

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدى الله لنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

کران‌هایی برای اعداد احاطه‌گری رومی، ایتالیایی و ۲-رنگین کمانی یک گراف

نگارنده: مریم حاجی بابا

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

مهر ۱۳۹۶



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

پیوست شماره ۲

دانشکده : ریاضی

گروه : کاربردی

رساله دکتری خانم مریم حاجی بابا

تحت عنوان: کران هایی برای اعداد احاطه گری رومی، ایتالیایی و ۲-رنگین کمانی یک گراف

در تاریخ ۱۳۹۶/۷/۱۲ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد/ رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			نام و نام خانوادگی: نادر جعفری راد

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	دکتر ابراهیم هاشمی		دکتر میثم علیشاهی
			دکتر صادق رحیمی شهرباف
			دکتر دوستعلی مژده

تقدیم بہ:

مادر و مادر عزیزم کہ حامیان ہمیشگی من در زندگی بوده اند..
ہمسر صبورم
و دختر دلبندم

سپاس‌گزاری...

با سپاس فراوان از راهنمائی‌ها و زحمات استاد محترم و گرانقدر جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که از ابتدای راه و در طی انجام این تحقیق، با راهنمائی‌های خود مرا در نگارش این اثر یاری نمودند. بر خود لازم میدانم از ایشان که با هدایت و حمایت‌های بی دریغشان در طی مراحل تحقیق، و در نهایت صبر و صمیمیت و شکیبایی، بزرگوارانه و دلسوزانه بنده را در انجام امور پایان نامه یاری فرمودند، صمیمانه سپاس‌گذاری نمایم. همچنین مراتب تقدیر و تشکر از جناب آقای دکتر دوستعلی مژده، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی و جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف که زحمت داوری این اثر را برعهده گرفته اند را اعلام نمایم.

مریم حاجی بابا

مهر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **مریم حاجی بابا** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **کران هایی برای اعداد احاطه گری رومی، ایتالیایی و ۲-رنگین کمانی یک گراف**، تحت راهنمایی دکتر **نادر جعفری راد** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم حاجی بابا

مهر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله برخی از پارامترهای احاطه‌گری مانند عدد احاطه‌گری رومی، عدد احاطه‌گری ایتالیایی و عدد احاطه‌گری رومی دوگانه را مطالعه کرده و ضمن مطالعه برخی از ویژگی‌های آنها به ارائه کرانهایی برای آنها می‌پردازیم. سپس نتایج جدیدی در خصوص عدد احاطه‌گری ایتالیایی یک گراف ارائه می‌دهیم و ضمن بررسی ارتباط بین عدد احاطه‌گری ایتالیایی یک گراف با سایر پارامترهای احاطه‌گری نظیر عدد احاطه‌گری رومی، عدد ۲-احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری رومی دوگانه، کران‌های متعددی ارائه داده و به علاوه تمامی گراف‌هایی را که در تساوی برای کران‌های جدید صدق می‌کنند را دسته‌بندی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عدد احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری رومی، عدد احاطه‌گری ایتالیایی، عدد احاطه‌گری رومی دوگانه.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Hajibaba M. and Jafari Rad N., *On Domination, 2-Domination, and Italian Domination Numbers*, Utilitas Mathematica, accepted.
2. Hajibaba M. and Jafari Rad N., *A Note on the Italian Domination Number and Double Roman Domination Number in Graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, accepted.
3. Hajibaba M. and Jafari Rad N., *On Domination, 2-Domination, and Italian Domination Numbers*, The 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University Hamadan, Iran.
4. Hajibaba M. and Rahbani H., *Double Roman domination in graphs*, The 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University Hamadan, Iran.
۵. حاجی بابا، مریم. احاطه گری در نظریه گراف، تاریخچه و کاربردهای آن، اولین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضیات، کرمانشاه، ایران.

فهرست مطالب

ص	لیست تصاویر
۱	۱ مقدمات
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ تعاریف مقدماتی و نمادها
۸	۳.۱ تاریخچه مفاهیم احاطه‌گری رومی و ایتالیایی
۱۱	۴.۱ کاربرد احاطه‌گری
۱۵	۲ برخی نتایج موجود
۱۵	۱.۲ مقدمه
۱۵	۲.۲ رابطه زنجیره‌ای بین پارامترهای احاطه‌گری
۱۹	۳.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری رومی دوگانه
۲۱	۴.۲ درخت‌ها
۲۲	۵.۲ دورها و مسیرها
۲۳	۶.۲ برخی از کران‌های موجود
۲۸	۷.۲ روابط نرده‌اس-گدم برای برخی پارامترهای احاطه‌گری
۲۹	۳ ارتباط عدد احاطه‌گری ایتالیایی با عدد احاطه‌گری
۲۹	۱.۳ مقدمه
۳۰	۲.۳ بیان مسأله و معرفی چند خانواده از گراف‌ها
۳۵	۳.۳ نتایج اصلی
۳۹	۴ ارتباط عدد احاطه‌گری ایتالیایی با عدد احاطه‌گری رومی دوگانه
۳۹	۱.۴ مقدمه
	۲.۴ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی بر حسب عدد احاطه‌گری رومی
۴۰	دوگانه
۴۱	۳.۴ درخت‌ها

۴۳		معرفی خانواده $\mathcal{F}_1$	۴.۴
۴۵		نتایج اصلی	۵.۴
۴۹		روابط نردهاس-گدم برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی	۵
۴۹		مقدمه	۱.۵
۵۰		روابط نردهاس-گدم برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی	۲.۵
۵۷		مراجع	
۶۱		فهرست نمادها	۶
۶۱		نمادهای غیرالفبایی	۱.۶
۶۲		نمادهای الفبایی	۲.۶
۶۳		نمایه	

لیست تصاویر

۳	گراف G و $Cor(G)$	۱.۱
	گراف G_1 یک کاکتوس و گراف G_2 گراف C_4 -کاکتوس به دست آمده از درخت	۲.۱
۴	$S_{1,2}$ است.	
۵	گراف G	۳.۱
۷	گراف C_5	۴.۱
۹	وزیرها	۵.۱
۱۰	گراف پنج وزیر	۶.۱
۱۰	امپراتوری روم	۷.۱
۱۲	موقعیت دبیرستان‌ها	۸.۱
۱۳	گراف دبیرستان	۹.۱
۱۳	موقعیت دبستان	۱۰.۱
۱۳	موقعیت دبستان و ایستگاه‌های اتوبوس	۱۱.۱
۱۴	مجموعه احاطه‌گر با فاصله ۲ برای ابر مکعب Q_4	۱۲.۱
۱۹	گراف G	۱.۲
۲۱	درخت‌های $F_{3,3}$ و $T_{8,2}$	۲.۲
۲۲	یک درخت T_5	۳.۲
۲۷	گراف مکعبی	۴.۲
۲۷	گراف مسطح با قطر ۲	۵.۲
۳۲	عملگرهای O_i ، $i = 1, 2, 3, 4$	۱.۳
۴۲	درخت T_4	۱.۴
۴۴	عملگر O'_1	۲.۴
۴۴	عملگر O'_2	۳.۴
۵۳	درخت $T \in \mathcal{F}_2$	۱.۵

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مقدمه

مسأله احاطه‌گری^۱ یکی از مسائل مورد بحث در نظریه گراف است. در این رساله قصد داریم مفهوم احاطه‌گری و برخی از توابع احاطه‌گر مانند توابع احاطه‌گر رومی، ایتالیایی و رومی دوگانه را مورد بحث و بررسی قرار دهیم. در این فصل و در بخش ۲.۱، به بیان برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریه گراف که در فصل‌های بعد مورد نیاز است می‌پردازیم. همچنین مفهوم احاطه‌گری و توابع احاطه‌گر در گراف را بیان می‌کنیم. در بخش ۳.۱ تاریخچه مفاهیم احاطه‌گری رومی و ایتالیایی را بیان می‌کنیم. در بخش ۴.۱ به منظور ایجاد انگیزه در مخاطب در راستای مطالعه این رساله، به بیان چند کاربرد از مسائل احاطه‌گری می‌پردازیم. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با گراف براساس مرجع [۲۲] است.

۲.۱ تعاریف مقدماتی و نمادها

گراف^۲ $G = (V(G), E(G))$ عبارت است از مجموعه متناهی و ناتهی $V(G)$ ، و خانواده $E(G)$ که شامل دوتایی‌های نامرتب از اعضای متمایز در $V(G)$ است. هر عضو $V(G)$ رأس^۳ و هر

^۱ domination
^۲ graph

^۳ vertex

عضو $E(G)$ یک یال^۴ نامیده می‌شود. تعداد رأس‌ها، $|V(G)|$ ، مرتبه^۵ گراف نامیده شده و با $n(G)$ مشخص می‌شود. $|E(G)|$ نیز اندازه^۶ گراف نامیده شده و با $m(G)$ نشان داده می‌شود. همچنین مفهوم $\{u, v\} \in E(G)$ را با $uv \in E(G)$ مشخص کرده و اگر $e = uv \in E(G)$ می‌گوییم u و v با هم مجاور هستند و u و v بر e واقع شده‌اند.

در گراف G ، همسایگی باز^۷ رأس v ، $N_G(v)$ ، عبارت است از مجموعه رئوس مجاور با v در گراف G . به عبارت دیگر، $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. و همسایگی بسته^۸ رأس v ، $N_G[v]$ ، عبارت است $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. به طور مشابه، برای هر مجموعه $S \subset V(G)$ ، داریم $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v) \setminus S$ و همچنین $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. فرض کنید S مجموعه‌ای از رئوس و $u \in S$ باشد. رأس v را همسایه خصوصی^۹ رأس u نسبت به مجموعه S گوییم هرگاه $N_G[v] \cap S = \{u\}$. درجه^{۱۰} رأس v ، $\deg_G(v)$ ، برابر با تعداد همسایه‌های v در گراف G است. ماکسیمم درجه^{۱۱} و مینیمم درجه^{۱۲} رئوس G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهیم. بر اساس میزان درجه یک رأس، برخی رئوس به طور خاص نام گذاری می‌شوند. یک رأس منفرد^{۱۳} رأسی است که با هیچ رأس دیگری مجاور نباشد. یک برگ^{۱۴} در یک گراف عبارت است از رأسی با درجه یک و منظور از رأس پشتیبان^{۱۵} رأسی مجاور با حداقل یک برگ است. مجموعه رئوس پشتیبان گراف G را با $S(G)$ و مجموعه برگ‌ها را با $L(G)$ نمایش می‌دهیم. یک رأس پشتیبان را پشتیبان قوی^{۱۶} (پشتیبان ضعیف^{۱۷}) گوییم هرگاه حداقل با دو برگ (دقیقا یک برگ) همسایه باشد. یالی که حداقل یک رأس واقع بر آن برگ باشد، یال آویخته^{۱۸} می‌نامیم. منظور از زیر تقسیم کردن^{۱۹} یال uv در گراف G افزودن رأس جدید w به گراف G و جایگزینی یال uv با مسیر uvw است. اگر u و v رأس‌های گراف G باشند، در این صورت فاصله^{۲۰} بین u و v ، $d_G(u, v)$ ، برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v . اگر هیچ مسیری بین دو رأس u و v موجود نباشد، آنگاه می‌گوییم $d_G(u, v) = \infty$. اگر v رأسی از گراف G باشد، گریز از مرکز^{۲۱} v را با نماد $\text{ecc}(v)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

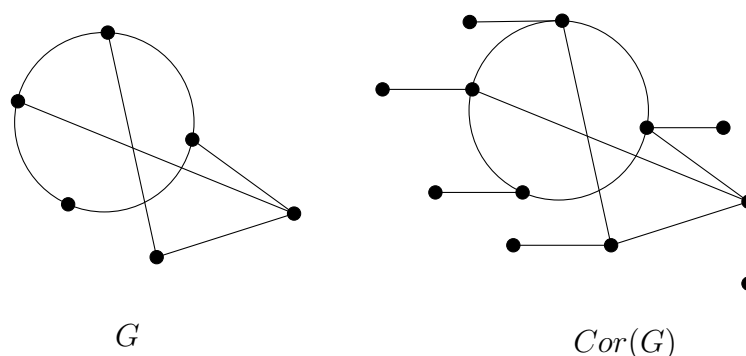
$$\text{ecc}(v) = \max\{d_G(u, v) \mid u \in V(G)\}.$$

قطر^{۲۲} گراف G ، $\text{diam}(G)$ ، برابر با بیشترین فاصله بین دو رأس از G است. بنابراین داریم:

$$\text{diam}(G) = \max\{\text{ecc}(v) \mid v \in V(G)\}.$$

مسیری در گراف که طول آن با قطر گراف برابر باشد را یک مسیر قطری^{۲۳} گوییم. در گراف

^۴ edge	^{۱۵} support vertex
^۵ order	^{۱۶} strong support
^۶ size	^{۱۷} weak support
^۷ open neighborhood	^{۱۸} pendant edge
^۸ closed neighborhood	^{۱۹} subdivision
^۹ private neighbor	^{۲۰} distance
^{۱۰} degree	^{۲۱} eccentricity
^{۱۱} maximum degree	^{۲۲} diameter
^{۱۲} minimum degree	^{۲۳} diameter path
^{۱۳} isolated vertex	
^{۱۴} leaf	



شکل ۱.۱: گراف G و $Cor(G)$.

G مجموعه S از رئوس را **مستقل**^{۲۴} گوییم هرگاه هیچ دو رأسی در S مجاور نباشند. اندازه بزرگ ترین مجموعه مستقل در گراف G را **عدد استقلال**^{۲۵} گراف G می نامیم و با نماد $\alpha(G)$ نشان می دهیم.

برای هر زیرمجموعه S از $V(G)$ ، **زیرگراف القایی**^{۲۶} توسط S ، $G[S]$ ، زیرگراف ماکسیمال از G با مجموعه رئوس S را مشخص می کند. گرافی که هیچ یالی نداشته باشد، **گراف تهی**^{۲۷} می نامیم. **گراف مکمل**^{۲۸} گراف G را با نماد $\bar{G}$ نشان داده و $\bar{G}$ گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ است به طوری که دو رأس در گراف $\bar{G}$ مجاور هستند اگر و تنها اگر در گراف G مجاور نباشند. یک **گراف غیر بدیهی**^{۲۹} گرافی از مرتبه حداقل ۲ است. گراف G **همبند**^{۳۰} نامیده شده هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v ، مسیری از u به v موجود باشد. در غیر این صورت G را **ناهمبند**^{۳۱} گوییم.

گراف دو بخشی^{۳۲} گرافی است که مجموعه رأس های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود که یک سر تمام یال های G در X و سر دیگر آن ها در Y باشد. یک گراف دو بخشی با بخش های X و Y ، که در آن هر رأس X به همه رئوس Y وصل شده باشد، **گراف دو بخشی کامل**^{۳۳} نامیده می شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ ، آنگاه گراف دو بخشی کامل با بخش های X و Y را با نماد $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

گراف دو بخشی کامل $K_{1,n}$ ، **ستاره**^{۳۴} S_n یا n -**پنجه**^{۳۵} نام دارد. رأس درجه n در ستاره S_n را **رأس مرکزی**^{۳۶} می نامیم.

تاج^{۳۷} گراف G ، گرافی است که با اضافه کردن یک برگ به هر رأس G به دست می آید و با نماد $Cor(G)$ نمایش می دهیم. شکل ۱.۱ یک گراف و گراف تاج به دست آمده از آن را نشان می دهد.

^{۲۴} independent

^{۲۵} independence number

^{۲۶} induced subgraph

^{۲۷} null graph

^{۲۸} complement graph

^{۲۹} non-trivial graph

^{۳۰} connected graph

^{۳۱} disconnected

^{۳۲} bipartite graph

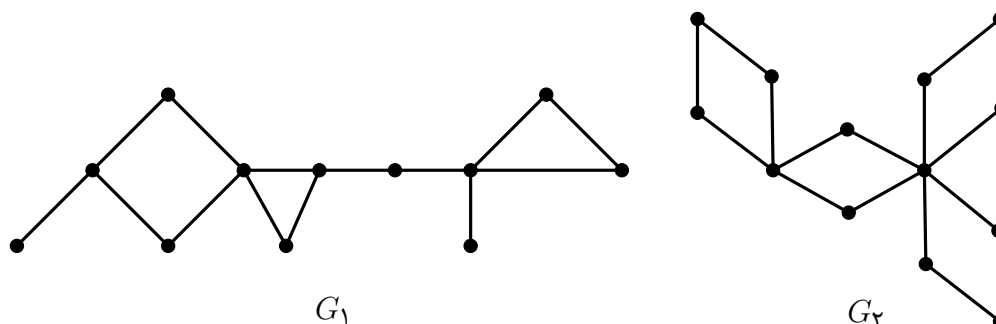
^{۳۳} Complete bipartite graph

^{۳۴} star

^{۳۵} n - claw

^{۳۶} central vertex

^{۳۷} corona



شکل ۲.۱: گراف G_1 یک کاکتوس و گراف G_2 گراف C_4 -کاکتوس به دست آمده از درخت $S_{1,2}$ است.

هر گراف همبند بدون دور **درخت**^{۳۸} نام دارد. یک **درخت ریشه دار**^{۳۹}، درختی است که یک رأس آن از بقیه رؤوس متمایز شده باشد. رأس متمایزه شده، **ریشه درخت**^{۴۰} نامیده می شود. اگر T یک درخت ریشه دار باشد، آنگاه زیر درخت ریشه دار در رأس v را با نماد T_v نمایش می دهیم. برای هر رأس $u \neq v$ در درخت T_v ، **فرزند**^{۴۱} u به هر یک از همسایه های u گفته می شود که در مسیر یکتای v به u قرار ندارند.

یک **ستاره دوگانه**^{۴۲} گرافی است که از اتصال رؤوس مرکزی دو ستاره مجزا با یک یال به دست می آید. بنابراین ستاره دوگانه درختی با دقیقاً دو رأس غیر برگ می باشد که این دو رأس، **رأس های مرکزی ستاره دوگانه**^{۴۳} نامیده می شوند. یک ستاره دوگانه با رأس های مرکزی از درجه m و n را با نماد $S_{m,n}$ نمایش می دهیم.

گراف G را **منتظم**^{۴۴} گوئیم هرگاه $\delta(G) = \Delta(G)$ ، و آن را r -**منتظم**^{۴۵} گوئیم هرگاه درجه مشترک همه رؤوس برابر r باشد. برای راحتی، گراف ۳-منتظم را **گراف مکعبی**^{۴۶} نیز می نامیم. گراف همبند G که در آن هر دو دور حداکثر در یک رأس با هم مجاور هستند را گراف **کاکتوس**^{۴۷} می نامیم. می توان مشاهده کرد که گراف G کاکتوس است هرگاه هر بلوک G یک دور باشد. گراف G **بلوک-کاکتوس**^{۴۸} نامیده می شود هرگاه هر بلوک G یا یک گراف کامل یا یک دور باشد. اگر در یک درخت غیر بدیهی هر یال را با دو یال موازی جایگزین کنیم و سپس هر یال را زیر تقسیم کنیم، گراف حاصل را یک گراف C_4 -**کاکتوس**^{۴۹} می نامیم. در شکل ۲.۱، گراف G_1 یک کاکتوس و گراف G_2 ، C_4 -کاکتوس به دست آمده از $S_{2,1}$ را نشان می دهد.

در گراف G مجموعه S از رؤوس را یک **مجموعه احاطه گر**^{۵۰} گوئیم هرگاه هر رأس $v \in$

^{۳۸}tree

^{۳۹}rooted tree

^{۴۰}root of the tree

^{۴۱}child

^{۴۲}double star

^{۴۳}central vertices of double star

^{۴۴}regular

^{۴۵} r -regular

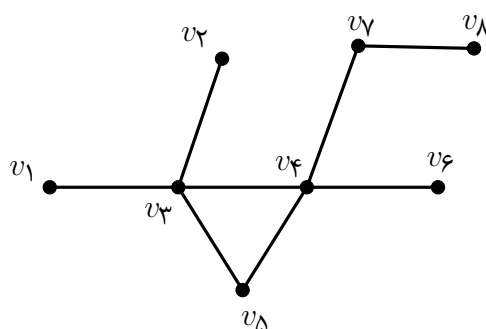
^{۴۶}cubic graph

^{۴۷}cactus

^{۴۸}block-cactus

^{۴۹} C_4 -cactus

^{۵۰}dominating set

شکل ۳.۱: گراف G .

S مجاور باشد. **عدد احاطه‌گری**^{۵۱} گراف G ، $\gamma(G)$ ، با اندازه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر در یک گراف برابر است. یک مجموعه احاطه‌گر G از اندازه $\gamma(G)$ ، یک $\gamma(G)$ -مجموعه نامیده می‌شود. به عنوان مثال، در شکل ۳.۱ داریم $\gamma(G) = 3$. مجموعه رئوس $\{v_3, v_4, v_7\}$ نیز یک $\gamma(G)$ -مجموعه است.

در گراف G در شکل ۳.۱، علاوه بر مجموعه $\{v_3, v_4, v_7\}$ مجموعه $\{v_3, v_6, v_8\}$ نیز یک $\gamma(G)$ -مجموعه است. بنابراین، گزاره زیر برقرار است.

گزاره ۱.۲.۱. برای گراف G ، $\gamma(G)$ -مجموعه لزوماً منحصر به فرد نیست.

برای گراف G ، مجموعه $S \subseteq V(G)$ یک **مجموعه احاطه‌گر دوگانه**^{۵۲} نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in V(G)$ داشته باشیم $|N_G[x] \cap S| \geq 2$ و آن را با نماد $\gamma_{\times 2}(G)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که گراف‌هایی که شامل رأس منفرد هستند نمی‌توانند مجموعه احاطه‌گر دوگانه داشته باشند. احاطه‌گری دوگانه حالت خاصی از **احاطه‌گری k -تایی**^{۵۳} است که در [۲۱، ۱۹] معرفی شده است.

زیرمجموعه S از مجموعه رئوس گراف G را یک **مجموعه p -احاطه‌گر**^{۵۴} گویند هرگاه رأس $v \in V(G) \setminus S$ با حداقل p رأس در S مجاور باشد. **عدد p -احاطه‌گری**^{۵۵} گراف G ، برابر با مینیمم اندازه در میان همه مجموعه‌های p -احاطه‌گر G است و با نماد $\gamma_p(G)$ نمایش داده می‌شود.

فینک^{۵۶} و **جاکبسن**^{۵۷} در [۱۴] مفهوم p -احاطه‌گری را معرفی کردند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مقالات [۱۲، ۱۶، ۱۷] مراجعه شود. برای حالت خاص $p = 1$ ، عدد ۱-احاطه‌گری که با $\gamma_1(G)$ نشان داده می‌شود برابر عدد احاطه‌گری گراف است. به عنوان مثال،

^{۵۱} domination number^{۵۲} double dominating set^{۵۳} k -tuple domination^{۵۴} p -dominating set^{۵۵} p -domination number^{۵۶} Fink^{۵۷} Jacobson

عدد ۲- احاطه‌گری گراف G در شکل ۳.۱ برابر ۶ است. مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ نیز یک $\gamma_2(G)$ -مجموعه است.

در ادامه مفهوم احاطه‌گری رومی را مطالعه کرده و به چند پارامتر وابسته به عدد احاطه‌گری رومی اشاره می‌کنیم.

یک تابع احاطه‌گر رومی^{۵۸} روی گراف $G = (V, E)$ عبارت است از تابعی مانند $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ به‌طوری‌که هر رأس $v \in V$ که $f(v) = 0$ با حداقل یک رأس u که $f(u) = 2$ مجاور باشد. چنین تابعی به اختصار RDF نامیده می‌شود. فرض کنید برای $f = (V_0, V_1, V_2)$ در این صورت می‌توان از نماد $V_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}$ ، $i \in \{0, 1, 2\}$ برای نمایش یک RDF استفاده کرد. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی f برابر با مقدار $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ است. کمترین مقدار وزن یک RDF روی گراف G ، عدد احاطه‌گری رومی^{۵۹}، $\gamma_R(G)$ ، نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، یک تابع احاطه‌گر رومی یک رنگ آمیزی از رئوس گراف با رنگ‌های $\{0, 1, 2\}$ است به‌طوری‌که هر رأس با رنگ ۰ دارای حداقل یک همسایه با رنگ ۲ است. به عنوان مثال، گراف G در شکل ۳.۱ را در نظر بگیرید. تابع f که به رئوس v_7 و v_8 وزن ۲، به رأس v_6 وزن ۱ و به بقیه رئوس وزن صفر می‌دهد، یک $\gamma_R(G)$ -تابع است. در نتیجه داریم $\gamma_R(G) = 5$. همچنین تابع g که به رئوس v_3 و v_4 وزن ۲، به رأس v_8 وزن ۱ و به بقیه رئوس وزن ۰ می‌دهد نیز یک $\gamma_R(G)$ -تابع است. با توجه به مثال بالا برای گراف دلخواه G ، $\gamma_R(G)$ -تابع لزوماً منحصر به فرد نیست.

