دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکدهٔ: علوم ریاضی
گروه: ریاضی محض

جداسازی فوق خطی مجموعه های رادیانت، مشخص سازی توابع رادیانت و کاربرد آنها

دانشجو: سیدمسعود آقایان

استاد راهنما:

دکترمهدی ایرانمنش

استادمشاور:

دکترحمیدرضا سلیمی مقدم

پایان نامه ارشد جهت اخد درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۸۹

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

عنوان

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

نام

استاد راهنما: ...

استاد مشاور: ...

زمان

بِسْمِ اللّٰهِ الرّحْمٰنِ الرّحِيمِ

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

در این قسمت متن قدردانی و تشکر تایپ شود.

چکیده

مجمو عه های رادیانت طیف وسیعی از مجموعه ها را شامل می شود، بطوریکه هر مجموعه محدب و شامل صفر یک مجموعه رادیانت است ولی عکس آن برقرار نیست و همچنین توابع فوق خطی نیز مجموعه ای از توابع هستند که شامل توابع خطی نیز می باشند، عمل جداسازی بیشتر بر روی مجموعه های محدب و توسط توابع خطی از فضای دو گان انجام شده است ولی در اینجا سعی شده است که جداسازی روی مجموعه های رادیانت و با استفاده از توابع فوق خطی انجام شود در ادامه با روابط بین مجموعه های رادیانت با محدب و بطورهموار رادیانت را با بطورهموار رادیانت بررسی می کنیم و با کمک این روابط و قضیه اساسی جداسازی نتایجی در زمینه بهترین تقریب همزمان از مجموعه های رادیانت بدست می آوریم که نظریه بهترین تقریب کاربردهای فراوانی در بهینه سازی و اقتصاد دارد. در فصول بعدی با استفاده از تعریف مجموعه های تراز توابع رادیانت را معرفی می کنیم سپس با استفاده از توابع مزدوج و مزدوج فنجل تعمیم یافته کاربردی از آن را در زمینه بهینه سازی کلی بیان می کنیم.

کلمات کلیدی: مجموعه های رادیانت، توابع رادیانت، بهترین تقریب همزمان، جداسازی غیر خطی.

فهرست

چکیده . . . . شش

مقدمه . . . . نه

۱ مجموعه های رادیانت

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدماتی ۱

۲.۱ مجموعه های رادیانت ۹

۲ جداسازی روی مجموعه های رادیانت

۱.۲ جداسازی خطی ۲۶

۲.۲ جداسازی غیر خطی ۳۱

۱.۲.۲ رابطه قطبیت روی مجموعه های رادیانت ۳۴

۳ مشخص سازی مجموعه‌های رادیانت

۱.۳ رابطه بین مجموعه‌های رادیانت با مجموعه‌های محدب ۳۸

۲.۳ مجموعه‌های بطور هموار رادیانت ۴۱
۱.۲.۳ عنوان زیربخش ۴۲

۴ عنوان فصل
۱.۴ عنوان بخش ۴۳
۱.۱.۴ عنوان زیربخش ۴۳

۵ عنوان فصل
۱.۵ عنوان بخش ۴۴
۱.۱.۵ عنوان زیربخش ۴۴

٦ عنوان فصل
۱.٦ عنوان بخش ۴۵
۱.۱.٦ عنوان زیربخش ۴۵

۷ عنوان فصل
۱.۷ عنوان بخش ۴٦
۱.۱.۷ عنوان زیربخش ۴٦
پیوست ۴۷
مراجع ۴۸

مقدمه

متن مربوط به مقدمه در اینجا تایپ شود.

فصل اول

مجموعه های رادیانت

در این بخش ابتدا تعاریف مقدماتی آنالیز تابعی و سپس مباحثی در مورد مجموعه های رادیانت، کورادیانت(متمم مجموعه های رادیانت)، بیان می گردد.

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید $(X, +)$ یک گروه آبلی باشد و برای هر عدد حقیقی λ و هر $x \in X$، $\lambda x \in X$. در اینصورت X را یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی گوییم هرگاه، برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda, \mu \in R$،

۱) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

۲) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

۳) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

۴) $1x = x$؛

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ را یک نرم روی X نامیم هرگاه:

۱) به‌ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$؛

۲) $\|x\| = 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۳) به‌ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۴) به‌ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ یک مجموعه $Y \subset X$ را یک زیر فضای X می نامیم اگر خود Y یک فضای برداری باشد.

تعریف ۴.۱.۱ یک مجموعه $B \subset X$ را بالانس نامیم هرگاه $\alpha B \subset B$ برای هر اسکالر α که $|\alpha| \leq 1$.

تعریف ۵.۱.۱ (الف) گردایه τ از زیر مجموعه های مجموعه X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ خواص زیر را داشته باشد:

(۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$، (۲) هرگاه به ازای $i = 1, ..., n$، $A_i \in \tau$ آنگاه $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \tau$، (۳) هرگاه A_α گردایه دلخواهی از اعضای τ باشد، آنگاه $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

(ب) هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد آنگاه X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه های باز در X نامند، (اگر A یک مجموعه باز باشد آنگاه متمم آن یعنی A^C بسته است).

(پ) هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به Y باشد، آنگاه f را پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعه ای باز در X باشد.

تعریف ۶.۱.۱ یک نگاشت $\Lambda : X \longrightarrow Y$ را خطی گوییم هرگاه

$$\lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y$$

برای هر x و y در X و هر اسکالر α و β. در صورتی که Y میدان اسکالرها باشد آنگاه λ را تابعک خطی می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ اگر X و Y دو فضای برداری نرمدار، $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و M یک مقدار ثابت و مثبت باشد بقسمی که:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X$$

در اینصورت f را پیوسته لیب شیتز یا به طور مختصر لیب شیتز می نامیم.

مثال ۸.۱.۱ اگر قرار دهیم $f(x) = x$ روی باز $[a, b]$ آنگاه

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

در نتیجه f لیب شیتز است.

تعریف ۹.۱.۱ یک تابع $f : X \longrightarrow Y$ را موضعا لیب شیتز نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد یک همسایگی U حول x بقسمی که f روی U لیب شیتز باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ فضای دوگان یک فضای برداری توپولوژیک X، یک فضای برداری مانند X^* است که عناصر آن تابعک های خطی روی X هستند.

توجه داریم که جمع و ضرب اسکالر تعریف می شوند روی X^* بصورت

$$(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x \ \ , \ \ (\alpha\lambda)x = \alpha \cdot \lambda x.$$

بوضوح با این اعمال X^* به یک فضای برداری تبدیل می شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ یک گوی باز و یک بسته به مرکز x و شعاع r را بترتیب بصورت زیر بیان می کنیم:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$$

$$B[x, r] = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$$

همچنین مجموعه های درون و بستار مجموعه A را به ترتیب با $intA$ و clA نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر $A \subseteq X$ باشد آنگاه مخروطی تولید شده توسط A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$ConeA := \{y \in X \ : \ y = \lambda x, x \in A, \lambda > 0\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱ یک زیر مجموعه غیر تهی مانند A را محدب می نامند در صورتیکه برای هر دونقطه دلخواه $x, y \in A$ وهر $0 \leq \beta \leq 1$ داشته باشیم $(1 - \beta)x + \beta y \in A$.(یک مجموعه را نامحدب می گوییم در صورتیکه محدب نباشد). یک زیر مجموعه غیر تهی مانند K را مخروطی محدب می نامند در صورتیکه برای هر دونقطه دلخواه $x, y \in K$ وهر $\alpha, \beta \geq 0$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in K$.

تعریف ۱۴.۱.۱ اگر $A \subseteq X$ باشد در اینصورت سایه A را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$shwA := \{y \in X \ : \ y = tx \ , x \in A, t \geq 1\}$$

تعریف ۱۵.۱.۱ برای هر تابع حقیقی مقدار g تعریف شده روی X و $k \in I\!R$ مجموعه تراز پایین g را بصورت :

$$[g \leq k] = \{x \in X \ : \ g(x) \leq k\}$$

و مجموعه تراز اکید g را بصورت :

$$[g < k] = \{x \in X \ : \ g(x) < k\}$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ یک نیم فضا در فضای X (که X^* فضای دوگان آن است) عبارت است از هر مجموعه به شکل زیر:

$$H = \{y \in X \mid x^*(y) \leq c\}$$

یا

$$H = \{y \in X \mid x^*(y) \geq c\}$$

که $x^* \in X^* \backslash 0$ و $c \in I\!R$ واگر داشته باشیم $H = \{y \in X \mid x^*(y) > c\}$ یا $H = \{y \in X \mid x^*(y) < c\}$ لذا H را یک نیم فضای باز می نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم f یک تابع حقیقی (یا حقیقی توسیع یافته) بر یک فضای توپولوژیک باشد. اگر $\{x : f(x) > \alpha\}$ به ازای هر α حقیقی باز باشد گوییم f نیم پیوسته پایینی است. اگر $\{x : f(x) < \alpha\}$

به ازای هر α حقیقی باز باشد گوییم f نیم پیوسته بالایی است. تعریف فوق بصورت کلی بیان گردید و در حالت جزئی تر داریم: یک تابع f از مجموعه $S \subseteq I\!R^n$ به $[-\infty, +\infty]$ را نیم پیوسته پایینی در نقطه $x \in S$ گوییم هرگاه $\liminf_{y \longrightarrow x} f(y) \geq f(x)$ و همچنین f را نیم پیوسته بالایی در نقطه $x \in S$ نامیم هرگاه $\limsup_{y \longrightarrow x} f(y) \leq f(x)$.

