

سلام افلا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضیات مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

کمینه کردن ریسک با انتخاب بهینه سبد سهام چند دوره‌ای

نگارنده: مریم عزیزپورنفری

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی
دکتر سید مجتبی میرلوحی

شهریور ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم مریم عزیزپور نفری با شماره دانشجویی ۹۴۱۲۲۵۴ رشته ریاضی گرایش ریاضیات مالی تحت عنوان کمینه کردن ریسک با انتخاب بهینه سبد سهام چنددوره‌ای که در تاریخ ۹۶/۰۶/۱۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

☐ مردود ☒ قبول (با درجه: <u>جمله: خیر</u>)			
۱۸,۶۹			
☐ عملی ☐ نظری: نوع تحقیق:			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر سید مجتبی میرلوحی	استادیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مجتبی غیائی	استادیار	



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع

مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و به خانواده مهرورزم که مهرشان در وجودم دمیده شده...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که باران رحمتش هیچ‌گاه از ما دریغ نشده است...
خدایا! کمکم کن؛ پیمانی را که در طوفان با تو بستم در آرامش فراموش نکنم...
پروردگارا؛ نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه
برای دست‌های پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم.
پس توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست
بودنشان بگذرانم.

از اساتید با کمالات و شایسته؛ جناب آقایان **دکتر علیرضا ناظمی** و **دکتر سید مجتبی**
میرلوحی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه
بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر
را دارم.

مریم عزیزپورنفری

شهریور ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **مریم عزیزپورنفری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **کمینه کردن ریسک با انتخاب بهینه سبد سهام چند دوره‌ای**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم عزیزپورنفری

شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در موضوعات مالی، انتخاب سبدسهم به منظور بیشینه کردن سود و کمینه کردن زیان از اصلی ترین دغدغه های سرمایه گذاران در بازارهای مالی است. مسأله ی بهینه سازی مارکویتز و تعیین مرز کارا، زمانی توسط مدل های ریاضی قابل حل است که تعداد دارایی های سرمایه گذاری و محدودیت های موجود در بازار اندک باشد اما هنگامی که شرایط و محدودیت های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسأله ی بهینه سازی سبدسهم به راحتی با استفاده از شیوه های ریاضی قابل حل نیست. اغلب سرمایه گذاران علاقمند به سرمایه گذاری بلند مدت هستند، به همین دلیل در این پایان نامه به بررسی سبدسهم چند دوره ای با در نظر گرفتن ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط به عنوان معیار ریسک و استفاده از چولگی برای داده های واقعی غیر نرمال که منجر به تولید سبدهای سرمایه گذاری بهتر می شود، می پردازیم.

کلمات کلیدی: کمینه کردن ریسک، سبد سهام چند دوره ای، ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک مشروط، چولگی.

فہرست مطالب

ف	فهرست جداول	س	فهرست تصاویر
۱	مفاهیم	۱	
۱	۱.۱	۱	مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی
۳	۱.۱.۱	۳	مقدمه‌ای بر نظریه فازی
۶	۲.۱	۶	مفاهیم مالی
۷	۱.۲.۱	۷	سبدسهم
۹	۲.۲.۱	۹	بازده
۹	۳.۲.۱	۹	مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار
۱۳	۴.۲.۱	۱۳	بهینه‌سازی سبدسهم
۱۵	نظریه مجموعه نامعین	۱۵	
۱۶	۱.۲	۱۶	اندازه نامعین
۱۷	۲.۲	۱۷	متغیر نامعین
۱۸	۳.۲	۱۸	توزیع نامعین
۲۲	۴.۲	۲۲	معکوس توزیع نامعین
۲۲	۱.۴.۲	۲۲	برخی از معکوس توزیع‌های نامعین
۲۵	۵.۲	۲۵	استقلال متغیرهای نامعین
۲۵	۶.۲	۲۵	قانون عملیاتی
۲۹	۷.۲	۲۹	امید ریاضی متغیر نامعین
۳۰	۱.۷.۲	۳۰	امید ریاضی برخی از متغیرهای نامعین
۳۳	۸.۲	۳۳	چولگی در فضای عدم قطعیت
۳۵	۱.۸.۲	۳۵	چولگی برخی متغیرهای نامعین
۳۷	۹.۲	۳۷	ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت

۳۸	۱.۹.۲ ارزش در معرض ریسک برخی از متغیرهای نامعین
۴۱	۱۰.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط در فضای عدم قطعیت
۴۱	۱.۱۰.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط برخی از متغیرهای نامعین . . .
۴۵	۳ انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای با حداقل تعداد بسته‌های معامله شده
۴۶	۱.۳ پیشینه‌ی تحقیق
۴۸	۲.۳ مقدمات
۵۱	۳.۳ فرموله کردن مدل بهینه سبد سهام چند دوره‌ای
۵۲	۱.۳.۳ کمترین بسته‌های معامله شده
۵۲	۲.۳.۳ بازده، ریسک، درجه تنوع
۵۷	۴ سبد سهام چند دوره‌ای بهینه
۵۷	۱.۴ مقدمه
۵۸	۲.۴ مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک-چولگی
۵۸	۱.۲.۴ معادل‌های قطعی
۶۲	۳.۴ مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک مشروط-چولگی
۶۳	۱.۳.۴ معادل‌های قطعی
۶۶	۴.۴ مثال عددی
۷۱	۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۷۳	مراجع
۷۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۷۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

فهرست تصاویر

۴	تابع عضویت متغیر فازی مثلثی	۱.۱
۵	تابع عضویت متغیر فازی دوزنقه‌ای	۲.۱
۶	تابع عضویت متغیر فازی گاوسی	۳.۱
۱۸	یک متغیر نامعین	۱.۲
۱۸	یک توزیع نامعین	۲.۲
۱۹	توزیع نامعین خطی	۳.۲
۲۰	توزیع نامعین زیگزاگ	۴.۲
۲۰	توزیع نامعین دوزنقه‌ای	۵.۲
۲۱	توزیع نامعین نرمال	۶.۲
۲۱	توزیع نامعین لگ نرمال	۷.۲
۲۳	معکوس توزیع نامعین خطی	۸.۲
۲۳	معکوس توزیع نامعین زیگزاگ	۹.۲
۲۴	معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای	۱۰.۲
۲۴	معکوس توزیع نامعین نرمال	۱۱.۲
۲۴	معکوس توزیع نامعین لگ نرمال	۱۲.۲
۳۰	نمودار امید ریاضی متغیر نامعین	۱۳.۲
۳۳	نمودارهای چولگی، (الف: چوله به راست، ب: چوله به چپ)	۱۴.۲

فهرست جداول

۶۷		نرخ بازده سهام متغیر نامعین زیگزاگ	۱.۴
۶۷		ارزش بازاری هر سهم در هر دوره	۲.۴
۷۰		تعداد معاملات ۴ دارایی در سه دوره در مدل VaR و CVaR	۳.۴
۷۰		مقدار سرمایه‌گذاری شده از دارایی‌ها در مدل VaR و CVaR	۴.۴

فصل ۱

مفاهیم

در این فصل برای درک و فهم بهتر پایان نامه، مختصراً به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات در زمینه ریاضیات و مالی اقتصادی اولیه می پردازیم.

۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۱.۱. در نظریه احتمالات امید ریاضی^۱، میانگین، مقدار مورد انتظار یا ارزش مورد انتظار یک متغیر تصادفی گسسته برابر است با مجموع حاصل ضرب احتمال وقوع هر یک از حالات ممکن در مقدار آن حالت.

امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(X) = \int x f_X(x) dx,$$

که در آن $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X است. برای متغیرهای تصادفی گسسته تعریف بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i).$$

^۱Expected Value

- امید ریاضی یک عدد ثابت برابر با همان عدد ثابت است؛ یعنی اگر c عددی ثابت باشد، آن گاه $E(c) = c$.
- اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم $X \leq Y$ ، آن گاه با احتمال قریب به یقین داریم: $E(X) \leq E(Y)$.
- عملگر امید ریاضی، خطی است یعنی برای هر دو متغیر تصادفی X و Y و هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + bc, \\ E(aX + bY) &= aE(X) + bE(Y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

تعریف ۲.۱.۱. در آمار و احتمال، **گشتاور**^۲ معیاری کمی برای توصیف شکل یک توزیع احتمالاتی است. گشتاور اول همان میانگین است. برای گشتاورهای مراتب بالاتر معمولاً گشتاور را حول میانگین حساب می کنند و آن را گشتاور مرکزی می نامند. k -امین گشتاور مرکزی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k].$$

تعریف ۳.۱.۱. در نظریه احتمالات و آمار، **واریانس**^۳ نوعی سنجش پراکندگی است. عددی است که نشان می دهد چگونه یک سری داده حول مقدار میانگین پخش می شوند. اگر $\mu = E(X)$ ، امید ریاضی (میانگین) متغیر تصادفی X باشد، آن گاه واریانس X به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

- اگر X یک متغیر تصادفی باشد، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:
- $$V[aX + b] = E[((aX + b) - (aE(X) + b))^2] = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V[X].$$

- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + bY] = a^2 V[X] + b^2 V[Y] + 2ab \text{Cov}(X, Y).$$

که در آن، $\text{Cov}(X, Y)$ اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی است.

تعریف ۴.۱.۱. **چولگی**^۴ اصطلاحی در آمار است که به توصیف عدم تقارن توزیع داده های آماری می پردازد. چولگی برابر با گشتاور سوم نرمال شده است. یعنی

$$S(X) = E[(X - \mu)^3].$$

^۲ Moment

^۳ Variance

^۴ Skewness

• اگر X یک متغیر تصادفی باشد، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$S[aX + b] = a^3 S[X],$$

زیرا باتوجه به (۱.۱) داریم:

$$S[aX + b] = E[(aX + b - (aE(X) + b))^3] = E[a^3 (X - E(X))^3] = a^3 E[(X - E(X))^3] = a^3 S[X].$$

۱.۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه فازی

در این زیر بخش، مروری کلی بر نظریه فازی^۵ خواهیم داشت. مطالب ارائه شده در این فصل به جز مواردی که به روشنی مشخص شده، از مرجع [۱] گرفته شده است. «تئوری مجموعه‌های فازی و منطق فازی» را اولین بار پرفسور لطفعلی عسکرزاده در رساله‌ای به نام «مجموعه‌های فازی – اطلاعات و کنترل» در سال ۱۹۶۵ معرفی نمود [۴۵]. هدف اولیه او در آن زمان، توسعه مدلی کارآمدتر برای توصیف فرآیند پردازش زبان‌های طبیعی بود. او مفاهیم و اصلاحاتی همچون مجموعه‌های فازی، رویدادهای فازی، اعداد فازی و فازی‌سازی را وارد علوم ریاضیات و مهندسی نمود.

مفاهیم فازی

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه فازی^۶ $\tilde{A}$ به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به هر عنصر از X ، یک عدد را از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت^۷ مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (0, 1]$ ، مجموعه $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ را مجموعه α -برش از مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\},$$

یا به عبارت دیگر؛ یک مجموعه فازی محدب است اگر کلیه مجموعه‌های α -برش آن محدب باشند.

^۵Fuzzy Theory

^۶Fuzzy Set

^۷Membership Function

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نرمال گوییم هر گاه $\exists x \in X$ به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۹.۱.۱. عدد فازی $\tilde{M}$ ^۸ یک مجموعه فازی از خط حقیقی $\mathbb{R}$ با شرایط سه گانه زیر است:

۱. مجموعه فازی $\tilde{M}$ محدب باشد.

۲. نرمال باشد.

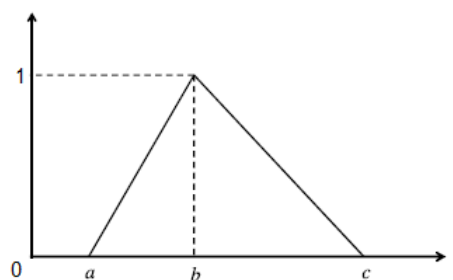
۳. شکل تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به صورت تکه خطوط پیوسته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. متغیر فازی^۹ یک ابزار ریاضی اساسی و بنیادی برای توصیف عدم اطمینان فازی است که به صورت تابعی از فضای احتمال $(\Theta, P(\Theta), \text{Pos})$ به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. مانند متغیر فازی مثلثی، متغیر فازی دوزنقه‌ای و متغیر فازی گاوسی.

• متغیر فازی مثلثی^{۱۰} به صورت سه تایی $\xi = (a, b, c)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a < b < c$ بوده و a, b, c اعداد قطعی می‌باشند. همچنین تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r-a}{b-a}, & a \leq r \leq b, \\ \frac{r-c}{b-c}, & b \leq r \leq c, \\ 0, & r > c. \end{cases} \quad (2.1)$$

شکل ۱.۱ تابع عضویت متغیر فازی مثلثی را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: تابع عضویت متغیر فازی مثلثی

^۸Fuzzy Number

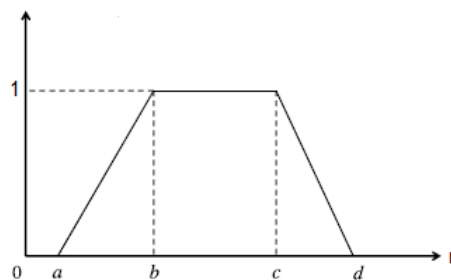
^۹Fuzzy Variable

^{۱۰}Triangular Fuzzy Variable

- متغیر فازی دوزنقه‌ای^{۱۱} به صورت چهارتایی $\xi = (a, b, c, d)$ نمایش داده می‌شود که در آن $a < b < c < d$ بوده و a, b, c, d اعداد قطعی می‌باشند. تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r-a}{b-a}, & a \leq r \leq b, \\ 1, & b \leq r \leq c, \\ \frac{r-d}{c-d}, & c \leq r \leq d, \\ 0, & r > d. \end{cases} \quad (3.1)$$

شکل ۲.۱ تابع عضویت متغیر فازی دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: تابع عضویت متغیر فازی دوزنقه‌ای

- متغیر فازی گاوسی^{۱۲} به صورت $\xi = FN(a, \sigma)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu(r) = \exp \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (4.1)$$

شکل ۳.۱ تابع عضویت متغیر فازی گاوسی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۱.۱.۱. [۲۲] توزیع اعتبار^{۱۳} $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ از متغیر فازی ξ توسط ليو^{۱۴} به صورت زیر تعریف می‌شود:

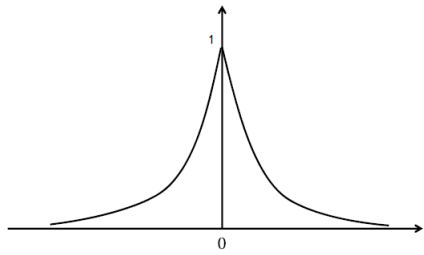
$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \leq r\}. \quad (5.1)$$

^{۱۱} Trapezoidal Fuzzy Variable

^{۱۲} Gaussian Fuzzy Variable

^{۱۳} Credibility Distribution

^{۱۴} Liu



شکل ۳.۱: تابع عضویت متغیر فازی گاوسی

تعریف ۱۲.۱.۱. امید ریاضی^{۱۵} متغیر فازی ξ توسط ليو در [۲۱] به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr. \quad (۶.۱)$$

نتیجه ۱.۱.۱. • امید ریاضی متغیر فازی مثلثی $\xi = (a, b, c)$ برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a + 2b + c}{۴}. \quad (۷.۱)$$

• امید ریاضی متغیر فازی ذوزنقه ای $\xi = (a, b, c, d)$ برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a + b + c + d}{۴}. \quad (۸.۱)$$

• امید ریاضی متغیر فازی گاوسی $\xi = FN(a, \sigma)$ برابر است با:

$$E[\xi] = a. \quad (۹.۱)$$

برای درک بهتر جزئیات به [۱] مراجعه شود.

۲.۱ مفاهیم مالی

سرمایه گذاری^{۱۶} به معنی گذاشتن پول در چیزی با انتظار سود از آن است. به طور دقیق سرمایه گذاری تعهد پول یا سرمایه برای خرید مالی وسائل یا دارایی های دیگر، به منظور منفعت برگشت های سودمند و مفید در قالب بهره، سودسهم یا قدردانی از ارزش وسائل (منافع سرمایه) است. به عبارت دیگر سرمایه گذاری یعنی به تعویق انداختن مصرف فعلی برای دستیابی به امکان مصرف بیشتر در آینده است.

در سرمایه گذاری دو ویژگی متفاوت و مهم وجود دارد که عبارتند از زمان و ریسک. اهمیت دو موضوع یاد شده به این علت است که در سرمایه گذاری صرف پول در زمان حال صورت

^{۱۵}Expected Value

^{۱۶}Investment

می‌گیرد و مقدار آن معین است، در حالی که پاداش حاصل از آن در آینده به دست می‌آید و معمولاً با عدم اطمینان همراه است. در بعضی مواقع، ویژگی زمان غالب می‌شود (مانند اوراق قرضه دولتی) و در بعضی مواقع ریسک از نظر اهمیت مقدم است (مانند برگه اختیار خرید سهام عادی) و در مواقع دیگر هر دو دارای اهمیت هستند (مانند سهام عادی).

۱.۲.۱ سبد سهام

تعریف ۱.۲.۱. سبد سهام^{۱۷} ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب، سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند. یک ضرب‌المثل معروف می‌گوید: «همه تخم‌مرغ‌ها را در یک سبد نگذارید.»، چرا که ریسک شکستن سبد، باعث نابودی همه تخم‌مرغ‌ها خواهد شد.

تعریف ۲.۲.۱. دارایی^{۱۸} عبارت است از کلیه اموال و حقوقی که دارای ارزش پولی هستند. به منابعی که دارای ارزش اقتصادی هستند و افراد، شرکت‌ها یا دولت‌ها مالکیت آن را در اختیار می‌گیرند و انتظار دارند آن منابع در آینده منفعی را برای آن‌ها ایجاد کنند، دارایی گفته می‌شود. دو نوع دارایی داریم

۱. **دارایی ریسکی^{۱۹}**: به دارایی گویند که در مورد بازده آن اطمینان نداریم. این عدم اطمینان را به وسیله واریانس (انحراف معیار و ...) بازدهی‌های مورد انتظار نشان می‌دهیم. مانند سهام، اوراق قرضه غیر دولتی، ارز و طلا و ...

۲. **دارایی بدون ریسک^{۲۰}**: دارایی که دارای یک بازدهی آتی است و بازده آن به حدی امن است که بسیار نزدیک به نرخ بهره فعلی است.