احاطه‌گری رومی اولین بار در سال ۱۹۹۹ توسط استوارت^{۶۰} [۳۶] مطرح شد و سپس مورد توجه ریاضیدانان زیادی قرار گرفت و در مقالات زیادی از جمله [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت. تاکنون انواع مختلفی از احاطه‌گری رومی در مقالات تعریف شده‌اند، مانند [۲۸، ۲۹، ۳۲]. از نظر تاریخی احاطه‌گری رومی از یک استراتژی رومی نشأت گرفته که در روم قدیم اتفاق افتاده است و در بخش ۳.۱ به آن می‌پردازیم.

هنینگ^{۶۱} و هدتنمی^{۶۲} در [۲۶]، احاطه‌گری رومی ضعیف را بصورت زیر معرفی کردند. فرض کنید $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک تابع روی گراف G باشد. یک رأس v با $f(v) = 0$ تحت تابع f رأس بی‌دفاع^{۶۳} نامیده می‌شود اگر با رأسی مانند w که $f(w) > 0$ مجاور نباشد. تابع $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف^{۶۴} یا به اختصار WRDF نامیده می‌شود هرگاه هر رأس v با $f(v) = 0$ با رأسی مانند w که $f(w) > 0$ مجاور باشد به‌طوری‌که اگر رئوس گراف را تحت تابع f' دوباره بصورت $f'(v) = 1$ ، $f'(w) = f(w) - 1$ و برای هر $u \in V \setminus \{v, w\}$ ، $f'(u) = f(u)$ مقدار دهی کنیم، هیچ رأس بی‌دفاعی نداشته باشیم. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف f بصورت $w(f) = f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ تعریف می‌شود. مینیمم وزن یک WRDF عدد احاطه‌گری رومی ضعیف^{۶۵} نام دارد و با نماد $\gamma_r(G)$ نشان می‌دهیم.

^{۵۸}Roman dominating function

^{۵۹}Roman domination number

^{۶۰}Stewart

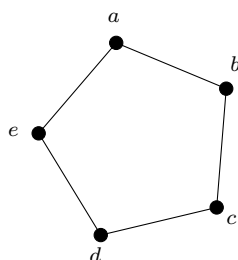
^{۶۱}Henning

^{۶۲}Hedetniemi

^{۶۳}undefended vertex

^{۶۴}weak Roman dominating function

^{۶۵}weak Roman domination number

شکل ۴.۱: گراف C_5

برای گراف دلخواه G ، تابع $f: V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2\})$ ، یک تابع احاطه گر ۲-رنگین کمانی^{۶۶} یا به اختصار 2RDF روی گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس $v \in V(G)$ که $f(v) = \emptyset$ داشته باشیم $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, 2\}$. وزن یک تابع احاطه گر ۲-رنگین کمانی f ، برابر با $w(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$ است. کمترین وزن یک 2RDF روی گراف G از میان همه چنین توابعی، عدد احاطه گری ۲-رنگین کمانی^{۶۷} نامیده شده و با $\gamma_{r2}(G)$ نمایش داده می‌شود. عدد احاطه گری ۲-رنگین کمانی توسط برسر^{۶۸} در [۷] معرفی شد. برای مطالعه بیشتر در زمینه عدد احاطه گری ۲-رنگین کمانی به مقالات [۹، ۳۴، ۳۷، ۳۸] مراجعه کنید.

در این نوشتار تمرکز ما بیشتر بر روی تعمیمی از احاطه گری رومی می‌باشد که توسط شلالی و همکارانش^{۶۹} در [۱۰] با نام احاطه گری $\{2\}$ -رومی^{۷۰} معرفی شد. این پارامتر سپس توسط کلاسترمریر و همکارانش^{۷۱} در [۲۷] تحت عنوان تابع احاطه گر ایتالیایی مطالعه شد.

یک تابع احاطه گر ایتالیایی^{۷۲} یا به اختصار یک IDF روی گراف $G = (V, E)$ عبارت است از تابعی مانند $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با این شرط که برای هر رأس $v \in V$ که $f(v) = 0$ داشته باشیم $\sum_{u \in N_G(v)} f(u) \geq 2$. به عبارت دیگر، رأسی مانند $u \in N_G(v)$ با مقدار $f(u) = 2$ موجود باشد و یا حداقل دو رأس $x, y \in N_G(u)$ با مقدار $f(x) = f(y) = 1$ موجود باشند. وزن تابع احاطه گر ایتالیایی f برابر با مقدار $w(f) = f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ است. عدد احاطه گری ایتالیایی^{۷۳} گراف G عبارت است از مینیمم وزن در میان توابع احاطه گر ایتالیایی روی گراف G و آن را با نماد $\gamma_I(G)$ نشان می‌دهیم. این پارامتر در [۱۰] با نماد $\gamma_{\{R2\}}(G)$ نیز معرفی شده است. یک تابع f را می‌توان با سه تایی $f = (V_0, V_1, V_2)$ نشان داد که در آن برای $i \in \{0, 1, 2\}$ داریم $V_i = \{v \mid f(v) = i\}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma_I(G) = \min_{IDF} (|V_1| + 2|V_2|).$$

بیلر^{۷۴}، هاینس^{۷۵} و هدتنمی در سال ۲۰۱۶ در [۳]، پارامتر جدیدی از احاطه گری به نام احاطه گری رومی دوگانه، به صورت زیر معرفی کردند.

^{۶۶} 2-rainbow dominating function

^{۶۷} 2-rainbow domination number

^{۶۸} Brešar

^{۶۹} Chellali et. al.

^{۷۰} Roman $\{2\}$ -domination

^{۷۱} Klostermeyer et. al.

^{۷۲} Italian dominating function

^{۷۳} Italian domination number

^{۷۴} Beeler

^{۷۵} Haynes

تابع $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ ، تابع تابع احاطه رومی دوگانه^{۷۶}، روی گراف G نامیده می شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

فرض کنید V_i مجموعه رئوسی است که تحت تابع f مقدار i گرفته اند.

(i) اگر $f(v) = 0$ ، آن گاه رأس v بایستی با حداقل دو رأس در V_1 و یا یک رأس در V_3 همسایه باشد.

(ii) اگر $f(v) = 1$ ، آنگاه رأس v باید حداقل یک همسایه در $V_1 \cup V_3$ داشته باشد.

در این صورت با فرض $V_i = \{v \in V | f(v) = i\}$ برای $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ، می توان تابع f را به صورت $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ معرفی کرد. وزن یک تابع احاطه گر رومی دوگانه f ، برابر است با مقدار $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. کمترین مقدار وزن یک DRDF روی G ، عدد احاطه گری رومی دوگانه^{۷۷}، $\gamma_{dR}(G)$ نامیده می شود.

در پایان این بخش با ذکر مثالی ساده معرفی پارامترهای احاطه گری را به اتمام می رسانیم. گراف C_5 با مجموعه رئوس a, b, c, d, e در شکل ۴.۱ در نظر بگیرید. داریم:

(i) مجموعه های $S = \{a, c\}$ و $S' = \{a, c, d\}$ به ترتیب مجموعه های احاطه گر و ۲-احاطه گر برای گراف C_5 هستند. همچنین داریم $\gamma(C_5) = 2$ و $\gamma_2(C_5) = 3$.

(ii) با فرض $V_0 = V \setminus V_2$ و $V_1 = \emptyset$ ، $V_2 = \{a, c\}$ داریم $\gamma_R(C_5) = 4$.

(iii) اگر $V_0 = V \setminus V_1$ و $V_1 = \{a, c, e\}$ ، $V_2 = \emptyset$ داریم $\gamma_I(C_5) = 3$.

(iv) فرض کنید $V_0 = V \setminus V_1$ و $V_1 = \{a, b, d\}$ ، $V_2 = \emptyset$ داریم $\gamma_r(C_5) = 3$.

(v) اگر $V_{\{1,2\}} = \emptyset$ و $V_{\{2\}} = \{a, e\}$ ، $V_{\{1\}} = \{c\}$ داریم $\gamma_{r2}(C_5) = 3$ اینصورت داریم.

(vi) فرض کنید $S = \{a, b, c, d\}$ ، در نتیجه داریم $\gamma_{\times 2}(C_5) = 4$.

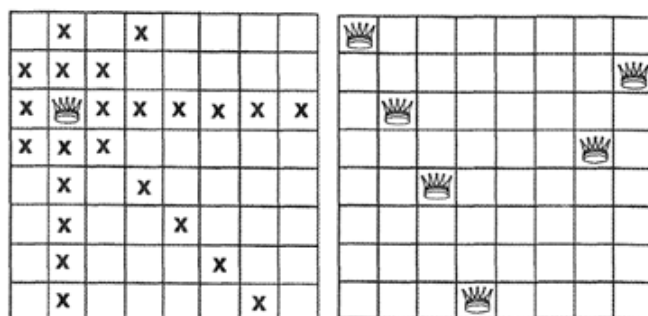
(vii) فرض کنید $V_1 = \emptyset$ ، $V_2 = \emptyset$ ، $V_3 = \{a, c\}$ و سایر رئوس مقدار صفر را داشته باشند. داریم $\gamma_{dR}(G) = 6$.

۳.۱ تاریخچه مفاهیم احاطه گری رومی و ایتالیایی

گراف ها دارای دامنه وسیعی از کاربردها در زمینه های مختلف مهندسی و علوم ارتباطات هستند. یک گراف می تواند برای نمایش تقریباً هر حالت فیزیکی و ارتباط بین موجودات

^{۷۶} double Roman dominating function

^{۷۷} double Roman domination number



شکل ۵.۱: وزیرها

مختلف به کار برده شود. از این رو مدلسازی مسائل با گراف در حل بسیاری از مسائل کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ریشه تاریخی مفاهیم احاطه‌گری به یونان قرن چهارم بعد از میلاد برمی‌گردد.

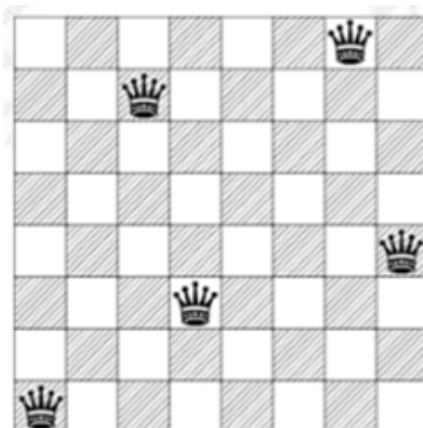
به نظر می‌رسد که منشأ مفهوم احاطه‌گری بازی شطرنج می‌باشد. که در آن نظر بر این بود که مربع صفحه شطرنج با مهره‌های شطرنج پوشیده و یا احاطه شود. طبق قوانین بازی شطرنج، وزیر قادر است در جهت عمودی، افقی و مورب به تعداد دلخواه حرکت کند. بنابراین وزیر شکل ۵.۱ می‌تواند در حرکت بعدی در هر یک از خانه‌هایی که با علامت X مشخص شده اند، قرار گیرد. در حقیقت این وزیر همه ی خانه‌های مشخص شده را تهدید و به عبارت دیگر همه این خانه‌ها را احاطه می‌کند.

در سال ۱۸۶۲ د جینیش^{۷۸} سعی کرد تا حداقل تعداد وزیر مورد نیاز برای پوشش یک صفحه شطرنج را تعیین کند و بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف بررسی و مطالعه شد و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است. در سال ۱۸۹۲ بال^{۷۹} مسئله کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه شطرنج را به قسمی که هر خانه ای مورد حمله یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله وزیر دیگری نباشد، مطرح کرد [۲۲]. شکل ۵.۱ سمت راست، قرار گرفتن شش وزیر با شرایط خواسته شده را نمایش می‌دهد.

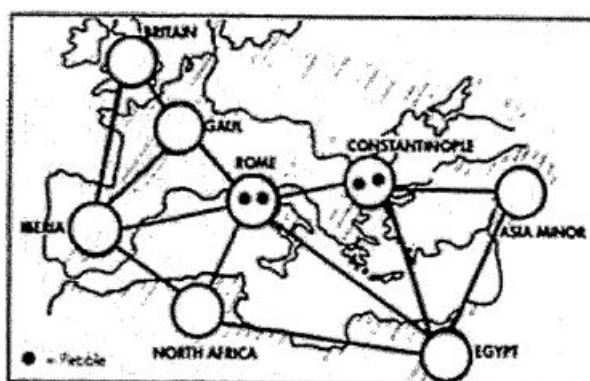
همان سال‌ها به درستی تصور می‌شد حداقل تعداد وزیر مورد نیاز برای احاطه کردن همه خانه‌های صفحه شطرنج، پنج است که شکل ۶.۱ چگونگی قرار گرفتن این پنج وزیر را نشان می‌دهد. این مسئله به مسئله پنج وزیر مشهور شد [۲۲].

در سال ۱۹۵۸ برگ^{۸۰} کتابی در زمینه نظریه گراف‌ها نوشت و برای اولین بار مفهوم اعداد احاطه‌گری در گراف‌ها را با نام ”ضریب پایداری خارجی“^{۸۱} معرفی کرد. در سال ۱۹۶۲ ار^{۸۲} کتابی در زمینه نظریه گراف نوشت و برای اولین بار کلمه ”مجموعه احاطه‌گر“ و عدد $d(G)$ را برای عدد احاطه‌گری G به کار برد.

^{۷۸} De Jaenisch^{۷۹} Ball^{۸۰} Berge^{۸۱} coefficient of external stability^{۸۲} Ore



شکل ۶.۱: گراف پنج وزیر



شکل ۷.۱: امپراتوری روم

در سال ۱۹۷۷ کوکین و هدتیمی برخی از نتایج به دست آمده در رابطه با مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف‌ها را به چاپ رساندند. در این مقاله این دو نفر برای اولین بار از نماد $\gamma(G)$ برای عدد احاطه‌گری در گراف استفاده کردند که مورد پذیرش دیگر ریاضیدانان قرار گرفت. مسأله احاطه‌گری در دهه‌های گذشته در بیش از هشتاد نوع شاخه تقسیم بندی شده و گسترش فراوانی داشته است. از جمله آن‌ها می‌توان به احاطه‌گری کلی، احاطه‌گری دوگانه، احاطه‌گری رومی، احاطه‌گری ایتالیایی و احاطه‌گری دو رنگین‌کمانی اشاره کرد.

حال به تاریخچه‌ای از احاطه‌گری رومی و احاطه‌گری ایتالیایی می‌پردازیم.

به دلیل محدودیت‌های اقتصادی برای امپراتوری کنستانتین یونان در قرن چهارم بعد از میلاد و به منظور کاهش تعداد ارتش‌های روم، از یک استراتژی دفاع جلویی و دفاع در عمق استفاده شد. این استراتژی ارتش روم را به کمپته‌ها و سپاهیانی تقسیم می‌کرد.

مدل ریاضی این مسأله یک گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E است. هر رأس در گراف نمایشگر یک ناحیه در امپراتوری روم است. دو رأس با یک یال به هم متصل هستند اگر و تنها اگر نقاط متناظر با آن‌ها مجاور باشند. برای محافظت از قلمرو روم،

در نواحی مختلف ارتش‌هایی قرار داشت و هر ناحیه با ارتش مستقر در آنجا محافظت می‌شد. اگر ناحیه‌ای فاقد ارتش بود به وسیله ارتشی که از ناحیه مجاور فرستاده می‌شد، محافظت می‌گردید. اما این کار موجب می‌شد که گاهی ناحیه‌ای که ارتش آن به ناحیه مجاورش اعزام شده بود بدون دفاع بماند. برای رفع این مشکل امپراتوری کبیر روم فرمان داد هرگاه انتقال ارتش باعث شود ناحیه‌ای بی دفاع بماند یک ارتش نمی‌تواند به ناحیه مجاورش فرستاده شود. به عبارت دیگر، هر ناحیه بدون ارتش بایستی همسایه ناحیه‌ای با حداقل دو ارتش باشد. این مطلب متناظر با مفهوم احاطه‌گری رومی در گراف متناظر با امپراتوری روم است. هاینس، هدتیمی و اسلاتر^{۸۳} در [۲۲]، انواع بسیاری از مجموعه‌های احاطه‌کننده را مورد بررسی قرار دادند. اما به نظر می‌رسد هیچ یک از انواع آن‌ها، همسان با مجموعه‌های احاطه‌گر رومی نیستند. بنابراین می‌توان گفت که احاطه‌گری رومی یک نوع جدیدی هم از نظر تاریخی و هم از نظر ریاضی جالب توجه است. در این مدل از استراتژی سربازی، تابع احاطه‌گر رومی به وسیله سه مجموعه نمایش داده می‌شود:

V_0 : مجموعه‌ای از رئوس که هیچ گروهی در آن جا مستقر نیست؛

V_1 : مجموعه‌ای از رئوس که دقیقاً یک گروه را می‌پذیرد؛

V_2 : مجموعه‌ای از رئوس که دو گروه را می‌پذیرد.

به عنوان مثال برای امپراتوری روم در شکل ۷.۱، می‌توان این سه مجموعه را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$V_1 = \{Britain, AsiaMinor\}, V_0 = \{Gaul, Iberia, NorthAfrica, Egypt, Constantinople\}, V_2 = \{Rome\},$$

حال اگر به دلیل مشکلات اقتصادی شرط فوق قابل اجرا نباشد می‌توان محدودیت‌ها را کاهش داد. به این صورت که ناحیه‌ای که فاقد ارتش است یا باید همسایه‌ای با دو ارتش داشته باشد و یا دارای حداقل دو همسایه با یک ارتش باشد. این شرط معادل تعریف احاطه‌گری ایتالیایی در گراف متناظر است.

۴.۱ کاربرد احاطه‌گری

مفهوم احاطه‌گری می‌تواند ابزار مفیدی برای اتخاذ تصمیم‌گیری و تعیین برخی از شبکه‌های سازمانی باشد. از جمله کاربردهای آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش‌نشانی و ... اشاره نمود. سه کاربرد احاطه‌گری را در سه مسئله موقعیت واقعی مختلف بررسی می‌کنیم.

۱- تعیین کمترین تعداد ایستگاه امنیتی

۲- تعیین کمترین تعداد توقف‌های اتوبوس مدرسه

۳- جمع‌آوری اطلاعات از شبکه‌های ارتباطی کامپیوتر

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	Y	Y	-	Y	-	-	-
B	Y	-	-	Y	-	Y	-	-
C	Y	-	-	Y	Y	-	-	Y
D	-	Y	Y	-	-	-	-	-
E	Y	-	Y	-	-	Y	-	Y
F	-	Y	-	-	Y	-	Y	-
G	-	-	-	-	-	Y	-	Y
H	-	-	Y	-	Y	-	Y	-

شکل ۸.۱: موقعیت دبیرستان‌ها

حال مثالی برای مسئله یک بیان می‌کنیم. فرض کنید در یک شهرستان هشت دبیرستان وجود دارد که با جاده‌هایی به یکدیگر متصل هستند. شکل ۸.۱ نشان می‌دهد که کدام دبیرستان‌ها با جاده‌ای به هم متصل هستند و حرف Y نشان دهنده این است که فاصله دو دبیرستان کمتر از پنج کیلومتر است.

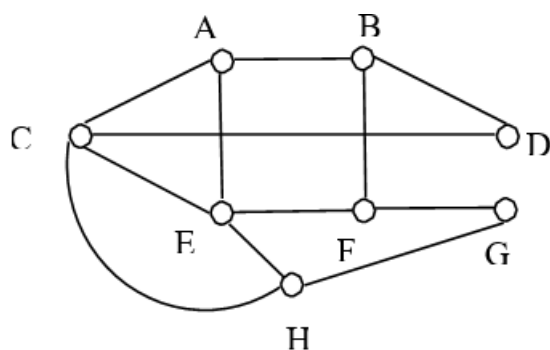
انجمن آموزش و پرورش در این شهرستان در نظر دارد امنیت دبیرستان‌ها را ارتقا دهد به طوری که هر دبیرستان دارای یک ایستگاه امنیتی باشد و یا پنج کیلومتر تا دبیرستان دارای ایستگاه امنیتی فاصله داشته باشد. به طوری که اگر فوریتی پیش آمد، ایستگاه امنیتی بتواند به سرعت به صحنه بیاید. با توجه به محدودیت‌های بودجه شهرستان، کمترین تعداد لازم این ایستگاه‌ها قرار است مستقر شوند. حال سوال این است که چه تعداد ایستگاه بایستی استقرار بیابند؟ در کدام دبیرستان‌ها؟ و به علاوه با فرض اینکه دبیرستان B که بزرگترین دبیرستان شهر می‌باشد دارای یک ایستگاه قدیمی است، در کدام دبیرستان‌ها بایستی ایستگاه جدید مستقر شود؟

از طریق فرایند مدلسازی ریاضی، وارد یک وضعیت دنیای واقعی می‌شویم. حال بایستی نمودار فوق را به یک مدل گراف در شکل ۹.۱ ترجمه کنیم. هر یک از دبیرستان‌ها را به عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم به طوری که دو رأس با یکدیگر مجاورند اگر دبیرستان‌های مورد نظر به فاصله ای کمتر از پنج کیلومتر از یکدیگر قرار داشته باشند.

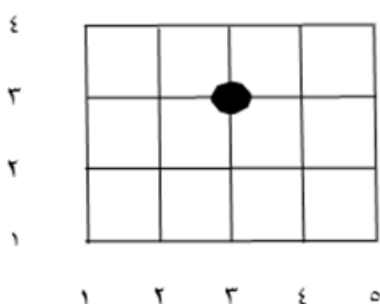
برای پاسخ به سوال اول، بایستی کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف را بیابیم. مجموعه احاطه‌گر $\{C, F\}$ گراف حاصل را احاطه می‌کند. رأس C خودش و رئوس A, D, E, H را احاطه می‌کند. رأس F رئوس B, E, G و خودش را احاطه می‌کند. بنابراین $\gamma(G) \leq 2$.

برای اثبات اینکه $\gamma(G) = 2$ ؛ کافی است نشان دهیم یک رأس نمی‌تواند گراف را احاطه کند. چون در گراف رأسی وجود ندارد که با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، پس $\gamma(G) = 2$.

حال مثالی برای مسئله دو بیان می‌کنیم. فرض کنید قوانینی برای اتوبوس مدرسه وضع شده است که هیچ دانش آموز مدرسه ابتدایی نبایستی بیش از یک بلوک به مدرسه یا ایستگاه اتوبوس پیاده روی داشته باشد. به دلیل افزایش قیمت سوخت اتوبوس‌های مدرسه تصمیم



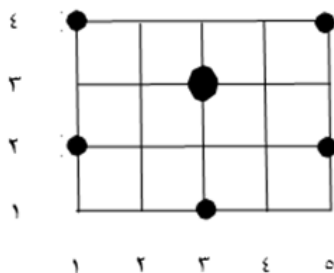
شکل ۹.۱: گراف دبیرستان



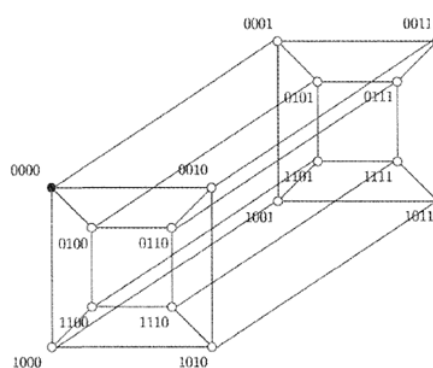
شکل ۱۰.۱: موقعیت دبستان

می‌گیرند که تعداد توقف‌های خود را به حداقل برسانند. برای تعیین کمترین تعداد توقف رانندگان اتوبوس مدرسه، بایستی هر تقاطع در گراف زیر یا ایستگاه اتوبوس باشد و یا یک بلوک تا ایستگاه اتوبوس (یا مدرسه) فاصله داشته باشد. حال برای موقعیت دنیای واقعی نقشه شکل ۱۰.۱ را مدل سازی می‌کنیم. موقعیت دبستان با راس بزرگتر در نمودار زیر مشخص شده است.

بایستی مجموعه احاطه‌گری بیابیم که شامل کمترین تعداد تقاطع‌ها به عنوان ایستگاه اتوبوس باشد. در شکل ۱۱.۱ دیده می‌شود که اگر ایستگاه‌های اتوبوس در تقاطع‌های (۱و۴)، (۵و۲)، (۱و۲)، (۵و۴)، و (۳و۱) تعبیه شوند، در این صورت دانش‌آموزان یا یک بلوک از مدرسه



شکل ۱۱.۱: موقعیت دبستان و ایستگاه‌های اتوبوس



شکل ۱۲.۱: مجموعه احاطه‌گر با فاصله ۲ برای ابر مکعب Q_4

فاصله دارند و یا یک بلوک از ایستگاه اتوبوس فاصله دارند.

