& s.t. \quad Ax \leq b \\
& x \geq 0,\ \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}$$

بنابراین مسئله برنامه‌ریزی فازی $(P2 - FLP)$ را می‌توان با حل مسئله برنامه‌ریزی قطعی زیر حل نمود.

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^{-1}(1-\alpha)) x_j \\
s.t. \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0,\ \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}$$

که همان مسئله $Lp(\beta)$ با $\beta = (1 - \alpha)$ و $\eta_j(\beta) = \phi_j^{-1}(1 - \alpha)$ می‌باشد. □

تذکر ۱.۴.۲. پارامترهای استفاده شده در مسئله $(P2 - FLP)$ تاثیری بر فضای شدنی مسئله ندارند. حل کردن مسائل $(P2 - FLP)$ آسان‌تر از مسائل $(P1 - FLP)$ می‌باشد. در حقیقت یک رابطه دوگان بین این دو نوع مسئله برنامه‌ریزی خطی وجود دارد به این ترتیب که هر مسئله $(P1 - FLP)$ را می‌توان به‌صورت مسئله $(P2 - FLP)$ تبدیل کرد و برعکس.

مثال ۱.۴.۲. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی $(P2 - FLP)$ زیر را در نظر بگیرید

$$\tilde{\max}\, c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

که $c_2 = 75$ و تابع عضویت ϕ_1 برای c_1 به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$\phi_1(c_1) = \begin{cases} 0 & c_1 < 40 \\ \frac{(c_1-40)^2}{5625} & 40 \le c_1 \le 115 \\ 1 & c_1 \ge 115 \end{cases}$$

برای حل این مسئله باید مسئله قطعی زیر را حل کنیم.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^{-1}(1-\alpha))x_j \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

چون فقط تابع عضویت $\phi_1(c)$ مشخص شده است، باید مسئله زیر را حل کنیم.

$$\begin{aligned} & \max\,(\phi_1^{-1}(1-\alpha))x_1 + 75x_2) \\ s.t. \quad & 3x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $\phi_1(c)$ داریم:

$$\phi_1^{-1}(1-\alpha) = (40 + 75\sqrt{(1-\alpha)})$$

بنابراین، مسئله بالا به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \max\,(40 + 75\sqrt{(1-\alpha)})x_1 + 75x_2 \\ & 3x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0,\ \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی پارامتری بالا به‌صورت $x_1^* = 1$ و $x_2^* = 1$ می‌باشد و لذا جواب فازی،یعنی مجموعه فازی مقادیر تابع هدف به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\left\{(75 + c_1), \frac{(c_1 - 40)^2}{5625}\right\}, \quad 40 \le c_1 \le 115$$

۵.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی با نامساوی و تابع هدف فازی

فرم کلی این مسائل به‌صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} (P3-FLP): \quad & \tilde{\max}\, c^Tx \\ s.t. \quad & Ax \lesssim b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

۱.۵.۲ روش زیمرمن درحالت متقارن

زیمرمن[6] [۳۵] برای تعریف مدل فازی متقارن فرض نموده است که تصمیم‌گیرنده بتواند یک سطح تمایل(سطح توقع) Z برای تابع هدف تعریف کند، در این صورت مدل برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن $(P3-FLP)$ به‌صورت زیر است.

x را بیابید به‌طوریکه:

$$\begin{aligned} (FSI): \quad & c^Tx \gtrsim Z_0 \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید μ_0 تابع عضویت تابع هدف و $\mu_i, \forall\, (i=1,2,\dots,m)$ تابع عضویت i–امین محدودیت باشد و همچنین p_0 مقدار انحراف مجاز از سطح تابع هدف و p_i مقدار انحراف مجاز از $i-$امین محدودیت باشد. در این‌صورت می‌توان $\mu_i(x)$ و $\mu_0(x)$ را به ازای $i=1,2,\dots,m$ به‌صورت توابع عضویت خطی و کاهشی به صورت زیر تعریف کرد.

$$\mu_0(c^Tx)=\begin{cases} 1 & c^Tx > Z_0 \\ 1-\frac{Z_0-c^Tx}{p_0} & Z_0-p_0 \leq c^Tx \leq Z_0 \\ 0 & c^Tx < Z_0-p_0 \end{cases}$$

و

$$\mu_i(A_i(x))=\begin{cases} 1 & A_ix < b_i \\ 1-\frac{A_ix-b_i}{p_i} & b_i \leq A_ix \leq b_i+p_i \\ 0 & A_ix > b_i+p_i \end{cases}$$

[6] Zimmermann

اکنون با استفاده از حالت متقارن که بلمن و زاده [۶] معرفی کردند و مسئله (I) و انتخاب درجه عضویت α که بیانگر درجه ارضای محدودیت‌هاست، می‌توانیم مسئله زیر را متناظر با مسئله (FSI) بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
& \max \alpha \\
& \mu_\circ(c^T x) = (۱ - \frac{Z_\circ - c^T x}{p_\circ}) \geq \alpha \\
s.t.\quad & \mu_i(A_i x) = (۱ - \frac{A_i x - b_i}{p_i}) \geq \alpha \quad (i = ۱, ۲, \ldots, m) \\
& \alpha \in [\circ, ۱],\ x \geq \circ
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
& \max \alpha \\
s.t.\quad & c^T x \geq Z_\circ - (۱ - \alpha) p_\circ \\
& A_i x \leq b_i + (۱ - \alpha) p_i, \quad (i = ۱, ۲, \ldots, m) \\
& \alpha \in [\circ, ۱],\ x \geq \circ
\end{aligned}
$$

اگر (x^*, α^*) یک جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی بالا باشد، آن‌گاه x^* یک جواب بهینه مسئله $(P۳ - FLP)$ نامیده می‌شود و λ^* درجه متناظر با سطح مطلوبیت $Z_\circ$ که تصمیم‌گیرنده می‌خواهد به آن به برسد، می‌باشد.

تذکر ۱.۵.۲. اگر مسئله $(P۳ - FLP)$ محدودیت‌های قطعی هم داشته باشد، آن محدودیت‌ها هیچ تغییری نمی‌کنند، در واقع تولورانس آن‌ها صفر می‌باشد.

مثال ۱.۵.۲. ([۳۵]) مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\max}\ x_۱ + x_۲ \\
s.t.\ & \begin{cases}
-x_۱ + ۲x_۲ \lesssim ۲۱ \\
x_۱ + ۲x_۲ \lesssim ۲۷ \\
۴x_۱ + ۳x_۲ \lesssim ۴۵ \\
۳x_۱ + x_۲ \lesssim ۳۰ \\
x_۱, x_۲ \geq \circ
\end{cases}
\end{aligned}
$$

که در آن $Z_\circ = ۱۴/۵, p_\circ = ۲, p_۱ = ۳, p_۲ = ۶, p_۳ = ۶$ طبق روش زیمرمن برای حل این مسئله

باید مسئله قطعی زیر را حل کرد.

$$\max \alpha$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14/5 - 2(1-\alpha) \\ -x_1 + 3x_2 \leq 21 + 3(1-\alpha) \\ x_1 + 3x_2 \leq 27 + 6(1-\alpha) \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 45 + 6(1-\alpha) \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \\ \alpha \leq 1 \\ x_1, x_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

که معادل است با:

$$\max \alpha$$
$$s.t. \begin{cases} 2\alpha - x_1 - x_2 \leq -12/5 \\ 3\alpha - x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 6\alpha + x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ 6\alpha + 4x_1 + 3x_2 \leq 51 \\ \alpha \leq 1 \\ x_1, x_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

با استفاده از روش سیمپلکس می‌توان مسئله را حل کرد و پاسخ بهینه زیر را به‌دست آورد.

$$x_1^* = 6 \quad x_2^* = 7/75$$
$$Z^* = 13/75 \quad \alpha^* = 0/625$$

قابل ذکر است که مقدار λ^* از رابطه $\lambda^* = 1 - \frac{Z_0 - C^T x}{p_0}$ بدست می آید، یعنی داریم:

$$\lambda^* = 1 - \frac{14/5 - 12/75}{2} = 0/625$$

که در این مثال مقادیر λ^* و α^* برابرند.

۲.۵.۲ روش چاناس با رویکرد مسائل نامتقارن

همان‌طور که دیدیم روش وردجیز [۲۸] برای حل مسائل برنامه‌ریزی فازی نوع $(P1 - FLP)$ به تولورانس p_i وابسته هستند و دیگر اطلاعات مربوط به مجموعه تصمیم فازی نادیده گرفته

می‌شود، در حالی که مجموعه تصمیم فازی اطلاعاتی را که مربوط به دیگر گزینه‌های نزدیک به جواب ماکزیمم را نیز در بر دارد.
چاناس[۷] [۷] برای رفع این مشکل مدل برنامه‌ریزی خطی $(P1-FLP)$ را به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} (P1-FLP): \quad & \max c^T x \\ s.t. \quad & Ax \lesssim b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

برای در نظر گرفتن تولورانس $p_i(i=1,\ldots,m)$ تابع عضویت μ_i را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$\mu_i(A_i(x)) = \begin{cases} 1 & A_i x \leq b_i \\ 1-\frac{A_i x - b_i}{p_i} & b_i \leq A_i x \leq b_i + p_i \\ 0 & A_i x \geq b_i + p_i \end{cases}$$

این مسئله معادل با مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری $(LP)_\theta$ زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \max Z = c^T x \\ & Ax \leq b + \theta p \\ & x \geq 0,\ \theta \in [0,1] \end{aligned}$$

که $\theta = (1-\alpha)$ یک پارامتر و $p=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ بردار تولورانس برای هر یک از m محدودیت فازی می‌باشد. فرض کنید برای یک θ داده شده، $x^*(\theta)$ یک جواب بهینه مسئله $(LP)_\theta$ باشد و مقدار تابع هدف متناظر با آن $Z^*(\theta)$ باشد. بنابراین محدودیت

$$Ax \leq b + \theta p \Longrightarrow A_i x \leq b_i + (1-\alpha) p_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

که معادل است با:

$$\mu_i(A_i x^*(\theta)) \geq \alpha = (1-\theta) \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

برقرارمی‌باشد. همچنین حداقل یک مقدار i با $\mu_i(A_i x^*(\theta)) = \alpha = 1-\theta$ موجود است.
زیرا در مسئله $(LP)_\theta$، حداقل یکی از محدودیت‌ها باید در $x^*(\theta)$ فعال باشد، چون $x^*(\theta)$ نمی‌تواند یک نقطه درونی از ناحیه شدنی باشد. بنابراین درجه مشترک ارضای این محدودیت‌ها مینیمم $\mu_i(A_i(x))$ روی iها می‌باشد. یعنی:

$$\mu_c(Ax^*(\theta)) = \min_i \mu_i(A_i x^*(\theta)) = 1-\theta$$

[۷] Chanas

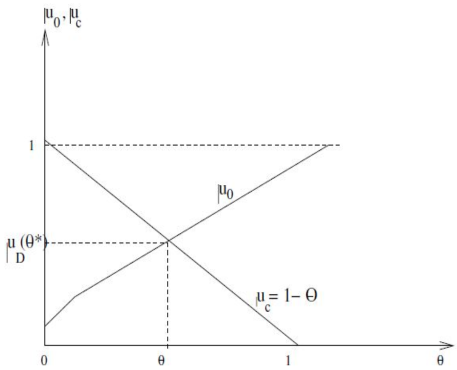
بنابراین به‌ازای هر θ یک جواب بهینه $x^*(\theta)$ با تابع هدف بهینه $Z^*(\theta)$ داریم البته اگر موجود باشد که درهمه‌ی محدودیت‌ها با درجه $1-\theta$ صدق کند. این مقدار بهینه مسئله $(LP)_\theta$ به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌شود و به کمک آن z_0 و p_0 را مشخص می‌کند، لذا می‌توانیم تابع عضویت μ_0 از تابع هدف را به‌صورت زیر ایجاد کنیم.

$$\mu_0(c^Tx^*(\theta)) = \begin{cases} 1 & c^Tx^*(\theta) > z_0 \\ 1-\frac{z_0-c^Tx^*(\theta)}{p_0} & z_0-p_0 \leq c^Tx^*(\theta) \leq z_0 \\ 0 & c^Tx^*(\theta) < z_0-p_0 \end{cases}$$

در نتیجه چون درجه‌ی ارضای محدودیت‌ها به صورت $\mu_c(A(x^*)) = 1-\alpha$ و تابع عضویت تابع هدف به صورت $\mu_0(C^Tx^*(\theta))$ می‌باشد، لذا جواب بهینه مسئله $(P3-FLP)$ به صورت $x^*(\theta^*)$ می‌باشد که (θ^*) جواب بهینه مسئله زیر است.

$$\mu_D(\theta^*) = \max_\theta \mu_D(x^*) = \max_\theta\big(\min\big(\mu_0(x), \mu_c(x)\big)\big)$$

حال تابع $\mu_0(\theta(x))$ و $\mu_i(\theta(x))$ را به‌صورت زیر ترسیم و نمودار آن‌ها یعنی $\mu_D(\theta^*(x))$ که همان تصمیم فازی را نشان می‌دهد مشخص می‌کنیم. در نتیجه با داشتن μ_0 و μ_c به راحتی تابع



شکل ۲.۲: توابع عضویت μ_0 و μ_c در θ^*

عضویت μ_D یا همان تابع عضویت تصمیم فازی به‌دست می‌آید. از نکات قابل توجه در این روش می‌توان به مطالب زیر اشاره کرد.

۱. مجموعه تصمیم فازی به‌طور کامل در نظر گرفته می‌شود به‌طوری که انتخاب‌های ممکن دیگر هم مد نظر قرار می‌گیرند.

۲. نیازی به فرض خطی بودن μ_i نیست و غیر نزولی بودن کافی است.

۳. در $\mu_D(\theta(x))$ می‌توان از عملگرهای دیگری نیز مانند ضرب برای ترکیب هدف و محدودیت‌ها استفاده کرد.

مثال ۲.۵.۲. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$\tilde{\max} = ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۴x_۳$$
$$s.t. \begin{cases} ۶x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ \preceq ۱۲۰۰ \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ \preceq ۱۵۵۰ \\ x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{cases}$$

فرض کنید $P_۰ = ۱۵۰, P_۱ = ۱۰۰, P_۲ = ۲۰۰$ باشند. جواب مسئله را بیابید.

راه‌حل: ابتدا مدل برنامه‌ریزی پارامتری زیر را می‌نویسیم:

$$\max = ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۴x_۳$$
$$s.t. \begin{cases} ۶x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۲۰۰ + ۱۰۰\theta \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ \leq ۱۵۵۰ + ۲۰۰\theta \\ x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{cases}$$

که با حل آن جواب $\theta(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x(\theta) = \begin{cases} (۰, \frac{۷۷۵}{۴} + ۵۰\theta, ۰) & ۰ \leq \theta < \frac{۳}{۸} \\ (۰, \frac{۱۵۷۵}{۴} + \frac{۱۰۰}{۳}\theta, ۰) & \frac{۳}{۸} \leq \theta \leq ۱ \end{cases}$$

و با قرار دادن آن در تابع هدف داریم:

$$Z(x(\theta)) = \begin{cases} ۱۵۵۰ + ۲۰۰\theta & ۰ \leq \theta < \frac{۳}{۸} \\ ۱۵۷۵ + \frac{۴۰۰}{۳}\theta & \frac{۳}{۸} \leq \theta \leq ۱ \end{cases}$$

همچنین:

$$\mu_۰(x(\theta)) = \begin{cases} \frac{۴}{۳}\theta & ۰ \leq \theta \leq \frac{۳}{۸} \\ \frac{۱}{۶} + \frac{۸}{۹}\theta & \frac{۳}{۸} \leq \theta \leq \frac{۱۵}{۱۶} \\ ۱ & \theta \geq \frac{۱۵}{۱۶} \end{cases}$$

از آنجا که در $\theta = \frac{۱۵}{۱۶}$ مقدار تابع هدف به ۱۷۰۰ می‌رسد،بنابراین مقدار $\mu_۰(x(\theta))$ به ازای مقادیر بزرگتر مساوی $\frac{۱۵}{۱۶}$ به یک تبدیل می‌شود.لذا ماکزیمم مقدار μ_D به ازای $\frac{۱۵}{۳۴}$ به‌دست می‌آید که جواب متناظر با آن تقریبا به صورت زیر می‌باشد:

$$x(\theta) = (۰, ۴۱۲/۴۵, ۰)$$

فصل ۳

برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی

۱.۳ معرفی

چارچوب کلی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به صورت زیر است:

$$(MOLP): \quad \min Z(x) = [z_1(x), z_2(x), \ldots, z_p(x)]^T \qquad (1.3)$$
$$x \in X$$

که $z_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{k_j} x_j$ ، kـ امین تابع هدف خطی قطعی می‌باشد و $k \in K = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ و ناحیه شدنی به صورت $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b, x \geq 0\}$ که A یک ماتریس $m \times n$ و b یک m - بردار با $b_i \in \mathbb{R}$ می‌باشد.

اگر تصمیم‌گیرنده اهداف فازی داشته باشد یا از هر هدف سطح مورد انتظارش متفاوت باشد و هدف‌ها کمتر یا معادل یک هدف کلی $\tilde{g_k}$ و $k \in K$ باشند، مسئله $(MOLP)$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

x را پیدا کنید به طوری که

$$z_k(x) \leq \tilde{g_k} \quad k = 1, 2, \ldots, p \qquad (2.3)$$
$$x \in X$$

$\tilde{g_k}$ نشان دهنده‌ی یک مجموعه فازی است که به صورت بازه $[g_k, g_k + t_k]$ با تولورانس $t_k \geq 0$ که بوسیله تصمیم‌گیرنده برای kـ امین تابع هدف ارائه می‌شود، نشان داده می‌شود.

به عبارت دیگر، برای بیان درجه عضویتی که تصمیم‌گیرنده برای kـ امین تابع هدف $z_k(x)$ که به صورت بازه $[g_k, g_k+t_k]$ که یک تابع عضویت خطی نزولی از $z_k(x)$ می‌باشد، در نظر می‌گیرد، مسئله به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\mu_k(z_k(x)) = \begin{cases} 1 & z_k(x) \leq g_k \\ 1 - \frac{z_k(x)-g_k}{t_k} & g_k \leq z_k(x) \leq g_k + t_k \\ 0 & z_k(x) \geq g_k + t_k \end{cases} \tag{۳.۳}$$

با استفاده از توابع عضویت خطی (۳.۳) و روش $\max - \min$ که توسط زیمرمن [۳۴] بیان شده است، می‌توان مسئله به فرم (۲.۳) را حل نمود و به بزرگ‌ترین درجه عضویت هریک از توابع عضویت به طور هم‌زمان دست یافت.

با قراردادن $\alpha = \min\{\mu_1(z_1(x)), \dots, \mu_k(z_k(x))\}$، مسئله به فرم (۲.۳) را می‌توان با استفاده از روش $\max - \min$ به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} &\max \alpha \\ &1 \geq \mu_k(z_k(x)) \geq \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, p \\ &x \in X \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

۲.۳ تعاریف اولیه

در اغلب مسائلی که تاکنون دیده‌ایم نتیجه‌گیری‌ها وقتی مطلوب و مورد رضایت تصمیم‌گیرنده است که تصمیم‌گیری براساس چندین هدف بررسی و تجزیه تحلیل شده باشد برای مثال در مسائل برنامه‌ریزی تولید می‌تواند اهدافی مانند حداکثر کردن درآمد، حداقل کردن هزینه، کاهش ضایعات و ... وجود داشته باشند که یک مسئله چند هدفه را می‌سازند. تعریف جواب کارا که اولین بار توسط ادوارت[۱] [۱۰] مطرح شد به این صورت است که «یک جواب کارا جوابی است که هیچ یک از مؤلفه‌هایش نمی‌توانند بهبود یابند مگر اینکه حداقل یکی از مؤلفه‌هایش بدتر شود.» چون این تعریف توسط ویلفردو پارتو[۲] توسعه یافت، به‌این تعریف بهینگی پارتو می‌گویند. در مدل مسئله (۱.۳) معمولا غیرممکن است که توابع هدف باهم یک نقطه بهینه داشته باشند. برای رفع این تناقض در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه به جای مفهوم بهینگی از مفاهیم جواب کارا یا جواب بهینه پارتو استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۳. $x^\circ \in X$ یک جواب بهینه پارتو برای مسئله (۱.۳) می‌باشد اگر $y \in X$ای وجود نداشته باشد به طوریکه $z_k(y) \leq z_k(x^\circ)$ برای همه‌ی k ها و $z_s(y) < z_s(x)$ حداقل برای یک s.

[۱] Edgeworth
[۲] Vilfredo Pareto

تعریف ۲.۲.۳. $x^\circ \in X$ یک جواب کارای فازی برای مسئله مدل (۲.۳) می‌باشد اگر $y \in X$ای وجود نداشته باشد به طوریکه $\mu_k(z_k(y)) \geq \mu_k(z_k(x^\circ))$ برای همه‌ی k ها و $\mu_s(z_s(y)) > \mu_s(z_s(x^\circ))$ حداقل برای یک s.

اگرچه حل مسئله در حالتی که بیش از یک جواب کارا[۳] داشته باشد تضمینی به یافتن جواب‌های کارای فازی به ما نمی‌دهد.

تذکر ۱.۲.۳. جواب کارای فازی مسئله (۲.۳) ممکن است جواب بهینه پارتو نباشد. برای مثال اگر $\mu_1(Z_1(x^\circ)) = 1$ باشد. می‌توان $y \in X$ پیدا کرد به طوری که:

$$\mu_i(Z_i(y)) = \mu_i(Z_i(x^\circ)) \forall i \quad Z_1(y) < Z_1(x^\circ)$$

۳.۳ روش دومرحله‌ای برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی

در روش‌های قبل که در فصل (۲) مطرح شد راه‌های مختلفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی ارائه کردیم که همه‌ی آن روش‌ها از قاعده کلی که توسط بلمن و زاده [۶] بیان شده بود پیروی می‌کردند، به این صورت که مسئله فازی تبدیل به یک مسئله قطعی می‌شود و سپس با روش سیمپلکس مسئله قطعی حل می‌شود.

اگر مسئله برنامه‌ریزی خطی یک جواب بهینه داشته باشد، بنابراین این جواب کارای توافقی مسئله فازی خواهد بود ولی اگر مسئله برنامه‌ریزی قطعی جواب بهینه چندگانه داشته باشد، سرانجام یکی از جواب‌های چندگانه جواب کارای توافقی مسئله فازی خواهد بود.