تعریف ۳.۲.۱. تخصیص دارایی^{۲۱}، فرآیندی که در آن تقسیم منابعی مالی انجام می‌گیرد.

تعریف ۴.۲.۱. افق سرمایه‌گذاری^{۲۲}، چارچوب زمانی و عامل کلیدی برای اتخاذ استراتژی سرمایه‌گذاری به حساب می‌آید. میزان زمانی که باید پس‌انداز و سرمایه‌گذاری کرد را مشخص می‌کند و بر تصمیمات تخصیص دارایی موثر است.

^{۱۷} Portfolio

^{۱۸} Asset

^{۱۹} Risky Asset

^{۲۰} Riskless Asset

^{۲۱} Asset Allocation

^{۲۲} Investment horizon

تعریف ۵.۲.۱. هزینه معامله^{۲۳}، آن دسته از هزینه‌هایی است که افراد در فرآیند مبادله اقتصادی متحمل می‌شوند تا حقوق مالکیت خود را مشخص، تعریف و تضمین کنند. مانند هزینه‌های کسب اطلاعات درباره‌ی فروشنده، خریدار و کیفیت کالا یا خدمتی که مبادله می‌شود، هزینه‌های عقد قرارداد و نظارت بر عملکرد طرف مقابل و از همه مهم‌تر هزینه‌های مربوط به تعریف حقوق مالکیت و تضمین اعمال این حقوق می‌باشد.

در مسئله‌ی سبدسهم تک دوره‌ای، فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تصمیم به تخصیص دارایی‌ها برای یک بار و برای n دارایی موجود، در ابتدای دوره‌ی موردنظر می‌گیرد. تصمیم‌گیری فقط یک بار انجام می‌شود و اجازه‌ی بازنگری تا انتهای دوره وجود ندارد و اثر تصمیمات بر دوره‌های بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

مسائل تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده‌اند:

- افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است.
- هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است.
- پارامترهای مسئله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند.

در حالی که مسائل سبدسهم چند دوره‌ای^{۲۴} کلی‌تر هستند به طوری که سرمایه‌گذار یک رشته تصمیم‌گیری انجام می‌دهد که هر تصمیم بر روی تصمیمات بعدی اثرگذار است. هدف پیدا کردن تصمیم‌گیری برای تخصیص در هر دوره با در نظر گرفتن یک مجموعه از فرصت‌های تغییر در آینده افق سرمایه‌گذاری باقی‌مانده، هزینه‌های معاملات نهایی و دیگر محدودیت‌ها است.

تعریف ۶.۲.۱. تعداد مشخصی از اوراق بهادار که حجم سفارش وارده به سامانه‌ی معاملاتی آن باید مضرب صحیحی از آن باشد را **lot** گویند.

به عبارت دیگر برای معامله در بورس باید مقدار حداقل و استاندارد از تعداد واحدهای مورد معامله مورد مبادله قرار گیرد به عنوان مثال، تعداد سهامی که در یک معامله خریداری می‌شود، به این مقدار استاندارد یک **lot** گفته می‌شود.

در بازارهای مالی، **lot** نشان دهنده مقادیر استاندارد یک ابزار مالی است به نحوی که سازمان مقررات تنظیم کرده است.

مفهوم **lot** بازارهای مالی را برای استاندارد کردن قیمت مجوز می‌دهد.

تعریف ۷.۲.۱. سبد خودتامین^{۲۵}، سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها فقط به خرید سهام و درآمدها ناشی از فروش سهام باشد.

^{۲۳} Transaction Cost

^{۲۴} Multi-period portfolio

^{۲۵} Self-financing

۲.۲.۱ بازده

معمولاً افراد مصرف کنونی را به مصرف در آینده ترجیح می‌دهند. بنابراین برای تشویق افراد در به تعویق انداختن مصرف فعلی می‌بایستی انتظار کسب پاداش از سرمایه‌گذاری را برای آنان ایجاد کرد. در واقع انتظار کسب بازده یا پاداش سرمایه‌گذاری موجب می‌شود تا سرمایه‌گذاران مصرف در آینده را به مصرف فعلی ترجیح دهند.

به بهره ناشی از سرمایه‌گذاری **بازده**^{۲۶} گفته می‌شود. این تعریف به بهره یا سود سهام دریافتی از اوراق بهادار اشاره دارد و معمولاً به صورت سالانه و به عنوان درصدی از هزینه سرمایه‌گذاری، ارزش بازاری جاری یا ارزش اسمی آن بیان می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. نرخ بهره^{۲۷} عبارت است از نرخ که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده (به دلیل ارزش زمانی) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود.

بازده مورد انتظار هر سهم

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده سهام، بازده مورد انتظار برای سهام i ام با $E(R_i)$ نشان داده شده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{i=1}^m (p_i) P R_i.$$

که در آن، $P R_i$ بازده سهم i ام و p_i احتمال وقوع آن است.

بازده مورد انتظار سبد سرمایه

در صورتی که سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی i ام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار سبد سرمایه با $E(R_p)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i). \quad (۱۰.۱)$$

۳.۲.۱ مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار

زیان بالقوه و قابل اندازه‌گیری یک نوع سرمایه‌گذاری را **ریسک**^{۲۸} می‌گویند. ریسک در بازارهای مالی مفهوم کلیدی است، از این رو می‌بایست آن را شناخت، اندازه‌گیری

^{۲۶}Returns

^{۲۷}Interest Rate

^{۲۸}Risk

کرد و برای حذف ریسک‌های غیر ضروری برنامه‌ریزی و ریسک‌های همراه با فرصت را مدیریت نمود.

ریسک پدیده‌ای مربوط به آینده است که نمی‌توان آن را به طور دقیق پیش‌بینی کرد زیرا با عدم اطمینان همراه است. هرچه عدم اطمینان^{۲۹} بیشتر باشد، ریسک نیز بیشتر خواهد بود. در بازارهای مالی به همراه هر فرصتی ریسکی هم وجود دارد و اصولاً نمی‌توان از همه ریسک‌ها چشم‌پوشی کرد زیرا کلیه فرصت‌ها از بین می‌روند.

در گام نخست هر سرمایه‌گذاری می‌داند که برای کسب بازدهی بیشتر می‌بایست سطح ریسک‌پذیری خود را افزایش دهد.

ریسک در یک طبقه‌بندی کلی، به دو دسته تقسیم می‌شود:

۱. ریسک سیستماتیک

۲. ریسک غیر سیستماتیک

ریسک سیستماتیک، ریسکی است که از عوامل بازار ناشی شده و بر یک سرمایه‌گذاری (مثلاً قیمت سهام شرکت‌ها) تأثیر دارد و مدیریت آن از دست مدیران شرکت‌ها خارج است اما **ریسک غیرسیستماتیک**، به ریسکی گفته می‌شود که ناشی از عوامل کلان حاکم بر یک بازار نیست و به ساختار یک شرکت یا بنگاه اقتصادی مربوط می‌شود. برای مثال ساختار سرمایه شرکت، نوع محصول (کالا یا خدمات)، تصمیم‌گیری در شرایط مختلف و از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب گزینه‌های سرمایه‌گذاری، میزان پذیرش ریسک سرمایه‌گذار است. به طور کلی می‌توان سرمایه‌گذاران را به دو گروه **ریسک‌پذیر**^{۳۰} و **ریسک‌گریز**^{۳۱} تقسیم کرد.

سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر، سرمایه‌گذاری است که مقدار بازده معینی را انتظار دارد و هدفش کمینه‌کردن^{۳۲} ریسک است و ریسک‌گریز کسی است که باهدف بیشترین بازده، برای یک سطح مشخص از ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند.

مهمترین مسئله در ریسک، محاسبه میزان آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده است.

در سال ۱۹۵۲، هری مارکوویتز با ارائه مدلی کمی به اندازه‌گیری ریسک پرداخت و با معرفی مدلی مبتنی بر ریسک و بازده و ارائه مجموعه کارا^{۳۳} برای اولین بار ریسک را در کنار بازده به عنوان متغیری دیگر جهت انتخاب دارایی برای سرمایه‌گذاری قرار داد. وی انحراف معیار را به

^{۲۹} Unreliability

^{۳۰} Risk Taker

^{۳۱} Risk Avers

^{۳۲} Minimum

^{۳۳} Efficient Frontier Line

عنوان شاخص پراکندگی، معیار عددی ریسک خواند. شاگرد او ویلیام شارپ^{۳۴}، شاخص بتا (ضریب حساسیت) را برای تغییرات نسبی ارزش یک سهم در قبال تغییر ارزش بازار ارائه کرد و با معرفی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد سرمایه را پایه‌گذاری کرد. مک کالی^{۳۵} معیار بتا را به‌عنوان ملاک اندازه‌گیری ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت معرفی کرد، در ادامه کار، مک کالی معیار تحذب را به‌عنوان شاخصی دقیق‌تر معرفی کرد. در سال ۱۹۹۶ وترستون^{۳۶} مدیر موسسه مورگان^{۳۷} مدل ارزش در معرض ریسک^{۳۸} را معرفی کرد. در نهایت در سال ۱۹۹۸ دلبان^{۳۹} ریسک منسجم^{۴۰} را به‌عنوان معیار ریسک در نظر گرفت.

می‌توان طبقه‌بندی زیر را در مورد معیارهای اندازه‌گیری ریسک ارائه داد:

۱. حساسیت: تغییر یک متغیر وابسته بر اثر تغییر یک متغیر مستقل، مثل تغییرات قیمت در قبال تغییر یک واحد نرخ سود (تحذب و بتا).
۲. نوسان: عبارت است از نوسان یک متغیر در اطراف میانگین و یا یک پارامتر تصادفی دیگر مثل (واریانس و انحراف معیار).
۳. معیارهای ریسک نامطلوب: این معیارها که برعکس معیارهای نوسان، تنها بر بخش مخرب ریسک تمرکز دارند، در حقیقت نوسانات زیر سطح میانگین و یا متغیر هدف را مورد محاسبه قرار می‌دهند (نیم واریانس، نیم انحراف معیار و ارزش در معرض ریسک).
۴. ریسک منسجم: که به صورت یک اصل موضوع می‌باشد مانند (ارزش در معرض ریسک مشروط^{۴۱}).

تعریف ۹.۲.۱. نیم واریانس^{۴۲} شاخصی است که در آن تنها انحرافات نامطلوب بازده مورد توجه قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر اگر ریسک را میزان ضرر تعریف کنیم، آن‌گاه تغییرات مطلوب (افزایش نرخ بازدهی دارایی مالی) به‌عنوان ریسک محسوب نمی‌شود و فقط آن دسته از مشاهداتی که کمتر از میانگین نرخ بازدهی هستند، به‌عنوان ریسک به حساب می‌آید. فرمول محاسبه نیم واریانس به صورت زیر است:

$$SV = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \{\max(0, E(r_i) - r_T)\}^2.$$

^{۳۴} William Sharpe

^{۳۵} McCauley

^{۳۶} Weterstone

^{۳۷} J. P. Morgan

^{۳۸} Value at Risk

^{۳۹} Delbaen

^{۴۰} Coherent Risk

^{۴۱} Conditional Value at Risk

^{۴۲} Semivariance

که در آن، r_T بازدهی دارایی در طول دوره، K تعداد مشاهدات و E امید ریاضی نرخ بازدهی است.

تعریف ۱۰.۲.۱. ارزش در معرض ریسک یک تکنیک آماری است که برای اندازه گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا سبدسهم سرمایه گذاری در یک دوره زمانی مشخص، استفاده می شود.

اعتقاد عمومی در مفاهیم مالی بر این موضوع اشاره دارد که VaR رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است. به طور کلی می توان گفت ارزش در معرض ریسک بیشترین مقدار زیان مورد انتظار را در یک افق زمانی (یک روز، یک هفته، یک ماه، ...) مشخص در سطح اطمینانی معین اندازه گیری می نماید. از مزایای مهم این ابزار، خلاصه سازی ریسک در یک عدد واحد است.

اگر ξ یک متغیر و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان باشد، در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $VaR : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که:

$$VaR(\beta) = \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\}.$$

ارزش در معرض ریسک به دلیل عدم تبعیت از خاصیت تحدب یا زیر جمع پذیری و نبود هیچ پروتکل استاندارد برای آماره های استفاده شده در تعیین دارایی سبدسهم یا ریسک شرکت های بزرگ، همواره مورد انتقاد محققان بوده است، اما هنوز به عنوان سنج ریسک قابل قبول مطرح است. در مقابل ارزش در معرض ریسک مشروط سنج های است که از ویژگی انسجام برخوردار بوده و محدب است، بنابراین اندازه ریسک بهتری نسبت به ارزش در معرض ریسک است.

$CVaR$ ، یک روش ارزیابی ریسک است که اغلب برای کاهش احتمال اینکه یک سبدسهم، متحمل ضررهای بزرگ خواهد شد استفاده شده است و زیان مورد انتظار را هنگامی که زیان بیشتر از VaR تعیین شده، اندازه گیری می کند؛ به عبارت دیگر این معیار چنین بیان می کند که در حالت های خیلی بد چه انتظاراتی داشته باشیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید که ξ یک متغیر و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک مشروط از ξ تابع $CVaR : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که:

$$CVaR(\beta) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 VaR(r) dr.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. ریسک منسجم، ریسکی است که اگر $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ ، آن گاه شامل ۴ ویژگی زیر خواهد بود:

۱. یکنواختی: $x \in V, x \geq 0 \Rightarrow \rho(x) \leq 0$

۲. جمع‌پذیری: $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ ؛ $x, y, x+y \in V$

۳. همگنی مثبت: $\rho(hx) = h\rho(x)$ ؛ $x \in V, h > 0, hx \in V$

۴. انتقال یکسان: $\rho(x+a) = \rho(x) - a$ ؛ $x \in V, a \in \mathbb{R}$

درجه تنوع

تنوع^{۴۳}، یک تکنیک مدیریت ریسک، آمیزه‌ای از سرمایه‌گذاری‌های مختلف در یک سبدسهم است.

منطق پشت این تکنیک معتقد است که یک سبدسهم ساخته شده از انواع مختلف سرمایه‌گذاری، به طور متوسط بازده بالاتر و ریسک پایین‌تری نسبت به هر سرمایه‌گذاری تکی دارد. تنوع تلاش می‌کند که حوادث ریسک غیر سیستماتیک در یک سبدسهم را کنترل کند به نحوی که عملکرد مثبت برخی از سرمایه‌گذاری‌ها را با عملکرد منفی سرمایه‌گذاران دیگر خنثی کند.

۴.۲.۱ بهینه‌سازی سبدسهم

بهینه‌سازی سبدسهم^{۴۴} عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگه‌داری شود؛ به شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن براساس معیارهایی مشخص می‌شود. معیارهایی که به صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده مورد انتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است. به عبارت دیگر سبدسهم بهینه، سبدی است که موجب بیشترین بازدهی و کمترین زیان شود. در بسیاری از رویکردهای بهینه‌سازی، این کار به صورت یک دوره‌ای انجام می‌گیرد اما از آنجا که سرمایه‌گذاری مفهومی بلندمدت و آینده‌نگر است، یک دوره‌ای در نظر گرفتن بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با این مفهوم همخوانی نخواهد داشت. سرمایه‌گذار به دنبال بهینه‌کردن تخصیص دارایی در هر دوره‌ی زمانی است به گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت در آخرین دوره‌ی زمانی بیشینه شود. در موضوعات مالی، انتخاب سبدسهم به منظور حداکثرسازی سود یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی است. مسأله‌ی بهینه‌سازی مارکوویتز^{۴۵} و تعیین مرز کارا، زمانی توسط مدل‌های ریاضی قابل حل است که تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار اندک است اما هنگامی که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسأله‌ی بهینه‌سازی سبدسهم به راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی قابل حل نیست.

^{۴۳} Diversification

^{۴۴} Optimization Portfolio

^{۴۵} Markowitz

فصل ۲

نظریه مجموعه نامعین

درجه اعتقاد^۱ برای همه ما آشناست. پیشامد نمونه‌ای از اعتقاد است، برای مثال، خورشید فردا طلوع خواهد کرد، هفته آینده آفتابی خواهد بود، آن شخص مردی جوان است، نمونه‌هایی از اعتقاد است. یک درجه اعتقاد بیانگر شدت اعتقاد ما به وقوع یک پیشامد است. اگر کاملاً معتقد باشیم یک پیشامد اتفاق خواهد افتاد آن گاه درجه اعتقاد ما ۱ است (اعتقاد کامل) [۳]. در خصوص پیشامد، درجه اعتقاد بسیار بستگی به دانش شخصی (حتی شامل اولویت) ما دارد. هنگامی که دانش شخصی تغییر کند درجه اعتقاد نیز تغییر می‌کند. شاید بعضی‌ها تصور کنند که درجه اعتقاد باید به وسیله احتمال غیر عینی یا نظریه مجموعه فازی مدل سازی شود. اگرچه این تصور معمولاً نامناسب است زیرا ممکن است در این مورد هر دو آن‌ها منجر به نتایج غیر شهودی شوند.

برای بررسی منطقی درجات اعتقاد شخصی، لیو [۲۶] در سال ۲۰۰۷ اندازه نامعین^۲ را پیشنهاد داد و نظریه عدم قطعیت^۳ را معرفی کرد و پس از آن توسط پژوهش‌گران بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت. با نگاهی به زندگی روزمره‌ی بشر، می‌توان دریافت که زندگی سراسر عدم قطعیت است. اکثر مردم آموخته‌اند، که برای اتخاذ تصمیمات بزرگ و کوچکی که در طی حیات آنان رخ می‌دهد، با عدم قطعیت موجود، دست به گریبان شده و از میان گزینه‌های پیش رویشان دست به انتخاب بهترین گزینه بزنند. آنچه در اغلب موارد تصمیمات بشر را دچار اشتباه

^۱ Belief Degree

^۲ Uncertain Measure

^۳ Uncertain Theory

می‌نماید، نبود اطلاعات کافی و در نتیجه بروز عدم قطعیت در مسائل می‌باشد. عدم قطعیت به عنوان یک مفهوم عمومی اصطلاحی است که عدم اطمینان انسان را در مورد برخی اشخاص یا اشیا منعکس می‌نماید. در این فصل برخی مفاهیم پایه و قضایایی در نظریه عدم قطعیت را بازگو می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۲۷] است.