و در نهایت مثالی از مسئله سه بیان می‌کنیم. فرض کنید $G = (V, E)$ ، نشان دهنده ی شبکه کامپیوترها باشد، که در آن رئوس نشان دهنده کامپیوترها و یال‌ها خط‌های ارتباطی بین کامپیوترها را نشان می‌دهد. هر کامپیوتر می‌تواند اطلاعات را به کامپیوتری که مستقیماً به آن متصل است ارسال کند. فرض کنید نیاز به جمع‌آوری اطلاعات از تمام کامپیوترها به صورت لحظه به لحظه داشته باشیم. برای این کار مجموعه‌ای کوچک از بین کامپیوترها انتخاب کرده و سپس با استفاده از خطوط ارتباطی اطلاعات را به‌دست می‌آوریم. از آنجا که جمع‌آوری اطلاعات بایستی دائمی بوده و سریع انجام شود، مجموعه‌ای انتخاب شده بایستی به اندازه کافی کوچک باشد و فاصله کامپیوترهایی که عضو مجموعه نیستند تا مجموعه انتخاب شده نباید زیاد باشد. اگر فاصله ذکر شده حداقل ۲ باشد، در این شرایط به دنبال مجموعه احاطه‌گر با فاصله ۲ هستیم. شکل ۱۲.۱ شبکه ارتباطی بین ۱۶ کامپیوتر را نشان می‌دهد. در این حالت مجموعه $\{0000, 1011\}$ مجموعه احاطه‌گر با فاصله ۲ است [۲۲].

فصل ۲

برخی نتایج موجود

۱.۲ مقدمه

مسئله احاطه‌گری یکی از مسائل نظریه گراف است که در رده مسائل NP-کامل قرار می‌گیرد. بنابراین یکی از مسائل اساسی در نظریه گراف، به‌دست آوردن کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری یک گراف است. مسئله احاطه‌گری در دهه‌های گذشته در بیش از ۸۰ نوع شاخه تقسیم‌بندی شده و گسترش فراوانی داشته است که به تعدادی از انواع آن در فصل قبل اشاره کردیم. تعداد زیادی کران بالا و پایین برای پارامترهای مختلف احاطه‌گری ارائه شده است که در این فصل به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. در بخش ۲.۲، روابط زنجیره‌ای بین برخی پارامترهای احاطه‌گری را ارائه می‌دهیم. سپس در بخش ۳.۲، کران‌های موجود برای عدد احاطه‌گری رومی دوگانه بررسی می‌شوند. در بخش‌های ۴.۲ و ۵.۲، قضایای مربوط به درخت‌ها، دورها و مسیرها بیان می‌شوند. در بخش ۶.۲ به برخی از کران‌های موجود اشاره کرده و در نهایت در بخش ۷.۲، به روابط نرده‌اس-گدم برخی پارامترهای احاطه‌گری می‌پردازیم.

۲.۲ رابطه زنجیره‌ای بین پارامترهای احاطه‌گری

در این بخش کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی بر اساس پارامترهای دیگر احاطه‌گری مانند عدد احاطه‌گری، احاطه‌گری رومی، ۲-احاطه‌گری و احاطه‌گری رومی ضعیف ارائه می‌شود.

همچنین رابطه زنجیره‌ای بین پارامترهای احاطه‌گری، احاطه‌گری رومی، ۲-احاطه‌گری و احاطه‌گری رومی ضعیف نیز ارائه می‌شود. با استفاده از این کران‌ها، یک رابطه زنجیره‌ای بین این پنج پارامتر به‌دست می‌آید.

فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ روی گراف $G = (V, E)$ باشد، به‌طوری‌که برای $i \in \{0, 1, 2\}$ داریم $V_i = \{v \mid f(v) = i\}$.

بدیهی است که هر مجموعه احاطه‌گر دوگانه مینیمم، یک مجموعه ۲-احاطه‌گر است. در نتیجه داریم $\gamma_2(G) \leq \gamma_{\times 2}(G)$. حال فرض کنید D یک مجموعه ۲-احاطه‌گر مینیمم باشد. فرض کنید f تابعی روی گراف G باشد که به هر عضو D مقدار ۱ و به هر عضو $V \setminus D$ مقدار ۰ را نسبت می‌دهد. بنابراین هر رأس با مقدار ۰ در $V \setminus D$ دارای دو همسایه در D با مقدار ۱ است. پس f یک IDF روی G خواهد بود. در نتیجه داریم $\gamma_I(G) \leq \gamma_2(G)$.

در مقاله [۲۳] نشان داده شده است که عدد احاطه‌گری رومی و عدد ۲-احاطه‌گری قابل مقایسه نیستند. در حالی که عدد ۲-احاطه‌گری کران بالایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی است. با مقایسه تعاریف مشاهده زیر نتیجه می‌شود.

مشاهده ۱.۲.۲. [۱۰، ۳۰] فرض کنید G گرافی فاقد رأس منفرد باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_I(G) \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_{\times 2}(G).$$

به‌وضوح هر تابع احاطه‌گر رومی یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی است. همچنین مجموعه $V_1 \cup V_2$ در یک $\gamma_I(G)$ -تابع، یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین، نتایج زیر به‌دست می‌آید.

مشاهده ۲.۲.۲. [۱۰] برای هر گراف G داریم:

$$\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_R(G).$$

بدیهی است که اگر $G = \overline{K}_n$ آنگاه $\gamma(G) = \gamma_R(G)$. همچنین اگر $\gamma(G) = \gamma_R(G)$ آنگاه داریم $|V_2| = 0$. پس قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۲.۲. [۱۲] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه $\gamma(G) = \gamma_R(G)$ اگر و تنها اگر $G = \overline{K}_n$.

مسیر P_5 را در نظر بگیرید. با دادن وزن ۱، ۰، ۱، ۰، ۱ به رئوس مسیر، یک $\gamma_I(P_5)$ -تابع با وزن ۳ به‌دست می‌آید. به‌وضوح عدد احاطه‌گری مسیر P_5 برابر ۲ و عدد احاطه‌گری رومی آن برابر ۴ است. بنابراین نتیجه زیر برقرار است:

نتیجه ۱.۲.۲. [۱۰] برای یک گراف G روابط زیر ممکن است برقرار باشد، حتی اگر G یک مسیر باشد.

$$\gamma(G) < \gamma_I(G) < \gamma_R(G).$$

بنا بر مشاهدات ۱.۲.۲ و ۲.۲.۲ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۲. برای هر گراف G داریم $\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_2(G)$.

حال اگر S یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد، با در نظر گرفتن $f = (\emptyset, \emptyset, S)$ به‌عنوان یک تابع احاطه‌گر رومی، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

مشاهده ۳.۲.۲. [۲۷] برای هر گراف G ، داریم $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$.

در نتیجه داریم $\gamma_I(G) \leq 2\gamma(G)$. این کران برای گراف‌هایی مانند ستاره‌ها و ستاره‌های دوگانه دقیق است. پس مشاهده زیر نتیجه می‌شود.

مشاهده ۴.۲.۲. [۱۰] برای گراف دلخواه G داریم:

$$\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

گراف G یک **گراف رومی**^۱ نامیده می‌شود هرگاه $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$. همچنین یک گراف را **گراف ایتالیایی**^۲ گوییم هرگاه $\gamma_I(G) = 2\gamma(G)$. به‌وضوح می‌توان مشاهده کرد که هر گراف ایتالیایی یک گراف رومی نیز هست. اما عکس این مطلب برقرار نیست. به‌عنوان مثال، گراف C_6 یک گراف رومی است در حالی که ایتالیایی نیست. ستاره‌ها و ستاره‌های دوگانه مثال‌هایی از گراف ایتالیایی هستند.

هنینگ و هدتیمی در [۲۶] روابط بین پارامترهای احاطه‌گری، احاطه‌گری ضعیف و احاطه‌گری رومی را بررسی کردند. نتایج کار ایشان در قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۲.۲.۲. [۲۶] برای هر گراف G روابط زیر برقرار است:

$$\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

توجه کنید که اگر $G = P_5$ باشد، آن‌گاه $\gamma(G) = 2$ ، $\gamma_r(G) = 3$ و $\gamma_R(G) = 4$. بنابراین گرافی همبند موجود است به‌طوری که $\gamma(G) < \gamma_r(G) < \gamma_R(G)$. سپس آن‌ها در [۲۶]، تمامی گراف‌هایی که در تساوی $\gamma(G) = \gamma_r(G)$ و $\gamma_r(G) = 2\gamma(G)$ صدق می‌کنند را دسته‌بندی کردند.

وو و زینگ در [۳۹] روابط بین سه پارامتر عدد احاطه‌گری و احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی و احاطه‌گری رومی را به‌صورت زیر به‌دست آوردند.

قضیه ۳.۲.۲. [۳۹] برای هر گراف G رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

در ادامه شلالی و همکارانش در [۱۰] ثابت کردند که عدد احاطه‌گری رومی ضعیف یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی است. همچنین، اعداد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی و ۲-احاطه‌گری، کران بالایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی یک گراف هستند.

گزاره ۱.۲.۲. [۱۰] برای هر گراف G داریم $\gamma_r(G) \leq \gamma_I(G)$.

^۱Roman graph

^۲Italian graph

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که کران فوق دقیق است. به ازای $n \geq 3$ ، ستاره $G = K_{1,n-1}$ را در نظر بگیرید. به عنوان مثال، $\gamma_r(G) = \gamma_I(G) = 2$. از طرف دیگر، نامساوی اکید در کران گزاره ۱.۲.۲ نیز ممکن است برقرار باشد. به عنوان مثال، برای گراف کامل غیر بدیهی K_n داریم $\gamma_I(K_n) = 2$ و $\gamma_r(K_n) = 1$.

به ازای هر تابع احاطه گر ۲-رنگین کمانی f روی گراف G می‌توان تابع g را به صورت زیر تعریف کرد. برای رأس $v \in V(G)$ ، اگر $f(u) = \{1, 2\}$ آنگاه قرار دهید $g(u) = 2$. اگر $f(u) = \{1\}$ یا $f(u) = \{2\}$ آنگاه قرار دهید $g(u) = 1$. اگر $f(u) = \emptyset$ آنگاه قرار دهید $g(u) = 0$. به وضوح نتیجه زیر به دست می‌آید.

گزاره ۲.۲.۲. [۱۰] برای هر گراف G داریم $\gamma_I(G) \leq \gamma_{r2}(G)$.

با جمع بندی نتایج ذکر شده، رابطه زنجیره‌ای ارائه شده در قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۴.۲.۲. [۱۰] برای هر گراف G رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

دقت شود که نامساوی‌های قضیه ۴.۲.۲ می‌توانند برقرار باشند. در حقیقت گراف‌هایی موجود هستند که تمام پارامترهای بیان شده در این قضیه می‌توانند مقادیر مجزایی اختیار کنند. به عنوان مثال، گراف G که در شکل ۱.۲ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. در زیر مقادیر پارامترها و نمونه‌ای از مجموعه‌ها و توابع احاطه گر بهینه برای این گراف آورده شده است.

$$\bullet S = \{w, y, s, t, c_1, c_4\}; \gamma(G) = 6$$

$$\bullet V_0 = V \setminus V_1 \text{ و } V_2 = \emptyset, V_1 = \{w, y, a, s, t, c_1, c_3, c_5\}; \gamma_r(G) = 8$$

$$\bullet V_0 = V \setminus V_1 \text{ و } V_2 = \emptyset, V_1 = \{v, x, z, r, s, u, c_1, c_3, c_5\}; \gamma_I(G) = 9$$

$$\bullet V_0 = V \setminus (V_1 \cup V_2) \text{ و } V_2 = \{c_1, c_4, w, y, t\}, V_1 = \{r\}; \gamma_R(G) = 11$$

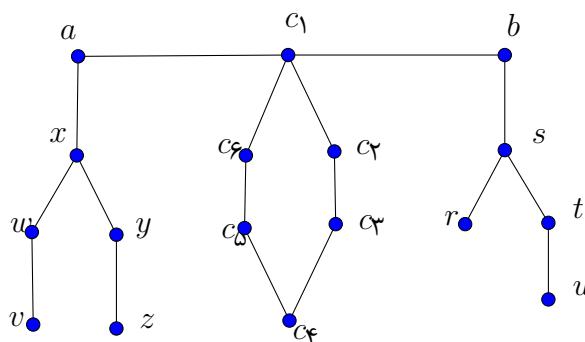
$$\bullet 2\gamma(G) = 12$$

$$\bullet \gamma_{r2}(G) = 10; V_{\{1,2\}} = \{t, c_1, c_4\}, V_{\{2\}} = \{x\}, V_{\{1\}} = \{v, z, r\}; \text{و به سایر رؤس در } V \setminus (V_{\{1\}} \cup V_{\{2\}} \cup V_{\{1,2\}}) \text{ مجموعه } \emptyset \text{ را نسبت دهید.}$$

بدیهی است که هر مجموعه ۲-احاطه گر یک مجموعه احاطه گر است. بنابراین، داریم

$$\gamma(G) \leq \gamma_2(G). \quad (1.2)$$

هنسبرگ و ولکمن در [۱۷] تساوی رابطه (۱.۲) را برای گراف‌های کاکتوس همبند دسته بندی کردند.



شکل ۱.۲: گراف G .

قضیه ۵.۲.۲. [۱۷] فرض کنید G یک گراف بلوک-کاکتوس باشد. در این صورت $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ اگر و تنها اگر G یک C_4 -کاکتوس باشد.

از طرفی با توجه به مشاهدات ۱.۲.۲ و ۲.۲.۲ داریم $\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_2(G)$. در نتیجه در گراف‌های کاکتوس همبند، کران $\gamma(G) \leq \gamma_I(G)$ برای C_4 -کاکتوس‌ها دقیق است.

شلالی و همکارانش در [۱۰] با استفاده از قضیه زیر، نتیجه گرفتند که اعداد احاطه‌گری ایتالیایی و ۲-احاطه‌گری در گراف‌ها با ماکزیمم درجه حداکثر ۲ برابرند.

قضیه ۶.۲.۲. [۱۰] برای هر گراف G ، یک $\gamma_I(G)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که یا $V_2 = \emptyset$ و یا هر رأس در V_2 دارای حداقل سه همسایه خصوصی در V_0 نسبت به مجموعه $V_1 \cup V_2$ است.

نتیجه ۳.۲.۲. [۱۰] برای هر گراف G با $\Delta(G) \leq 2$ داریم $\gamma_I(G) = \gamma_2(G)$.

هنسبرگ و ولکمن در [۱۷] قضیه زیر را ثابت کردند:

قضیه ۷.۲.۲. [۱۷]

فرض کنید G یک گراف غیربدیهی باشد به‌طوری‌که $\gamma_2(G) = \gamma(G)$. در این صورت $\delta(G) \geq 2$ و هر $\gamma_2(G)$ -مجموعه مستقل است.

۳.۲ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری رومی دوگانه برحسب عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری رومی

بیلر و همکاران در [۳] ثابت کردند که هر تابع احاطه‌گر رومی دوگانه با وزن $\gamma_{dr}(G)$ ، هیچ رأسی با مقدار یک ندارد و در نتیجه کرانی به‌صورت زیر برای $\gamma_{dr}(G)$ به‌دست آوردند.

گزاره ۱.۳.۲. [۳] فرض کنید G یک گراف و $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R -تابع روی G باشد. در این صورت داریم $\gamma_{dR}(G) \leq 2|V_1| + 3|V_2|$.

که کران نامساوی فوق دقیق است. زیرا برای خانواده ستاره های $G = K_{1,n-1}$ ، داریم:

$$\gamma_R(G) = 2, \gamma_{dR}(G) = 3.$$

همچنین کران نامساوی گزاره ۱.۳.۲، اکید می باشد. زیرا کافی است ستاره زیر تقسیم شده $G = K_{1,k}^*$ را که با یک بار زیر تقسیم کردن هر یال ستاره $G = K_{1,k}$ ، برای $K \geq 3$ به دست می آید را در نظر بگیریم. خواهیم داشت:

$$\gamma_R(G) = k + 2, \gamma_{dR}(G) = 2k + 2.$$

حال به هر برگ گراف G مقدار ۱ و به مرکز ستاره مقدار ۲ و به سایر رئوس مقدار ۰ را تحت تابع احاطه گر رومی $f = (V_0, V_1, V_2)$ ، نسبت می دهیم. و سپس به هر برگ و راس مرکزی مقدار ۲ و سایر رئوس را تحت یک γ_{dR} -تابع، مقدار ۰ می دهیم. بنابراین $|V_1| = k$ و $|V_2| = 1$ و بنابراین داریم:

$$2k + 2 = \gamma_{dR}(G) < 2|V_1| + 3|V_2| = 2k + 3.$$

سپس به کمک گزاره فوق ارتباط بین $\gamma_R(G)$ و $\gamma_{dr}(G)$ را به صورت زیر بررسی کردند.

نتیجه ۱.۳.۲. [۳] برای هر گراف G داریم $\gamma_{dr}(G) \leq 2\gamma_R(G)$. تساوی فوق برقرار است اگر و تنها اگر $G = \bar{K}_n$.

سپس برای هر گراف همبند غیربدیهی، رابطه زنجیره ای زیر را نتیجه گرفتند.

نتیجه ۲.۳.۲. [۳] برای هر گراف غیر بدیهی و همبند G داریم $\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G) < 2\gamma_R(G)$.

همچنین بیلر و همکاران در [۳] ارتباط عدد احاطه گری و عدد احاطه گری رومی دوگانه را به صورت زیر بررسی کردند.

گزاره ۲.۳.۲. [۳] برای هر گراف G ، داریم $2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$.

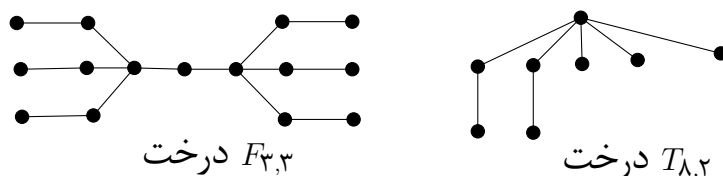
که کران های گزاره فوق دقیق هستند. همانطور که دیدیم، برای خانواده ستاره های غیر بدیهی $K_{1,n-1}$ داریم:

$$\gamma(K_{1,n-1}) = 1, \gamma_{dR}(K_{1,n-1}) = 3$$

و برای کران پایین یادآوری می کنیم که برای خانواده گراف های دوبخشی کامل $K_{2,k}$ که $k \geq 2$ ، داریم:

$$\gamma(K_{2,k}) = 2, \gamma_{dR}(K_{2,k}) = 4$$

آن ها همچنین ثابت کردند کران پایین ارائه شده در گزاره ۲.۳.۲ دقیق است اگر و تنها اگر $\gamma(G) = \gamma_2(G)$.



شکل ۲.۲: درخت‌های $F_{3,3}$ و $T_{8,2}$.

۴.۲ درخت‌ها

طبق قضیه ۴.۲.۲ داریم $\gamma_I(G) \leq \gamma_{r2}(G)$. شلالی و همکاران در [۱۰] ثابت کردند که عکس این نامساوی نیز برای درخت‌ها برقرار است.

قضیه ۱.۴.۲. [۱۰] برای هر درخت T داریم $\gamma_I(T) = \gamma_{r2}(T)$.

البته این تساوی برای گراف‌های کاکتوس فاقد دور زوج نیز برقرار است.

نتیجه ۱.۴.۲. [۱۰] اگر G یک گراف کاکتوس فاقد دور زوج باشد، آنگاه داریم $\gamma_I(G) = \gamma_{r2}(G)$.

کلاسترمیر و مک‌گیلوری در [۳۰] یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی درخت‌های غیربدیهی به‌دست آوردند و در [۲۷] این کران را دسته‌بندی کردند.

قضیه ۲.۴.۲. [۳۰] اگر T یک درخت غیر بدیهی باشد آنگاه $\gamma_I(T) \geq \gamma(T) + 1$.

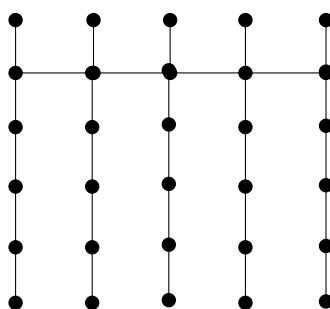
هنینگ و کلاسترمیر با استفاده از خانواده گراف‌های زیر نشان دادند که کران قضیه ۲.۴.۲ دقیق است.

فرض کنید r و s اعداد صحیح و مثبتی باشند و $F_{r,s}$ درختی است که از ستاره دوگانه $S_{r,s}$ با زیرتقسیم کردن همه یال‌ها به‌دست آمده است. درخت $F_{3,3}$ در شکل ۲.۲ نشان داده شده است. خانواده $\mathcal{F}'$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}' = \{F_{r,s} \mid r, s \geq 1\}.$$

همچنین فرض کنید به ازای اعداد صحیح k و j که $k \geq 2$ و $j \geq 0$ به‌طوری‌که $k \geq 2j+1$ $T_{k,j}$ درختی از مرتبه $k \geq 2$ باشد به‌طوری‌که از یک ستاره و با زیرتقسیم کردن j یال آن به‌دست آمده است. درخت $T_{8,2}$ در شکل ۲.۲ نشان داده شده است. قرار دهید $\mathcal{T}'$ خانواده همه درخت‌های $T_{k,j}$ باشد.

قضیه ۳.۴.۲. [۲۷] اگر T یک درخت غیر بدیهی باشد، آنگاه $\gamma_I(T) = \gamma(T) + 1$ اگر و تنها اگر $T \in \mathcal{T}' \cup \mathcal{F}'$.

شکل ۳.۲: یک درخت T_5 .

در [۲۷] درخت‌های ایتالیایی، یعنی درخت‌های T که $\gamma_I(T) = 2\gamma(T)$ ، نیز بررسی شدند. مشاهده می‌شود که اگر درخت T ایتالیایی باشد، آنگاه یک IDF با برد $\{0, 2\}$ روی T وجود دارد. زیرا می‌توان به هر رأس در یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم مقدار ۲ و به سایر رؤوس مقدار ۰ را نسبت داد. در [۲۷] خانواده‌ای نامتناهی از چنین درخت‌هایی ارائه شده است. فرض کنید T'_k درختی باشد که از درخت غیر بدیهی T' از مرتبه k با اتصال یک یال آویخته و یک مسیر به طول ۴ به هر رأس گراف T' به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال، اگر $T' = P_5$ ، آنگاه درخت T'_5 در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. فرض کنید $\mathcal{T}'_k$ خانواده تمام درخت‌های T'_k باشد. چون برای هر درخت T داریم $\gamma_I(T) \leq \gamma_R(T) \leq 2\gamma(T)$ ، درخت‌های ایتالیایی زیرمجموعه‌ای از خانواده درخت‌های رومی خواهند بود. مشابه ساختار ارائه شده برای درخت‌های رومی در [۲۵]، ساختاری برای درخت‌های $T \in \mathcal{H}'$ در [۲۷] ارائه شد. سپس ثابت شد این درخت‌ها، خانواده تمام درخت‌های ایتالیایی را تشکیل می‌دهند.

قضیه ۴.۴.۲. [۲۷] درخت T از مرتبه $n \geq 3$ یک درخت ایتالیایی است اگر و تنها اگر $T \in \mathcal{H}'$. در [۱۲] ویژگی‌های اصلی توابع احاطه‌گر رومی بررسی شد و مقدار پارامتر $\gamma_R(G)$ برای برخی از گراف‌های خاص به‌دست آمد. همچنین در این مقاله همه گراف‌های G که $\gamma_R(G) = \gamma(G) + k$ را به ازای $k \leq 2$ و دسته‌بندی کردند. البته این دسته‌بندی در [۴۰] به ازای مقادیر بزرگتر k تعمیم پیدا کرد. سپس در [۱۲] همه گراف‌های G که $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ نیز دسته‌بندی شد. سانگ^۳ و ونگ^۴ نیز در [۳۵] تمام درخت‌های T که $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 3$ را دسته‌بندی کردند. هنینگ در [۲۵] نیز درخت‌های رومی را دسته‌بندی کرد.

۵.۲ دورها و مسیرها

فینک و جاکوبسن در [۱۴] مجموعه‌های ۲-احاطه‌گر گراف‌های C_n و P_n را مطالعه کردند.

^۳ Song

^۴ Wang

قضیه ۱.۵.۲. [۱۴] اگر P_n و C_n به ترتیب مسیر و دور از مرتبه n باشند، آنگاه داریم:

$$\gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil, \quad \gamma_2(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

از قضیه فوق و نتیجه ۳.۲.۲، نتیجه زیر استدلال می‌شود.