در این بخش روش حل دومرحله‌ای را که توسط جو و وو [۱۱] مطرح شده است معرفی می‌کنیم. این روش با روشی که توسط لی و لی[۴] [۱۸] ارائه شده متفاوت است که مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی در دومرحله حل می‌شود. بعلاوه جواب حاصل از روش دومرحله‌ای همیشه جواب کارای توافقی فازی است. با بازنویسی روش ورنرز [۳۰] در بخش (۲.۳) با استفاده از توابع عضویت $\mu_i (i = 0, 1, \ldots, m)$ و قاعده کلی بلمن و زاده [۶] ارائه شده روش $\max - \min$ برای مسئله برنامه‌ریزی قطعی به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
(P1 - FLP): \quad & \max \alpha \\
& \mu_i(x) \geq \alpha \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m \\
& \alpha \leq 1 \\
& x \geq 0, \alpha \geq 0
\end{aligned}$$

[۳] Efficient

[۴] Lee and Li

فرض کنید مسئله بالا را مرحله اول حل مسئله برنامه‌ریزی خطی $(PhaseI - Lpp)$ بنامیم. فرض کنید (x^*, α^*) یک جواب بهینه مرحله اول باشد. در مرحله دوم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را به صورت زیر می‌سازیم:

$$
\begin{aligned}
(PhaseII - LPP): \qquad & \max \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \\
& \mu_i(x) \geq \alpha_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m \\
& \mu_i(x^*) \leq \alpha_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m \\
& \alpha_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m \\
& \alpha_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \ldots, m \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

فرض کنید $(x^{**}, \alpha_0^{**}, \ldots, \alpha_m^{**})$ یک جواب بهینه مسئله مرحله دوم باشد و (MOP) مخفف مسئله بهینه‌سازی چندهدفه زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
(MOP) \qquad & \max(\mu_0(x), \mu_1(x), \ldots, \mu_m(x)) \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

هر جواب کارای مسئله بهینه‌سازی چندهدفه (MOP) را یک جواب کارای توافقی فازی مسئله $(P1 - FLP)$ می‌نامیم. لذا قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۳.۳. جواب بهینه x^{**} در پایان مرحله دوم، جواب کارای توافقی فازی مسئله $(P1 - FLP)$ می‌باشد.

برهان. با برهان خلف فرض کنیم x^{**} جواب کارای توافقی مسئله (MOP) نباشد، لذا یک جواب $\bar{x}$ برای مسئله (MOP) وجود دارد به طوری که $\bar{x} \geq 0$ و

$$
\begin{aligned}
& \mu_i(x^{**}) \leq \mu_i(\bar{x}), \quad \forall i = 0, 1, \ldots, m \\
& \mu_k(x^{**}) < \mu_k(\bar{x}), \quad \text{for some } k \in \{0, 1, \ldots, m\}
\end{aligned}
$$

چون $(x^{**}, \alpha_0^{**}, \ldots, \alpha_m^{**})$ جواب بهینه مسئله $(PhaseII - LPP)$ می‌باشد و ضرایب تابع هدف مسئله مرحله دوم مثبت می‌باشند، داریم:

$$\alpha_i^{**} = \mu_i(x^{**}), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

اکنون با انتخاب

$$\bar{\alpha}_i = \mu_i(\bar{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

نتیجه می‌گیریم $(\bar{x}, \bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_m)$ برای مسئله مرحله دوم شدنی است و همچنین:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{**} = \sum_{i=0}^{m} \mu_i(x^{**}) < \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\bar{x}) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} \bar{\alpha}_i + \alpha_k$$

که این مطلب نشان می دهد $(x^{**}, \alpha_0^{**}, \dots, \alpha_m^{**})$ جواب بهینه مسئله مرحله دوم نمی‌باشد که برخلاف فرض است و حکم اثبات می‌شود. □

تذکر ۱.۳.۳. فرم ساده‌تر مسئله برنامه‌ریزی خطی مرحله دوم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=0}^{m} \mu_i(x) \\ s.t. \quad & \mu_i(x) \geq \mu_i(x^*) \quad (i = 0, 1, \dots, m) \\ & \mu_i(x) \leq 1 \quad (i = 0, 1, \dots, m) \\ & x \in X \end{aligned}$$

که ناحیه شدنی مربوط به محدودیت‌های قطعی مسئله فازی اصلی را با X نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۳.۳. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی زیر را با $p_1 = 5$ و $p_2 = 40$ و $p_3 = 30$ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \max 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\ s.t. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \preceq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \preceq 80 \\ 3x_1 + 4/4x_2 + 10x_3 + 15x_4 \preceq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

فرض کنید تابع هدف را با $Z(x)$ و قیود مسئله را با $g_1(x)$ و $g_2(x)$ و $g_3(x)$ نشان دهیم. برای هر محدودیت فازی تابع عضویت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & g_1(x) \leq 15 \\ \frac{20 - g_1(x)}{5} & 15 \leq g_1(x) \leq 20 \\ 0 & g_1(x) \geq 20 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & g_2(x) \leq 80 \\ \frac{120 - g_2(x)}{40} & 80 \leq g_2(x) \leq 120 \\ 0 & g_2(x) \geq 120 \end{cases}$$

$$\mu_3(x)=\begin{cases}1 & g_3(x)<100\\ \frac{130-g_3(x)}{30} & 100\le g_3(x)\le 130\\ 0 & g_3(x)\ge 130\end{cases}$$

اکنون با استفاده از روش ورنرز [۳۰] مسئله $LP(b)$ و $LP(b+p)$ را حل می کنیم که مسئله $LP(b)$ همان مسئله اولیه می‌باشد ولی مسئله $LP(b+p)$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$LP(b+p):\quad \max\ 4x_1+5x_2+9x_3+11x_4$$
$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4\le 20\\ 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\le 120\\ 3x_1+4.4x_2+10x_3+15x_4\le 130\\ x_1,x_2,x{+}_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

متناظر با این مسائل جواب‌های $Z_0=99.29$ و $Z_1=130$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین با توجه به تعریف تابع عضویت هدف مسئله داریم:

$$\mu_0(x)=\begin{cases}1 & z(x)\ge 130\\ \frac{z(x)-99.2}{130-99.29} & 99.29\le z(x)\le 130\\ 0 & z(x)<99.29\end{cases}$$

با استفاده از روش زیمرمن [۳۵] و روش $\max-\min$ مسئله مرحله اول را حل می‌کنیم.

$$\max\alpha$$
$$(PhaseI-Lpp)\qquad\begin{cases}4x_1+5x_2+9x_3+11x_4\ge 130-30.71(1-\alpha)\\ x_1+x_2+x_3+x_4\le 15+5(1-\alpha)\\ 7x_1+5x_2+x_3+2x_4\le 80+40(1-\alpha)\\ 3x_1+4.4x_2+10x_3+15x_4\le 100+30(1-\alpha)\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0,\ \alpha\in[0,1]\end{cases}$$

جواب بهینه مسئله مرحله اول به صورت زیر است.

$$x^*=(8.57,0,8.93,0)$$

$$\alpha^*=0.5,\ Z(x^*)=114.65,\ g_1(x^*)=17.5,\ g_2(x^*)=86.78,\ g_3(x^*)=115.01$$

$$\mu_0(x^*)=\mu_1(x^*)=\mu_3(x^*)=0.5,\ \mu_2(x^*)=0.82$$

مسئله مرحله دوم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\max\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$
$$s.t.\begin{cases} 4x_1+5x_2+9x_3+11x_4\geq 130-30.71(1-\alpha_0)\\ x_1+x_2+x_3+x_4\leq 15+5(1-\alpha_1)\\ 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\leq 80+40(1-\alpha_2)\\ 3x_1+4.4x_2+10x_3+15x_4\leq 100+30(1-\alpha_3)\\ 0.5\leq\alpha_0\leq 1\\ 0.5\leq\alpha_2\leq 1\\ 0.83\leq\alpha_0\leq 1\\ 0.50\leq\alpha_0\leq 1\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{cases}$$

جواب بهینه مسئله بالا به صورت زیر است.

$$x^*=(4.05, 5.65, 7.8, 0)$$

همچنین

$$z(x^{**})=z(x^*)=114.65$$

$$g_1(x^*)=17.5,\ \ g_2(x^*)=80.00,\ \ g_3(x^*)=115.01$$

$$\mu_0(x^{**})=\mu_1(x^{**})=\mu_3(x^{**})=0.5,\ \mu_2(x^{**})=1$$

با حل این مثال نه تنها به جواب بهینه مسئله رسیدیم، بلکه بزرگ‌ترین درجه عضویت تابع هدف در μ_2 را با $\mu_2(x^{**})=1$ و $\mu_2(x^*)=0.83$ پیدا کردیم.

۴.۳ روش جیمنز و بیلبائو

جیمنز[۵] و بیلبائو[۶] [۱۴] نشان دادند که جواب کارای فازی مسئله (۲.۳) ممکن است، جواب بهینه پارتو مسئله مدل (۱.۳) نباشد. برای اثبات این مطلب ابتدا از روش جوو[۷] و وو[۸] [۱۱] برای پیدا کردن جواب کارای فازی کمک گرفتند. سپس با استفاده از این جواب مدلی مشابه به مسئله برنامه‌ریزی آرمانی برای یافتن جواب بهینه پارتو در نظر گرفتند.

[۵] Jimeenz

[۶] Bilbao

[۷] Guu

[۸] Wu

جیمنز و بیلبائو [۱۴] یک روش کلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی را به‌صورت زیر ارائه کردند، الگوریتم این روش به‌صورت زیر می‌باشد:
مرحله ۱: مسئله $\max - \min$ مدل (۴.۳) را حل کنید. دو حالت زیر پیش می‌آید، حالت اول: اگر جواب بهینه منحصر به‌فرد باشد، آن‌گاه:
الف) اگر تمام درجه‌های رضایت‌مندی به‌طور اکید کمتر از یک باشند، جواب کارای فازی و بهینه پارتو را می‌توان انتخاب کرد و الگوریتم تمام می‌شود.
ب) اگر برخی از درجه‌های رضایت‌مندی برابر یک باشند، می‌توانیم بگوییم که برخی اهداف به سطح رضایت‌مندی رسیده‌اند ولی جواب کارای فازی را نمی‌توان به‌عنوان جواب بهینه پارتو در نظر گرفت. به مرحله (۳) بروید.
حالت دوم: اگر جواب بهینه مسئله چندگانه باشد. به مرحله دوم بروید.
مرحله ۲: مسئله مرحله دوم که به‌صورت زیر می‌باشد را حل کنید.

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ s.t.\quad & 1 \geq \mu_i(Z_i(x)) \geq \alpha_i \geq \mu_i(Z_i(x^*)) \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{aligned}$$

پس از حل مسئله دو حالت زیر را داریم:
الف) اگر تمام درجه‌های رضایت‌مندی به‌طور اکید کمتر از یک باشند، جواب کارای فازی و بهینه پارتو را می‌توان انتخاب کرد و الگوریتم تمام می‌شود.
ب) اگر برخی از درجه‌های رضایت‌مندی برابر یک باشند، می‌توانیم بگوییم که برخی از اهداف به سطح رضایت‌مندی رسیده‌اند ولی جواب کارای فازی را نمی‌توان به‌عنوان جواب بهینه پارتو در نظر گرفت. به مرحله (۳) بروید.
حالت دوم: اگر جواب بهینه مسئله چندگانه باشد، به مرحله دوم بروید.
مرحله ۳: مجموع انحرافات منفی را ماکزیمم کنید. جواب این مسئله جواب کارای فازی و بهینه پارتو می‌باشد و الگوریتم تمام می‌شود.

$$\begin{aligned} &\max \sum_{s=1}^{p} n_s \\ s.t.\quad & Z_s(x) + n_s = Z_s(x^{**}) \quad (s = 0, 1, \dots, p) \\ & \mu_r(Z_r(x)) = \mu_r(Z_r(x^{**})) \quad (r = p+1, \dots, k) \\ & x \in X, n_s \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۱.۴.۳. مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی زیر را با تولورانس $p_1 = 3$، $p_2 = 2$ و $p_3 = 2$

و اهداف فازی ($g_1 = ۲۱$، $g_2 = ۸$ و $g_3 = ۱۳$) در نظر بگیرید.

$$\min \ \{ \ z_1(x) = ۳x_1 + ۳x_2 + ۳x_3$$
$$z_2(x) = ۲x_1 + x_2 + ۲x_3$$
$$z_3(x) = ۴x_1 + ۴x_2 + ۲x_3 \ \}$$
$$s.t. \quad ۴x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 \geq ۱۸$$
$$x_1 \geq ۱, x_2 \geq ۰, ۰ \leq x_3 \leq ۳$$

مرحله اول: مسئله $\max - \min$ مدل (۲.۳) را حل می‌کنیم.

$$\max \alpha$$
$$\frac{۱}{۳}(۲۴ - z_1(x)) \geq \alpha$$
$$s.t. \quad \frac{۱}{۲}(۱۰ - z_2(x)) \geq \alpha$$
$$\frac{۱}{۲}(۱۵ - z_3(x)) \geq \alpha$$
$$۴x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 \geq ۱۸$$
$$x_1 \geq ۱, x_2 \geq ۰, ۰ \leq x_3 \leq ۳$$

جواب بهینه مسئله مرحله اول به‌صورت زیراست.

$$x^* = (۱,۱,۳), \ \alpha^* = ۰/۵, \ z_1(x^*) = ۱۵, \ z_2(x^*) = ۹, \ z_3(x^*) = ۱۴$$

مرحله دوم: جواب کارای فازی مسئله مرحله دوم را به صورت زیر پیدا می‌کنیم

$$\max \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$\frac{۱}{۳}(۲۴ - Z_1(x)) \geq \alpha_1$$
$$s.t. \quad \frac{۱}{۲}(۱۰ - Z_2(x)) \geq \alpha_2$$
$$\frac{۱}{۲}(۱۵ - Z_3(x)) \geq \alpha_3$$
$$۴x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 \geq ۱۸$$
$$x_1 \geq ۱, x_2 \geq ۰, ۰ \leq x_3 \leq ۳, \alpha_1 = ۱, ۰/۵ \leq \alpha_2 \leq ۱, ۰/۵ \leq \alpha_3 \leq ۱,$$

پس از حل مسئله داریم:

$$x^{**} = (۱/۲۵, ۰/۵, ۳), \quad \alpha_1 = ۱, \ \alpha_2 = ۰/۵, \ \alpha_3 = ۱$$
$$Z_1(x^{**}) = ۱۴/۲۵, \ Z_2(x^{**}) = ۹, \ Z_3(x^{**}) = ۱۳$$

می‌بینیم که x^{**} جواب x^* را بهبود می‌دهد، چون: $Z_1(x^{**}) < Z_1(x^*)$ و $Z_2(x^{**}) = Z_2(x^*)$ و $Z_3(x^{**}) < Z_3(x^*)$ اما حداقل یک هدف وجود دارد که کاملا به سطح مورد انتظار خود نرسیده

است. لذا جواب x^{**} ممکن است جواب بهینه پارتو نباشد. پس به مرحله ۳ می‌رویم.
مرحله سوم: برای پیدا کردن جواب بهینه پارتو مسئله معادل (۴.۳) را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}
& \max n_1 + n_3 \\
& 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + n_1 = 14/25 \\
& 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + n_3 = 13 \\
s.t. \quad & \frac{1}{2}(10 - (2x_1 + x_2 + 2x_3)) = 0/5 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 18 \\
& x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 3, n_1 \geq 0, n_3 \geq 0,
\end{aligned}$$

پس از حل مسئله داریم:

$$\begin{aligned}
& x^{\circ} = (1/5, 0, 3), \\
& Z_1(x^{\circ}) = 13/5, \quad Z_2(x^{\circ}) = 9, \quad Z_3(x^{\circ}) = 12
\end{aligned}$$

می‌بینیم که x° جواب x^{**} را بهبود می‌دهد، لذا جواب بهینه پارتو و کارای فازی مسئله می‌باشد.

۵.۳ روش توسعه‌یافته وو و همکاران

وو و همکارانش [۳۴] روش جدیدی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه فازی ارائه دادند که درجه عضویت توابع هدف متناظر با رابطه‌ی (۳.۳) می‌باشد. با استفاده از توابع عضویت خطی (۳.۳) و روش $\max - \min$ مسئله مرحله اول روش توسعه‌یافته توسط وو و همکاران به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \max \alpha \\
s.t. \quad & \mu_k(z_k(x)) \geq \alpha, \quad k = 1, 2, \ldots, p \\
& x \in X
\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

مسئله مرحله دوم این روش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{k=1}^{p} s_i \\
s.t. \quad & \mu_k(Z_k(x)) - s_i \geq \alpha^* \quad k = 1, 2, \ldots, p \\
& x \in X, s_i \geq 0
\end{aligned}$$

مثال ۱.۵.۳. مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی زیر را با تولورانس $p_1 = 3$، $p_2 = 2$ و $p_3 = 2$

و اهداف فازی ($g_۱ = ۲۱$، $g_۲ = ۸$ و $g_۳ = ۱۳$) در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
\min \{ \; & z_۱(x) = ۳x_۱ + ۳x_۲ + ۳x_۳ \\
& z_۲(x) = ۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \\
& z_۳(x) = ۴x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ \; \} \\
s.t. \quad & ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \geq ۱۸ \\
& x_۱ \geq ۱, x_۲ \geq ۰, ۰ \leq x_۳ \leq ۳
\end{aligned}
$$

مرحله اول: توابع عضویت را برای هر یک از اهداف به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$
\mu_۱(z_۱(x)) = \begin{cases} ۱ & z_۱ \leq ۲۱ \\ \frac{۲۴ - z_۱(x)}{۳} & ۲۱ \leq z_۱(x) \leq ۲۴ \\ ۰ & z_۱(x) \geq ۲۴ \end{cases}
$$

$$
\mu_۲(z_۲(x)) = \begin{cases} ۱ & z_۲ \leq ۸ \\ \frac{۱۰ - z_۲(x)}{۲} & ۸ \leq z_۲(x) \leq ۱۰ \\ ۰ & z_۲(x) \geq ۱۰ \end{cases}
$$

$$
\mu_۳(z_۳(x)) = \begin{cases} ۱ & Z_۳ \leq ۱۳ \\ \frac{۱۵ - z_۳(x)}{۲} & ۱۳ \leq z_۱(x) \leq ۱۵ \\ ۰ & z_۳(x) \geq ۱۵ \end{cases}
$$

مسئله مرحله اول را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
& \max \alpha \\
& \frac{۱}{۳}(۲۴ - z_۱(x)) \geq \alpha \\
s.t. \quad & \frac{۱}{۲}(۱۰ - z_۲(x)) \geq \alpha \\
& \frac{۱}{۲}(۱۵ - z_۳(x)) \geq \alpha \\
& ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \geq ۱۸ \\
& x_۱ \geq ۱, x_۲ \geq ۰, ۰ \leq x_۳ \leq ۳
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مسئله مرحله اول به‌صورت زیر می‌باشد.

$$
x^* = (۱, ۱, ۳), \; \alpha^* = ۰/۵, \; z_۱(x^*) = ۱۵, \; z_۲(x^*) = ۹, \; z_۳(x^*) = ۱۴
$$

مرحله دوم: مرحله دوم مسئله را با افزودن قید $\alpha^* = ۰/۵$ به‌مسئله به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&\max s_۱ + s_۲ + s_۳ \\
&\frac{۱}{۳}(۲۴ - Z_۱(x)) - s_۱ \geq ۰/۵ \\
&\frac{۱}{۲}(۱۰ - Z_۲(x)) - s_۲ \geq ۰/۵ \\
&\frac{۱}{۲}(۱۵ - Z_۳(x)) - s_۳ \geq ۰/۵ \\
&۴x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \geq ۱۸ \\
&x_۱ \geq ۱, x_۲ \geq ۰, ۰ \leq x_۳ \leq ۳, s_۱, s_۲, s_۳ \geq ۰
\end{aligned}$$

پس از حل مسئله داریم:

$$\begin{aligned}
&x^{**} = (۱/۵, ۰, ۳), \quad s_۱ = ۳,\ s_۲ = ۰,\ s_۳ = ۱ \\
&Z_۱(x^{**}) = ۱۳/۵,\ Z_۲(x^{**}) = ۹,\ Z_۳(x^{**}) = ۱۲
\end{aligned}$$

چون $Z_۱(x^{**}) < Z_۱(x^*)$ و $Z_۲(x^{**}) = Z_۲(x^*)$ و $Z_۳(x^{**}) < Z_۳(x^*)$ با توجه به قضیه ۱.۳.۳ ، $X^{**} = (۱/۵, ۰, ۳)$ یک جواب بهینه برای مسئله می‌باشد.
بعلاوه چون $s_۱, s_۳ > ۰$ می‌باشند. می‌توان به اطلاعات بیش‌تری از این مثال رسید. $s_۱ = ۳$ نشان دهنده‌ی این است که هدف اصلی $g_۱ = ۲۱$ با تولورانس $p_۱ = ۳$ در تابع هدف $Z_۱(x)$ بیش‌تر از آن مقداری است که تصمیم‌گیرنده تخمین زده است. که می‌توان این مقدار را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$(s_۱ + \alpha^* - ۱) \times P_۱ = (۳ + ۰/۵ - ۱) \times ۳ = ۷/۵$$

همچنین این مقدار را می‌توان به‌صورت زیر هم محاسبه کرد.

$$g_۱ - Z_۱(x^{**}) = ۲۱ - ۱۳/۵ = ۷/۵$$

همین روش را برای هدف $Z_۳(x)$ نیز می‌توان انجام داد. $g_۳ - Z_۳(x^{**}) = ۱۳ - ۱۲ = ۱$ نتایج به‌دست آمده از مثال بالا نشان می‌دهد که روش دو مرحله‌ای تجدید نظر شده توسط وو و همکاران [۳۴] اطلاعات بیش‌تری به تصمیم‌گیرنده راجع به اینکه مقدار حدس زده شده مسئله اصلی چه تفاوتی دارد را می‌دهد و در صورت وجود این مقدار را می‌توان محاسبه کرد.

۶.۳ برنامه‌ریزی خطی آرمانی در محیط فازی

برای مطالعه برنامه‌ریزی آرمانی در شرایط فازی، مدل‌های سطح انتظار غیردقیق برای هر یک از k هدف را مشخص می‌کنیم. فرض کنیم g_k مدل سطح انتظار k امین تابع هدف

$(k=1,2,\ldots,p)$ باشد. مسئله برنامه‌ریزی خطی آرمانی در محیط فازی[۹] (FGP) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. $x \in \mathbb{R}^n$ را پیدا کنید به طوری که:

$$\begin{aligned} (FGP): \quad & c_k^T x \gtrsim g_k \quad (k=1,2,\ldots,p) \\ s.t. \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

روش‌های مختلفی برای حل کردن مسئله (FGP) وجود دارد که به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱.۶.۳ روش زیمرمن

در این روش تابع عضویت خطی استاندارد زیمرمن را برای هر یک از آرمان‌های فازی انتخاب می‌کنیم. سپس از روش $\max-\min$ برای حل مسئله قطعی معادل (FGP) استفاده می‌کنیم. بنابراین، برای هر $k=1,2,\ldots,p$ داریم:

$$\mu_k(c_k^T(x)) = \begin{cases} 1 & c_k^T x \geq g_k \\ f_k(c_k^T(x)) = \frac{c_k^T x - L_k}{g_k - L_k} & L_k \leq c_k^T x < g_k \\ 0 & c_k^T x < L_k \end{cases}$$

که L_k کمترین مقدار برای $k-$ امین آرمان فازی است اگر تولورانس kامین‌ـ آرمان فازی را با p_k نشان دهیم بنابراین داریم:

$$L_k = g_k - p_k$$

اکنون از روش $\max-\min$ برای حل (FGP) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (ZLP): \quad & \max \lambda \\ s.t. \quad & \begin{cases} \lambda \leq \frac{c_k^T x - L_k}{g_k - L_k} & ,(k=1,2,\ldots,r) \\ AX \leq b \\ \lambda \leq 1 \\ x, \lambda \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

در اینجا $f_k(c_k^T x) = \frac{c_k^T x - L_k}{g_k - L_k}$ خطی می‌باشد اما در حالت کلی ممکن است قطعه به قطعه خطی باشد. پس ممکن است مقعر یا شبه مقعر[۱۰] باشد.
در این بخش روش زیمرمن [۳۶] را در حالتی که $f_k(c_k^T x)$ مقعر یا شبه مقعر باشد را بررسی

[۹] Fuzzy goal programming
[۱۰] Quasi concave

می‌کنیم.نارسیمهان[11] [۲۳]و هانان[12] [۱۲] برای مدل مقعر و ناکومورا [13] [۲۲] و یانگ [۳۴] و لی و یو [۱۹] و وانگ و فو [۲۹] و لین و چن [۲۱] برای مدل شبه مقعر روش‌هایی ارائه کرده‌اند. یک توسعه برای روش زیمرمن استفاده از رویکرد دو مرحله‌ای لی [۱۹] می‌باشد. در بخش قبل یک روش دو مرحله‌ای را برای مسائل تک‌هدفه بیان کردیم اکنون روش مشابه آن را برای مسائل چندهدفه تعمیم می‌دهیم.

