بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

انرژی احاطه‌گری دوگانه و انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه از گراف‌ها

نگارنده: فاطمه مجلل

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری‌راد

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز

مهر ماه ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم فاطمه مجلل** با شماره دانشجویی 9415724 رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **گراف و ترکیبیات** تحت عنوان **انرژی احاطه‌گری دوگانه و انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه از گراف‌ها**

که در تاریخ **1396/07/17** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی ...) ☐ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظری** ☑ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استادراهنمای اول	دکتر نادر جعفری‌راد	دانشیار	
2- استادراهنمای دوم			
3-استاد مشاور	دکتر عبدالله آل‌هوز	استادیار	A.A
4- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد معتمد نژاد	دانشیار	
5- استاد ممتحن اول	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
6ـ استاد ممتحن دوم	دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از 4 ماه برگزار شود).

ما حصل آموخته‌هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است. به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم، به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان زیبای مادرم، به قلب پر مهر خواهرانم و به همسر وفادارم که همواره مشوق و پشتوانه ی من بوده، شما خوبانم که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموخته‌ام و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شماست. باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

تقدیم به پدر و مادر، خانواده و همسر عزیزم.

سپاس‌گزاری...

شکر شایان نثار ایزدمنان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از استادان اندیشمند و فرهیخته جناب آقای دکتر نادر جعفری‌راد و جناب آقای دکتر عبدالله آل‌هوز به پاس یاریها و راهنماییهای بی دریغ ایشان تشکر می‌کنم. هم‌چنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر علیشاهی و جناب آقای دکتر رحیمی شعرباف که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده‌اند کمال تشکر را دارم. درپایان تشکر خالصانه دارم خدمت تمام کسانی که به نوعی، به قلمی یا به نگاهی مرا یاری نموده اند.

فاطمه مجلل
مهر ماه ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه مجلل** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **انرژی احاطه‌گری دوگانه و انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه از گراف‌ها** ، تحت راهنمایی دکتر **نادر جعفری‌راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه مجلل
مهر ماه ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در حالت کلی ماتریس‌های متفاوتی می‌توان به یک گراف نسبت داد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به ماتریس مجاورت و ماتریس لاپلاسینی اشاره کرد. بررسی طیف و انرژی ماتریس‌های وابسته به گراف‌ها دارای تاریخچه طولانی می‌باشد. در سال‌های اخیر، از ابزارهایی مانند جبرخطی و نظریه ماتریس‌ها برای بررسی خواص طیف این گراف‌ها استفاده شده است. در این پایان‌نامه به معرفی انرژی احاطه‌گری دوگانه در گراف، انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف و هم‌چنین انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه می‌پردازیم . ضمن محاسبه‌ي انرژی‌های فوق در دسته‌های مختلفی از گراف‌های متداول به محاسبه‌ی کران برای هر یک از انرژی‌های مذکور پرداخته و همچنین به خواص ساختاری آنها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: مقدار ویژه، انرژی گراف، مجموعه احاطه‌گری دوگانه، ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری، ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه، مقادیر ویژه لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه.

مقدمه

مفهوم انرژی گراف برای اولین بار در علم شیمی برای تخمین انرژی π ـ الکترون‌ها از مولکول‌ها آغاز شد. در شیمی مزدوج هیدروکربنی می‌تواند با گراف نشان داده شود که گراف مولکولی نامیده می‌شود. مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف مولکولی سطح انرژی الکترون در مولکول را نشان می‌دهند. ماتریس‌های مختلفی به گراف‌ها نسبت داده می‌شود، از جمله می‌توان به ماتریس مجاورت و ماتریس لاپلاسینی اشاره کرد. باتوجه به مقادیر ویژه این ماتریس‌ها می‌توان انرژی گراف‌ها را به‌دست آورد. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال باشد و $A(G)$ ماتریس مجاورت گراف باشد. اگر $\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_۲ \leq \lambda_۱$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف G باشند که به طور غیرصعودی مرتب شده‌اند، انرژی گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_D(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|$$

اخیراً مفهوم انرژی گراف به‌طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج بسیاری توسط افراد مختلف در این زمینه حاصل شده است. باتوجه به کارآمد بودن انرژی گراف، اخیراً پژوهشگران درصدد تعریف مفهوم انرژی برای ماتریس‌های مختلف، به غیر از ماتریس مجاورت، برآمده و در این راستا نتایج قابل توجهی حاصل شده است. از جمله مجموعه‌هایی که برای گراف‌ها تعریف شده است می‌توان به مجموعه احاطه‌گری، مجموعه احاطه‌گری دوگانه اشاره کرد، که با توجه به این مجموعه‌ها ماتریس احاطه‌گری، ماتریس احاطه‌گری دوگانه، ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری و ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه را تعریف می‌کنیم و با کمک آن انرژی هر کدام را به‌دست می‌آوریم.

نتایج این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۲۰]، [۲۶] و [۳۱] می‌باشند و فصل بندی این پایان‌نامه به قرار زیر است:

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه را ارائه می‌دهیم، در فصل دوم به معرفی انرژی احاطه‌گری دوگانه گراف‌ها، بررسی روی برخی گراف‌های متداول و به‌دست آوردن کران برای انرژی احاطه‌گری دوگانه می‌پردازیم. در فصل سوم انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی را معرفی می‌کنیم و این انرژی را روی برخی گراف‌های متداول محاسبه کرده و هم‌چنین کرانی برای انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی به‌دست می‌آوریم، و در نهایت در فصل چهارم به معرفی انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه در گراف‌ها، بررسی روی برخی گراف‌های متداول و به‌دست آوردن کران برای انرژی لاپلاسنی احاطه‌گری دوگانه می‌پردازیم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

تعاریف

در این فصل تعاریف و مفاهیم لازم از نظریه گراف که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار خواهد گرفت را به اختصار بیان می‌کنیم. تمام مطالب و تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۱] و [۷] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف[۱] G به‌صورت زوج $(V(G), E(G))$ تعریف می‌شود که در آن $V(G)$ یک مجموعه متناهی ناتهی است که عناصر آن را رأس می‌نامند و $E(G)$ خانواده‌ای است متناهی از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(G)$ که به آن یال می‌گویند. $V(G)$ را **مجموعهٔ رأس‌ها**[۲] و $E(G)$ را **خانواده یال‌های** [۳] گراف G می‌گویند.

دو رأس u و v را **مجاور** [۴] گویند اگر یالی بین آنها وجود داشته باشد به همین ترتیب دو یال متمایز از G مجاورند، اگر حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۲.۱.۱. به تعداد رئوس گراف G **مرتبه**[۵] و تعداد یال‌هایش را **اندازه**[۶] گراف G می‌نامند.

[۱] Graph
[۲] Vertex set
[۳] Edge set
[۴] Adjacent
[۵] Order
[۶] Size

تعریف ۳.۱.۱. مطابق معمول گراف کامل n رأسی و گراف دور را به ترتیب با نماد K_n و C_n نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. گراف n- بخشی کامل با $K_{n,2}$ تعریف می‌شود که دارای مجموعه رأس‌های $V = \bigcup_{i=1}^{n}\{u_i v_i\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{u_i u_j, v_i v_j, u_i v_j, v_i u_j; 1 \leq i < j \leq n\}$ است.

تعریف ۵.۱.۱. گراف شبه تاج[۷] گراف تاج S_n^0 برای nهای صحیح که $n \geq 3$، به گرافی با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{u_i v_i, 1 \leq i, j \leq n; i \neq j\}$ گوییم بنابراین S_n^0 گراف کامل دوبخشی $K_{n,n}$ است که با حذف یک تطابق حاصل می‌شود.

لم ۶.۱.۱. در هر گراف با رئوس V، یال‌های E و درجه رأسی $d(v)$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2E.$$

۲.۱ تعاریف و مفاهیم جبرخطی

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس قطری از مرتبه n[۸] یک ماتریس $n \times n$ است که هر مؤلفه روی قطر اصلی غیر صفر بوده و دیگر مؤلفه‌ها صفر باشند و به شکل $A = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. اثر یک ماتریس مربعی[۹] $n \times n$ برابر است با حاصل جمع درآیه‌های قطر اصلی آن یا به عبارت دیگر:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

که a_{ii} درآیه واقع بر سطر و ستون iام ماتریس A است.

قابل ذکر است که اثر فقط برای ماتریس مربعی تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید G یک گراف ساده با n راس به‌صورت $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ باشد. **ماتریس مجاورت**[۱۰] $A(G)$، یک ماتریس $n \times n$ است. اگر رئوس v_i و v_j به‌هم متصل باشند درایه‌ی ijـام ماتریس A یک و درغیر این‌صورت صفر است.

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{درغیر این‌صورت} \end{cases}$$

نماد $\sim$ نشان‌دهنده مجاورت دو راس است.

---

[۷] crown graph

[۸] square matrix of order n

[۹] trace of square matrix

[۱۰] adjacency matrix

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه از A نامیده می‌شود اگر یک بردار $v \neq 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $Av = \lambda v$. این بردار v را یک بردار ویژه از A وابسته به مقدار ویژه‌ی λ می‌نامند. همه‌ی مقادیر ویژه‌ی A، طیف A نامیده می‌شود و با $spec(A)$ نشان داده می‌شود. چند جمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(t) := det(tI - A)$$

ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی χ_A دقیقاً مقادیر ویژه‌ی ماتریس A است. با استفاده از قضیه‌ی اساسی جبر می‌دانیم که هر چندجمله‌ای از درجه‌ی n، دقیقاً n ریشه‌ی مختلط دارد (با شمارش تکراری‌ها) و بنابراین هر ماتریس n مقدار ویژه‌ی (مختلط) با شمارش تکراری‌ها دارد.

لم ۵.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه داریم:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

تعریف ۶.۲.۱. یک ماتریس مربعی A روی اعداد حقیقی، متقارن گفته می‌شود اگر $A = A^T$به این معنی که در ماتریس A ستون iام برابر با سطر iام است.

۳.۱ طیف گراف‌ها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. ماتریس قطری $D(G)$ که عناصر روی قطر اصلی آن، درجه‌ی رئوس است ماتریس قطری از درجه گراف نامیده می‌شود. ماتریس لاپلاسینی گراف G، که با $L(G)$ نشان داده می‌شود برابر با اختلاف ماتریس درجه گراف G و ماتریس مجاورت G است.

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

که مولفه‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{ij}(G) = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & v_i \sim v_j \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} .$$

که d_i درجه‌ی راس v_i در گراف G است. $v_i \sim v_j$ به معنای مجاورت دو راس v_i و v_j است.

تعریف ۲.۳.۱. نمایش دیگری از ماتریس لاپلاسینی وجود دارد. می‌توان ماتریس لاپلاسینی را به‌عنوان مجموع چندین ماتریس $L(u, v)$ که شبیه بسط ماتریس لاپلاسینی روی یک یال است نشان داد، که عناصر قطری مربوط به u و v، ۱، مولفه‌های (u, v) و (v, u)، ۱− و سایر مولفه‌ها با صفر پر می‌شوند.

قضیه ۳.۳.۱. ماتریس لاپلاسینی مساوی با جمع زیر است:

$$L(G) = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} L(u, v)$$

برهان. در ابتدا عناصر قطری را بررسی می‌کنیم:

$$\Big(\sum_{\{u,v\}\in E(G)} L(u,v)\Big)_{ii} = \sum_{\{u,v\}\in E(G)} L(u,v)_{ii} = |N(i)| = d_i = L(G)_{ii}$$

اگر یال وجود داشته باشد عناصر غیر قطری برابر -۱ هستند در غیر این‌صورت برابر صفر هستند. این ویژگی برای لاپلاسینی و برای مجموع این ماتریس‌ها حفظ می‌شود □

تعریف ۴.۳.۱ (مقادیر ویژه لاپلاسینی)**.** مقادیر ویژه $L(G)$، مقادیر ویژه لاپلاسینی نامیده می‌شود. مجموعه همه‌ی مقادیر ویژه لاپلاسینی، طیف لاپلاسینی گراف G نامیده می‌شود.

مثال ۵.۳.۱. گراف $G = K_۳$ را در نظر می‌گیریم ماتریس لاپلاسینی گراف $K_۳$ به‌صورت

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

است. چند جمله‌ای مشخصه برابر

$$\chi(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۹x$$

و مقادیر ویژه لاپلاسینی $۳, ۳$ ، ۰ هستند.

تعریف ۶.۳.۱. طیف گراف[۱۱] G مجموعه مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت گراف G با احتساب چندگانگی آن‌ها می‌باشد. بزرگترین مقدار ویژه‌ی گراف، شعاع طیفی گراف یا اندیس گراف نامیده می‌شود.
طیف گراف G با $Spec(G)$ و چند جمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس مجاورت آن با $\phi(G)$ نشان داده می‌شود.

ماتریس لاپلاسینی یک گراف، یک ماتریس متقارن با مقادیر ویژه‌ی نامنفی است. در واقع اگر این مقادیر ویژه را با μ_i نمایش دهیم، می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر مرتب سازی کنیم:

$$۰ \leq \mu_۱ \leq \mu_۲ \leq \cdots \leq \mu_n$$

بررسی مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی لاپلاسینی گراف‌ها، اطلاعات خوبی از ویژگی‌های گراف‌ها به‌دست می‌دهد.

۴.۱ مفاهیم و تعاریف احاطه‌گری

تعریف ۱.۴.۱ (مجموعه احاطه‌گری)**.** مجموعه‌ای مانند D از رئوس گراف $G = (V, E)$ را احاطه‌گری گوییم هرگاه هر رأس $v \in V$ رأسی از D یا مجاور با رأس‌های D باشد.
هر مجموعه احاطه‌گری با اندازه مینیمم، مجموعه احاطه‌گری مینمم نامیده می‌شود.