تعریف ۱.۰.۲. فرض کنید Γ مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی Γ ، گردایه‌ای ناتهی چون $\mathcal{L}$ از زیر مجموعه‌های Γ است که تحت اجتماع‌های متناهی و متمم‌گیری بسته باشد. به عبارت دیگر، اگر $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i \in \mathcal{L}$ و اگر $\Lambda \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\Lambda^c \in \mathcal{L}$. یک σ -جبر، جبری است که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته باشد. چنانچه Γ یک فضای متری یا به طور کلی یک فضای توپولوژیک باشد، σ -جبر تولید شده به وسیله خانواده مجموعه‌های باز واقع در Γ ، σ -جبر بورل^۴ روی Γ نامیده می‌شود و آن را با B نشان می‌دهیم. اعضای σ -جبر بورل را مجموعه‌های بورل می‌نامیم. بنابراین B شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره است.

۱.۲ اندازه نامعین

فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. هر عنصر Λ در $\mathcal{L}$ یک مجموعه اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. هر مجموعه اندازه‌پذیر یک پیشامد در نظریه عدم قطعیت است. $\mathcal{M}$ یک اندازه نامعین روی σ -جبر $\mathcal{L}$ تعریف می‌شود. بنابراین عدد $\mathcal{M}\{\Lambda\}$ به صورت یک تابع مجموعه‌ای به هر پیشامد Λ به منظور نشان دادن درجه اعتقاد برای اندازه‌گیری اعتقاد ما به وقوع پیشامد Λ اختصاص داده می‌شود. اندازه نامعین $\mathcal{M}$ باید خواص ریاضی معینی داشته باشد. به منظور ارتباط منطقی با درجه اعتقاد، لئو سه اصل موضوعه زیر را در نظریه عدم قطعیت مطرح کرد

۱. نرمال بودن؛

$$\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1.$$

۲. خود دوگانگی^۵، برای هر پیشامد Λ ؛

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1.$$

^۴ Borel

^۵ Duality

۳. زیر افزایشی شمارا^۶، برای هر دنباله شمارش پذیر از پیشامدهای Λ

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}.$$

لیو [۲۸] اندازه نامعین حاصلضربی و اصل حاصلضربی را تعریف کرد.

تعریف ۱.۱.۲. (اصل حاصلضربی) فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ یک فضای نامعین به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ باشد. می نویسیم:

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times \mathcal{L}_n.$$

آن گاه اندازه نامعین حاصلضربی روی Γ به ازای هر $\Lambda \in \mathcal{L}$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} & \text{if } \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > \circ/\delta, \\ 1 - \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} & \text{if } \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > \circ/\delta, \\ \circ/\delta & o.w. \end{cases} \quad (1.2)$$

به صورت زیر نیز نوشت:

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}.$$

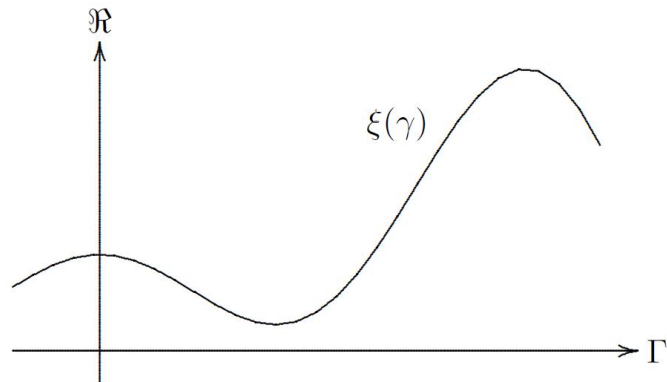
۲.۲ متغیر نامعین

متغیر نامعین^۷ یک مفهوم اساسی در نظریه عدم قطعیت است که نشان دهنده میزان عدم قطعیت است.

تعریف ۱.۲.۲ [۲۶] یک متغیر نامعین یک تابع اندازه پذیر ξ از σ - جبر $\mathcal{L}$ به مجموعه اعداد حقیقی است. یک متغیر نامعین ξ با یک توزیع نامعین که توسط لیو تعریف شده است مشخص می شود. شکل ۱.۲ یک نمونه متغیر نامعین را نشان می دهد.

^۶ Subadditivity

^۷ Uncertain Variable

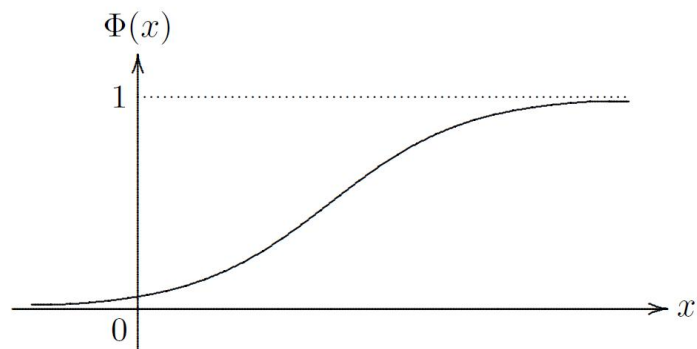


شکل ۱.۲: یک متغیر نامعین

۳.۲ توزیع نامعین

تعریف ۱.۳.۲. توزیع نامعین^۸ $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ برای یک متغیر نامعین ξ به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}. \quad (۲.۲)$$



شکل ۲.۲: یک توزیع نامعین

شکل ۲.۲ نمودار یک نمونه توزیع نامعین را نشان می‌دهد.

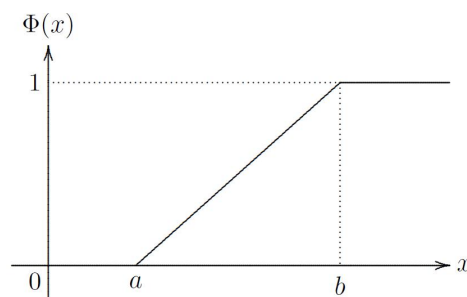
^۸Uncertain Distribution

برخی از توزیع‌های نامعین

تعریف ۲.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین خطی^۹ گوئیم اگر توزیع نامعین خطی زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases} \quad (۳.۲)$$

این تابع به صورت $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ نشان داده می‌شود که a و b اعداد حقیقی‌اند و $a < b$.



شکل ۳.۲: توزیع نامعین خطی

شکل ۳.۲ نمودار یک توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین زیگزاگ^{۱۰} گوئیم اگر توزیع نامعین زیگزاگ زیر را داشته باشد:

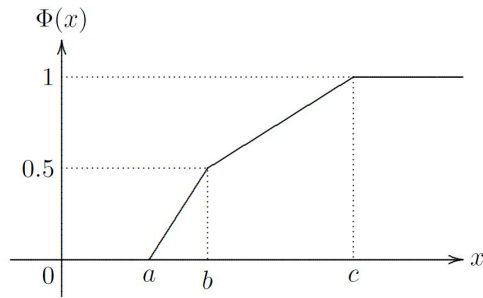
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x < b, \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & b \leq x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases} \quad (۴.۲)$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ نشان می‌دهیم که a و b و c اعداد حقیقی‌اند و $a < b < c$.

شکل ۴.۲ نمودار یک توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

^۹Linear Uncertainty Variable

^{۱۰}Zigzag Uncertainty Variable

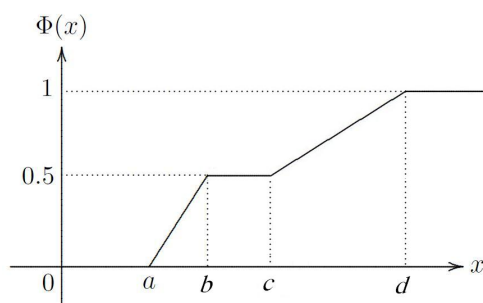


شکل ۴.۲: توزیع نامعین زیگزاگ

تعریف ۴.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین دوزنقه‌ای^{۱۱} گوئیم اگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x < b, \\ 0.5, & b \leq x < c, \\ \frac{x+d-2c}{2(d-c)}, & c \leq x < d, \\ 1, & x \geq d. \end{cases} \quad (5.2)$$

که $a < b < c < d$ اعداد حقیقی‌اند و d و c و b و a



شکل ۵.۲: توزیع نامعین دوزنقه‌ای

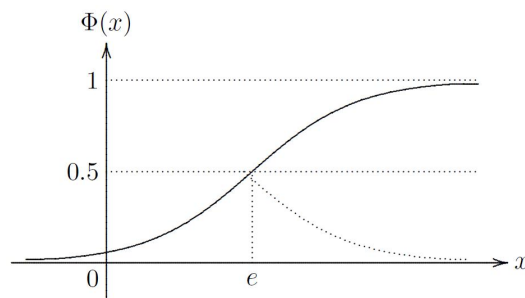
شکل ۵.۲ نمودار یک توزیع نامعین دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

^{۱۱}Trapezoidal Uncertainty Variable

تعریف ۵.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین نرمال^{۱۲} گوئیم اگر توزیع نامعین نرمال زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0. \quad (6.2)$$

که آن را با $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی باشند.



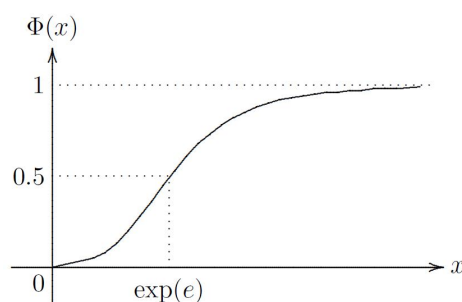
شکل ۶.۲: توزیع نامعین نرمال

شکل ۶.۲ نمودار یک توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

تعریف ۶.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین لگ نرمال^{۱۳} گوئیم اگر $\ln \xi$ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ باشد، به عبارت دیگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (7.2)$$

که آن را با $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی باشند.



شکل ۷.۲: توزیع نامعین لگ نرمال

شکل ۷.۲ نمودار یک توزیع نامعین لگ نرمال را نشان می‌دهد.

^{۱۲}Normal Uncertainty Variable

^{۱۳}Lognormal Uncertainty Variable

قضیه ۱.۳.۲. (قضیه وارون سازی اندازه [۲۷]) فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ باشد. آن گاه برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$M\{\xi \leq x\} = \Phi(x), \quad M\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x). \quad (۸.۲)$$

برهان. معادله $M\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$ به سادگی از تعریف توزیع نامعین نتیجه می شود. با استفاده از اصل ۲ اندازه نامعین نتیجه می گیریم که

$$M\{\xi > x\} = 1 - M\{\xi \leq x\} = 1 - \Phi(x),$$

و قضیه ثابت می شود. $\square$

تعریف ۷.۳.۲. توزیع نامعین $\Phi(x)$ منظم نامیده می شود اگر نسبت به x به ازای $0 < \Phi(x) < 1$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی باشد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

۴.۲ معکوس توزیع نامعین

واضح است که توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ روی برد x که بصورت $0 < \Phi(x) < 1$ است یک تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ دارد و $\Phi^{-1}(\alpha)$ در بازه $(0, 1)$ وجود دارد.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ باشد. معکوس تابع $\Phi^{-1}(\alpha)$ معکوس توزیع نامعین ξ نامیده می شود.

توجه کنید که معکوس توزیع نامعین $\Phi^{-1}(\alpha)$ در بازه $(0, 1)$ خوش تعریف است. در صورت نیاز می توانیم دامنه را با تعریف زیر به بازه $[0, 1]$ گسترش دهیم.

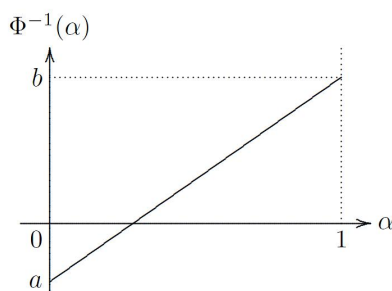
$$\Phi^{-1}(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \Phi^{-1}(\alpha), \quad \Phi^{-1}(1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (۹.۲)$$

۱.۴.۲ برخی از معکوس توزیع های نامعین

• معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a + \alpha b. \quad (۱۰.۲)$$

شکل ۸.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین خطی را نشان می دهد.

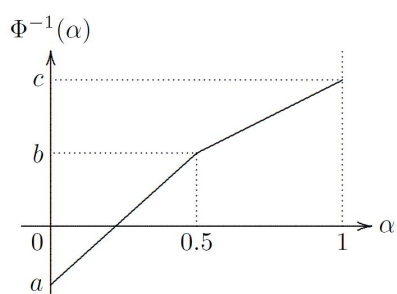


شکل ۸.۲: معکوس توزیع نامعین خطی

- معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین زیگزاگ $Z(a, b, c)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha < 0.5, \\ (2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & \alpha \geq 0.5. \end{cases} \quad (11.2)$$

شکل ۹.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.



شکل ۹.۲: معکوس توزیع نامعین زیگزاگ

- معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین دوزنقه‌ای $Z(a, b, c, d)$ به صورت زیر است:

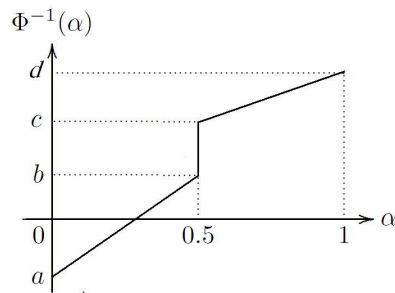
$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha < 0.5, \\ (2 - 2\alpha)c + (2\alpha - 1)d, & \alpha \geq 0.5. \end{cases} \quad (12.2)$$

شکل ۱۰.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

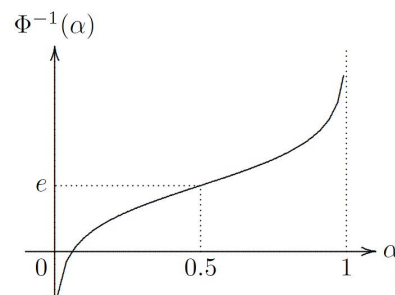
- معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right). \quad (13.2)$$

شکل ۱۱.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰.۲: معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای

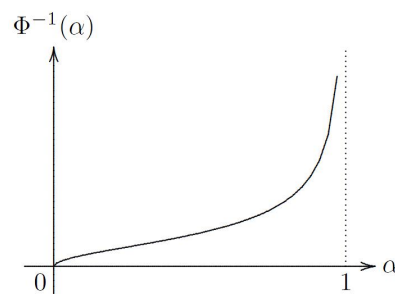


شکل ۱۱.۲: معکوس توزیع نامعین نرمال

• معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right). \quad (14.2)$$

شکل ۱۲.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین لگ نرمال را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲.۲: معکوس توزیع نامعین لگ نرمال

۵.۲ استقلال متغیرهای نامعین

تعریف ۱.۵.۲. [۲۸] متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای هر مجموعه بورل $B_1, B_2, \dots, B_n$ از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \quad (۱۵.۲)$$

قضیه ۱.۵.۲. [۲۷] متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل باشند اگر و تنها اگر

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \quad (۱۶.۲)$$

برهان. چون اندازه نامعین خوددوگان است پس متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} &= 1 - \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i^c\}\right\} \\ &= 1 - \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i^c\} = 1 - (1 - \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \end{aligned}$$

□

۶.۲ قانون عملیاتی

قضیه ۱.۶.۲. [۲۸] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشند. آن‌گاه $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ یک متغیر نامعین است به طوری که

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} = \begin{cases} \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} & \text{if } \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} > \circ/5, \\ 1 - \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} & \text{if } \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} > \circ/5, \\ \circ/5 & \text{o.w,} \end{cases} \quad (۱۷.۲)$$

که در آن $B_1, B_2, \dots, B_n, B$ مجموعه‌های بورل از اعداد حقیقی باشند و $f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B$ یعنی $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \subset B$ به ازای هر $t_1 \in B_1, t_2 \in B_2, \dots, t_n \in B_n$.

□

برهان. قضیه به طور مستقیم از اصل حاصلضربی اندازه‌ها به دست می‌آید.