در این روش در مرحله اول از روش زیمرمن که در بخش قبل گفته شد استفاده می‌کنیم و مسئله قطعی (ZLP) را حل می‌کنیم. فرض کنید (x^*, λ^*) یک جواب بهینه مسئله (ZLP) باشد. اگر x^* یکتا باشد آن‌گاه x^* یک جواب بهینه برای مسئله برنامه‌ریزی آرمانی فازی (FGP) است در غیراین‌صورت، در مرحله دوم مسئله به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود.

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{k=۱}^{p} \frac{\lambda_k}{p} \\
s.t.\quad & \lambda_k^* \le \lambda_k \le f_k(c_k^T x) \qquad ,(k = ۱, ۲ \dots, p) \\
& Ax \le b \\
& x \ge ۰
\end{aligned}$$

اگر $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ یک جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی بالا باشد آن‌گاه $\bar{x}$ یک جواب کارا برای مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه (MOP) زیر است:

$$\begin{aligned}
& \max\,(\mu_۱(x), \mu_۲(x), \dots, \mu_p(x)) \\
s.t.\quad & Ax \le b \\
& x \ge ۰
\end{aligned}$$

۲.۶.۳ روش $\max - \min$ وزن دار

در مسائل برنامه‌ریزی آرمانی باید به این نکته توجه داشت که در مسائل کاربردی واقعی اهداف مختلف درجه اهمیت مختلفی دارند. چون هدف‌های با سطح انتظار و درجه اهمیت مختلفی را داریم. در نتیجه در این مواقع روش زیمرمن [۳۵] که در بخش قبل توضیح دادیم مناسب نیست و یک روش $\max - \min$ وزن دار خیلی عمومی‌تر و پرکاربردتر به نظر می‌رسد.

[11] Narsimhan
[12] Hannan
[13] Nakumura

لی و وانگ [۱۶] برای حل مسائل برنامه‌ریزی آرمانی فازی (FGP) مسئله زیر را پیشنهاد دادند:

$$\begin{aligned} & \max \lambda + \delta \sum_{k=1}^{p} \omega_k f_k(c_k^T x) \\ s.t. \quad & \lambda \le f_k(c_k^T x) \quad (k = 1, 2, \dots, p) \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

که ω_k وزن نسبی k امین تابع هدف و δ یک عدد کوچک مثبت می‌باشد.
همچنین $e^T\omega = 1$ که $e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$ می‌باشد. هر چند روش بالا وزن‌های نسبی برای توابع هدف در نظر می‌گیرد اما اگر δ خیلی کوچک باشد اهمیت توابع هدف را خوب نشان نمی‌دهد. در حقیقت این روش همان جواب روش زیمرمن [۳۵] را به ما می‌دهد. برای حل این مشکل لین[۱۴] [۲۰] روش وزن دار $\max - \min$ دیگری را در نظر گرفت بر اساس این منطق است که وقتی تصمیم‌گیرنده وزن‌های نسبی برای هر یک از آرمان‌های فازی و توابع عضویت مناسب اختصاص می‌دهد، نسبت سطوح دسترسی باید تا حد ممکن نزدیک به نسبت وزن‌های توابع باشد. با حل مسئله برنامه‌ریزی‌خطی وزن‌دار زیمرمن زیر $(WZLP)$ می‌توانیم به این هدف دست یابیم.

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ s.t. \quad & \omega_k \lambda \le f_k(c_k^T x) \quad , (k = 1, 2, \dots, p) \\ & Ax \le b \\ & x, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

$\lambda \le 1$ از شرایط مسئله بالا نمی‌باشد. در حقیقت λ می‌تواند بیشتر از یک باشد زیرا $\omega_k < 1$ اما در حقیقت سطح دسترسی مناسب برای هر هدف هیچ‌گاه بیشتر از یک نمی‌شود. که با حل مسئله بالا و بدست‌آوردن (x^*, λ^*) می‌توان تابع عضویت $\mu_k(c_k^T x)$ برای $k = 1, 2, \dots, p$ را بدست آورد.
اکنون نشان می‌دهیم که جواب بهینه مدل $\max - \min$ وزن‌دار فوق این هدف که نسبت سطوح دسترسی اهداف نزدیک نسبت وزن‌ها باشد را برآورده می‌کند. برای این منظور فرض کنید δ_k متغیر کمکی برای k امین محدودیت $\omega_k \lambda \le \mu_k(c_k^T x)$ باشد، داریم:

$$\omega_k \lambda + \delta_k \le \mu_k(c_k^T x) \quad k = 1, 2, \dots, p$$

همچنین می‌دانیم که هنگام جستجو کردن جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی‌خطی مایلیم تا حد امکان متغیرهای مازاد و کمکی را کاهش دهیم. چون توابع عضویت $\mu_k(c_k^T x)$ توابع شبه مقعر و کران‌دار هستند، مسئله $(WZLP)$ نمی‌تواند جواب‌های بی‌کران داشته باشد، بنابراین

[۱۴] Lin

در مسئله $(WZLP)$ زمانی λ ماکزیمم می‌شود که متغیرهای کمکی $\delta_k(k=۱,۲\dots,r)$ باید مینیمم شوند، یعنی محدودیت $\lambda\omega_k \leq \mu_k(c_k^T x)$ به تساوی نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر سطح مورد دسترسی $k-$ امین هدف $\mu_k(c_k^T)$ تا حد ممکن به $\lambda\omega_k$ نزدیک می‌شود.

در حالت ایده‌آل همه متغیرهای کمکی s_k مساوی صفر خواهند بود به همین دلیل نسبت سطوح دسترسی مساوی نسبت وزن‌ها خواهد بود. مثال زیر این بحث را تکمیل می‌کند.

مثال ۱.۶.۳. ([۲۰]) $x\in\mathbb{R}^۳$ را پیدا کنید، به‌طوری‌که

$$
\begin{aligned}
&Z_۱ = ۳x_۱ + x_۲ + x_۳ \gtrsim ۷\\
&Z_۲ = x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ \gtrsim ۸\\
&Z_۳ = x_۱ + ۲x_۲ \gtrsim ۵\\
&s.t. \begin{cases} ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۱۰ \\ x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ \leq ۸ \\ x_۳ \leq ۵ \\ x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰ \end{cases}
\end{aligned}
$$

فرض کنید توابع عضویت هر یک از آرمان‌ها به‌صورت قطعه‌ای مقعر زیر باشد.

$$
\mu_۱(Z_۱) = \begin{cases} ۱ & Z_۱ \geq ۷ \\ ۰/۲(Z_۱ - ۶) + ۰/۸ & ۶ \leq Z_۱ < ۷ \\ ۰/۳(Z_۱ - ۵) + ۰/۵ & ۵ \leq Z_۱ < ۶ \\ ۰/۵(Z_۱ - ۴) & ۴ \leq Z_۱ < ۵ \\ ۰ & Z_۱ < ۴ \end{cases}
$$

$$
\mu_۲(Z_۲) = \begin{cases} ۱ & Z_۲ \geq ۸ \\ ۰/۱۵(Z_۲ - ۴) + ۰/۴ & ۴ \leq Z_۲ < ۸ \\ ۰/۲(Z_۲ - ۲) + & ۲ \leq Z_۲ < ۴ \\ ۰ & Z_۲ < ۲ \end{cases}
$$

$$
\mu_۳(Z_۳) = \begin{cases} ۱ & Z_۳ \geq ۵ \\ ۰/۲(Z_۳ - ۴) + ۰/۸ & ۴ \leq Z_۳ < ۵ \\ ۰/۴(Z_۳ - ۲) & ۲ \leq Z_۳ < ۴ \\ ۰ & Z_۳ < ۲ \end{cases}
$$

همچنین فرض کنید تصمیم‌گیرنده وزن نسبی هر یک از سه هدف را به‌صورت $\omega_1 = 0/4$, $\omega_2 = 0/35$ و $\omega_3 = 0/25$ در نظر بگیرد.
اکنون با توجه به این داده‌ها روش $\max - \min$ وزن‌دار به مسئله $(WZLP)$ زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\max \lambda \\
&0/4\lambda \le 0/2(Z_1 - 6) + 0/8 \\
&0/4\lambda \le 0/3(Z_1 - 5) + 0/5 \\
&0/4\lambda \le 0/5(Z_1 - 4) \\
&0/35\lambda \le 0/15(Z_2 - 4) + 0/4 \\
&s.t. \quad 0/35\lambda \le 0/2(Z_2 - 2) \\
&0/25\lambda \le 0/2(Z_3 - 4) + 0/8 \\
&0/25\lambda \le 0/4(Z_3 - 2) \\
&4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8 \\
&x_3 \le 5 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

که $Z_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$, $Z_2 = x_1 - x_2 + 2x_3$ و $Z_3 = x_1 + 2x_2$
مسئله برنامه‌ریزی‌خطی بالا جواب بهینه زیر را دارد.

$$\lambda^* = 0/82, \quad x_1^* = 0/60, \quad x_2^* = 0/95, \quad x_3^* = 1/89$$

متناظر با این جواب داریم:

$$Z_1 = 4/656, \quad Z_2 = 3/435, \quad Z_3 = 2/513$$

همچنین سطح در دسترس اهداف به‌صورت زیر است:

$$\mu_1 = 0/328, \quad \mu_2 = 0/287, \quad \mu_3 = 0/205$$

اگر این مسئله با روش زیمرمن [35] حل شود. داریم:

$$\frac{\mu_1}{\omega_1} = \frac{0/328}{0/4} = 0/82, \quad \frac{\mu_2}{\omega_2} = \frac{0/287}{0/35} = 0/82, \quad \frac{\mu_3}{\omega_3} = \frac{0/205}{0/25} = 0/82$$

مشاهده می‌شود که $\lambda^* = 0/82$ سطح دسترسی بهینه مسئله $(WZLP)$ می‌باشد، لذا:

$$x_1^* = 0/50, \quad x_2^* = 1/08, \quad x_3^* = 1/95, \quad \lambda^* = 0/789$$

متناظر با این جواب داریم:

$$Z_1 = ۴/۵۲۶, \quad Z_2 = ۳/۳۱۵, \quad Z_3 = ۲/۶۵۸$$

همچنین سطح در دسترس اهداف به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ۰/۲۶۳$$

در روش (ZLP) وزن اختصاص‌یافته به همه‌ی اهداف یکسان می‌باشد. بنابراین در روش $(WZLP)$ اگر $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ باشد جواب یکسانی با روش (ZLP) خواهیم داشت.

اگر این پاسخ‌ها $(WZLP)$ و (ZLP) را با همدیگر مقایسه کنیم، می‌بینیم که روش $\max - \min$ وزن‌دار لین [۲۰] که مورد بحث بود جواب بهینه‌ای پیدا کرد که سطح مورد انتظار هدف اول (۰/۳۲۸) بیشتر از دو هدف دیگر بود. زیرا وزن مربوط به هدف اول در مقایسه با دو هدف دیگر بیشتر بود. همچنین این جواب دارای این ویژگی است که نسبت سطوح دسترسی مشابه با نسبت وزن اهداف می‌باشند.در حقیقت مسئله لی و وانگ [۱۶] جواب یکسانی با روش (ZLP) دارد چون $\delta > ۰$ کوچک است.

فصل ۴

شرایط بهینگی KKT در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار با تعمیم مشتق توابع

۱.۴ معرفی

این فصل شامل یک روش حل تئوری و عملی برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار شامل یک رابطه‌ی ترتیبی بین دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ می‌باشد. در بخش عملی رابطه‌ی ترتیبی که توسط وو [۳۳] و چالکو و کانو[۱] [۹] مطرح شده را در نظر می‌گیریم. برای این مسائل شرایط KKT را با استفاده از مفهوم gH ـ مشتق پذیری (مشتق تعمیم یافته) توابع بازه‌ای مقدار مطرح می‌کنیم. مفاهیم تئوری را با چند مثال عددی مناسب تشریح می‌کنیم.

[۱] Chalco-cano

۲.۴ مقدمات

فرض کنیم K_c نشان‌دهنده‌ی کلاس همه‌ی بازه‌های بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}$ باشد یعنی:

$$K_c = \{[a,b]; a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

و $b-a$ طول بازه‌ی $[a,b]$ باشد.همچنین فرض کنید $A \in K_c$ بازه بسته A را به صورت $[a^L, a^U]$ نمایش می‌دهیم که در آن a^L و a^U به ترتیب کران پایین و بالای بازه هستند. همچنین اگر $A=[a^L,a^U]$ و $B=[b^L,b^U]$ دو بازه بسته باشند که $A,B \in K_c$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ بنابه تعریف داریم:

$$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\} = [a^L+b^L, a^U+b^U]$$

$$\lambda A = \lambda[a^L,a^U] = \begin{cases} [\lambda a^L, \lambda a^U] & \lambda \geq ۰ \\ [\lambda a^U, \lambda a^L] & \lambda < ۰ \end{cases}$$

$$-A = [-a^U, -a^L] \qquad A-B = [a^L-b^U, a^U-b^L]$$

اکنون اگر $A=B+C$، آن‌گاه فاصله هاکاهارا[۲] A و B با نماد $A -_H B$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \ominus_H B = C \Longleftrightarrow B = A + (-۱)C$$

اگر $A=[a^L,a^U]$ و $B=[b^L,b^U]$ و $A -_H B = C = [c^L,c^U]$ وجود داشته باشد آن‌گاه $a^L-b^L \leq a^U-b^U$ که $c^U=a^U-b^U$ و $c^L=a^L-b^L$. به علاوه فرض کنید $A,B \in K_c$ فاصله هاکاهارا تعمیم‌یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \ominus_g B = C \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & A = B + C \\ (ii) & B = A + (-۱)C \end{cases}$$

برای هر دو بازه‌ی دلخواه $A=[a,b]$ و $B=[c,d]$، مقدار $A \ominus_g B$ همواره وجود دارد و مساوی است با: ([۲۶])

$$A \ominus_g B = [\min\{a-c, b-d\}, \max\{a-c, b-d\}].$$

تذکر ۱.۲.۴. فاصله هاکاهارا در صورت وجود منحصر بفرد است. شرط لازم این‌که فاصله هاکاهارا وجود داشته باشد این است که عرض بازه اول بیشتر از بازه دوم باشد. اما فاصله هاکاهارا تعمیم‌یافته همواره وجود دارد.

---

[۲] Hukuhara

۳.۴ مشتق‌پذیری توابع بازه‌ای مقدار

فرض کنید X یک زیر مجموعه ناتهی از $\mathbb{R}^n$ باشد. یک تابع $f : X \to K_c$ را یک تابع بازه‌ای ـ مقدار می‌گوییم اگر $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$ که در آن
$f^L(x) \leq f^U(x), \forall x \in X$ و $f^L, f^U : X \to \mathbb{R}$.
یک مفهوم ساده از مشتق‌پذیری توابع هدف بازه‌ای‌ـ مقدار بوسیله‌ی وو [۳۳] معرفی شد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید f یک تابع بازه‌ای‌ـ مقدار تعریف شده روی $X \subset \mathbb{R}^n$ باشد. f به طور پیوسته مشتق پذیر ضعیف در $x^* \in X$ نامیده می‌شود اگر توابع حقیقی مقدار f^L و f^U در $x^* \in X$ بطور پیوسته مشتق پذیر باشند. به عبارت دیگر تمام مشتقات جزئی f^L و f^U در یک همسایگی x^* موجود و پیوسته باشند.

مشتق‌پذیری هاکاهارا روی توابع بازه‌ای مقدار که در ابتدا توسط هاکاهارا [۱۳] معرفی شد، براساس H ـ فاصله(فاصله هاکاهارا) روی بازه‌هاست. وو [۳۳] از این مشتق‌پذیری برای مطالعه شرایط بهینگی KKT مسائل بهینه‌سازی با توابع هدف بازه‌ای مقدار استفاده کرد. به هر حال این تعریف از مشتق‌پذیری محدودکننده است.

تعریف ۲.۳.۴. ([۲۶]) مشتق هاکاهارا (Hـ مشتق) یک تابع بازه‌ای‌ـ مقدار $f : T \to K_c$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'_H(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) \ominus_H f(x^*)}{h}$$

به‌عنوان مثال، تابع بازه‌ای مقدار $[-\alpha, \beta]\left(\alpha - x^3 - \beta x^5\right) = f(x)$ که در آن $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. H – مشتق f وجود ندارد چون H – فاصله $f(0 + h) -_H f(0)$ وقتی $h \to 0^+$ وجود ندارد. در حالت کلی اگر $f(x) = Ag(x)$ که A یک بازه و $g(x)$ یک تابع حقیقی مقدار با $g'(x) < 0$ باشد آن‌گاه f در $x = x^*$ مشتق پذیر نمی‌باشد [۵] . در ادامه بحث، کلاس همه‌ی بازه‌های به صورت $T = (x_1, x_2)$ را با T نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۴. ([۲۶]) مشتق تعمیم‌یافته هاکاهارا (gHـ مشتق) یک تابع بازه‌ای‌ـ مقدار $f : T \to K_c$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'_{gH}(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) \ominus_g f(x^*)}{h}$$

اگر $f'(x^*)$ موجود باشد، می‌گوئیم f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته (gHـ مشتق‌پذیر) هاکاهارا در x^* می‌باشد. همچنین f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته در T است اگر f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته (gHـ مشتق‌پذیر) در هر $x^* \in T$ باشد.

توجه شود که حدها در فضای متریک (K_c, H) گرفته می‌شوند و H به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(A,B) = \max[\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(A,b)].$$

که در آن:

$$d(a,B) = \min_{b\in B}\|a-b\|$$

قضیه ۱.۳.۴. ([۹]) فرض کنید $f : T \to K_c$ یک تابع بازه‌ای ـ مقدار باشد. اگر f^L و f^U در $x^* \in T$ مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته در x^* می‌باشد و

$$f'(x^*) = \left[\min\{(f^L)'(x^*), (f^U)'(x^*)\}, \max\{(f^L)'(x^*), (f^U)'(x^*)\}\right].$$

قابل ذکر است که عکس قضیه فوق لزوما درست نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱.۳.۴. اگر $f(t) = [-|t|, |t|],\ t \in \mathbb{R}$ آن‌گاه f در $t = ۰$ ، gH – مشتق‌پذیر است. داریم: $f'_{gH}(۰) = [-۱, ۱]$. ولی f^L و f^U در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نمی‌باشند.

اما می‌توانیم قضیه زیر را داشته باشیم.

قضیه ۲.۳.۴. ([۹]) فرض کنید $f : T \to K_c$ یک تابع بازه‌ای‌ـ مقدار باشد. f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته در $x^* \in T$ است اگر و فقط اگر یکی از موارد زیر اتفاق بیافتد.

۱. f^L و f^U در x^* مشتق‌پذیر باشند.

۲. مشتقات $(f^L)'_-(x^*), (f^U)'_-(x^*)$ و $(f^L)'_+(x^*), (f^U)'_+(x^*)$ موجود می‌باشند و در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$(f^L)'_-(x^*) = (f^U)'_+(x^*), (f^L)'_+(x^*) = (f^U)'_-(x^*)$$

قضیه ۳.۳.۴. ([۸]) فرض کنید $f : T \to K_c$ در $x^* \in T$ مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته باشد. آن‌گاه $f^L + f^U$ یک تابع مشتق‌پذیر در x^* می‌باشد.

تعریف ۴.۳.۴. ([۸]) فرض کنید f یک تابع بازه‌ای‌ـ مقدار تعریف شده روی $X \subset \mathbb{R}^n$ باشد و فرض کنید $x^* = (x_۱^*, \ldots, x_n^*)$ در X ثابت باشد.

۱. تابع بازه‌ای مقدار $H_i(x_i) = f(x_۱^*, \ldots, x_{i-۱}^*, x_i, x_{i+۱}^*, \ldots, x_n^*)$ را در نظر می‌گیریم. اگر H_i در x_i^*، مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته باشد، می‌گوییم f دارای، i – امین مشتق جزئی در x^* است و به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_g (x^*) = (H_i)'(x_i^*).$$

۲. گوییم f به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته در x^* است اگر تمام مشتقات جزئی تعمیم‌یافته $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\right)\ \forall i=۱,۲,\ldots,n$ موجود و پیوسته باشند.

قضیه ۴.۳.۴. ([۸]) فرض کنید f یک تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $X\subset\mathbb{R}^n$ باشد. اگر f در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته باشد، آن‌گاه f^L+f^U در x^* به طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

در ادامه تابع چند مقداره بازه‌ای $F(x)=(f_۱(x),\ldots,f_r(x))$ تعریف شده روی $X\subset\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم که در آن:

$$f_k(x)=[f_k^L(x),f_k^U(x)],\quad k=۱,۲,\ldots,p$$

تعریف ۵.۳.۴. فرض کنید F یک تابع چند مقداره بازه‌ای باشد، گوییم:

۱. F در $x^*\in X$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف است اگر $f_k,\ k=۱,\ldots,p$ در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف باشند.

۲. F در $x^*\in X$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته است اگر $f_k,\ k=۱,\ldots,p$ در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته باشند.

با توجه به تعریف ۱.۳.۴ واضح است که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری ضعیف تابع f با نقاط ابتدا و انتهای بازه رابطه دارد. لذا در مورد مشتق‌پذیر بودن f نمی‌توانیم نظر بدهیم. برای مثال تابع بازه‌ای مقدار $f(x)=[-|x|,|x|],\ x\in\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. f در $x=۰$ بطور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف نمی‌باشد ولی f در $x=۰$، $gH-$ مشتق‌پذیر است و برای همه‌ی $x\in\mathbb{R}$ داریم $f'(x)=[-۱,۱]$.

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنید F یک تابع چند مقداره بازه‌ای باشد، آن‌گاه:

۱. F به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف در x^* است اگر $f_k^L,f_k^U,\ k=۱,\ldots,p$ در x^* مشتق‌پذیر باشند.

۲. اگر F بطور پیوسته مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته در x^* باشد آن‌گاه $f_k^L+f_k^U,\ k=۱,\ldots,p$ بطور پیوسته مشتق‌پذیر در x^* می‌باشند.