[۱۱] specturm

تعریف ۲.۴.۱ (عدد احاطه‌گری). عدد احاطه‌گری گراف G، اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گری برای G است و با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱ (ماتریس احاطه‌گری مینیمم). اگر D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد، ماتریس احاطه‌گری مینیمم G یک ماتریس $n \times n$ به‌صورت $A_D(G) =: (a_{ij}^d)$ می‌باشد، جایی که داریم

$$(a_{ij}^d) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_iv_j \in E \text{ باشد}, \\ 1 & \text{اگر } i = j, v_i \in D \text{ باشد}, \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

معادله‌ی مشخصه ماتریس $A_D(G)$ به‌صورت $f_n(G, \lambda) = \det(\lambda I - A_D(G))$ تعریف می‌شود.

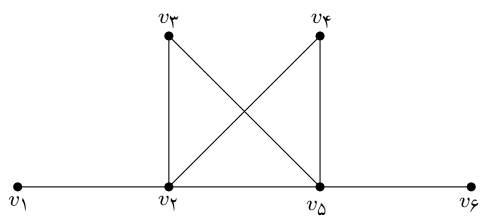
از آنجایی که $A_D(G)$ حقیقی و متقارن است، مقادیر ویژه اعداد حقیقی هستند و می‌توانیم آنها را در مرتبه غیر صعودی به‌صورت $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ مرتب کنیم.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید G گرافی ساده، از مرتبه n با مجموعه رِئوس $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال E باشد و همچنین زیرمجموعه $D \subseteq V$ مجموعه احاطه‌گری باشد انرژی احاطه‌گری مینیمم از گراف G به‌صورت $E_D(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۴.۱ (مجموعه احاطه‌گری دوگانه). فرض کنید G گرافی ساده، از مرتبه n با مجموعه رِئوس $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال E باشد. زیرمجموعه $D' \subseteq V$ مجموعه احاطه‌گری دوگانه است اگر D' یک مجموعه احاطه‌گری باشد و هر رأس $V \backslash D'$ با حداقل دو رأس از D' مجاور باشد.

تعریف ۶.۴.۱ (عدد احاطه‌گری دوگانه). عدد احاطه‌گری دوگانه $Y_{\chi_2}(G)$ مینیمم اندازه به‌دست آمده روی همه مجموعه‌های احاطه‌گری دوگانه مینیمال از گراف G است.

مثال ۷.۴.۱. فرض کنید گراف G به‌صورت شکل ۱.۱ باشد.



شکل ۱.۱: گراف G

برای محاسبه انرژی احاطه‌گری دوگانه گراف G ابتدا مجموعه احاطه‌گری دوگانه ممکن برای گراف G که به یکی از حالت‌های زیر می‌تواند باشند در نظر بگیرید:

- $D'_1 = \{v_1, v_5\}$
- $D'_2 = \{v_2, v_5\}$

- $D'_{۳} = \{v_{۲}, v_{۶}\}$

فرض کنید مجموعه احاطه‌گری دوگانه به‌صورت $\{v_{۱}, v_{۲}\}$ باشد با توجه به تعریف، ماتریس احاطه‌گری دوگانه مینیمم به‌صورت زیر است:

$$A'_D(G) = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

پس معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس $A'_D(G)$ به‌صورت $\lambda^{۶} - ۲\lambda^{۵} - ۶\lambda^{۳} + ۷\lambda^{۲} - ۲\lambda = ۰$ به‌دست می‌آید که با حل معادله‌ی مشخصه ماتریس مذکور، ریشه‌های آن که مقادیر ویژه احاطه‌گری دوگانه مینیمم هستند به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\lambda_{۱} \simeq -۱/۶۹۷۳, \quad \lambda_{۲} \simeq -۱/۱۲۶۳, \quad \lambda_{۳} \simeq ۰,$$
$$\lambda_{۴} \simeq ۰/۶۲۵۴۶, \quad \lambda_{۵} \simeq ۱/۳۲۶۱, \quad \lambda_{۶} \simeq ۳/۱۹۲۹$$

با توجه به اینکه $E'_D(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|$ پس داریم:

$$E_{D'}(G) = |\lambda_{۱}| + |\lambda_{۲}| + |\lambda_{۳}| + |\lambda_{۴}| + |\lambda_{۵}| + |\lambda_{۶}| \simeq ۷/۵۴۷۱.$$

فصل ۲

انرژی احاطه‌گری دوگانه گراف

۱.۲ مقدمه

در بخش اول این فصل قصد داریم انرژی احاطه‌گری دوگانه را با توجه به تعاریف مقدماتی که در فصل یک داشتیم و هم‌چنین با کمک تعاریف زیر معرفی کنیم .در بخش‌های بعدی به بیان خواصی برای این انرژی و هم‌چنین محاسبه‌ی آن برای برخی از گراف‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید D' مینیمم مجموعه احاطه‌گری دوگانه از گراف G باشد، مینیمم ماتریس احاطه‌گری دوگانه از G، ماتریس $n \times n$ تعریف شده با $A_{D'}(G)$ است که درایه‌هایش به‌صورت زیر تشکیل می‌شوند:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_iv_j \in E \text{ باشد}, \\ ۱ & \text{اگر } i = j, v_i \in D' \text{ باشد}, \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}. \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۲. چندجمله‌ای مشخصه از $A_{D'}(G)$ با $f_n(G, \lambda) = \det(\lambda I - A_{D'}(G))$ نشان داده می‌شود. با محاسبه دترمینان مذکور معادله مشخصه به‌دست می‌آید. با حل معادله مشخصه ریشه‌های آن که کوچکترین مقادیر ویژه احاطه‌گری دوگانه از گراف G هستند، حاصل می‌شوند. به ریشه‌های معادله مشخصه ماتریس $A_{D'}(G)$، مقادیر ویژه $A_{D'}(G)$ گفته می‌شود. از آنجا که $A_{D'}(G)$ ماتریسی حقیقی و متقارن است، مقادیر ویژه آن اعدادی حقیقی‌اند و در مرتبه غیر صعودی به‌صورت $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq \cdots \geq \lambda_n$ مرتب شده‌اند.

تعریف ۳.۱.۲. مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس $A_{D'}(G)$ را مینیمم انرژی احاطه‌گری دوگانه از G گوییم و با $E_{D'}(G)$ نشان می‌دهیم به‌عبارتی دیگر داریم:

$$E_{D'}(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|.$$

مثال ۴.۱.۲. فرض کنید G یک دور $C_۴$ با ۴ راس $\{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴\}$ باشد، اگر مجموعه احاطه‌گری دوگانه به صورت $D' = \{u_۱, u_۲\}$ در نظر بگیریم، آنگاه ماتریس احاطه گری مینیمم از گراف به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$A_{D'}(C_۴) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

چندجمله‌ای مشخصه $A_{D'}(C_۴)$ به صورت زیر است:

$$|\lambda I - A_{D'}(C_۴)| = \begin{vmatrix} \lambda - ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & \lambda & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & \lambda - ۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^۴ - ۲\lambda^۳ - ۳\lambda^۲ + ۴\lambda.$$

با حل معادله‌ی مشخصه $A_{D'}(C_۴)$، ریشه‌های آن که کمترین مقادیر ویژه احاطه‌گری دوگانه هستند به صورت ۰ و ۱ و $\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$ و $\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۲}$ محاسبه می‌کنیم لذا با توجه به تعریف ۳.۱.۲، مینیمم انرژی احاطه‌گری دوگانه برابرست با:

$$E_{D'}(C_۴) = \sum_{i=۱}^{n} \left|\lambda_i\right| = \sum_{i=۱}^{۴} \left|\lambda_i\right| = \left|۱\right| + \left|\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}\right| + \left|\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۲}\right| + \left|۰\right| = ۱ + \sqrt{۱۷}.$$

۲.۲ خواص انرژی احاطه‌گری دوگانه

بعد از معرفی انرژی احاطه‌گری دوگانه در بخش اول، حال به بیان برخی از خواص این انرژی در گراف‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس $\{v_۱, ..., v_n\}$ و مجموعه یال E باشد. اگر $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس $A_{D'}(G)$ باشند آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^۲ = ۲|E| + D'.$$

برهان. می‌دانیم مجموع مربعات مقادیر ویژه $A_{D'}(G)$ برابر با اثر ماتریس $A_{D'}(G)^2$ است. از طرفی بنابر تعریف ۶.۴.۱، می‌دانیم که درایه‌های ماتریس $A_{D'}(G)$ به صورت زیر است:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_iv_j \in E \text{ باشد} \\ 1 & \text{اگر } i=j, v_i \in D' \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

یعنی ماتریس $A_{D'}(G)$ همان ماتریس مجاورت گراف G است به علاوه اینکه روی قطر اصلی به تعداد اعضای D' عنصر ۱ داریم پس $A_{D'}(G)$ برابرست با:

$$A_{D'}(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

اگر $A_{D'}(G)^2$ را محاسبه کنیم به صورت زیر است:

$$A_{D'}(G)^2 = A_{D'}(G) \times A_{D'}(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum a_{1j}a_{j1} & \sum a_{1j}a_{j2} & \dots & \sum a_{1j}a_{jn} \\ \sum a_{2j}a_{j1} & \sum a_{2j}a_{j2} & \dots & \sum a_{2j}a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{nj}a_{j1} & \sum a_{nj}a_{j2} & \dots & \sum a_{nj}a_{jn} \end{bmatrix}$$

اثر ماتریس $A_{D'}(G)^2$ برابر با مجموع مربعات مقادیر ویژه آن است و از طرف دیگر بنابر تقارن $A_{D'}(G)$، $a_{ji} = a_{ij}$ پس می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \sum_{i<j} a_{ij}^2$$

حال چون ماتریس متقارن است پس $a_{ji} = a_{ij}$ است، به‌عبارتی‌دیگر درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی برابر است. از طرفی چون درایه‌های غیر از قطر اصلی در ماتریس احاطه‌گری دوگانه برابر با یک است، پس بیانگر این است که به تعداد درجه رئوس گراف، درایه یک در ماتریس احاطه‌گری دوگانه داریم به‌عبارتی دیگر:

$$\sum_{i<j} a_{ij}^2 = 2\sum_{i<j} a_{ij}^2 = 2|E|. \tag{1.2}$$

حال $\sum_{i<j} a_{ij}^{۲}$ را درنظر بگیرید. بنابر تعریف ۱.۱.۲ در ماتریس احاطه‌گری درایه روی قطر اصلی زمانی یک است که $v_i \in D'$ باشد پس چون فقط درایه یک و صفر داریم می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_{ii}^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii} = |D'|. \tag{۲.۲}$$

حال بنابر ۱.۲ و ۲.۲ می‌توان گفت:

$$\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii} + ۲\sum_{i<j} a_{ij}^{۲} = |D'| + ۲|E|.$$

□

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس و m یال باشد و فرض کنید D' یک مجموعه احاطه‌گری دوگانه G باشد و $F = |\det A_{D'}(G)|$ آنگاه:

$$\sqrt{۲m + |D'| + n(n-۱).F^{\frac{۲}{n}}} \leq E_{D'}(G) \leq \sqrt{n(۲m + D')}.$$

برهان. فرض کنید $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq \cdots \geq \lambda_n$ مقادیر ویژه $A_{D'}(G)$ باشد از طرفی با توجه به نامساوی کشی_شوارتز داریم:

$$\Big[\sum_{i=۱}^{n}(a_i b_i)\Big]^{۲} \leq \Big[\sum_{i=۱}^{n}(a_i)^{۲}\Big]\Big[\sum_{i=۱}^{n}(b_i)^{۲}\Big],$$

حال فرض کنید $a_i = ۱$ و $b_i = |\lambda_i|$ باشد، لذا با جایگذاری داریم:

$$E_{D'}(G)^{۲} = \Big(\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|\Big)^{۲} \leq n\Big(\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|\Big)^{۲} = n\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|^{۲}$$

و بنابر قضیه ۱.۲.۲ می‌توان نوشت:

$$E_{D'}^{۲}(G) \leq n(۲m + |D'|) \Rightarrow E_{D'}(G) \leq \sqrt{n(۲m + |D'|)} \tag{۳.۲}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$[E_{D'}(G)]^{۲} = \Big[\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|\Big]^{۲} = \sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i^{۲}| + \sum_{i\neq j}|\lambda_i||\lambda_j|$$

همچنین از نامساوی میانگین_ هندسی که به‌صورت زیر است می‌توان استفاده کرد:

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i \geq \prod_{i=۱}^{n}(a_i)^{\frac{۱}{n}}$$

با توجه به نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی و $\sum_{i\neq j}|\lambda_i||\lambda_j|$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}|\lambda_i||\lambda_j| &\geq \Big(\prod_{i\neq j}|\lambda_i||\lambda_j|\Big)^{\frac{1}{n(n-1)}}\\ &\geq n(n-1)\Big(\prod_{i\neq j}|\lambda_i||\lambda_j|\Big)^{\frac{1}{n(n-1)}}\\ &\geq n(n-1)\Big[\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|\Big]^{\frac{2}{n}}\\ &\geq n(n-1)\Big[\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|\Big]^{\frac{2}{n}} \geq n(n-1)|\det A_{D'}(G)|^{\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

چون $\det A_{D'}(G)=\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|$ لذا داریم:

$$(E_{D'}(G))^2 \geq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i^2| + n(n-1)|A_{D'}(G)|^{\frac{2}{n}} = 2m+|D'|+n(n-1)|A_{D'}(G)|^{\frac{2}{n}}$$

$$E_{D'}(G) \geq \sqrt{2m+|D'|+n(n-1)|A_{D'}(G)|^{\frac{2}{n}}} = \sqrt{2m+|D'|+n(n-1)f^{\frac{2}{n}}} \quad (4.2)$$