تبصره. در ادامه تابع نیم پیوسته پایینی را با $(l.s.c)$ و نیم پیوسته بالایی را با $(u.s.c)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۸ مجموعه $A \subseteq X$ را یک مجموعه روبه‌پایین می نامند اگر $\lambda_2 \in A$ و $\lambda_1 \leq \lambda_2$ نتیجه دهد $\lambda_1 \in A$. مجموعه $a \subseteq X$ را یک مجموعه روبه بالا می نامند اگر $\lambda_1 \in A$ و $\lambda_1 \leq \lambda_2$ نتیجه دهد $\lambda_2 \in A$.

بهترین تقریب

تعریف ۱.۱.۱۹ فرض کنیم X یک فضای نرمدارباشد و $y \in X$ یک نقطه دلخواه باشد دراین صورت تابع d با ضابطه $d(x,y) = \| y - x \|$ را تابع فاصله می گویند .

قضیه ۱.۱.۲۰ فرض کنیم X یک فضای نرمدارباشد دراین صورت :

$$\forall \ \ x, y \in X \quad d(x+y, z+y) = d(x,y),$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \mid \alpha \mid d(x,y),$$

تعریف ۱.۱.۲۱ فرض کنیم $G \subset X$ و $x \in X$ عنصر $g_0 \in G$ را بهترین تقریب G از x گوییم در صورتیکه :

$$d(x, g_0) = \inf_{g \in G} \ d(x,g)$$

مجموعه تمام عناصر بهترین تقریب G از x رابا نماد $P_G(x)$ نشان می دهیم به عبارت دیگر:

$$P_G(x) = \{g' \in G \quad d(x,g') = \inf_{g\in G} \ d(x,g)\}$$

تعریف ۲۲.۱.۱ یک زیر مجموعه غیر تهی مانند G را یک مجموعه پروکسیمینال می نامند در صورتیکه به ازای هر $x \in X$ مجموعه $P_G(x) \neq \phi$ باشد.

درصورتیکه $P_G(x)$ تنها شامل یک نقطه باشد مجموعه G را چبیشف می گویند.

قضیه ۲۳.۱.۱ فرض کنیم $G \subseteq X$ دراین صورت :

$$\forall \ \ x, y \in X \ P_G(x+y) = P_G(x) + y,$$

$$P_{\alpha G}(\alpha x) = \mid \alpha \mid P_G(x),$$

نتیجه ۲۴.۱.۱

۱) مجموعه $G \subset X$ پروکسیمینال هست اگر وتنها اگر $G + Y$ پروکسیمینال باشد به ازای هر $y \in X$

۲) مجموعه $G \subset X$ پروکسیمینال هست اگر وتنها اگر αG پروکسیمینال باشد به ازای هر $\alpha \in R$

قضیه ۲۵.۱.۱ فرض کنیم $G \subset X$ یک مجموعه‌پروکسیمینال باشد دراین صورت G یک مجموعه بسته می باشد .

برهان. فرض کنیم G بسته نباشد در این صورت وجود دارد یک دنباله مانند $\{x_n\}$ متعلق به G به طوریکه $x_n \to x$ ولی $x \notin G$. از اینکه $\{x_n\}$ متعلق به G لذا $d(x,G) \leq \parallel x_n - x \parallel$ اما $\parallel x_n - x \parallel \to 0$ بنابراین $d(x,G) = 0$ واین درحالی است که چون $x \notin G$ داریم $d(x,G) > 0$. که این تناقض است بافرض پروکسیمینال بودن مجموعه G. □

تبصره. درقضیه فوق عکس آن لزوماً برقرارنیست مرجع [?] را ملاحظه کنید

بهترین تقریب همزمان

تعریف ۲۶.۱.۱ برای هر زیر مجموعه ناتهی W از X و هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار S در X تعریف می کنیم:

$$d(S,W) = \inf_{w\in W} \sup_{s\in S} \|s-w\|$$

و

$$P_W(S) = \{w \in W \ : \ \sup_{s\in S} \|s-w\| = d(S,W)\}.$$

$P_W(S)$ را مجموعه تمام بهترین تقریبات همزمان S از W و هر عنصر در $P_W(S)$ (اگر $P_W(S) \neq \emptyset$) را بهترین تقریب همزمان S از W می نامیم. بوضوح $P_W(S)$ یک زیرمجموعه بسته و کراندار در X است.

تعریف ۲۷.۱.۱ اگر برای هر زیر مجموعه کراندار S در X حداقل یک بهترین تقریب همزمان S از W وجود داشته باشد آنگاه W را یک زیر مجموعه پروکسمینال همزمان از X می نامیم. اگر برای هر زیر مجموعه کراندار S در X دقیقا یک بهترین تقریب همزمان S از W وجود داشته باشد آنگاه W را یک زیرمجموعه چبیشف همزمان از X می نامیم.

قضیه ۲۸.۱.۱ اگر W یک زیرمجموعه ناتهی در X باشد و S یک زیر مجموعه ناتهی و کراندار در X باشد آنگاه داریم:

۱) برای هر $y \in X$، $d(S+y, W+y) = d(S,W)$.

۲) برای هر $\lambda \in I\!R$، $d(\lambda S, \lambda W) = |\lambda| d(S,W)$.

۳) برای هر $y \in X$، $P_{W+y}(S+y) = P_W(S) + y$.

۴) برای هر $\lambda \in I\!R$ و $y \in X$، $P_{\lambda W}(\lambda S) = \lambda P_W(S)$.

برهان. ۱) برای هر $y \in X$ داریم:

$$d(S+y, W+y) = \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s + y - (w+y)\| = \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W)$$

۲) داریم:

$$d(\lambda S, \lambda W) = \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|\lambda s - \lambda w\| = |\lambda| \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s - w\| = |\lambda| d(S, W).$$

۳) با استفاده از ۱)، $y_0 \in P_{W+y}(S+y)$ اگروتنهااگر $y_0 \in W + y$ و $\sup_{s \in S} \|s + y - y_0\| = d(S, W)$ اگروتنهااگر $y_0 - y \in W$ و $\sup_{s \in S} \|s - (y_0 - y)\|$ اگروتنهااگر $y_0 - y \in P_W(S)$ در نتیجه $y_0 \in P_W(S) + y$.

۴) اگر $\lambda = 0$ بدیهی است. حال فرض می کنیم $\lambda \neq 0$ با استفاده از ۲) داریم $y_0 \in P_{\lambda W}(\lambda S)$ اگروتنهااگر $y_0 \in \lambda W$ و $\sup_{s \in S} \|\lambda s - y_0\| = d(\lambda S, \lambda W)$ اگروتنهااگر $\frac{1}{\lambda} y_0 \in W$ و $|\lambda| \sup_{s \in S} \|s - \frac{1}{\lambda} y_0\| = |\lambda| d(S, W)$ و این بدین معناست که $\frac{1}{\lambda} y_0 \in P_W(S)$ در نتیجه $y_0 \in \lambda P_W(S)$.

□

۲.۱ مجموعه های رادیانت

در این قسمت به معرفی مجموعه های رادیانت و توابع غیر خطی می پردازیم، مفهوم رادیانت از ستاره‌گون ها گرفته شده است که در زیر تعریف می شود.$L.Bragard$ (ببینید [] و []) ابتدا از مفهوم رادیانت در فضای $\mathbb{R}^n$ استفاده کرد، سپس $J.-P.Penot$ (ببینید []) از تحدب در مفهوم رادیانت استفاده کرد.

تعریف ۱.۲.۱ ۱) فرض کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. مجموعه $KernA$ شامل تمام $a \in A$ بقسمی که $(x \in A, 0 \le \lambda \le 1) \Longrightarrow a + \lambda(x - a)$ را هسته محدب A می نامیم.