۴.۴ مفاهیم جواب

در این بخش مفاهیم جواب LU و LS را با ارائه مثال‌های مناسب تشریح می‌کنیم. مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار زیر را در نظر بگیرید.

$$(MIP۱)\qquad \min F(x)=(f_۱(x),f_۲(x),\ldots,f_p(x))$$
$$s.t.\quad x=(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)\in X\subseteq\mathbb{R}^n$$

که در آن $f_k(x) = [f_k^L(x), f_k^U(x)],\ k = ۱,۲,\dots,p$ توابع بازه‌ای مقدار هستند و فرض می‌شود X مجموعه شدنی یک زیر مجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ است.
چون هر f_k یک بازه بسته در $\mathbb{R}$ می‌باشد از مفهومی شبیه به آن‌چه که وو [۳۳] ارائه کرد، استفاده می‌کنیم. وو [۳۳] رابطه ترتیبی جزئی $\underset{LU}{\preceq}$ را بین دو بازه بسته به‌صورت زیر در نظر گرفت.

فرض کنید $A, B \in K_c$. آن‌گاه گوییم $A \underset{LU}{\preceq} B$ اگر و فقط اگر $a^U \le b^U,\ a^L \le b^L$. همچنین می‌نویسیم $A \underset{LU}{\prec} B$ اگر و فقط اگر $A \underset{LU}{\preceq} B$ و $A \neq B$ یا به طور معادل $A \underset{LU}{\prec} B$ اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} a^L < b^L \\ a^U \le b^U \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^L \le b^L \\ a^U < b^U \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^L < b^L \\ a^U < b^U \end{cases} \tag{۱.۴}$$

بردار $A = (A_۱, \dots, A_r)$ یک بردار بازه‌ای مقدار نامیده می‌شود اگر $A_k \in K_c,\ k = ۱,۲,\dots,r$
همچنین برای هر دو بردار بازه‌ای مقدار $A = (A_۱, \dots, A_r)$ و $B = (B_۱, \dots, B_r)$ می‌گوییم:
$A \underset{LU}{\preceq} B$ اگر و فقط اگر $A_k \underset{LU}{\preceq} B_k$ برای هر $k = ۱,۲,\dots,r$. همچنین می‌نویسیم $A \underset{LU}{\prec} B$ اگر و فقط اگر $A_k \underset{LU}{\preceq} B_k$ برای هر $k = ۱,۲,\dots,r$ و $A_h \underset{LU}{\prec} B_h$ برای حداقل یک اندیس h.

تعریف ۱.۴.۴. ([۳۳]) فرض کنید x^* یک جواب شدنی مسئله $(MIP۱)$ باشد. گوییم x^*:

۱. جواب بهینه LU – پارتو برای مسئله $(MIP۱)$ است اگر هیچ $\bar{x} \in X$ وجود نداشته باشد بطوریکه $F(\bar{x}) \underset{LU}{\prec} F(x^*)$.

۲. جواب بهینه LU – پارتو قوی برای مسئله $(MIP۱)$ است اگر هیچ $\bar{x} \in X$ وجود نداشته باشد بطوریکه $F(\bar{x}) \underset{LU}{\preceq} F(x^*)$.

۳. جواب بهینه LU – پارتو ضعیف برای مسئله $(MIP۱)$ است اگر هیچ $\bar{x} \in X$ وجود نداشته باشد بطوریکه $f_k(\bar{x}) \underset{LU}{\prec} f_k(x^*),\ k = ۱,۲,\dots,r$.

تذکر ۱.۴.۴. اگر X_{WP}^{LU} مجموعه جواب‌های بهینه LU–پارتو ضعیف ، X_P^{LU} مجموعه جواب‌های بهینه LU – پارتو و X_{SP}^{LU} مجموعه جواب‌های بهینه LU – پارتو قوی باشند، آن‌گاه داریم:

$$X_{SP}^{LU} \subseteq X_P^{LU} \subseteq X_{WP}^{LU}.$$

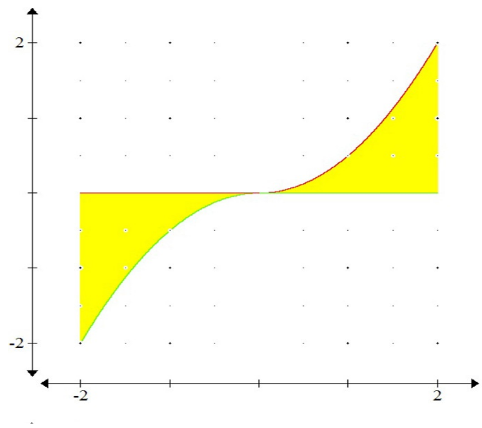
مثال ۱.۴.۴. مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} P_۱: \quad & \min\ F(x) \\ s.t. \quad & x - ۲ \le ۰ \\ & -x - ۲ \le ۰ \end{aligned}$$

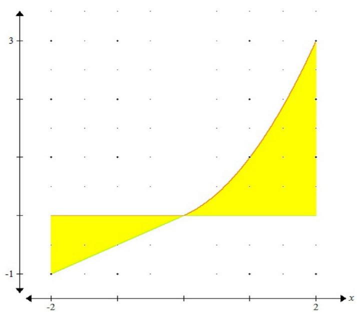
که در آن $F(x)=(f_{11}(x),f_{12}(x))$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f_{11}(x)=\begin{cases}[0,\frac{x^2}{2}] & x\geq 0\\ [\frac{-x^2}{2},0] & x\leq 0\end{cases}$$

$$f_{12}(x)=\begin{cases}[0,\frac{x(x+1)}{2}] & x\geq 0\\ [\frac{x^2}{2},0] & x\leq 0\end{cases}$$



شکل ۱.۴: نمودار تابع $f_{11}(x)$ تحت محدودیت‌ها



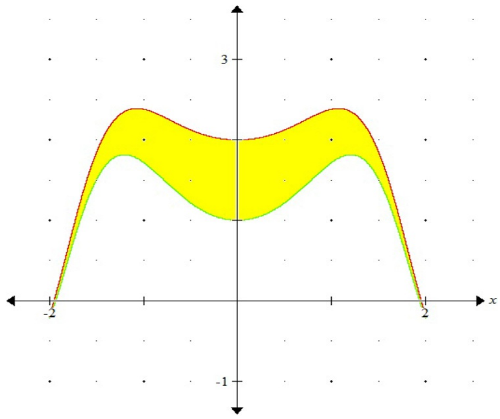
شکل ۲.۴: نمودار تابع $f_{12}(x)$ تحت محدودیت‌ها

واضح است که درشکل ۱.۴ و ۲.۴ که هیچ $-2\leq x^*_{11}\leq 2$ وجود ندارد به‌طوری‌که $f_{11}(x^*_{11})\underset{LU}{\preceq} f_{11}(x^*=-2)$ و $f_{12}(x^*_{11})\underset{LU}{\preceq} f_{12}(x^*=-2)$ بنابراین با توجه به تعریف ۱.۴.۴ و تذکر ۱.۴.۴ می‌بینیم که $-2\in X^{LU}_{SP}\cap X^{LU}_{P}\cap X^{LU}_{WP}$ برای مسئله P_1 می‌باشد.

در ادامه اگر $F(x)$ را به‌صورت $F(x)=(f_{11}(x),f_{12}(x),f_{13}(x))$ در نظر بگیریم که در آن $f_{13}(x)=[\sin x^2+\cos\frac{x}{2},\sin x^2+\cos x+1]$، آن‌گاه $x^*_{31}=2$ به‌طوری‌که

$f_{۱۳}(x^*_{۳۱}) = f_{۱۳}(x^* = -۲)$ پس برای مسئله $P_۱$ داریم:

$$-۲ \in X^{LU}_P \cap X^{LU}_{WP},\ -۲ \notin X^{LU}_{SP}.$$



شکل ۳.۴: نمودار تابع $f_{۱۳}(x)$ تحت محدودیت‌ها

در ادامه اگر $F(x)$ را به‌صورت $F(x) = (f_{۱۳}(x), f_{۱۴}(x), f_{۱۵}(x))$ در نظر بگیریم که در آن:

$$f_{۱۴}(x) = [\frac{۳}{۲}\sin x^۳, \frac{۱}{۲}(\sin x^۳ + ۱)],\quad f_{۱۵}(x) = [۳\sin(x-۱)^۳, \sin(x-۱)^۳]$$

آن‌گاه $۲ \leq x^*_{۴۲} \approx ۱/۶۷۷۶$ و $-۲ \leq x^*_{۴۱} \approx -۱/۱۶۳۳$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f_{۱۴}(x^*_{۴۱}) = f_{۱۱}(x^*_{۴۲}) = f_{۱۴}(x^* \approx -۲)$$

و

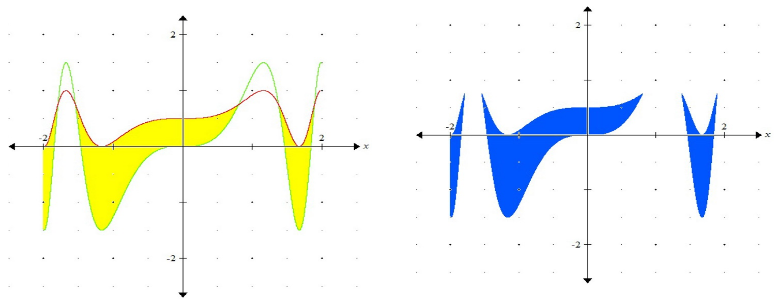
$$-۲ \leq x^*_{۵۱} \approx -۱/۷۳۴۶,\quad x^*_{۵۲} \approx -۱/۴۲۴۶,\quad x^*_{۵۳} \approx ۰/۹۹۱۳,\quad x^*_{۵۴} \approx -۰/۱۵۷۵ \leq ۲$$

بنابراین:

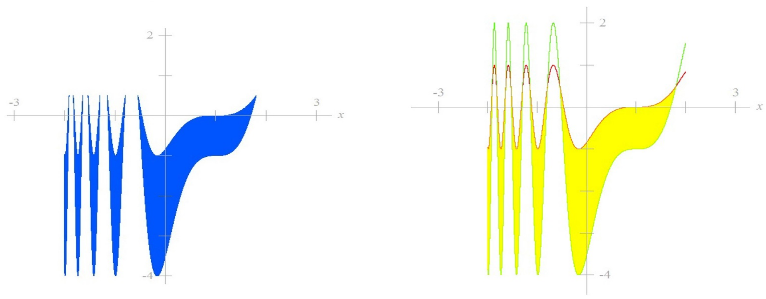
$$f_{۱۵}(x^*_{۵۱}) = f_{۱۵}(x^*_{۵۲}) = f_{۱۵}(x^*_{۵۳}) = f_{۱۵}(x^*_{۵۴}) = f_{۱۵}(x^* \approx -۲)$$

لذا برای مسئله $P_۱$ داریم:

$$-۲ \in X^{LU}_{WP},\ -۲ \notin X^{LU}_P, X^{LU}_{SP}$$



شکل ۴.۴: سمت چپ نمودار رفتار $f_{۱۴}$ و سمت راست نمایش رفتار $f^L_{۱۴}$ و $f^U_{۱۴}$



شکل ۵.۴: سمت چپ نمودار رفتار $f_{۱۵}$ و سمت راست نمایش رفتار $f^L_{۱۵}$ و $f^U_{۱۵}$

توابع	$f_{۱۱}(x)$	$f_{۱۲}(x)$	$f_{۱۳}(x)$	$f_{۱۴}(x)$	$f_{۱۵}(x)$
نقاط LU – بهینه	$x^* = -۲$	$x^* = -۲$	$x^* = -۲$ $x^*_{۳۱} = ۲$	$x^* \approx -۲$ $x^*_{۴۱} = -۱/۱۶۳۳$ $x^*_{۴۲} \approx -۱/۶۷۷۶$	$x^* \approx -۲$ $x^*_{۵۱} \approx -۱/۷۳۴۶$ $x^*_{۵۲} \approx -۱/۴۲۴۶$ $x^*_{۵۳} \approx -۰/۹۹۱۳$ $x^*_{۵۴} \approx -۰/۱۵۷۵$

جدول ۱.۴: خلاصه‌ای از نقاط LU – بهینه

با توجه به بحث بالا نقاط LU – بهینه را با توجه به روندی که مسئله داشت در جدول ۱.۴ به‌طور خلاصه آورده شده است.

برای بیان مفهوم جواب LS ، فرض کنید طول بازه بسته $A = [a^L, a^U]$ را با $\omega(A) = a^S = a^U - a^L$ نشان دهیم.

در این فصل بدون از دست دادن کلیت مسئله، مسائل مینیمم‌سازی را در نظر می‌گیریم. با این مفهوم برای $A, B \in K_c$ می‌نویسیم $A \underset{LS}{\preceq} B$ اگر و فقط اگر $a^L \leq b^L$ و $a^S \leq b^S$. همچنین

$A \underset{LS}{\prec} B$ اگر و فقط اگر $A \neq B,\ A \underset{LS}{\preceq} B$ به‌عبارت دیگر $A \underset{LS}{\prec} B$ اگر وفقط اگر

$$\begin{cases} a^L < b^L \\ a^S < b^S \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^L \leq b^L \\ a^S < b^S \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^L < b^L \\ a^S \leq b^S \end{cases}$$

برای جزئیات بیشتر به [۸] رجوع شود.

فرض کنید A و B دو بردار بازه‌ای مقدار باشند، می‌نویسیم $A \underset{LS}{\preceq} B$ اگر و فقط اگر $A_k \underset{LS}{\preceq} B_k,\ k = ۱,۲,\dots,r$. همچنین $A \underset{LS}{\prec} B$ اگر و فقط اگر $A_k \underset{LS}{\preceq} B_k$ برای $k = ۱,۲,\dots,r$ و $A_h \underset{LS}{\prec} B_h$ برای حداقل یک اندیس h.

تعریف ۲.۴.۴. فرض کنید x^* جواب شدنی مسئله $(MIP۱)$ باشد، گوییم x^*:

۱. جواب بهینه LS – پارتو مسئله $(MIP۱)$ است اگر هیچ $\bar{x} \in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که
$F(\bar{x}) \underset{LS}{\prec} F(x^*)$.

۲. جواب بهینه LS – پارتو قوی مسئله $(MIP۱)$ است اگر هیچ $\bar{x} \in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $F(\bar{x}) \underset{LS}{\preceq} F(x^*)$.

۳. جواب بهینه LS – پارتو ضعیف مسئله $(MIP۱)$ است اگر هیچ $\bar{x} \in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $f_k(\bar{x}) \underset{LS}{\prec} f_k(x^*),\ k = ۱,۲,\dots,r$.

تذکر ۲.۴.۴. فرض کنید X_{WP}^{LS} مجموعه جواب‌های بهینه LS – پارتو ضعیف، X_{SP}^{LS} مجموعه جواب‌های بهینه LS – پارتو قوی و X_{P}^{LS} مجموعه جواب‌های بهینه LS – پارتو مسئله $(MIP۱)$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$X_{SP}^{LS} \subseteq X_{P}^{LS} \subseteq X_{WP}^{LS}$$

مثال ۲.۴.۴. تابع $F(x) = (f_{۱۱}(x), f_{۱۲}(x), f_{۱۶}(x))$ را در نظر بگیرید که در آن:

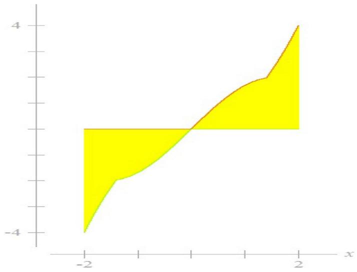
$$f_{۱۶}(x) = \begin{cases} [\min(-x^۲, ۲\sin x), ۰] & x \leq ۰ \\ [۰, \max(x^۲, ۲\sin x)] & x \geq ۰ \end{cases}$$

بنابراین هیچ $x_{۱۱}^* \leq ۲-$ وجود ندارد به‌طوری‌که:

$$f_{۱۱}(x_{۱۱}^*) \underset{LS}{\preceq} f_{۱۱}(x^* = ۰),\ f_{۱۲}(x_{۱۱}^*) \underset{LS}{\preceq} f_{۱۲}(x^* = ۰),\ f_{۱۶}(x_{۱۱}^*) \underset{LS}{\preceq} f_{۱۶}(x^* = ۰)$$

بنابراین با توجه به تعریف ۲.۴.۴ و تذکر ۲.۴.۴ می‌بینیم که برای مسئله $(P_۱)$:

$$۰ \in X_{SP}^{LS} \cap X_{P}^{LS} \cap X_{WP}^{LS}$$



شکل ۶.۴: نمودار رفتار $f_{۱۶}$ تحت محدودیت‌ها

اکنون فرض کنیم $F(x)$ به‌صورت $F(x)=(f_{۱۲}(x), f_{۱۶}(x), f_{۱۷}(x))$ باشد که در آن:

$$f_{۱۷}(x)=\left[\frac{۱}{۲}(\cos x^{۲}-۱), \frac{۵}{۳}\cos x^{۲}\right]$$

بنابراین

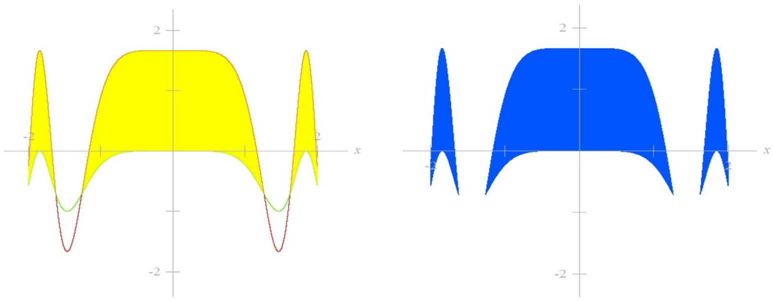
$$x^*_{۷۱}\approx ۱/۸۴۷۵, x^*_{۷۲}\approx -۱/۸۴۷۵, x^*_{۷۲}\in(۰-\delta_۱, ۰+\delta_۱), \quad \delta_۱\approx ۰/۳۱۶۹>۰$$

وجود دارد به‌طوری‌که:

$$f_{۱۷}(x^*_{۷۱})=f_{۱۷}(x^*_{۷۲})=f_{۱۷}(x^*_{۷۱})=f_{۱۷}(x^*=۰)$$

بنابراین برای مسئله $(P_۱)$ داریم:

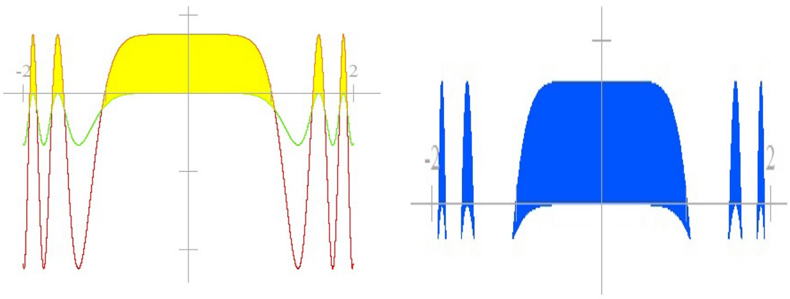
$$۰\in X_P^{LS}\cap X_{WP}^{LS}, \quad ۰\notin X_{SP}^{LS}$$



شکل ۷.۴: سمت چپ نمایش رفتار $f_{۱۷}$ و سمت راست نمایش رفتار $f^L_{۱۷}$ و $f^U_{۱۷}$

در ادامه $F(x)$ را به‌صورت $F(x)=(f_{۱۷}(x), f_{۱۸}(x), f_{۱۹}(x))$ در نظر بگیرید که در آن:

$$f_{۱۸}(x)=\left[\frac{۱}{۲}(\cos x^{۴}-۱), \frac{۳}{۲}(\cos x^{۶}-\frac{۱}{۲})\right]$$
$$f_{۱۹}(x)=\left[\frac{۱}{۴}(\cos x^{۵}-۱), \frac{۳}{۲}(\cos x^{۵}-۱)\right]$$



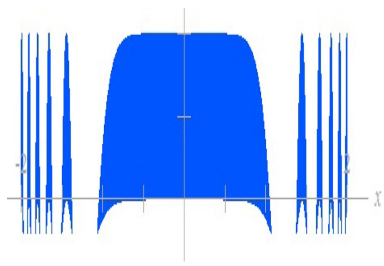
شکل ۸.۴: سمت چپ رفتار توابع $f^L_{۱۸}(x)$ و $f^U_{۱۸}(x)$ و سمت راست رفتار تابع $f_{۱۸}(x)$

بنابراین:

$$x^*_{۸۱} \approx ۱٫۸۸۲۸,\ x^*_{۸۲} \approx -۱٫۸۸۲۸,\ x^*_{۸۳} \approx ۱٫۵۷۸۹$$
$$x^*_{۸۴} \approx -۱٫۵۷۸۹,\ x^*_{۸۱} \in (۰ - \delta_۲, ۰ + \delta_۲),\ \delta_۲ \approx ۰٫۷۰۶۰ > ۰$$

وجود دارد به‌طوری‌که:

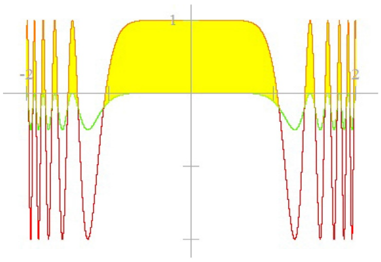
$$f_{۱۸}(x^*_{۸۱}) = f_{۱۸}(x^*_{۸۲}) = f_{۱۸}(x^*_{۸۳}) = f_{۱۸}(x^*_{۸۴}) = f_{۱۸}(x^*_{۸۹}) = f_{۱۸}(x^* = ۰)$$



شکل ۹.۴: رفتار تابع $f_{۱۹}(x)$ تحت محدودیت‌ها

همچنین وجود دارد

$$x^*_{۹۱} \approx ۱٫۹۹۲۷۵,\ x^*_{۹۲} \approx -۱٫۹۹۲۷۵,\ x^*_{۹۳} \approx ۱٫۹۰۵۶,\ x^*_{۹۴} \approx -۱٫۹۰۵۶$$
$$x^*_{۹۵} \approx ۱٫۷۹۹۶۵,\ x^*_{۹۶} - ۱٫۷۹۹۶۵ \approx, x^*_{۹۷} \approx ۱٫۶۵۸۹۸$$
$$x^*_{۹۸} \approx -۱٫۶۵۸۹۸,\ x^*_{۹۹} \in (۰ - \delta_۳, ۰ + \delta_۳),\ \delta_۳ \approx ۰٫۵۵۴۷$$



شکل ۱۰.۴: رفتار توابع $f^L_{19}(x)$ و $f^U_{19}(x)$

به‌طوری‌که:

$$f_{19}(x^*_{91}) = f_{19}(x^*_{92}) = f_{19}(x^*_{93}) = f_{19}(x^*_{94}) = f_{19}(x^*_{95})$$
$$= f_{19}(x^*_{96}) = f_{19}(x^*_{97}) = f_{19}(x^*_{98}) = f_{19}(x^*_{99}) = f_{19}(x^* = 0)$$

باتوجه به بحث بالا نقاط بهینه LS − پارتو را در جدول (۲.۴) به‌طور خلاصه ارائه می‌دهیم.