قضیه ۲.۵.۲. [۱۰] اگر P_n و C_n به ترتیب مسیر و دور از مرتبه n باشند، آنگاه داریم:

$$\gamma_I(P_n) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil, \quad \gamma_I(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

واضح است که مسیر P_n به ازای n فرد و $n \neq 3$ تنها مسیرهایی هستند که هر تابع احاطه‌گر ایتالیایی با کمترین وزن روی آن‌ها فقط مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کند. همچنین P_2, P_3 و P_6 تنها مسیرهای ایتالیایی هستند. زیرا اگر مسیر P_n ایتالیایی باشد بایستی $\lceil (n+1)/2 \rceil = \lceil 2n/3 \rceil$. که این تساوی به ازای $n > 6$ برقرار نیست. برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی مسیرها و دورها نیز نتایج زیر را داریم.

قضیه ۳.۵.۲. [۷] به ازای $n \geq 3$ داریم:

$$\gamma_{r2}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

و به ازای $n \geq 2$ داریم:

$$\gamma_{r2}(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

کوکیان و همکارانش نیز احاطه‌گری رومی در دورها و مسیرها را مطالعه کردند.

قضیه ۴.۵.۲. [۱۲] اگر P_n و C_n به ترتیب مسیر و دور از مرتبه n باشند، آنگاه داریم:

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil.$$

هنینگ و هدتنمی در [۲۶]، عدد احاطه‌گری رومی ضعیف را برای دورها و مسیرها به دست آوردند.

گزاره ۱.۵.۲. [۲۶] برای $n \geq 1$ ، داریم:

$$\gamma_r(P_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil.$$

گزاره ۲.۵.۲. [۲۶] به ازای $n \geq 4$ ، داریم:

$$\gamma_r(C_n) = \gamma_r(P_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil.$$

۶.۲ برخی از کران‌های موجود

مسئله پیدا کردن عدد احاطه‌گری رومی و عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف‌ها در رده مسائل بهینه‌سازی NP-کامل قرار می‌گیرد [۱۰، ۱۲]. بنابراین یکی از مسائل اساسی در نظریه گراف

به دست آوردن کران‌هایی برای اعداد احاطه‌گر رومی و ایتالیایی بر اساس اطلاعات داده شده از گراف است.

چامبرز^۵ و همکارانش کران بالایی برای عدد احاطه‌گری رومی ارائه دادند.

قضیه ۱.۶.۲. [۸] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5}.$$

کوکیان و همکارانش در [۱۲] کران پایینی برای عدد احاطه‌گر رومی گراف براساس مرتبه و ماکزیمم درجه گراف به دست آوردند.

قضیه ۲.۶.۲. [۱۲] فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{2n}{\Delta + 1} \leq \gamma_R(G).$$

همچنین آن‌ها با استفاده از روش‌های احتمالاتی، یک کران بالا نیز برای عدد احاطه‌گر رومی گراف‌ها به دست آوردند.

قضیه ۳.۶.۲. [۱۲] فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_R(G) \leq \left(\frac{2 + \ln(1 + \delta(G))}{1 + \delta(G)} \right) n.$$

بنابراین کران فوق، کران بالایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی نیز می‌باشد. شلالی و همکاران با استفاده از قضیه ۶.۲.۲ کران پایین زیر را بر اساس مرتبه و ماکزیمم درجه گراف برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف‌های همبند ارائه دادند.

قضیه ۴.۶.۲. [۱۰] اگر G گرافی همبند، از مرتبه n و ماکزیمم درجه Δ باشد، آنگاه

$$\gamma_I(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 2}.$$

شلالی و جعفری راد در [۱۱] ارتباط عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی و عدد احاطه‌گری رومی درخت‌ها را بررسی کردند. نامساوی زیر را برای هر درخت T به دست آوردند.

قضیه ۵.۶.۲. [۱۱] برای هر درخت T داریم $\gamma_R(T)/\gamma_{r2}(T) \leq 4/3$.

طبق قضایای ۵.۶.۲ و ۱.۴.۲، برای هر درخت T رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma_R(T)/\gamma_I(T) \leq 4/3.$$

وو و جعفری راد نیز کران بالایی برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی درخت‌ها براساس مرتبه گراف ارائه دادند.

قضیه ۶.۶.۲. [۳۸] فرض کنید T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_{r2}(T) \leq 3n/4.$$

همچنین کران فوق برای مسیر از مرتبه ۴ دقیق است.

آن‌ها همچنین کران‌های بالا و پایینی برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی بر حسب مرتبه و قطر گراف به دست آوردند.

قضیه ۷.۶.۲. [۳۸] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_{r2}(T) \leq n - \left\lceil \frac{\text{diam}(G) - 1}{2} \right\rceil.$$

قضیه ۸.۶.۲. [۳۸] برای هر گراف همبند G داریم:

$$\gamma_{r2}(T) \geq \left\lceil \frac{2 \text{diam}(G) + 2}{5} \right\rceil.$$

دیده می‌شود که کران فوق برای گراف یکرخت با P_3 یا C_4 دقیق است.

طبق قضیه مشهور آر، عدد احاطه‌گری هر گراف همبند از مرتبه n حداکثر برابر $n/2$ است. گراف‌های همبندی که کران بالا را اختیار می‌کنند، تاج یک گراف همبند هستند. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که عدد احاطه‌گری دوگانه این گراف‌ها برابر n است. از طرف دیگر، اگر D یک مجموعه احاطه‌گر برای G و X مجموعه رئوس درجه ۱ گراف G باشد، آنگاه $D \cup X$ یک مجموعه ۲-احاطه‌گر برای تاج G است. در نتیجه عدد ۲-احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری ایتالیایی این گراف‌ها حداکثر برابر $3n/4$ است. با این نتیجه و با استقرا بر روی رئوس گراف، کلاسترمیر و مک‌گلیوری کران بالایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف‌ها از مرتبه حداقل ۳ به دست آوردند.

قضیه ۹.۶.۲. [۳۰] برای هر گراف G از مرتبه $n \geq 3$ ، داریم $\gamma_I(G) \leq 3n/4$.

کران فوق دقیق است. در حقیقت تعداد نامتناهی گراف موجود است به طوری که $\gamma_I(G) = 3n/4$. فرض کنید H تاج گراف همبند G و G' تاج H باشد. یک مجموعه ۲-احاطه‌گر از G' شامل یک مجموعه احاطه‌گر از H و رئوس درجه ۱ وجود دارد. این مجموعه ۲-احاطه‌گر، $3n/4$ رأس دارد. از طرف دیگر، می‌توان مشاهده کرد که گراف G' دارای $n/4$ مسیر القایی P_4 است به طوری که هر یک از آن‌ها دارای دقیقاً یک رأس از گراف G هستند. طبق ساختار G' ، هر تابع احاطه‌گر ایتالیایی باید دارای وزن حداقل ۳ روی هریک از این مسیرهای P_4 باشد. در نتیجه $\gamma_I(G') \geq 3n/4$. در این صورت ثابت می‌شود $\gamma_I(G') = 3n/4$.

هنسبرگ و ولکمن [۱۸] با استفاده از روش‌های احتمالاتی نشان دادند که عدد ۲-احاطه‌گری

هر گراف همبند G با مینیمم درجه δ در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\gamma_2(G) \leq \frac{n(1 + \ln(\delta + 1))}{\delta + 1}.$$

بنابراین، با افزایش مینیمم درجه گراف، عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف کران بالای کوچکتری خواهد داشت. از طرفی فاوارون، هنسبرگ و ولکمن در [۱۳] برای گراف‌های G با $\delta(G) \geq 2$ و از مرتبه n ثابت کردند $\gamma_2(G) \leq 2n/3$. بنابراین، نتیجه می‌شود که برای این گراف‌ها $\gamma_I(G) \leq 2n/3$. کلاسترمیر و مک‌گلیوری نیز با یک اثبات ساده‌تر به این نتیجه دست یافتند.

قضیه ۱۰.۶.۲. [۳۰] فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq 3$ باشد و $\delta(G) \geq 2$. آنگاه داریم $\gamma_I(G) \leq 2n/3$.

کران فوق برای تعداد نامتناهی از گراف‌ها دقیق است. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد. ساختار گراف G را با مسیر $v_1, v_2, \dots, v_k$ شروع می‌کنیم. متناظر با هر رأس v_i رئوس جدید u_i و w_i و یال‌های $v_i u_i$ ، $v_i w_i$ و $u_i w_i$ را اضافه کنید. گراف G به‌دست آمده از مرتبه $3k$ است. همچنین داریم $\gamma_I(G) = 2k$. این کران نیز برای گراف‌ها با مینیمم درجه حداقل ۳ بهبود داده شد.

قضیه ۱۱.۶.۲. [۳۰] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و مینیمم درجه $\delta \geq 3$ باشد. در این صورت داریم $\gamma_I(G) \leq \frac{n}{4}$.

این کران نیز دقیق است. در حقیقت یک خانواده نامتناهی از گراف‌های مکعبی G از مرتبه n موجود است به‌طوری که $\gamma_I(G) = n/2$. ساختار این گراف‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شود. فرض کنید $X = K_4 - e$ با رئوس درجه دوم x و y باشد. فرض کنید $k \geq 2$ و $X_1, \dots, X_k$ کپی‌های مجزایی از X باشند. فرض کنید s_i و t_i رئوس درجه دو در X_i باشند. به ازای $i = 1, \dots, k$ ، رأس t_i را به s_{i+1} متصل کنید به‌طوری که جمع به پیمانه k باشد. یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی G باید دارای وزن حداقل ۲ در هر کپی از X باشد. در واقع یا هر دو رأس درجه ۳ دارای وزن ۱ هستند و یا یکی از آن‌ها دارای وزن صفر و همسایه‌ای با وزن ۲ است. بنابراین داریم $\gamma_I(G) = \gamma_2(G) = n/2$.

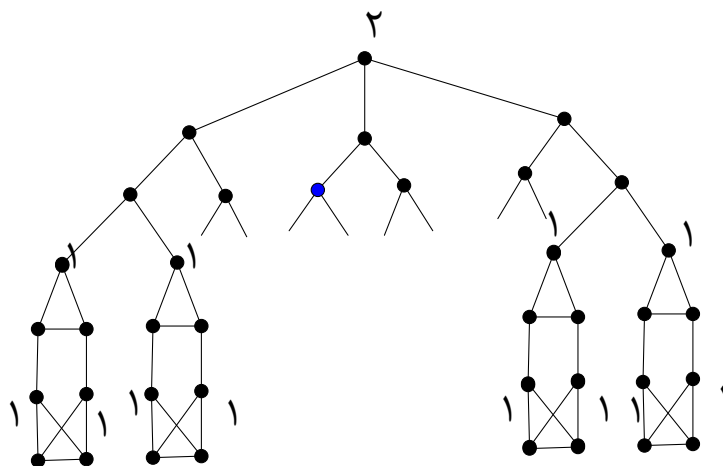
سپس در [۳۰] یک گراف مکعبی G با شرط $\gamma_I(G) < \gamma_2(G)$ ارائه شد که در شکل ۴.۲ نمایش داده می‌شود. همچنین برای گراف‌های ۴-منتظم نتایج زیر ارائه شد.

قضیه ۱۲.۶.۲. [۳۰] $\gamma_2(G) = \frac{|V(G)|}{4}$ و $\gamma_I(G) < \gamma_2(G)$.

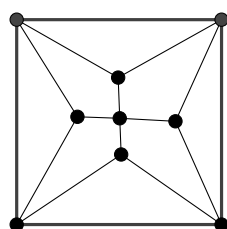
عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف‌ها با قطر ۲ نیز در [۳۰] بررسی شد. عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف‌ها با قطر ۲ می‌تواند عددی بزرگتر از ۳ باشد. به‌عنوان مثال، شکل ۵.۲ گراف مسطح G را نمایش می‌دهد که $\gamma_I(G) = 5$. زیرا می‌توان به رئوس کنج و مرکزی وزن ۱ و به سایر رئوس گراف G وزن ۰ را نسبت داد.

در مقاله [۲۴] ثابت شده است که برای هر گراف G با قطر ۲ داریم $\gamma(G) \leq \lfloor n/4 \rfloor + 1$. تنها مثال‌هایی که در این مقاله برای تساوی رابطه فوق ارائه شد گراف‌هایی از مرتبه ۸ و ۱۰ بود. در [۳۰] نیز ثابت شد که گراف‌های از مرتبه ۱۰ ذکر شده ایتالیایی نیستند.

قضیه ۱۳.۶.۲. [۳۰] فرض کنید G یک گراف ۴-منتظم با قطر ۲ و مرتبه ۱۰ باشد. در این صورت داریم $\gamma(G) \leq 3$ و $\gamma_I(G) \leq 5$.



شکل ۴.۲: گراف مکعبی



شکل ۵.۲: گراف مسطح با قطر ۲

۷.۲ روابط نردهاس-گدم برای برخی پارامترهای احاطه گری

برای گراف G و پارامتر ρ ، کران های روی $\rho(G) + \rho(\overline{G})$ و $\rho(G)\rho(\overline{G})$ بر حسب مرتبه گراف، به پاس بزرگداشت مقاله نردهاس^۶ و گدم^۷ در [۳۱]، روابط نردهاس-گدم^۸ نامیده شده اند. این روابط برای بسیاری از پارامترهای احاطه گری بررسی شده اند که تعدادی از آن ها را ارائه می کنیم.

قضیه ۱.۷.۲. [۲۲] برای هر گراف G داریم:

$$3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$$

و

$$2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n.$$

و کران فوق دقیق است اگر و فقط اگر گراف G با K_n و یا $\overline{K}_n$ یکرخت باشد.

وو و زینگ رابطه نردهاس-گدم را برای عدد احاطه گری ۲-رنگین کمائی به صورت زیر بدست آوردند:

قضیه ۲.۷.۲. [۳۹] اگر G گرافی از مرتبه $n \geq 3$ باشد،

$$5 \leq \gamma_{r2}(G) + \gamma_{r2}(\overline{G}) \leq n + 2$$

چامبرز و همکارانش روابط نردهاس-گدم را برای عدد احاطه گری رومی بررسی کردند.

قضیه ۳.۷.۲. [۸] فرض کنید G گرافی با $n \geq 3$ رأس باشد. در این صورت

$$5 \leq \gamma_R(G) + \gamma_R(\overline{G}) \leq n + 3.$$

و کران فوق دقیق است اگر و فقط اگر گراف G یا $\overline{G}$ با گراف C_5 و یا $(\frac{n}{5})K_5$ یکرخت باشند.

قضیه ۴.۷.۲. [۸] فرض کنید G گرافی با n رأس باشد و $n \geq 160$ ، آنگاه

$$\gamma_R(G)\gamma_R(\overline{G}) \leq \frac{16n}{5}.$$

و کران فوق دقیق است اگر و فقط اگر گراف G یا $\overline{G}$ با گراف $\frac{n}{8}C_8$ یکرخت باشند.

^۶Nordhaus
^۷Gaddum

^۸Nordhaus-Gaddum relation

فصل ۳

ارتباط عدد احاطه‌گری ایتالیایی با عدد احاطه‌گری

۱.۳ مقدمه

شلالی و همکاران در [۱۰] نوع جدیدی از احاطه‌گری را به نام احاطه‌گری ۲-رومی معرفی کردند. سپس ارتباط این پارامتر را با سایر پارامترهای احاطه‌گری بررسی کردند. همچنین کران پایینی برای عدد احاطه‌گری ۲-رومی بر حسب مرتبه و ماکزیمم درجه گراف ارائه دادند. سپس تمام درخت‌هایی که در آن‌ها دو پارامتر عدد احاطه‌گری ۲-رومی و عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی برابر هستند را دسته‌بندی کردند. یک سال بعد هنینگ و کلاستر میر در [۲۷] این پارامتر را به‌طور دقیق‌تر روی درخت‌ها بررسی کردند و کران $\gamma(G) \leq \gamma_{R^2}(G) \leq 2\gamma(G)$ را ارائه شده در مقاله [۱۰] را برای درخت‌ها به‌صورت $\gamma(T) + 1 \leq \gamma_{R^2}(T) \leq 2\gamma(T)$ بهبود دادند و همه درخت‌هایی که در تساوی کران پایین صدق می‌کنند را دسته‌بندی کردند. آن‌ها در مقاله خود از عنوان احاطه‌گری ایتالیایی به‌جای احاطه‌گری ۲-رومی استفاده کردند. در نهایت تمام درخت‌های ایتالیایی را نیز دسته‌بندی کردند.

در این فصل به دو مسأله‌ای که در [۱۰] و [۱۷] مطرح شد پاسخ خواهیم داد. به عبارت دیگر، تمام گراف‌های G که در تساوی $\gamma(G) = \gamma_I(G)$ و $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ صدق می‌کنند را دسته‌بندی می‌کنیم. جهت سهولت مطالعه، تعاریف برخی پارامترهای مورد نیاز این فصل را

یادآوری می‌کنیم:

مجموعه $S \subseteq V(G)$ را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم اگر $N[S] = V$. عدد احاطه‌گری، $\gamma(G)$ ، برابر است با کوچکترین اندازه مجموعه‌های احاطه‌گر G .
 $S \subseteq V$ یک مجموعه ۲-احاطه‌گر نامیده می‌شود هرگاه هر رأس از $V \setminus S$ دارای حداقل دو همسایه در S باشد. اندازه کوچک‌ترین مجموعه ۲-احاطه‌گر در گراف G ، عدد ۲-احاطه‌گری نامیده می‌شود و آنرا با نماد $\gamma_2(G)$ نشان می‌دهیم.
 یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی (IDF) روی گراف $G = (V, E)$ عبارت است از تابعی مانند $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با این شرط که برای هر رأس $v \in V$ که $f(v) = 0$ ، رأسی مانند $u \in N(v)$ با مقدار $f(u) = 2$ وجود داشته باشد و یا حداقل دو رأس $x, y \in N(v)$ با مقدار $f(x) = f(y) = 1$ موجود باشند. وزن تابع احاطه‌گر رومی f برابر با مقدار $w(f) = \sum_{u \in V} f(u)$ می‌باشد. عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف G عبارت است از مینیمم وزن در میان توابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G و آن را با نماد $\gamma_I(G)$ نشان می‌دهیم.

۲.۳ بیان مسأله و معرفی چند خانواده از گراف‌ها

براساس مشاهده ۲.۲.۲، برای گراف G داریم $\gamma(G) \leq \gamma_I(G)$. شلالی و همکاران در [۱۰] نشان دادند که برای درخت‌ها و گراف‌های کاکتوس فاقد دور زوج، عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی با عدد احاطه‌گر ایتالیایی برابر است. آن‌ها همچنین مسأله زیر را مطرح کردند.

مسأله ۱.۲.۳. [۱۰] تمام گراف‌های G که $\gamma(G) = \gamma_I(G)$ را دسته‌بندی کنید.

دقت شود که ۲-احاطه‌گری حالت خاصی از p -احاطه‌گری است که در [۱۴] معرفی شد. هنسبرگ و ولکمن در [۱۷] گراف‌هایی مانند گراف کاکتوس با عدد احاطه‌گری و ۲-احاطه‌گری برابر را مطالعه کردند و در نهایت مسأله زیر را مطرح کردند.

مسأله ۲.۲.۳. همه گراف‌های همبند G که $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ را دسته‌بندی کنید.

در این فصل قصد داریم به مسائل ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ پاسخ دهیم. برای این منظور ابتدا گزاره زیر را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید برای گراف G داریم $\gamma(G) = \gamma_I(G)$ و $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_I(G)$ -تابع باشد. در این صورت داریم:

$$(i) \quad \gamma(G) = \gamma_2(G) = |V_1| \text{ و } V_2 = \emptyset$$

$$(ii) \quad \delta(G) \geq 2 \text{ و } V_1 \text{ یک مجموعه مستقل است.}$$

(iii) اگر رئوس $u, v \in V_1$ موجود باشند به طوری که $N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0 \neq \emptyset$ ، آنگاه داریم $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0| \geq 2$.

برهان. ابتدا به اثبات قسمت (i) می‌پردازیم. به وضوح $V_1 \cup V_2$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. بنابراین، داریم:

$$\gamma(G) \leq |V_1 \cup V_2| = |V_1| + |V_2| \leq |V_1| + 2|V_2| = \gamma_I(G).$$

و چون بنا به فرض مسئله داریم $\gamma(G) = \gamma_I(G)$ ، پس نتیجه می‌شود $V_2 = \emptyset$. در این صورت V_1 یک مجموعه ۲-احاطه‌گر برای گراف G است. در نتیجه داریم:

$$\gamma_2(G) \leq |V_1| = \gamma_I(G) = \gamma(G).$$

از طرفی همواره داریم $\gamma(G) \leq \gamma_2(G)$. در نتیجه $\gamma(G) = \gamma_2(G) = |V_1|$. بنابراین، اثبات قسمت (i) کامل می‌شود.

قسمت (ii) نیز طبق قضیه ۷.۲.۲ ثابت می‌شود.

در ادامه اثبات قسمت (iii) را بیان می‌کنیم. فرض کنید u و v دو رأس در مجموعه V_1 باشند به طوری که $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0| = 1$. اگر $N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0 = \{z\}$ ، آنگاه مجموعه $(V_1 \setminus \{u, v\}) \cup \{z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است که با $|V_1|$ در $\gamma(G) = \gamma_2(G) = |V_1|$ تناقض است. بنابراین $N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0 \geq 2$. $\square$

خانواده $\mathcal{G}$

هدف ما تعیین ساختار گراف‌های G است که در رابطه‌ی $\gamma(G) = \gamma_I(G)$ صدق می‌کنند. برای این منظور، ابتدا خانواده‌ی $\mathcal{G}$ از گراف‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

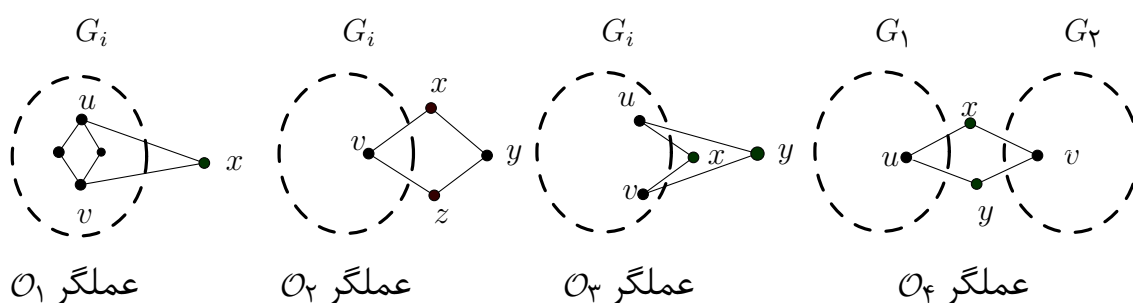
تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $\mathcal{G}$ خانواده‌ای از گراف‌های G باشد که از یک دنباله $G_0, G_1, \dots, G_k$ از گراف‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند. فرض کنید $G_0 = C_4$ ، $G = G_k$ و اگر $k \geq 1$ ، آنگاه G_{i+1} برای $i = 0, 1, \dots, k-1$ از G_i با یکی از عملگرهای زیر به دست آمده است. در ادامه فرض کنید به ازای $i = 0, \dots, k$ یک $f_i = (V_0^{f_i}, V_1^{f_i}, V_2^{f_i})$ یک $\gamma_I(G_i)$ -تابع باشد.

عملگر O_1 : فرض کنید u و v عضو $V_1^{f_i}$ باشند، به طوری که $|N_{G_i}(u) \cap N_{G_i}(v) \cap V_0^{f_i}| \geq 2$ رأس جدید x را اضافه کرده و آن را دقیقاً به دو رأس u و v وصل کنید.

عملگر O_2 : رأس $v \in V_1^{f_i}$ با $\deg_{G_i}(v) \geq 2$ را به دو برگ از مسیر P_3 وصل کنید.

عملگر O_3 : فرض کنید u و v دو رأس از مجموعه $V_1^{f_i}$ باشند به طوری که $\deg_{G_i}(u) \geq 2$ و $\deg_{G_i}(v) \geq 2$ و $N_{G_i}(u) \cap N_{G_i}(v) \cap V_0^{f_i} = \emptyset$ دو رأس جدید x و y را اضافه کنید و هر کدام را دقیقاً به دو رأس u و v متصل کنید.

عملگر O_4 : فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف همبند باشند به طوری که برای $j = 1, 2$ ، داشته باشیم $\gamma_I(G_j) = \gamma(G_j)$ و f_j یک $\gamma_I(G_j)$ -تابع باشد. دو رأس جدید x و y را اضافه کنید و



شکل ۱.۳: عملگرهای O_i ، $i = 1, 2, 3, 4$.

هر یک از این دو رأس را دقیقاً به یک رأس $u \in V(G_1)$ و دقیقاً یک رأس $v \in V(G_2)$ با $f_1(u) = f_2(v) = 1$ متصل کنید.