۲) یک مجموعه ناتهی A را یک ستاره‌گون می نامیم اگر $KernA \neq \emptyset$.

گزاره ۲.۲.۱ اگر A یک مجموعه ستاره‌گون باشد آنگاه clA ستاره‌گون و $cl\ KernA \subset Kern\ clA$.

برهان. فرض کنیم که $a \in cl\ KernA$ آنگاه وجود دارد یک دنباله $a_k \in KernA$ بقسمی که $a_k \longrightarrow a$. برای هر $y \in A$ و $\lambda \in (0,1)$ داریم $\lambda y + (1-\lambda)a_k \in A$ از آنجا $\lambda y + (1-\lambda)a \in clA$ فرض کنیم $z \in clA$ آنگاه $z_k \longrightarrow z$ که $z_k \in A$. از آنجا که $\lambda z_k + (1-\lambda)a \in clA$ داریم $\lambda z + (1-\lambda)a \in clA$. بنابراین $a \in Kern\ clA$. از آنجا که $Kern\ clA \neq \emptyset$ در اینصورت clA یک ستاره‌گون است. $\square$

نتیجه ۳.۲.۱ اگر A یک مجموعه ستاره‌گون بسته باشد آنگاه $KernA$ بسته است.

تعریف ۴.۲.۱ مجموعه $A \subseteq X$ را رادیانت گوییم اگر $x \in A$ و $\alpha \in [0,1]$ نتیجه دهد $\alpha x \in A$.

مثال ۵.۲.۱ هر مجموعه محدب و شامل صفر یک مجموعه رادیانت است ولی عکس آن برقرار نیست.

بوضوح $0 \in KernA$ اگر وتنهااگر A یک زیرمجموعه رادیانت در $I\!R^n$ که $0 \in A$ باشد. اگر یک مجموعه A ستاره‌گون باشد و $a \in KernA$ آنگاه $a \in A$ و $A - a$ رادیانت است.

تعریف ۶.۲.۱ مجموعه A را کورادیانت نامیم هرگاه متمم آن یعنی $A^C = X \backslash A$ رادیانت باشد واین یعنی اینکه $A = X$ یا $0 \notin A$ و $x \in A$، $t \geq 1$ نتیجه دهد که $tx \in A$.

تبصره. مجموعه $\emptyset$ و مجموعه X هر دو هم رادیانت و هم کورادیانت هستند. در ادامه منظور از مجموعه های رادیانت و کورادیانت همان مجموعه های سره رادیانت و کورادیانت متفاوت با X و $\emptyset$ است.

توابع غیر خطی

تعریف ۷.۲.۱ یک نیم نرم روی یک فضای برداری X یک تابع حقیقی مقدار مانند p روی X است بقسمی که:

۱) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

۲) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ برای هر x و y در X و هر اسکالر α.

خاصیت ا) را ویژگی زیرجمعی می نامند.

تعریف ۸.۲.۱ یک خانواده P از نیم نرم ها روی X را جداساز نامیم اگر وابسته به هر $x \neq$ حداقل یک $p \in P$ باشد که $p(x) \neq 0$.

تعریف ۹.۲.۱ یک مجموعه محدب $A \subseteq X$ را جاذب گوییم هرگاه هر $x \in X$ در tA باشد برای بعضی $t = t(x) > 0$. بوضوح هر مجموعه جاذب شامل صفر است . تابعک مینکوفسکی μ_A از A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_A(x) = inf\{t > 0 : \ t^{-1}x \in A\} \quad (x \in X)$$

از آنجا که A جاذب است در نتیجه $\mu_A(x) < \infty$.

قضیه ۱۰.۲.۱ اگر p یک نیم نرم روی فضای برداری X باشد در اینصورت:

۱) $p(0) = 0$

۲) $|p(x) - p(y)| = \leq p(x-y)$

۳) $p(x) \geq 0$

۴) $\{x: \ p(x) = 0\}$ یک زیرفضای X است.

۵) مجموعه $B = \{x: \ p(x) < 1\}$ محدب، جاذب و $p = \mu_B$.

برهان.

۱) از آنجا که $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ حال اگر قرار دهیم $\alpha = 0$.

۲) با استفاده از ویژگی زیر جمعی داریم:

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$$

بنابراین $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$ حال اگر جای x و y را عوض کنیم نتیجه مطلوب بدست می آید.

۳) از آنجا که $p(x - y) = p(y - x)$ و با استفاده از ۲) داریم:

$$0 < |p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p(y - x)$$

حال اگر $y = 0$ در اینصورت نتیجه مطلوب بدست می آید.

۴) اگر $x, y \in \{x: \ p(x) = 0\}$ در اینصورت $p(x) = 0$ و $p(y) = 0$. اگر α و β دو اسکالر باشند دراینصورت:

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0.$$

۵) اگر $x, y \in B$ و $0 < t < 1$ آنگاه

$$p(tx + (1 - t)y) \leq tp(x) + (1 - t)p(y) < 1.$$

بنابراین B محدب است. اگر $x \in X$ و $s > p(x)$ آنگاه $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$ و این نشان می دهد که B جاذب است همچنین $\mu_B(x) \leq s$ از آنجا $\mu_B \leq p$. اما اگر $0 < t \leq p(x)$ آنگاه $p(t^{-1}x) \geq 1$ بنابراین $t^{-1}x$ در B نیست و این نتیجه میدهد $p(x) \leq \mu_B(x)$ و نتیجه مطلوب حاصل می شود. $\square$

قضیه ۱۱.۲.۱ اگر A یک مجموعه محدب و جاذب در فضای برداری X باشد آنگاه

۱) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$

۲) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ برای $t \geq 0$

۳) اگر $B = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ و $C = \{x : \mu_A \leq 1\}$ آنگاه $B \subset A \subset C$ و $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

برهان. اگر $t = \mu_A(x) + \epsilon$ و $s = \mu_A(y) + \epsilon$ برای $\epsilon > 0$ آنگاه $\frac{x}{t}$ و $\frac{y}{s}$ در A هستند بنابراین ترکیب محدب آنها بصورت زیر است

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \cdot \frac{y}{s}.$$

این نشان می دهد که $\mu_A(x+y) \leq s+t = \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\epsilon$ و ۱) اثبات می شود. خاصیت ۲) واضح است. از آنجا که $B \subset A \subset C$ داریم $\mu_C \leq \mu_A \leq \mu B$. باری اثبات تساوی، فرض می کنیم $x \in X$ و انتخاب می کنیم s,t بطوری که $\mu_C(x) < s < t$ آنگاه $\frac{x}{s} \in C$، $\mu_A(\frac{x}{s}) \leq 1$، $\mu_A(\frac{x}{t}) \leq \frac{s}{t} < 1$ از آنجا $\frac{x}{t} \in B$ بنابراین $\mu_B(x) \leq t$، که برای هر $t > \mu_C(x)$ برقرار است از انجا داریم $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$. $\square$

حال با استفاده از مفاهیم فوق، قصد داریم تابعک های مینکوفسکی را روی مجموعه های رادیانت تعریف کنیم. قرار می دهیم $X = I\!R^n$. فرض کنیم U یک زیر مجموعه رادیانت در X باشد و مجموعه Λ_x را بصورت $\Lambda_x = \{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$ تعریف کرده و فرض می کنیم که این مجموعه ناتهی باشد. بوضوح Λ_x یک مجموعه روبه بالا است، از آنجا Λ_x یک نیم خط باز $\{\lambda : \lambda > a\}$ یا یک نیم خط بسته $\{\lambda : \lambda \geq a\}$ به ازای $a \geq 0$ است.

تعریف ۱۲.۲.۱ اگر U یک زیر مجموعه رادیانت از X باشد تابع تعریف شده بصورت زیر را:

$$\mu_U(x) = \inf \Lambda_x = \inf\{\lambda : x \in \lambda U\}$$

معیار مینکوفسکی مجموعه U می نامیم.

تبصره. فرض می کنیم که $infimum$ روی مجموعه های تهی برابر $+\infty$ است و به ازای $x \neq 0$ نیم خط باز $\{\lambda x : \lambda > 0\}$ را با R_x نمایش می دهیم. حال در اینجا یک تعریف از مجموعه رادیانت وابسته به یک

مخروطی بسته ارایه می دهیم. اگر Q یک مخروطی بسته در فضای $n-$بعدی $I\!R^n$ باشد یک زیر مجموعه ناتهی $U \subset Q$ را یک زیر مجموعه رادیانت در Q نامیم اگر $(0 \leq \lambda \leq 1, x \in U) \Longrightarrow \lambda x \in U$.