توابع	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{16}(x)$	$f_{17}(x)$	$f_{18}(x)$	$f_{19}(x)$
نقاط LS − بهینه	$x^* = 0$	$x^* = 0$	$x^* = 0$	$x^* = 0$ $x^*_{71} \approx 1.8475$ $x^*_{72} \approx -1.8475$ $x^*_{72} \in$ $(0-\delta_1, 0+\delta_1)$ where $\delta_1 \approx 0.3169$	$x^* = 0$ $x^*_{81} \approx 1.8828$ $x^*_{82} \approx -1.8828$ $x^*_{83} \approx 1.5789$ $x^*_{84} \approx -1.5789$ $x^*_{81} \in$ $(0-\delta_2, 0+\delta_2)$ where $\delta_2 \approx 0.5060$	$x^* = 0$ $x^*_{91} \approx 1.99275$ $x^*_{92} \approx -1.99275$ $x^*_{93} \approx 1.9056$ $x^*_{94} \approx -1.9056$ $x^*_{95} \approx 1.79965$ $x^*_{96} \approx -1.79965$ $x^*_{97} \approx 1.65898$ $x^*_{98} \approx -1.65898$ $x^*_{99} \in$ $(0-\delta_3, 0+\delta_3)$ where $\delta_3 \approx 0.5547$

جدول ۲.۴: خلاصه‌ای از نقاط LS − بهینه

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید A و B دو بازه بسته در K_c باشند.

۱. اگر $A \underset{LS}{\preceq} B$ آن‌گاه $A \underset{LU}{\preceq} B$.

۲. اگر $A \underset{LS}{\prec} B$ آن‌گاه $A \underset{LU}{\prec} B$.

برهان. برای اثبات (۱) فرض کنید $A \underset{LS}{\preceq} B$ بنابراین داریم:

•
$$a^L \le b^L,\, a^S \le b^S \Longrightarrow a^L \le b^L,\, a^U - a^L \le b^U - b^L$$
$$a^U \le b^U + (a^L - b^L) \le b^U + (b^L - b^L) = b^U \Longrightarrow A \underset{LU}{\preceq} B.$$

• برای اثبات (۲) فرض کنید $A \underset{LS}{\prec} B$ بنابراین سه حالت زیر را داریم.

– حالت اول:
$$a^L < b^L,\, a^S \le b^S \Longrightarrow a^L < b^L,\, a^U - a^L \le b^U - b^L$$
$$a^U < a^U + (b^L - a^L) \le b^L + (b^U - b^L) = b^U \Longrightarrow A \underset{LU}{\prec} B.$$

– حالت دوم: $a^L \le b^L,\, a^S < b^S$ حالت سوم $a^L < b^L,\, a^S < b^S$ به‌صورت مشابه اثبات می‌شود.

□

قضیه ۲.۴.۴. فرض کنید $A = (A_۱, A_۲, \ldots, A_r)$ و $B = (B_۱, B_۲, \ldots, B_r)$ دو بردار بازه‌ای مقدار باشند.

۱. اگر $A \underset{LS}{\preceq} B$ آن‌گاه $A \underset{LU}{\preceq} B$.

۲. اگر $A \underset{LS}{\prec} B$ آن‌گاه $A \underset{LU}{\prec} B$.

برهان. چون A و B دو بردار بازه‌ای مقدار هستند و $A \underset{LS}{\preceq} B$، بنابراین $A_k \underset{LS}{\preceq} B_k$، به ازای $k = ۱, ۲, \ldots, r$. به‌عبارت دیگر $a_k^L \le b_k^L,\, a_k^S \le b_k^S$ به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, r$. در نتیجه داریم:
$$a_k^L \le b_k^L,\, a_k^U - a_k^L \le b_k^U - b_k^L, \quad k = ۱, ۲, \ldots, r$$

بنابراین داریم:
$$a_k^U \le a_k^U + (b_k^L - a_k^L) = b_k^L + (a_k^U - a_k^L) \le b_k^L + (b_k^U - b_k^L) = b_k^U$$

بنابراین $A \underset{LU}{\preceq} B$. قسمت دوم هم با توجه به اثبات بالا و قسمت (۲) قضیه ۱.۴.۴ بدیهی می‌باشد. □

توجه کنید عکس قضیه ۲.۴.۴ صحیح نمی‌باشد، برای مثال فرض کنید
$$A = (A_۱ = [-۱, ۰], A_۲ = [-۱, ۰]), \quad B = (B_۱ = [-\frac{۱}{۲}, ۰], B_۲ = [-\frac{۱}{۲}, ۰])$$
بنابراین $A \underset{LU}{\prec} B$ ولی $A \underset{LS}{\not\prec} B$.

قضیه ۳.۴.۴. فرض کنید X ناحیه شدنی مسئله $(MIP1)$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{(الف)}X_{SP}^{LU} \subseteq X_{SP}^{LS} \qquad \text{(ب)}X_{P}^{LU} \subseteq X_{P}^{LS} \qquad \text{(ج)}X_{WP}^{LU} \subseteq X_{WP}^{LS}.$$

برهان. فرض کنید x جواب شدنی مسئله $(MIP1)$ باشد به‌عبارت دیگر $x \in X$
(الف) فرض کنید $x \in X_{SP}^{LU}$. با برهان خلف فرض کنید $x \notin X_{SP}^{LS}$. بنابراین باتوجه به‌تعریف، $\hat{x} \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $F(\hat{x}) \underset{LS}{\preceq} F(x)$
. با توجه به قسمت (الف) قضیه ۲.۴.۴ می‌بینیم که $F(\hat{x}) \underset{LU}{\preceq} F(x)$ که متناقض با $x \in X_{SP}^{LU}$ می باشد. پس داریم $X_{SP}^{LU} \subseteq X_{SP}^{LS}$.
(ب) مشابه قسمت قبل اثبات می‌شود.
برای اثبات قسمت (ج) فرض کنید $x \in X_{WP}^{LU}$ ، با برهان خلف فرض کنید $x \notin X_{WP}^{LS}$. بنابراین باتوجه به تعریف ۲.۴.۴ ، $\bar{x} \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_k(\bar{x}) \underset{LU}{\prec} f_k(x), k = 1,2,\dots,r$ که مخالف با این واقعیت است که $x \in X_{WP}^{LU}$. بنابراین $X_{WP}^{LU} \subseteq X_{WP}^{LS}$. □

عکس قضیه بالا صحیح نمی‌باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۴.۴. برای مسئله

$$\min F(x) = \Big([-x,0],[-\frac{x}{a},0]\Big)$$
$$s.t. \quad x \in \mathbb{R}^+$$

که $a > 0$ ادعا می‌کنیم که $0 \in X_{SP}^{LS}$. با برهان خلف فرض کنید $0 \notin X_{SP}^{LS}$ بنابراین با توجه به تعریف ۲.۴.۴، $x \neq 0$ در $\mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری‌که $F(x) \underset{LS}{\preceq} F(0)$

$$\Big([-x,0],[\frac{x}{a},0]\Big) \underset{LS}{\preceq} ([0,0],[0,0])$$

به‌عبارت دیگر:

$$f_1^s(x) = x \leq 0 = f_1^s(0), \qquad f_2^s(x) = \frac{x}{a} \leq 0 = f_2^s(0)$$

که یک تناقض است، زیرا $x,a > 0$ بنابراین $0 \in X_{SP}^{LS}$. به‌هر حال $0 \notin X_{SP}^{LS}$. چون $1 \in \mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری‌که $F(1) \underset{LU}{\prec} F(0)$ به‌علاوه با توجه به تذکر ۲.۴.۴ داریم $0 \in X_P^{LS}$ همچنین از تذکر ۲.۴.۴ داریم $0 \in X_{WP}^{LS}$ اما $0 \notin X_{WP}^{LU}$ زیرا $1 \in \mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_1(1) \underset{LU}{\prec} f_1(0)$ و $f_2(1) \underset{LU}{\prec} f_2(0)$.

۵.۴ شرایط بهینگی کروش_ کان_ تاکر

مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$(P) \qquad \min F(x) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
$$s.t. \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1,2,\dots,m$$

که در آن f و $g_i, i = ۱,۲,\dots,m$ توابع حقیقی مقدار می‌باشند. و فرض می‌کنیم

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(x) \leq ۰\}$$

مجموعه شدنی مسئله P باشد که محدب است.
در ادامه‌ی این فصل فرض می‌کنیم که ناحیه شدنی مورد بررسی محدب است و توابع محدودیت حقیقی مقدار $g_i, i = ۱,۲,\dots,m$ در فرض‌های KKT در نقطه x^* صدق کنند.در قضیه بعد شرایط KKT را برای مسئله (P) ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۴. ([۴]) فرض کنید $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq ۰,\ i = ۱,۲,\dots,m\}$ مجموعه شدنی باشد و $x^* \in X$ و همچنین فرض کنید تابع هدف $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب و به‌طور پیوسته مشتق پذیر در x^* باشد. اگر ضرایب (لاگرانژ) $۰ \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = ۱,۲,\dots,m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که شرایط KKT زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)}\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$
$$\text{(ب)}\ \mu_i g_i(x^*) = ۰, \quad i = ۱,۲,\dots,m$$

آن‌گاه x^* یک جواب بهینه برای مسئله (P) می‌باشد.
در ادامه این بخش شرایط بهینگی KKT را برای مسئله بهینه سازی $(MIP۱)$ با استفاده از مشتق تعمیم یافته بر روی توابع بازه‌ای مقدار بیان می‌کنیم. مسئله $(MIP۱)$ را با مجموعه شدنی $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(x) \leq ۰,\ i = ۱,۲,\dots,m\}$ در نظر بگیرید که g_i ها $i = ۱,۲,\dots,m$ توابع حقیقی مقدار هستند. به‌عبارت دیگر:

$$\begin{aligned}(MIP۲): \qquad & \min F(x) = (f_۱(x), f_۲(x), \dots, f_r(x)) \\ & s.t. \quad g_i(x) \leq ۰ \quad i = ۱,۲,\dots,m\end{aligned}$$

تعریف ۱.۵.۴. فرض کنید f یک تابع بازه‌ای تعریف شده روی مجموعه محدب $X \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد آن‌گاه:

۱. f در $x^* \in X$، LU – محدب نامیده می‌شود اگر:

$$f(\lambda x^* + (۱-\lambda)x) \underset{LU}{\preceq} \lambda f(x^*) + (۱-\lambda) f(x),\ \lambda \in (۰,۱),\ x \in X$$

۲. f در $x^* \in X$، LS – محدب نامیده می‌شود اگر:

$$f(\lambda x^* + (۱-\lambda)x) \underset{LS}{\preceq} \lambda f(x^*) + (۱-\lambda) f(x),\ \lambda \in (۰,۱),\ x \in X$$

قضیه ۲.۵.۴. فرض کنید f تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی مجموعه محدب $X \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد و فرض کنید $x^* \in X$ آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند.

۱. F، $LU-$ محدب است اگر و فقط اگر f^L و f^U در x^* محدب باشند.

۲. F، $LS-$ محدب در x^* است اگر و فقط اگر f^L و f^S در x^* محدب باشند.

۳. اگر F، در x^*، $LS-$ محدب باشد آن‌گاه f در x^*، $LU-$ محدب نیز است.

برهان. موارد (۱)و (۲) از تعریف ۲.۵.۴ نتیجه می‌شوند و قسمت(۳) هم معادل قضیه ۲.۴.۴ می‌باشد. □

تعریف ۲.۵.۴. فرض کنید F یک تابع چند مقداره بازه‌ای تعریف شده روی مجموعه محدب $X \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد و فرض کنید $x^* \in X$ آن‌گاه:

۱. F در x^*، $LU-$ محدب است اگر هر $f_k,\ k=1,2,\dots,r$ در x^*، $LU-$ محدب باشد.

۲. F در x^*، $LS-$ محدب است اگر هر $f_k,\ k=1,2,\dots,r$ در x^*، $LS-$ محدب باشد.

قضیه ۳.۵.۴. فرض کنید F یک تابع چند مقداره بازه‌ای تعریف شده روی مجموعه محدب $X \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد و $x^* \in X$. آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. F در x^* ، $LU-$محدب است اگر و فقط اگر $f_k^U, f_k^L,\ k=1,2,\dots,r$ در x^* محدب باشند.

۲. F در x^* ، $LS-$محدب است اگر و فقط اگر $f_k^S, f_k^L,\ k=1,2,\dots,r$ در x^* محدب باشند.

۳. اگر F در x^* ، $LS-$ محدب باشد آن‌گاه F در x^* ، $LU-$ محدب است.

قضیه ۴.۵.۴. فرض کنید F تابع چندهدفه بازه‌ای مقدار و به‌طور پیوسته $gH-$ مشتق‌پذیر در x^* باشد و $f_k^U, f_k^L,\ k=1,2,\dots,r$ توابعی محدب باشند. اگر ضرایب (لاگرانژ) $0 < \lambda_k \in \mathbb{R}, k=1,2,\dots,r$ و $0 \le \mu_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\dots,m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که شرایط KKT زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)}\ \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \nabla(f_k^L+f_k^U)(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(x^*)=0$$

$$\text{(ب)}\ \mu_i g_i(x^*)=0 \quad i=1,2,\dots,m$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP2)$ داریم:

$$x^* \in X_P^{LU},\ x^* \in X_P^{LS}.$$

برهان. چون F در x^* بطور پیوسته $gH-$ مشتق‌پذیر است، با توجه به قضیه ۵.۳.۴، $f_k^L+f_k^U$ $k=1,2,\dots,r$ در x^* بطور پیوسته مشتق‌پذیر است.

تابع حقیقی مقدار زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\bar{f}(x)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(f_k^L+f_k^U)(x) \qquad (2.4)$$

چون $f_k^L + f_k^U$ ،$k = ۱,۲,\dots,r$ توابع محدب و حقیقی مقدار هستند بنابراین $\bar{f}$ نیز محدب و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر در x^* است. پس داریم:

$$\nabla \bar{f}(x^*) = \sum_{k=۱}^{r} \lambda_k \nabla (f_k^L + f_k^U)(x^*) \tag{۳.۴}$$

بنابراین با توجه به شرایط (الف) و (ب) به موارد زیر می‌رسیم:

$$(\text{ج})\nabla \bar{f}(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$
$$(\text{د})\mu_i g_i(x^*) = ۰, \quad i = ۱,۲,\dots,m$$

در قضیه ۱.۵.۴ دیدیم که x^* جواب بهینه تابع هدف حقیقی مقدار $\bar{f}$ با محدودیت‌های مسئله $(MIP۲)$ است. به‌عبارت دیگر:

$$\bar{f}(x^*) \leq \bar{f}(x), \quad \forall x \in X \tag{۴.۴}$$

حال فرض کنید $x^* \notin X_P^{LU}$، در نتیجه بنابه تعریف ۱.۴.۴، وجود دارد $x \in X$ و $۱ \leq h \leq r$ به‌طوری‌که $f_h(x) \underset{LU}{\prec} f_h(x^*)$ بنابراین با توجه به روابط (۱.۴) و (۲.۴) می‌بینیم که $\bar{f}(x) < \bar{f}(x^*)$ (چون $\lambda_k > ۰, k = ۱,۲,\dots,r$) که با (۴.۴) تناقض دارد پس $x \in X_P^{LU}$. بنابراین از قضیه ۳.۴.۴ نتیجه می‌شود که $x^* \in X_P^{LS}$ می‌باشد و اثبات کامل است. □

نتیجه ۱.۵.۴. فرض کنید F تابع چند هدفه بازه‌ای مقدار و بطور پیوسته gH – مشتق‌پذیر و LU – محدب در x^* باشد. اگر ضرایب (لاگرانژ) برای $۰ < \lambda_k \in \mathbb{R}, k = ۱,۲,\dots,r$ و $۰ \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = ۱,۲,\dots,m$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که شرایط KKT زیر برقرار باشد.

$$(\text{الف}) \sum_{k=۱}^{r} \lambda_k \nabla (f_k^L + f_k^U)(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$
$$(\text{ب})\mu_i g_i(x^*) = ۰, \quad i = ۱,۲,\dots,m$$

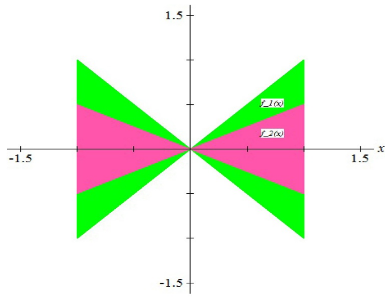
آن‌گاه برای مسئله $(MIP۲)$ داریم:

$$x^* \in X_P^{LU},\ x^* \in X_P^{LS}.$$

برهان. چون F در x^* ، LU – محدب است، از تعریف ۳.۵.۴ نتیجه می‌گیریم که f_k^L, f_k^U، $k = ۱,۲,\dots,r$ نیز در x^* محدب هستند همچنین چون F در x^* بطور پیوسته gH – مشتق‌پذیر است بنابراین با توجه به قضیه ۵.۳.۴ توابع $f_k^L + f_k^U$, $k = ۱,۲,\dots,r$ در x^* بطور پیوسته مشتق‌پذیر هستند لذا می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{f}$ محدب و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر در x^* است بنابراین باتوجه به قضیه ۴.۵.۴ نتیجه حاصل می‌شود. □

مثال ۱.۵.۴. مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\min F(x) = (f_{۱} = [-|x|, |x|] \\ &f_{۲} = [-|\frac{x}{۲}|, |\frac{x}{۲}|]) \\ &s.t. \quad x - ۱ \leq ۰ \\ &\quad -x - ۱ \leq ۰ \end{aligned} \tag{۵.۴}$$



شکل ۱۱.۴: نمودار $F(x)$

چون F به‌طور پیوسته gH – مشتق‌پذیر است و شرایط قضیه ۴.۵.۴ در نقطه صفر صدق می‌کند لذا برای مسئله (۵.۴) $۰ \in X_P^{LU}$ می‌باشد. ولی F در نقطه صفر به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف نمی‌باشد. لذا نمی‌توان از قضیه (۴.۲) در مرجع [۳۲] استفاده کرد.

قضیه ۵.۵.۴. فرض کنید F تابع چند هدفه بازه‌ای مقدار و LS – محدب و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر (ضعیف) در x^* باشد. اگر ضرایب (لاگرانژ) $۰ < \lambda_k^L, \lambda_k^S \in \mathbb{R}, k = ۱, ۲, \ldots, r$ و $۰ \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = ۱, ۲, \ldots, m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که شرایط بهینگی KKT زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)} \quad \sum_{k=۱}^{r} \lambda_k^L \nabla f_k^L(x^*) + \sum_{k=۱}^{r} \lambda_k^S \nabla f_k^S(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$

$$\text{(ب)} \quad \mu_i g_i(x^*) = ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, m$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP۲)$ داریم $x^* \in X_P^{LS}$.

برهان. تابع حقیقی مقدار زیر را در نظر بگیرید.

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=۱}^{r} \lambda_k^L f_k^L(x) + \sum_{k=۱}^{r} \lambda_k^S f_k^S(x)$$

چون F در x^*، LS – محدب است با توجه به قضیه ۲.۵.۴، $f_k^L, f_k^S, k = ۱, ۲, \ldots, r$ در x^* محدب هستند. همچنین چون F در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر (ضعیف) است با توجه به

قضیه ۲.۵.۴ f_k^L, f_k^U در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند. لذا $\bar{f}$ محدب و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر در x^* است. همچنین داریم:

$$\nabla \bar{f}(x^*) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^L \nabla f_k^L(x^*) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^S \nabla f_k^S(x^*)$$

بنابراین با توجه به شرایط (الف) و (ب) داریم:

$$(\text{ج})\ \nabla \bar{f}(x^*) + \sum_{i=0}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$(\text{د})\ \mu_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

با استفاده از قضیه ۱.۵.۴ می‌بینیم که x^* یک جواب بهینه مسئله حقیقی مقدار $\bar{f}$ برای محدودیت‌های مسئله $(MIP2)$ است. اکنون با اثباتی مشابه به اثبات نتیجه ۵.۵.۴ می‌توان نشان داد که $x^* \in X_P^{LS}$. □

برای درک بیش‌تر قضیه ۵.۵.۴ ، مثال زیر را ارائه می‌دهیم.

مثال ۲.۵.۴. مسئله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید.

$$\min F(x) = \Big([x_1^2 + x_2^2 + 1, x_1^2 + x_2^2 + 2], [2x_1^2 + 2x_2^2 + 3, 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4]\Big)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ & 6 - 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(۶.۴)

داریم:

$$f_1^L(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1 \quad f_1^S(x) = 1$$
$$f_2^L(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3 \quad f_2^S(x) = 1$$

و

$$g_1(x) = 1 - x_1 - x_2 \quad g_2(x) = 6 - 3x_1 - x_2$$

می‌توان نشان داد که شرایط قضیه ۵.۵.۴ برقرار است. اکنون با توجه به شرایط (الف) و(ب) قضیه، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\lambda_1^L \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2^L \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} + \lambda_1^S \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^S \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2\lambda_1^L x_1 + 4\lambda_2^L x_1 - \mu_1 - 3\mu_2 = 0$$

$$2\lambda_1^L x_2 + 4\lambda_2^L x_2 - \mu_1 - \mu_2 = 0$$

بعد از حل این دستگاه داریم:

$$(x^*)^T = (\frac{۹}{۵}, \frac{۳}{۵}) \quad \lambda_۱^L = \frac{۱}{۲}, \lambda_۲^L = \frac{۱}{۴}, \mu_۱ = ۰, \mu_۲ = \frac{۶}{۵}$$

چون $g_i(x^*) = ۰, i = ۱,۲,\ldots,m$ بنابراین برای مسئله (۶.۴) داریم $(x^*)^T = (\frac{۹}{۵}, \frac{۳}{۵}) \in X_P^{LS}$.

اکنون نتایجی راجع به جواب‌های بهینه پارتو ضعیف ارائه می‌دهیم.

قضیه ۶.۵.۴. فرض کنید یک تابع هدف بازه‌ای مقدار مثل f_h که $h \in \{۱,۲,\ldots,r\}$ وجود داشته باشد که LU ـ محدب و به‌طور پیوسته در x^*، gH ـ مشتق‌پذیر باشد. اگر ضرایب (لاگرانژ) $۰ < \lambda \in \mathbb{R}, ۰ \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = ۱,۲,\ldots,m$ وجود داشته باشد به‌طوری که شرایط KKT زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)} \lambda\nabla(f_h^L + f_h^U)(x^*) + \sum_{i=۰}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$

$$\text{(ب)} \ \mu_i g_i(x^*) = ۰ \quad i = ۱,۲,\ldots,۰$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP۲)$ داریم $x^* \in X_{WP}^{LU}$.