در شکل ۱.۳ عملگرهای O_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ نشان داده شده‌اند.

هانسبرگ و ولکمن در [۱۷] نشان دادند که یک گراف G کاکتوس همبند است به‌طوری‌که $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ اگر و تنها اگر G یک C_4 -کاکتوس باشد. در مشاهده زیر نشان می‌دهیم که گراف‌های C_4 -کاکتوس زیرخانواده‌ای از خانواده $\mathcal{G}$ هستند.

مشاهده ۱.۲.۳. یک گراف C_4 -کاکتوس از C_4 و با استفاده از عملگر O_2 حاصل می‌شود.

برهان. فرض کنید G یک گراف C_4 -کاکتوس باشد که از درخت T با جایگذاری دو یال موازی به جای هر یال و زیرتقسیم هر یال جدید حاصل شود. فرض کنید x یک برگ از درخت T باشد، قرار دهید $G' = G - N_G[x]$. در این صورت G' یک گراف C_4 -کاکتوس است. حال حکم با استفاده از استقرا به راحتی ثابت می‌شود. $\square$

در ادامه به دسته‌بندی گراف‌هایی خواهیم پرداخت که عدد احاطه‌گری ایتالیایی برابر با عدد احاطه‌گری دارند. برای این منظور ابتدا مفاهیم و نمادهای مورد نیاز در این دسته‌بندی را بیان می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۲.۳. یادآوری می‌شود که منظور از $G_1 + G_2$ ، اجتماع مجزا^۱ دو گراف G_1 و G_2 است. اگر برای $i = 1, 2$ یک گراف همبند و f_i یک $\gamma_I(G_i)$ -تابع باشد آنگاه نماد $f = f_1 + f_2$ را برای $\gamma_I(G_1 + G_2)$ -تابع روی $G_1 + G_2$ به کار می‌بریم به‌طوری‌که $f(x) = f_i(x)$ برای $x \in V(G_i)$.

ملاحظه ۲.۲.۳. یک زیرگراف فراگیر بحرانی^۲ از گراف G ، زیرگرافی مانند G' از G است به‌طوری‌که $V(G') = V(G)$ و برای هر یال $e \in E(G')$ داریم $\gamma(G' - e) > \gamma(G')$.

حال در لم زیر ثابت می‌کنیم که گراف‌ها متعلق به خانواده $\mathcal{G}$ ، دارای عدد احاطه‌گری ایتالیایی برابر با عدد احاطه‌گری هستند.

^۱disjoint union

^۲spanning critical subgraph

لم ۱.۲.۳. اگر $G \in \mathcal{G}$ باشد، آنگاه $\gamma(G) = \gamma_I(G)$.

برهان. با کمک استقرا روی تعداد عملگرهای استفاده شده در ساخت گراف $G \in \mathcal{G}$ حکم را ثابت می‌کنیم. به‌عنوان مرحله پایه استقرا می‌دانیم که $\gamma(C_4) = \gamma_I(C_4)$. فرض کنید قضیه برای گراف G' که با استفاده از $i' \leq i$ عملگر به‌دست می‌آید، برقرار باشد. فرض کنید G از $i+1$ عملگر ساخته شود. بنابراین $G = G_{i+1}$ از گراف G_i با یکی از عملگرهای O_1, O_2, O_3 یا O_4 حاصل می‌شود به‌طوری‌که $\gamma(G_i) = \gamma_I(G_i)$.

فرض کنید G_{i+1} از G_i با عملگر O_1 به‌دست آمده باشد و f_i یک $\gamma_I(G_i)$ -تابع باشد. فرض کنید $u, v \in V^{f_i}$ به‌طوری‌که $|N_{G_i}(u) \cap N_{G_i}(v) \cap V^{f_i}| \geq 2$ و رأس جدیدی باشد که به دو رأس u, v متصل است. به‌وضوح V^{f_i} یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_{i+1} می‌باشد و بنابراین $\gamma(G_{i+1}) \leq \gamma(G_i)$. فرض کنید S یک $\gamma(G_{i+1})$ -مجموعه باشد. اگر $x \notin S$ ، آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. بنابراین $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1})$. حال فرض کنید $x \in S$ و $u_o \in N_{G_i}(u) \cap N_{G_i}(v) \cap V^{f_i}$. در این صورت مجموعه $(S - \{x\}) \cup \{u_o\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. پس $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1})$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\gamma(G_i) = \gamma(G_{i+1})$. در ادامه نشان می‌دهیم که $\gamma_I(G_i) = \gamma_I(G_{i+1})$. به‌وضوح می‌توان تابع f_i را با تعیین وزن $^\circ$ برای رأس x به یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G_{i+1} توسیع داد. در نتیجه $\gamma_I(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_i)$. با توجه به نتیجه ۲.۲.۲، داریم:

$$\gamma(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_i) = \gamma(G_i) = \gamma(G_{i+1}).$$

بنابراین، $\gamma_I(G_{i+1}) = \gamma_I(G_i)$. پس نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma(G_{i+1}) = \gamma(G_i) = \gamma_I(G_i) = \gamma_I(G_{i+1}).$$

در ادامه فرض کنید G_{i+1} از G_i با عملگر O_2 به‌دست آمده است. فرض کنید $v \in V^{f_i}$ به‌طوری‌که $\deg_{G_i}(v) \geq 2$ و v به دو برگ از مسیر xyz : متصل شده است. به‌وضوح $V^{f_i} \cup \{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_{i+1} است. بنابراین، $\gamma(G_{i+1}) \leq \gamma(G_i) + 1$. فرض کنید S یک $\gamma(G_{i+1})$ -مجموعه باشد. به‌وضوح $S \cap \{x, y, z\} \neq \emptyset$. اگر $v \in S$ ، آنگاه مجموعه $S \setminus \{x, y, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. پس داریم $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1}) - 1$. حال فرض کنید v عضو S نباشد. اگر $|S \cap \{x, y, z\}| \geq 2$ ، آنگاه $(S \setminus \{x, y, z\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. بنابراین، $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1}) - 1$. پس در ادامه فرض کنید $|S \cap \{x, y, z\}| = 1$. در این صورت $y \in S$ و مجموعه $S \setminus \{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. بنابراین،

$$\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1}) - 1 \text{ پس داریم } \gamma(G_i) = \gamma(G_{i+1}) - 1.$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $\gamma_I(G_{i+1}) = \gamma_I(G_i) + 1$. به‌وضوح می‌توان تابع f_i را با تعیین وزن $^\circ$ برای رئوس x و z و وزن ۱ برای رأس y به یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G_{i+1} توسیع داد. حال با توجه به نتیجه ۲.۲.۲، داریم:

$$\gamma(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_i) + 1 = \gamma(G_i) + 1 = \gamma(G_{i+1}).$$

بنابراین، $\gamma_I(G_{i+1}) = \gamma_I(G_i) + 1$. پس نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma(G_{i+1}) = \gamma(G_i) + 1 = \gamma_I(G_i) + 1 = \gamma_I(G_{i+1}).$$

حال فرض کنید G_{i+1} از G_i با عملگر O_3 به‌دست آمده است. فرض کنید f_i یک $-\gamma_I(G_i)$ -تابع و u و v دو رأس از مجموعه $V_1^{f_i}$ باشند به‌طوری‌که $\deg_{G_i}(u) \geq 2$ ، $\deg_{G_i}(v) \geq 2$ و $N_{G_i}(u) \cap N_{G_i}(v) \cap V_0^{f_i} = \emptyset$. همچنین فرض کنید G_{i+1} از G_i با اضافه کردن دو رأس جدید x و y و متصل کردن هر یک از آن‌ها به دو رأس u و v به‌دست آمده باشد. به‌وضوح $V_1^{f_i}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_{i+1} است. بنابراین، $\gamma(G_{i+1}) \leq \gamma(G_i)$. فرض کنید S یک $-\gamma(G_{i+1})$ -مجموعه باشد. اگر $S \cap \{x, y\} = \emptyset$ ، آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. در نتیجه $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1})$. حال فرض کنید $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$. اگر $|S \cap \{x, y\}| = 2$ ، آنگاه $\{u, v\} \cap S = \emptyset$ و مجموعه $(S \setminus \{x, y\}) \cup \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. پس نتیجه می‌گیریم $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1})$. حال فرض کنید $|S \cap \{x, y\}| = 1$. چون x و y توسط مجموعه S احاطه می‌شوند، بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $u \in S$. در این صورت $(S \setminus \{x, y\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_i است. پس داریم $\gamma(G_i) \leq \gamma(G_{i+1})$. بنابراین، نتیجه می‌شود $\gamma(G_i) = \gamma(G_{i+1})$.

حال نشان می‌دهیم که $\gamma_I(G_i) = \gamma_I(G_{i+1})$. به‌وضوح می‌توان تابع f_i را با تعیین وزن $\circ$ برای رئوس x و y به یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G_{i+1} توسعه داد. بنابراین، $\gamma_I(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_i)$. حال بنا بر نتیجه ۲.۲.۲، داریم:

$$\gamma(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_{i+1}) \leq \gamma_I(G_i) = \gamma(G_i) = \gamma(G_{i+1}).$$

در نتیجه داریم $\gamma_I(G_{i+1}) = \gamma_I(G_i)$. بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$\gamma(G_{i+1}) = \gamma(G_i) = \gamma_I(G_i) = \gamma_I(G_{i+1}).$$

اگر G_{i+1} از گراف G_i و با عملگر O_4 به‌دست آمده باشد، به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\gamma(G_{i+1}) = \gamma_I(G_{i+1})$. بنابراین اثبات کامل می‌شود. $\square$

برای گراف $G \in \mathcal{G}$ ، $-\gamma_I(G)$ -تابع توصیف شده در اثبات لم ۱.۲.۳ را $-\gamma_I(G)$ -تابع استاندارد می‌نامیم و با f^G نشان می‌دهیم. در این صورت هر رأس از $V_0^{f^G}$ دارای درجه دو است. از آنجا که $V_1^{f^G} = \emptyset$ و $V_2^{f^G}$ یک مجموعه مستقل است، مشاهده زیر برقرار است.

مشاهده ۲.۲.۳. اگر $G \in \mathcal{G}$ ، آنگاه برای هر یال $e = xy \in E(G)$ خواهیم داشت $\deg_G(x) = 2$ یا $\deg_G(y) = 2$. همچنین هر رأس از $V_0^{f^G}$ دارای درجه دو در گراف G است.

خانواده $\mathcal{F}$

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از گراف‌های F باشد به‌طوری‌که براساس یکی از روش‌های زیر به‌دست آمده‌اند.

(۱) از گراف F با افزودن تعدادی یال uv به دست آمده است به طوری که $f^{G_1}(u) = 0$ یا $f^{G_1}(v) = 0$ ، و عدد احاطه‌گری گراف حاصل برابر $\gamma(G_1)$ باشد.

(۲) به ازای عدد صحیح $k \geq 1$ ، گراف F از اجتماع مجزای $G_1 + \dots + G_k$ از گراف‌های $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}$ و با افزودن تعدادی یال uv به دست آمده است به طوری که $(f^{G_1} + \dots + f^{G_k})(u) = 0$ یا $(f^{G_1} + \dots + f^{G_k})(v) = 0$. همچنین گراف به دست آمده همبند و عدد احاطه‌گری آن برابر $\gamma(G_1 + \dots + G_k)$ باشد. (دقت شود که رأس u می‌تواند در بیش از یک یال اضافه شده uv ، استفاده شود).

با توجه به ساختار گراف‌های متعلق به خانواده $\mathcal{F}$ ، مشاهده زیر بدیهی است.

مشاهده ۳.۲.۳. هر گراف $F \in \mathcal{F}$ دارای حداقل یک یال $e = xy$ است به طوری که $\deg_F(x) \geq 3$ و $\deg_F(y) \geq 3$.

۳.۳ نتایج اصلی

در این بخش به مسائل ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۳. برای گراف غیر بدیهی و همبند G ، $\gamma(G) = \gamma_I(G)$ اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$.

برهان. با توجه به لم ۱.۲.۳، اگر $G \in \mathcal{G}$ آنگاه $\gamma(G) = \gamma_I(G)$. بنابراین، فرض کنید $G \in \mathcal{F}$ و G از گراف $G' \in \mathcal{G}$ با اضافه کردن تعدادی یال uv به دست آمده است که در آن $f^{G'}(u) = 0$ یا $f^{G'}(v) = 0$ و $\gamma(G) = \gamma(G')$. به وضوح $f^{G'}$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G است. پس داریم $\gamma_I(G) \leq \gamma_I(G')$. از طرفی چون $\gamma(G) = \gamma(G')$ ، طبق رابطه $\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_I(G') = \gamma(G')$ ،

نتیجه می‌شود $\gamma_I(G) = \gamma_I(G')$. بنابراین، داریم:

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') = \gamma(G') = \gamma(G).$$

پس حکم برقرار است.

حال فرض کنید به ازای $k \geq 1$ ، G از اجتماع مجزای $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ از گراف‌های $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{G}$ و با اضافه کردن تعدادی یال uv به دست آمده است به طوری که $(f^{G_1} + f^{G_2} + \dots + f^{G_k})(u) = 0$ ،

یا

$$(f^{G_1} + f^{G_2} + \dots + f^{G_k})(v) = 0،$$

و همچنین

$$\gamma(G) = \gamma(G_1 + G_2 + \dots + G_k).$$

در این صورت تابع $f^{G_1} + f^{G_2} + \dots + f^{G_k}$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G است. در نتیجه $\gamma_I(G) \leq \gamma_I(G_1 + G_2 + \dots + G_k)$. پس به آسانی می‌توان مشاهده کرد که $\gamma_I(G) = \gamma(G)$. بنابراین حکم برقرار است.

به منظور اثبات عکس قضیه، با استقرا روی مرتبه گراف غیربدیهی G که $\gamma_I(G) = \gamma(G)$ نشان می‌دهیم $G \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. طبق قسمت (ii) از گزاره ۱.۲.۳، داریم $n \geq 3$. چون $\gamma_I(C_3) \neq \gamma(C_3)$ ، بنابراین $n \geq 4$. به‌عنوان مرحله پایه استقرا، فرض کنید $n = 4$. به‌وضوح $\gamma(G) > 1$. چون $\gamma(G) \geq 2$ ، نتیجه می‌شود $G = C_4 \in \mathcal{G}$. حال فرض کنید برای هر گراف G' از مرتبه $n' < n$ که $\gamma(G') = \gamma_I(G')$ داریم $G \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$. فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq 5$ باشد به‌طوری‌که $\gamma(G) = \gamma_I(G)$. فرض کنید تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_I(G)$ -تابع باشد. حال اثبات را براساس اندازه درجه رئوس G در V_0 ادامه می‌دهیم.

حالت ۱: فرض کنید هر رأس $x \in V_0$ از درجه ۲ است.

فرض کنید رئوس $u, v \in V_1$ موجود باشند به‌طوری‌که $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0| \geq 3$. همچنین فرض کنید $\{x, y, z\} \subseteq N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0$ و $G' = G - x$. نشان می‌دهیم که $\gamma(G') = \gamma(G)$ و $\gamma_I(G') = \gamma_I(G)$. به‌وضوح V_1 یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G' است. بنابراین، $\gamma(G') \leq \gamma(G)$. فرض کنید S' یک $\gamma(G')$ -مجموعه باشد. اگر $\{u, v\} \cap S' \neq \emptyset$ ، آنگاه S' یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. در نتیجه داریم $\gamma(G) \leq \gamma(G')$. بنابراین، فرض کنید $\{u, v\} \cap S' = \emptyset$. در این صورت $\{x, y\} \subseteq S'$. پس نتیجه می‌گیریم $S = (S' \setminus \{x, y\}) \cup \{u, v\}$. یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G')$. در نتیجه $\gamma(G) = \gamma(G')$. در ادامه نشان می‌دهیم که $\gamma_I(G) = \gamma_I(G')$. به‌وضوح $f|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G' است. پس داریم $\gamma_I(G') \leq \gamma_I(G)$. در این صورت از رابطه

$$\gamma_I(G') \leq \gamma_I(G) = \gamma(G) = \gamma(G') \leq \gamma_I(G')$$

نتیجه می‌شود $\gamma_I(G') = \gamma(G')$. حال طبق فرض استقرا داریم $G' \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$. با توجه به مشاهده ۳.۲.۳، نتیجه می‌گیریم $G' \in \mathcal{G}$. بنابراین، G از $\mathcal{G}$ با عملگر O_1 به‌دست آمده است. در نتیجه $G \in \mathcal{G}$.

حال فرض کنید برای هر دو رأس $u, v \in V_1$ ، $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0| \leq 2$. همچنین فرض کنید برای دو رأس $u, v \in V_1$ داریم $N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0 \neq \emptyset$. دقت شود که با توجه به همبندی گراف G چنین رأس‌هایی موجود هستند. در این صورت طبق قسمت (iii) از مشاهده ۱.۲.۳، داریم $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0| = 2$. فرض کنید $N_G(u) \cap N_G(v) \cap V_0 = \{x, y\}$. چون $n \geq 5$ ، بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد $\deg_G(u) \geq 3$. فرض کنید $\deg_G(v) = 2$. قرار دهید $G' = G - N_G[v]$. نشان می‌دهیم که $\gamma(G') = \gamma_I(G')$. به‌وضوح $V_1 \setminus \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G' است. در نتیجه $\gamma(G') \leq \gamma(G) - 1$. از طرف دیگر، اگر S' یک $\gamma(G')$ -مجموعه باشد، آنگاه $S = S' \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. پس $\gamma(G) \leq \gamma(G') + 1$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\gamma(G) = \gamma(G') + 1$.

در ادامه نشان می‌دهیم $\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 1$. چون $f|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G' است، پس $\gamma_I(G') \leq \gamma_I(G) - 1$. در نتیجه داریم:

$$\gamma_I(G') \leq \gamma_I(G) - 1 = \gamma(G) - 1 = \gamma(G') \leq \gamma_I(G').$$

بنابراین، $\gamma_I(G') = \gamma(G')$. طبق فرض استقرا نتیجه می‌شود که $G' \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$. همچنین با توجه به مشاهده ۳.۲.۳، نتیجه می‌گیریم $G' \in \mathcal{G}$. بنابراین، G' از G با عملگر O_2 به دست آمده است و در نتیجه $G \in \mathcal{G}$. حال فرض کنید $\deg_G(v) \geq 3$. قرار دهید $G' = G - \{x, y\}$. نشان می‌دهیم که $\gamma(G') = \gamma_I(G')$. به وضوح V_1 یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G' است. پس داریم $\gamma(G') \leq \gamma(G)$. فرض کنید S' یک $\gamma(G')$ -مجموعه باشد. اگر $\{u, v\} \cap S' \neq \emptyset$ ، آنگاه S' یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. در نتیجه $\gamma(G) \leq \gamma(G')$. بنابراین، فرض می‌کنیم $\{u, v\} \cap S' = \emptyset$. رئوس $\{x, y\} \cap N_G(u) \setminus \{x, y\}$ و $w \in N_G(v) \setminus \{x, y\}$ وجود دارند به طوری که $\{z, w\} \subseteq S'$. به وضوح $S = S' \setminus \{z, w\} \cup \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. در نتیجه $\gamma(G) \leq \gamma(G')$. بنابراین، $\gamma(G) = \gamma(G')$.

حال نشان می‌دهیم که $\gamma_I(G) = \gamma_I(G')$. به وضوح $f|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G' است. پس داریم $\gamma_I(G') \leq \gamma_I(G)$. از رابطه

$$\gamma_I(G') \leq \gamma_I(G) = \gamma(G) = \gamma(G') \leq \gamma_I(G')$$

نتیجه می‌گیریم که $\gamma_I(G') = \gamma(G')$. بنابراین، طبق فرض استقرا داریم $G' \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$. همچنین از مشاهده ۳.۲.۳ نتیجه می‌شود که $G' \in \mathcal{G}$. با توجه به قسمت (iii) از گزاره ۱.۲.۳ خواهیم داشت $\deg_G(u) \geq 4$ و $\deg_G(v) \geq 4$. بنابراین، داریم $\deg_{G'}(u) \geq 2$ و $\deg_{G'}(v) \geq 2$. اگر گراف G' همبند باشد، آنگاه G از G' با عملگر O_3 به دست آمده است. همچنین اگر G' ناهمبند باشد، آنگاه G از G' با عملگر O_4 به دست آمده است. در نتیجه $G \in \mathcal{G}$.

حالت ۲: فرض کنید رأس $v \in V_0$ موجود است به طوری که $\deg_G(v) \geq 3$.

فرض کنید G_1 از G با حذف یال‌های $G[V_0]$ به دست آمده است. چون V_1 یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_1 است، داریم $\gamma(G_1) \leq \gamma(G)$. از طرفی چون حذف یال عدد احاطه‌گری را کاهش نمی‌دهد، داریم $\gamma(G) \leq \gamma(G_1)$. پس نتیجه می‌گیریم $\gamma(G_1) = \gamma(G)$. به وضوح f یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G_1 است. در نتیجه $\gamma_I(G_1) = \gamma_I(G)$. از رابطه

$$\gamma_I(G) = \gamma(G) = \gamma(G_1) \leq \gamma_I(G_1) \leq \gamma_I(G)$$

نتیجه می‌گیریم $\gamma_I(G_1) = \gamma(G_1)$. فرض کنید G_2 زیرگراف فراگیر بحرانی از G_1 باشد. به وضوح $\gamma(G_2) = \gamma(G_1)$ و f یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G_2 است. در نتیجه داریم $\gamma_I(G_2) \leq \gamma_I(G_1)$. از رابطه

$$\gamma_I(G_1) = \gamma(G_1) = \gamma(G_2) \leq \gamma_I(G_2) \leq \gamma_I(G_1)$$

نتیجه می‌گیریم $\gamma_I(G_2) = \gamma(G_2)$. ثابت می‌کنیم که برای هر $x \in V_0$ ، $\deg_{G_2}(x) = 2$. فرض کنید رأس $x \in V_0$ موجود باشد به طوری که $\deg_{G_2}(x) \geq 3$. فرض کنید $a, b, c \in N_{G_2}(x)$ و بنابراین $a, b, c \in V_1$. با توجه به قسمت (iii) از گزاره ۱.۲.۳ خواهیم داشت

$|N_{G_2}(a) \cap N_{G_2}(b)| \geq 2$ ، $|N_{G_2}(a) \cap N_{G_2}(c)| \geq 2$ و $|N_{G_2}(b) \cap N_{G_2}(c)| \geq 2$. چون V_1 یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G_2 - xb$ است، پس $\gamma(G_2 - xb) \leq \gamma(G_2) = \gamma(G_1)$. از طرف دیگر، G_2 یک زیرگراف فراگیر بحرانی از G_1 است و این یک تناقض است. بنابراین، برای هر رأس $x \in V_0$ ، خواهیم داشت $\deg_{G_2}(x) = 2$. حال با توجه به حالت ۱ داریم $G_2 \in \mathcal{G}$ و در نتیجه $G \in \mathcal{F}$. بنابراین، اثبات کامل می‌شود. $\square$

اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ ، آنگاه بنا بر مشاهده ۲.۲.۲ داریم:

$$\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq \gamma_2(G) = \gamma(G).$$

پس نتیجه می‌شود $\gamma(G) = \gamma_I(G)$. طبق این نتیجه‌گیری و قسمت (i) از گزاره ۱.۲.۳ مشاهده زیر نتیجه می‌شود.

مشاهده ۱.۳.۳. برای هر گراف غیربدیهی G داریم $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ اگر و تنها اگر

$$\gamma(G) = \gamma_I(G).$$

طبق مشاهدات ۱.۳.۳ و ۱.۳.۳، قضیه زیر نیز نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۳.۳. برای هر گراف غیربدیهی G داریم $\gamma(G) = \gamma_2(G)$ اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G} \cup \mathcal{F}$.