قضیه ۱۳.۲.۱ اگر U یک زیر مجموعه رادیانت در مخروطی Q باشد تابع $\mu_U : Q \longrightarrow [0, +\infty]$ در خواص زیر صدق می کند:

۱) $\mu_U(0) = 0$

۲) اگر $x \in Q$, $x \neq 0$ آنگاه

$$\mu_U(x) = 0 \Longleftrightarrow R_x \subset U \quad , \quad \mu_U(x) = +\infty \Longleftrightarrow R_x \bigcap U = \emptyset \qquad (1)$$

۳) اگر $\lambda > 0$ آنگاه $\mu_U(\lambda x) = \lambda \mu_U(x)$ برای هر $x \in Q$.

۴) $\{x \in Q : \mu_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \in Q : \mu_U(x) \leq 1\}$.

تعریف ۱۴.۲.۱ یک زیر مجموعه U از $I\!R^n$ را مجموعه نیم خطهای ممتد بسته نامیم اگر
$(\lambda_n x \in U,\ \lambda_n \longrightarrow \lambda,\ \lambda_n > 0) \Longrightarrow \lambda x \in U$

گزاره ۱۵.۲.۱ اگر U یک زیر مجموعه رادیانت از مخروطی بسته Q باشد. آنگاه $U = \{x \in Q : \mu_U(x) \leq 1\}$ اگر وتنها اگر U مجموعه نیم خطهای ممتد بسته باشد.

برهان. اگر U یک مجموعه نیم خطهای بسته باشد حال باید تنها نشان دهیم که $\{x \in Q : \mu(x) = 1\} \subset U$. اگر $x \in Q$ و $\mu_U(x) = 1$ آنگاه $\lambda_k \longrightarrow 1,\ 1 > \lambda_k > 0,\ \mu_U(\lambda_k x) = \lambda_k < 1$ در نتیجه $\lambda_k x \in U$. از آنجا که U مجموعه نیم خطهای بسته است در اینصورت $x \in U$.

بلعکس. فرض کنیم که $U = \{x \in Q : \mu_U(x) \leq 1\}$ و $\lambda_k > 0,\ \lambda_k \longrightarrow \lambda,\ \lambda_k x \in U$ آنگاه $\mu_U(\lambda x) = \lambda\mu_U(x) \leq 1$ در نتیجه $\mu_U(\lambda_k x) \leq 1$ در اینصورت $\lambda_k x \in U$ از آنجاکه $\mu_U(\lambda x) = \lambda\mu_U(x) \leq 1$. و این یعنی اینکه $\lambda x \in U$. □

اگر مجموعه $U \subset Q$ بسته باشد آنگاه U مجموعه نیم خطهای ممتد بسته است و همچنین $U = \{x \in Q :\ \mu_U(x) \leq 1\}$. مجموعه تراز های تابع μ_U را برای $c \geq 0$ بصورت $S_c = \{x \in Q :\ \mu_U(x) \leq c\}$ در نظر می گیریم. از آنجت که $S_c = c\,U$ برای $c > 0$ در اینصورت مجموعه های S_c برای هر $c > 0$ بسته می باشند. مجموعه $S_0 = \bigcap_{c>0} S_c$ نیز بسته است. μ_U یک تابع نیم پیوسته پایینی $(l.s.c)$ روی Q برای مجموعه بسته و رادیانت U در Q. **تبصره.** اگر $Q \subset I\!R^n$ یک مخروطی بسته و U یک زیر مجموعه رادیانت در Q باشد. آنگاه U یک زیر مجموعه برای هر مخروطی بسته $P \supset Q$. در حالت خاص U یک زیر مجوعه رادیانت از $I\!R^n$ است. فرض کنیم μ_U^Q (بترتیب، μ_U^P) معیار مینکوفسکی U نسبت به Q (بترتیب، نسبت به P) باشد آنگاه

$$\mu_U^P(x) = \begin{cases} \mu_U^Q(x) & x \in Q \\ +\infty & x \in P\backslash Q \end{cases} \qquad (۲)$$

گزاره ۱۶.۲.۱ اگر Q یم مخروطی بسته باشد و $p : Q \longrightarrow [0, +\infty]$ و $U = \{x \in Q :\ p(x) \leq 1\}$. آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) p همگن مثبت، $l.s.c$ و $p(0) = 0$.

۲) U یک مجموعه بسته رادیانت و ناتهی در Q و $p = \mu_U$.

با استفاده از تبصره ۲.۱ که گزاره فوق برای هر مخروطی بسته Q بر قرار است. حال کلاس تمام زیر مجموعه های بسته و رادیانت در مخروطی بسته Q را با V نمایش می دهیم. از آنجا که $0 \in U$ برای هر $U \in V$ در اینصورت $\bigcap_{t\in T} U_t$ ناتهی است برای یک خانواده دلخواه $(U_t)_{t\in T}$ از عناصر V.

گزاره ۱۷.۲.۱ اگر $U_t \in V\ (t \in T)$ که T یک مجموعه اندیس دلخواه باشد آنگاه $\bigcap_{t\in T} U_t \in V$ و $cl\ \bigcup_{t\in T} U_t \in V$.

کلاس تمام توابع همگن مثبت، $l.s.c$ و نامنفی $p : Q \longrightarrow [0, +\infty]$ را با P_* نمایش می دهیم. در اینصورت این کلاس مجهز به رابطه ترتیبی طبیعی است یعنی:

$$p_1 \geq p_2 \Longleftrightarrow p_1(x) \geq p_2(x) \ \ \forall x \in Q \tag{۳}$$

در اینصورت براحتی می توان مشاهده نمود که:

۱) اگر $(p_t)_{t\in T}$ یک خانواده از توابع باشد که $p_t \in P_*$ و $t \in T$. فرض کنیم $\bar{p}(x) = \sup_{t\in T} p_t(x)$ آنگاه $\bar{p} \in P_*$. اگر f یک تابع دلخواه و همگن مثبت تعریف شده روی Q باشد آنگاه تابع $f_* = \sup\{p(x) : \ p \in P_* . \ p \leq f\}$ لذا f_* هال $l.s.c$ و باتوجه به ۱) $f_* \in P_*$ برای هر تابع همگن مثبت f.

۲) اگر $(p_t)_{t\in T}$ خانواده تعریف شده در ۱) باشد و p_* یک هال $l.s.c$ تابع p باشد که $p(x) = \inf_{t\in T} p_t(x)$ آنگاه $p_* \in P_*$.

فرض کنیم $\phi : V \longrightarrow P_*$ یک نگاشت با ضابطه $\phi(U) = \mu_U$ باشد در اینصورت ϕ یک تناظر یک به یک و پوشاست .

گزاره ۱۸.۲.۱ اگر نگاشت ϕ یک ایزومورفیسم بین V و P_* باشد. آنگاه شرایط زیر برقرار است:

۱) اگر $U = \sup_{t\in T} U_t$ (یعنی $U = \bigcap_{t\in T} U_t$) آنگاه $\mu_U(x) = \sup_{t\in T} \mu_t(x)$.

۲) اگر $U = \inf_{t\in T} U_t$ (یعنی $U = cl \ \ \bigcup_{t\in T} U_t$) آنگاه $\mu_U(x)$ برابر است با تابع هال $l.s.c$، $x \mapsto \inf_{t\in T} \mu_t(x)$.

برهان. نتایج بر قرار است از آنجا که ϕ یک تناظر یک به یک و پوشا در P_* است و $U_1 \geq U_2$ معادل است با $\mu_{U_1} \geq \mu_{U_2}$. □

گزاره ۱۹.۲.۱ اگر $(U_t)_{t\in T}$ خانواده ای از مجموعه های رادیانت و $U = \bigcup_{t\in T} U_t$ باشد آنگاه $\mu_U(x) = \inf_{t\in T} \mu_{U_t}(x)$ برای هر $x \in Q$.