قضیه ۲.۶.۲. [۲۷] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ و f یک تابع اکیدا صعودی باشد. آن گاه توزیع نامعین $f(\xi)$ می تواند به صورت زیر به دست می آید:

$$\Psi(t) = \Phi(f^{-1}(t)), \quad (18.2)$$

که می تواند به صورت زیر نیز بیان شود:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi^{-1}(\alpha)), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (19.2)$$

برهان. به ازای هر عدد حقیقی t ، چون f یک تابع اکیدا صعودی است پس داریم:

$$f((-\infty, f^{-1}(t)]) = (-\infty, t].$$

طبق قانون عملیاتی داریم:

$$\Psi(t) = \mathcal{M}\{f(\xi) \in (-\infty, t]\} = \mathcal{M}\{\xi \in (-\infty, f^{-1}(t)]\} = \Phi(f^{-1}(t)).$$

□

قضیه ۳.۶.۲. [۲۴] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل به ترتیب با توزیع های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ و Ψ توزیع نامعین مجموع $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ باشند. اگر $\alpha \in (0, 1)$ به ازای هر α منحصر به فرد باشند آن گاه داریم:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + \Phi_n^{-1}(\alpha), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (20.2)$$

برهان. براساس خاصیت جمع پذیری اندازه نامعین، به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ داریم:

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i^{-1}(\alpha)\right\} \geq \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha))\right\} \geq \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha))\right\}.$$

چون $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل باشند، طبق معادله (۱۵.۲) داریم:

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i^{-1}(\alpha)\right\} \geq \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha)\} = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha = \alpha.$$

به عبارت دیگر به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i^{-1}(\alpha) - \epsilon\right\} \leq \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha) - \frac{\epsilon}{n})\right\}.$$

زیرا اندازه نامعین خوددوگان است. چون $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل باشند، طبق معادله (۱۶.۲) داریم:

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i^{-1}(\alpha) - \epsilon\right\} \leq \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha) - \frac{\epsilon}{n})\right\}$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha) - \frac{\epsilon}{n}\} < \max_{1 \leq i \leq n} \alpha = \alpha.$$

از پیوسته بودن توزیع‌های نامعین نتیجه می‌شود که:

$$\mathcal{M}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + \Phi_n^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$

و در نتیجه داریم:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + \Phi_n^{-1}(\alpha).$$

□

قضیه ۴.۶.۲. [۲۷] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و مثبت به ترتیب با توزیع‌های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند، آن‌گاه حاصلضرب $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_n$ دارای معکوس تابع توزیع به صورت زیر است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \times \Phi_2^{-1}(\alpha) \times \dots \times \Phi_n^{-1}(\alpha). \quad (21.2)$$

قضیه ۵.۶.۲. [۲۷] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین خطی مستقل $\mathcal{L}(a_1, b_1)$ و $\mathcal{L}(a_2, b_2)$ هستند. آن‌گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم:

$$\mathcal{L}(a_1, b_1) + \mathcal{L}(a_2, b_2) = \mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (22.2)$$

و حاصلضرب یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم:

$$k.\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(ka, kb). \quad (23.2)$$

برهان. [۳] فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین خطی ξ_1 و ξ_2 هستند، آن‌گاه داریم:

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a_1 + \alpha b_1,$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a_2 + \alpha b_2.$$

طبق قضیه ۳.۶.۲، توزیع نامعین Ψ مربوط به $\xi_1 + \xi_2$ به صورت زیر است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)(a_1 + a_2) + \alpha(b_1 + b_2),$$

به معنای این است که مجموع متغیرهای نامعین خطی نیز متغیری نامعین خطی است و

$$\mathcal{L}(a_1, b_1) + \mathcal{L}(a_2, b_2) = \mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

برای یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ ، طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k > 0$ توزیع نامعین Ψ مربوط به $k\xi$ به صورت زیر است:

$$\Psi(t) = \Phi\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{t/k - a}{b - a} = \frac{t - ka}{k(b - a)}.$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۶.۶.۲. [۲۷] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین زیگزاگ مستقل $\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1)$ و $\mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2)$ باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ به صورت زیر است:

$$\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1) + \mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2) = \mathcal{Z}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (24.2)$$

و حاصلضرب یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ است و داریم:

$$k.\mathcal{Z}(a, b, c) = \mathcal{Z}(ka, kb, kc). \quad (25.2)$$

برهان. اثبات مطابق برهان قضیه ۵.۶.۲ است، برای دیدن جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۷.۶.۲. [۲۷] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 دو متغیر نامعین دوزنقه‌ای مستقل باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است. همچنین حاصلضرب یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است.

$$\mathcal{T}(a_1, b_1, c_1, d_1) + \mathcal{T}(a_2, b_2, c_2, d_2) = \mathcal{T}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \quad (26.2)$$

و حاصلضرب یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\mathcal{T}(a, b, c, d)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است و داریم:

$$k.\mathcal{T}(a, b, c, d) = \mathcal{T}(ka, kb, kc, kd). \quad (27.2)$$

برهان. اثبات مطابق برهان قضیه ۵.۶.۲ است، برای دیدن جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۸.۶.۲. [۲۷] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین نرمال مستقل $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$ باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم:

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2), \quad (28.2)$$

همچنین حاصلضرب یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم:

$$k.\mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma). \quad (29.2)$$

برهان. اثبات مطابق برهان قضیه ۵.۶.۲ است، برای دیدن جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۶.۲. [۲۷] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین لگ نرمال مستقل $\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2)$ باشند. آن گاه حاصلضرب $\xi_1 \cdot \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم:

$$\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1) \cdot \mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2), \quad (۳۰.۲)$$

همچنین حاصلضرب یک متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم:

$$k \cdot \mathcal{LOGN}(e, \sigma) = \mathcal{LOGN}(e + \ln k, \sigma). \quad (۳۱.۲)$$

برهان. اثبات مطابق برهان قضیه ۵.۶.۲ است، برای دیدن جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه شود. □

۷.۲ امید ریاضی متغیر نامعین

امید ریاضی (مقدار مورد انتظار)، مقدار میانگین متغیر نامعین در راستای به دست آوردن اندازه نامعین است و نشان دهنده اندازه متغیر نامعین است. در ادامه برای اندازه گیری بازده سرمایه گذاری از امید ریاضی استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۷.۲. [۲۷] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین است، آن گاه امید ریاضی ξ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq x\} dx. \quad (۳۲.۲)$$

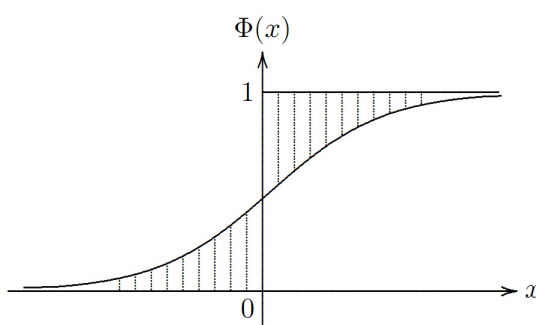
در صورتی که یکی از دو انتگرال متناهی باشد.

قضیه ۱.۷.۲. [۲۷] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ است. آن گاه داریم:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx. \quad (۳۳.۲)$$

برهان. از قضیه وارون سازی اندازه نتیجه می شود که تقریباً برای همه x ها داریم: $\mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$ و $\mathcal{M}\{\xi \geq x\} = 1 - \Phi(x)$. با استفاده از عملگر امید ریاضی به دست می آوریم:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq x\} dx,$$



شکل ۱۳.۲: نمودار امید ریاضی متغیر نامعین

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx.$$

□

قضیه ۲.۷.۲. [۲۷] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم Φ باشد، اگر امید ریاضی موجود است آن گاه امید ریاضی آن در رابطه زیر صدق می کند:

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha. \quad (۳۴.۲)$$

برهان. طبق تعریف امید ریاضی و توزیع نامعین داریم:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq x\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال جز به جز داریم:

$$\begin{aligned} &= x(1 - \Phi(x)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x) - x\Phi(x) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 x d\Phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x) = \frac{x=\Phi^{-1}(\alpha)}{\Phi(x)=\alpha} \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

□

۱.۷.۲ امید ریاضی برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۷.۲. [۲۷] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b}{2}.$$

برهان. طبق قضیه ۲.۷.۲ و معکوس تابع توزیع متغیر نامعین خطی (۱۰.۲) داریم:

$$E[\xi] = \int_0^1 ((1-\alpha)a + b\alpha) d\alpha = (a\alpha + \alpha^2(\frac{b-a}{2})) \Big|_0^1,$$

$$E[\xi] = \frac{a+b}{2}.$$

□

لم ۲.۷.۲. [۲۷] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4}.$$

برهان. طبق قضیه ۲.۷.۲ و معکوس تابع توزیع متغیر نامعین زیگزاگ (۱۱.۲) داریم:

$$E[\xi] = \int_0^{0.5} ((1-2\alpha)a + 2\alpha b) d\alpha + \int_{0.5}^1 ((2-2\alpha)b + (2\alpha-1)c) d\alpha$$

$$= (a\alpha - a\alpha^2 + b\alpha^2) \Big|_0^{0.5} + (2b\alpha - \alpha^2 b + \alpha^2 c - c\alpha) \Big|_{0.5}^1,$$

$$E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4}.$$

□

لم ۳.۷.۲. [۲۷] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

برهان. طبق قضیه ۲.۷.۲ و معکوس تابع توزیع متغیر نامعین دوزنقه‌ای (۱۲.۲) داریم:

$$E[\xi] = \int_0^{0.5} ((1-2\alpha)a + 2\alpha b) d\alpha + \int_{0.5}^1 ((2-2\alpha)c + (2\alpha-1)d) d\alpha$$

$$= (a\alpha - \alpha^2 a + \alpha^2 b) \Big|_0^{0.5} + (2c\alpha - \alpha^2 c + \alpha^2 d - d\alpha) \Big|_{0.5}^1,$$

$$E[\xi] = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

□

لم ۴.۷.۲. [۲۷] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = e.$$

برهان. طبق قضیه ۲.۷.۲ و معکوس تابع توزیع متغیر نامعین نرمال (۱۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_0^1 \left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \right) d\alpha \\ &= \int_0^1 e d\alpha + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d\alpha = e\alpha \Big|_0^1 + 0 \\ E[\xi] &= e. \end{aligned}$$

□

لم ۵.۷.۲. [۲۷] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\text{LOGN}(e, \sigma)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \begin{cases} \sigma\sqrt{3} \exp(e) \csc(\sigma\sqrt{3}) & \text{if } \sigma < \frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ +\infty & \text{if } \sigma \geq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (35.2)$$

قضیه ۳.۷.۲. [۲۷] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نامعین مستقل با امید ریاضی متناهی باشند، آن گاه برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$E[a\xi_1 + b\xi_2] = aE[\xi_1] + bE[\xi_2]. \quad (36.2)$$

برهان. بدون از دست رفتن کلیت مسئله، فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دارای توزیع های نامعین منظم Φ_1 و Φ_2 باشند، در غیر این صورت می توانیم یک انحراف کوچک به توزیع های نامعین بدهیم به طوری که منظم شوند.

گام اول: ابتدا اثبات می کنیم که $E[a\xi] = aE[\xi]$. اگر $a = 0$ آن گاه تساوی رابطه به وضوح برقرار است. اگر $a > 0$ آن گاه توزیع نامعین معکوس $a\xi$ به صورت زیر است:

$$\Upsilon^{-1}(\alpha) = a\Phi^{-1}(\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۲.۷.۲) داریم:

$$E[a\xi] = \int_0^1 a\Phi^{-1}(\alpha) d\alpha = a \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha = aE[\xi].$$

اگر $a < 0$ آن گاه توزیع نامعین معکوس $a\xi$ برابر است با:

$$\Upsilon^{-1}(\alpha) = a\Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

با استفاده از قضیه (۲.۷.۲) داریم:

$$E[a\xi] = \int_0^1 a\Phi^{-1}(1 - \alpha) d\alpha = a \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha = aE[\xi].$$

بنابراین همواره داریم: $E[a\xi] = aE[\xi]$.

گام دوم: ثابت می‌کنیم که $E[\xi_1 + \xi_2] = E[\xi_1] + E[\xi_2]$. توزیع نامعین معکوس مجموع $\xi_1 + \xi_2$ برابر است با:

$$\Upsilon^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۲.۷.۲) داریم:

$$E[\xi_1 + \xi_2] = \int_0^1 \Upsilon^{-1}(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \Phi_1^{-1}(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \Phi_2^{-1}(\alpha) d\alpha = E[\xi_1] + E[\xi_2].$$

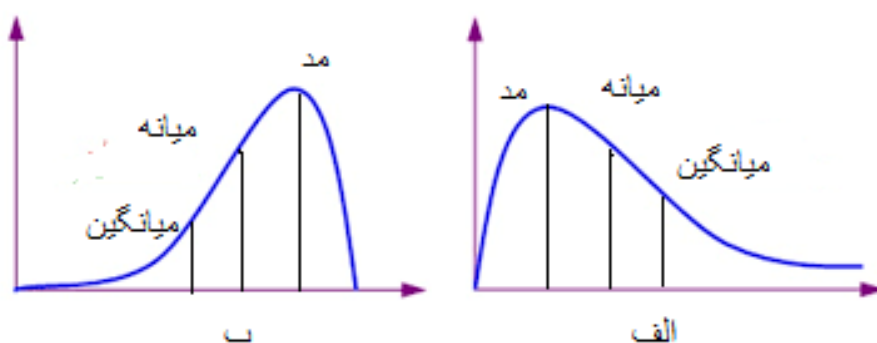
گام سوم: در نهایت برای هر عدد حقیقی a و b از گام دوم و سوم داریم:

$$E[a\xi_1 + b\xi_2] = E[a\xi_1] + E[b\xi_2] = aE[\xi_1] + bE[\xi_2],$$

و قضیه ثابت می‌شود. □

۸.۲ چولگی در فضای عدم قطعیت

بررسی چولگی، برای سرمایه‌گذاری و مسائل مالی مهم است. بیشتر مجموعه‌های داده شامل قیمت سهام، بازده دارایی دارای چولگی مثبت و منفی باشند در حالی که توزیع نرمال دارای چولگی صفر است. با فهم این که داده به کدام سمت چوله است (شکل ۱۴.۲)، یک سرمایه‌گذار می‌تواند نقطه داده آتی را بهتر تخمین بزند که از میانگین بیشتر یا کمتر است. همه سرمایه‌گذاران اعم از حرفه‌ای و غیر حرفه‌ای، هر روزه جداول قیمت را نگاه می‌کنند و سعی می‌کند در شرکت‌هایی سرمایه‌گذاری کنند که چولگی مثبت دارند. مفهوم چولگی به



شکل ۱۴.۲: نمودارهای چولگی، (الف: چوله به راست، ب: چوله به چپ)

عنوان سومین گشتاور مرکزی تعریف می‌شود. اکثر کارهای منطقی انجام شده در مسأله‌ی انتخاب سبدسهم با استفاده از دو گشتاور اول توزیع بازگشت انجام شده‌اند. بسیاری از محققان معتقدند تنها در صورتی می‌توان از گشتاورهای بالاتر صرف نظر کرد که یا توزیع

بازگشت متقارن است (مثلاً نرمال) یا توزیع بازگشت در انتخاب سرمایه‌گذاران مؤثر نیست. ساموئلسون^{۱۴} نشان داد که گشتاورهای بالاتر در انتخاب سبدسهم برای سرمایه‌گذاران اهمیت دارند و تقریباً همه‌ی سرمایه‌گذاران در انتخاب دو سبدسهم، اگر میانگین و واریانس هر دو برابر باشند، سبدي را انتخاب می‌کنند که گشتاور سوم بزرگتری دارد [۳۷]. توضیحات فوق ما را متقاعد می‌کند که چولگی باید به عنوان گشتاور مرکزی سوم، به مدل میانگین واریانس افزوده شود [۲].

تعریف ۱.۸.۲. [۲۶] ξ را یک متغیر نامعین در نظر می‌گیریم و k را عدد صحیح مثبت فرض می‌کنیم. سپس $E[\xi^k]$ ، k - مین گشتاور متغیر ξ نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۸.۲. [۲۷] ξ فرض می‌کنیم که یک متغیر نامعین با تابع توزیع Φ و k یک عدد فرد است. آن‌گاه

$$E[\xi^k] = \int_0^{\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{x}))dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(\sqrt[k]{x})dx.$$

برهان. اگر k عددی فرد در نظر گرفته شود، با توجه به (۳۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} E[\xi^k] &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi^k \geq x\}dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi^k \leq x\}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq \sqrt[k]{x}\}dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq \sqrt[k]{x}\}dx \\ &= \int_0^{\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{x}))dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(\sqrt[k]{x})dx. \end{aligned}$$

□

• اگر k عددی زوج در نظر گرفته شود، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} E[\xi^k] &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi^k \geq x\}dx \\ &= \int_0^{\infty} \mathcal{M}\{(\xi \geq \sqrt[k]{x}) \cup (\xi \leq \sqrt[k]{x})\}dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq \sqrt[k]{x}\}dx - \int_0^{\infty} \mathcal{M}\{\xi \leq \sqrt[k]{x}\}dx \\ &= \int_0^{\infty} (1 - \phi(\sqrt[k]{x})) + (\phi(-\sqrt[k]{x}))dx. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۸.۲. [۲۷] ξ را یک متغیر نامعین با تابع توزیع Φ و k را یک عدد حقیقی در نظر می‌گیریم، k - مین گشتاور متغیر ξ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$E[\xi^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\Phi(x).$$

□

برهان. به [۲۷] مراجعه شود.

قضیه ۳.۸.۲. (شنگ-کار^{۱۵} [۳۹]) ξ را یک متغیر نامعین با تابع توزیع Φ و k را یک عدد حقیقی مثبت در نظر می‌گیریم، $k -$ مین گشتاور متغیر ξ به صورت زیر است:

$$E[\xi^k] = \int_0^1 (\Phi^{-1}(\alpha))^k d\alpha.$$

برهان. با استفاده از تغییر متغیر و قضیه ۲.۸.۲ حکم برقرار است. $\square$

طبق تعریف ۴ در [۲۳] چولگی، سومین گشتاور برای امید ریاضی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین طبق قضایای فوق داریم:

$$S[\xi] = \int_0^1 \left(\Phi^{-1}(\alpha) - E[\xi] \right)^3 d\alpha. \quad (۳۷.۲)$$

۱.۸.۲ چولگی برخی متغیرهای نامعین

• فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$S[\xi] = 0. \quad (۳۸.۲)$$

برهان. با توجه به فرمول چولگی در (۳۷.۲)، مقدار امید ریاضی در لم (۱.۷.۲) و معکوس تابع توزیع در (۱۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \int_0^1 \left[(1-\alpha)a + b\alpha - \left(\frac{a+b}{2} \right) \right]^3 d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[a\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + b\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \right]^3 d\alpha \\ &= \frac{(b-a)^3}{64} - \frac{(b-a)^3}{64} = 0. \end{aligned}$$

$\square$

• فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$S[\xi] = \frac{(c-a)^2(c-2b+a)}{32}. \quad (۳۹.۲)$$

برهان. با توجه به فرمول چولگی در (۳۷.۲)، امید ریاضی در لم (۲.۷.۲) و معکوس تابع

توزیع در (۱۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \int_0^{\circ/\Delta} \left[(1 - 2\alpha)a + 2ab - \left(\frac{a + 2b + c}{2} \right) \right]^3 d\alpha \\ &+ \int_{\circ/\Delta}^1 \left[(2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c - \left(\frac{a + 2b + c}{2} \right) \right]^3 d\alpha \\ &= \frac{(a - c)(\Delta a^2 - 2a(4b + c) + 4b^2 + c^2)}{128} - \frac{(a - c)(a^2 - 2ac + 4b^2 - 8bc + 5c^2)}{128} \\ &= \frac{(c - a)^2(c - 2b + a)}{32}. \end{aligned}$$

□

• فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$S[\xi] = \frac{\{(d - a)^2 - (c - b)^2\} \{(d - c) - (b - a)\}}{32}. \quad (40.2)$$

برهان. باتوجه فرمول چولگی در (۳۷.۲)، امید ریاضی در لم (۳.۷.۲) و معکوس تابع توزیع در (۱۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \int_0^{\circ/\Delta} \left[(1 - 2\alpha)a + 2ab - \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right) \right]^3 d\alpha \\ &+ \int_{\circ/\Delta}^1 \left[(2 - 2\alpha)c + (2\alpha - 1)d - \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right) \right]^3 d\alpha \\ &= - \left(\frac{(a - 3b + c + d)^4 - (-3a + b + c + d)^4}{2 \circ 48(a - b)} \right) \\ &- \left(\frac{(a + b + c - 3d)^4 - (a + b - 3c + d)^4}{2 \circ 48(c - d)} \right) \\ &= \frac{\{(d - a)^2 - (c - b)^2\} \{(d - c) - (b - a)\}}{32}. \end{aligned}$$

□

• فرض کنید که ξ متغیر نامعین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$S[\xi] = 0. \quad (41.2)$$

برهان. باتوجه فرمول چولگی در (۳۷.۲)، امید ریاضی در لم (۴.۷.۲) و معکوس تابع

توزیع در (۱۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \int_0^1 \left[e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - e \right]^3 d\alpha \\ &= \frac{3\sigma^3\sqrt{3}}{\pi} \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \right]^3 d\alpha \\ &= \frac{3\sigma^3\sqrt{3}}{\pi} \left[\int_0^{0.5} \left[\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \right]^3 d\alpha + \int_{0.5}^1 \left[\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \right]^3 d\alpha \right] \\ &= \frac{3\sigma^3\sqrt{3}}{\pi} (-5/4 \cdot 926 + 5/4 \cdot 926) = 0. \end{aligned}$$

□

• فرض کنید ξ متغیر نامعین لگ نرمال $\xi \sim \text{LOGN}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$S[\xi] = \infty. \quad (42.2)$$

برهان. باتوجه فرمول چولگی در (۳۷.۲)، امید ریاضی در لم (۵.۷.۲) و معکوس تابع توزیع در (۱۴.۲) داریم:

- اگر $\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} < 1$ ، آن گاه:

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \int_0^1 \left[\exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right) - \exp(e)\sigma\sqrt{3} \csc(\sigma\sqrt{3}) \right]^3 d\alpha \\ &= \exp(3e) \int_0^1 \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}} - \sigma\sqrt{3} \csc(\sigma\sqrt{3}) \right]^3 d\alpha \\ &= \infty. \end{aligned}$$

- اگر $\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \geq 1$ ، آن گاه:

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \int_0^1 \left[\exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right) - \infty \right]^3 d\alpha \\ &= \infty. \end{aligned}$$

□

۹.۲ ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می تواند به عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب سبد سهام استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در فضای عدم قطعیت ارائه

می‌شود.