بنابراین از (۳.۲) و (۴.۲) حکم زیر نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{2m+|D'|+n(n-1)f^{\frac{2}{n}}} \leq E_{D'}(G) \leq \sqrt{n(2m+|D'|)}.$$

□

بابات[1] و **پاتی** [2] نشان دادند که اگر انرژی گراف عدد گویا باشد، آنگاه یک عدد صحیح زوج است. نتایج مشابه برای مینیمم انرژی احاطه‌گری دوگانه در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم D' باشد، اگر انرژی احاطه‌گری دوگانه مینیمم $E_{D'}(G)$ یک عدد گویا باشد آنگاه

$$E_{D'}(G) = 2M - |D'|$$

یا

$$E_{D'}(G) \equiv |D'| \text{(به پیمانه۲)}.$$

برهان. فرض کنید $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$، کوچکترین مقادیر ویژه احاطه‌گری دوگانه از گراف G باشد که $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ مثبت و بقیه آنها نامثبت است، آنگاه می‌توان نوشت:

$$E_{D'}(G) = (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r) - (\lambda_{r+r}+\cdots+\lambda_n)$$

[1] R. B. Bapat
[2] Sukunta Pati

اگر سمت راست رابطه را با $\pm(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ جمع کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
E_{D'}(G) &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) - (\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_n) \pm (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) - (\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_n) \\
&+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) - (\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_n) \\
&- (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) + (\lambda_{r+1} + \cdots + \lambda_n) \\
&= 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \\
&= 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i
\end{aligned}$$

چون به تعداد D'، روی قطر اصلی ماتریس $A_{D'}(G)$ ، درایه ۱ داریم می‌توان گفت $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = |D'|$

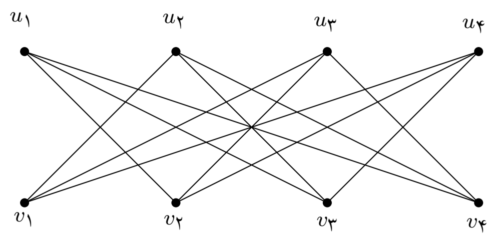
$$\Rightarrow E_{D'}(G) \equiv |D'| \text{(به پیمانه ۲)}.$$

□

۳.۲ انرژی احاطه‌گری دوگانه برخی از گراف‌های متداول

در این بخش انرژی احاطه‌گری دوگانه را برای برخی از گراف‌ها محاسبه می‌کنیم ابتدا برای روشن شدن بهتر موضوع مثال زیر را ذکر می‌کنیم. سپس انرژی احاطه‌گری دوگانه را برای گراف های S_n^0 ، K_n و $K_{n,2}$ محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید گراف S_4^0 به شکل ۱.۲ باشد



شکل ۱.۲: گراف S_4^0

اگر بخواهیم انرژی احاطه‌گری دوگانه S_4^0 را حساب کنیم ابتدا $A_{D'}(S_4^0)$ را تشکیل می‌دهیم، با توجه به اینکه مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم از S_4^0 را می‌توان برابر با $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ در نظر

گرفت، خواهیم داشت:

$$A_{D'}(S_4^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس چندجمله‌ای مشخصه برابر با دترمینان ماتریس روبرو است:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

پس معادله مشخصه ماتریس فوق برابرست با:

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)(\lambda^2-3\lambda-2)=0$$

که با حل این معادله مشخصه، مقادیرویژه احاطه‌گری دوگانه ماتریس $A_{D'}(S_4^\circ)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda = 2\ ,\ \lambda = 0\ ,\ \lambda = -1\ , \qquad \text{(هر کدام از مرتبه تکرار یک)}$$
$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\ ,\ \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \qquad \text{(هر کدام از مرتبه تکرار یک)}$$

لذا انرژی احاطه‌گری دوگانه مینیمم S_4° برابر می‌شود با:

$$\sum_{i=1}^{4} |\lambda_i| = 2 + 2 + \sqrt{17} + \sqrt{17} = 4 + 2\sqrt{17}.$$

قضیه ۲.۳.۲. برای $n \geq 4$ انرژی احاطه‌گری دوگانه از گراف S_n° برابر است با:

$$E_{D'}(S_n^\circ) = 2 + 2(n-3) + \sqrt{n^2 - 2n + 9} + \sqrt{n_2 + 2n - 7}.$$

برهان. گراف S_n° با مجموعه رئوس $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ در نظر بگیرید. اگر کوچکترین مجموعه احاطه‌گری دوگانه $D' = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ باشد، آنگاه می‌توان $A_{D'}(S_n^\circ)$ را به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$A_{D'}(S_n^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

چند جمله‌ای مشخصه برابرست با دترمینان ماتریس زیر:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

و معادله مشخصه به‌صورت

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)^{n-3}(\lambda - 1)^{n-3}(\lambda^2 + (n-3)\lambda - (2n - 4))(\lambda^2 - (n-1)\lambda - 2) = 0$$

است. با حل کردن معادله‌ی مشخصه ماتریس $A_{D'}(S_n^\circ)$، ریشه‌های آن که کمترین مقادیر ویژه احاطه‌گری دوگانه هستند همراه با مرتبه تکرار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda = 0 \qquad , \lambda = 2 \qquad , \lambda = -1 \qquad (\text{از مرتبه} \; n - 3)$$

$$\lambda = 1 \qquad (\text{از مرتبه} \; n - 3)$$

$$\lambda = \frac{(n-1) \pm \sqrt{n^2 - 2n + 9}}{2} \qquad (\text{هرکدام از مرتبه یک})$$

$$\lambda = \frac{(n-3) \pm \sqrt{n^2 + 2n - 7}}{2} \qquad (\text{هرکدام از مرتبه یک})$$

است. بنابراین کمترین انرژی احاطه‌گری دوگانه به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E_{D'}(S_n^{\circ}) = ۲ + ۲(n-۳) + \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹} + \sqrt{n^۲ + ۲n - ۷}.$$

□

قضیه ۳.۳.۲. انرژی احاطه‌گری دوگانه از گراف کامل K_n برابر است با:

$$(n-۳) + \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹}.$$

برهان. گراف کامل K_n با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ در نظر بگیرید.
هریک از مجموعه‌های $\{v_۲, v_۳\}$ یا $\{v_۱, v_۳\}$ یا ... را می‌توان به‌صورت مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم در نظر گرفت، اگر کوچکترین مجموعه احاطه‌گری دوگانه $D' = \{v_۱, v_۲\}$ باشد، آنگاه $A_{D'}(K_n)$ را به‌صورت زیر می‌توان تشکیل داد:

$$A_{D'}(K_n) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

لذا چندجمله‌ای مشخصه را می‌توان با محاسبه دترمینان ماتریس زیر به‌دست آورد.

$$\begin{bmatrix} \lambda - ۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \ldots & -۱ \\ -۱ & \lambda - ۱ & -۱ & -۱ & \ldots & -۱ \\ -۱ & -۱ & \lambda & -۱ & \ldots & -۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$$

پس معادله مشخصه به‌صورت $\lambda(\lambda+۱)^{n-۳}(\lambda^۲ - (n-۱)\lambda - ۲) = ۰$ است. با حل معادلهٔ مشخصه ماتریس $A_{D'}(K_n)$ و به‌دست آوردن ریشه‌های آن که مقادیر ویژه ماتریس احاطه‌گری دوگانه K_n هستند، داریم:

$$\lambda = ۰ \qquad , \lambda = -۱ \qquad \qquad (\text{از مرتبه} \; n-۳)$$

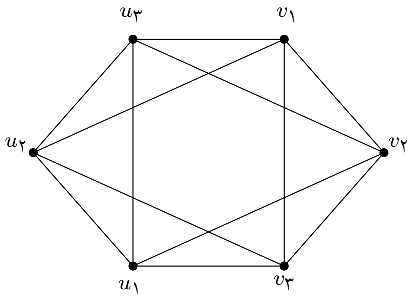
$$\lambda = \frac{(n-۱) \pm \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹}}{۲} \qquad \qquad (\text{هرکدام از مرتبه ۱})$$

لذا حداقل انرژی احاطه‌گری دوگانه برابر است با:

$$\begin{aligned} E_{D'}(K_n) =& |۰|(n-۳) + |-۱|(n-۳) + \left| \frac{(n-۱) + \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹}}{۲} \right| \\ &+ \left| \frac{(n-۱) \pm \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹}}{۲} \right| = (n-۳) + \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹}. \end{aligned}$$

□

مثال ۴.۳.۲. فرض کنید گراف $K_{۳,۲}$ به شکل ۲.۲، با رأس‌های $V = \{u_۱, u_۲, u_۳, v_۱, v_۲, v_۳\}$ و یال‌های $E = \{v_۲v_۳, v_۱v_۲, u_۲u_۳, u_۱u_۲, u_۱v_۲, u_۲v_۳, v_۱u_۲, v_۲u_۳, u_۱u_۳, u_۱v_۳, v_۱u_۳, v_۱v_۳\}$ باشد. اگرمجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم به‌صورت $D' = \{v_۱, u_۱\}$ در نظر بگیریم، آنگاه $A_{D'}(K_{۳,۲})$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:



شکل ۲.۲: گراف $K_{۳,۲}$

$$A_{D'}(K_{۳,۲}) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۶\times۶}$$

چند جمله‌ای مشخصه $A_{D'}(K_{۳,۲})$ را با محاسبه دترمینان زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda-۱ & ۰ & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & \lambda-۱ & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & \lambda & ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۰ & \lambda & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \lambda & ۰ \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & ۰ & \lambda \end{vmatrix}$$

معادله مشخصه برابر با $\lambda^۲(\lambda-۱)(\lambda+۲)(\lambda^۲-۳\lambda-۶) = ۰$ است. با حل معادله مشخصه گراف $K_{۳\times۲}$، ریشه‌های آن که مقادیر ویژه ماتریس احاطه‌گری دوگانه مینیمم هستند، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\lambda = -۲\,, \lambda = ۱$ (از مرتبه تکرار یک)

$\lambda = ۰$, (از مرتبه تکرار دو)

$\dfrac{۳ \pm \sqrt{۳۳}}{۲}$ (هر کدام از مرتبه تکرار یک)

بنابراین انرژی احاطه‌گری دوگانه مینیمم از $K_{۳,۲}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}E_{D'}(K_{۳,۲}) &= \sum_{i=۱}^{۳}|\lambda_i| = |-۲| + |۱| + |۰| + \left|\frac{۳+\sqrt{۳۳}}{۲}\right| + \left|\frac{۳-\sqrt{۳۳}}{۲}\right| \\ &= ۱ + ۲ + \sqrt{۳۳} = ۳ + \sqrt{۳۳}.\end{aligned}$$

در مثال فوق انرژی احاطه‌گری دوگانه مینیمم را برای گراف سه بخشی از مرتبه ۶ $K_{۳,۲}$ محاسبه کردیم حال در قضیه زیر این انرژی را برای گراف بخشی از مرتبه ۲n محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۲. انرژی احاطه‌گری دوگانه مینیمم از گراف n ـ بخشی کامل از مرتبه ۲n برابر است با:

$$(۲n+۳) + \sqrt{۴n^۲ - ۴n + ۹}.$$

برهان. فرض کنید $K_{n,۲}$ گراف n ـ بخشی کامل با مجموعه رئوس $V = \bigcup_{i=۱}^{n}\{u_i, v_i\}$ است. اگر کوچکترین مجموعه احاطه‌گری دوگانه را به‌صورت $D' = \{u_۱, v_۱\}$ درنظر بگیریم، آنگاه ماتریس $A_{D'}(K_{n,۲})$ با توجه به تعریف ۶.۴.۱ به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$A_{D'}(K_{n,۲}) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس چند جمله‌ای مشخصه برابرست با:

$$\begin{bmatrix} \lambda-۱ & ۰ & -۱ & -۱ & \dots & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & \lambda-۱ & -۱ & -۱ & \dots & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & \lambda & ۰ & \dots & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۰ & \lambda & \dots & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \dots & \lambda & ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \dots & ۰ & \lambda & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \dots & -۱ & -۱ & \lambda & ۰ \\ -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & \dots & -۱ & -۱ & ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

لذا معادله مشخصه $A_{D'}(K_{۲,۲})$ به‌صورت $\lambda^{n-۱}(\lambda-۱)(\lambda+۲)^{n-۲}(\lambda^۲-(۲n-۳)\lambda-۲n) = ۰$ محاسبه می‌گردد که با حل معادله مشخصه ریشه‌های آن که کوچکترین مقادیر ویژه احاطه‌گری دوگانه

هستند، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda = -۲ \,, \lambda = ۱ \qquad (\text{از مرتبه تکرار } n-۲)$$

$$\lambda = ۰ \qquad (\text{از مرتبه تکرار } n-۱)$$

$$\lambda = \frac{(۲n-۳) \mp \sqrt{۴n^۲ - ۴n + ۹}}{۲} \quad (\text{از مرتبه تکرار یک})$$

بنابراین مینیمم انرژی احاطه‌گری دوگانه $K_{n,۲}$ به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} E_{D'}(K_{۲,۲}) &= ۱ + ۲(n-۲) + \sqrt{۴n^۲ - ۴n + ۹} \\ &= (۲n-۳) + \sqrt{۴n^۲ - ۴n + ۹} = (۲n-۳) + \sqrt{۴n^۲ - ۴n + ۹}. \end{aligned}$$

□

فصل ۳

انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف

در این فصل به معرفی انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف که باتوجه به ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری مینیمم از گراف G، تعریف می‌گردد و بررسی روی تعدادی از گراف‌های متداول می‌پردازیم، همچنین کران‌هایی برای انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی به‌دست آورده و خواصی از انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف‌ها را بیان می‌کنیم.