برهان. داریم

$$\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \bigcup_{t\in T} U_t\} \;=\; \bigcup_{t\in T}\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in U_t\}.$$

در اینصورت

$$\mu_U(x) \;=\; \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \bigcup_{t\in T} U_t\} \;=\inf_{t\in T}\inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in U_t\} \;=\; \inf_{t\in T}\mu_{U_t}(x).$$

□

همانند مجموعه های رادیانت برای مجموعه های ردیانت نیز یک تعریف وابسته به یک مخروطی بسته ارائه می دهیم. اگر $Q \subset I\!R^n$ یک مخروطی بسته باشد. یک مجموعه ناتهی $V \subset Q$ را رادیانت نامیم هرگاه $(\lambda \leq 1, x \in V) \Longleftarrow (\lambda x \in V)$. حال اگر فرض کنیم که V یک مجموعه کورادیانت و $x \in Q$ حال مجموعه Λ^x را بصورت $\Lambda^x = \{\lambda > 0 : x \in \lambda V\}$ و فرض می کنیم که ناتهی باشد بوضوح Λ^x رو به پایین است . اگر مجموعه Λ^x کراندار باشد آنگاه Λ^x بصورت $(0, c)$ یا $(0, c]$ که $c > 0$ است. انتهای این پاره خطها را با $\upsilon_V(x)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۰.۲.۱ اگر V یک زیر مجموعه کورادیانت در مخروطی بسته Q باشد در اینصورت تابع υ_V تعریف شده روی Q را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\upsilon_V(x) = \sup \Lambda^x = \sup\{\lambda > 0 : x \in \lambda V\} \qquad (۴)$$

و υ_V را هم–معیار مینکوفسکی V (نسبت به مخروطی Q) می نامیم.

قضیه ۲۱.۲.۱ اگر V یک زیر مجموعه کورادیانت در مخروطی بسته Q باشد در اینصورت هم–معیار مینکوفسکی υ_V در خواص زیر صدق می کند:

۱) $\upsilon_V(0) = 0$

۲) $R_x \bigcap V = \emptyset \Longleftrightarrow (x \in Q,\ x \neq 0,\ \upsilon_V(x) = 0)$

۳) $\upsilon_V(x) = +\infty \Longleftrightarrow R_x \subseteq V$

۴) اگر $\lambda > 0$ آنگاه $\upsilon_V(\lambda x) = \lambda \upsilon_V(x)$ برای هر $x \in X$

۵) $\{x \in Q : \upsilon_V(x) > 1\} \subset V \subset \{x \in Q : \upsilon_V(x) \geq 1\}$

گزاره ۲۲.۲.۱ اگر V یک زیر مجموعه کورادیانت در مخروطی بسته Q باشد. در اینصورت $\{x \in Q : \upsilon_V(x) \geq 1\}$ اگرو تنها اگر V مجموعه نیم خطهای ممتد بسته باشد.

برهان. شبیه اثبات ۱۵.۲.۱ است. $\square$

اگر $W \subset Q$ باشد. متمم $Q \backslash W$ از مجموعه W نسبت به Q را با W^C نمایش می دهیم.

گزاره ۲۳.۲.۱ اگر Q یک مخروطی محدب باشد. اگر مجموعه $U \subset Q$ و $U \neq Q$ رادیانت باشد آنگاه $\mu_U = \upsilon_V$ که $V = U^C$ است.

برهان. اگر $x \in Q$ باشد در اینصورت مجموعه های $\Lambda_x = \{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$ و $\Lambda^x = \{\lambda > 0 : x \in \lambda V\}$ را در نظر می گیریم در اینصورت داریم $\Lambda^x = I\!\!R \backslash \Lambda_x$ و از اینجا داریم $\mu_U(x) = \inf \Lambda_x = \sup \Lambda^x = \upsilon_V(x)$. $\square$

اگر V یک زیر مجموعه کورادیانت در مخروطی محدب Q باشد. آنگاه V یک زیر مجموعه کورادیانت در هر مخروطی محدب $P \supset Q$ در حالت خاص V یک زیر مجموعه کورادیانت در $I\!\!R^n$ است. فرض کنیم υ_V^Q (بترتیب υ_V^P) هم–معیار مینکوفسکی مجموعه V نسبت به مخروطی Q (بترتیب P) باشد. آنگاه

$$\upsilon_V^P(x) = \begin{cases} \upsilon_V^Q(x) & x \in Q \\ +\infty & x \in P \backslash Q \end{cases} \tag{۵}$$

گزاره ۲۴.۲.۱ اگر Q یک مخروطی بسته، $p : Q \longrightarrow [0, +\infty]$ و $V = \{x \in Q : p(x) \geq 1\}$. فرض کنیم که V تهی باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) $p \neq 0$، $u.s.c$، نامنفی و همگن مثبت است.

۲) V کورادیانت، بسته و $p = \upsilon_V$ است.

تعریف ۲۵.۲.۱ تابع $p : X \longrightarrow I\!R$ را فوق خطی نامیم هرگاه در شرایط زیر صرق کند:

۱) $p(x+y) \geq p(x) + p(y)$ برای هر $x, y \in X$ (ویژگی فوق جمعی).

۲) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ برای هر $x \in X$ و $\alpha > 0$ (ویژگی همگن مثبت).

لم ۲۶.۲.۱ فرض کنیم $p : X \longrightarrow I\!R$ یک تابع فوق خطی باشد در اینصورت در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $p(x) \leq 0$

۲) اگر $p(x) \geq 0$ آنگاه $p(-x) \leq 0$ برای هر $x \in X$.

برهان. ۱) داریم:

$$p(0) \geq p(0) + p(0) \implies 0 \geq p(0)$$

۲) اگر $p(x) \geq 0$ در اینصورت

$$0 \leq p(x) \leq p(0) - p(-x) \leq -p(-x) \implies -p(-x) \geq 0$$

□

تعریف ۲۷.۲.۱ تابع $p : X \longrightarrow I\!R$ را زیرخطی نامیم هرگاه در شرایط زیر صرق کند:

۱) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ برای هر $x, y \in X$ (ویژگی زیر جمعی).

۲) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ برای هر $x \in X$ و $\alpha > 0$ (ویژگی همگن مثبت).

لم ۲۸.۲.۱ فرض کنیم $p : X \longrightarrow I\!R$ یک تابع زیرخطی باشد در اینصورت در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $p(x) \geq 0$

۲) اگر $p(x) \leq 0$ آنگاه $p(-x) \geq 0$ برای هر $x \in X$.

برهان. اثبات مشابه ۲۶.۲.۱ است. $\square$

تعریف ۲۹.۲.۱ یک تابع همگن مثبت $f : X \longrightarrow I\!R$ را یک زیر خطی کوچک نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ وجود دارد یک تابع زیر خطی متناهی مانند p_x بقسمی که $p_x(y) \geq f(y)$ برای هر $y \in X$ و $p_x(x) = f(x)$.

قضیه ۳۰.۲.۱ یک تابع همگن مثبت f زیر خطی کوچک است اگر وتنها اگر برای هر $z \in X$ وجود دارد یک مقدار $k_z > 0$ بقسمی که

$$f(x) - f(z) \leq k_z \|x - z\|, \quad \forall x \in X \tag{٦}$$

برهان. فرض کنیم f یک تابع زیر خطی کوچک باشد، $z \in X$ و p_z یک تابع فوق خطی متناهی با خواص زیر باشد

$$p_z(x) \geq f(x), \forall x \in X \ \ , \quad p_z(z) = f(z).$$

داریم

$$f(x) - f(z) \leq p_z(x) - p_z(z) \leq \|p_z\| \, \|x - z\|,$$

که $\|p_z\| = \max\{|p_z(x)| : \|x\| = 1\}$ نرم تابع p_z است.

بلعکس. فرض کنیم که f یک تابع همگن مثبت باشد که برای هر $z \in I\!R^n$ ٦ برقرار باشد. حال برای هر $z \in I\!R^n$ تابع زیر را در نظر می گیریم

$$l_z(x) = f(x) + k_z \|x - z\| \quad (x \in I\!R^n) \tag{٧}$$

در اینصورت با استفاده از تعریف l_x محدب و $l_x \geq f(x)$ برای هر $x \in I\!R^n$ و

$$l_z(z) = f(z) \tag{۸}$$

فرض می کنیم که

$$p_z(x) = \inf_{s>0} s\, l_z(\frac{x}{s}) \quad \forall x \in I\!R^n$$

حال شرایط زیر را برای تابع p_z بررسی می کنیم:

۱) p_z همگن مثبت است. برای هر $\lambda > 0$ داریم

$$p_z(\lambda x) \; = \; \inf\{s\, l_z(\frac{\lambda x}{s}) : s > 0\}$$

$$= \; \inf\{s\, l_z(\frac{x}{s/\lambda}) : s > 0\}$$

$$= \; \lambda \inf\{\frac{s}{\lambda}\, l_z(\frac{x}{s/\lambda}) : \frac{s}{\lambda} > 0\} = \lambda p_z(x).$$

۲) نامساوی زیر برقرار است:

$$l_z(x) \geq p_z(x) \geq f(x) \quad \forall x \in I\!R^n \tag{۹}$$

در حقیقت

$$l_z(x) = 1 \cdot l_z(\frac{x}{1}) \geq \inf\{s\, l_z(\frac{x}{s}) : s > 0\} = p_z(x).$$

از آنجا که f همگن مثبت و $f \leq l_z$ نتیجه می گیریم که

$$s\, l_z(\frac{x}{s}) \geq s \;\; f(\frac{x}{s}) = f(x).$$

بنابراین

$$p_z(x) = \inf_{s>0} s\, l_z(\frac{x}{s}) \geq f(x).$$

۳) $p_z(z) = f(z)$ که از ۸ و ۹ نتیجه می شود.