تعریف ۱.۹.۲. فرض می‌کنیم ξ یک متغیر نامعین و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان است. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\text{VaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\text{VaR}(\beta) = \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\}. \quad (43.2)$$

قضیه ۱.۹.۲. برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ داریم

$$\text{VaR}(\beta) = \Phi^{-1}(1 - \beta). \quad (44.2)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\beta) &= \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\} \\ &= \sup\{x \mid \Phi(x) \leq 1 - \beta\} \\ &= \sup\{x \mid x \leq \Phi^{-1}(1 - \beta)\} \\ &= \Phi^{-1}(1 - \beta). \end{aligned}$$

□

۱.۹.۲ ارزش در معرض ریسک برخی از متغیرهای نامعین

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = a\beta + b(1 - \beta), \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (45.2)$$

برهان. با استفاده از (۳.۲) و قضیه (۱.۹.۲) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a, \\ \frac{r - a}{b - a}, & a \leq r < b, \\ 1, & r \geq b. \end{cases} \quad (46.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1 - r) = (1 - r)b + ar, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (47.2)$$

□

- فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2b(1 - \beta) + a(2\beta - 1), & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - 2\beta)c + 2b\beta, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (48.2)$$

برهان. با استفاده از (4.2) و قضیه (1.9.2) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r - a}{2(b - a)}, & a \leq r < b, \\ \frac{r + c - 2b}{2(c - b)}, & b \leq r < c, \\ 1, & r \geq c. \end{cases} \quad (49.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1 - r) = \begin{cases} 2b(1 - r) + a(2r - 1), & 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - 2r)c + 2br, & \frac{1}{2} \leq r < 1. \end{cases} \quad (50.2)$$

□

- فرض کنید ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2b(1 - \beta) + a(2\beta - 1), & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - 2\beta)d - 2\beta c, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (51.2)$$

برهان. با استفاده از (5.2) و قضیه (1.9.2) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r - a}{2(b - a)}, & a \leq r < b, \\ \frac{1}{2}, & b \leq r < c, \\ \frac{r + d - 2c}{2(d - c)}, & c \leq r < d, \\ 1, & r \geq d. \end{cases} \quad (52.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \begin{cases} \mathfrak{Z}b(1-r) + a(\mathfrak{Z}r - 1), & 0 < r \leq \frac{1}{\mathfrak{Z}}, \\ (1 - \mathfrak{Z}r)d - \mathfrak{Z}rc, & \frac{1}{\mathfrak{Z}} \leq r < 1. \end{cases} \quad (53.2)$$

□

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = e + \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{Z}}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \right). \quad (54.2)$$

برهان. با استفاده از (۶.۲) و قضیه (۱.۹.۲) داریم:

$$\Phi(r) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-r)}{\sigma\sqrt{\mathfrak{Z}}}\right) \right)^{-1}, \quad (55.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = e + \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{Z}}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right). \quad (56.2)$$

□

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \exp\left(e - \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{Z}}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \right)\right). \quad (57.2)$$

برهان. با استفاده از (۷.۲) و (۱.۹.۲) قضیه داریم:

$$\Phi(r) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln r)}{\sigma\sqrt{\mathfrak{Z}}}\right) \right)^{-1}, \quad (58.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \exp\left(e - \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{Z}}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{r}{1-r}\right) \right)\right). \quad (59.2)$$

□

۱۰.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط در فضای عدم قطعیت

تعریف ۱.۱۰.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان است. در این صورت ارزش در معرض ریسک مشروط از ξ تابع $CVaR : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$CVaR(\beta) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 VaR(r) dr. \quad (60.2)$$

۱.۱۰.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط برخی از متغیرهای نامعین

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$CVaR(\beta) = \frac{a + b - 2b\beta - \beta^2(a + b)}{2(1 - \beta)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (61.2)$$

برهان. با توجه به (45.2) و (60.2) داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 (ar + b(1-r)) dr \\ &= \frac{a + b - 2b\beta - \beta^2(a + b)}{2(1 - \beta)}, \end{aligned}$$

□

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$CVaR(\beta) = \begin{cases} \frac{-a + 6b - c - 4\beta(2b - a) - 4\beta^2(a - b)}{4(1 - \beta)}, & 0 < \beta \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{b - c\beta + (b - c)\beta^2}{1 - \beta}, & \frac{1}{4} \leq \beta \leq 1. \end{cases} \quad (62.2)$$

برهان. با توجه به (48.2) و (60.2)

برای $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 (2b(1-r) + a(2r-1)) dr \\ &= \frac{-a + 6b - c - 4\beta(2b - a) - 4\beta^2(a - b)}{4(1 - \beta)}, \end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 ((1-r)c + rbr) dr \\ &= \frac{b - c\beta + (b-c)\beta^2}{1-\beta}. \end{aligned}$$

□

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$(۶۳.۲) \quad CVaR(\beta) = \begin{cases} \frac{-a + 3b - 3c - d - 4\beta(2b-a) - 4\beta^2(a-b)}{4(1-\beta)}, & 0 < \beta \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{-c - d\beta + (d+c)\beta^2}{1-\beta}, & \frac{1}{4} \leq \beta < 1. \end{cases}$$

برهان. با توجه به (۵۱.۲) و (۶۰.۲)

برای $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 (2b(1-r) + a(2r-1)) dr \\ &= \frac{-a + 3b - 3c - d - 4\beta(2b-a) - 4\beta^2(a-b)}{4(1-\beta)}, \end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 ((1-r)d - rrc) dr \\ &= \frac{-c - d\beta + (d+c)\beta^2}{1-\beta}. \end{aligned}$$

□

• فرض کنید ξ یک متغیر نامعین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$(۶۴.۲) \quad CVaR(\beta) = e - \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln(1-\beta) + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \frac{\beta \ln \beta}{1-\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

برهان. با توجه به (۵۴.۲) و (۶۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 \left(e + \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{V}}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right) \right) dr \\ &= e - \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{V}}}{\pi} \ln(1-\beta) + \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{V}}}{\pi} \frac{\beta \ln \beta}{1-\beta}. \end{aligned}$$

□

● فرض کنید ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:
(۶۵.۲)

$$CVaR(\beta) = \frac{\exp\left(e - \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{V}}}{\pi}\right) (\pi i - \ln(\beta - 1) + \beta(\ln(1-\beta) - \ln(\beta)))}{1-\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

برهان. با توجه به (۵۷.۲) و (۶۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} CVaR(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 \exp\left(e - \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{V}}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{r}{1-r}\right) \right) \right) dr \\ &= \frac{\exp\left(e - \frac{\sigma\sqrt{\mathfrak{V}}}{\pi}\right) (\pi i - \ln(\beta - 1) + \beta(\ln(1-\beta) - \ln(\beta)))}{1-\beta}. \end{aligned}$$

□

فصل ۳

انتخاب سبدسهم چنددوره‌ای با حداقل تعداد بسته‌های معامله شده

فرآیند انتخاب يك سبدسهم به دو مرحله ی شکل دهی انتظارات و یافتن سبدسهم بهینه براساس این انتظارات تقسیم می شود. سبدسهم به مجموعه ای از سهام^۱ یا سایر دارایی‌های مالی اطلاق می‌شود که به منظور کسب سود، برای دوره مشخصی توسط سرمایه‌گذار، نگهداری می‌شود. در حقیقت مسئله‌ی اساسی سرمایه‌گذار، انتخاب سبدسهمی از دارایی‌های مالی است که به ازای سطح مشخص ریسک‌پذیری وی، حداکثر بازدهی را نصیب او سازد. سبدسهم مذکور را يك سبدسهم بهینه می‌نامند. در این فصل، بر پایه نظریه امکان^۲، مدل انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای میانگین-نیم واریانس با دو هدف، بیشینه کردن ثروت نهایی و کمینه کردن ریسک در سراسر افق سرمایه‌گذاری فرموله می‌شود. در این مدل پیشنهادی، ریسک و بازده و هزینه‌های معاملاتی و درجه تنوع و کمترین تعداد معاملات مورد توجه قرار می‌گیرد. مطالب این فصل از مرجع [۲۵] استخراج شده است.

^۱ Stock

^۲ Possibility Theory

۱.۳ پیشینه‌ی تحقیق

در سال ۱۹۵۲ میلادی، هری مارکوویتز مدل میانگین-واریانس را برای انتخاب سبد سهام ارائه داد که مبنایی بر تئوری مدرن سبد سرمایه گردید [۳۲]. پیش از ارائه این تئوری سرمایه‌گذاران علیرغم آشنایی با مفاهیم ریسک و بازده، قادر به اندازه‌گیری آن به روش کمی نبودند. مارکوویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع بخشی در سبد سرمایه‌گذاری به‌طور عام و سبد سهام به‌طور خاص را بسط و گسترش داد.

نظریه مدرن سبد سرمایه MPT ^۳ براساس رابطه بازدهی و ریسک محاسبه شده از طریق واریانس و انحراف معیار بازدهی تبیین می‌شود. نظریه فرامدرن سبد سرمایه $PMPT$ ^۴ براساس رابطه ریسک نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذار و معیار انتخاب سبد سرمایه بهینه می‌پردازد (جهت مطالعه بیشتر به [۱۵] و [۱۷] مراجعه شود). در رویکرد مارکوویتز بازده دارایی‌ها به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود که احتمال آن‌ها از تابع توزیع نرمال به دست می‌آید. میانگین به عنوان معیار کارایی سبد سرمایه و انحراف معیار هم به عنوان شاخص ریسک سبد سرمایه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های اصلی مدل مارکوویتز عبارتند از بازده مورد انتظار، ماتریس واریانس-کواریانس بازدهی دارایی‌ها و ضریب همبستگی بین بازدهی‌ها [۳۸]. متأسفانه مدل مارکوویتز یک سری معایب و فرضیات غیر واقعی دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. با افزایش تعداد دارایی، حجم محاسبات ماتریس کواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.
۲. محدودیت‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارد، در مدل مارکوویتز در نظر گرفته نشده است، همانند محدودیت سهام ثابت در سبد سرمایه، هزینه‌های معاملاتی^۵، خرید آستانه‌ای^۶، معاملات بلوکی، معادلات سهام در دسته‌های ثابت و...، اکثر این محدودیت‌ها از توابع غیرخطی پیروی می‌کنند که مدل‌ها را برای حل دچار پیچیدگی می‌نماید.
۳. فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارایی‌ها فرض قابل قبولی نیست.
۴. معیار عمومی ریسک، واریانس و یا انحراف معیار است که این معیار یک دارایی با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است. اگر این دو خصوصیت برای دارایی وجود نداشته باشد، واریانس معیار مناسبی نیست.

در سال ۱۹۵۹ مارکوویتز به مزایای ریسک نامطلوب اشاره کرد [۱۶]. او به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت مایل به حداقل ساختن ریسک نامطلوب هستند، نخست اینکه

^۳Modern Portfolio Theory

^۴Post-modern Portfolio Theory

^۵Transaction Cost

^۶Cardinality Constraint

سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم وقتی که توزیع متغیرهای تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، آن‌گاه معیار ریسک نامطلوب مفید خواهد بود.

لی و لروو^۷ [۲۰]، مدلی به منظور بهینه سازی سبد سرمایه با به کارگیری برنامه‌ریزی آرمانی ارائه نمودند. چندی بعد در سال ۱۹۸۰ لی و چیسیر^۸ [۴۰]، نگرش برنامه‌ریزی آرمانی چند معیاره^۹ را مطرح کردند. کونو و یامازاکی در سال ۱۹۹۱، مدلی از طریق برنامه ریزی خطی برای بهینه سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند. پس از آن در سال ۱۹۹۷، اسپرانزا و مانسینی^{۱۰} [۳۱]، مدلی از برنامه‌ریزی صحیح آمیخته^{۱۱} را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه دادند و برای حل آن از الگوریتم‌های ابتکاری کمک گرفتند و مدل را برای بازار سهام میلان آزمایش کردند. سال ۱۹۹۸ یونگ^{۱۲} [۴۴]، مدل بهینه سازی سبد سرمایه قابل حل توسط برنامه ریزی خطی را ارائه کرد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف شده و آن را رویکرد "مینیماکس"^{۱۳} نامید. سال ۱۹۹۹ ژیا و همکاران [۴۲] مدلی خاص را معرفی کردند. در فوریه همین سال چانگ^{۱۴} و همکاران [۶]، به ارائه مدلی پارامتریک و غیرخطی جهت بهینه سازی سهام پرداختند. در ادامه در نوامبر همین سال، جوناس پالمکوئیست^{۱۵} و همکارانش [۱۹] به معرفی بهینه سازی سبد سرمایه با محدودیت‌ها و تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی، مدلی از نوع برنامه ریزی خطی ارائه دادند. در سال ۲۰۰۲ لوبو^{۱۶} و همکاران [۲۹] به بهینه سازی سبد با اعمال هزینه‌های معاملات خطی و ثابت پرداختند. در همین سال، کریستوس پاپاریستودولو^{۱۷} [۳۳] به ارائه مدلهایی در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مسأله‌ای متشکل از ۵ سهام در دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای به دست آمده در هر مدل پرداخت. در سال ۲۰۰۳ آلکسی چخلو^{۱۸} و همکاران در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه سازی سبد سرمایه با محدودیت‌های کاهش دهنده» به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت. سپس در همان سال مانسینی^{۱۹} و همکارانش [۳۰] به معرفی مدل‌های برنامه ریزی خطی پرداخته اند.

در سال ۲۰۰۴ گاندریو^{۲۰} و همکاران برای حل مسائل بهینه سازی غیرخطی سبد سرمایه،

^۷Lee and Lerro^۸Lee and Chesser^۹Multi-Criteria Goal Programming^{۱۰}Mansini and Speranza^{۱۱}Mixed Integer Programming^{۱۲}Young^{۱۳}Minimax^{۱۴}Chang^{۱۵}Palmquist^{۱۶}Lobo^{۱۷}Papahristodoulou^{۱۸}Alexi Chekhlov^{۱۹}Mansini^{۲۰}Gandryv

روش نقطه درونی اولیه - دوگان را معرفی کردند.

تجربه‌ها نشان داده شده است که سرمایه‌گذاران به سرمایه‌گذاری بلند مدت علاقمندند، بنابراین طبیعی است که مدل‌های سبدهای چند دوره‌ای تفسیر و بررسی شود. بسیاری از محققان از جمله التون^{۲۱} [۹]، فاما^{۲۲} [۱۰] و هاکنسون^{۲۳} [۱۴] مطالعاتی در مورد مسأله بهینه‌سازی سبدهای چند دوره‌ای انجام داده‌اند.

گلپینار^{۲۴} و راستم^{۲۵} فرمول مینیماکس، مسأله بهینه‌سازی سبدهای چند دوره‌ای میانگین-واریانس مطرح کردند [۱۳]. فو^{۲۶} انتخاب سبدهای میانگین-واریانس زمان پیوسته را تحت نرخ‌های بهره مختلف برای قرض دادن و قرض گرفتن در بازار ناکامل پیشنهاد داد [۱۲]. سلیکیورت^{۲۷} چندین مدل بهینه‌سازی سبدهای چند دوره‌ای مطرح کرد در حالی که بازار شامل چندین دارایی ریسکی و دارایی بدون ریسک بود [۷]. بادر نظر گرفتن عوامل انسانی، متوجه می‌شویم که فازی بسیار بیشتر از احتمال به بازار حقیقی نزدیک است [۲۴].

با گسترش کاربرد نظریه فازی در [۴۵] بیشتر محققین به این موضوع پی بردند که می‌توانند از نظریه مجموعه فازی استفاده کنند تا ابهامات را دسته بندی کنند که برای اطلاعات بیشتر به [۵]، [۱۱]، [۴۱] و [۴۷] مراجعه شود.

سجادی، در مورد مسأله بهینه‌سازی سبدهای چند دوره‌ای فازی با نرخ مختلف قرض دادن ارائه‌ای داشت [۲۵]. ژنگ^{۲۸} مدل میانگین-نیم‌واریانس-آنتروپی را برای انتخاب سبدهای چند دوره‌ای ارائه داد [۴۶]. همچنین لیو مدل بهینه‌سازی سبدهای چند دوره‌ای با چند معیار مطرح کرد [۲۳].

۲.۳ مقدمات

ابتدا مروری بر مفاهیم فازی مرتبط با این فصل داریم.

فرض می‌کنیم A یک عدد فازی باشد؛ یعنی زیرمجموعه فازی A از خط حقیقی $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $\mu_A: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ است [۸]، به‌طوری‌که

۱. A نرمال باشد؛ یعنی عنصر x_0 وجود داشته باشد که $\mu_A(x_0) = 1$ ،

۲. A محدب فازی باشد؛ یعنی:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \lambda \in [0, 1]).$$

^{۲۱} Elton

^{۲۲} Fama

^{۲۳} Hakansson

^{۲۴} Gulpinar

^{۲۵} Rustem

^{۲۶} Fu

^{۲۷} C, elikyurt

^{۲۸} Zhang

۳. μ_A از بالا نیمه پیوسته باشد؛

۴. $supp(A)$ کران دار باشد و که $supp(A) = cl \{x \in \mathbb{R} | \mu_A \geq \gamma\}$ و cl مجموعه γ - برش A است و با این نماد نشان داده می شود $[A]^\gamma = [\underline{a}(\gamma), \bar{a}(\gamma)]$.