۱.۳ انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف

برای معرفی انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی ابتدا تعاریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید $D(G)$ ماتریس قطری از درجه‌ی رئوس گراف G است پس ماتریس $L_D(G)$ به‌صورت $L_D(G) = D(G) - A_D(G)$ تعریف می‌شود و ماتریس احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از G نامیده می‌شود. توجه به این ماتریس و محاسبه مقادیر ویژه آن که به‌صورت $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ مرتب شده‌اند، می‌توان انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی را از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$LE_D(G) =: \sum_{i=1}^{n} \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|$$

که m تعداد یال‌ها و $\frac{2m}{n}$ درجه‌ی متوسط ازG نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱.۳. فرض کنید گراف G گرافی به‌صورت شکل ۱.۱ باشد در این‌صورت مجموعه احاطه‌گری مینیمم ممکن برای گراف مذکور به‌صورت زیر هستند:

۱. $D_{1} = \{v_{1}, v_{5}\}$

۲. $D_{2} = \{v_{2}, v_{5}\}$

۳. $D_{3} = \{v_{2}, v_{6}\}$

۱. اگر مجموعه احاطه‌گری $D_{1} = \{v_{1}, v_{5}\}$ درنظر بگیریم آنگاه ماتریس احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف G را باتوجه به تعریف به‌صورت زیر می‌توان تشکیل داد:

$$A_{D_1}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و ماتریس قطری از درجه رئوس G به این‌صورت است:

$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین با توجه به تعریف ۱.۱.۳ ماتریس احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی را تشکیل می‌دهیم:

$$L_{D_1}(G) = D(G) - A_{D_1}(G) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

پس معادله‌ی مشخصه به‌صورت $\mu^{6} - 12\mu^{5} + 48\mu^{4} - 69\mu^{3} + 16\mu^{2} + 22\mu - 4 = 0$ است. با حل معادله مشخصه، مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری لاپلاسینی به‌صورت $\mu_{1} = -0/48$، $\mu_{2} = 0/1744$، $\mu_{3} = 1/1279$، $\mu_{4} = 2$، $\mu_{5} = 4/2080$ و $\mu_{6} = 4/9754$ به‌دست می‌آید. از طرفی اندازه رئوس برابر با ۶، اندازه یال ها برابر با ۷ و اندازه متوسط برابر با $\frac{7}{3} = \frac{7*2}{6} = \frac{2m}{n}$

است. بنابراین انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی برابرست با:

$$LE_{D_1}(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i-\frac{2m}{n}\right|=\left|-0/4856-\frac{7}{3}\right|+\left|0/1744-\frac{7}{3}\right|+\left|1/1279-\frac{7}{3}\right|$$
$$+\left|2-\frac{7}{3}\right|+\left|4/2080-\frac{7}{3}\right|+\left|4/9754-\frac{7}{3}\right|=11/0334.$$

۲. اگرمجموعه احاطه‌گری به‌صورت $D_2=\{v_2,v_5\}$ درنظر بگیریم، آنگاه $L_{D_2}(G)$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$A_{D_2}(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

پس $L_{D_2}(G)$ برابر است با:

$$L_{D_2}(G)=D(G)-A_{D_2}(G)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین معادله‌ی مشخصه $\mu^6-12\mu^5+51\mu^4-90\mu^3+55\mu^2+8\mu-12=0$ به‌دست می‌آید.

با حل معادله مشخصه فوق، مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی به‌صورت $\mu_1=-0/3914, \mu_2=0/6972, \mu_3=1/2271, \mu_4=2, \mu_5=4/1642, \mu_6=4/3028$ حاصل می‌شود.

از طرفی می‌دانیم که گراف از مرتبه ۶ و اندازه ۷ است، پس اندازه متوسط برابر با $\frac{7}{3}=\frac{7*2}{6}=\frac{2m}{n}$ است. بنابراین انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی را باتوجه با رابطه

$$LE_{D}(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i-\frac{2m}{n}\right|$$

می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$LE_{D_2}(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i-\frac{2m}{n}\right|=\left|-0/3914-\frac{7}{3}\right|+\left|0/6972-\frac{7}{3}\right|+\left|1/2271-\frac{7}{3}\right|$$
$$+\left|2-\frac{7}{3}\right|+\left|4/1642-\frac{7}{3}\right|+\left|4/3028-\frac{7}{3}\right|=9/6007.$$

لذا نتیجه می‌گیریم که انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف دلخواه G به مجموعه احاطه‌گری مینیمم بستگی دارد و با انتخاب مجموعه‌های مختلف برای مجموعه احاطه‌گری مینیمم، مقدارهای مختلفی برای انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی به‌دست می‌آید.

در بخش ابتدایی فصل به معرفی انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف پرداختیم و برای گراف G به شکل ۱.۱ محاسبه کردیم. حال این انرژی را با کمک قضایای زیر برای برخی از گراف‌ها از قبیل $K_{1,n-1}$ ، K_n ، S_n^0 و $K_{n,2}$ محاسبه می‌کنیم.

۲.۳ انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی برخی از گراف‌های متداول

در بخش قبل انرژی احاطه‌گری لاپلاسینی معرفی کردیم حال در این بخش به محاسبه‌ی این انرژی برای برخی از گراف‌های خاص می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. برای $n \geq 2$ انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف ستاره $K_{1,n-1}$ برابر است با

$$\frac{(n-2)^2}{n} + \sqrt{n^2 - 2n + 5}.$$

برهان. اگر گراف ستاره $K_{1,n-1}$ را با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ و مرکز v_0 در نظر بگیریم، آنگاه مجموعه احاطه‌گری مینیمم $D = \{v_0\}$ است. پس ماتریس احاطه گری مینیمم $A_D(K_{1,n-1})$ را تشکیل می‌دهیم

$$A_D(K_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

از طرفی می‌دانیم که $D(K_{1,n-1})$ به‌صورت زیر است:

$$D(K_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

بنابراین با توجه به تعریف، $L_D(K_{1,n-1})$ را تشکیل می‌دهیم:

$$L_D(K_{1,n-1}) = D(K_{1,n-1}) - A_D(K_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} n-2 & -1 & 1- & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

پس معادله‌ی مشخصه به‌صورت $(\mu-1)^{(n-2)}(\mu^2-(n-1)\mu-1)=0$ است. با حل معادله مشخصه مذکور، مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی ماتریس $L_D(K_{1,n-1})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu = 1 \qquad \text{(با مرتبه تکرار دو)}$$

$$\mu = \frac{(n-1) \pm \sqrt{n^2-2n+5}}{2} \qquad \text{(هر کدام از مرتبه تکرار یک)}$$

از طرفی می‌دانیم که اندازه رئوس برابر با n واندازه یال‌ها برابر با $(n-1)$ پس اندازه‌ی متوسط برابر با $\frac{2(n-1)}{n}$ است. بنابراین انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی به‌صورت زیرقابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned}
LE_D(K_{1,n-1}) &= \left|1-\frac{2(n-1)}{n}\right|(n-2) + \left|\frac{(n-1)+\sqrt{n^2-2n+5}}{2}-\frac{2(n-1)}{n}\right| \\
&+ \left|\frac{(n-1)-\sqrt{n^2-2n+5}}{2}-\frac{2(n-1)}{n}\right| = \left|\frac{-n+2}{n}\right|(n-2) \\
&+ \left|\frac{(n-1)+\sqrt{n^2-2n+5}}{2}-\frac{2(n-1)}{n}\right| \\
&+ \left|\frac{(n-1)-\sqrt{n^2-2n+5}}{2}-\frac{2(n-1)}{n}\right| = \left|\frac{-n+2}{n}\right|(n-2) \\
&+ \left|\frac{n^2-n+n\sqrt{n^2-2n+5}-4n+4}{2n}\right| \\
&+ \left|\frac{n^2-n-n\sqrt{n^2-2n+5}-4n+4}{2n}\right| = \frac{(n-2)(n-2)}{n} \\
&+ \left|\frac{n^2-5n+4+n\sqrt{n^2-2n+5}}{2n}\right| \\
&+ \left|\frac{n^2-5n+4-n\sqrt{n^2-2n+5}}{2n}\right| = \frac{(n-2)^2}{n}+\sqrt{n^2-2n+5}.
\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۲.۳. برای $n \geq 2$ انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف کامل K_n برابر است با

$$(n-2)+\sqrt{n^2-2n+5}.$$

برهان. گراف کامل K_n با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ در نظر بگیرید. اگر مجموعه احاطه‌گری مینیمم برابر با $D=\{v_1\}$ درنظر بگیریم، پس ماتریس $A_D(K_n)$ به‌صورت زیر است:

$$A_D(K_n) = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0
\end{pmatrix}_{n\times n}$$

از طرفی می‌دانیم که ماتریس قطری از درجه رئوس گراف برابرست با:

$$D(K_n) = \begin{pmatrix} n-۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & n-۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & n-۱ \end{pmatrix}_{n\times n}$$

سپس ماتریس $L_D(K_n)$ را تشکیل می‌دهیم

$$L_D(K_n) = D(K_n) - A_D(K_n) = \begin{pmatrix} n-۲ & -۱ & -۱ & \dots & -۱ & -۱ \\ -۱ & n-۱ & -۱ & \dots & -۱ & -۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -۱ & -۱ & -۱ & \dots & -۱ & n-۱ \end{pmatrix}_{n\times n}$$

بعد از محاسبه معادله‌ی مشخصه ماتریس $L_D(K_n)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[\mu - n]^{(n-۲)}[\mu^۲ - (n-۱)\mu - ۱] = ۰$$

با حل کردن معادله مشخصه ماتریس $L_D(K_n)$، ریشه‌های آن که مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف K_n هستند به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu = n \qquad (\text{از مرتبه تکرار } n-۱)$$

$$\mu = \frac{(n-۱) \pm (n-۲) + \sqrt{n^۲ - ۲n + ۵}}{۲} \qquad (\text{هر کدام از مرتبه تکرار یک})$$

از طرفی می‌دانیم تعداد رئوس برابر با n، تعداد یال‌ها برابر با $\frac{n(n-۱)}{۲}$ و اندازه‌ی متوسط برابر با $\frac{۲m}{n} = \frac{n(n-۱)}{n} = n-۱$ است.

بنابراین انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف K_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} LE_D(K_n) &= \Big|n-(n-۱)\Big|(n-۲) + \left|\frac{(n-۱)+\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲} - (n-۱)\right| \\ &+ \left|\frac{(n-۱)-\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲} - (n-۱)\right| = (n-۲) \\ &+ \left|\frac{-n+۱+\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}\right| + \left|\frac{-n+۱-\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}\right| \\ &= (n-۲) + \sqrt{n^۲-۲n+۵}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۲.۳. برای $n \geq ۲$ انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف شبه تاج S_n° برابر است با

$$LE_D(S_n^{\circ}) = (۲n-۴) + \sqrt{n^۲-۲n+۵} + \sqrt{n^۲+۲n-۳}.$$

برهان. گراف شبه تاج را با مجموعه رئوس $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ در نظر بگیرید. اگر مجموعه احاطه‌گری مینیمم برابر با $D = \{u_1, v_1\}$ درنظر بگیریم آنگاه ماتریس $A_D(S_n^0)$ به این‌صورت به‌دست می‌آید:

$$A_D(S_n^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

همچنین می‌دانیم ماتریس قطری از درجه رئوس گراف برابر با ماتریس زیر است:

$$D(S_n^0) = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریس $L_D(S_n^0)$ به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L_D(S_n^0) = D(S_n^0) - A_D(S_n^0)$$

$$= \begin{pmatrix} n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

پس معادله مشخصه برابرست با

$$[\mu-n]^{n-۲}[\mu-n+۲]^{n-۲}[\mu^۲-(n-۱)\mu-۱][\mu^۲-(۳n-۵)\mu+(۲n^۲-۸n+۷)]=۰$$

با حل کردن معادله مشخصه فوق، ریشه‌های معادله مشخصه که مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف S_n° هستند همراه با مرتبه تکرار به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

(هر کدام از مرتبه تکرار $n-۲$) $\quad \mu=n\,,\mu=n-۲$

(هر کدام از مرتبه تکرار یک) $\quad \mu=\dfrac{(۳n-۵)\pm\sqrt{n^۲+۲n-۳}}{۲}\,,\mu=\dfrac{(n-۱)\pm\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}$

از طرفی تعداد رئوس برابر با $۲n$ و تعداد یال‌ها برابر با $n(n-۱)$ است پس درجه‌ی متوسط برابرست با $\frac{۲n(n-۱)}{۲n}=n-۱$.