۴) p_z متناهی است که از ۹ نتیجه می شود.

۵) p_z دارای ویژگی زیر جمعی است. فرض کنیم $x, y \in I\!R^n$ و $\epsilon > 0$. قرار می دهیم $t > 0$ و $s > 0$ بقسمی که

$$p_z(x) > t\, l_z(\frac{x}{t}) - \epsilon, \quad p_z(y) > s\, l_z(\frac{y}{s}) - \epsilon.$$

از آنجا که l_z یک تابع محدب است داریم

$$p_z(x) + p_z(y) \ > \ t\, l_z(\frac{x}{t}) + s\, l_z(\frac{y}{s}) - 2\epsilon$$

$$= \ (s+t)\, \{\frac{t}{s+t}\, l_z(\frac{x}{t}) \ + \ \frac{s}{s+t}\, l_z(\frac{y}{s})\} - 2\epsilon$$

$$\geq \ (s+t)\, l_z(\frac{x}{s+t} \ + \ \frac{y}{s+t}) - 2\epsilon$$

$$= \ (s+t)\, l_z(\frac{x+y}{s+t}) - 2\epsilon \geq p_z(x+y) - 2\epsilon.$$

از آنجا که ϵ یک مقدار مثبت و دلخواه است در این نتیجه می گیریم که p_z دارای ویژگی زیر جمعی است. بنابراین برای هر z بدست می آوریم یک تابع زیر خطی متناهی مانند p_z بقسمی که $p_z(x) \geq f(x)$ برای هر x و $p_z(z) = f(z)$. □

تبصره. با توجه به قضیه فوق برای فضاهای نرمدار متناهی بعد داریم، تابع f تعرف شده روی فضای نرمدار X را زیر خطی کوچک نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ وجود دارد یک تابع زیر خطی پیوسته مانند p_x بقسمی که $p_x(y) \geq f(y)$ برای هر $y \in X$ و $p_x(x) = f(x)$.

گزاره ۳۱.۲.۱ فرض کنیم f یک تابع همگن مثبت و لیب شیتز تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ با ثابت لیب شیتز L (یعنی $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ برای هر x, y) باشد. اگر $S = \{x : \|x\| = 1\}$ یک گوی یکه باشد آنگاه وجود دارد یک خانواده $(p_z)_{z\in S}$ از توابع زیر خطی بقسمی که

۱) $f(x) = \min_{z\in S} p_z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

۲) $p_z(x) \leq f(z) + L\|x - z\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

برهان. فرض کنیم $k_z = L$ برای هر $z \in S$. با استفاده از قضیه ۳۰.۲.۱ برای هر $z \in S$ وجود دارد یک تابع زیر خطی مانند p_z بقسمی که $p_z(z) = f(z)$ و $p_z(x) \geq f(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و در حالت خاص برای هر $x \in S$. در اینصورت

$$f(x) \min_{z\in s} p_z(x) \quad \forall x \in S$$

از آنجا که هر دو تابع f و p_z همگن مثبت هستند در اینصورت

$$f(x) = \min_{z\in S} p_z(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{۱۰}$$

حال باتوجه به روند اثبات قضیه ۳۰.۲.۱ (ببینید ۹) می توانیم انتخاب کنیم تابع p_z را که

$$p_z \leq l_z(x) = f(z) + L\,\|x - z\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

در ادامه نشان خواهیم داد که معیار مینکوفسکی یک زیر مجموعه رادیانت از $\mathbb{R}^n$، لیب شیتز است اگر وتنها اگر این مجموعه را بتوان بصورت بستار اجتماع مجموعه های محدب شامل گوی های یکسان به مرکز مبدا نشان داد.

قضیه ۳۲.۲.۱ اگر U یک زیر مجموعه بسته و رادیانت در $\mathbb{R}^n$ باشد. معیار مینکوفسکی μ_U از مجموعه U لیب شیتز است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\epsilon > 0$ و یک مجموعه، اندیس T و یک خانواده $(U_t)_{t\in T}$ ازمجموعه های محدب شامل $B(0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \epsilon\}$ بقسمی که

$$U \;=\; cl \bigcup_{t\in T} U_t. \tag{۱۱}$$

برهان. ابتدا فرض می کنیم که وجود داشته باشد $\epsilon > 0$، یک مجموعه اندیس T و یک خانواده از مجموعه های محدب U_t بقسمی که ۱۱ برقرار باشد و

$$B(0,\epsilon) \subset U_t. \tag{۱۲}$$

فرض کنیم که μ_t معیار مینکوفسکی برای مجموعه U_t باشد. تحدب روی U_t نتیجه می دهد زیر خطی بودن μ_t. از آنجا μ_t لیب شیتز و $\|\mu_t\| = \max_{s\in S} \mu_t(s)$ یک ثابت لیب شیتزاست. (که $S = \{x : \|x\| = 1\}$ یک گوی یکه است) توجه داریم که معیار مینکوفسکی $B(0,\epsilon)$ برابر است با $(\frac{1}{\epsilon})\|\cdot\|$. در اینصورت از ۲۱ داریم $\mu_t \le (\frac{1}{\epsilon})\|x\|$ برای هر x، بنابراین ثابت لیب شیتز $\|\mu_t\|$ از توابع μ_t، بطور یکنواخت کراندار است که کران آن مقدار ثابت $L = \frac{1}{\epsilon}$ است. حال بااستفاده از گزاره ۱۸.۲.۱ و ۱۱ نتیجه می گیریم که μ_U برابر است با هال $l.s.c$ تابع $x \mapsto \inf_{t\in T} \mu_t(x)$. از آنجا که ثابت لیب شیتز تابع μ_t کراندار یکنواخت است، در اینصورت تابع $x \mapsto \inf_{t\in T} \mu_t(x)$ لیب شیتز است بنابراین μ_U با این تابع برابر است و در نتیجه μ_U لیب شیتز است.

۲) فرض کنیم که معیار مینکوفسکی μ_U از مجموعه U لیب شیتز با ثابت لیب شیتز L باشد. در اینصورت با استفاده از گزاره ۳۱.۲.۱، می توان برای هر $z \in S = \{x : \|x\| = 1\}$ یک تابع زیر خطی مانند p_z پیدا کرد بقسمی که

$$\mu_U(x) = \min_{z\in S} p_z(x) \quad \forall x \in I\!R^n \tag{۱۳}$$

و

$$\mu_U(z) + L\,\|x - z\| \ge p_z(x) \quad \forall x \in I\!R^n \tag{۱۴}$$

حال مجموعه محدب $U_z = \{y : p_z(y) \le 1\}$ را در نظر می گیریم. با استفاده از گزاره ۲.۱، p_z معیار مینکوفسکی U_z است. با ترکیب ۳۱ و گزاره ۱۸.۲.۱ نتیجه می گیریم که $U = cl\, \bigcup_{z\in S} U_z$. با استفاده از ۴۱ در می یابیم که برای هر $z \in S$ داریم

$$\|p_z\| = \max_{y\in S} p_z(y) \le \max_{y\in S}(\mu_U(z) + L\,\|y - z\|) \le M.$$

که $M = \|\mu_U\| + 2L$ و $\|\mu_U\| = \max_{y\in S} \mu_U(y)$. بنابراین ثابت لیب شیتز $\|p_z\|$ از توابع p_z کراندار یکنواخت است برای هر $z \in S$. از آنجا $p_z(y) \le M\|y\|$ برای هر $y \in I\!R^n$ و تابع $y \mapsto M\|y\|$ معیار مینکوفسکی، گوی $B(0, \frac{1}{M})$ است و در اینصورت $U_z \supset B(0, \frac{1}{M})$.

□

گزاره ۳۳.۲.۱ اگر $(U_t)_{t\in T}$ یک خانواده از مجموعه های محدب شامل گوی $B(0,\epsilon)$ و $U = \bigcup_{t\in T} U_t$. آنگاه معیار مینکوفسکی μ_U از مجموعه U منطبق است با معیار مینکوفسکی $\mu_{cl\ U}$ از بستار این مجموعه، μ_U یک تابع لیب شیتز است و $bdU = bd\ cl\ U = \{x : \mu_U(x) = 1\}$.