خانواده‌ی اعداد فازی به صورت $\mathcal{F}$ تعریف می شود. برای هر $A \in \mathcal{F}$ مجموعه γ - برش A ، $[A]^\gamma = [\underline{a}(\gamma), \bar{a}(\gamma)]$ تعریف می شود. کارلسون^{۲۹} و فوولر^{۳۰} ارزش میانگین ممکن^{۳۱} یک عدد فازی را چنین تعریف کردند [۴]:

$$E(A) = \int_0^1 \gamma(\underline{a}(\gamma) + \bar{a}(\gamma)) d\gamma. \quad (1.3)$$

سعیدی فر و پاشا^{۳۲} [۳۶] چنین در نظر گرفتند که اگر $f(\gamma) = 2\gamma$ سپس پایین ترین و بالاترین واریانس ممکن A این گونه تعریف می شود:

$$Var^-(A) = 2 \int_0^1 \gamma(E(A) - \underline{a}(\gamma))^2 d\gamma, \quad (2.3)$$

$$Var^+(A) = 2 \int_0^1 \gamma(E(A) - \bar{a}(\gamma))^2 d\gamma. \quad (3.3)$$

اگر A عدد فازی متقارن^{۳۳} باشد، بنابراین؛ $Var^-(A) = Var^+(A)$. اگر دو عدد فازی A و B و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ را در نظر گرفته شود [۴] سپس ارزش میانگین ممکن به صورت زیر برقرار است:

$$E(\lambda A + \mu B) = \lambda E(A) + \mu E(B). \quad (4.3)$$

برای دو عدد فازی A با $[A]^\gamma = [\underline{a}(\gamma), \bar{a}(\gamma)]$ و B با $[B]^\gamma = [\underline{b}(\gamma), \bar{b}(\gamma)]$ ، بالاترین و پایین ترین نیم واریانس ممکن بین A و B چنین بیان می شوند:

$$Cov^+(A, B) = 2 \int_0^1 [E(A) - \bar{a}(\gamma)][E(B) - \bar{b}(\gamma)] d\gamma, \quad (5.3)$$

$$Cov^-(A, B) = 2 \int_0^1 [E(A) - \underline{a}(\gamma)][E(B) - \underline{b}(\gamma)] d\gamma. \quad (6.3)$$

مطابق قضیه ۲ در [۴۶] داریم:

قضیه ۱.۲.۳. [۴۶] اعداد فازی $A_1, A_2, \dots, A_n$ و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. داریم:

$$Var^-(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 Var^-(A_i) + 2 \sum_{i < j=1}^n \lambda_i \lambda_j Cov^-(A_i, A_j), \quad (7.3)$$

^{۲۹}Carlson

^{۳۰}Fullér

^{۳۱}Possibilistic Expected Value

^{۳۲}Pasha

^{۳۳}Symmetrical

$$Var^+(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 Var^+(A_i) + 2 \sum_{i < j=1}^n \lambda_i \lambda_j Cov^+(A_i, A_j). \quad (۸.۳)$$

مثال ۱.۲.۳. تابع عضویت عدد فازی دوزنقه‌ای $A = (a, b, \alpha, \beta)$ یا به عبارت دیگر $A = (a - \alpha, a, b, b + \beta)$ با سطح تحمل^{۳۴} $[a, b]$ و عرض چپ $\alpha > 0$ و عرض راست $\beta > 0$ به فرم زیر است

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha}, & a - \alpha \leq x \leq a, \\ 1, & x \in [a, b], \\ 1 - \frac{x-b}{\beta}, & b \leq x \leq b + \beta, \\ 0, & O.w. \end{cases} \quad (۹.۳)$$

طبق توضیحات فوق، $supp$ عدد فازی دوزنقه‌ای A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A]^\gamma = [a - (1 - \gamma)\alpha, b + (1 - \gamma)\beta], \quad \forall \gamma \in [0, 1],$$

زیرا

$$\mu_A(x) = 1 - \frac{a-x}{\alpha} \geq \gamma \implies \frac{\alpha - a + x}{\alpha} \geq \gamma \implies x \leq a - (1 - \gamma)\alpha.$$

$$\mu_A(x) = 1 - \frac{x-b}{\beta} \geq \gamma \implies \frac{\beta + b - x}{\beta} \geq \gamma \implies x \geq b + (1 - \gamma)\beta.$$

طبق (۱.۳) ارزش میانگین ممکن A به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E(A) &= \int_0^1 \gamma(\underline{a}(\gamma) + \bar{a}(\gamma)) d\gamma \\ &= \int_0^1 \gamma(a - (1 - \gamma)\alpha + b + (1 - \gamma)\beta) d\gamma \\ &= \int_0^1 \gamma((a + b + \beta - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta)) d\gamma \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{\beta - \alpha}{6}. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

با استفاده از (۱۰.۳) و (۱۹.۳) پایین ترین و بالاترین واریانس ممکن عدد فازی دوزنقه‌ای

A این گونه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Var^-(A) &= 2 \int_0^1 \gamma (E(A) - \underline{a}(\gamma))^2 d\gamma \\ &= 2 \int_0^1 \gamma \left(\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\beta-\alpha}{6} \right) - a - (1-\gamma)\alpha \right)^2 d\gamma \\ &= 2 \int_0^1 \gamma \left(\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\beta-\alpha}{6} \right)^2 + (a - (1-\gamma)\alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{a+b}{2} + \frac{\beta-\alpha}{6} \right) (a - (1-\gamma)\alpha) \right) d\gamma \\ &= \left(\frac{b-a}{2} + \frac{\alpha+\beta}{6} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{18}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

به‌طور مشابه داریم:

$$Var^+(A) = \left(\frac{b-a}{2} + \frac{\alpha+\beta}{6} \right)^2 + \frac{\beta^2}{18}. \quad (12.3)$$

۳.۳ فرموله کردن مدل بهینه سبد سهام چنددوره‌ای

در این بخش ابتدا فرض می‌شود که سرمایه‌گذار به تخصیص ثروت اولیه (W_1) خود به n دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک در شروع دوره اول می‌پردازد و ثروت نهایی‌اش در پایان دوره T فراهم می‌شود. سرمایه‌گذار ثروت خود را برای شروع هر $T-1$ دوره متوالی تنظیم می‌کند. فرض کنید نرخ بازده دارایی ریسکی در هر دوره، متغیرهای فازی ذوزنقه‌ای در نظر گرفته می‌شود و نرخ بازده دارایی بدون ریسک عددی ثابت است. برای فهم و درک بهتر نمادگذاری زیر مطرح و در سراسر این بخش از آن‌ها استفاده می‌شود. برای $i = 1, 2, \dots, n$ و $t = 1, 2, \dots, T$ قرارداد می‌کنیم:

$p_{t,i}$ ارزش هر سهم اوراق i در دوره t ؛

$x_{t,i}$ تعداد معامله بسته‌های سرمایه‌گذاری شده اوراق i در دوره t ؛

$x_{t,n+1}$ مقدار دارایی بدون ریسک سرمایه‌گذاری شده در دوره t ؛

W_t سرمایه موجود برای شروع دوره t ؛

$\omega_{t,i}$ نسبت سرمایه‌گذاری اوراق i در دوره t ؛

$\omega_{t,n+1}$ نسبت سرمایه‌گذاری دارایی بدون ریسک در دوره t ؛

$r_{t,i}$ نرخ بازده اوراق i در دوره t ؛

$c_{t,i}$ نرخ هزینه معاملاتی اوراق i در دوره t ؛

$r_{p,t}$ نرخ بازده سبد سهام در دوره t ؛

$R_{P,t}$ بازده سبد سهام در دوره t ؛

$r_f(t)$ نرخ بازده دارایی بدون ریسک در دوره t ؛

r_t حداقل نرخ بازده از قبل تعیین شده سبد در دوره t ؛

δ_t حداکثر سطح تحمل ریسک از قبل تعیین شده در دوره t ؛

e_t حداقل درجه تنوع از قبل تعیین شده سبد در دوره t .

۱.۳.۳ کمترین بسته‌های معامله شده

بیشتر مدل‌های انتخاب سبد سهام موجود پیشنهاد شده بر فرض آن است که سرمایه‌گذاری کاملاً نسبی است، به نحوی که نسبت سرمایه‌گذاری سبد سهام برای هر اوراق می‌تواند با اعداد حقیقی نمایش داده شود. اگرچه در بازارهای مالی حقیقی، معاملات معمولاً با کمترین تعداد در ارتباط است. برای اوراق مختلف، حداقل مقدار متفاوت است؛ مثلاً برای یک اوراق 100 سهم و برای دیگری 500 و ... ولی کمتر از 100 سهم نداریم. اگر $y_{t,i}$ ارزش بازاری اوراق i در دوره t و N_i کمترین واحد اوراق i باشد، در این صورت ارزش هر تعداد معامله 35 برابر است با $p_{t,i} = N_i y_{t,i}$. بخشی از سرمایه کل قابل استفاده که سرمایه‌گذار تصمیم می‌گیرد روی اوراق i در دوره t سرمایه‌گذاری کند برابر $x_{t,i} p_{t,i}$ است.

۲.۳.۳ بازده، ریسک، درجه تنوع

در این قسمت ریسک روی نرخ بازده سبد در هر دوره بین پایین‌ترین حد واریانس و درجه تنوع که به وسیله نسبت آنتروپی اندازه‌گیری می‌گردد [۱۸]. برای برآورد هزینه‌های معاملاتی، ما فرض می‌کنیم که تابعی V - شکل (قدرمطلق) است که تفاوت بین t - مین دوره سبد $x_t = (x_{t-1,1}, x_{t-1,2}, \dots, x_{t-1,n}, x_{t-1,n+1})$ و $t-1$ - مین دوره سبد $x_{t-1} = (x_{t-1,1}, x_{t-1,2}, \dots, x_{t-1,n}, x_{t-1,n+1})$ است. لذا، هزینه معاملاتی اوراق i - ام در دوره t به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$C_{t,i} = c_{t,i} |x_{t,i} - x_{t-1,i}| p_{t,i}, \quad (13.3)$$

که می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد [۴۳]:

$$C_{t,i} = c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-), \quad (14.3)$$

که در آن $d_{t,i}^+ = \frac{1}{\gamma} \{ |x_{t,i} - x_{t-1,i}| p_{t,i} + (x_{t,i} - x_{t-1,i}) p_{t,i} \}$ و $d_{t,i}^- = \frac{1}{\gamma} \{ |x_{t,i} - x_{t-1,i}| p_{t,i} - (x_{t,i} - x_{t-1,i}) p_{t,i} \}$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$(x_{t,i} - x_{t-1,i}) p_{t,i} = d_{t,i}^+ - d_{t,i}^-,$$

$$d_{t,i}^+ \cdot d_{t,i}^- = 0, d_{t,i}^-, d_{t,i}^+ \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T.$$

یادآور می‌شویم که $d_{t,i}^+$ و $d_{t,i}^-$ به‌طور همزمان نمی‌توانند صفر شوند. از آنجایی که دارایی ریسکی، هزینه مبادلاتی قابل توجهی ندارد، بنابراین هزینه مبادلاتی کل سبد سهام در دوره t به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$C_t = \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-). \quad (15.3)$$

بازده سبد سهام $x_t = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,n}, x_{t,n+1})$ در دوره t به صورت زیر است:

$$R_{P,t} = \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} r_{t,i} + r_f(t) x_{t,n+1}, \quad (16.3)$$

که در آن $x_{t,n+1} = W_t - \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} - C_t$ است.

سرمایه قابل استفاده برای شروع دوره $t+1$ به‌صورت زیر است:

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (1 + r_{t,i}) + (W_t - \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} - C_t) (1 + r_f(t)). \quad (17.3)$$

بدین ترتیب ثروت نهایی فراهم شده در پایان دوره T - آ‌م و قابل استفاده در شروع دوره $T+1$ - آ‌م بدین گونه است:

$$(18.3)$$

$$W_{T+1} = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (r_{t,i} - r_f(t)) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) - \sum_{t=1}^T C_t \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)).$$

اگر $r_{t,i}$ یک متغیر فازی باشد، آن‌گاه ثروت نهایی متغیر فازی می‌شود. با توجه به (۱.۳)

ارزش میانگین ممکن ثروت نهایی W_{T+1} به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E(W_{T+1}) &= W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (E(r_{t,i}) - r_f(t)) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)). \end{aligned} \quad (19.3)$$

باتوجه به (۱۰.۳) و (۱۹.۳) ارزش میانگین متغیر فازی دوزنقه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} E(W_{T+1}) &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i}}{\gamma} + \frac{\beta_{t,i} - \alpha_{t,i}}{\epsilon} - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) + W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)). \end{aligned} \quad (20.3)$$

قرارداد می‌کنیم که $\omega_t = (\omega_{t,1}, \omega_{t,2}, \dots, \omega_{t,n}, \omega_{t,n+1})$ نسبت سرمایه‌گذاری سبدسهم در دوره t باشد.

بنابراین نرخ بازده سبدسهم در دوره t به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(r_{p,t}) = \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} - \alpha_{t,i}}{6} \right) + \omega_{t,n+1} r_f(t), \quad (21.3)$$

یادآور می‌شویم که $\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{t,i} = 1$ و $\omega_{t,i} = \frac{x_{t,i} p_{t,i}}{W_t - \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-)}$ می‌باشد.

با توجه به (۱۱.۳) پایین‌ترین نیم‌واریانس ممکن نرخ بازده روی سبدسهم در دوره t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Var^-(r_{p,t}) = \left[\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{b_{t,i} - a_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} + \alpha_{t,i}}{6} \right) \right]^2 + \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \alpha_{t,i} \right)^2. \quad (22.3)$$

بنابراین پایین‌ترین نیم‌واریانس در سراسر دوره به صورت زیر است:

$$V(x) = \sum_{t=1}^T \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{b_{t,i} - a_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} + \alpha_{t,i}}{6} \right) \right]^2 + \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \alpha_{t,i} \right)^2 \right\}. \quad (23.3)$$

با توجه به اطلاعات فوق می‌توان از مسأله برنامه‌ریزی دو هدفه^{۳۶} زیر برای انتخاب سبد بهینه استفاده نمود.

محدودیت (۲۴.۳) نشان می‌دهد که جمع هر دو مقدار سرمایه‌گذاری شده در دوره t و سرمایه متناظر مصرف شده در هزینه‌های معاملاتی در دوره t نباید از سرمایه موجود در شروع دوره t ، (W_t) تجاوز کند.

محدودیت (۲۵.۳) چنین معنی می‌دهد که نرخ بازده سبد سهم در دوره t باید از کمترین نرخ بازده مورد انتظار معین (r_t) بیشتر باشد.

محدودیت (۲۶.۳) مستلزم آن است که ریسک نرخ بازده سبد سهم در دوره t باید کوچک‌تر یا مساوی از ماکزیمم سطح تحمل ریسک (δ_t) باشد.

محدودیت (۲۷.۳) نشان می‌دهد که درجه تنوع سبد سهم در دوره t باید از کمترین درجه تنوع از قبل تعیین شده (e_t) ، بیشتر باشد.

محدودیت (۲۸.۳) به ما متذکر می‌شود که مجموع وزن دارایی‌های سبدسهم باید ۱ باشد.

محدودیت (۲۹.۳) بیانگر آن است که ماکزیمم تعداد دارایی در سبد در دوره t کمتر از K باشد (در حالی که K یک عدد صحیح در بازه $[1, n+1]$ است).

$$\begin{aligned}
 P = \left\{ \begin{aligned}
 & \max \quad E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\
 & \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} - \alpha_{t,i}}{6} - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\
 & \min \quad V(x) = \sum_{t=1}^T \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{b_{t,i} - a_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} + \alpha_{t,i}}{6} \right) \right]^2 + \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \alpha_{t,i} \right)^2 \right\} \\
 & s.t. \quad \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} + \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \leq E(W_t), \quad (24.3) \\
 & \quad \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} - \alpha_{t,i}}{6} \right) + \omega_{t,n+1} r_f(t) \geq r_t, \quad (25.3) \\
 & \quad \left[\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{b_{t,i} - a_{t,i}}{2} + \frac{\beta_{t,i} + \alpha_{t,i}}{6} \right) \right]^2 + \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \alpha_{t,i} \right)^2 \leq \delta_t \quad (26.3) \\
 & \quad - \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{t,i} \ln(\omega_{t,i}) \geq e_t, \quad (27.3) \\
 & \quad \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{t,i} = 1, \left(\omega_{t,i} = \frac{x_{t,i} p_{t,i}}{W_t - \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-)}, i = 1, 2, \dots, n \right), \quad (28.3) \\
 & \quad \sum_{i=1}^{n+1} \text{sign}(\omega_{t,i}) \leq K, \quad (29.3) \\
 & \quad 0 \leq l_{t,i} \leq x_{t,i} \leq u_{t,i}, x_{t,i} \in \mathbb{Z}, \\
 & \quad (x_{t,i} - x_{t-1,i}) p_{t,i} = d_{t,i}^+ - d_{t,i}^-, \\
 & \quad d_{t,i}^+ - d_{t,i}^- = 0, d_{t,i}^-, d_{t,i}^+ \geq 0, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}, t = \{1, 2, \dots, T\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

فصل ۴

سبد سهام چنددوره‌ای بهینه

۱.۴ مقدمه

در مدل‌های معمولی، پرتفوی همواره از بازده‌های تحقق یافته اوراق بهادار که مربوط به گذشته بوده و با اطلاعات دقیق تاریخی تعیین می‌شوند استفاده می‌شود. با این حال، اطلاعات دقیق همیشه در دسترس نیست و امروزه، با توسعه بازارهای سهام، پیش‌بینی بازده مورد انتظار اوراق بهادار با مقادیر تصادفی نسبتاً سخت است. بنابراین، برای رسیدگی به این قبیل از عدم اطمینان بهتر است که بازده‌های مورد انتظار را بصورت متغیرهایی با توزیع مبهم مانند متغیرهای فازی یا متغیرهای نامطمئن، در مسائل پرتفوی در نظر بگیریم.