بنابراین انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}LE_{D'}(S_n^\circ)=&\Big|n-(n-۱)\Big|(n-۲)+\Big|(n-۲)-(n-۱)\Big|(n-۲)\\&+\Big|\frac{n-۱+\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}-(n-۱)\Big|\\&+\Big|\frac{n-۱-\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}-(n-۱)\Big|\\&+\Big|\frac{۳n-۵+\sqrt{n^۲+۲n-۳}}{۲}-(n-۱)\Big|\\&+\Big|\frac{۳n-۵-\sqrt{n^۲+۲n-۳}}{۲}-(n-۱)\Big|\\=&(n-۲)+(n-۲)+\Big|\frac{-n+۱-\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}\Big|\\&+\Big|\frac{-n+۱+\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲}\Big|\\&+\Big|\frac{-۳n+۵-\sqrt{n^۲+۲n-۳}}{۲}\Big|\\&+\Big|\frac{-۳n+۵+\sqrt{n^۲+۲n-۳}}{۲}\Big|\\=&(۲n-۴)+\sqrt{n^۲+۲n-۳}+\sqrt{n^۲-۲n+۵}.\end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۲.۳. انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف n ـ بخشی کامل $K_{n,۲}$ برابرست با:

$$(۲n-۳)+\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}.$$

برهان. گراف n ـ بخشی کامل $K_{n,۲}$ با مجموعه رئوس $V=\bigcup_{i=۱}^{n-۱}\{u_i,v_i\}$ در نظر بگیرید. اگر مجموعه احاطه‌گری مینیمم برابر با $D=\{u_۱,v_۱\}$ باشد، می‌توان ماتریس $A(K_{n,۲})$ را به شکل زیر

تشکیل داد:

$$A(K_{n,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2n,2n}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$D(K_{n,2}) = \begin{pmatrix} 2(n-1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(n-1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2(n-1) \end{pmatrix}_{2n,2n}$$

لذا ماتریس $L_D(K_{n,2})$ به‌صورت زیر است:

$$L_D(K_{n,2}) = D(K_{n,2}) - A(K_{n,2})$$

$$= \begin{pmatrix} 2n-3 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2n-3 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2n-2 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2n-2 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 2n-2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 2n-2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 2n-2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 2n-2 \end{pmatrix}_{2n,2n}$$

پس معادله‌ی مشخصه ماتریس $L_D(K_{n,2})$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\mu - 2n + 3)(\mu - 2n + 2)^{n-1}(\mu - 2n)^{n-2}(\mu^2 - (2n-1)\mu - 2) = 0$$

با حل معادله مشخصه ماتریس $L_D(K_{n,2})$، ریشه‌های معادله مشخصه که مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی هستند همراه با مرتبه تکرار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu = ۲n - ۳ \qquad \text{(از مرتبه تکرار یک)}$$

$$\mu = ۲n - ۲ \qquad \text{(از مرتبه تکرار } n-۱ \text{)}$$

$$\mu = ۲n \qquad \text{(از مرتبه تکرار } n-۲ \text{)}$$

$$\mu = \frac{(۲n-۱) \pm \sqrt{۴n^۲ - ۴n + ۷}}{۲} \qquad \text{(هر کدام از مرتبه تکرار یک)}$$

از طرفی با توجه به اینکه تعداد رئوس برابر $۲n$، تعداد یال‌ها برابر با $۲n(n-۱)$ پس اندازه‌ی متوسط برابر با $۲(n-۱) = \frac{۴n(n-۱)}{۲n} = \frac{۲m}{n}$ است. لذا انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی $LE_D(K_{n,۲})$ به‌صورت محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
LE_D(K_{n,۲}) =& \Big|(۲n-۳)-(۲n-۲)\Big| + \Big|(۲n-۲)-(۲n-۲)\Big|(n-۱) \\
&+ \Big|۲n-(۲n-۲)\Big|(n-۲) \\
&+ \Big|\frac{۲n-۱+\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}}{۲} - (۲n-۲)\Big| \\
&+ \Big|\frac{۲n-۱-\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}}{۲} - (۲n-۲)\Big| \\
&= ۲n-۳+\Big|\frac{-۲n+۳+\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}}{۲}\Big| \\
&+ \Big|\frac{-۲n+۳-\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}}{۲}\Big| \\
=&(۲n-۳)+\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}.
\end{aligned}$$

□

۳.۳ خواص مقادیر ویژه ماتریس احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف

در این بخش برخی خواص مقادیر ویژه ماتریس احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف را بیان می‌کنیم به این منظور قضایای زیر را ارئه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۳. اگر D مجموعه احاطه‌گری مینیمم از گراف G و $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه از $L_D(G)$ باشد، آنگاه:

$$\textbf{(i).} \sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲|E| - |D|$$

$$\textbf{(ii).} \sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = ۲|E| + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i)^۲; \qquad c_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_i \in D \text{ باشد}, \\ ۰ & \text{اگر } v_i \notin D \text{ باشد}. \end{cases}$$

برهان. ۱. با توجه به اینکه ماتریس $L_D(G)$ به صورت $L_D(G) = D(G)-A_D(G)$ تعریف می‌شود، می‌توان نوشت:

$$tr(L_D(G) = tr(D(G) - A_D(G)) = tr(D(G)) - tr(A_D(G))$$

از طرفی می‌دانیم که $D(G)$ ماتریس قطری از درجه رئوس گراف است پس

$$tr(D(G)) = \sum_{i=۱}^{n} d_i$$

وهم‌چنین در $A_D(G)$ درایه های قطر اصلی تنها زمانی مخالف صفر است که $v_i \in D$ باشد بنابراین:

$$tr(L_D(G)) = \sum_{i=۱}^{n} d_i - |D|$$

از طرفی می‌دانیم که $\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲|E|$ لذا با جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$tr(L_D(G)) = ۲|E| - |D|$$

از طرف دیگر می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه‌ی $L_D(G)$ برابر با اثر $L_D(G)$ است پس نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲|E| - |D|.$$

۲. می‌دانیم که مجموع مربعات مقادیر ویژه $L_D(G)$ اثر $L_D(G)^۲$ است.

ابتدا ماتریس $L_D(G)^۲$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L_D(G)^۲ = \begin{pmatrix} l_{۱۱} & l_{۱۲} & \dots & l_{۱n} \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} & \dots & l_{۲n} \\ l_{۳۱} & l_{۳۲} & \dots & l_{۳n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n۱} & l_{n۲} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_{۱۱} & l_{۱۲} & \dots & l_{۱n} \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} & \dots & l_{۲n} \\ l_{۳۱} & l_{۳۲} & \dots & l_{۳n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n۱} & l_{n۲} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum l_{۱j}l_{j۱} & \sum l_{۱j}l_{j۲} & \dots & \sum l_{۱j}l_{jn} \\ \sum l_{۲j}l_{j۱} & \sum l_{۲j}l_{j۲} & \dots & \sum l_{۲j}l_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum l_{nj}l_{j۱} & \sum l_{nj}l_{j۲} & \dots & \sum l_{nj}l_{jn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

سپس اثر ماتریس $L_D(G)^۲$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد، با توجه به اینکه مجموع مربعات مقادیر ویژه برابر با اثر $L_D(G)^۲$ است پس می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} l_{ij}^d l_{ji}^d$$

از طرفی می‌دانیم که $A_D(G)$ ماتریس متقارن است و $D(G)$ ماتریس قطری است. پس $L_D(G)$ نیز متقارن خواهد بود لذا $l_{ij} = l_{ji}$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}^d l_{ji}^d = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (l_{ij}^d)^2$$

با باز کردن جملات داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 =& (l_{11}l_{11} + l_{12}l_{21} + \cdots + l_{1n}l_{n1}) + (l_{21}l_{12} + l_{22}l_{22} + \cdots + l_{2n}l_{n2}) \\ &+ \cdots + (l_{n1}l_{1n} + l_{n2}l_{2n} + \cdots + l_{nn}l_{nn}) = \sum_{i\neq j}(l_{ij}^d)^2 + \sum_{i=1}^{n}(l_{ii}^d)^2\end{aligned}$$

از طرفی در ماتریس $L_D(G)$ می‌دانیم که درایه‌های روی قطر اصلی برابر با d_i است غیر از iهایی که $v_i \in D$، در این حالت درایه‌ی قطر اصلی به‌صورت $d_i - 1$ است. لذا می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n}(l_{ij}^d)^2 = \sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2; \qquad c_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \in D \text{ باشد}, \\ 0 & \text{اگر } v_i \notin D \text{ باشد}. \end{cases}$$

از طرفی $l_{ij} = l_{ji}$ و $(l_{ij})^2 = l_{ij}l_{ji}$ مثل این است که تنها درایه‌های بالای قطر اصلی را در نظر گرفته باشیم و چون ماتریس نیز متقارن است پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 2\sum_{i<j}(l_{ij}^d)^2 + \sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2; \qquad c_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \in D \text{ باشد}, \\ 0 & \text{اگر } v_i \notin D \text{ باشد}. \end{cases}$$

که طبق تعریف $L_D(G)$ می‌توان گفت برای $i < j$، l_{ij} همان درجه‌ی رأس است. چون در این ماتریس زمانی $l_{ij} = 1$ که v_i و v_j مجاور باشند

$$\sum_{i=1}^{n}(l_{ij}^d)^2 = \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) = 2E$$

پس

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 2|E| + \sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2; \qquad c_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \in D \text{ باشد}, \\ 0 & \text{اگر } v_i \notin D \text{ باشد}. \end{cases}$$

حال اگر $\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|^2 = 2M$ قرار دهید خواهیم داشت:

$$M = |E| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)^2; \qquad c_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \in D \text{ باشد}, \\ 0 & \text{اگر } v_i \notin D \text{ باشد}. \end{cases}$$

□

باپات و پاتی [۵] نشان داده‌اند که اگر انرژی گراف گویا باشد، آنگاه باید عدد صحیح باشد. با نتایج مشابه برای مقادیر ویژه احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی قضیه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید G گرافی با مجموعه احاطه‌گری مینیمم D باشد. اگر مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی عددی گویا باشد، آنگاه عددی صحیح است که در رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| \equiv |D|$ (به پیمانه ۲) صدق می‌کند.

برهان. فرض کنید $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه‌ی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی از گراف G باشد، که $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ مثبت‌اند و بقیه‌ی آنها نامثبت‌اند پس:

$$\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| =(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-(\mu_{r+1}+\mu_{r+2}+\cdots+\mu_n)$$

اگر طرف راست تساوی را با $\pm(\mu_1+\cdots+\mu_n)$ جمع کنیم داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| =&(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-(\mu_{r+1}+\mu_{r+2}+\cdots+\mu_n)+(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\\ &-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-(\mu_{r+1}+\mu_{r+2}+\cdots+\mu_n)\\ &+(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-(\mu_{r+1}+\mu_{r+2}+\cdots+\mu_n)-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)\\ &+(\mu_{r+1}+\mu_{r+2}+\cdots+\mu_n)=2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\\ =&2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\end{aligned}$$

از طرفی بنابر قضیه داریم $\sum_{i=1}^{n}\mu_i = 2|E|-|D|$ پس با جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| =&2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r)-(2|E|-|D|)\\ =&2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r-|E|)+|D|\end{aligned}$$

با توجه به نتیجه از ترکیب جمع‌پذیر فیدلر [۱۰]، مجموع جزئی $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریسی است که چندجمله‌ی مشخصه‌ی آن ضرایب صحیح دارد. اگر $\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|$ عدد گویا باشد، آنگاه $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r$ عدد گویا هستند و بنابراین باید عددصحیح باشد لذا نتیجه می‌شود که:

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}|\mu_i| \equiv |D| \text{ (به پیمانه ۲)}.$$

□

۴.۳ کران‌هایی از انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف

دربخش پایانی این فصل کران‌هایی برای انرژی احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف به‌دست می‌آوریم برای این منظور قضایای زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید G یک گراف با n رأس، m یال و D مجموعه احاطه‌گری مینیمم از G باشد. آنگاه

$$LE_D(G) \leq \sqrt{۲Mn} + ۲m.$$

برهان. با توجه به نامساوی کشی‌ـ‌شوارتز داریم:

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\Big)^۲ \leq \Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲\Big)$$

اگر قرار دهیم $a_i = ۱$ و $b_i = |\mu_i|$ با جایگذاری می‌توان نوشت:

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i\Big)^۲ \leq \Big(\sum_{i=۱}^{n} ۱\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|^۲\Big)$$

با توجه به قضیه ۱.۴.۳ می‌دانیم که $\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|^۲ = ۲M$ هم‌چنین باتوجه به نامساوی مذکور و صورت قضیه داریم:

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i\Big)^۲ \leq n۲M$$

لذا با جذرگیری از طرفین نامساوی فوق داریم:

$$\therefore \quad \Big(\sum_{i=۱}^{n} \mu_i\Big) \leq \sqrt{۲Mn}.$$

از طرف دیگر با توجه به نامساوی مثلثی می‌توان نوشت:

$$\Big|\mu_i\Big| - \Big|\frac{۲m}{n}\Big| \leq \Big|\mu_i - \frac{۲m}{n}\Big| \leq \Big|\mu_i + \frac{۲m}{n}\Big| \leq \Big|\mu_i\Big| + \Big|\frac{۲m}{n}\Big|$$
$$\forall i = ۱, ۲, \ldots, n$$

$$\Big|\mu_i - \frac{۲m}{n}\Big| \leq \Big|\mu_i\Big| + \Big|\frac{۲m}{n}\Big| \qquad \forall i = ۱, ۲, \ldots, n$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n} \Big|\mu_i - \frac{۲m}{n}\Big| &\leq \sum_{i=۱}^{n} \Big|\mu_i\Big| + \sum_{i=۱}^{n} \frac{۲m}{n} \\ &\leq \sqrt{۲Mn} + ۲m \\ \Longrightarrow LE_D(G) &\leq \sqrt{۲Mn} + ۲m.\end{aligned}$$

□

کران بالای به‌دست آمده در قضیه فوق مشابه کران به‌دست آمده برای انرژی معمولی گراف در مرجع [۲۸] می‌باشد.