برهان. تابع حقیقی مقدار زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\bar{f}(x) = \lambda(f_h^L + f_h^U)(x)$$

چون f_h در x^*، LU ـ محدب است با توجه به قضیه ۳.۳.۴، f_h^L و f_h^U در x^* محدب هستند. همچنین چون f_h در x^* به‌طور پیوسته gH ـ مشتق‌پذیر است با توجه به قضیه ۵.۳.۴، $f_h^L + f_h^U$ در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیرند. بنابراین با استدلالی مشابه به قضیه ۴.۵.۴ این نتایج به‌دست می‌آیند. □

قضیه ۷.۵.۴. فرض‌کنید یک تابع بازه‌ای مقدار f_h که $h \in \{۱,۲,\ldots,r\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که LS ـ محدب و در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف باشد. اگر ضرایب (لاگرانژ) $۰ < \lambda^L, \lambda^S \in \mathbb{R}, ۰ \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = ۱,۲,\ldots,m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که شرایط بهینگی KKT زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)} \ \lambda^L \nabla f_h^L(x^*) + \lambda^S \nabla f_h^S(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$

$$\text{(ب)} \ \mu_i g_i(x^*) = ۰ \quad i = ۱,۲,\ldots,m$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP۲)$ داریم:

$$x^* \in X_{WP}^{LS}.$$

برهان. تابع حقیقی مقدار زیر را تعریف می‌کنیم

$$\bar{f}(x) = \lambda(f_h^L + f_h^U)(x)$$

چون f_h در x^*، LS – محدب است باتوجه به قضیه ۳.۳.۴، f_h^L, f_h^U در x^* محدب هستند همچنین چون f_h در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف است بنابراین با توجه به قضیه ۵.۳.۴، f_h^L, f_h^U در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند با استدلال مشابه قضیه ۶.۵.۴ این نتایج هم اثبات می‌شوند. □

در ادامه شرایط بهینگی KKT را برای مسئله $(MIP۲)$ با استفاده از گرادیان تابع هدف بازه‌ای مقدار f با مفهوم gH – مشتق‌پذیر مطرح می‌کنیم. برای این‌کار تابع بازه‌ای مقدار f را در نظر می‌گیریم. گرادیان تابع f در x^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla_g f(x^*) = \left((\frac{\partial f}{\partial x_۱})_g(x^*), \ldots, (\frac{\partial f}{\partial x_n})_g(x^*) \right)$$

که $(\frac{\partial f}{\partial x_j})_g(x^*)$، j – امین gH – مشتق جزئی f در x^* است. که در تعریف ۴.۳.۴ مطرح شده بود. با توجه به قضیه ۳.۳.۴ اگر f^U, f^L توابع مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه f ، gH – مشتق‌پذیر هم است و داریم:

$$(\frac{\partial f}{\partial x_j})(x^*) = \left[\min\{\frac{\partial f^L}{\partial x_j}(x^*), \frac{\partial f^U}{\partial x_j}(x^*)\}, \max\{\frac{\partial f^L}{\partial x_j}(x^*), \frac{\partial f^U}{\partial x_j}(x^*)\} \right]$$

که به‌صورت یک بازه بسته است.

مثال ۳.۵.۴. تابع بازه‌ای مقدار زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \left[۲x_۱ + ۳x_۲^۲, x_۱^۲ + ۳x_۲^۲ + ۷ \right]$$

بنابراین داریم:

$$(\frac{\partial f}{\partial x_۱})_g(x) = [\min\{۲, ۲x_۱\}, \max\{۲, ۲x_۱\}]$$
$$(\frac{\partial f}{\partial x_۲})_g(x) = [\min\{۶x_۲, ۶x_۲\}, \max\{۶x_۲, ۶x_۲\}] = [۶x_۲, ۶x_۲]$$

لذا گرادیان f به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\nabla_g f(x) = \left([\min\{۲, ۲x_۱\}, \max\{۲, ۲x_۱\}] , [۶x_۲, ۶x_۲] \right).$$

تذکر ۱.۵.۴. اگر در مثال قبل، H – مشتق‌پذیر f را درنظر بگیریم. آن‌گاه مشتق جزئی $(۰, ۱) \left(\frac{\partial f}{\partial x_۲}\right)_H$ وجود ندارد، بنابراین گرادیان f وجود ندارد. در نتیجه گرادیان f با استفاده از مفهوم H – مشتق‌پذیری محدودکننده است. بعلاوه اگر فرض کنیم f بطور پیوسته مشتق‌پذیر ضعیف باشد واضح است که نمی‌توانیم در مورد گرادیان صحبت کنیم چون مشتق جزئی f را نمی‌توان تعریف کرد. لذا تعریف گرادیان f با استفاده از مفهوم gH – مشتق‌پذیری برای مسائل بهینه سازی عمومی‌تر و پرکاربردتر است.

معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla_g f_k(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0 \qquad (۷.۴)$$

که

$$0 \leq \mu_i \in \mathbb{R},\, i = 1,2,\ldots,m,\, 0 < \lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1,2,\ldots,p$$

توابع به‌طور پیوسته توابع gH – مشتق‌پذیر و $g_i, i = 1,2,\ldots,m$ توابع حقیقی مقدار بطور پیوسته مشتق‌پذیر مسئله $(MIP2)$ می‌باشند. با توجه به قضیه ۲.۳.۴

$f^U, f^L, k = 1,2,\ldots,p$ در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند بنابراین معادله (۷.۴) معادل معادله زیر است.

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k^L}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k^U}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) \qquad (۸.۴)$$

به ازای تمام $j = 1,2,\ldots,n$ معادله (۸.۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k^L(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k^U(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) \qquad (۹.۴)$$

که ایجاب می‌کند:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k^L(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_k \nabla f_k^U(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla g_i(x^*) = 0 \qquad (۱۰.۴)$$

که $\bar{\mu}_i = 2\mu_i,\, i = 1,\ldots,m$.

قضیه ۸.۵.۴. فرض کنید تابع چندهدفه بازه‌ای مقدار F به‌طور پیوسته gH – مشتق‌پذیر و LU – محدب در y^* باشد: اگر ضرایب (لاگرانژ) $0 \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,m$ و $0 < \lambda_k \in \mathbb{R}$، $k = 1,\ldots,r$ وجود داشته باشند بطوریکه شرایط بهینگی KKT زیر برقرار باشند.

$$(\text{الف}), \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla_g f_k(y^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(y^*) = 0$$

$$(\text{ب}), \mu_i g_i(y^*) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP2)$ داریم:

$$x^* \in X_P^{LS}, x^* \in X_P^{LU}.$$

برهان. چون (الف) معادل تساوی ۷.۴ می‌باشد اگر قرار دهیم $x^* = y^*$ در نتیجه رابطه (۱۰.۴) بدست می‌آید؛ یعنی:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k^L(y^*) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k^U(y^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla g_i(y^*) = 0$$

که $\bar{\mu}_i = ۲\mu_i$ برای $i = ۱, \dots, m$. فرض کنید که $\lambda_k^L = \lambda_k = \lambda_k^U, k = ۱, \dots, r$ با توجه به قضیه ۴.۵.۴ اثبات کامل است. □

مثال ۴.۵.۴. مسئله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید.

$$\min F(x) = \Big([x_۱^۲, x_۱^۲ + x_۲^۲], [x_۲^۲, x_۱^۲ + x_۲^۲]\Big)$$
$$s.t. \quad x_۱ + x_۲ \le ۱$$
$$-x_۱ \le ۰$$

پس داریم:

$$f_۱^L x(x) = x_۱^۲ \qquad f_۲^L x(x) = x_۲^۲$$
$$f_۱^U x(x) = x_۱^۲ + x_۲^۲ \qquad f_۲^U x(x) = x_۱^۲ + x_۲^۲$$

بعلاوه f_k^L, f_k^U توابع محدب هستند. همچنین تابع چند هدفه بازه‌ای مقدار F در $\mathbb{R}^۲$ به‌طور پیوسته gH – مشتق‌پذیر است. بعلاوه شرایط (الف) و (ب) قضیه ۶.۵.۴ در $x^* = (۰, ۰)$ صدق می‌کند. پس داریم:

$$x^* = (۰, ۰) \in X_P^{LU}.$$

تذکر ۲.۵.۴. توجه شود که مثال ۴.۵.۴، H – مشتق‌پذیر نمی‌باشد ولی gH – مشتق‌پذیر است در نتیجه قضیه۴.۹))در مرجع [۳۳] را نمی‌توان برای این مسئله به کار برد. بنابراین مفهوم gH – مشتق‌پذیری برای حل مسائل عمومی‌تر و پرکاربردتر است.

تعریف ۳.۵.۴. ([۴]) فرض کنید X مجموعه شدنی ناتهی باشد و $x^* \in X$. مخروط جهت‌های شدنی X در x^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D = \{d \in \mathbb{R}^n, d \neq ۰, \exists \delta > ۰ \; s.t. \quad x^* + rd \in X \quad r \in (۰, \delta)\}$$

و $d \in D$ جهت شدنی از X نامیده می‌شود.

قضیه ۹.۵.۴. ([۴]) فرض کنید $X = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \le ۰, i = ۱, \dots, m\}$ مجموعه شدنی باشد و $x^* \in X$. همچنین فرض کنید $g_i, \; i = ۱, \dots, m$ در x^* مشتق پذیر باشد. فرض کنید $I(x^*) = \{i = g_i(x^*) = ۰\}$ مجموعه اندیس‌ها برای محدودیت‌های فعال باشد. بنابراین $D \subset \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^T d \le ۰, \; \forall i \in I\}$.

قابل ذکر است این تعریف حتی زمانی که فرض کنیم g_i – ها در x^* پیوسته باشند، بجای این‌که برای هر $i \notin I$ در x^* مشتق پذیر باشد نیز درست است.

تعریف ۴.۵.۴. فرض کنید f یک تابع بازه ای مقدار تعریف شده روی مجموعه ناتهی X از $\mathbb{R}^n$ باشد. گوییم f در x^*، L_محدب اکید است اگر و فقط اگر f^L در x^* محدب اکید باشد.

همچنین می توان به طور مشابه U_ محدب و S_ محدب اکید را با در نظر گرفتن f^U و f^S تعریف نمود.

تعریف ۵.۵.۴. یک تابع بازه ای مقدار f:
(الف) LU_ کاهشی در x^* نامیده می‌شود اگر $x < x^*$ اگر و فقط اگر $f(x) \underset{LU}{\prec} f(x^*)$
(ب) LS_ کاهشی در x^* نامیده می‌شود اگر $x < x^*$ اگر و فقط اگر $f(x) \underset{LS}{\prec} f(x^*)$

در ادامه برخی نتایج در مورد جواب‌های بهینه LU_ پارتو قوی و جواب‌های بهینه LS_ پارتو قوی را ارائه می دهیم. برای اثبات قضایای زیر به قضیه دگرین تاکر نیاز داریم.
این قضیه بیان می‌کند که برای دو ماتریس P و Q دقیقا یکی از دو سیستم زیر جواب دارد.

$$\text{سیستم (۱)} : \exists x \in \mathbb{R}^n \qquad P(x) \leq 0,\ P(x) \neq 0,\ Q(x) \leq 0$$
$$\text{سیستم (۲)} : \exists \lambda > 0,\ \mu \geq 0 \qquad P^T\lambda + Q^T\mu = 0$$

قضیه ۱۰.۵.۴. فرض کنید یک تابع بازه ای مقدار مثل $f_h, h \in \{1,2,\dots,r\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که یک به یک و LU_ کاهشی و U_ محدب و در x^* به طور پیوسته gH_ مشتق پذیر باشد. همچنین فرض کنید $\nabla f_h^L(x^*) < \nabla f_h^U(x^*)$. اگر ضرایب (لاگرانژ) $0 \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,m$ وجود داشته باشند . به‌طوری‌که شرایط KKT زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)} \quad \nabla f_h^L(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$
$$\text{(ب)} \quad \mu_i g_i(x^*) = 0 \quad i = 1,\dots,m$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP2)$ داریم: $x^* \in X_{SP}^{LU}$.

برهان. فرض کنید $x^* \notin X_{SP}^{LU}$ بنابراین با توجه به تعریف ۱.۴.۴، $x \in X$ وجود دارد به طوری که $f_h(x^*) \underset{LU}{\preceq} f_h(x)$. چون f_h، در x^*، U_ محدب است بنابراین f_h^U در x^* محدب است، لذا داریم:

$$\nabla f_h^U(x^*)^T(x - x^*) \leq 0$$

همچنین $\nabla f_h^L(x^*) < \nabla f_h^U(x^*)$ و چون f_h یک به یک و LU_ کاهشی است داریم $x - x^* > 0$.
لذا $\nabla f_h^L(x^*)^T(x - x^*) < \nabla f_h^U(x^*)^T(x - x^*) \leq 0$ پس داریم:

$$\nabla f_h^L(x^*)^T(x - x^*) < 0 \tag{۱۱.۴}$$

فرض کنید $d = x - x^*$. بنابراین $\forall r \in (0,1)$ و $y = x^* + rd = rx + (1-r)x^* \in X$ چون X یک مجموعه محدب است و $x, x^* \in X$ پس می توان نتیجه گرفت که $d \in D$. لذا d یک جهت شدنی از X است.
بنابراین با توجه به قضیه ۹.۵.۴ نتیجه می گیریم:

$$\nabla g_i(x^*)d \leq 0 \quad \forall i \in I \tag{۱۲.۴}$$

که I مجموعه اندیس محدودیت های فعال می‌باشد. فرض کنیم P یک ماتریس که سطرهای آن به صورت $\nabla f_h^L(x^*)$ و Q یک ماتریس که سطرهای آن به صورت $g\nabla g_i(x^*)^T, i \in I$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیه دگرین تاکر می‌بینیم که $d = x - x^*$ در سیستم (۱) صدق می‌کند بنابراین با توجه به روابط (۱۱.۴) و (۱۲.۴) نتیجه می‌گیریم که ضرایب (لاگرانژ) $\circ < \lambda \in \mathbb{R}$ و $\mathbb{R} \underset{i \in I}{\in} \bar{\mu} \geq \circ$ وجود ندارند به طوری که:

$$\lambda \nabla f_h^L(x^*) + \sum_{i \in I} \bar{\mu}_i \nabla g_i(x^*) = \circ$$

که معادل است با:

$$\nabla f_h^L(x^*) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(x^*) = \circ$$

که $\mu_i = \frac{\bar{\mu}_i}{\lambda}$. این با شرط (الف) قضیه و با فرض $i \notin I, \ \mu_i = \circ$ تناقض دارد. پس اثبات کامل است. □

قضیه ۱۱.۵.۴. فرض کنید یک تابع هدف بازه‌ای مقدار $f_h, h \in \{۱,۲\dots,r\}$ موجود باشد به‌طوری‌که یک به یک و LS– کاهشی و L– محدب و به طور پیوسته gH – مشتق‌پذیر در x^* باشد. همچنین فرض کنید $\nabla f_h^S(x^*) < \nabla f_h^L(x^*)$. اگر ضرایب (لاگرانژ)
$\circ \leq \mu_i \in \mathbb{R}, i = ۱,\dots,m$ وجود داشته باشند به طوری که شرایط kkt زیر برقرار باشند.

$$\text{(الف)} \quad \nabla f_h^S(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = \circ$$

$$\text{(ب)} \quad \mu_i g_i(x^*) = \circ \quad i = ۱,\dots,m$$

آن‌گاه برای مسئله $(MIP۲)$ داریم: $x^* \in X_{SP}^{LS}$.

فصل ۵

قضایای دوگانی در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار و مشتق ناپذیر

۱.۵ معرفی

در تحقیقات اخیر مطالعاتی بر روی مسائل برنامه‌ریزی نامعین صورت گرفته است. برای دست یافتن به مسائل جهان واقعی، گاهی اوقات ضرایب توابع هدف یا محدودیت‌ها را به صورت بازه‌ای در نظر می‌گیرند. این روش برنامه‌ریزی بازه‌ای مقدار، نامیده می‌شود که اخیرا مورد توجه محققان قرار گرفته است.
در این روش می‌توان از مسائل بازه‌ای مقدار برای حل مسائل نامعین کمک گرفت، این مسائل در حالت‌های تک‌هدفه یا چندهدفه با شرایط تحدب و مشتق‌پذیری تابع هدف مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.از سوی دیگر تحدب نقش مهمی در مسائل بهینه‌سازی دارد و شرط کافی مسائل بهینه‌سازی و قضایای دوگان می‌باشد.
در اکثر مطالعاتی که بر روی مسائل بهینه‌سازی بازه‌ای مقدار(تک‌هدفه یا چندهدفه) صورت گرفته است، مسائل به‌صورت مشتق‌پذیر در نظر گرفته شده‌اند. اما سان[۱] و وانگ[۲] [۲۷] مسائل بازه‌ای مقدار(تک‌هدفه) را در حالت مشتق‌ناپذیر فرض کردند و از شرایط لازم و کافی فریتز–

[۱] Sun
[۲] Wang

جان[۳] و کان_ تاکر[۴] نتیجه گرفته می‌شوند. اکنون پرداختن به مسائل بازه‌ای مقدار چندهدفه و پیدا کردن نقاط بهینه پارتو در حالت مشتق‌ناپذیر اهمیت دارد. با توجه به مطالب ذکر شده، ما در این فصل به مطالعه بر روی توابع بازه‌ای مقدار مشتق‌ناپذیر شامل توابع LU − محدب می‌پردازیم.

۲.۵ مقدمات

از نمادهای زیر در این فصل استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\Lambda_n = \{1, \dots, n\}\\
&R_+ = \{a \in \mathbb{R} | \, a \geq 0\\
&R^n_+ = \{a \in \mathbb{R}^n | \, a \geq 0\}\\
&I = \{a = [a^L, a^U] | \, a^L, a^U \in \mathbb{R}\}\\
&R^n_I = \{a \in \mathbb{R}^n | \, a_i \in I, i \in \Lambda_n\}\\
&R^n_{I_+} = \{a \in \mathbb{R}^n_I | \, a^L_i > 0, i \in \Lambda_n\}\\
&\chi = \{f | \, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}\\
&\chi^+ = \{f = (f_1, \dots, f_n) | \, f_i \in \chi\}\\
&\mathcal{F} = \{F = [f^L, f^U] | \, f^L, f^U \in \chi\}\\
&\mathcal{F}^n = \{F = (F_1, \dots, F_n) | \, F_i \in \mathcal{F}, i \in \Lambda_n\}
\end{aligned}$$

X فضای برداری محدب حقیقی با دوگان X' است و $K \subseteq X$ هم محدب است.

تعریف ۱.۲.۵. ([۴]) مخروط متعامد بر مجموعه K در $x^* \in K$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_K(x^*) = \left\{d \in X' | \, (x - x^*)^T d \leq 0, \forall x \in K\right\}.$$

تعریف ۲.۲.۵. ([۴]) $\xi \in X'$ زیر گرادیان تابع محدب f در x^* است، هرگاه:

$$(x - x^*)^T \xi \leq f(x) - f(x^*), \quad \forall x \in X - \{x^*.$$

همچنین، این نامساوی به‌صورت اکید است، اگر تابع f شبه محدب [۵] اکید باشد.

تعریف ۳.۲.۵. ([۴]) مجموعه‌ی همه‌ی زیر گرادیان‌های تابع f زیر دیفرانسیل نامیده می‌شود و با نماد $\partial f(x^*)$ نمایش داده می‌شود.

---

[۳] Fritz-John

[۴] Kuhn-Tucker

[۵] Pseudoeconvex

تذکر ۱.۲.۵. ([۱۵]) فرض کنید $f \in \chi^n$ بنابراین زیر دیفرانسیل تابع f به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\partial f(x^*) = (\partial f_1(x^*), \ldots, \partial f_n(x^*)) .$$

مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار مشتق‌ناپذیر زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} (P_p) \qquad & \min F(x) \\ & s.t. \quad g_j(x) \leq 0,\ j \in \Lambda_m \\ & x \in K \end{aligned}$$

که $F \in \mathcal{F}^r$ و $g_i \in \chi,\ j \in \Lambda_m$ ،مجموعه شدنی مسئله (P_p) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$X_0 = \{x \in X \,|\, g_j(x) \leq 0,\ j \in \Lambda_m,\ x \in K\} .$$

تعریف ۴.۲.۵. $x^* \in X_0$ را جواب کارای بازه‌ای مقدار مسئله (P_p) می‌گوییم، اگر $\hat{x} \in X_0$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که

$$F(\hat{x}) \underset{LU}{\prec} F(x^*).$$

تعریف ۵.۲.۵. فرض کنید $F \in \mathcal{F}$. بنابراین F، LU − محدب در $x^* \in X$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$F(\lambda x^* + (1-\lambda)x) \underset{LU}{\preceq} \lambda F(x^*) + (1-\lambda)F(x), \quad \forall \lambda \in (0,1),\ x \in X.$$

تعریف ۶.۲.۵. ([۳۱]) فرض کنید $F \in \mathcal{F}$ و $x^* \in X_0$ بنابراین F، LU − محدب در x^* نامیده می‌شود هرگاه f^L و f^U در x^* محدب باشند.

تعریف ۷.۲.۵. فرض کنید $F \in \mathcal{F}^r$ و $x^* \in X_0$. F در x^*، LU − محدب نامیده می‌شود اگر هر F_i در x^* برای هر $i \in \Lambda_r$، LU − محدب باشد.

تعریف ۸.۲.۵. فرض کنید $F \in \mathcal{F}^r$ و $x^* \in X_0$ آن‌گاه F در x^*، LU − محدب نامیده می‌شود هرگاه هر f_i^L و f_i^U در x^* برای هر $i \in \Lambda_r$ محدب باشند.

در ادامه مسائل برنامه‌ریزی بازه‌ای مقدار مشتق‌ناپذیر زیر را متناظر با مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار (P_p) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (P_k) \qquad & \min F_k(x) = [f_k^L(x), f_k^U(x)] \\ & f_i^L(x) \leq f_i^L(x^*), \qquad i(\neq k) \in \Lambda_r \\ s.t. \quad & f_i^U(x) \leq f_i^U(x^*), \qquad i(\neq k) \in \Lambda_r \\ & g_j(x) \leq 0,\ j \in \Lambda_m \\ & x \in k \end{aligned}$$

لم زیر رابطه مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای مقدار (P_p) را با مسئله برنامه‌ریزی تک هدفه بازه‌ای مقدار (P_k) را نشان می‌دهد.

لم ۱.۲.۵. x^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (P_p) می‌باشد اگر و تنها اگر x^* یک جواب $LU-$ بهینه مسئله (P_k) برای هر $k \in \Lambda_r$ باشد.

برهان. فرض کنید x^* جواب کارای (P_p) باشد ولی جواب کارای (P_k) نباشد. بنابراین $\hat{x}$ وجود دارد به‌طوری‌که $F_k(\hat{x}) \underset{LU}{\prec} F_k(x^*)$ که نتیجه می‌شود:

$$f_k^L(\hat{x}) < f_k^L(x^*) \text{ و } f_k^U(\hat{x}) < f_k^U(x^*)$$

یا

$$f_k^L(\hat{x}) \leq f_k^L(x^*) \text{ و } f_k^U(\hat{x}) < f_k^U(x^*)$$

یا

$$f_k^L(\hat{x}) < f_k^L(x^*) \text{ و } f_k^U(\hat{x}) \leq f_k^U(x^*)$$

و

$$f_i^L(\hat{x}) \leq f_i^L(x^*),\ f_i^U(\hat{x}) \leq f_i^U(x^*), \quad i(\neq k) \in \Lambda_r$$

که این مطلب مخالف این است که x^* جواب کارای (P_p) باشد، لذا x^* جواب کارای (P_k) به‌ازای $k \in \Lambda_r$ می‌باشد.

برعکس فرض کنید x^* جواب $LU-$ بهینه (P_k) به‌ازای $k \in \Lambda_r$ باشد ولی جواب کارای (P_p) نباشد. با توجه به تعریف ۴.۲.۵، $\hat{x}$ وجود دارد به‌طوری‌که $F_i(\hat{x}) \underset{LU}{\preceq} F_i(x^*), i \in \Lambda_r$ و $F_h(\hat{x}) \underset{LU}{\prec} F_h(x^*)$ برای حداقل یک اندیس $h \in \Lambda_r$.

این مطلب تناقض دارد با اینکه x^* جواب $LU-$ بهینه (P_k) برای هر $k \in \Lambda_r$ باشد،بنابراین x^* جواب کارای (P_p) می‌باشد و اثبات کامل است. □

مثال زیر لم قبل را توجیه می‌کند.