برهان. اگر μ_t معیار مینکوفسکی مجموعه U_t،$(t \in T)$ باشد. آنگاه (ببینید گزاره ۱۹.۲.۱) $\mu_U(x) = \inf_{t\in T} \mu_t(x)$ این مطلب اثبات شده است که (ببینید اثبات گزاره ۳۰.۲.۱) μ_t توابع لیب شیتز هستند و ثابت لیب شیتز آنها کراندار یکنواخت است. در اینصورت μ_U یک تابع لیب شیتز است. فرض کنیم که $U_0 = \{x : \mu_U(x) < 1\}$ و $U_1 = \{x : \mu_U(x) \le 1\}$ باشد. از آنجا که μ_U پیوسته است در اینصورت U_0 باز و U_1 بسته است و از اینکه μ_U همگن مثبت است داریم که $cl\ U_0 = U_1$ و $int\ U_1 = U_0$ است. در اینصورت $bd\ U_0 = bd\ U_1 = \{x : \mu_U(x) = 1\}$ ور از آنجا که $U_0 \subset U \subset U_1$ داریم که $bd\ U = \{x : \mu_U = 1\}$ و تساوی $\mu_U = \mu_{cl\ U}$ مستقیما از تعریف معیار مینکوفسکی نتیجه می شود. □

فصل دوم

جداسازی روی مجموعه های رادیانت

در این فصل مفهوم جداسازی را روی مجموعه های رادیانت بررسی می کنیم. جداسازی هایی که تاکنون روی مجموعه های رادیانت انجام شده است از نوع جداسازی خطی بوده است لذا در اینجا جداسازی غیر خطی توسط توابع غیر خطی را بررسی می کنیم.

۱.۲ جداسازی خطی

در ابتدا بحث جداسازی را بر روی مجموعه های ستاره‌گون بررسی می کنیم که توسط $Shveidel$ در سال (۱۹۹۷) بیان شده است. جداسازی مجموعه های ستاره‌گون توسط یک مجموعه متناهی از توابع خطی توسط $A.Shveidel$ (ببینید []) تعریف شده است.

تعریف ۱.۱.۲ اگر A_1 و A_2 زیر مجموعه های $\mathbb{R}^n$ باشند و $l_1, l_2, ..., l_m$ بردارهای مستقل خطی باشند. مجموعه های A_1 و A_2 را جدا شده توسط بردارهای $l_1, l_2, ..., l_m$ گوییم اگر برای هر جفت $a_1 \in A_1$ و $a_2 \in A_2$ وجود داشته باشد یک مجموعه اندیس $i \in \{1, ..., m\}$ بقسمی که $[l_i, a_1] < [l_i, a_2]$.

حال ارائه می دهیم یک فرم معادل از این تعریف را بصورت : مجموعه های A_1 و A_2 جدا شده‌اند توسط بردارهای مستقل خطی $l_1, l_2, ..., l_m$ اگر $\min_{i=1,...,m}[l_i, a_1 - a_2] \leq 0$ برای هر $a_1 \in A_1$ و $a_2 \in A_2$.

تعریف ۲.۱.۲ اگر U یک مجموعه بسته و رادیانت و $x \notin U$، می گوییم بردارهی مستقل خطی $l_1, l_2, ..., l_m$ اکیدا جدا می کنند U و x، اگر وجود داشته باشد $\epsilon > 0$ با این خواص که: برای هر $u \in U$ وجود دارد یک اندیس i بقسمی که $[l_i, u] < 1 - \epsilon$ و $[l_1, x] = ... = [l_m, x] = 1$.

تعریف ۳.۱.۲ اگر U یک مجموعه بسته رادیانت و $x \in bdU$ و $x \neq 0$. یک خانواده از بردارهای مستقل خطی $l_1, l_2, ..., l_m$ را یک مجموعه ساپورت U در نقطه x نامیم اگر $[l_1, x] = ... = [l_m, x] = 1$ و $\min_i[l_i, u] < 1$ برای هر $u \in U$ و $x \neq u$.

اگر یک مجموعه رادیانت و بسته U یک مجموعه ساپورت در نقطه $x \in U$ داشته باشد آنگاه x یک نقطه مرزی U است و مجموعه U و مجموعه $\{x\}$ را می توان با استفاده از بردارهای مستقل خطی $l_1, ..., l_m$ از یکدیگر جدا کرد بقسمی که برای هر $u \in U$ وجود دارد یک اندیس i که نامساوی اکید $l_i(u) < l_i(x)$ برقرار می باشد.

گزاره ۴.۱.۲ فرض کنیم که U یک مجموعه شامل صفر و دارای خاصیت زیر باشد: U و هر نقطه $x \neq U$ را می توان توسط تعداد متناهی توابع خطی از یکدیگر جدا کرد. آنگاه U یک مجموعه بسته و رادیانت است.

برهان. برای هر نقطه $x \neq U$ وجود دارد یک خانواده $\ell = \{\ell_1, ..., \ell_m\}$ بقسمی که $U \subset U_{\ell,c}$ که

$$U_{\ell,c} = \{\acute{x} : \min_i[\ell_i, \acute{x}] \leq c\} \qquad (۱)$$

بنابراین وجود دارد یک خانواده $U_{\ell,c}$ بقسمی که U منطبق است با اشتراک این خانواده، از آنجا که $0 \in U$ در اینصورت c در (۱) نامنفی است. مجموعه $U_{\ell,c}$ تعریف شده در (۱) بسته است، حال بررسی می کنیم که این مجموعه رادیانت است. فرض کنیم که $\acute{x} \in U_{\ell,c}$ و $0 < \lambda \leq 1$ ، اگر $\min_i[\ell_i, \acute{x}] \leq 0$ آنگاه

$c \geq 0 \geq \min_i[\ell_i, \lambda\acute{x}]$، اگر $\min_i[\ell_i, x] > 0$ آنگاه $\min_i[\ell_i, \lambda\acute{x}] < c$ ، از آنجا داریم $\lambda\acute{x} \in U_{\ell,c}$ و $U_{\ell,c}$ رادیانت است. از آنجا که اشتراک یک خانواده دلخواه از مجموعه های بسته و رادیانت، بسته و رادیانت است در اینصورت U بسته و رادیانت است. □

تعریف ۵.۱.۲ یک مخروطی C را یک مخروطی یک پارچه نامیم هرگاه درون آن $int\ C$ ناتهی باشد.

تعریف ۶.۱.۲ اگر $X \subset I\!R^n$ و $x \in I\!R^n$ باشد. فرض کنیم که Q یک مخروطی محدب یک پارچه باشد.

۱) مجموعه X و نقطه x را جداشده توسط مخروطی Q نامیم هرگاه $(x + int\ Q) \cap X = \emptyset$.

۲) مجموعه X و نقطه x را جداشده—مخروطی نامیم هرگاه وجود داشته باشد یک مخروطی محدب یک پارچه Q که X و x را از یکدیگر جدا می کند.

گزاره ۷.۱.۲ اگر Q یک مخروطی محدب یک پارچه باشد و $x \in int\ Q$. آنگاه وجود دارد یک خانواده $l = (l_1, ..., l_n)$ از عناصر مستقل خطی بقسمی که $\{y : [l_i, y] > 0, i = 1, ..., n\} \subset int\ Q$ و $[l_i, x] = 1$ برای هر $i = 1, ..., n$.

برهان. بدلیل در اثبات این قضیه از مطالب خارج از بحث این پایان نامه استفاده شده است اثبات آن ارجاع می شود به ([] و$Proposition\ 5.32$). □

گزاره ۸.۱.۲ اگر $U \subset I\!R^n$ یک مجموعه بسته و رادیانت باشد و $x \neq U$. آنگاه U و x را می توان توسط خانواده ای از n عنصر مستقل خطی بصورت اکید از یکدیگر جدا کرد.

برهان. ابتدا ثابت می کنیم که وجود دارد یک مخروطی محدب یک پارچه و بسته Q و یک مقدار مثبت $\lambda < 1$ بقسمی که

$$x \in int\ Q \quad , \quad U \cap (\lambda x + Q) = \emptyset \tag{۲}$$

از آنجا که U یک مجموعه بسته و رادیانت است در اینصورت وجود دارد یک مقدار مثبت $\lambda < 1$ بقسمی که $\acute{x} = \lambda x \neq U$. ادعا می کنیم که وجود دارد یک مخروطی محدب یک پارچه و بسته Q بقسمی که $x \in int\ Q$ و $(\acute{x} + Q) \bigcap U = \emptyset$. اگر این شرط برقرار نباشد آنگاه وجود دارد یک دنباله Q_j از مخروطی محدب یکپارچه و بسته بقسمی که $(Q_{j+1} \backslash \{0\}) \subset int\ Q_j$ و $\bigcap_j Q_j = R_x$ و برای هر j وجود دارد $y \in Q_j$ بقسمی که $x_j = \acute{x} + y_j \in U$. حال دو حالت را در نظر می گیریم.