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال باشد و D مجموعه احاطه‌گری مینیمم از گراف G باشد آنگاه:

$$LE_D(G) \leq \sqrt{۲Mn + ۴m(|D| - m)}.$$

برهان. با توجه به نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\Big)^{۲} \leq \Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i^{۲}\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n} b_i^{۲}\Big)$$

اگر قرار دهیم $a_i = ۱$ و $b_i = \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|\Big)^{۲} \leq \Big(\sum_{i=۱}^{n} ۱\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|^{۲}\Big)$$

با توجه به قضایای قبل داریم $\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲|E| - |D|$ و $\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^{۲} = ۲M$ لذا با جایگذاری می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Big(LE_D(G)\Big)^{۲} =& n\Big(۲M + \frac{۴m^{۲}}{n^{۲}}n - \frac{۴m}{n}(۲m - |D|)\Big)\\ \leq& n\Big(۲M + \frac{۴m^{۲}}{n} - \frac{۸m^{۲}}{n} + \frac{۴m|D|}{n}\Big)\\ =& ۲Mn + ۴m\big(|D| - m\big)\end{aligned}$$

با جذر گیری از طرفین حکم به‌صورت زیر به‌دست می آید:

$$LE_D(G) \leq \sqrt{۲Mn + ۴m(|D| - m)}.$$

□

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال و مجموعه احاطه‌گری مینیمم D باشد اگر $D = |\det L_D(G)|$ آنگاه:

$$LE_D(G) \geq \sqrt{۲M + n(n-۱)D^{\frac{۲}{n}}} - ۲m.$$

برهان. می‌دانیم که:

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|\Big)^{۲} = \Big(\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|\Big)\Big(\sum_{j=۱}^{n} |\mu_j|\Big) = \sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|^{۲} + \sum_{i \neq j} |\mu_i||\mu_j|$$

از طرفی داریم:

$$\therefore \quad \sum_{i \neq j}^{n} |\mu_i||\mu_j| = \Big(\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|\Big)^{۲} - \sum_{i=۱}^{n} |\mu_i|^{۲} \qquad (۱.۳)$$

با استفاده از نامساوی میانگین حسابی_هندسی برای $n(n-۱)$ جمله داریم:

$$\frac{\sum_{i\neq j}|\mu_i||\mu_j|}{n(n-۱)} \geq \left(\prod_{i\neq j}|\mu_i||\mu_j|\right)^{\frac{۱}{n(n-۱)}}$$

$$\sum_{i\neq j}|\mu_i||\mu_j| \geq n(n-۱)\left(\prod_{i\neq j}|\mu_i||\mu_j|\right)^{\frac{۱}{n(n-۱)}}$$

بنابر رابطه ۱.۳ می‌دانیم:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|\right)^{۲} - \sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|^{۲} \geq n(n-۱)\left(\prod_{i=۱}^{n}|\mu_i|^{۲(n-۱)}\right)^{\frac{۱}{n(n-۱)}}$$

با توجه به اینکه $\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|^{۲} = ۲M$ می‌توان نوشت:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|\right)^{۲} - ۲M \geq n(n-۱)\left(\prod_{i=۱}^{n}|\mu_i|\right)^{\frac{۲}{n}}$$

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|\right)^{۲} \geq ۲M + n(n-۱)\left(\prod_{i=۱}^{n}|\mu_i|\right)^{\frac{۲}{n}}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=۱}^{n}|\mu_i| \geq \sqrt{۲M + n(n-۱)D^{\frac{۲}{n}}} \tag{۲.۳}$$

از طرفی از نامساوی مثلثی می‌دانیم که:

$$\left|\mu_i\right| - \left|\frac{۲m}{n}\right| \leq \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|, \qquad \forall i$$

$$\left|\mu_i\right| - \frac{۲m}{n} \leq \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|, \qquad \forall i$$

$$\sum_{i=۱}^{n}\left|\mu_i\right| - \sum_{i=۱}^{n}\frac{۲m}{n} \leq \sum_{i=۱}^{n}\left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right|$$

$$\sum_{i=۱}^{n}\left|\mu_i\right| - ۲m \leq LE_D(G)$$

و بنابر ۲.۳ می‌توان نوشت:

$$LE_D(G) \geq \sum_{i=۱}^{n}\left|\mu_i\right| - ۲m \geq \sqrt{۲M + n(n-۱)D^{\frac{۲}{n}}} - ۲m$$

لذا داریم:

$$LE_D(G) \geq \sqrt{۲M + n(n-۱)D^{\frac{۲}{n}}} - ۲m.$$

□

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال و مجموعه احاطه‌گری مینیمم D باشد اگر مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه احاطه‌گری مینیمم لاپلاسینی گراف عددی گویا باشد، آنگاه داریم:

$$LE_D(G) \in \big(|D| + ۲t - ۲m, |D| + ۲t + ۲m\big)$$

به‌طوری‌که t هر عدد صحیح است که (پیمانه ۲) $\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i| \equiv |D|$.

برهان. از نامساوی مثلثی می‌دانیم که

$$\sum_{i=۱}^{n} \Big|\mu_i - \frac{۲m}{n}\Big| \leq \sum_{i=۱}^{n} \Big|\mu_i\Big| + ۲m$$

از طرفی بنابر قضیه ۲.۵.۳ داریم:

$$LE_D(G) \leq \sum_{i=۱}^{n} \Big|\mu_i\Big| + ۲m = |D| + ۲t + ۲m$$

هم‌چنین با به‌کارگیری مجدد نامساوی مثلثی می‌توان نوشت:

$$LE_D(G) \geq \sum_{i=۱}^{n} \Big|\mu_i\Big| - ۲m = |D| + ۲t - ۲m$$

چون از دو رابطه به‌دست آمده اخیر داریم:

$$|D| + ۲t - ۲m \leq LE_D(G) \leq |D| + ۲t + ۲m$$

بنابراین می‌توان گفت که $LE_D(G)$ در بازه‌ی $\Big(|D| + ۲t - ۲m, |D| + ۲t + ۲m\Big)$ است به‌عبارتی‌دیگر می‌توان نوشت:

$$\therefore \quad LE_D(G) \in (|D| + ۲t - ۲m, |D| + ۲t + ۲m).$$

□

فصل ۴

انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف

۱.۴ مقدمه

در این فصل انرژی لاپلاسینی احاطه‌گرری دوگانه گراف را معرفی می‌کنیم به این منظور ابتدا تعاریف زیر را ارئه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنید G یک گراف ساده با n راس و m یال و $A_{D'}(G)$ ماتریس احاطه‌گری دوگانه مینیمم از گراف G باشد و فرض کنید $D(G)$ ماتریس قطری از درجه راس گراف G باشد، آنگاه ماتریس $L_{D'}(G)$ را به صورت $L_{D'}(G) = D(G) - A_{D'}(G)$ تشکیل می‌دهیم و ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه از گراف G می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۴. فرض کنید $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه از ماتریس $L_{D'}(G)$ باشد که در مرتبه‌ای غیر صعودی به صورت $\mu_۱ \geq \mu_۲ \geq \ldots \geq \mu_n$ مرتب شده‌اند به μ_iها مقادیر ویژه لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه از گراف G گفته می‌شود.

انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LE_{D'}(G) = \sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_i - ۲\frac{m}{n}\right|.$$

که m اندازه یال، n اندازه راس و $\frac{۲m}{n}$ درجه متوسط گراف می‌باشد.

۲.۴ انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه تعدادی از گراف‌های متداول

در این بخش قصد داریم انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه را برای رده‌هایی از گراف‌ها محاسبه نماییم، ازجمله برای گراف‌های K_n، S_n° و $K_{n,۲}$ انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. اگر K_n گراف کامل از مرتبه n باشد که $n \geq ۳$، آنگاه انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه آن به صورت زیر است:

$$LE_{D'}(K_n) = (n-۳) + \sqrt{n^۲ - ۲n + ۹}.$$

برهان. فرض کنید K_n گراف کامل با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ باشد. اگر مینیمم مجموعه احاطه‌گری K_n را برابر با $D' = \{v_۱, v_۲\}$ در نظر بگیریم، دراین‌صورت بنابر تعریف ۱.۱.۲ ماتریس احاطه‌گری دوگانه مینیمم گراف K_n به صورت زیر می‌باشد:

$$A_{D'}(K_n) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & \circ & \ldots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & \circ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & \circ \end{bmatrix}_{n,n}$$

و هم‌چنین می‌دانیم ماتریس قطری از درجه رئوس گراف به‌صورت زیر است:

$$D(K_n) = \begin{bmatrix} n-۱ & \circ & \circ & \ldots & \circ \\ \circ & n-۱ & \circ & \ldots & \circ \\ \circ & \circ & n-۱ & \ldots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \ldots & n-۱ \end{bmatrix}_{n,n}$$

پس با توجه به تعریف ۱.۱.۴ ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه K_n برابرست با:

$$L_{D'}(K_n) = D(K_n) - A_{D'}(K_n) = \begin{bmatrix} n-۲ & -۱ & -۱ & \ldots & -۱ \\ -۱ & n-۲ & -۱ & \ldots & -۱ \\ -۱ & -۱ & n-۱ & \ldots & -۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -۱ & -۱ & -۱ & \ldots & -۱ \end{bmatrix}_{n,n}$$

در نتیجه معادله مشخصه به صورت $[\mu - n]^{n-۳}[\mu - (n-۱)][\mu^۲ - (n-۱)\mu - ۲] = \circ$ به‌دست می‌آید. بنابراین با حل معادله مشخصه فوق ریشه‌های آن که مقادیر ویژه لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه است، به‌صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$\mu = n$ (مرتبه تکرار $n-۱$)

$$\mu = \frac{n-1 \pm \sqrt{n^2-2n+9}}{2} \qquad \text{(مرتبه تکرار یک)}$$

$$\mu = n-1 \qquad \text{(از مرتبه تکرار یک)}$$

پس داریم:

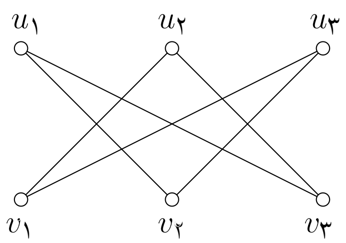
$$L_{specD'}(K_n) = \begin{bmatrix} n & n-1 & \frac{n-1+\sqrt{n^2-2n+9}}{2} & \frac{n-1-\sqrt{n^2-2n+9}}{2} \\ n-3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

از طرفی دیگر می‌دانیم که اندازه رئوس برابر با n، اندازه یال‌ها برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ و اندازه متوسطه برابر با $\frac{2\frac{n(n-1)}{2}}{n} = n-1$ است. بنابراین می‌توان انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه K_n، به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} LE_{D'}(K_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right| = \left|n-(n-1)\right|(n-3) + \left|(n-1)-(n-1)\right| \\ &+ \left|\frac{n-1+\sqrt{n^2-2n+9}}{2} - (n-1)\right| \\ &+ \left|\frac{n-1-\sqrt{n^2-2n+9}}{2} - (n-1)\right| \\ &= (n-3) + \left|\frac{n-1+\sqrt{n^2-2n+9}}{2}\right| \\ &+ \left|\frac{n-1+\sqrt{n^2-2n+9}}{2}\right| \\ &= (n-3) + \sqrt{n^2-2n+9}. \end{aligned}$$

□

مثال ۲.۲.۴. فرض کنید گراف S_3^0 به‌صورت شکل ۱.۴ باشد، که دارای رئوس $\{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$ و یال‌های $E = \{u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_3, u_3, v_1, u_3v_2\}$ است.



شکل ۱.۴: گراف S_3^0

اگر مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم را به‌صورت $D' = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ در نظر بگیریم،

آنگاه با توجه به تعریف ۱.۱.۲، $A_{D'}(S_3^{\circ})$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$A_{D'}(S_3^{\circ}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هم‌چنین $D(S_3^{\circ})$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$D(S_3^{\circ}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_{D'}(S_3^{\circ}) = D(S_3^{\circ}) - A_{D'}(S_3^{\circ}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

سپس معادله مشخصه $\mu.[\mu^2 - 2\mu - 2][\mu^2 - 4\mu + 2] = 0$ به‌دست می‌آید. با حل کردن معادله مشخصه‌ی ماتریس $L_{D'}(S_3^{\circ})$، ریشه‌های آن که مقادیر ویژه ماتریس مذکور هستند به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}, \mu = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}, \mu = 0\ , \mu = 2 \qquad \text{(هر کدام از مرتبه یک)}$$

ازطرفی می‌دانیم که اندازه رئوس برابر با ۹ اندازه یال ۳۰ است، پس اندازه متوسط برابر با $10 = \frac{60}{6}$ به‌دست می‌آید. لذا بنابر تعریف ۲.۱.۴، محاسبه انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه (S_3°) به‌سادگی به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} LE_{D'}(S_3^{\circ}) &= \sum_{n=1}^{3} \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right| \\ &= 10 + \left|2 + 10\right| + \left|\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 10\right| + \left|\frac{2-\sqrt{2}}{2} - 10\right| \\ &+ \left|\frac{4+\sqrt{8}}{2} - 10\right| + \left|\frac{4+\sqrt{8}}{2} - 10\right| \\ &= 18 + \sqrt{12} + \sqrt{8}. \end{aligned}$$

گراف فوق مثالی برای گراف شبه تاج از مرتبه ۶ می‌باشد، حال به محاسبه انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه برای گراف شبه تاج از مرتبه $2n$ یا S_n° می‌پردازیم.