در این فصل چند مدل برای مسأله انتخاب سبد سهام چنددوره‌ای در شرایطی که بازده اوراق بهادار نامعین فرض می‌شود، بیان می‌شود. با توجه به اینکه این مسائل به روش‌های معمول قابل حل نیستند ایده اصلی کار، جایگزینی این مدل‌ها با معادل‌های دقیق و قطعی آنها در حالاتی خاص از متغیرهای نامعین (مانند متغیر نامعین خطی، زیگزاگ، دوزنقه‌ای، نرمال و لگ‌نرمال) و سپس حل آن می‌باشد. در این فصل مدل انتخابی در فصل قبل با تغییراتی از قبیل معیار ریسک تغییر پیدا کرده است و برای جایگزینی آن از ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط استفاده شده است و برای دقیق تر شدن مدل، معیار چولگی، به عنوان سومین گشتاور امید ریاضی به آن اضافه شده است.

۲.۴ مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک-چولگی

این مدل در مسأله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به نحوی است که در آن بازده سرمایه‌گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و ارزش در معرض ریسک را به عنوان معیار ریسک و چولگی را برای بررسی تقارن بازده سبد در نظر می‌گیریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E(W_{T+1}) \\ \min \quad VaR(\beta) \\ \max \quad S(X) \\ s.t. \quad \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} + \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \leq E(W_t), \\ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (E(r_{t,i})) + \omega_{t,n+1} r_f(t) \geq r_t, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{t,i} = 1, (\omega_{t,i} = \frac{x_{t,i} p_{t,i}}{W_t - \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-)}, i = 1, 2, \dots, n), \\ 0 \leq x_{t,i}, 0 < x_{t,n+1}, x_{t,i} \in \mathbb{Z}, \quad t = \{1, 2, \dots, T\}. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

۱.۲.۴ معادله‌های قطعی

برای استفاده از روش‌های معمول برای حل مسأله ۱.۴ در آن نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادل دقیق آن‌ها است. همانطور که می‌دانیم اجرا و موفق بودن این فرآیند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل‌های نامعین با معادله‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسأله انتخاب سبد چنددوره‌ای سرمایه مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک-چولگی می‌پردازیم. لازم به ذکر است که مجموعه‌ی تمام محدودیت‌های مدل (۱.۴) را برای سهولت D نام‌گذاری می‌کنیم.

حالت نامعین خطی

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین خطی $r_{t,i} \sim \mathcal{L}(a_{t,i}, b_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ متغیر نامعین خطی است. با استفاده از لم (۱.۷.۲) و (۳۸.۲)

و (۴۵.۲) مدل بهینه (۱.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i}}{\gamma} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min \quad VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (a_{t,i} \beta + b_{t,i} (1 - \beta)) \right\} \\ s.t. \quad x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین زیگزاگ

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین زیگزاگ $r_{t,i} \sim \mathcal{Z}(a_{t,i}, b_{t,i}, c_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ متغیر نامعین زیگزاگ است. با استفاده از لم (۲.۷.۲) و (۳۹.۲) و (۴۸.۲) مدل بهینه (۱.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{\gamma}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + \gamma b_{t,i} + c_{t,i}}{\gamma} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min \quad VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (\gamma b_{t,i} (1 - \beta) + a_{t,i} (\gamma \beta - 1)) \right\} \\ \max \quad S(X) = \frac{1}{\gamma \gamma} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\gamma \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - \gamma b_{t,i} + a_{t,i}) \right) \right\} \\ s.t. \quad x \in D. \end{array} \right. \quad (۲.۴)$$

و برای $\frac{1}{\alpha} < \beta \leq 1$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + \alpha b_{t,i} + c_{t,i}}{\alpha} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left((1 - \alpha \beta) c_{t,i} + \alpha \beta b_{t,i} \right) \right\} \\ \max & S(X) = \frac{1}{\alpha \beta} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - \alpha b_{t,i} + a_{t,i}) \right)^\beta \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین دوزنقه‌ای

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین دوزنقه‌ای $r_{t,i} \sim \mathcal{T}(a_{t,i}, b_{t,i}, c_{t,i}, d_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است. با استفاده از لم (۳.۷.۲)، (۴.۰.۲) و (۵۱.۲) مدل بهینه (۱.۴) برای $\frac{1}{\alpha} < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i} + c_{t,i} + d_{t,i}}{\alpha} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\alpha b_{t,i} (1 - \beta) + a_{t,i} (\alpha \beta - 1) \right) \right\} \\ \max & S(X) = \frac{1}{\alpha \beta} \sum_{t=1}^T \left\{ \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\alpha - \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - b_{t,i}) \right)^\beta \right\} \right. \\ & \left. \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - c_{t,i} - b_{t,i} + a_{t,i}) \right) \right\} \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right. \quad (۳.۴)$$

و برای $\frac{1}{\beta} < \beta \leq 1$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + \beta b_{t,i} + c_{t,i}}{\beta} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min \quad VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} ((1 - \beta) d_{t,i} + \beta c_{t,i}) \right\} \\ \max \quad S(X) = \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - a_{t,i}) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - b_{t,i}) \right)^2 \right\} \\ \quad \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - c_{t,i} - b_{t,i} + a_{t,i}) \right) \right\} \\ s.t. \quad x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین نرمال

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین نرمال $r_{t,i} \sim \mathcal{N}(e_{t,i}, \sigma_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین نرمال است. با استفاده از لم (۴.۷.۲)، (۴۱.۲) و (۵۴.۲) مدل بهینه (۱.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (e_{t,i} - r_f(t)) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min \quad VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(e_{t,i} + \frac{\sigma_{t,i} \sqrt{\beta}}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right) \right) \right\} \\ s.t. \quad x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین لگ نرمال

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین لگ نرمال $r_{t,i} \sim \mathcal{LOGN}(e_{t,i}, \sigma_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین لگ نرمال است. با استفاده از لم (۵.۷.۲) و (۴۲.۲) و (۵۷.۲) مدل بهینه (۱.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود

به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi} \exp(e_{t,i}) \csc(\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi}) - r_f(t)) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & VaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\exp \left(e_{t,i} - \frac{\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi}}{\pi} \left(\ln \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \right) \right) \right) \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

۳.۴ مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک مشروط-چولگی

این مدل در مسأله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به نحوی است که در آن بازده سرمایه گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه، ارزش در معرض ریسک مشروط را به عنوان معیار ریسک و چولگی را برای بررسی تقارن بازده سبد در نظر می گیریم. مدل به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) \\ \min & CVaR(\beta) \\ \max & S(X) \\ s.t. & \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} + \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \leq E(W_t), \\ & \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (E(r_{t,i})) + \omega_{t,n+1} r_f(t) \geq r_t, \\ & \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{t,i} = 1, (\omega_{t,i} = \frac{x_{t,i} p_{t,i}}{W_t - \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-)}, i = 1, 2, \dots, n), \\ & 0 \leq x_{t,i}, 0 < x_{t,n+1}, x_{t,i} \in \mathbb{Z}, \quad t = \{1, 2, \dots, T\}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

۱.۳.۴ معادل‌های قطعی

در روش‌های حل معمول نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادل دقیق آن‌ها است. همانطور که می‌دانیم اجرا و موفق بودن این فرایند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل‌های نامعین با معادل‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسأله انتخاب سبد چنددوره‌ای سرمایه مدل میانگین-ارزش در معرض ریسک مشروط-چولگی می‌پردازیم. لازم به ذکر است که مجموعه‌ی تمام محدودیت‌های مدل (۴.۴) را برای سهولت D نام‌گذاری می‌کنیم.

حالت نامعین خطی

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین خطی $r_{t,i} \sim \mathcal{L}(a_{t,i}, b_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین خطی است. با استفاده از لم (۱.۷.۲)، (۳۸.۲) و (۶۱.۲) مدل بهینه (۴.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\frac{(a_{t,i} + b_{t,i})}{2} - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i} - 2\beta b_{t,i} - \beta^2 (a_{t,i} + b_{t,i})}{2(1 - \beta)} \right) \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین زیگزاگ

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین زیگزاگ $r_{t,i} \sim \mathcal{Z}(a_{t,i}, b_{t,i}, c_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین زیگزاگ است. با استفاده از لم (۲.۷.۲)، (۳۹.۲) و (۶۲.۲) مدل بهینه (۴.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر

تبدیل می‌شود:

(۵.۴)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + \gamma b_{t,i} + c_{t,i}}{\gamma} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{-a_{t,i} + \gamma b_{t,i} - c_{t,i} - \gamma \beta (\gamma b_{t,i} - a_{t,i}) - \gamma \beta \gamma (a_{t,i} - b_{t,i})}{\gamma (1 - \beta)} \right) \right\} \\ \max & S(X) = \frac{1}{\gamma \gamma} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\gamma \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - \gamma b_{t,i} + a_{t,i}) \right) \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

و برای $1 > \beta > \frac{1}{\gamma}$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + \gamma b_{t,i} + c_{t,i}}{\gamma} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{b_{t,i} - c_{t,i} \beta + (b_{t,i} - c_{t,i}) \beta^\gamma}{1 - \beta} \right) \right\} \\ \max & S(X) = \frac{1}{\gamma \gamma} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\gamma \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - \gamma b_{t,i} + a_{t,i}) \right) \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین دوزنقه‌ای

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین دوزنقه‌ای $r_{t,i} \sim \mathcal{T}(a_{t,i}, b_{t,i}, c_{t,i}, d_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است. با استفاده از لم (۳.۷.۲)، (۴۰.۲) و (۶۳.۲) مدل بهینه (۴.۴) برای $\frac{1}{\gamma} < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی

خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + b_{t,i} + c_{t,i} + d_{t,i}}{\Psi} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{-a_{t,i} + \Upsilon b_{t,i} - \Upsilon c_{t,i} - d_{t,i}}{\Psi(1 - \beta)} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\Psi \beta (\Upsilon b_{t,i} - a_{t,i}) + \Psi \beta \Upsilon (a_{t,i} - b_{t,i})}{\Psi(1 - \beta)} \right) \right\} \\ \max & S(X) = \frac{1}{\Psi \Upsilon} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\Upsilon - \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - b_{t,i}) \right)^\Upsilon \right\} \\ & \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - c_{t,i} - b_{t,i} + a_{t,i}) \right)^\Upsilon \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right. \quad (۶.۴)$$

و برای $\frac{1}{\Psi} < \beta \leq 1$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} \left(\left(\frac{a_{t,i} + \Upsilon b_{t,i} + c_{t,i}}{\Psi} \right) - r_f(t) \right) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{-c_{t,i} - d_{t,i} \beta + (d_{t,i} + c_{t,i}) \beta^\Upsilon}{1 - \beta} \right) \right\} \\ \max & S(X) = \frac{1}{\Psi \Upsilon} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - a_{t,i}) \right)^\Upsilon - \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (c_{t,i} - b_{t,i}) \right)^\Upsilon \right\} \\ & \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_{t,i} (d_{t,i} - c_{t,i} - b_{t,i} + a_{t,i}) \right)^\Upsilon \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین نرمال

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین نرمال $r_{t,i} \sim \mathcal{N}(e_{t,i}, \sigma_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین نرمال است. با استفاده از لم (۴.۷.۲)، (۶۴.۲) و (۴۱.۲) مدل بهینه (۴.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل

می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (e_{t,i} - r_f(t)) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(e_{t,i} - \frac{\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi}}{\pi} \ln(1 - \beta) + \frac{\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi}}{\pi} \frac{\beta \ln(\beta)}{1 - \beta} \right) \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

حالت نامعین لگ‌نرمال

فرض کنید $r_{t,i}$ نرخ بازده ورق بهادار i ام در دوره t ام، متغیر نامعین لگ‌نرمال $r_{t,i} \sim \text{LOGN}(e_{t,i}, \sigma_{t,i})$ باشد، در این صورت $\sum_{i=1}^n x_{t,i} r_{t,i}$ یک متغیر نامعین لگ‌نرمال است. با استفاده از لم (۵.۷.۲)، (۴۲.۲) و (۶۵.۲) مدل بهینه (۴.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & E(W_{T+1}) = W_1 \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_{t,i} (d_{t,i}^+ + d_{t,i}^-) \prod_{t=1}^T (1 + r_f(t)) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{t,i} p_{t,i} (\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi} \exp(e_{t,i}) \text{csc}(\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi}) - r_f(t)) \prod_{i=t+1}^T (1 + r_f(i)) \\ \min & CVaR(\beta) = \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{t,i} \left(\frac{\exp(e_{t,i} - \frac{\sigma_{t,i} \sqrt{\Psi}}{\pi})}{1 - \beta} \right) \times \right. \\ & \left. \left(\frac{(\pi i - \ln(\beta - 1) + \beta(\ln(1 - \beta) - \ln(\beta)))}{1 - \beta} \right) \right\} \\ s.t. & x \in D. \end{array} \right.$$

۴.۴ مثال عددی

یک سرمایه‌گذار قصد می‌کند که سرمایه اولیه ۲۰۰۰ دلار را در میان ۵ دارایی (۴ دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک) با افق زمانی برای سه دوره متوالی سرمایه‌گذاری تقسیم کند. در این مثال، قیمت نهایی این سهام را در ژانویه ۶ سال، ۲۰۰۶ تا ۲۰۱۰ گردآوری شده است.

فرض می‌کنیم نرخ بازده سهام متغیر نامعین زیگزاگ است که در جدول ۱.۴، متناظر با این سهام در هر دوره نشان داده شده است. جدول ۲.۴، ارزش بازاری (y_{ti})، این سهام در معامله

جدول ۱.۴: نرخ بازده سهام متغیر نامعین زیگزاگ

دوره	دارایی	$a_{t,i}$	$b_{t,i}$	$c_{t,i}$
$t = 1$	۱	۰/۰۷۳۵	۰/۲۸	۰/۴۲
	۲	۰/۰۶۷۵	۰/۳۰۴۰	۰/۳۸۶
	۳	۰/۰۵۴۰	۰/۲۰۶	۰/۳۵۷
	۴	۰/۰۵	۰/۳۵۴	۰/۳۷۴
$t = 2$	۱	۰/۰۶۶۵	۰/۲۸	۰/۴۹
	۲	۰/۰۴۳	۰/۳۱۳	۰/۳۸۹
	۳	۰/۰۵۵	۰/۲۰۲	۰/۳۸۹
	۴	۰/۰۵۲۵	۰/۳۵۶	۰/۳۷۸
$t = 3$	۱	۰/۰۷۸۵	۰/۲۶۵	۰/۴۸۸
	۲	۰/۰۶۶۵	۰/۳۱۴	۰/۳۸۷
	۳	۰/۰۵۶	۰/۲۱۶	۰/۳۶۷
	۴	۰/۰۵۲	۰/۳۵۴	۰/۳۹۴

جدول ۲.۴: ارزش بازاری هر سهم در هر دوره

دوره	دارایی نوع ۱	دارایی نوع ۲	دارایی نوع ۳	دارایی نوع ۴
$t = 1$	۰/۸۹	۰/۹۳	۱/۰۸	۱/۰۱
$t = 2$	۱/۱۲	۰/۹۷	۱/۲۳	۰/۸۶
$t = 3$	۱/۲۹	۰/۹۸	۱/۱۹	۱/۰۶

برای هر دوره نشان می‌دهد و حداقل مقدار واحد N_i ، ۱۰۰ است. کمترین نرخ بازده مورد انتظار سبد در هر سه دوره سرمایه‌گذاری ۰/۰۸ است. نرخ هزینه معامله $c_{t,i} = ۰/۰۰۳$ و نرخ بازده مورد انتظار دارایی بدون ریسک در هر دوره $r_f = ۰/۰۸$ و نرخ اطمینان $\beta = ۰/۰۱$ فرض می‌شود. با توجه به اطلاعات و جداول فوق مدل (۲.۴) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad E(W_F) = & 2519/424 + 18/7x_{11} + 19/757x_{12} + 15/433x_{13} + \\ & 22/533x_{14} - 0/392|x_{21} - x_{11}| - 0/339|x_{22} - x_{12}| - \\ & 0/43|x_{23} - x_{13}| - 0/301|x_{24} - x_{14}| + 24/086x_{21} + 20/114x_{22} + \\ & 17/535x_{23} + 19/098x_{24} - 0/418|x_{31} - x_{21}| - \\ & 0/318|x_{32} - x_{22}| - 0/386|x_{33} - x_{23}| - 0/343|x_{34} - x_{24}| + \\ & 25/042x_{31} + 18/657x_{32} + 15/916x_{33} + 22/101x_{34}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad VaR(\beta) = & 0/482\omega_{11} + 0/536\omega_{12} + 0/355\omega_{13} + \\ & 0/652\omega_{14} + 0/489\omega_{21} + 0/548\omega_{22} + 0/346\omega_{23} + 0/653\omega_{24} + \\ & 0/448\omega_{31} + 0/557\omega_{32} + 0/373\omega_{33} + 0/65\omega_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad S(x) = & -0/008\omega_{11}^2 - 0/019\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/034\omega_{11}^2\omega_{14} - \\ & 0/007\omega_{11}^2\omega_{11} - 0/016\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/029\omega_{11}^2\omega_{14} - 0/006\omega_{11}^2\omega_{11} - \\ & 0/014\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/026\omega_{11}^2\omega_{14} - 0/007\omega_{11}^2\omega_{11} - 0/016\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/03\omega_{11}^2\omega_{14} - 0/001\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/029\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/007\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/005\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/018\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/004\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/018\omega_{11}^2\omega_{12} + \\ & 0/004\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/031\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/017\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/004\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/03\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/006\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/029\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/002\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/044\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/004\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/018\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/001\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/027\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/004\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/017\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/001\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/025\omega_{11}^2\omega_{12} + 0/004\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/020\omega_{11}^2\omega_{12} - 0/001\omega_{11}^2\omega_{12} - \\ & 0/031\omega_{11}^2\omega_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 89/267x_{11} + 93/279x_{12} + 108/324x_{13} + 101/303x_{14} \leq 2000; \\
 & \circ/336|x_{21} - x_{11}| + \circ/291|x_{22} - x_{12}| + \circ/369|x_{23} - x_{13}| + \\
 & \circ/258|x_{24} - x_{14}| + 112x_{21} + 97x_{22} + 123x_{23} + 86x_{24} - \\
 & 16/\circ32x_{11} - 16/939x_{12} - 13/231x_{13} - 20/176x_{14} \leq 2160; \\
 & \circ/387|x_{31} - x_{21}| + \circ/294|x_{32} - x_{22}| + \circ/357|x_{33} - x_{23}| + \circ/318|x_{34} - \\
 & x_{24}| + \circ/363|x_{21} - x_{11}| + \circ/314|x_{22} - x_{12}| + \circ/399|x_{23} - x_{13}| + \\
 & \circ/279|x_{24} - x_{14}| + 129x_{31} + 98x_{32} + 119x_{33} + \\
 & 106x_{34} - 22/302x_{21} - 18/642x_{22} - 16/236x_{23} - \\
 & 17/684x_{24} - 17/315x_{11} - 18/294x_{12} - 14/29x_{13} - 21/79x_{14} \leq 2332/8; \\
 & \circ/263\omega_{11} + \circ/265\omega_{12} + \circ/206\omega_{13} + \circ/283\omega_{14} + \circ/08\omega_{15} \geq \circ/08; \\
 & \circ/279\omega_{21} + \circ/272\omega_{22} + \circ/212\omega_{23} + \circ/286\omega_{24} + \circ/08\omega_{25} \geq \circ/08; \\
 & \circ/274\omega_{31} + \circ/27\omega_{32} + \circ/214\omega_{33} + \circ/289\omega_{34} + \circ/08\omega_{35} \geq \circ/08; \\
 & \sum_{i=1}^{\Delta} \omega_{t,i} = 1; \left(\omega_{t,i} = \frac{x_{t,i}p_{t,i}}{x_{t,\Delta} + \sum_{i=1}^{\mathfrak{F}} x_{t,i}p_{t,i}} \right); \\
 & x_{t,i} \geq 0; x_{t,n+1} > 0, x_{t,i} \in \mathbb{Z}; i = \{1, 2, \dots, n\}, t = \{1, 2, \dots, T\}.
 \end{aligned}$$