فصل ۴

ارتباط عدد احاطه‌گری ایتالیایی با عدد احاطه‌گری رومی دوگانه

۱.۴ مقدمه

بیلر و همکاران در [۳] نوع جدیدی از احاطه‌گری رومی به نام احاطه‌گری رومی دوگانه را معرفی کردند. سپس ارتباط بین این نوع احاطه‌گری و احاطه‌گری رومی را بررسی کردند و کران‌های بالا و پایینی برای عدد احاطه‌گری رومی دوگانه بر حسب عدد احاطه‌گری ارائه نمودند. همچنین شرط لازم و کافی برای گراف‌هایی که در تساوی کران پایین ارائه شده صدق می‌کنند، بیان کردند. سپس به بررسی ارتباط عدد احاطه‌گری رومی دوگانه و عدد احاطه‌گری در درخت‌ها پرداختند. همچنین کران بالایی برای عدد احاطه‌گری رومی دوگانه بر حسب مرتبه گراف ارائه داده و تمام درخت‌هایی را که در تساوی کران ارائه شده صدق می‌کنند، دسته‌بندی کردند. در این فصل از رساله قصد داریم ارتباط عدد احاطه‌گری ایتالیایی و عدد احاطه‌گری رومی دوگانه را بررسی کنیم. برای این منظور در بخش ۲.۴، کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی بر حسب عدد احاطه‌گری رومی دوگانه ارائه می‌دهیم. سپس در بخش ۳.۴ یک خانواده نامتناهی از درخت‌ها که در تساوی کران پایین ارائه شده در بخش ۲.۴ صدق می‌کنند معرفی می‌کنیم. در بخش ۴.۴ با معرفی دو عملگر، به معرفی خانواده $\mathcal{F}_1$ پرداخته و سپس تمام گراف‌هایی را که در کران بالای ارائه شده صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. در

پایان و در بخش ۵.۴ به اثبات نتایج ارائه شده در این فصل پرداخته و همه‌ی درختانی را که در تساوی کران بالای ارائه شده صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. جهت سهولت مطالعه، تعاریف برخی پارامترهای مورد نیاز این فصل را یادآوری می‌کنیم:

یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی یا به اختصار یک IDF روی گراف $G = (V, E)$ عبارت است از تابعی مانند $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با این شرط که برای هر رأس $v \in V$ که $f(v) = 0$ داشته باشیم $\sum_{u \in N_G(v)} f(u) \geq 2$. وزن تابع احاطه‌گر ایتالیایی f برابر با مقدار $w(f) = \sum_{u \in V} f(u)$ است. عدد احاطه‌گری ایتالیایی گراف G عبارت است از مینیمم وزن در میان توابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G و آن را با نماد $\gamma_I(G)$ نشان می‌دهیم.

تابع $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ ، تابع تابع احاطه رومی دوگانه، روی گراف G نامیده می‌شود با این ویژگی که اگر، آن گاه رأس v بایستی با حداقل دو رأس در V_2 و یا یک رأس در V_3 همسایه باشد. و اگر $f(v) = 1$ ، آنگاه رأس v باید حداقل یک همسایه در $V_2 \cup V_3$ داشته باشد. اگر $f(v) = 1$ ، آنگاه رأس v باید حداقل یک همسایه در $V_2 \cup V_3$ داشته باشد. وزن یک تابع احاطه رومی دوگانه f ، برابر است با مقدار $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. کمترین مقدار وزن یک DRDF روی G ، عدد احاطه‌گری رومی دوگانه، $\gamma_{dR}(G)$ نامیده می‌شود.

۲.۴ کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی بر حسب عدد احاطه‌گری رومی دوگانه

در این بخش، ابتدا ارتباط عدد احاطه‌گری ایتالیایی و عدد احاطه‌گری رومی دوگانه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۴. برای هر گراف G داریم:

$$\gamma_{dR}(G)/2 \leq \gamma_I(G) \leq 2\gamma_{dR}(G)/3.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف دلخواه و $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک $\gamma_I(G)$ -تابع باشد. در این صورت $g = (V_0^g, \emptyset, V_1^g, V_2^g)$ یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی گراف G است. در نتیجه داریم:

$$\gamma_{dR}(G) \leq 3|V_2^f| + 2|V_1^f| \leq 4|V_2^f| + 2|V_1^f| = 2\gamma_I(G).$$

بنابراین، کران پایین حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنید $g = (V_0^g, \emptyset, V_1^g, V_2^g)$ یک $\gamma_{dR}(G)$ -تابع باشد. بنابراین $h = (V_0^h, V_1^h, V_2^h)$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی برای گراف G است. پس نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_I(G) \leq w(h) = 2|V_1^g| + |V_2^g| = \gamma_{dR}(G) - (|V_0^g| + |V_2^g|).$$

از طرف دیگر، $V_1^g \cup V_2^g$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. پس نتیجه می‌گیریم $\gamma(G) \leq |V_1^g| + |V_2^g|$. در نتیجه $\gamma_I(G) \leq \gamma_{dR}(G) - \gamma(G)$. حال بنا بر گزاره ۲.۳.۲، داریم $\gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$. بنابراین، داریم:

$$\gamma_I(G) \leq \gamma_{dR}(G) - \gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) - \gamma_{dR}(G)/3 = 2\gamma_{dR}(G)/3.$$

□

اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma_{dR}(G)/2 = \gamma_I(G)$ و $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک $\gamma_I(G)$ -تابع باشد، بنا بر اثبات قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $V_2^f = \emptyset$. بنابراین V_1^f یک مجموعه ۲-احاطه‌گر برای گراف G است. پس داریم $\gamma_2(G) \leq |V_1^f| = \gamma_I(G)$. چون همواره $\gamma_I(G) \leq \gamma_2(G)$ نتیجه می‌گیریم $\gamma_I(G) = \gamma_2(G)$. بنابراین، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۴. اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma_{dR}(G)/2 = \gamma_I(G)$ ، آنگاه $\gamma_I(G) = \gamma_2(G)$. همچنین برای هر $\gamma_I(G)$ -تابع $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ ، داریم $V_2^f = \emptyset$.

دقت شود که عکس نتیجه ۱.۲.۴ برقرار نیست. به‌عنوان مثال، $\gamma_I(P_3) = \gamma_2(P_3)$ در حالی که $\gamma_{dR}(P_3)/2 \neq \gamma_I(P_3)$.

در ادامه شرایط لازم و کافی برای گراف‌هایی که در تساوی کران قضیه ۱.۲.۴ صدق می‌کنند را بررسی می‌کنیم.

نتیجه ۲.۲.۴. برای گراف G داریم $\gamma_I(G) = 2\gamma_{dR}(G)/3$ اگر و تنها اگر $\gamma_{dR}(G) = 3\gamma(G)$ و $\gamma_I(G) = 2\gamma(G)$.

برهان. فرض کنید $\gamma_I(G) = 2\gamma_{dR}(G)/3$. طبق اثبات قضیه ۱.۲.۴، داریم $\gamma_{dR}(G) = 3\gamma(G)$ و $\gamma_I(G) = 2\gamma(G)$. اثبات عکس حکم نیز بدیهی است. □

نتیجه ۳.۲.۴. اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma_I(G) = 2\gamma_{dR}(G)/3$ ، آنگاه برای هر $\gamma_{dR}(G)$ -تابع $f = (V_0^f, \emptyset, V_1^f, V_2^f)$ ، داریم $V_2^f = \emptyset$.

برهان. فرض کنید $\gamma_I(G) = 2\gamma_{dR}(G)/3$ و $f = (V_0^f, \emptyset, V_1^f, V_2^f)$ یک $\gamma_{dR}(G)$ -تابع باشد. همچنین فرض کنید $V_2^f \neq \emptyset$. چون $\gamma(G) = |V_1^f| + |V_2^f|$ ، پس داریم:

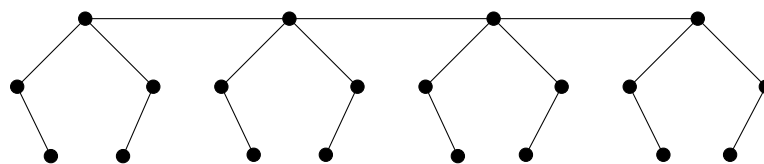
$$\gamma_{dR}(G) = 3\gamma(G) = 3|V_1^f| + 3|V_2^f| > 2|V_1^f| + 3|V_2^f| = \gamma_{dR}(G).$$

که این رابطه یک تناقض است. بنابراین $V_2^f = \emptyset$.

□

۳.۴ درخت‌ها

در این بخش، ابتدا خانواده‌ای از درخت‌ها که در تساوی کران پایین قضیه ۱.۲.۴ صدق می‌کنند ارائه می‌دهیم. سپس همه درخت‌هایی که در تساوی کران بالا صدق می‌کنند را دسته‌بندی می‌کنیم.



شکل ۱.۴: درخت T_4

درخت‌های T_k

به ازای هر عدد صحیح مثبت k ، فرض کنید T_k درختی باشد که شامل k کپی متمایز از P_5 و $k-1$ یال جدید بین رأس‌های مرکزی این مسیرها هستند. شکل ۱.۴ یک درخت T_4 را نشان می‌دهد.

فرض کنید i -امین کپی از P_5 دارای مجموعه رئوس $\{v_1^i, v_2^i, \dots, v_5^i\}$ باشد به‌طوری‌که به ازای $j = 1, \dots, 4$ رأس v_j^i مجاور با رأس v_{j+1}^i باشد. به‌وضوح برای هر تابع احاطه‌گر ایتالیایی f روی درخت T_k ، داریم $f(v_1^i) + \dots + f(v_5^i) \geq 3$. در نتیجه $\gamma_I(T_k) \geq 3k$. از طرف دیگر، تابع g را روی $V(T_k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ ، قرار دهید $g(v_1^i) = f(v_2^i) = 0$ و به ازای هر رأس دیگر T_k نیز قرار دهید $g(x) = 1$. دقت شود تابع g یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T_k است. پس داریم

$$\gamma_I(T_k) \leq W(g) = 3k.$$

بنابراین $\gamma_I(T_k) = 3k$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\gamma_{dR}(T_k) = 6k$. بنابراین $\gamma_{dR}(T_k)/2 = \gamma_I(T_k)$.

لم ۱.۳.۴. فرض کنید برای درخت T' ، $\gamma_{dR}(T')/2 = \gamma_I(T')$ و $w \in V(T')$ رأسی باشد که $\gamma_{dR}(T' - w) > \gamma_{dR}(T')$. اگر درخت T از درخت T' با اضافه کردن مسیر $P_2 = uv$ و اضافه کردن یال جدید uw بدست آید، آنگاه $\gamma_{dR}(T)/2 = \gamma_I(T)$.

برهان. با توجه به قضیه ۱.۲.۴، داریم:

$$2\gamma_I(T' - w) \geq \gamma_{dR}(T' - w) > \gamma_{dR}(T') = 2\gamma_I(T').$$

بنابراین $\gamma_I(T' - w) > \gamma_I(T')$. همچنین طبق نتیجه ۱.۲.۴، برای هر $\gamma_I(T')$ -تابع $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ داریم $f(w) = 1$. در این صورت می‌توان هر $\gamma_I(T')$ -تابع را با تعیین وزن ۱ برای رأس v و وزن ۰ برای رأس u ، به یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T توسعه دهیم. پس نتیجه می‌گیریم $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 1$. حال فرض کنید f_1 یک $\gamma_I(T)$ -تابع باشد. به‌وضوح $f_1(u) + f_1(v) \geq 1$. اگر $f_1(w) \neq 0$ ، آنگاه $f_1|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T' است. بنابراین، داریم $\gamma_I(T') \leq \gamma_I(T) - 1$. پس در ادامه فرض می‌کنیم $f_1(w) = 0$. در این صورت $f_1(u) + f_1(v) \geq 2$. حال تابع f_2 را روی مجموعه رئوس درخت T' تعریف می‌کنیم.

قرار دهید $f_2(w) = \circ$ و به ازای رأس $x \neq w$ ، قرار دهید $f_2(x) = f_1(x)$. در این صورت f_2 یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T' است. بنابراین، $\gamma_I(T') \leq \gamma_I(T) - 1$. در نتیجه $\gamma_I(T) = \gamma_I(T') + 1$.

چون $\gamma_{dR}(T')/2 = \gamma_I(T')$ ، پس برای هر $f = (V_1^f, V_1^f, \emptyset)$ -تابع $f_1 = (V_1^f, \emptyset, V_1^f, \emptyset)$ تابع $f_1(w) = 2$. در این صورت تابع f_1 را می‌توان با تعیین وزن ۲ برای رأس v و وزن $\circ$ برای رأس u به یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت T توسیع داد. در نتیجه داریم $\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 2$.

حال فرض کنید که $g = (V_\circ, \emptyset, V_2, V_3)$ یک $\gamma_{dR}(T)$ -تابع باشد. اگر $g(w) = \circ$ ، آنگاه $g(u) + g(w) \geq 3$ و تابع $g|_{T'-w}$ یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت $T' - w$ است. در نتیجه داریم:

$$\gamma_{dR}(T) - 2 \leq \gamma_{dR}(T') < \gamma_{dR}(T' - w) \leq W(g|_{T'-w}) \leq \gamma_{dR}(T) - 3.$$

و این رابطه یک تناقض است. بنابراین $g(w) \neq \circ$. در این صورت $g(u) + g(w) \geq 2$ و تابع $g|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت T' است. بنابراین $\gamma_{dR}(T') \leq \gamma_{dR}(T) - 2$. در نتیجه $\gamma_{dR}(T) = \gamma_{dR}(T') + 2$ پس داریم:

$$\gamma_{dR}(T)/2 = (\gamma_{dR}(T') + 2)/2 = \gamma_I(T') + 1 = \gamma_I(T).$$

□

۴.۴ معرفی خانواده $\mathcal{F}_1$

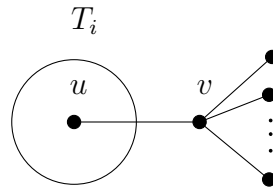
فرض کنید $\mathcal{F}_1$ خانواده‌ای از درختان بدون برچسب T باشد که به ازای $j \geq 1$ از دنباله‌ای از درخت‌های $T_1, \dots, T_j$ ، به‌دست می‌آیند به‌طوری‌که T_1 یکریخت با ستاره $k_{1,r}$ با $r \geq 2$ است و اگر $j \geq 2$ ، آنگاه درخت T_{i+1} به‌طور بازگشتی از درخت T_i با یکی از عملگرهای $\mathcal{O}'_1$ و $\mathcal{O}'_2$ به‌دست می‌آید.

عملگر $\mathcal{O}'_1$: فرض کنید $u \in V(T_i)$ و $\gamma_I(T_i - u) \geq \gamma_I(T_i)$. در این صورت T_{i+1} از درخت T_i با متصل کردن رأس u به رأس مرکزی ستاره $K_{1,s}$ ($s \geq 2$) به‌دست می‌آید. عملگر $\mathcal{O}'_1$ در شکل ۲.۴ نشان داده شده است.

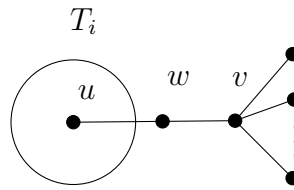
عملگر $\mathcal{O}'_2$: فرض کنید $u \in V(T_i)$. در این صورت درخت T_{i+1} از درخت T_i با متصل کردن رأس u به رأس مرکزی ستاره $K_{1,s}$ برای $s \geq 1$ و سپس زیر تقسیم کردن هر یال جدید به‌دست می‌آید. عملگر $\mathcal{O}'_2$ در شکل ۳.۴ نشان داده شده است.

در دو لم بعدی نشان می‌دهیم که هر درخت T در خانواده $\mathcal{F}_1$ در رابطه $\gamma_I(T) = 2\gamma_{dR}(T)/3$ صدق می‌کند.

لم ۱.۴.۴. اگر $\gamma_I(T_i) = 2\gamma_{dR}(T_i)/3$ و درخت T_{i+1} از درخت T_i با عملگر $\mathcal{O}'_1$ حاصل شود، آنگاه $\gamma_I(T_{i+1}) = 2\gamma_{dR}(T_{i+1})/3$.



شکل ۲.۴: عملگر $\mathcal{O}'_1$.



شکل ۳.۴: عملگر $\mathcal{O}'_2$.

برهان. فرض کنید $u \in V(T_i)$ و $\gamma_I(T_i - u) \geq \gamma_I(T_i)$. طبق

$$\frac{2}{3}\gamma_{dR}(T_i - u) \geq \gamma_I(T_i - u) \geq \gamma_I(T_i) = \frac{2}{3}\gamma_{dR}(T_i),$$

رابطه $\gamma_{dR}(T_i - u) \geq \gamma_{dR}(T_i)$ را نتیجه می‌گیریم. فرض کنید v رأس مرکزی ستاره $K_{1,s}$ وابسته به عملگر $\mathcal{O}'_1$ و f یک $\gamma_{dR}(T_{i+1})$ -تابع باشد. چون v یک رأس پشتیبان قوی از درخت T_{i+1} است پس $f(v) = 3$. اگر $f(u) \neq 0$ ، آنگاه $f|_{T_i}$ یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت T_i است. بنابراین، داریم:

$$\gamma_{dR}(T_i) \leq w(f|_{T_i}) = w(f) - 3 = \gamma_{dR}(T_{i+1}) - 3.$$

در غیر این صورت، $f|_{T_i - u}$ یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه برای جنگل $T_i - u$ است. پس طبق قضیه ۱.۲.۴، نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_{dR}(T_i) = \frac{3}{2}\gamma_I(T_i)/\frac{2}{3} \leq \frac{3}{2}\gamma_I(T_i - u)/\frac{2}{3} \leq \gamma_{dR}(T_i - u) \leq w(f|_{T_i - u}) \leq w(f) - 3 = \gamma_{dR}(T_{i+1}) - 3.$$

از طرف دیگر، هر $\gamma_{dR}(T_i)$ -تابع را می‌توان با تعیین وزن ۳ برای رأس v و وزن ۰ برای هر برگ همسایه با v ، به یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت T_{i+1} توسعه داد. بنابراین $\gamma_{dR}(T_{i+1}) = \gamma_{dR}(T_i) + 3$ پس نتیجه می‌شود $\gamma_{dR}(T_{i+1}) \leq \gamma_{dR}(T_i) + 3$. حال فرض کنید D یک $\gamma(T_i)$ -مجموعه باشد. پس $D \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای درخت T_{i+1} است. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) \leq \gamma(T_i) + 1$. حال طبق نتیجه ۲.۲.۴ و قضیه ۲.۳.۲ برای درخت T_i ، نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_{dR}(T_{i+1}) \leq \frac{3}{2}\gamma(T_{i+1}) \leq \frac{3}{2}\gamma(T_i) + 3 = \gamma_{dR}(T_i) + 3 = \gamma_{dR}(T_{i+1}).$$

بنابراین $\gamma_{dR}(T_{i+1}) = 3\gamma(T_{i+1})$. به طور مشابه می توان مشاهده کرد که $\gamma_I(T_{i+1}) = 2\gamma(T_{i+1})$.
 □ بنابراین با استفاده مجدد از نتیجه ۲.۲.۴، داریم $\gamma_I(T_{i+1}) = 2\gamma_{dR}(T_{i+1})/3$.

لم ۲.۴.۴. اگر $\gamma_I(T_i) = 2\gamma_{dR}(T_i)/3$ و T_{i+1} از درخت T_i با عملگر $\mathcal{O}'_2$ به دست آمده باشد،
 آنگاه $\gamma_I(T_{i+1}) = 2\gamma_{dR}(T_{i+1})/3$.

برهان. فرض کنید $u \in V(T_i)$ و رأس v رأس مرکزی ستاره $K_{1,s}$ ، $s \geq 1$ ، باشد. همچنین فرض کنید w رأس جدیدی است که از زیر تقسیم کردن یال uv به دست آمده است. فرض کنید f یک $\gamma_{dR}(T_{i+1})$ -تابع باشد. اگر $f(v) = 3$ ، آنگاه می توان فرض کرد که $f(w) = 0$. بنابراین $f|_{T_i}$ یک تابع احاطه گر رومی دوگانه روی درخت T_i است. در نتیجه داریم:

$$\gamma_{dR}(T_i) \leq w(f|_{T_i}) = w(f) - 3 = \gamma_{dR}(T_{i+1}) - 3.$$

پس فرض می کنیم $f(v) \neq 3$. بنابراین v یک رأس پشتیبان ضعیف است. فرض کنید v_1 برگ مجاور با رأس v باشد. به وضوح می توان فرض کرد $f(v) \neq 2$. بنابراین $f(v) = 0$ ، و در نتیجه داریم $f(v_1) = f(w) = 2$. پس تابع g تعریف شده روی $V(T_i)$ به صورت $g(u) = \max\{1, f(u)\}$ و $g(x) = f(x)$ برای $x \neq u$ ، یک تابع احاطه گر رومی دوگانه روی درخت T_i است. بنابراین،
 داریم:

$$\gamma_{dR}(T_i) \leq w(g) \leq \gamma_{dR}(T_{i+1}) - 3.$$

از طرف دیگر، هر $\gamma_{dR}(T_i)$ -تابع را می توان با تعیین وزن ۳ به رأس v و وزن ۰ به همسایه های آن، به یک تابع احاطه گر رومی دوگانه روی T_{i+1} توسعه داد. پس داریم $\gamma_{dR}(T_{i+1}) \leq \gamma_{dR}(T_i) + 3$. بنابراین $\gamma_{dR}(T_{i+1}) = \gamma_{dR}(T_i) + 3$. حال فرض کنید D یک $\gamma(T_i)$ -مجموعه باشد. پس $D \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه گر برای T_{i+1} است. بنابراین $\gamma(T_{i+1}) \leq \gamma(T_i) + 1$. طبق نتیجه ۲.۲.۴ و قضیه ۱.۲.۴، داریم:

$$\gamma_{dR}(T_{i+1}) \leq 3\gamma(T_{i+1}) \leq 3\gamma(T_i) + 3 = \gamma_{dR}(T_i) + 3 = \gamma_{dR}(T_{i+1}).$$

در نتیجه $\gamma_{dR}(T_{i+1}) = 3\gamma(T_{i+1})$. به طور مشابه می توان نشان داد که $\gamma_I(T_{i+1}) = 2\gamma(T_{i+1})$.
 □ پس طبق نتیجه ۲.۲.۴، داریم $\gamma_I(T_{i+1}) = 2\gamma_{dR}(T_{i+1})/3$.

۵.۴ نتایج اصلی

اکنون آماده ایم تا ساختار همه درخت هایی را که در تساوی کران بالای قضیه ۱.۲.۴ صدق می کنند، دسته بندی کنیم.

قضیه ۱.۵.۴. برای درخت T از مرتبه $n \geq 3$ ، اگر و تنها اگر $\gamma_I(T) = 2\gamma_{dR}(T)/3$ ، اگر و تنها اگر $T \in \mathcal{F}_1$.

برهان. برای اثبات کفایت شرط قضیه از استقرا روی تعداد عملگرهایی که برای ساخت درخت T به کار رفته است و همچنین لم‌های ۱.۴.۴ و ۲.۴.۴ استفاده می‌کنیم. در ابتدا شرط لازم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $T \in \mathcal{F}_1$ درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد. با استفاده از استقرا روی مرتبه n از درخت T که $\gamma_I(T) = 2\gamma_{dR}(T)/3$ ، نشان می‌دهیم $T \in \mathcal{F}_1$. به‌وضوح $diam(T) \geq 2$. اگر $diam(T) = 2$ ، آنگاه T یک ستاره است و بنابراین $T \in \mathcal{F}$. پس می‌توان فرض کرد $diam(T) \geq 3$. ابتدا فرض کنید $diam(T) = 3$. بنابراین T یک ستاره دوگانه خواهد بود. فرض کنید a و b رئوس مرکزی T باشند. اگر $\deg_T(a) = 2$ ، آنگاه با تعیین وزن ۲ برای رأس b ، وزن ۱ برای برگ مجاور با a و وزن ۰ برای سایر برگ‌های T ، یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T خواهیم داشت. در نتیجه $\gamma_I(T) \leq 3$. همچنین بدیهی است که $\gamma_I(T) \neq 2$. پس داریم $\gamma_I(T) = 3$. به‌طور مشابه، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $\gamma_{dR}(T) \leq 5$. اکنون داریم $\gamma_I(T) \neq 2\gamma_{dR}(T)/3$ ، که این یک تناقض است. پس می‌توان نتیجه گرفت $\deg_T(a) \geq 3$ و به‌طور مشابه $\deg_T(b) \geq 3$. فرض کنید T_1 و T_2 مؤلفه‌های $T - ab$ باشند به‌طوری‌که $a \in V(T_1)$ و $b \in V(T_2)$. بدیهی است که به ازای $i = 1, 2$ یک ستاره از مرتبه حداقل ۳ است. بنابراین به ازای $i = 1, 2$ داریم $\gamma_I(T_i) = 2$ و $\gamma_{dR}(T_i) = 3$. چون $\gamma_I(T_1 - a) \geq \gamma_I(T_1)$ ، پس T از $T_1 \in \mathcal{F}_1$ با عملگر $\mathcal{O}'_1$ به‌دست آمده است. پس می‌توان فرض کرد $diam(T) \geq 4$.

در بین تمام مسیره‌ها در T ، فرض کنید $x_0 x_1 \dots x_d$ یک مسیر قطری در T باشد به‌طوری‌که $\deg_T(x_{d-1})$ بیشترین مقدار ممکن است. درخت T را در x_0 ریشه‌دار می‌کنیم. سپس اثبات را براساس درجه رأس x_{d-1} ادامه می‌دهیم.

حالت ۱: فرض کنید $\deg_T(x_{d-1}) \geq 3$.