قضیه ۳.۲.۴. اگر S_n° گراف شبه تاج از مرتبه $2n$ باشد، آنگاه:

$$LE_{D'}(S_n^\circ) = (2n-4) + \sqrt{n^2-2n+9} + \sqrt{n^2+2n-7}.$$

برهان. فرض کنید S_n° گراف شبه تاج از مرتبه $2n$ با مجموعه رئوس $V=\{u_1,u_2,\ldots,u_n,v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ باشد. اگر مجموعه احاطه‌گری مینیمم D'به صورت فرضی $D'=\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان $A_{D'}(S_n^\circ)$ را با توجه به تعریف ۱.۱.۲ به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$A_{D'}(S_n^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{2n,2n}$$

از طرفی می‌دانیم که ماتریس قطری از مرتبه $n-1$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D(S_n^\circ) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 \end{bmatrix}_{2n,2n}$$

پس ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف S_n° را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L_{D'}(S_n^\circ) = D(S_n^\circ) - AD(S_n^\circ)$$

$$L_{D'}(S_n^\circ)=\begin{bmatrix} n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & n-2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots & -1\\ 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0\\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & n-2 & 0 & \dots & 0\\ -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله مشخصه ماتریس مذکور برابر با:

$$\begin{aligned}&[\mu-(n-3)][\mu-(n-2)]^{n-3}[\mu-(n-1)][\mu-n]^{n-3}[\mu^2-(n-1)\mu-2]\\&[\mu^2-(3n-5)\mu+2(n^2-4n+4)]=0\end{aligned}$$

است. با حل معادله مشخصه ماتریس $L_{D'}(S_n^\circ)$ ریشه‌های معادله مشخصه که همان مقادیر ویژه لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه هستند، بامرتبه تکرار به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$L_{specD'}(S_n^\circ)=\begin{bmatrix} n-3 & n-2 & n-1 & n & \frac{n-1+\sqrt{n^2-2n+9}}{2} & \frac{n-1-\sqrt{n^2-2n+9}}{2} & \frac{3n-5+\sqrt{n^2+2n-7}}{2} & \frac{3n-5-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}\\ 1 & n-3 & 1 & n-3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم که اندازه رئوس $2n$، اندازه یال‌ها $n(n-1)$ و اندازه متوسط $\frac{2n(n-1)}{2n}=(n-1)$ است. با توجه به فرمول، انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف S_n° را به‌صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}LE_{D'}(S_n^\circ)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i-\frac{2m}{n}\right|&=\Big|(n-3)-(n-1)\Big|+(n-3)\Big|(n-2)-(n-1)\Big|\\&+\Big|(n-1)-(n-1)\Big|+(n-3)\Big|n-(n-1)\Big|\\&+\left|\frac{n-1+\sqrt{n^2-2n+9}}{2}-(n-1)\right|+\left|\frac{n-1-\sqrt{n^2-2n+9}}{2}-(n-1)\right|\\&+\left|\frac{3n-5+\sqrt{n^2+2n-7}}{2}-(n-1)\right|+\left|\frac{3n-5-\sqrt{n^2+2n-7}}{2}-(n-1)\right|\\&=(2n-4)+\sqrt{n^2+2n+9}+\sqrt{n^2+2n-7}.\end{aligned}$$

□

مثال ۴.۲.۴. فرض کنید گراف G گراف n ـ بخشی به شکل ۲.۲، با رئوس $V=\{u_1,u_2,u_3,v,v_2,v_3\}$ و یال‌های $E=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1u_3,v_1u_2v_2v_3,v_2u_3,v_2u_1,v_3u_1v_3u_2,u_1u_2,u_2,u_3u_1u_3\}$ باشد. اگر مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم را به‌صورت $\{u_1,v_1\}$ در نظر بگیریم، آنگاه انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه $K_{3,2}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

می‌دانیم ماتریس $A_{D'}(K_{3,2})$ به‌صورت زیر است:

$$A_{D'}(K_{3,2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از طرفی ماتریس قطری از مرتبه ۴ به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$D(K_{3,2}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

پس:

$$L_{D'}(K_{3,2}) = D(K_{3,2}) - A_{D'}(K_{3,2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

لذا معادله مشخصه برابر با $[\mu-3][\mu-4]^2[\mu-6][\mu^2-5\mu-2]=0$ است. با حل معادله مشخصه ماتریس $L_{D'}(K_{3,2})$، ریشه‌های آن که مقادیر ویژه $L_{D'}(K_{3,2})$ هستند همراه با مرتبه تکرار به‌صورت خواهند بود:

$$\mu = 5-\sqrt{17}\,, \mu = 5+\sqrt{17}\,, \mu = 3\,, \mu = 6 \qquad \text{(مرتبه تکرار یک)}$$

$$\mu = 4 \qquad \text{(مرتبه تکرار دو)}$$

از طرفی چون اندازه رئوس برابر با ۶ و اندازه یال‌ها برابر با ۱۲ است پس اندازه متوسط برابر با $4 = \frac{2.12}{6} = \frac{2m}{n}$ است.

بنابراین انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه $(K_{3,2})$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$LE_{D'}(K_{3,2}) = |3-4|+|4-4|(2)+|6-4|+\left|\frac{5+\sqrt{17}}{2}-4\right|+\left|\frac{5-\sqrt{17}}{2}-4\right| = 3+\sqrt{17}.$$

در مثال فوق انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه را برای گراف بخشی $(K_{3,2})$ از مرتبه ۶ محاسبه کردیم، حال به محاسبه‌ی انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه برای گراف بخشی $K_{n,2}$ از مرتبه $2n$ می‌پردازیم.

قضیه ۵.۲.۴. اگر $K_{n,2}$ گراف n ـ بخشی کامل از مرتبه $2n$ باشد آنگاه:

$$LE_{D'}(K_{n,2}) = (2n-3) + \sqrt{4n^2 - 4n + 9}.$$

برهان. فرض کنید $K_{n,2}$ گراف بخشی از مرتبه $2n$ و مجموعه رئوس $V(K_{n,2}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ باشد. اگر مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم به صورت $D' = \{u_1, v_1\}$ در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان با توجه به تعریف ۱.۱.۲، $A_{D'}(K_{n,2})$را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$A_{D'}(K_{n,2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n,2n}$$

از طرفی می‌دانیم ماتریس قطری از مرتبه $2n-2$ به‌صورت زیر است:

$$D(K_{n,2}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2n-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2n-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-2 \end{bmatrix}_{2n,2n}$$

بنابراین با توجه به تعریف ۱.۱.۴، می‌توان ماتریس $L_{D'}(K_{n,2})$ را به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$L_{D'}(K_{n,2}) = D(K_{n,2}) - A_{D'}(K_{n,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 2n-3 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2n-3 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2n-2 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2n-2 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 2n-2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 2n-2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 2n-2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 2n-2 \end{bmatrix}_{2n,2n}$$

با محاسبه دترمینان ماتریس فوق، معادله مشخصه برابرست با

$$[\mu-2n+3][\mu-2n+2]^{(n-1)}[\mu-2n]^{(n-2)}[\mu^2-(2n-1)\mu-2]$$

بعداز حل معادله مشخصه ماتریس $K_{n,2}$، ریشه‌های آن که مقادیر ویژه لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه $K_{n,2}$ هستند همراه با مرتبه تکرار آن را به‌صورت $L_{specD'}(K_{n,2})$ می‌نویسیم:

$$L_{specD'}(K_{n,2}) = \begin{bmatrix} 2n-3 & 2n-2 & 2n & \frac{2n-1+\sqrt{4n^2-4n+7}}{2} & \frac{2n-1-\sqrt{4n^2-4n+7}}{2} \\ 1 & n-1 & n-2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

به عبارتی

از مرتبه تکرار یک	$\mu = 2n-3$
از مرتبه تکرار n-۱	$\mu = 2n-2$
از مرتبه تکرار n-۲	$\mu = 2n$
هرکدام از مرتبه تکرار یک	$\mu = \dfrac{2n-1\pm\sqrt{4n^2-4n+7}}{2}$

از طرفی می‌دانیم که اندازه رئوس برابر با $2n$، اندازه یال‌ها $2n(n-1)$ و اندازه متوسط برابر با $\frac{2m}{n} = \frac{4n(n-1)}{2n} = 2(n-1)$ است. بنابراین انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف $K_{n,2}$ به‌صورت زیر

محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
LE_{D'}(K_{n,۲}) &= \Big|(۲n-۳)-۲(n-۱)\Big| + \Big|(۲n-۲)-(۲(n-۱))\Big|(n-۱)\\
&+ \Big|۲n-۲(n-۱)\Big|(n-۲)\\
&+ \Big|\frac{۲n-۱+\sqrt{۴n^۲-۴n+۷}}{۲}-۲(n-۱)\Big|\\
&+ \Big|\frac{۲n-۱-\sqrt{۴n^۲-۴n+۷}}{۲}-۲(n-۱)\Big|\\
&= \Big|۱\Big| + \Big|۲(n-۲)\Big| + \Big|\frac{۲n-۱+\sqrt{۴n^۲-۴n+۷}-۴(n-۱)}{۲}\Big|\\
&+ \Big|\frac{۲n-۱-\sqrt{۴n^۲-۴n+۷}-۴(n-۱)}{۲}\Big|\\
&= (۲n-۳)+\sqrt{۴n^۲-۴n+۹}.
\end{aligned}$$

□

۳.۴ خصوصیات مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف

بیان خواص و خصوصیات انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف‌ها اهمیت زیادی دارد. در این بخش ما به بیان برخی از این خواص می‌پردازیم و به این منظور قضایای زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید G گراف دلخواهی و D' مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم G باشد و $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر مشخصه ماتریس $LE_{D'}(G)$ باشند، آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$\textbf{(i).} \sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲|E| - |D'|$$

$$\textbf{(ii).} \sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = ۲|E| + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i)^۲ \qquad ; \qquad c_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_i \in D' \\ ۰ & \text{اگر } v_i \notin D' \end{cases}$$

برهان. (i): با توجه به تعریف ماتریس $L_{D'}(G)$، مجموع عناصر قطر اصلی این ماتریس، برابر با اثر ماتریس $L_{D'}(G)$ است. بنابر تعریف ۱.۱.۴، ماتریس لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه به صورت $L_{D'}(G) = D(G) - A_{D'}(G)$ نوشته می‌شود پس می‌توان گفت:

$$tr(L_{D'}(G)) = tr(D(G) - A_{D'}(G)) = tr(D(G)) - tr(A_{D'}(G))$$

از طرفی می‌دانیم که $D(G)$ ماتریس قطری است و عناصر روی قطر اصلی آن درجه رئوس گراف G است هم چنین $A_{D'}(G)$ روی قطر اصلی صفر است به‌غیر از i هایی که $i \in D'$ باشد بنابراین:

$$tr(L_{D'}(G)) = \sum_{i=۱}^{n} d_i - |D'|$$

به‌عبارتی دیگر به تعداد اعضای (D') روی قطراصلی $A_{D'}(G)$ ، درایه ۱ داریم.
از طرفی می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$ پس با جایگذاری در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 2|E| - |D'|.$$

□

برهان. **(ii)**: فرض کنید ماتریس $A_{D'}(G)$ به‌صورت زیر باشد:

$$A_{D'}(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

پس ماتریس $A_{D'}(G)^2$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \sum a_{1j}a_{j1} & \sum a_{1j}a_{j2} & \dots & \sum a_{1j}a_{jn} \\ \sum a_{2j}a_{j1} & \sum a_{2j}a_{j2} & \dots & \sum a_{2j}a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{nj}a_{j1} & \sum a_{nj}a_{j2} & \dots & \sum a_{nj}a_{jn} \end{bmatrix}$$

و ماتریس $L_{D'}(G)^2$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \sum l_{1j}l_{j1} & \sum l_{1j}l_{j2} & \dots & \sum l_{1j}l_{jn} \\ \sum l_{2j}l_{j1} & \sum l_{2j}l_{j2} & \dots & \sum l_{2j}l_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum l_{nj}l_{j1} & \sum l_{nj}l_{j2} & \dots & \sum l_{nj}l_{jn} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به اینکه مجموع مربعات مقادیر ویژه برابر با اثر $L_{D'}(G)^2$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^d L_{ji}^d$$

از طرفی می‌دانیم که $A_{D'}(G)$ ماتریس متقارن و $D(G)$ ماتریس قطری است .لذا $L_{D'}(G)$ نیز ماتریسی متقارن خواهد بود، پس درایه‌های L_{ij} با L_{ji} برابر است بنابراین داریم:

$$\sum \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 L_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{n} (L_{ij}^d)^2$$

با باز کردن جملات داریم:

$$= (L_{11}L_{11} + L_{12}L_{21} + L_{13}L_{31} + \dots + L_{1n}L_{n1}) + (L_{21}L_{12} + L_{22}L_{22} + \dots + L_{2n}L_{n2})$$
$$+ \dots + (L_{1i}L_{i1} + \dots + L_{ij}L_{ji} + \dots + L_{in}L_{ni}) + \dots + (L_{n1}L_{1n} + \dots + L_{nn}L_{nn})$$

و باتوجه به این‌که $L_{ij} = L_{ji}$ داریم:

$$\sum_{i \neq j} (L_{ij}^d)^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} (L_{ii}^d)^{۲} = ۲ \sum_{i<j} (L_{ij}^d)^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} (L_{ii}^d)^{۲}$$

از طرفی در ماتریس $L_{D'}(G)$ می‌دانیم که درایه‌های روی قطر اصلی برابر با d_i است، غیر از iهایی که $v_i \in D'$ است که در این حالت درایه قطر اصلی به صورت $d_i - ۱$ می‌شود لذا می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=۱}^{n} (L_{ii}^d)^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i)^{۲} \quad ; \quad c_i = \begin{cases} ۱ & v_i \in D' \text{ اگر} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

از طرفی چون $L_{ij} = L_{ji}$ پس $(L_{ij}^d)^{۲} = L_{ij} L_{ji}$ مثل این است که تنها درایه‌های بالای قطر اصلی را در نظر گرفته باشیم و دو برابر کنیم لذا داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} (\mu_i)^{۲} = ۲ \sum_{i=۱}^{n} (L_{ij}^d)^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i)^{۲} \quad ; \quad c_i = \begin{cases} ۱ & v_i \in D' \text{ اگر} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که طبق تعریف $L_{D'}(G)$، می‌توان گفت برای $i < j$، L_{ij} همان درجه رأس است چون در این ماتریس زمانی $L_{ij} = ۱$ است که $v_i v_j$ مجاور باشند پس

$$\sum_{i<j} (L_{ij})^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} \deg(v_i) = ۲E$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_i\right|^{۲} = ۲\left|E\right| + \sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i)^{۲} \quad ; \quad c_i = \begin{cases} ۱ & v_i \in D' \text{ اگر} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