جدول ۳.۴: تعداد معاملات ۴ دارایی در سه دوره در مدل VaR و CVaR

دوره	دارایی نوع ۱	دارایی نوع ۲	دارایی نوع ۳	دارایی نوع ۴
$t = 1$	۱/۰۰	۲/۰۰	۰/۰۰	۱۷/۰۰
$t = 2$	۲/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۷/۰۰
$t = 3$	۰/۰۰	۲/۰۰	۰/۰۰	۲۹/۰۰

جدول ۴.۴: مقدار سرمایه‌گذاری شده از دارایی‌ها در مدل VaR و CVaR

دوره	دارایی ۱	دارایی ۲	دارایی ۳	دارایی ۴	دارایی بدون ریسک
$t = 1$	۸۹/۰۰	۱۸۶/۰۰	۰/۰۰	۱۷۱۷/۰۰	۲/۰۲۴
$t = 2$	۲۲۴/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۳۲۲/۰۰	۳/۴۰۴
$t = 3$	۰/۰۰	۱۹۶/۰۰	۰/۰۰	۳۰۷۴/۰۰	۳/۴۲۶

ابتدا مدل مذکور را به یک مدل تک هدفه با ضرایب هدف $(\theta_V, \theta_E, \theta_S)$ تبدیل می‌کنیم. برای مثال، فرض می‌کنیم که ضرایب هدف $(0/1, 0/1, 0/8)$ باشد. این چنین معنی می‌دهد که سرمایه‌گذار بیشتر مایل و راغب است که ریسک را در سراسر دوره به حداقل برساند. بعد از حل مسأله به جداول ۳.۴ و ۴.۴ می‌رسیم. در این وضعیت، سرمایه‌گذار باید یک دارایی بدون ریسک و سه نوع دارایی برای ساختار سبد برای دوره اول انتخاب کند. تعداد خرید از دارایی نوع اول و دوم و چهارم به ترتیب برابر با ۱۷ و ۲۹ است. مقادیر سرمایه‌گذاری شده در سبد در دوره اول ۸۹ دلار از سهام نوع اول، ۱۸۶ دلار از سهام نوع دوم، ۱۷۱۷ دلار از سهام نوع چهارم و ۲/۰۲۴ دلار دارایی بدون ریسک می‌باشد. سپس در شروع دوره دوم سرمایه‌گذار مجدداً سبد خود را تنظیم می‌کند. بعد از تعدیل، او سهام نوع اول و چهارم و دارایی بدون ریسک را انتخاب می‌کند. تعداد معاملات سهام نوع اول و چهارم به ترتیب برابر با ۲ و ۲۷ است. مقادیر سرمایه‌گذاری شده مناسب روی دو سهام نوع اول و چهارم و دارایی بدون ریسک به ترتیب برابر با ۲۲۴ و ۲۳۲۲ و ۳/۴۰۴ دلار است.

سپس در شروع دوره سوم سرمایه‌گذار مجدداً سبد خود را تنظیم می‌کند. بعد از تعدیل، او سهام نوع دوم و چهارم و دارایی بدون ریسک را انتخاب می‌کند. تعداد معاملات سهام نوع دوم و چهارم به ترتیب برابر با ۲ و ۲۹ است. مقادیر سرمایه‌گذاری شده مناسب روی دو سهام نوع دوم و چهارم و دارایی بدون ریسک به ترتیب برابر با ۱۹۶ و ۳۰۷۴ و ۳/۴۲۶ دلار است. مثال فوق برای هر دو مدل ۲.۴ و ۶.۴ دارای جواب یکسانی است فقط مقدار تابع هدف در مدل با معیار ریسک VaR و مدل با معیار ریسک CVaR به ترتیب برابر است با $-419/8205$ و $-420/3657$ است.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

نتیجه‌گیری

انتخاب سبدسهم در مباحث سرمایه‌گذاری کار دشوار و پیچیده‌ای است. سرمایه‌گذار در این حالت، خود را در مقابل انتخاب‌های فراوان و گوناگونی می‌بیند که باید یکی از آنها را به عنوان بهترین روش انتخاب کند. تصمیم‌گیری درباره اینکه کدام ورق بهادار در مقایسه با سایر اوراق در وضعیت بهتری قرار دارد و شایستگی انتخاب شدن و قرار گرفتن در سبد سرمایه‌گذاری فرد را دارد و چگونگی تخصیص سرمایه بین این اوراق، مباحثی پیچیده است. در این پایان نامه مسأله انتخاب سبد سهم را هنگامی که بازده اوراق بهادار برای تشخیص از طریق داده‌های تاریخی مشکل است بررسی کردیم. برای حل این مشکل بازده‌های اوراق بهادار را با استفاده از متغیرهای نامعین برآورد کردیم که هر متغیر نامعین با استفاده از توزیع نامعین‌اش تعریف می‌شود.

مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده بودند: اول، افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است. دوم، هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است. سوم، پارامترهای مسئله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند. حال آن که مسائل چند دوره‌ای حالت کلی‌تری از مسائل تک دوره‌ای هستند. در این پایان‌نامه مدل سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای که با دید بلند مدت به تخصیص دارایی می‌پردازد را در بازاری احتمالی و با در نظر گرفتن هزینه معاملات و کمترین تعداد معاملات مورد بررسی قرار

دادیم تا بتوانیم نواقص مدل مارکویتز را پوشش دهیم. در این تحقیق ما از سنج‌های ریسک ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط و چولگی استفاده کردیم که یکی از نوآوری‌های ما در ادبیات موضوع سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای را ایجاد کرده است. مدل پیشنهادی یک مسأله برنامه‌ریزی چند هدفه، با اهداف بیشینه کردن سرمایه نهایی و کمینه کردن ریسک و بیشینه کردن چولگی بازده در سراسر افق سرمایه‌گذاری است. برای حل مسأله پیشنهادی، ابتدا با کمک روش وزن‌دهی مسأله را تک هدفه سپس اقدام به حل مدل کنیم.

پیشنهادهای برای کارهای آتی

به منظور تکمیل و در ادامه روند این پایان نامه، مواردی به شرح ذیل به منظور اجرای پژوهش‌های آینده پیشنهاد می‌گردد:

۱. حل مسأله پرتفوی در فضای نامعین با روش‌های ابتکاری (الگوریتم ژنتیک، الگوریتم کولونی مورچگان، شبکه‌های عصبی)
۲. استفاده از ریسک‌های دیگر مثل ریسک منسجم و ریسک میانگین برای مدل‌سازی مسأله پرتفوی.
۳. حل مسأله چند هدفه فصل چهارم با کمک شبکه عصبی.

مراجع

- [۱] رضائی م، (۱۳۹۴)، پایان نامه ارشد: ”یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسئله انتخاب پرتفوی فازی”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۲] صباغیان طوسی ا، مسعودی مقدم م. (۱۳۹۱)، اولین همایش بین المللی اقتصادسنجی روش و کاربردها، ”مدل – میانگین – واریانس – چولگی برای انتخاب سبد سهام به وسیله منطق فازی”، سنندج.
- [۳] نوری س، (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: ”بهبود سازی سبد سهام با استفاده از میانگین – نیم واریانس هدف با بازده های نامعین”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [4] Carlsson. C, Fullér. R. (2001). ”On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers”. **Fuzzy Sets and Systems** , 122(2), 315-326.
- [5] Carlsson, C., Fullér, R., Majlender, P. (2002). ”A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score”. **Fuzzy Sets and Systems**, 131(1), 13-21.
- [6] Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., Sharaiha, Y. M. (2000).” Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation”. **Computers & Operations Research**, 27(13), 1271-1302.
- [7] C, elikyurt, U., O`zekici, S. (2007).”Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach”. **European Journal of Operational Research**, 179 (1), 186-202.
- [8] Dubois, D. J. (1980),” **Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications**”, Vol. 144. Academic press.
- [9] Elton, E. J., Gruber, M. J. (1974).” On the optimality of some multiperiod portfolio selection criteria”. **Journal of Business**, 47 (2), 231-243.
- [10] Fama, E. F. (1970). ”Multiperiod consumption-investment decisions”. **The American Economic Review**, 60 (1), 163-174.

-
- [11] Fang, Y., Lai, K. K., Wang, S. Y. (2006). "Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory". **European Journal of Operational Research**, 175 (2), 879-893.
- [12] Fu, C. P., Lari-Lavassani, A., Li, X. (2010). "Dynamic mean-variance portfolio selection with borrowing constraint". **European Journal of Operational Research**, 200(1), 312-319.
- [13] Gulpinar, N., Rustem, B. (2007). "Worst-case robust decisions for multi period mean-variance portfolio optimization". **European Journal of Operational Research**, 183(3), 981-1000.
- [14] Hakansson, N. H. (1971). "Multi-period mean-variance analysis: Toward a general theory of portfolio choice". **Journal of Finance**, 26 (4), 857-884
- [15] Hull, J. C. (2006). **Options, Futures, and Other Derivatives**. Pearson Education India.
- [16] H. Markovitz, (1959). **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment**, John Wiley and Sons, New York, .
- [17] Jones, C.P. (2001). **Investments: Analysis and Management**, John Wiley and Sons, New York.
- [18] Kapur, J. N. (1989). "Maximum-entropy Models in Science and Engineering", Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- [19] Krokmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S. (2002). "Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints". **Journal of Risk**, 4, .43-68
- [20] Lee, S. M., Lerro, A. J. (1973). "Optimizing the portfolio selection for mutual funds". **The Journal of Finance**, 28(5), 1087-1101.
- [21] Liu, B. (2008). **Theory and Practice of Uncertain Programming**, Heidelberg, Germany: Physica-Verlag .
- [22] Liu, B. (2004), "Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations.
- [23] Liu, Y. J., Zhang, W. G., Xu, W. J. (2012). "Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria". **Automatica**, 48 (12), 3042-3053.
- [24] Liu, Y. J., Zhang, W. G. (2013). "Fuzzy portfolio optimization model under real constraints". **Insurance: Mathematics and Economics**, 53(3), 704-711.

- [25] Liu, Y. J., Zhang, W. G. (2015), "A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots". **European Journal of Operational Research**, 242(3), 933-941.
- [26] Liu, B. (2007). "Uncertainty theory". In *Uncertainty Theory* (pp. 205-234). Springer Berlin Heidelberg.
- [27] Liu B. (2015), **Uncertainty Theory**, 5th Edition, Springer-Verlag, Berlin.
<http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf>.
- [28] Liu, B. (2009). "Some research problems in uncertainty theory". **Journal of Uncertain Systems**, 3(1), 3-10.
- [29] Lobo, M. S., Fazel, M., Boyd, S. (2007). "Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs". **Annals of Operations Research**, 152(1), 341-365.
- [30] Mansini, R., Ogryczak, W., Grazia Speranza, M. (2003). "LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison". **IMA Journal of Management Mathematics**, 14(3), 187-220.
- [31] Mansini, R., Speranza, M. G. (1999). "Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots". **European Journal of Operational Research**, 114(2), 219-233.
- [32] Markowitz, H. (1952). "Portfolio selection". **The Journal of Finance**, 7(1), 77-91.
- [33] Papahristodoulou, C., Dotzauer, E. (2004). "Optimal portfolios using linear programming models". **Journal of the Operational Research Society**, 55(11), 1169-1177.
- [34] Peng, Z., Iwamura, K. (2010). "Uncertainty distribution of functions of uncertain variables". **Journal of Interdisciplinary Mathematics**, 13(3), 277-285.
- [35] Sajadi, S. J., Seyedhosseini, S. M., Hassanlou, Kh. (2011). "Fuzzy multiperiod portfolio selection with different rates for borrowing and lending". **Applied Soft Computing**, 11 (4), 3821-3826.
- [36] Saeidifar, A., Pasha, E. (2009). "The possibilistic moments of fuzzy numbers and their applications". **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 223(2), 1028-1042.
- [37] Samuelson, P. A. (1970). "The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments". **The Review of Economic Studies**, 37(4), 537-542.

-
- [38] Selection, P., Diversification, E. (1952). "Harry Markowitz". **The Journal of Finance**, 7(1), 77-91.
- [39] Sheng, Y., Kar, S. (2015). "Some results of moments of uncertain variable through inverse uncertainty distribution". **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 14(1), 57-76.
- [40] S.M. Lee, D.L. Chesser, (1980). "Goal Programming for Portfolio", **The Journal of Portfolio Managment**, pp. 22-26.
- [41] Tanaka, H., Guo, P. (1999). "Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions". **European Journal of Operational Research**, 114 (1), 115-126.
- [42] Xia .Y, Liu .B, Shoayang. W., and K.Lai (1999), "A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns", **Computers and Operations Research**, Vol. 27, pp. 409-424.
- [43] Yoshimoto, A. (1996). "The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs". **Journal of the Operations Research Society of Japan**, 39(1), 99-117.
- [44] Young, M. R. (1998). "A minimax portfolio selection rule with linear programming solution". **Management Science**, 44(5), 673-683.
- [45] Zadeh L.D. (1965.), "Fuzzy Sets, Information and Control", Vol. 8, pp. 338-353.
- [46] Zhang, W. G., Liu, Y. J., Xu, W. J. (2012). "A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs". **European Journal of Operational Research**, 222 (2), 341-349.
- [47] Zhang, W. G., Zhang, X. L., Xiao, W. L., (2009). "Portfolio selection under possibilistic mean-variance utility and a SMO algorithm". **European Journal of Operational Research**, 197 (2), 693-700.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bi-objective programming	برنامه‌ریزی دو هدفه
Cardinality Constraint	خرید آستانه‌ای
Duality	خود دوگانگی
Fuzzy Variable	متغیر فازی
Gaussian Fuzzy Variable	متغیر فازی گاوسی
Interest rate	نرخ بهره
Investment	سرمایه‌گذاری
Linear Uncertainty Variable	متغیر نامعین خطی
Lognormal Uncertainty Variable	متغیر نامعین لگ نرمال
Modern Portfolio Theory	نظریه مدرن سبد سرمایه
Multi-period portfolio	سبد سهام چند دوره‌ای
Normal Uncertainty Variable	متغیر نامعین نرمال
Portfolio	سبد سهام
Possibility theory	نظریه احتمال
Post-modern Portfolio Theory	نظریه فرامدرن سبد سرمایه
Self-financing	سبد خودتامین
Stock	سهام
Subadditivity	زیر افزایشی شمارا
Symmetrical	متقارن
Tolerance interval	سطح تحمل
Transaction lot	معامله لاتی
Trapezoidal Uncertainty Variable	متغیر نامعین ذوزنقه‌ای
Trapezoidal Fuzzy Variable	متغیر فازی ذوزنقه‌ای
Triangular Fuzzy Variable	متغیر فازی مثلثی
Uncertain Distribution	توزیع نامعین
Uncertain Measure	اندازه نامعین

Uncertain theory	نظریه عدم قطعیت
Uncertain variable	متغیر نامعین
Zigzag Uncertainty Variable	متغیر نامعین زیگزاگ

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Efficient Frontier Line	ارائه مجموعه کارا
Value at Risk	ارزش در معرض ریسک
Conditional Value at Risk	ارزش در معرض ریسک مشروط
Investment Horizon	افق سرمایه گذاری
Expected Value	امید ریاضی
Returns	بازده
Optimization Portfolio	بهینه سازی سبد سهام
Membership Function	تابع عضویت
Asset Allocation	تخصیص دارایی
Credibility Distribution	توزیع اعتبار
Skewness	چولگی
Asset	دارایی
Riskless Asset	دارایی بدون ریسک
Risky Asset	دارایی ریسکی
Diversification	درجه تنوع
Risk	ریسک
Risk Taker	ریسک پذیر
Risk Avers	ریسک گریز
Coherent Risk	ریسک منسجم
Unreliability	عدم اطمینان
Minimum	کمینه کردن
Moment	گشتاور
Fuzzy Number	عدد فازی
Markowitz	مارکویتز
Fuzzy Set	مجموعه فازی
Interest Rate	نرخ بهره

Fuzzy Theory	نظریه فازی
Semivariance	نیم واریانس
Variance	واریانس
Transaction Cost	هزینه مبادله

Aabstract

In financial studies one of the main investors concerns is choosing of portfolio maximizing the profit in financial markets. Markowitz optimization problem and the effective boundary determination, is solvable by mathematical models when the propertise of investor and constraints in market is few, but when real condition and constraints is considered, portfolio optimization problem using mathematical methods is not solvable. most of investors are interested in long time investment, thus , in this study multi-period portfolio investigation with, tacking account of Value at Risk and Conditional Value at Risk as risk criteria and using of skewness for real abnormal data is considered that lead to generate portfolio.

Keywords: Risk minimization, multi-period portfolio, Value at Risk, Conditional Value at Risk, Skewness.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

Risk minimization with optimal selection of multi-period portfolio

By: Maryam Azizpour Nafari

Supervisors

Dr. Alireza Nazemi

Dr. Seyed Mojtaba Mirlohi

September 2017