فرض کنید S یک $\gamma(T)$ -مجموعه شامل تمامی رئوس پشتیبان T است. پس $x_{d-1} \in S$. فرض کنید $\deg_T(x_{d-2}) \geq 3$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. بنابراین $S \setminus \{x_{d-1}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای درخت T' است. پس نتیجه می‌گیریم $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. از طرف دیگر، هر مجموعه احاطه‌گر از T' با افزودن رأس x_{d-1} به آن، قابل توسعه به یک مجموعه احاطه‌گر برای T است. پس $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. در نتیجه $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. هر تابع احاطه‌گر رومی در T' را می‌توان با تعیین وزن ۳ برای رأس x_{d-1} و وزن ۰ به هر فرزند x_{d-1} ، به یک تابع احاطه‌گر رومی روی درخت T توسعه داد. بنابراین $\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 3$. فرض کنید $\gamma_I(T') \neq 2\gamma_{dR}(T')/3$. طبق نتیجه ۲.۲.۴ داریم $\gamma_{dR}(T') < 3\gamma(T')$ یا $\gamma_I(T') < 2\gamma(T')$. اگر $\gamma_{dR}(T') < 3\gamma(T')$ ، آنگاه

$$\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 3 < 3\gamma(T') + 3 = 3\gamma(T),$$

که یک تناقض است. زیرا بنا بر نتیجه ۲.۲.۴ داریم $\gamma_{dR}(T) = 3\gamma(T)$. بنابراین

$$\gamma_{dR}(T') = 3\gamma(T'). \text{ به‌طور مشابه } \gamma_I(T') = 2\gamma(T'). \text{ طبق نتیجه ۲.۲.۴ داریم}$$

$$\gamma_I(T') = 2\gamma_{dR}(T')/3. \text{ پس طبق فرض استقرا داریم } T' \in \mathcal{F}. \text{ حال نشان می‌دهیم که}$$

هر تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی $T' - x_{d-2}$ با تعیین وزن ۲ برای رأس x_{d-1} و وزن ۰ برای هر فرزند x_{d-1} ، به یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی T قابل توسعه است.

بنابراین $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T' - x_{d-2}) + 2$. پس اگر $\gamma_I(T' - x_{d-2}) < \gamma_I(T')$ ، آنگاه داریم:

$$\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T' - x_{d-2}) + 2 < \gamma_I(T') + 2 = 2\gamma(T') + 2 = 2\gamma(T) = \gamma_I(T),$$

که یک تناقض است. پس $\gamma_I(T' - x_{d-2}) \geq \gamma_I(T')$. در نتیجه T از درخت T' با عملگر $\mathcal{O}_1$ به دست آمده است. پس داریم $T \in \mathcal{F}$.

حال فرض کنید $\deg_T(x_{d-2}) = 2$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. همچنین فرض کنید D یک $\gamma(T)$ -مجموعه شامل همه رئوس پشتیبان T است. بنابراین $x_{d-1} \in D$. به وضوح می توان فرض کرد $x_{d-2} \notin D$. پس $D \setminus \{x_{d-1}\}$ یک مجموعه احاطه گر از T' است. بنابراین $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. از طرف دیگر، هر مجموعه احاطه گر از T' را می توان با افزودن رأس x_{d-1} به آن، به یک مجموعه احاطه گر برای T توسعه داد. این نتیجه می دهد $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. بنابراین $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. همچنین هر تابع احاطه گر رومی دوگانه روی درخت T' را می توان با تعیین وزن ۳ برای رأس x_{d-1} و وزن ۰ برای هر همسایه x_{d-1} به یک تابع احاطه گر رومی دوگانه روی T توسعه داد. بنابراین $\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 3$. اگر $\gamma_{dR}(T') \neq 2\gamma_{dR}(T)/3$ ، آنگاه طبق نتیجه ۲.۲.۴، داریم $\gamma_{dR}(T') < 3\gamma(T')$ یا $\gamma_I(T') < 2\gamma(T')$. اگر $\gamma_{dR}(T') < 3\gamma(T')$ ، آنگاه داریم:

$$\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 3 < 3\gamma(T') + 3 = 3\gamma(T),$$

که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_{dR}(T') = 3\gamma(T')$. به طور مشابه می توان ثابت کرد $\gamma_I(T') = 2\gamma(T')$. همچنین بنا بر نتیجه ۲.۲.۴ داریم $\gamma_I(T') = 2\gamma_{dR}(T')/3$. حال اگر $|V(T')| \geq 3$ ، آنگاه طبق فرض استقرا داریم $T' \in \mathcal{F}$. بنابراین T از درخت T' با عملگر $\mathcal{O}_2$ به دست آمده است. در نتیجه $T \in \mathcal{F}$. بنابراین، فرض می کنیم $|V(T')| = 2$. قرار دهید $T'' = T - T_{x_{d-1}}$. به وضوح T'' یک مسیر از مرتبه ۳ است و مشاهده می شود که $T'' \in \mathcal{F}$. بدیهی است $\gamma_I(T'' - x_2) \geq \gamma_I(T'')$. چون $T_{x_{d-1}}$ یک ستاره از مرتبه حداقل سه است پس نتیجه می گیریم که T از $T'' \in \mathcal{F}_1$ با عملگر $\mathcal{O}_1$ به دست آمده است. در نتیجه $T \in \mathcal{F}$.

حالت ۲: فرض کنید $\deg_T(x_{d-1}) = 2$.

نشان می دهیم $\deg_T(x_{d-2}) = 2$. فرض کنید $\deg_T(x_{d-2}) \geq 3$. بنابراین هر فرزند x_{d-2} یا یک رأس پشتیبان از درجه ۲ و یا یک برگ است. فرض کنید x_{d-2} رأس پشتیبان نباشد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$ و $A = L(T_{x_{d-2}}) \cup \{x_{d-2}\}$. فرض کنید D کوچکترین مجموعه احاطه گر از T شامل تمام رئوس پشتیبان T باشد. اگر $x_{d-2} \notin D$ ، آنگاه $D \setminus S(T_{x_{d-2}})$ یک مجموعه احاطه گر برای T' است. پس داریم:

$$\gamma(T') \leq \gamma(T) - |S(T_{x_{d-2}})| = \gamma(T) - |A| + 1.$$

در ادامه فرض می کنیم $x_{d-2} \in D$. بنابراین $(D \cup \{x_{d-3}\}) \setminus (S(T_{x_{d-2}}) \cup \{x_{d-2}\})$ یک مجموعه احاطه گر از T' است. داریم $\gamma(T') \leq \gamma(T) - |S(T_{x_{d-2}})| = \gamma(T) - |A| + 1$. از طرف دیگر، هر مجموعه احاطه گر از T' را می توان با اضافه کردن $S(T_{x_{d-2}})$ به آن، به یک مجموعه احاطه گر برای درخت T توسعه داد. بنابراین داریم $\gamma(T) \leq \gamma(T') + |A| - 1$. در نتیجه $\gamma(T) = \gamma(T') + |A| - 1$.

اگر D' یک $\gamma(T')$ -مجموعه باشد، آنگاه تابع $f = (V(T) \setminus (A \cup D'), A, D')$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T است. بنابراین، داریم:

$$\gamma_I(T) \leq 2|D'| + |A| = 2|D| - 2|A| + 2 + |A| = 2|D| - |A| + 2 < 2|D| = 2\gamma(T),$$

که یک تناقض است. زیرا طبق نتیجه ۲.۲.۴، داریم $|A| \geq 3$. حال فرض کنید x_{d-2} یک رأس پشتیبان باشد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. همچنین فرض کنید D یک $\gamma(T)$ -مجموعه شامل همه رئوس پشتیبان T است. در این صورت $x_{d-1}, x_{d-2} \in D$. بنابراین $D \setminus \{x_{d-1}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای T' است. در نتیجه $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. از طرفی دیگر، هر مجموعه احاطه‌گر از T' با اضافه کردن رأس x_{d-1} به آن، به یک مجموعه احاطه‌گر برای T قابل توسیع است. پس داریم $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. در نتیجه $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. حال فرض کنید D' یک $\gamma(T')$ -مجموعه شامل رأس x_{d-2} باشد. بنابراین تابع $f = (V(T) \setminus (D' \cup \{x_d\}), \{x_d\}, D')$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی درخت T است. پس داریم:

$$\gamma_I(T) \leq w(f) = 2|D'| + 1 = 2\gamma(T') + 1 < 2\gamma(T),$$

که طبق نتیجه ۲.۲.۴، یک تناقض است. در نتیجه داریم $\deg_T(x_{d-2}) = 2$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای T شامل تمامی رئوس پشتیبان T است. بنابراین $x_{d-1} \in D$ و می‌توان فرض کرد که $x_{d-2} \notin D$. در این صورت $D \setminus \{x_{d-1}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای درخت T' است. پس داریم $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. از طرفی دیگر، هر مجموعه احاطه‌گر از T' را می‌توان با افزودن رأس x_{d-1} به آن، به یک مجموعه احاطه‌گر برای T توسیع داد. بنابراین داریم $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. در نتیجه، $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. همچنین هر تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت T' را می‌توان با تعیین وزن ۳ برای رأس x_{d-1} و وزن ۰ برای همسایه‌های x_{d-1} به یک تابع احاطه‌گر رومی دوگانه روی درخت T توسیع داد. بنابراین $\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 3$. اگر $\gamma_I(T') \neq 2\gamma_{dR}(T')/3$ ، آنگاه بنا بر نتیجه ۲.۲.۴، داریم $\gamma_{dR}(T') < 3\gamma(T')$ یا $\gamma_I(T') < 2\gamma(T')$. اگر $\gamma_{dR}(T') < 3\gamma(T')$ ، آنگاه داریم:

$$\gamma_{dR}(T) \leq \gamma_{dR}(T') + 3 < 3\gamma(T') + 3 = 3\gamma(T),$$

که طبق نتیجه ۲.۲.۴، یک تناقض است. پس داریم $\gamma_{dR}(T') = 3\gamma(T')$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $\gamma_I(T') = 2\gamma(T')$ و بنا بر نتیجه ۲.۲.۴، داریم $\gamma_I(T') = 2\gamma_{dR}(T')/3$. اگر $|V(T')| = 2$ ، آنگاه $T = P_5$ و به‌وضوح داریم $\gamma_I(T) \neq 2\gamma_{dR}(T)/3$. پس نتیجه می‌گیریم $|V(T')| \geq 3$. پس طبق فرض استقرا داریم $T' \in \mathcal{F}$. و در نتیجه T از درخت T' و با عملگر $\mathcal{O}_2$ به‌دست آمده است. پس نتیجه می‌گیریم $T \in \mathcal{F}$ و اثبات قضیه کامل می‌شود. $\square$

ملاحظه ۱.۵.۴. بنا به قضیه [۱۰]، برای هر درخت T داریم:

$$\gamma_I(T) = \gamma_{r2}(T)$$

بنابراین تمام قضایای ثابت شده روی درخت‌ها در این بخش، برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی نیز برقرار است.

فصل ۵

روابط نردهاس-گدم برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی

۱.۵ مقدمه

تا قبل از سال ۱۹۵۶، در همه مطالعات در رابطه با عدد رنگی یک گراف، تنها گراف G در نظر گرفته می‌شد. نردهاس و گدم در [۳۱] عدد رنگی گراف G و مکمل آن، $\bar{G}$ ، را بررسی کردند. آن‌ها کران‌های بالا و پایینی برای حاصل جمع و حاصل ضرب $\chi(G)$ و $\chi(\bar{G})$ بر اساس مرتبه گراف ارائه کردند. پس از آن، هر کران برای حاصل جمع و یا حاصل ضرب یک پارامتر برای گراف G و گراف $\bar{G}$ ، نامساوی و یا رابطه نردهاس-گدم نامیده شد. در پژوهش‌های انجام شده، روابط نردهاس-گدم برای بسیاری از پارامترها از جمله پارامترهای احاطه‌گری ارائه شده است. به عنوان مثال به [۲] مراجعه شود. در این فصل و در بخش ۲.۵ به بررسی این روابط برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی پرداخته و کران‌های بالا و پایین دقیقی برای $\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G})$ و همچنین $\gamma_I(G)\gamma_I(\bar{G})$ ارائه می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که تابع $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، روی گراف $G = (V, E)$ ، یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی (IDF) نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس x که $f(x) = 0$ داشته باشیم $\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq 2$.

۲.۵ روابط نردهاس-گدم برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی

در این بخش قصد داریم روابط نردهاس-گدم را برای عدد احاطه‌گری ایتالیایی بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا به اثبات لم زیر می‌پردازیم.

لم ۱.۲.۵. اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه $\gamma_I(G) \leq n - \Delta(G) + 1$.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد و v یک رأس با ماکسیمم درجه باشد. در این صورت تابع $h = (N_G(v), V(G) \setminus N_G[v], \{v\})$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی روی گراف G با وزن $n - \Delta(G) + 1$ است. بنابراین $\gamma_I(G) \leq n - \Delta(G) + 1$. $\square$

لم ۲.۲.۵. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و v رأسی با ماکزیمم درجه باشد. همچنین فرض کنید $V(G) \setminus N_G[v] = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. اگر $\gamma_I(G) = n - \Delta(G) + 1$ ، آنگاه گزاره‌های زیر برقرار است:

$$N_G(v) \setminus N_G(V(G) \setminus N_G[v]) \neq \emptyset \quad (i)$$

$$|N_G[v_i] \cap (V(G) \setminus N_G[v])| \leq 1, 1 \leq i \leq k \quad (ii)$$

$$|N_G(u) \cap (V(G) \setminus N_G[v])| \leq 2 \text{ آنگاه } u \in N_G(v) \quad (iii)$$

برهان. ابتدا قسمت (i) را ثابت می‌کنیم. اگر $N_G(v) \subseteq N_G(V(G) \setminus N_G[v])$ ، آنگاه تابع

$$g = (N_G(v), V(G) \setminus N_G(v), \emptyset)$$

پس $n - \Delta(G) + 1$ است که این یک تناقض است. پس $N_G(v) \setminus N_G(V(G) \setminus N_G[v]) \neq \emptyset$.

برای اثبات قسمت (ii)، فرض کنید $\{v_k, v_j\} \subseteq N_G[v_i]$. در این صورت تابع

$$g = ((N_G(v) \cup \{v_k, v_j\}), V(G) \setminus (N_G[v] \cup \{v_i, v_j, v_k\}), \{v, v_i\})$$

روی گراف G با وزن کمتر از $n - \Delta(G) + 1$ است که این یک تناقض است. بنابراین به ازای

$$1 \leq i \leq k, |N_G[v_i] \cap V(G) \setminus N_G[v]| \leq 1 \text{ داریم}$$

برای اثبات قسمت (iii) نیز از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید رأس $u \in V(G)$

موجود باشد به‌طوری‌که $|N_G(u) \cap V(G) \setminus N_G[v]| \geq 3$. همچنین فرض کنید

$$\{v_i, v_j, v_k\} \subseteq N_G(u) \cap V(G) \setminus N_G[v]$$

$$g = ((N_G(v) - \{u\}) \cup \{v_i, v_j, v_k\}), V(G) \setminus (N_G[v] \cup \{v_i, v_j, v_k\}), \{v, u\})$$

ایتالیایی روی گراف G با وزن کمتر از $n - \Delta(G) + 1$ است و این نیز تناقض است. پس برای

$$u \in N_G(v), |N_G(u) \cap (V(G) \setminus N_G[v])| \leq 2 \text{ داریم}$$

$\square$

حال به اثبات اولین نتیجه از روابط نردهاس-گدم می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۵. اگر G گرافی از مرتبه $n \geq 2$ باشد، آنگاه

$$4 \leq \gamma_I(G) + \gamma_I(\overline{G}) \leq n + 2.$$

تساوی در کران پایین برقرار است اگر و تنها اگر G یا $\overline{G}$ با K_2 یکرخت باشند.

برهان. چون G دارای $n \geq 2$ رأس است پس $\gamma_I(G) \geq 2$. از طرفی $\gamma_I(G) = 2$ اگر و تنها اگر G با گراف K_2 یکرخت باشد یا دارای رأسی از درجه $n-1$ باشد. اگر $G = K_2$ آنگاه $\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) = 4$. پس فرض می‌کنیم که $n \geq 3$. بنابراین چون یک گراف و گراف مکملش نمی‌توانند هر دو دارای رأسی از درجه $n-1$ باشند، پس $\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) \geq 5$. اکنون به اثبات درستی کران بالا می‌پردازیم. طبق لم ۱.۲.۵ داریم:

$$\begin{aligned}\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) &\leq (n - \Delta(G) + 1) + (n - \Delta(\bar{G}) + 1) \\ &= n - \Delta(G) + \delta(G) + 3 \\ &\leq n + 3.\end{aligned}$$

اگر $\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) = n + 3$ ، آنگاه از روابط بالا نتیجه می‌شود $\delta(G) = \Delta(G)$. در نتیجه G یک گراف k -منتظم به ازای مقدار صحیح k است. چون استدلال برای G و $\bar{G}$ مشابه است، می‌توان فرض کرد $k \leq (n-1)/2$. چون تساوی برقرار است پس $\gamma_I(G) = n - k + 1$ و $\gamma_I(\bar{G}) = k + 2$. فرض کنید $v \in V(G)$. اگر بعضی رؤس u خارج از $N_G[v]$ دارای حداقل دو همسایه خارج از $N_G[v]$ باشند، آنگاه تابع $(N_G(u) \cup N_G(v), V(G) \setminus N_G[u] \setminus N_G[v], \{u, v\})$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی با وزن حداکثر $n - k$ است که این یک تناقض است. بنابراین، هر رأس خارج از $N_G[v]$ دارای حداقل $k - 1$ همسایه در $N_G(v)$ است.

اگر $w \in N_G(v)$ و w دارای حداقل سه همسایه خارج از $N_G[v]$ باشد، آنگاه تابع احاطه‌گری ایتالیایی $((N_G(w) \cup N_G(v)) \setminus \{w\}, V(G) \setminus N_G[w] \setminus N_G[v], \{w, v\})$ دارای وزن حداکثر $n - k$ است که این یک تناقض است. بنابراین هر رأس در $N_G(v)$ دارای حداکثر دو همسایه خارج از $N_G[v]$ است. با شمارش تعداد یال‌هایی که $N_G(v)$ و $V(G) \setminus N_G[v]$ را از هر دو طرف متصل می‌کنند، داریم $2k \leq (k-1)(n-k-1)$. و در نتیجه به ازای $k > 1$ ، داریم $n \leq k + 3 + \frac{2}{k-1}$. حال چون $n \geq 2k + 1$ ، داریم $k^2 \leq 3k$. پس داریم $k \leq 3$. اگر $k = 3$ ، آنگاه $n = 7$ و این یک تناقض است. زیرا هیچ گراف ۳-منتظم از مرتبه ۷ وجود ندارد. اگر $k = 0$ ، آنگاه تنها گراف G گراف K_n است و مشاهده می‌شود که تساوی برقرار نیست. این یک تناقض است. بنابراین $k = 2$. در نتیجه $7 = k + 3 + \frac{2}{k-1} = 2k + 1 \leq n \leq k + 3 + \frac{2}{k-1} = 5$. اگر $n = 5$ ، آنگاه داریم $\gamma_I(G) = 3 < n - k + 1$ ، آنگاه $n = 6$. اگر $n = 6$ ، آنگاه $\gamma_I(G) = 3 < n - k + 1$. همچنین اگر $n = 7$ ، آنگاه داریم $\gamma_I(G) = 4 < n - k + 1$. و هر سه این موارد تناقض است. پس نتیجه می‌شود $\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) \leq n + 2$. $\square$

حال کلاس جدیدی از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم. برای هر n ، گراف $(n/2)K_2$ ، گرافی است که شامل $(n/2)$ کپی از گراف کامل K_2 می‌باشد.

لم ۳.۲.۵. اگر G گرافی از مرتبه n و $\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) = n + 2$ ، آنگاه $\Delta(G) \leq \delta(G) + 1$. همچنین اگر $\Delta(G) = \delta(G)$ ، آنگاه G یا K_n یا $(n/2)K_2$ یا $\bar{K}_n$ یا $(n/2)\bar{K}_2$ یکرخت است.

برهان. اگر $\Delta(G) > \delta(G) + 1$ ، آنگاه چون رابطه $\Delta(\bar{G}) = n - \Delta(G) - 1$ همیشه برقرار است، پس $\Delta(G) + \Delta(\bar{G}) > n$ بنابراین

$$\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) \leq (n - \Delta(G) + 1) + (n - \Delta(\bar{G}) + 1) < n + 2,$$

که این یک تناقض است. بنابراین $\Delta(G) \leq \delta(G) + 1$.

حال فرض کنید که $\Delta(G) = \delta(G)$. اگر $\gamma_I(G) \leq n - \Delta(G)$ و $\gamma_I(\bar{G}) \leq n - \Delta(\bar{G})$ آنگاه

$$\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) \leq n - \Delta(G) + n - \Delta(\bar{G}) \leq n + 1,$$

که این یک تناقض است. بنابراین، بدون کاستن از کلیت و با استفاده از قضیه ۱.۲.۵، می‌توان فرض کرد $\gamma_I(G) = n - \Delta(G) + 1$. در نتیجه $\gamma_I(\bar{G}) = \Delta(G) + 1$. فرض کنید $v \in V(G)$ رأسی با ماکزیمم درجه باشد. اگر $V(G) \setminus N_G[v] = \emptyset$ ، آنگاه $\deg_G(v) = \Delta(G) = \delta(G) = n - 1$. بنابراین $G = K_n$. پس فرض می‌کنیم که $V(G) \setminus N_G[v] \neq \emptyset$.

اگر $\Delta(G) = 0$ ، آنگاه داریم $G = \bar{K}_n$. پس فرض می‌کنیم $\Delta(G) \geq 1$. از طرفی، چون $\Delta(G) = \delta(G)$ پس گراف G فاقد رأس منفرد است. فرض کنید $\Delta(G) = 1$. بنابراین داریم $\gamma_I(G) = n - \Delta(G) + 1 = n$ و $\gamma_I(\bar{G}) = \Delta(G) + 1 = 2$. بنابراین نتیجه می‌شود $G = (n/2)K_2$. حال فرض کنید $\Delta(G) = 2$. در نتیجه $\gamma_I(G) = n - 1$ و $\gamma_I(\bar{G}) = 3$. چون $\delta(G) = 2$ ، پس G یک دور است. حال طبق قضیه ۲.۵.۲، داریم:

$$n - 1 = \lceil n/2 \rceil.$$

پس نتیجه می‌شود $G = C_3$. پس فرض کنید $\Delta(G) \geq 3$.

اگر $\Delta(G) \leq n - 5$ ، آنگاه از لم ۲.۲.۵ نتیجه می‌شود که

$$|E(G[V(G) \setminus N_G[v]])| \leq \frac{n - \Delta(G) - 1}{2}.$$

همچنین داریم:

$$(n - \Delta(G) - 1)(\delta(G) - 1) \leq 2\Delta(G).$$

بنابراین $4(\Delta(G) - 1) \leq 2\Delta(G)$. زیرا $\delta(G) = \Delta(G)$ و $4 \leq n - \Delta(G) - 1$. بنابراین $\Delta(G) \leq 2$ که یک تناقض است. پس داریم $\Delta(G) \geq n - 4$. اگر $\Delta(G) = n - 4$ ، آنگاه بنا بر لم ۲.۲.۵، داریم

$$(n - \Delta(G) - 1)(\delta(G) - 1) \leq 2\Delta(G).$$

در نتیجه $\Delta(G) = 3$. بنابراین $n = 7$ که تناقض است. زیرا هیچ گراف ۳-منتظمی از مرتبه ۷ وجود ندارد. پس نتیجه می‌گیریم $\Delta(G) \in \{n - 3, n - 2, n - 1\}$.