مثال ۱.۲.۵. مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
(IVMP) \quad & \min F(x) = \Big([x_1^2 + x_2^2 + 1, x_1^2 + x_2^2 + 2], [2x_1^2 + 2x_2^2 + 3, 2x_1^2 + x_2^2 + 4]\Big) \\
s.t. \quad & 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\
& 6 - 3x_1 - x_2 \leq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

همان‌طور که در فصل قبل در مثال ۲.۵.۴ دیدیم $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ یک جواب کارای بازه‌ای این مسئله می‌باشد. زیر مسئله‌های بازه‌ای مقدار متناظر با مسئله $(IVMP)$ را به‌صورت زیر در نظر

می‌گیریم.

$$\begin{aligned}(IVMP_1): \quad & \min F_1(x) = [x_1^2 + x_2^2 + 1, x_1^2 + x_2^2 + 2]\\ & 2x_1^2 + 2x_2^2 \leq \frac{36}{5}\\ s.t. \quad & 1 - x_1 - x_2 \leq 0\\ & 6 - 3x_1 - x_2 \leq 0\\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(IVMP_2): \quad & \min F_2(x) = [2x_1^2 + 2x_2^2 + 3, 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4]\\ & x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{18}{5}\\ s.t. \quad & 1 - x_1 - x_2 \leq 0\\ & 6 - 3x_1 - x_2 \leq 0\\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

مسائل بالا را با توجه به قضیه ۵.۳.۴ که در فصل قبل داشتیم، حل می‌کنیم. می‌بینیم که $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ جواب LU - بهینه برای مسئله $(IVMP_1)$ با

$$\lambda^L + \lambda^U = 1$$
$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \ \mu_3 = \frac{6}{5}$$

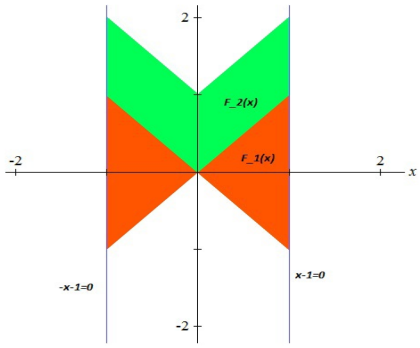
می‌باشد. و $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$ جواب LU - بهینه برای مسئله $(IVMP2)$ با

$$\lambda^L + \lambda^U = 1$$
$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \ \mu_3 = \frac{12}{5}$$

می‌باشد.

مثال ۲.۲.۵. مسئله برنامه‌ریزی زیر که شامل توابع مشتق ناپذیر می‌باشد را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}(IVMP_1): \quad & \min\,(F_1(x) = [-|x|, |x|], F_2(x) = [|x|, |x| + 1])\\ s.t. \quad & x - 1 \leq 0\\ & -x - 1 \leq 0\end{aligned}$$

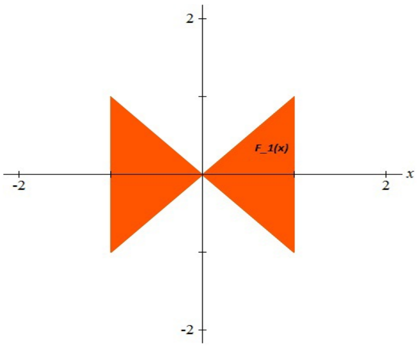


شکل ۱.۵: نمودار رفتار تابع $(IVMP_1)$

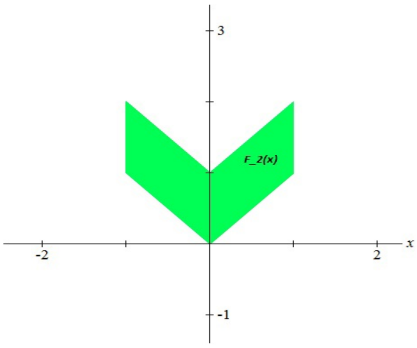
با توجه به شکل (۱.۵) می‌بینیم که نقطه‌ی صفر یک جواب کارای بازه‌ای مقدار برای مسئله $(IVMP_1)$ می‌باشد. زیر مسئله‌های بازه‌ای مقدار متناظر با این مسئله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
(IVMP1_1):\quad & \min F_1(x) = [-|x|, |x|] \\
s.t.\quad & |x| \leq 0 \\
& x - 1 \leq 0 \\
& -x - 1 \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(IVMP1_2):\quad & \min F_2(x) = [|x|, |x| + 1] \\
s.t.\quad & -|x| \leq 0 \\
& x - 1 \leq 0 \\
& -x - 1 \leq 0
\end{aligned}$$



شکل ۲.۵: نمودار رفتار $F_1(x)$



شکل ۳.۵: نمودار رفتار $F_2(x)$

با توجه به شکل‌های ۲.۵ و ۳.۵ می‌بینیم که صفر جواب $LU-$بهینه برای مسئله $(IVMIP11)$ و $(IVMIP12)$ می‌باشد.

۳.۵ شرایط لازم بهینگی

مسئله بهینه‌سازی بازه‌ای مقدار مشتق‌ناپذیر زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min F(x) \\ s.t. \quad & g_j(x) \leq 0 \quad j \in \Lambda_m \\ & x \in K \end{aligned}$$

که $F \in \mathcal{F}$ و $g_j \in \chi,\ j \in \Lambda_m$.

شرایط لازم روش فریتز_جان برای مسئله (P) که توسط سان و وانگ [۲۷] گسترش یافت، به‌صورت زیر می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۵. ([۲۷]) فرض کنید x^* یک جواب $LU-$ بهینه برای مسئله (P) باشد. آن‌گاه:

$$\xi^{L^*}, \xi^{U^*} \in \mathbb{R}_+,\ \lambda^* \in \mathbb{R}_+^m,\ (\xi^{L^*}, \xi^{U^*}, \lambda^*) \neq 0$$

وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$(۱)\ \lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m$$

$$(۲)\ 0 \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

توجه کنید که اگر $\xi^{L^*} = 0$ یا $\xi^{U^*} = 0$ باشند، متناظر با آن‌ها f^L و f^U هم در شرایط لازم بالا بی تاثیر می‌باشند.
سان و وانگ [۲۷] این مشکل را با استفاده از توصیف قیدی اسلاتر برطرف کردند.

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (P_p) باشد. برای هر $k \in \Lambda_r$، اگر $x_k \in X$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که:

$$x_k \in K, g_j(x_k) < 0, j \in \Lambda_m, f_i^L(x_k) < f_i^L(x^*), f_i^U(x_k) < f_i^U(x^*), i \neq k$$

آن‌گاه گوییم x^* در شرط توصیف قیدی اسلاتر صدق می‌کند.

قضیه ۲.۳.۵. ([۲۷]) فرض کنید x^* یک جواب $LU-$ بهینه مسئله (P) باشد و توصیف قیدی اسلاتر برقرار باشد، بنابراین:

$$0 < \xi^{L^*},\ \xi^{U^*} \in \mathbb{R}_+,\ \lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$$

وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$(۱)\ \lambda_j^* g_i(x^*) = 0 \quad j \in \Lambda_m$$

$$(۲)\ 0 \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

در قضیه زیر شرایط لازم بهینگی فریتز–جان را برای مسئله (P_p) ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۵. فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_p) باشد، آن‌گاه:

$$\xi^* \in R_I^r, \xi^{L^*}, \xi^{U^*} \in R_+^r, \lambda^* \in R_+^m, (\xi^{L^*}, \xi^{U^*}, \lambda^*) \neq 0$$

وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$(۱)\ \lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m$$

$$(۲)\ 0 \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

برهان. با توجه به تعاریف ۲.۲.۵ و ۳.۲.۵ داریم:

$$\partial(f_i^U(x) - f_i^U(x^*)) = \partial f_i^U(x)$$

و

$$\partial(f_i^L(x) - f_i^L(x^*)) = \partial f_i^L(x), \quad i(\neq k) \in \Lambda_r$$

چون x^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_p) می‌باشد، لذا با توجه به لم ۱.۲.۵، x^* یک جواب LU − بهینه برای هر (P_k) می‌باشد. لذا با توجه به قضیه ۱.۳.۵

$$\xi_k^{L^*}, \xi_k^{U^*} \in R_+, \quad \lambda^* \in r_R^m, (\xi^{L^*}, \xi^{U^*}, \lambda^*) \neq \circ$$

وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$(۱)\ \lambda_j^* g_j(x^*) = \circ, \quad j \in \Lambda_m$$
$$(۲)\ \circ \in \xi_k^{L^*} \partial f_k^L(x^*) + \xi_k^{U^*} \partial f_k^U(x^*) + \sum_{j=۱}^m \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

بنابراین با جمع بستن روی تمام $k \in \{۱, ۲, \ldots, r\}$ داریم:

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = \circ, \quad j \in \Lambda_m$$
$$\circ \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{j=۱}^m \bar{\lambda}_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

که در آن $\bar{\lambda}_j^* = k.\lambda_j^*$ بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید: $\xi_i^{L^*} \leq \xi_i^{U^*}, i \in \Lambda_r$ که $\xi^* \in R_I^r$ را نتیجه می‌دهد و اثبات کامل است. □

تذکر ۱.۳.۵. توجه کنید که اگر در قضیه بالا $\xi_i^{L^*} = \circ$ یا $\xi_i^{U^*} = \circ$ لذا متناظر با آن‌ها توابع هدف $f_i^L, f_i^U, i \in \Lambda_r$ هیچ نقشی در شرایط لازم بهینگی ندارند. لذا این مشکل با فرض $\xi_i^{L^*} > \circ$ و $\xi_i^{U^*} > \circ$ برطرف می‌شود. به هر حال با شرط توصیف قیدی اسلاتر که باید در محدودیت‌های مسئله (P_k) صدق کند، می‌توان این مشکل را رفع کرد.

قضیه ۴.۳.۵. فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (P_p) باشد. و در شرایط تعریف ۱.۳.۵ صدق کند. آن‌گاه $\xi^* \in R_{I_+}^r, \lambda^* \in R_+^m$ وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$(۱)\ \lambda_j^* g_j(x^*) = \circ, \quad j \in \Lambda_m$$
$$(۲)\ \circ \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{j=۱}^m \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

برهان. چون x^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (P_p) است، لذا با توجه به لم ۱.۲.۵، x^* یک جواب LU − بهینه برای هر (P_k) می‌باشد. بنابراین از قضیه ۳.۳.۵ نتیجه می‌گیریم که

$\alpha_k^{L^*}, \alpha_k^{U^*} \in R_+^r$ وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$\beta_{jk}^* g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m$$
$$0 \in \alpha_k^{L^*} \partial f_k^L(x^*) + \alpha_k^{U^*} \partial f_k^U(x^*) + \sum_{j=1}^m \beta_{jk}^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

برای هر $x \in \Lambda_r$. اکنون اگر $k = 1$ باشد داریم:

$$\beta_{j1}^* g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m$$
$$0 \in \alpha_1^{L^*} \partial f_1^L(x^*) + \alpha_1^{U^*} \partial f_1^U(x^*) + \sum_{j=1}^m \beta_{j1}^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

برای $k = 2$ داریم:

$$\beta_{j2}^* g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m$$
$$0 \in \alpha_2^{L^*} \partial f_2^L(x^*) + \alpha_2^{U^*} \partial f_2^U(x^*) + \sum_{j=1}^m \beta_{j2}^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

با ادامه‌ی این روند در حالتی که $k = r$ باشد، داریم:

$$k = r$$
$$\beta_{jr}^* g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m$$
$$0 \in \alpha_r^{L^*} \partial f_r^L(x^*) + \alpha_r^{U^*} \partial f_r^U(x^*) + \sum_{j=1}^m \beta_{jr}^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

با جمع کردن روابط با هم داریم:

$$\begin{aligned}
&(\beta_{j1}^* + \beta_{j2}^* + \cdots + \beta_{jr}^*) g_j(x^*) = 0, \quad j \in \Lambda_m \\
&0 \in \left(\alpha_1^{L^*} + \alpha_2^{L^*} + \cdots + \alpha_r^{L^*}\right) \partial f_r^L(x^*) \\
&\left(\alpha_1^{U^*}, \alpha_2^{U^*} + \cdots + \alpha_r^{U^*}\right) \partial f_r^U(x^*) \\
&+ \sum_{j=1}^m \left(\beta_{j1}^* + \beta_{j2}^* + \cdots + \beta_{jr}^*\right) \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)
\end{aligned}$$

فرض می‌کنیم:

$$\xi_i^{L^*} = \alpha_1^{L^*} + \alpha_2^{L^*} + \cdots + \alpha_r^{L^*} \geq 1$$
$$\xi_i^{U^*} = \alpha_1^{U^*} + \alpha_2^{U^*} + \cdots + \alpha_r^{U^*} \geq 1, \quad i \in \Lambda_r$$

و

$$\lambda_j^* = \beta_{j1}^* + \beta_{j2}^* + \cdots + \beta_{jr}^* \geq 0, \quad j \in \Lambda_m$$

لذا وجود دارند:

$$\xi_i^{L^*}, \xi_i^{U^*} > 0, \, i \in \Lambda_r, \quad \lambda_j^* \geq 0, \, j \in \Lambda_m$$

به‌طوری‌که:

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = \circ, \quad j \in \Lambda_m$$
$$\circ \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید: $\xi_i^{L^*} \leq \xi_i^{U^*}, i \in \Lambda_r$ بنابراین:

$$\xi^* \in R_{I+}^r, \lambda^* \in R_+^m$$

و اثبات کامل است. □

در ادامه شرایط کافی فریتز_جان را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۵. فرض کنید F یک تابع LU − محدب باشد و $g_k, \lambda_k^* > \circ$ وجود داشته باشد برای بعضی از $k \in \Lambda_m$ محدب اکید و برای $g_j, k \neq j, j \in \Lambda_m$ محدب باشند. اگر $\xi^* \in R_I^r$ و $\lambda^* \in R_+^m, (\xi^*, \lambda^*) \neq \circ$ وجود داشته باشند. به‌طوری‌که:

$$(1)\ \lambda_j^* g_j(x^*) = \circ, \quad j \in \Lambda_m$$
$$(2)\ \circ \in \xi^{L^*} \partial f^L(x^*) + \xi^{U^*} \partial f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

آن‌گاه x^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_p) می‌باشد.

برهان. با توجه به فرض دوم قضیه نتیجه می‌گیریم که:

$$\rho_i^{L^*} \in \partial f_i^L(x^*), \rho_i^{U^*} \in \partial f_i^U(x^*), j \in \Lambda_r, \eta_j^* \in \partial g_j(x^*), j \in \Lambda_m, z^* \in N_K(x^*)$$

وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$\circ = (x - x^*)(\xi^{L^*} \rho^{L^*} + \xi^{U^*} p^{U^*} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \eta_j^* + z^*) \tag{۱.۵}$$

که گزاره زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\circ = (x - x^*) \left(\xi^{L^*} \rho^{L^*} + \xi^{U^*} \rho^{U^*} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \eta_j^* + z^* \right) \tag{۲.۵}$$

با برهان خلف فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (P_p) نباشد. لذا با توجه به تعریف ۵.۲.۵، $\hat{x} \in X_\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $F(\hat{x}) \underset{LU}{\prec} F(x^*), \quad i \in \Lambda_r$
چون F یک تابع LU − محدب است. با توجه به قضیه ۸.۲.۵ توابع f_i^L و f_i^U به‌ازای $i \in \Lambda_r$ محدب هستند. بنابراین با توجه به تعریف ۲.۲.۵ داریم:

$$(\hat{x} - x^*)^T \rho_i^{L^*} \leq \circ \text{ و } (\hat{x} - x^*)^T \rho_i^{U^*} \leq \circ, \quad i \in \Lambda_r$$

و

$$(\hat{x}-x^*)^T\,\rho_h^{L^*} < \circ \text{ و } (\hat{x}-x^*)^T\,\rho_h^{U^*} < \circ$$

یا

$$(\hat{x}-x^*)^T\,\rho_h^{L^*} \leq \circ \text{ و } (\hat{x}-x^*)^T\,\rho_h^{U^*} < \circ$$

یا

$$(\hat{x}-x^*)^T\,\rho_h^{L^*} < \circ \text{ و } (\hat{x}-x^*)^T\,\rho_h^{U^*} \leq \circ \qquad (۳.۵)$$

برای حداقل یک اندیس h.

چون $\xi_i^{L^*} \geq \circ, \quad i \in \Lambda_r$ با توجه به رابطه (۳.۵) داریم:

$$(\hat{x}-x^*)^T\left(\xi^{L^*}\rho^{L^*}+\xi^{U^*}\rho^{U^*}\right) \leq \circ \qquad (۴.۵)$$

چون $g_j(x) \leq \circ$ و $\lambda_j \in R_+^m$ و $j \in \Lambda_m \quad \lambda_j^* g_j(x^*) = \circ,$ لذا داریم:

$$\lambda_j^* g_j(x) \leq \lambda_j^* g_j(x^*)$$

برای $۱ \leq k \leq m$، $\lambda_k^* > \circ,$ ، g_k یک تابع محدب اکید و g_j، $j(\neq k) \in \Lambda_m$ یک تابع محدب می‌باشد. پس داریم:

$$(\hat{x}-x^*)^T\,(\lambda_k^*\eta_k^*) < \circ$$
$$(\hat{x}-x^*)^T \sum_{j(\neq k)=۱}^{m} \lambda_j^*\eta_j^* \leq \circ$$

در نتیجه داریم:

$$(\hat{x}-x^*)^T \sum_{j=۱}^{m} \lambda_j^*\eta_j^* < \circ \qquad (۵.۵)$$

و برای $z^* \in N_k(x^*)$ داریم:

$$(\hat{x}-x^*)^T\,z^* \leq \circ \qquad (۶.۵)$$

با استفاده از روابط (۴.۵) و (۵.۵) و (۶.۵) داریم:

$$(\hat{x}-x^*)^T\left(\xi^{L^*}\rho^{L^*}+\xi^{U^*}\rho^{U^*}+\sum_{j=۱}^{m}\lambda_j^*\eta_j^*+z^*\right) < \circ$$

که با رابطه (۸.۴) تناقض دارد. لذا x^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_p) می‌باشد و اثبات کامل است. □

در قضیه زیر شرایط کافی بهینگی کان‌تاکر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۳.۵. فرض کنید که F یک تابع LU – محدب و $g_j, j \in \Lambda_m$ توابع محدب باشند. اگر وجود داشته باشد

$$\xi^* \in R^r_{I_+}, \lambda^* \in R^m_+, \lambda^* \neq \circ$$

به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشند.

$$(\text{۱})\ \lambda^*_j g_j(x^*) = \circ, \quad j \in \Lambda_m$$

$$(\text{۲})\ \circ \in \xi^{L^*}\partial f^L(x^*) + \xi^{U^*}\partial f^U(x^*) + \sum_{j=\text{۱}}^{m} \lambda^*_j \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

آن‌گاه x^* یک جواب بهینه کارای بازه‌ای برای مسئله (P_p) می‌باشد.

برهان. با برهان خلف فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (P_p) نباشد. با توجه به اینکه $\xi^{L^*}_i > \circ, i \in \Lambda_r$ و رابطه (۴.۵) موجود در برهان قضیه قبل بود، داریم:

$$(\hat{x} - x^*)^T \left(\xi^{L^*}\rho^{L^*} + \xi^{U^*}\rho^{U^*}\right) < \circ \tag{۷.۵}$$

اکنون چون g_j، $j \in \Lambda_m$ محدب می‌باشد. بنابراین با روش مشابهی که رابطه (۵.۵) در برهان قضیه قبل، داریم:

$$(\hat{x} - x^*)^T \sum_{j=\text{۱}}^{m} \lambda^*_j \eta^*_j \leq \circ \tag{۸.۵}$$

با ترکیب روابط (۶.۵) و (۷.۵) و (۸.۵) داریم:

$$(\hat{x} - x^*)^T \left(\xi^{L^*}\rho^{L^*} + \xi^{U^*}\rho^{U^*} + \sum_{j=\text{۱}}^{m} \lambda^*_j \eta^*_j + z^*\right) < \circ$$

که با رابطه (۲.۵) تناقض دارد و اثبات کامل است. □

۴.۵ دوگان موند ــ وایر

در ادامه مسئله دوگان موند–وایر[۶] متناظر با مسئله اولیه (P_p) را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
(D_M) \qquad & \max F(y) \\
s.t. \qquad & \circ \in \xi^L \partial f^L(y) + \xi^U \partial f^U(y) + \sum_{j=\text{۱}}^{m} \lambda_j \partial g_j(y) + N_k(y) \\
& \sum_{j=\text{۱}}^{m} \lambda_j g_j(y) \geq \circ \qquad \xi \in R^r_{I_+}, \lambda \in R^m_+
\end{aligned} \tag{۹.۵}$$

[۶] Mond-weir's

که $F \in \mathcal{F}^r$. مجموعه جواب‌های شدنی مسئله (D_M) با $f^L, f^U \in \chi^r$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_M = \left\{ z = (y, \xi, \lambda) : \circ \in \xi^L \partial f^L(y) + \xi^U \partial f^U(y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial g_j(y) + N_k(y), \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(y) \geq \circ, \xi \in R^r_{I_+}, \lambda \in R^m_+ \right\}$$

تعریف ۱.۴.۵. فرض کنید $Z^* = (y^*, \xi^*, \lambda^*) \in S_M$، یک جواب کارای بازه‌ای مسئله (D_M) است اگر $\hat{z} = \left(\hat{y}, \hat{\xi}, \hat{\lambda}\right) \in S$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $F(z^*) \underset{LU}{\prec} F(\hat{z})$.

قضیه ۱.۴.۵. (قضیه دوگان ضعیف)فرض کنید F، $LU-$ محدب و $g_j,\, j \in \Lambda_m$ محدب باشند. اگر $z \in S_M$ و $x \in X_\circ$ آن‌گاه:

$$F(x) \underset{LU}{\not\prec} F(y).$$

برهان. با توجه به رابطه (۹.۵) وجود دارند:

$$\rho^L_i \in \partial f^L_i(y), \rho^U_i \in \partial f^U_i(y), \quad i \in \Lambda_r, \eta_j \in \partial g_j(y), \quad j \in \Lambda_m, \mu \in N_k(y)$$

به‌طوری‌که:

$$\circ = \xi^L \rho^L + \xi^U \rho^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \eta_j + \mu$$

که رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\circ = (x-y)^T \left(\xi^L \rho^L + \xi^u \rho^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \eta_j + \mu \right) \tag{۱۰.۵}$$

در صورت امکان فرض کنید $F(x) \underset{LU}{\prec} F(y)$. بنابراین با روش مشابهی که در رابطه (۷.۵) داشتیم، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(x-y)^T \left(\xi^L \rho^L + \xi^U \rho^U \right) < \circ \tag{۱۱.۵}$$

چون $x \in X_\circ$ و $z \in S_M$ بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(y) \geq \circ, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \leq \circ$$

همچنین چون g_j، $j \in \Lambda_m$ محدب می‌باشد، پس داریم:

$$(x-y)^T \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \eta_j \leqslant \circ \tag{۱۲.۵}$$

به روش مشابهی برای $\mu \in N_k(y)$ داریم:

$$(x-y)^T\mu \leqslant \circ \qquad (۱۳.۵)$$

با جمع کردن روابط (۱۳.۵) و (۱۲.۵) ، (۱۱.۵) سرانجام به رابطه زیر می‌رسیم.

$$(x-y)^T\left(\xi^L\rho^L+\xi^U\rho^U+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\eta_j+\mu\right)<\circ$$

که با رابطه (۱۰.۵) تناقض دارد و اثبات کامل است. □

قضیه ۲.۴.۵. (قضیه دوگان قوی)فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای از مسئله اولیه (P_p) باشد. همچنین، فرض کنید در x^* توصیف قیدی اسلاتر برای مسئله (P_k) برای هر $k\in\Lambda_r$ برقرار باشد. بنابراین $\lambda^*\in R^m_+$ و $\xi^*\in R^r_{I_+}$ وجود دارند به طوری که $z^*=(x^*,\xi^*,\lambda^*)\in S_M$.
بعلاوه اگر F ، $-LU$ محدب و $g_j,\ j\in\Lambda_m$ محدب باشند آن‌گاه z^* یک جواب بهینه مسئله دوگان (D_M) می‌باشد.