حال اگر $\sum_{i=۱}^{n} \left|\mu_i\right|^{۲} = ۲M$ خواهیم داشت:

$$M = |E| + \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i)^{۲} \quad ; \quad c_i = \begin{cases} ۱ & v_i \in D' \text{ اگر}, \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}. \end{cases}$$

□

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید G گرافی با مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم D' باشد. اگر مینیمم انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه $LE_{D'}(G)$ عددی گویا باشد، آنگاه

$$LE_{D'}(G) \equiv |D'| \qquad (\text{به پیمانه } ۲).$$

برهان. فرض کنید $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ را که مقادیر ویژه لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه از گراف G باشد که $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ مثبت هستند و بقیه آن‌ها نامثبت است پس:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| = (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) - (\mu_{r+1} + \cdots + \mu_n)$$

اگر سمت راست رابطه را با $\pm(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$ جمع کنیم داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| &= (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) - (\mu_{r+1} + \mu_{r+2} + \cdots + \mu_n)\\ &- (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n) + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)\\ &= (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r)\\ &- (\mu_{r+1} + \cdots + \mu_n) + (\mu_{r+1} + \cdots + \mu_n)\\ &- (\mu_{r+1} + \cdots + \mu_n) - (\mu_1 + \cdots + \mu_r)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\end{aligned}$$

از طرفی بنابر قضیه ۱.۳.۴، می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| = 2|E| - |D'|$ پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| &= 2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) - (2|E| - |D'|)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r) - 2|E| + |D'|\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r - |E|) + |D'|.\end{aligned}$$

با توجه به نتیجه ترکیب جمع‌پذیر فیدلر[۱۰]، مجموع جزئی $(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$ مقادیر ویژه ماتریسی است که چند جمله‌ای مشخصه آن ضرایب صحیح دارد اگر $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$ عدد گویا باشد آن‌گاه $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r$ عدد گویا است و بنابراین باید صحیح باشد پس:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \equiv |D| \qquad \text{به پیمانه ۲}.$$

□

۴.۴ کران‌هایی برای انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف

در بخش پایانی این فصل کران‌هایی برای انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه گراف توسط قضیه‌های زیر ارئه می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال باشد و D' مجموعه احاطه‌گری مینیمم از گراف G آنگاه داریم
$$LE_{D'}(G) \leq \sqrt{۲Mn} + ۲m.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کشی_شوارتز به‌صورت
$$\Big[\sum_{i=۱}^{n}(a_i b_i)\Big]^۲ \leq \Big[\sum_{i=۱}^{n}(a_i)^۲\Big]\Big[\sum_{i=۱}^{n}(b_i)^۲\Big]$$
حال اگر قرار دهیم $a_i = ۱$ و $b_i = \mu_i$ پس با جایگذاری داریم:
$$\Big(\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|\Big)^۲ \leq \Big(\sum_{i=۱}^{n}۱\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|^۲\Big)$$
از طرفی چون
$$\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|^۲ \leq ۲M$$
پس
$$\Big(\sum_{i=۱}^{n}|\mu_i|\Big)^۲ \leq ۲Mn$$
$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{n}|\mu_i| \leq \sqrt{۲Mn}.$$
حال با توجه به نامساوی مثلثی به صورت $|a|-|b| \leq |a-b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$ داریم:
$$\Big|\mu_i - \frac{۲m}{n}\Big| \leq \Big|\mu_i\Big| + \Big|\frac{۲m}{n}\Big| \qquad \forall i = ۱, ۲, \ldots, n$$

$$\sum_{i=۱}^{n}\Big|\mu_i - \frac{۲m}{n}\Big| \leq \sum_{i=۱}^{n}\Big|\mu_i\Big| + \sum_{i=۱}^{n}\Big|\frac{۲m}{n}\Big| \qquad \forall i = ۱, ۲, \ldots, n$$
$$\leq \sqrt{۲Mn} + ۲m$$
$$\Rightarrow LE_{D'}(G) \leq \sqrt{۲Mn} + ۲m.$$

کران بالای به‌دست آمده در قضیه فوق مشابه کران به‌دست آمده برای انرژی معمولی گراف در مرجع [۲۸] می‌باشد. □

قضیه ۲.۴.۴. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال باشد و D' مجموعه احاطه‌گری دوگانه مینیمم از گراف G آنگاه
$$LE_{D'}(G) \leq \sqrt{۲Mn + ۴m\Big(|D'| - m\Big)}.$$

برهان. باتوجه به نامساوی کشی‌ـ‌شوارتز داریم:

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\Big]^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\Big)$$

اگر قرار دهیم $a_i = 1$ و $b_i = \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|$ پس می‌توان نوشت:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|\mu_i - \frac{2m}{n}|\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{n}1\Big)\Big[\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|\Big]^2$$

$$LE_{D'}^2(G) = n\Big[\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{4m^2}{n^2} - \frac{4m}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\Big]$$

می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| = 2m - |D'|$ و $\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|^2 \le 2M$ لذا با جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$LE_{D'}^2(G) \le n\Big[2M + \frac{4m^2}{n} - \frac{8m^2}{n} + \frac{4m}{n}|D'|\Big]$$

$$\le 2Mn + 4m(|D'| - m)$$

$$\Rightarrow LE_{D'}(G) \le \sqrt{2Mn + 4m(|D'| - m)}.$$

□

مراجع

[۱] بی‌آزار ج، (۱۳۸۸)، *درآمدی بر نظریه گراف* ، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه گیلان، ۲۱۸ صفحه.

[2] Adiga C., Bayad A., Gutman I. and Srinivas S. A. (2012), The minimum covering energy of a graph, *Kragujevac J. Sci.*, 34, 39-56.

[3] Adiga C. and Smitha M. (2009), On maximum degree energy of a graph, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4, No. 8, 385-396.

[4] Aleksic T. (2008), Upper bounds for Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 60, 435-439.

[5] Bapat R.B. and Pati S. (2004), Energy of a graph is never an odd integer, *Bulletin of Kerala Mathematics Association*, 1(2): 129-132.

[6] Bondy j. A. and Murty U.S.R (1976), *Graph theory with applications*. London: Macmillan.

[7] Consonni V. and Todeschini R. (2008), New spectral index for molecule description, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 60, 3-14.

[8] de Abreu N. N. M., Vinagre C. T. M., Bonifacio A. S. and Gutman I. (2008), The Laplacian energy of some Laplacian integral graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 60, 447-460.

[9] Fath-Tabar G. H., Ashrafi A. R. and Gutman I. (2008), Note on Laplacian energy of graphs, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts (Cl. Math. Natur.)*, 137, 1-10.

[10] Fiedler M. (1974), Additive compound matrices and an inequality for eigenvalues of symmetric stochastic matrices, *Czech. Math. J.*, 24(99), 392-402.

[11] Graovac A., Gutman I. and Trinajstic N. (1977), *Topological approach to the chemistry of conjugated molecules*, Springer-Verlag, Berlin.

[12] Gutman I. (1978), The energy of a graph, *Ber. Math-Satist. Sekt. Forschungsz. Graz 103*, 1-22.

[13] Gutman I. (2001), The Energy of a Graph: Old and New Results, *ed. by A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann. Algebraic Combinatorics and Applications. (Springer, Berlin)*, 196-211.

[14] Gutman I. (1979), Topological studies on hetero conjugated molecules, *alternant systems with one heteroatom, Theor. Chim. Acta.*, 50, 287–297.

[15] Gutman I., de Abreu N. M. M., Vinagre C. T. M., Bonifacio A. S. and Radenkovic S. (2008), Relation between energy and Laplacian energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 59, 343-354.

[16] Gutman I., Li X. and Zhang J. (2009), in Graph energy, *ed. by M. Dehmer., F. EmmertStreib. Analysis of Complex Networks. From Biology to Linguistics(WileyVCH, Weinheim)*, 145-174.

[17] Gutman I. and Zhou B. (2006), Laplacian energy of a graph, *Lin. Algebra Appl*, 414, 29-37.

[18] Indulal G., Gutman I. and Vijayakumar A. (2008), On distance energy of graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 60, 461–472.

[19] Joo M.R., Yandeh D. and Kiani M., Mirzakhah, (2009), Incidence energy of a graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 62, 561–572.

[20] Kaladevi V. and Sharmila Devi G. (2014), Double dominating energy of some graphs, *Intern. J. Fuzzy Mathematical Archive*, 4 (1), 1-7.

[21] Kaladevi V. and Sharmila Devi G. (2014), Double dominating skew energy of a graph, *Intern. J. Fuzzy Mathematical Archive*, 4 (1), 1-7.

[22] Liu J. and Liu B. (2008), A Laplacean – energy like invariant of a graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 59, 355–372.

[23] Liu J. and Liu B. (2009), On relation between energy and Laplacian energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 61, 403-406.

[24] McClelland B. J. (1971), Properties of the latent roots of a matrix: The estimation of pi-electron energies, *J. Chem. Phys.* 54, 640-643.

[25] Rajesh Kanna M. R., Dharmendra B. N. and Pradeep Ku- mar R. (2013), Minimum Covering Distance Energy of a Graph, *Applied Mathematical Sciences*, 7, No. 111, 5525-5536. [http://dx.doi.org/10.12988/ams.2013.38477].

[26] Rajesh Kanna M. R., Dharmendra B. N., Shashi R. and Ramyashree R. A. (2013), Maximum degree energy of certain mesh derived networks, *International Journal of Computer Applications*, 78 No. 8, 38-44. [http://dx.doi.org/10.5120/13513-1289].

[27] Rajesh Kanna M. R., Dharmendra B. N. and Sridhara G. (2013), Laplacian minimum dominating energy of a graph, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 89 No. 4, 565-581.

[28] Rajesh Kanna M. R., Dharmendra B. N. and Sridhara G. (2013), The Minimum Dominating Energy Of A Graph, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 85 No. 4, 707-718. [http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v85i4.7].

[29] Radenkovic S. and Gutman I. (2007), Total electron energy and Laplacian energy: How far the analogy goes?, *J. Serb. Chem. Soc.*, 72, 1343-1350.

[30] Robbiano M. and Jimenez R. (2009), Applications of a theorem by Ky Fan in the theory of Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 62, 537-552.

[31] Siva Kota Reddy P. and Prakasha K. N. (2016), Double dominating Laplacian Energy of a graph, *Arxiv Praprint*.

[32] Stevanovic D., Stankovic I. and Milosevic M. (2009), More on the relation between energy and Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 61, 395-401.

[33] Wang H. and Hua H. (2008), Note on Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 59, 373-380.

[34] Zhou B. (2009), New upper bounds for Laplacian energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 62, 553-560.

[35] Zhou B. (2008), On the sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Lin. Algebra Appl.* 429, 2239-2246.

[36] Zhou B. and Gutman I. (2007), Nordhaus-Gaddum-type relations for the energy and Laplacian energy of graphs, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts (Cl. Math. Natur.)*, 134, 1-11.

[37] Zhou B. and Gutman I. (2007), On Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 57, 211-220.

[38] Zhou B. and Gutman I. and Aleksic T. (2008), A note on Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 60, 441-446.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انرژی احاطه‌گری	Dominating energy
انرژی احاطه‌گری دوگانه	Double dominating energy
انرژی لاپلاسینی	Laplacian energy
انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری	Laplacian dominating energy
انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه	Double dominating Laplacian energy
طیف	Spectrum
عدد احاطه‌گری	Dominating number
عدد احاطه‌گری دوگانه	Double dominating number
گراف تاج	Crown graph
ماتریس احاطه‌گری	Dominating matrix
ماتریس احاطه‌گری دوگانه	Double dominating matrix
ماتریس لاپلاسینی	Laplacian matrix
ماتریس مجاورت	Adjacency matrix
مجموعه احاطه‌گری	Dominating set
مجموعه احاطه‌گری دوگانه	Double dominating set
مقدار ویژه	Eigenvalue

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacency matrix	ماتریس مجاورت
Crown graph	گراف تاج
Dominating energy	انرژی احاطه‌گری
Dominating matrix	ماتریس احاطه‌گری
Dominating number	عدد احاطه‌گری
Dominating set	مجموعه احاطه‌گری
Double dominating energy	انرژی احاطه‌گری دوگانه
Double dominating Laplacian energy	انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری دوگانه
Double dominating matrix	ماتریس احاطه‌گری دوگانه
Double dominating number	عدد احاطه‌گری دوگانه
Double dominating set	مجموعه احاطه‌گری دوگانه
Eigenvalue	مقدار ویژه
Laplacian dominating energy	انرژی لاپلاسینی احاطه‌گری
Laplacian energy	انرژی لاپلاسینی
Laplacian matrix	ماتریس لاپلاسینی
Spectrum	طیف

Abstract

Several matrices can be associated to a graph such as the adjacency matrix or the Laplacian matrix. The spectrum of these matrices gives some information about the structrue of the graph. In this thesis, we introduce and study the concepts of double dominating energy of some graphs, Laplacian minimum dominating energy of some graphs and also double dominating Laplacian energy of some graphs. Calculating the above energies in graphs, we present some bounds for each of these energies and also consider their structural properties.

Keywords: Eigenvalue, Energy of a graph, Double dominating set, Laplacian dominating matrix, Double dominating Laplacian matrix, Double dominating Laplacian eigenvalue.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

Double dominating energy and double dominating Laplacian energy of graphs

By: Fatemeh Mojallal

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

Advisor

Dr. Abdollah Alhevaz

October 2017