اگر $\Delta(G) = n - 3$ ، آنگاه $|V(G) \setminus N_G[v]| = 2$ ، $\gamma_I(G) = 4$ و $\gamma_I(\bar{G}) = n - 2$ و

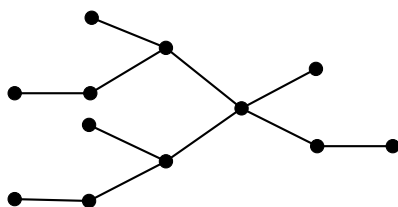
$\Delta(\bar{G}) = \delta(\bar{G}) = 2$. با استفاده از قضیه ۹.۶.۲ برای گراف $\bar{G}$ ، نتیجه $n \leq 6$ به دست می‌آید و بنابراین $\Delta(G) \leq 3$. قراردید $V(G) \setminus N_G[v] = \{x, y\}$ و $N_G(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\Delta(G)}\}$. اگر $\Delta(G) = 2$ ، آنگاه به وضوح $xy \in E(G)$ ، زیرا $\delta(G) = 2$. بنابراین $G = C_5$ که تناقض است. چون داریم:

$$\gamma_I(G) + \gamma_I(\bar{G}) = 6 < 7 = n + 2.$$

پس می‌توان فرض کرد $\Delta(G) = 3$. در این صورت $n = 6$ و $\gamma_I(\bar{G}) = 4$. اگر $xy \notin E(G)$ ، آنگاه $N_G(x) = N_G(y) = N_G(v)$ ، چون $\Delta(G) = \delta(G) = 3$. تابع $f = (N_G(v), \{v, x, y\}, \emptyset)$ یک تابع احاطه‌گر ایتالیایی با وزن کمتر از $\gamma_I(G)$ است که این یک تناقض است. حال فرض می‌کنیم $xy \in E(G)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $N_G(x) = \{v_1, v_2, y\}$. اگر $N_G[x] = N_G[y]$ ، آنگاه $N_G(v_3) \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$ ، زیرا $\Delta(G) = 3$. در نتیجه $\deg(v_3) = 1 < \delta(G)$ ، که یک تناقض است. بنابراین $N[x] \neq N[y]$. پس می‌توان فرض کرد $N(y) = \{x, v_2, v_3\}$ و در نتیجه تابع $f = (N(v), \{v, x, y\}, \emptyset)$ یک تابع احاطه‌گری ایتالیایی با وزن کمتر از $\gamma_I(G)$ می‌باشد که این یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم $\Delta(G) \in \{n-2, n-1\}$.

اگر $\Delta(G) = n-2$ در این صورت $\gamma_I(G) = n - \Delta(G) + 1 = 3$ و $\Delta(\bar{G}) = 1$ (و همچنین $\delta(\bar{G}) = 1$) چون $\delta(G) = n-2$. بنابراین $\bar{G} = n/2 K_2$ و در نتیجه $\gamma_I(\bar{G}) = n$ که نتیجه می‌دهد $\Delta(G) = \gamma_I(\bar{G}) - 1 = n-1$ ، که یک تناقض است. پس فرض می‌کنیم $\Delta(G) = n-1$ و بنابراین $G = K_n$. $\square$

لازم به ذکر است که کران قضیه ۹.۶.۲، دقیق است و در این بخش تمام این گراف‌ها را دسته بندی می‌کنیم. برای این منظور، خانواده $\mathcal{F}_2$ از درخت‌های T ، را تعریف می‌کنیم که توسط k کپی از P_4 ساخته می‌شوند به این ترتیب که $k-1$ یال واقع بر رئوس پشتیبان از kP_4 را به گراف همبند اضافه می‌کنیم. به عنوان مثال شکل ۱.۵ را ببینید.



شکل ۱.۵: درخت $T \in \mathcal{F}_2$

قضیه ۲.۲.۵. اگر T یک درخت از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آنگاه $\gamma_I(T) = 3n/4$ ، اگر و فقط اگر $T \in \mathcal{F}_2$.

برهان. فرض کنید T یک درخت در $\mathcal{F}_2$ باشد. مشاهده می‌شود که اگر T' یک زیر گراف القایی از T باشد، به‌طوری که T' با P_4 یکرخت بوده و برگ‌های درخت T' ، برگ‌های درخت T باشند، آنگاه هر تابع احاطه‌گری ایتالیایی روی T وزنی حداقل با مقدار ۳، به T' می‌دهد. با توجه به ساختار T ، درخت T دارای $n/4$ کپی مجزا از زیرگراف القایی P_4 ، می‌باشد که برگ‌های P_4 همان برگ‌های درخت T هستند. بنابراین، $\gamma_I(T) \geq 3n/4$. بنا بر ۹.۶.۲، نتیجه می‌شود $\gamma_I(T) = 3n/4$.

برای این که نشان دهیم هر درخت T که در تساوی $\gamma_I(T) = 3n/4$ صدق می‌کند، در $\mathcal{F}_2$ واقع است، از استقرا روی مرتبه n از درخت T استفاده می‌کنیم. به وضوح اگر $n \leq 4$ ، آنگاه $T = P_4$ و بنابراین $T \in \mathcal{F}_2$. فرض کنید برای هر درخت T' از مرتبه n' که $4 < n' < n$ با ویژگی $\gamma_I(T') = 3n'/4$ ، داشته باشیم $T' \in \mathcal{F}_2$. حال درخت T از مرتبه n را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که T یک رأس پشتیبان قوی، v ، با حداقل سه برگ دارد. و فرض کنید u یک برگ مجاور با v باشد. قرار دهید $T' = T - u$ و فرض کنید f' یک $\gamma_I(T')$ -تابع باشد. در این صورت $f'(v) = 2$ و f' می‌تواند به یک تابع احاطه‌گری ایتالیایی روی درخت T ، با دادن وزن u به 2 توسعه داد. و بنابراین $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 2 \leq 3(n-1)/4 + 2 < 3n/4$ ، که یک تناقض است. حال برای ادامه فرض می‌کنیم که گزاره زیر برقرار باشد.

(۱) T هیچ رأس پشتیبان قوی با حداقل سه برگ ندارد.

فرض کنید $x_0 x_1 \dots x_d$ یک مسیر قطری از T باشد. بنا به (۱)، چون $n > 4$ داریم $d \geq 3$. اگر $d = 3$ ، آنگاه $T = S_{1,2}$ یا $T = S_{2,2}$. و بنابراین $\gamma_I(T) < 3n/4$. حال درخت T را در رأس x_0 ریشه دار می‌کنیم. بنا به (۱)، $\deg(x_1) \leq 3$ و $\deg(x_{d-1}) \leq 3$. فرض کنید $d = 4$. اگر $\deg(x_2) = 2$ ، آنگاه نتیجه می‌شود $n = 7$ یا $n = 6$ و $3n/4 < 4 \leq \gamma_I(T)$ ، که یک تناقض است. پس فرض می‌کنیم $\deg(x_2) > 2$. قرار دهید $A = \{u \in N(x_2) \mid \deg(u) = 3\}$ و

$B = \{u \in N(x_2) \mid \deg(u) = 2\}$. اگر x_2 یک رأس پشتیبان باشد، آنگاه تابع $f = (V(T) - (L(B) \cup A \cup \{x_2\}), L(B), A \cup \{x_2\})$ یک IDF روی درخت T است و بنابراین $\gamma_I(T) \leq 2|A| + |L(B)| + 2 = 2|A| + |B| + 2 < 3n/4$. پس فرض می‌کنیم x_2 یک رأس پشتیبان نباشد. پس تابع $f = (V(T) - (L(B) \cup A \cup \{x_2\}), L(B) \cup \{x_2\}, A)$ یک IDF روی T است. و چون $n = 3|A| + 2|B| + 1$ نتیجه می‌شود که

$\gamma_I(T) \leq 2|A| + |L(B)| + 1 = 2|A| + |B| + 1 < 3n/4$. پس فرض می‌کنیم که $d \geq 5$. اگر $\deg(x_{d-1}) = 3$ ، آنگاه قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. پس خواهیم داشت $n' = n - 3$ و هر $\gamma_I(T')$ -تابع را می‌توان با مقداردهی 2 به x_{d-1} و مقدار 0 به همسایه‌های آن، به یک IDF روی T ، توسعه داد. پس داریم $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 2 \leq 3(n-3)/4 + 2 < 3n/4$ ، که تناقض است. پس فرض می‌کنیم $\deg(x_{d-1}) = 2$.

حال فرض می‌کنیم که $\deg(x_{d-2}) = 2$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. در این صورت $n' = n - 3$ و همچنین هر $\gamma_I(T')$ -تابع، می‌تواند به یک IDF روی T با دادن مقدار 2 به رأس x_{d-1} و مقدار 0 به رؤوس x_d و x_{d-2} ، گسترش یابد. و بنابراین

$\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 3 \leq 3(n-3)/4 + 2 < 3n/4$. که تناقض است. پس فرض می‌کنیم که $\deg(x_{d-2}) \geq 3$. فرض کنید که r_1 تعداد برگ‌های $T_{x_{d-2}}$ مجاور با x_{d-2} باشد، و r_2 تعداد برگ‌های $T_{x_{d-2}}$ با فاصله دو از x_{d-2} باشد. بنا به (۱)، داریم $r_1 \leq 2$. اگر $r_1 = 2$ یا $r_2 \geq 2$ ، آنگاه قرار می‌دهیم $T' = T - \{x_d, x_{d-1}\}$. فرض کنید f' یک $\gamma_I(T')$ -تابع باشد. در این صورت می‌توان فرض کرد که $f'(x_{d-2}) \neq 0$. آنگاه f' با دادن مقدار 1 به رأس x_d و مقدار 0 به رأس x_{d-1} ، می‌تواند به یک IDF روی T توسعه یابد. پس داریم

که $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 1 \leq 3(n-2)/4 + 1 < 3n/4$. پس فرض می‌کنیم که x_{d-2} یک رأس پشتیبان با درجه سه است. قرار می‌دهیم $T' = T - T_{x_{d-2}}$. بنابراین $n' = n - 4$. همچنین هر $\gamma_I(T')$ -تابع، با دادن مقدار ۲ به رأس x_{d-2} و به همسایه‌های آن و دادن مقدار ۱ به x_d ، را می‌توان به یک IDF روی درخت T ، توسعه داد. بنابراین داریم $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 3$. اگر $\gamma_I(T') < 3n'/4$ ، آنگاه $\gamma_I(T) \leq \gamma_I(T') + 1 < 3(n-4)/4 + 3 = 3n/4$ ، که تناقض است. پس داریم $\gamma_I(T') = 3n'/4$ و بنابراین $T' \in \mathcal{F}_2$. پس $T \in \mathcal{F}_2$. $\square$

حال فرض کنید $\mathcal{H}_2$ خانواده همبندی از گراف‌های G از مرتبه n باشد که از $n/4$ کی از P_4 با اضافه کردن یک زیرگراف همبند روی مجموعه مرکزهای ${}^n P_4$ ساخته می‌شوند.

قضیه ۳.۲.۵. اگر G یک گراف n رأسی باشد، آنگاه $\gamma_I(G) = 3n/4$ ، اگر و فقط اگر $G \in \mathcal{H}_2$.

برهان. فرض کنید $G \in \mathcal{H}_2$. مشاهده می‌شود که اگر یک زیرگراف القایی H از G یکرخت با P_4 باشد و رؤس غیر مرکزی آن، هیچ همسایه ای خارج از H در G نداشته باشند، آنگاه هر IDF روی G وزن حداقل ۳ به $V(H)$ می‌دهد. بنابراین در هر گراف با چنین افزایی از رؤس، برای هر مجموعه در افزاز، وزن حداقل ۳ نیاز است. پس داریم $\gamma_I(G) \geq 3n/4$. بنا به قضیه ۹.۶.۲، داریم $\gamma_I(G) = 3n/4$.

حال فرض می‌کنیم که $\gamma_I(G) = 3n/4$. چون حذف یال‌ها، $\gamma_I(G)$ را کاهش نمی‌دهد، پس هر درخت فراگیر از G ، دارای عدد احاطه‌گری ایتالیایی $3n/4$ است. بنابراین، هر درخت فراگیر از G در $\mathcal{F}_2$ قرار دارد. فرض کنید T یک درخت فراگیر از G باشد و $e \in E(G) - E(T)$ ، به‌طوری‌که $T + e$ شامل یک دور C باشد. اگر e یال اتصال دهنده دو مرکز در T نباشد، آنگاه یال $e' \neq e$ وجود دارد به‌طوری‌که درخت $T' = T + e - e'$ یک درخت فراگیر از G است. به وضوح $T' \notin \mathcal{F}_2$. بنا بر قضیه ۲.۲.۵، نتیجه می‌شود که $\gamma_I(T') < 3n/4$. چون حذف یک یال، عدد احاطه‌گری ایتالیایی را کاهش نمی‌دهد، پس $\gamma_I(G) < 3n/4$. که تناقض است. بنابراین $G \in \mathcal{H}_2$. $\square$

قضیه ۴.۲.۵. اگر G یک گراف از مرتبه $n \geq 3$ با $diam(G) \geq 3$ باشد، آنگاه

$$\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) < 3n.$$

برهان. اگر G یک رأس منفرد داشته باشد، آنگاه $\gamma_I(\overline{G}) = 2$. پس بنابراین

$$\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) \leq 2n < 3n$$

اگر G یک رأس با درجه یک یا یک یال منفرد داشته باشد، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که $\gamma_I(\overline{G}) \leq 3$ و بنابراین $\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) \leq 3n$. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\gamma_I(\overline{G}) = 3$ و $\gamma_I(G) = n$. بنابراین $G = n/2 K_2$. پس بنابراین $\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) \leq 2n < 3n$.

در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم که هر مؤلفه از G دارای حداقل سه رأس است و $\delta(G) \geq 2$ ، با به کارگیری قضیه ۹.۶.۲ برای هر مؤلفه خواهیم داشت $\gamma_I(G) \leq 2n/3$ چون $diam(G) \geq 3$ ، پس دارای دو رأس u و v است که همسایه مشترکی ندارند. بنابراین $\{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $\overline{G}$ است و $\gamma_I(\overline{G}) \leq 4$ و در نتیجه به وضوح $\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) < \frac{8n}{3} < 3n$. $\square$

حال در ادامه قضیه ۴.۲.۵ را برای گراف‌های با درجه مینیمم یک، بهبود می‌بخشیم.

قضیه ۵.۲.۵. اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 3$ با $\delta(G) = 1$ باشد، آنگاه

$$\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) \leq \frac{9}{4}n,$$

و تساوی برقرار است اگر فقط اگر G یا $\overline{G}$ عضو $\mathcal{H}_2$ باشند.

برهان. اگر $n = 3$ ، آنگاه $G = K_3$. بنابراین می‌توان دید که $\frac{9}{4}n > 6 = \gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G})$. حال فرض می‌کنیم که $n \geq 4$. و فرض می‌کنیم $\deg(u) = 1$ و $N(u) = \{w\}$. در نتیجه تابع $f = (V(G) - \{u, w\}, \{w\}, \{u\})$ یک IDF روی گراف $\overline{G}$ خواهد بود و بنابراین $\gamma_I(\overline{G}) \leq 3$. پس $\gamma_I(G)\gamma_I(\overline{G}) \leq \frac{9n}{4}$ فرض کنید

پس می‌توان فرض کرد $\gamma_I(\overline{G}) = 3$ و $\gamma_I(G) = \frac{3n}{4}$. بنا بر قضیه ۳.۲.۵، داریم $G \in \mathcal{H}_2$. $\square$

مراجع

- [1] N. Alon, J. Spencer, *The Probabilistic Method*, in: Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, Chichester, 2000.
- [2] M. Aouchiche and P. Hasan, *A survey of Nordhaus-Gaddum type relations*, Discrete Appl. Math. 161 (2013) 466–546.
- [3] R.A. Beeler, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, *Double Roman domination*, Discrete Appl. Math. 211 (2016) 23–29.
- [4] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Methuen, London (1962).
- [5] M. Blidia, M. Chellali, L. Volkmann, *Bounds on the 2-domination number of graphs*, Utilitas Math. 71 (2006) 209–216.
- [6] J. Bondy and U. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Ltd./North-Holland, 1976.
- [7] B. Brešar, T.K. Šumenjak, *On the 2-rainbow domination in graphs*, Discrete Appl. Math. 155 (2007) 2394–2400.
- [8] E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, D.B. West, *Extremal problems for roman domination*, SIAM J. Discrete Math. 23 (2009) 1575 –1586.
- [9] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, *Bounds on weak roman and 2-rainbow domination numbers*, Discrete Appl. Math. 178 (2014) 27–32.
- [10] M. Chellali, T. Haynes, S.T. Hedetniemi, A. McRae, *Roman 2-domination*, Discrete Appl. Math. 204 (2016) 22–28.
- [11] M. Chellali, N. Jafari Rad, *On 2-rainbow domination and roman domination in graphs*, Australas. J. Combin. 56 (2013) 85–93.

- [12] E.J. Cockayne, P.A. Dreyer, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs*, Discrete Math. 278 (2004) 11–22.
- [13] O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, *On k -domination and minimum degree in graphs*, J. Graph Theory, 57 (2008) 33–40.
- [14] J.F. Fink and M.S. Jacobson, *n -Domination in graphs, Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, John Wiley and Sons, New York, (1985) 283–300.
- [15] W. Goddard, M.A. Henning, *Independent domination in graphs: a survey and recent results*, Discrete Math. 313 (2013) 839–854.
- [16] A. Hansberg, *Graphs with equal domination and 2-domination numbers*, Proceedings of the 3rd International Workshop on Optimal Networks Topologies IWONT 2010 Barcelona (2011) 285–293.
- [17] A. Hansberg, L. Volkmann, *On graphs with equal domination and 2-domination numbers*, Discrete Math. 308 (2008) 2277–2281.
- [18] A. Hansberg, L. Volkmann, *Upper bounds on the k -domination number and k -Roman-domination number*, Discrete Appl. Math. 157 (2009) 1634–1639.
- [19] J. Harant and M. A. Henning, *On double domination in graphs*. Discussiones Math. Graph Theory 25 (2005) 29–34.
- [20] J. Harant, M.A. Henning, D. Rautenbach, I. Schiermeyer, *Independence number in graphs of maximum degree three*, Discrete Math. 308 (2008) 5829–5833.
- [21] F. Harary, T.W. Haynes. *Double domination in graphs*. Ars Combin. 55 (2000) 201–213.
- [22] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.
- [23] S.T. Hedetniemi, R.R. Rubalcaba, P.J. Slater, M. Walsh, *Few compare to the great Roman empire*, Congr. Numer. 217 (2013) 129–136.
- [24] A. Hellwig and L. Volkmann, *Some upper bounds for the domination number*, J. Combin. Math. Comput. 57 (2006) 187–209.
- [25] M.A. Henning, *A characterization of Roman trees*, Discuss. Math. Graph Theory, 22 (2) (2002) 325–334.

- [26] M.A. Henning, S.T. Hedetniemi, *Defending the roman empire-a new strategy*, Discrete Math. 266 (2003) 239–251.
- [27] M.A. Henning, W.F. Klostermeyer, *Italian domination in trees*, Discrete Appl. Math. 217 (2017) 557–564.
- [28] M. A. Henning and L. Volkmann, *Signed Roman k -domination in graphs*, Graphs and Combinatorics (2015) 1536–3.
- [29] K. Klammerlin and L. Volkmann, *Roman k -domination in graphs*, J. Korean Math. Soc. 46 (2009) 1309–1318.
- [30] W. Klostermeyer and G. MacGillivray, *Roman, Italian, and 2-domination*, Manuscript, (2016).
- [31] E. Nordhaus and W. Gaddum, *On complementary graphs*, American mathematical Monthly 63 (1956) 175–177.
- [32] R. Pushpam and P. Sampath, *Restrained Roman domination in graphs*, Trans. Comb. 4 (2015) 1–17.
- [33] ReVelle, K.E. Rosing, *Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy*, Amer. Math. Monthly 107 (7) (2000) 585–594.
- [34] P. Roushini Leely Pushpam, T.N.M. Malini Mai, *Weak roman domination in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory 31 (2011) 115–128.
- [35] X. Song and X. Wang, *Roman domination number and domination number of a tree*, Chinese Quart. J. Math. 21 (2006) 358–367.
- [36] I. Stewart, *Defend the Roman Empire!*, Sci. Amer. 281 (6) (1999) 136–139.
- [37] T.K. Šumenjak, D.F. Rall, A. Tepeh, *Rainbow domination in the lexicographic product of graphs*, Discrete Appl. Math. 161 (2013) 2133–2141.
- [38] Y. Wu, N. Jafari Rad, *Bounds on the 2-rainbow domination number of graphs*, Graphs Combin. 29 (2013) 1125–1133.
- [39] Y. Wu, H. Xing, *Note on 2-rainbow domination and roman domination in graphs*, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 706–709.
- [40] H.-M. Xing, X. Chen and X.-G. Chen, *A note on Roman domination in graphs*, Discrete Math. 306 (2006) 3338–3340.

فصل ۶

فهرست نمادها

۱.۶ نمادهای غیرالفبایی

U	اجتماع
$\cap$	اشتراک
∞	بینهایت
$\setminus$	تفاضل مجموعه‌ها
$G \subseteq H$	زیرگراف
$G[S]$	زیرگراف القایی توسط S
$A \subseteq B$	زیرمجموعه
$\lceil x \rceil$	سقف عدد
$\lfloor x \rfloor$	کف عدد
$[n]$	$\{1, \dots, n\}$
$\bar{G}$	مکمل گراف

۲.۶ نمادهای الفبایی

$m(G)$	اندازه گراف
$cor(G)$	تاج گراف
$\deg_G(v)$	درجه رأس
C_n	دور با n رأس
S_n	ستاره با $n + 1$ رأس
$S_{m,n}$	ستاره دوگانه
$rad(G)$	شعاع گراف
$\gamma_2(G)$	عدد ۲-احاطه‌گری
$\gamma_{r_2}(G)$	عدد احاطه‌گری ۲-رنگین کمانی
$\gamma_I(G)$	عدد احاطه‌گری ایتالیایی
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گری
$\gamma_R(G)$	عدد احاطه‌گری رومی
$\gamma_{dR}(G)$	عدد احاطه‌گری رومی دوگانه
$\gamma_r(G)$	عدد احاطه‌گری رومی ضعیف
$d_G(u, v)$	فاصله دو رأس
$diam(G)$	قطر گراف
K_n	گراف کامل با n رأس
$ecc(v)$	گریز از مرکز
$\Delta(G)$	ماکسیمم درجه گراف
$n(G)$	مرتبه گراف
P_n	مسیر با n رأس
$\delta(G)$	مینیمم درجه گراف
$N_G(v)$	همسایگی باز رأس
$N_G(S)$	همسایگی باز مجموعه
$N_G[v]$	همسایگی بسته رأس
$N_G[S]$	همسایگی بسته مجموعه

نمایه

- n -پنجه، ۳
- r -منتظم، ۴
- رأس بی دفاع، ۶
- رأس منفرد، ۲
- رأس پشتیبان، ۲
- رأس‌های مرکزی ستاره دوگانه، ۴
- رابطه نرده‌اس-گدم، ۴۷
- زیرتقسیم کردن، ۲
- زیرگراف القایی، ۳
- زیرگراف فراگیر بحرانی، ۳۰
- ستاره دوگانه، ۴
- عدد ۲-احاطه‌گری رنگین کمانی، ۷
- عدد احاطه‌گری، ۵
- عدد احاطه‌گری ایتالیایی، ۷
- عدد احاطه‌گری رومی، ۶
- عدد احاطه‌گری رومی ضعیف، ۶
- فرزند، ۴
- ماکسیمم درجه، ۲
- مجموعه p -احاطه‌گر، ۵
- مجموعه احاطه‌گر، ۴
- مجموعه احاطه‌گر دوگانه، ۵
- مرتبه، ۲
- مسیر قطری، ۲
- منتظم، ۴
- مینیمم درجه، ۲
- همسایه خصوصی، ۲
- همسایگی باز، ۲
- همسایگی بسته، ۲
- کاکتوس، ۴
- درخت ریشه‌دار، ۴
- رأس مرکزی، ۳
- ریشه درخت، ۴
- ستاره، ۳
- عدد استقلال، ۳
- فاصله، ۲
- قطر، ۲
- مستقل، ۳
- ناهمبند، ۳
- پشتیبان ضعیف، ۲
- پشتیبان قوی، ۲
- گراف دو بخشی کامل، ۳
- گریز از مرکز، ۲
- احاطه‌گری k -تابی، ۵
- اندازه، ۲
- برگ، ۲
- بلوک-کاکتوس، ۴
- تابع ۲-احاطه‌گری رنگین کمانی، ۷
- تابع احاطه‌گر ایتالیایی، ۷
- تابع احاطه‌گر رومی، ۶
- تابع احاطه‌گر رومی ضعیف، ۶
- تاج، ۳
- درجه، ۲
- درخت، ۴
- رأس، ۱

کاکتوس C۴، ۴

گراف، ۱

گراف ایتالیایی، ۱۷

گراف تهی، ۳

گراف دو بخشی، ۳

گراف رومی، ۱۷

گراف غیر بدیهی، ۳

گراف مکعبی، ۴

گراف مکمل، ۳

گراف همبند، ۳

یال، ۲

یال آویخته، ۲

Aabstract

In this thesis, we study some domination parameters including Roman domination number, Italian domination number and double Roman domination number in a graph and present various bounds for them. Then, we study relationships between the Italian domination number and other domination parameters. We present several bounds including some improvements of previous bounds and then obtain constructive characterizations for graphs achieving equality of the new bounds.

keywords domination number, Roman domination number, Italian domination number, double Roman domination number.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Graph and Combinatorics

Some bounds for Roman domination, Italian domination and, 2-rainbow domination number

By: Maryam Hajibaba

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

October 2017