برهان. چون توصیف قیدی اسلاتر در x^* که یک جواب کارای بازه‌ای است، برقرار می‌باشد با توجه به قضیه ۴.۳.۵ $\lambda^*\in R^m_+$ و $\xi^*\in R^r_{I_+}$ وجود دارند به طوری که:

$$\lambda_j^*g_j(x^*)=\circ,(j\in\Lambda_m)$$
$$\circ\in\xi^{L^*}\partial f^L(x^*)+\xi^{U^*}\partial f^U(x^*)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*\partial g_j(x^*)+N_k(x^*)$$

این نشان می‌دهد که $z^*\in S_M$ ، اکنون با برهان خلف فرض کنید z^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (D_M) نباشد، بنابراین $\hat{z}=(\hat{y},\hat{\xi},\hat{\lambda})\in S_M$ وجود دارد به طوری که:

$$F(z^*,\mu)\underset{LU}{\prec}F(\hat{z},\mu)$$

که $\mu\in N_K(x^*)$ که گزاره زیر را نتیجه می‌دهد.

$$F(x^*)\underset{LU}{\prec}F(y)$$

که با قضیه ۱.۴.۵ تناقض دارد، لذا z^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (D_M) می‌باشد و اثبات کامل است. □

قضیه ۳.۴.۵. فرض کنید $x^*\in X_\circ$ و $z^*\in S_M$. همچنین، فرض کنید برای همه‌ی (x,y)های شدنی

$$\xi^{L^*}f^L+\xi^{U^*}f^U+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*g_j \qquad (۱۴.۵)$$

در y^* محدب اکید باشد و $F(x^*)\underset{LU}{\preceq}F(y^*)$. آن‌گاه $x^*=y^*$ و y^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_P) می‌باشد.

برهان. با برهان خلف فرض کنید $x^* \neq y^*$. چون $z^* \in S_M$ لذا همانند رابطه (۱۰.۵) برای

$$\rho_i^L \in \partial f_i^L(y)\ ,\ \rho_i^U \in f_i^U(y)\ ,\ i \in \Lambda_r\ ,\ \eta_j \in \partial g_j(y)\ ,\ j \in \Lambda_m\ ,\ \mu \in N_K(y^*)$$

داریم:

$$(x^* - y^*)\left(\xi^{L^*}\rho^L + \xi^{U^*}\rho^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \eta_j + \mu\right) = 0$$

بعلاوه چون $(x^* - y^*)^T \leqslant 0$ پس داریم:

$$(x^* - y^*)^T\left(\xi^{L^*}\rho^L + \xi^{U^*}\rho^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \eta_j\right) \geqslant 0 \tag{۱۵.۵}$$

چون رابطه (۱۴.۵) در y^* محدب اکید است. بنابراین با توجه به رابطه (۱۵.۵) داریم:

$$\begin{aligned} &\xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*) \\ &< \xi^{L^*} f^L(x^*) + \xi^{U^*} f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(x^*) \end{aligned} \tag{۱۶.۵}$$

همچنین از شدنی بودن x^* و y^* داریم:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*) \leqslant 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(y^*) \geqslant 0$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۶.۵) گزاره زیر را داریم:

$$\xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) < \xi^{L^*} f^L(x^*) + \xi^{U^*} f^U(x^*) \tag{۱۷.۵}$$

که با $F(y^*) \underset{LU}{\preceq} F(x^*)$ تناقض دارد. بنابراین $x^* = y^*$

اکنون فرض کنیم که y^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله اولیه (P_P) نباشد. بنابراین با توجه به تعریف ۴.۲.۵، $x \in X_0$ وجود دارد به طوری که $F(x) \underset{LU}{\preceq} F(y^*)$ یعنی:

$$\xi^{L^*} f^L(\hat{x}) + \xi^{U^*} f^U(\hat{x}) < \xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) \tag{۱۸.۵}$$

چون $\hat{x} \in X_0$ ، داریم:

$$\xi^{L^*} f^L(\hat{x}) + \xi^{U^*} f^U(\hat{x}) \geqslant \xi^{L^*} f^L(\hat{x}) + \xi^{U^*} f^U(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(\hat{x}) \tag{۱۹.۵}$$

چون $z^* \in S_M$ می‌باشد، داریم:

$$\xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*) \geqslant \xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) \tag{۲۰.۵}$$

با توجه به روابط (۲۰.۵) و (۱۹.۵) و (۱۸.۵) داریم:

$$\xi^{L^*} f^L(\hat{x}) + \xi^{U^*} f^U(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(\hat{x}) < \xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*) \tag{۲۱.۵}$$

چون $\hat{x} \neq y^*$ ،با روش مشابه رابطه (۱۶.۵) داریم:

$$\xi^{L^*} f^L(\hat{x}) + \xi^{U^*} f^U(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(\hat{x}) > \xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*)$$

که با رابطه (۲۱.۵) تناقض دارد. بنابراین y^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_P) می‌باشد و اثبات کامل است. □

۵.۵ دوگان ولف

در این بخش دوگان ولف[۷] را با توجه به مسئله اولیه (P_P) تشریح می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
(D_W) \quad & \max\ F(y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y) \\
s.t. \quad & 0 \in \xi^L \partial f^L(y) + \xi^U \partial f^U(y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial g_j(y) + N_K(y) \\
& \xi \in R^r_{I_+}, \lambda \in R^m_+
\end{aligned}$$

که $F(y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y) \in \mathcal{F}^r$. مجموعه همه‌ی جواب های شدنی مسئله (D_W) که در آن $f^L, f^U \in \chi^r$ می‌باشند را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$S_W = \left\{ z = (y, \xi, \lambda) : 0 \in \xi^L \partial f^L(y) + \xi^U \partial f^U(y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial g_j(y) + N_k(y), \xi \in R^r_{I+}, \lambda \in R^m_+ \right\}$$

تعریف ۱.۵.۵. فرض کنید $z^* = (y^*, \xi^*, \lambda^*) \in S_W$. گوییم z^* جواب کارای بازه‌ای مسئله (D_W) می باشد. اگر هیچ $\hat{z} = (\hat{y}, \hat{\xi}, \hat{\lambda}) \in S$ وجود نداشته باشد به طوریکه:

$$F(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*) \underset{LU}{\prec} F(\hat{y}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(\hat{y})$$

[۷] Wolef

قضیه ۱.۵.۵. (دوگان ضعیف)فرض کنید F ، LU ـ محدب و $g_j, j \in \lambda_m$ محدب باشند. همچنین فرض کنید
$\xi \in R^r_{I+}, z \in S_W, x \in X_\circ$ با $\sum_{i=1}^r (\xi_i^L + \xi_i^U) = 1$ ،آن‌گاه:

$$F(x) \underset{LU}{\nprec} F(y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(y)$$

برهان. با توجه به محدودیت‌های مسئله (D_W) ، نتیجه می‌گیریم که

$$\rho_i^L \in \partial f_i^L(y)\ ,\ \rho_i^U \in \partial f_i^U(y)\ ,\ i \in \Lambda_r\ ,\ \eta_j \in \partial g_j(y)\ ,\ j \in \Lambda_m\ ,\ \mu \in N_K(y)$$

وجود دارند به طوری که:

$$\circ = \xi^L \rho^L + \xi^U \rho^U + \sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j + \mu$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\circ = (x-y)^T \left(\xi^L \rho^L + \xi^U \rho^U + \sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j + \mu \right) \tag{۲۲.۵}$$

حال با برهان خلف فرض کنید:

$$F(x) \underset{LU}{\prec} F(y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(y) \tag{۲۳.۵}$$

بنابراین داریم :

$$F_i(x) \underset{LU}{\preceq} F_i(y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(y),\ \forall i \in \Lambda_r \tag{۲۴.۵}$$

و برای حداقل یک اندیس h داریم:

$$F_h(x) \underset{LU}{\prec} F_h(y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(y) \tag{۲۵.۵}$$

که $F_i \in \mathcal{F}$ و $i \in \Lambda_r$ اکنون، چون F ، LU ـ محدب است و

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \leqslant \circ \leqslant \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(y)$$

چون $x \in X_\circ, z \in S_W$ پس داریم:

$$(x-y)^T \left(\rho_i^L + \sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j \right) \leqslant \circ \text{ و } (x-y)^T \left(\rho_i^U + \sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j \right) < \circ$$

و

$$(x-y)^T\left(\rho_h^L+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)<0 \text{ و } (x-y)^T\left(\rho_h^U+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)<0$$

یا

$$(x-y)^T\left(\rho_h^L+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)\leqslant 0 \text{ و } (x-y)^T\left(\rho_h^U+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)<0 \qquad (۲۶.۵)$$

یا

$$(x-y)^T\left(\rho_h^L+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)<0 \text{ و } (x-y)^T\left(\rho_h^U+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)\leqslant 0$$

برای حداقل یک اندیس h . چون $\xi_i^L>0, i\in\Lambda_r$ با $\sum_{i=1}^r(\xi_i^L+\xi_i^U)=1$ بنابراین با توجه به رابطه (۲۶.۵) داریم:

$$(x-y)^T\left(\xi^L\rho^L+\xi^U\rho^U+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j\right)<0 \qquad (۲۷.۵)$$

همچنین چون $\mu\in N_K(y)$ داریم:

$$(x-y)^T\mu\leq 0 \qquad (۲۸.۵)$$

با ترکیب کردن روابط (۲۳.۵) و (۲۸.۵) داریم

$$(x-y)^T\left(\xi^L\rho^L+\xi^U\rho^U+\sum_{j=1}^m\lambda_j\eta_j+\mu\right)<0$$

که با رابطه (۲۲.۵) تناقض دارد، بنابراین:

$$F(x)\not\prec_{LU} F(y)+\sum_{j=1}^m\lambda_j g_j(y)$$

و اثبات کامل است. □

قضیه ۲.۵.۵. (قضیه دوگان قوی)فرض کنید x^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_P) باشد. همچنین فرض کنید شرط توصیف قیدی اسلاتر در x^* برای مسئله (P_k) به ازای هر $k\in\Lambda_r$ برقرار باشد. آن‌گاه $\xi^*\in R^r_{I+}$ و $\lambda^*\in R^m_+$ وجود دارند به طوری که $z^*=(x^*,\xi^*,\lambda^*)\in S_W$ و اگر شرایط قضیه ۱.۵.۵ برای همه‌ی جواب های شدنی $\hat z=(\hat y,\hat\xi,\hat\lambda)\in S_W$ برقرار باشد، آن‌گاه $z^*=(x^*,\xi^*,\lambda^*)$ یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله دوگان (D_W) می‌باشد.

برهان. چون شرط توصیف قیدی اسلاتر برای جواب کارای بازه‌ای x^* برقرار است، لذا با توجه به قضیه ۴.۳.۵، $\lambda^*\in R^m_+$ و $\xi^*\in R^r_{I+}$ وجود دارند به طوری که

$$\lambda_j^*g_j(x^*)=0,\ j\in\Lambda_m$$

$$\circ \in \xi^{L^*}\partial f^L(x^*) + \xi^{U^*}\partial f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \partial g_j(x^*) + N_K(x^*)$$

که ایجاب می‌کند $z^* \in S_W$. با برهان خلف فرض کنید z^* یک جواب کارای بازه‌ای مسئله دوگان (D_W) نباشد. بنابراین $\hat{z} \in S_W$ وجود دارد به طوری که

$$F(x^*) \underset{LU}{\prec} F(\hat{y}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(\hat{y})$$

که با قضیه ۱.۵.۵ تناقض دارد. لذا z^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (D_W) می‌باشد و اثبات کامل است. □

قضیه ۳.۵.۵. فرض کنید $x^* \in X_\circ$ و $z^* \in S_W$ همچنین فرض کنید که برای همه‌ی (x,y)های شدنی $\xi^{L^*} f^L + \xi^{U^*} f^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j$ در y^* محدب اکید باشد و

$$F(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(x^*) \underset{LU}{\preceq} F(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*) \tag{۲۹.۵}$$

با $\sum_{i=1}^{r}(\xi_i^L + \xi_i^U) = 1$ بنابراین $x^* = y^*$ و y^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_P) می‌باشد.

برهان. با برهان خلف فرض کنید $x^* \neq y^*$. چون $z^* \in S_W$ مشابه با رابطه (۱۱.۵) داریم $\rho_i^L \in \partial f_i^L(y),\ \rho_i^U \in \partial f_i^U(y),\ i \in \Lambda_r,\ \eta_j \in \partial g_j(y),\ j \in \Lambda_m$ همچنین:

$$(x^* - y^*)^T \left(\xi^{L^*}\rho^{L^*} + \xi^{U^*}\rho^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \eta_j + \mu \right) = \circ$$

بعلاوه چون $(x^* - y^*)^T \mu \leqslant \circ$ ، داریم:

$$(x^* - y^*)^T \left(\xi^{L^*}\rho^{L^*} - \xi^{U^*}\rho^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \eta_j \right) \geqslant \circ \tag{۳۰.۵}$$

چون $\xi^{L^*} f^L + \xi^{U^*} f^U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j$ در y^* محدب اکید می‌باشد، بنابراین با توجه به رابطه (۳۰.۵) داریم:

$$\xi^{L^*} f^L(y^*) + \xi^{U^*} f^U(y^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(y^*) <$$
$$\xi^{L^*} f^L(x^*) + \xi^{U^*} f^U(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(x^*)$$

که با رابطه (۲۹.۵) تناقض دارد، پس $x^* = y^*$. حال با برهان خلف فرض کنیم y^* یک جواب کارای بازه ای برای مسئله اولیه (P_P) نباشد، بنابراین با استدلالی مشابه به قضیه ۳.۴.۵ با این نتیجه می‌رسیم که y^* یک جواب کارای بازه‌ای برای مسئله (P_P) می‌باشد و اثبات کامل است. □

مراجع

[۱] سلیمانی ف، (۱۳۹۴)، پایان نامه ارشد:''شرایط لازم و کافی برای کارایی در مسائل بهینه سازی چندهدفه فازی''، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[۲] طاهری س م، (۱۳۷۸)، ''آشنایی با نظریه مجموعه های فازی''، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

[۳] ناجی عظیمی ز، (۱۳۹۵)، ''آشنایی با برنامه ریزی خطی فازی''، چاپ اول، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، صفحه ۱۱-۳۰.

[۴] Bazaraa،M.S and Sherali،H.D and Shetty C.M.(۱۹۹۳)،'' **Nonlinear Programming**''،Wiley،YN.

[۵] Bede B and Gal،SG.(۲۰۰۵)،''Generalization of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation''، **Fuzzy sets and Systems**،۱۵۱،pp ۵۸۱-۵۹۹.

[۶] Bellman R.E and Zadeh L.A.(۱۹۷۰)،''Decision making in a fuzzy environment''،**Management Science**،۱۷،pp ۱۴۱-۱۶۴.

[۷] Chanas S.(۱۹۸۳)،''The use of parametric programming in fuzzy linear programming problems''، **Fuzzy sets and Systems**،۱۱،pp ۲۴۳-۲۵۱.

[۸] Chalco-Cano Y. Lodwick W. A. and Rufián-Lizana A. ،(۲۰۱۳) ''Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative'' **Fuzzy Optimization and Decision Making**، ۱۲(۳)،pp. ۳۰۵-۳۲۲

[۹] Chalco-CanoY.Roman-FloresH.Jimenez-Gamero MD.(۲۰۱۱)،''Generalized derivative and π-derivative for set valued functions''،**Inform.Sci**،۱۸۱،pp ۲۱۷۷-۲۱۸۸.

[۱۰] Ehrgott M.(۲۰۰۶)،**Multicriteria optimization**، Springer Science Business Media.

[۱۱] Guu S.M.and Wu Y.K.(۱۹۹۹)،"Two phase approach for solving the fuzzy linear programming problems"،**Fuzzy sets and Systems**،۱۰۷،pp ۱۹۱-۱۹۵.

[۱۲] Hannan E.L.(۱۹۸۱)،"Linear programming with multiple fuzzy goals"،**Fuzzy Sets and Systems**،۶،pp ۸۱۹-۸۲۹.

[۱۳] Hukuhara M.(۱۹۶۷)،"Integration des applications measurable dont la valeuer est un compact convexe"،**Funkcialaj Ekvacioj**،۱۰،pp ۲۰۵-۲۲۳.

[۱۴] Jimenez M.and Bilbao A.(۲۰۰۹)،"Pareto-optimal solutions in fuzzy multi-objective linear programming"،**Fuzzy Sets and Systems**،۱۶۰،pp ۲۷۲۱–۲۷۱۴.

[۱۵] Kanniappan P.(۱۹۸۳)،"Necessary conditions for optimality of nondifferentiable convex multiobjective programming"**Optim. Theory Appl**،۴۰،pp ۱۷۴–۱۶۷.

[۱۶] Lai J.J.and Hwang C.L.(۱۹۹۲)،"Possibilistic linear programming for managing interest rate risk"،**Fuzzy Sets and Systems**،۴۹،pp .۱۲۱-۱۳۳

[۱۷] Li R.J.(۱۹۹۰)،"Multiple Objective Decision Making in Fuzzy Environment"،**Department of Industrial Engineering**،Kansas State University،Manhattan،KS.

[۱۸] Lee E.S.and Li R.L.(۱۹۹۳)،"Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with Pareto optimum"،**Fuzzy Sets and Systems**،۵۳،pp ۲۸۸–۲۷۵.

[۱۹] Li H.L.andYu C.S.(۲۰۰۰)،"A fuzzy multiobjective program with quasiconcave membership functions and fuzzy coefficients"،**Fuzzy Sets and Systems**،۱۰۹،pp ۵۹-۸۱.

[۲۰] Lin C.C.(۲۰۰۴)،"A weighted max-min model for fuzzy goal programming"،**Fuzzy Sets and Systems**،۱۴۲،pp ۴۰۷-۴۲۰.

[۲۱] Lin C.C and Chen A.P.(۲۰۰۲)،"A generalization of Yang et al.'s method for fuzzy programming with piecewise linear membership functions"، **Fuzzy Sets and Systems**،۱۳۲،pp ۳۴۷-۳۵۲.

[۲۲] Nakamura K.(۱۹۸۴)،"Some extension of fuzzy linear programming"،**Fuzzy Sets and Systems**،۱۴،pp ۲۱۱-۲۲۹.

[۲۳] Narasimhan R.(۱۹۸۱)،"On fuzzy goal programming-some comments"، **Decision Sciences**،۱۲،pp ۵۳۲-۵۳۸.

[۲۴] Noori Skandari M.H.and Ghaznavi M،"An efficient algorithm for solving fuzzy linear programming problems"،**submit department of applied mathematics**،faculty of mathematical sciences.

[۲۵] Stancu-Minasian IM and Tigan St.(۱۹۹۰)،"Multiobjective mathematical programming with inexact data،**KluwerAcademic Publishers**،pp .۳۹۵-۴۱۸

[۲۶] Stefanini L.and Bede B.(۲۰۰۹)،"Generalized Hukuhara differentiability of interval valued functions and interval differential equations"**NonlinearAnal Theory**،۷۱(۳)،pp ۱۳۱۱-۱۳۲۸.

[۲۷] Sun Y.and Wang L.(۲۰۱۳)،"Optimality conditions and duality in nondifferentiable interval valued programming"، **Manag. Optim**،۹،pp ۱۴۲–۱۳۱.

[۲۸] Verdegay J.L.(۱۹۸۲)،"Fuzzy mathematical programming، in M.M.Gupta and E.Sanchez (eds.)"،**Fuzzy Information and Decision Processes**.

[۲۹] Wang H.F.and Fu C.C.(۱۹۹۷)،"A generalization of fuzzy programming with preemptive structure"،**Computational Operational Research**،۲۴،pp ۸۱۹-۸۲۸.

[۳۰] Werners B.(۱۹۸۷)،"Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints"،**Operations research**،۳۱،pp ـ۳۴۲ .۳۴۹

[۳۱] Wu H.C.(۲۰۰۳)،"Saddle point optimality conditions in fuzzy optimization problems"**Fuzzy Optimization and Decision Making**،۲(۳)،pp ۲۷۳–۲۶۱.

[۳۲] Wu H.C.(۲۰۰۷)،"The Karush Kuhn Tuker optimality conditions in an optimization problem with interval valued objective functions"،**Operation Resserach**،۱۷۶،pp ۴۶-۵۹.

[۳۳] Wu H.C.(۲۰۰۹)،"The Karush Kuhn Tuker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval valued objective functions"،**Operation Resserach**،۱۹۶،pp ۴۹-۶۰.

[۳۴] Wu Y.K and Liu C.C.and Lur Y.Y.(۲۰۱۵)،"Pareto optimal solution for multiobjective linear programming problems with fuzzy goals"،**fuzzy optimiziation and decision making**،۱۴،pp ۴۳-۵۵.

[۳۵] Zimmermann H.J.(۱۹۷۶)،"Description and optimization of fuzzy systems"، **General Systems**،۲،pp ۲۱۵–۲۰۹.

[۳۶] Zimmermann H.J.(۱۹۷۸)،"Fuzzy programming and linear programming with several objective functions"،**Fuzzy Sets and Systems**،۱،pp ۴۵-۵۵.

[۳۷] Zimmermann H.J.(۱۹۹۶)،"Fuzzy Set Theory and Its Applications"،**Kluwer Academic Publishers**،Nowell،MA،USA.

Aabstract

Given that there are collections that are not definite and unsafe, they are defined and ambiguous, and usually contain words like, approximately, almost, close to, and so on. The use of fuzzy concepts is necessary to advance the decision maker's goals. It is also inevitable to learn intermediate clues despite being complex because they are more precise and discuss the stability of systems. In this thesis, the basic concepts of fuzzy analysis and solving methods for fuzzy problems, which include symmetric and asymmetric problems, are introduced. Then, by introducing fuzzy multi-objective problems, the Pareto optimal solution, a two-step solution to these problems and planning The ideal logic in the fuzzy environment continues the discussion. In the following, we present the optimality of KKT in multi-objective problems by introducing the implications of the LU and LS responses and proving that the concept of LU is more general using the concept of generalized derivative. The use of the generalized derivative concept instead of the derivative concept is more general and general because there are issues that are not derivable but have generalized derivatives. Then, the dual theorems, including Dugen Woolf and Mond-Weirs, in the state of the given issues Are irreplaceable

key words:
fuzzy consepts,symmetric and asymmetric problems,fuzzy goal programming,optimality conditions KKT,generalized derivative,dugen woolf and mond-weirs.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations Research

Optimality and duality in interval and fuzzy valued multiobjective programming problems

By: Esmail Faramarzi

Supervisors

Dr. Maryam Ghorani
Dr. Mehrdad Ghaznavi

September 2017