۱) y_j کراندار نباشد. بدون آن که به کلیت مسئله خللی وارد شود فرض می کنیم که $||y_j|| \longrightarrow +\infty$. آنگاه برای هر $\rho > 0$ داریم

$$\rho \, \frac{x_j}{||y_j||} \ = \ \rho \, \frac{\acute{x}}{||y_j||} \ + \ \rho \, \frac{y_j}{||y_j||}. \tag{۳}$$

اولین مقدار افزوده شده در سمت راست (۳) به سمت صفر میل می کند. تساوی $\cap_j Q_j = R_x$ نشان می دهد که مقدار افزوده دوم به سمت $(\rho x)/||x||$. از آنجا که U رادیانت است و $x_j \in U$، می توان نتیجه گرفت که $(\rho x_j)/||y_j|| \in U$ برای هر j به قدر کافی بزرگ.

۲) y_j کراندار باشد. بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود فرض می کنیم که $y_j \longrightarrow y$. آنگاه وجود دارد $\gamma \geq 0$ بقسمی که $y = \gamma x$ در اینصورت داریم $x_j \longrightarrow \acute{x} + \gamma x = (\lambda + \gamma)x$. از آنجا که $x_j \in U$ داریم $(\lambda + \gamma)x \in U$. در غیر اینصورت $(\lambda + \gamma)x \notin U$ در اینصورت $\lambda x \notin U$، $\gamma \geq 0$ و U یک مجموعه رادیانت است بنابراین این یک تناقض است. یک مخروطی Q و یک مقدار λ را در نظر می گیریم بقسمی که (۷.۱.۲) بر قرار باشد. با توجه به گزاره ۷.۱.۲ می توان عناعر مستقل خطی $l_1, l_2, ..., l_n$ را طوری پیدا کرد بقسمی که $T = \{y : [l_i, y] > 0, i = 1, ..., n\} \subset int\ Q$ و $[l_i, x] = 1$ برای هر i. همچنین داریم $\lambda x + T = \{y : [l_i, y] > \lambda\ \forall i\}$. از آنجا که $U \cap (\lambda x + T) = \emptyset$ در اینصورت برای هر $u \in U$ وجود دارد i بقسمی که $[l_i, u] < \lambda$. □

حال به بررسی جداسازی روی مجموعه های محدب (قضیه هان—باناخ) و نتایج آن می پردازیم که کاربردهای فراوانی در قسمت بعد دارد.

قضیه ۹.۱.۲ (قضیه هان—باناخ). فرض کنیم A و B دو مجموعه جدا از هم، ناتهی و محدب در فضای برداری X باشند، در اینصورت داریم:

۱) اگر A باز باشد در اینصورت وجود دارد $\Lambda \in X^*$ و $\gamma \in I\!R$ بقسمی که:

$$\Lambda(x) < \gamma \leq \Lambda(y) \quad \forall x \in A,\ y \in B$$

۲) اگر A فشرده و B بسته باشد و X موضعا محدب باشد آنگاه وجود دارد $\Lambda \in X^*$ و $\gamma_1, \gamma_2 \in I\!R$ بقسمی که

$$\Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda(y) \quad \forall x \in A,\ y \in B$$

نتیجه ۱۰.۱.۲ اگر B یک مجموعه محدب، بالانس، بسته در فضای موضعا محدب X باشد و $x_0 \in X$ و $x_0 \notin B$ آنگاه وجود دارد $\Lambda \in X^*$ بقسمی که $|\Lambda(x)| \leq 1$ برای هر $x \in B$ و $\Lambda(x_0) > 1$.

برهان. ببینید (رودین ، $Theorem 3.7$). □

نتیجه ۱۱.۱.۲ اگر X یک فضای خطی نرمدار و M یک زیر فضای X باشد، $x_0 \in X \backslash M$ و $d = dist(x_0, M)$ آنگاه وجود دارد $\Lambda \in X^*$ بقسمی که $\Lambda(x_0) = 1$ و $\Lambda(x) = 0$ برای هر $x \in M$ و $\|\Lambda\| = d^{-1}$.

برهان. برای مشاهده اثبات ببینید (کانوی و). □

۲.۲ جداسازی غیر خطی

در این بخش جداسازی روی مجموعه های رادیانت با استفاده از توابع غیر خطی را بررسی می کنیم. هر مجموعه محدب و بسته را می توان از نقاطی که متعلق به آن نیستند با استفاده از نیم صفحه های باز یا بطور دقیق تر با استفاده از یک تابع خطی پیوسته از یکدیگر جدا کرد. بطور مشابه هر مجموعه بسته و رادیانت را می توان از نقاطی که به آن تعلق ندارند را بااستفاده از یک مخروطی محدب باز و یا بطور معادل با استفاده از مجموعه های تراز یک تابع فوق خطی (زیر خطی) پیوسته از یکدیگر جدا کرد.

گزاره ۱.۲.۲ برای هر مجموعه بسته و رادیانت $A \subset X$ و هر $x \notin A$ وجود دارد یک مخروطی محدب باز مانند K که $x \in K$ و $\beta \in (0,1)$ بقسمی که $A \cap (\beta x + K) = \emptyset$.

برهان. اگر $A = \emptyset$ باشد در اینصورت با قرار دادن $K = X$ بوضوح قضیه برقرار است. حال اگر فرض کنیم که $A \neq \emptyset$ از آنجا که A بسته است و $x \notin A$ لذا وجود دارد یک گوی باز مانند U حول x بقسمی که $A \cap U = \emptyset$، علاوه بر این A رادیانت است پس $A \cap shw\ A = \emptyset$، زیرا در غیراینصورت وجود دارد $x \in A \cap shw\ U$ پس $x \in A$ و $x \in shw\ U$ در نتیجه $x = ty$ به ازای $y \in U$ و $t \geq 1$ پس در اینصورت $0 < t \leq 1$ و از آنجا که A رادیانت است لذا $x \in A$ $\frac{1}{t}$ یا $y \in A$ که این تناقض است زیرا $A \cap U = \emptyset$. در نتیجه $A \cap shw\ A = \emptyset$. حال فرض می کنیم که $K = Cone\ U$ پس مخروطی K یک مخروطی محدب باز و شامل x می باشد و علاوه براین وجود دارد $\beta \in (0,1)$ بقسمی که $\beta x \in U$ و $\beta x + K \subset shw\ U$ زیرا

$$\beta x \in U \Longrightarrow \beta x + K \subset U + K = U + \ (0,\infty)\, U = [1,\infty)\, U = shw\ U$$

و با توجه به اینکه $A \cap shw\ U = \emptyset$ داریم $(\beta x + K) \cap A = \emptyset$. $\square$

گزاره ۲.۲.۲ اگر $K \neq X$ یک مخروطی محدب و باز باشد و $z \in K$ آنگاه وجود دارد یک تابع فوق خطی پیوسته $p : X \longrightarrow I\!R$ بقسمی که $z + K = \{x \in X : p(x) > 1\}$.

برهان. از آنجا که K یک مخروطی محدب باز می باشد در اینصورت مشمول در یک نیم صفحه باز است. $z \in K$ لذا $0 \in z - K$ و وجود دارد مقدار مثبت δ بقسمی که گوی B_δ حول 0 در شرایط $B_\delta \subset (z - K)$ و $(z - K) \cap (z + K) = \emptyset$ صدق کند. از آنجا که $z + K$ محدب و باز است بنا به قضیه هان—باناخ مجموعه تابعک های خطی پیوسته که $z + K$ را از $z - K$ جدا می کند، ناتهی است. که در حقیقت عبارت است از دوگان مخروطی $K^+ = \{\ell \in X^* \ : \ \ell(k) \geq 0, \forall k \in K\}$ زیرا بر اساس قضیه هان—باناخ داریم $\ell(z - K) < \gamma \leq \ell(z + K)$ از آنجا که $0 \in z - K$ و $\ell(0) = 0$ لذا $\gamma \geq 0$ و همچنین داریم $\ell(K) \geq 0$. علاوه بر این، از آنجا که مجموعه $z + K$ خارج از گوی B_δ به شعاع δ و حول مبدا قرار دارد و باتوجه به نتیجه ۱۰.۱.۲ می توانیم مجموعه $L \subset K^+$ را طوری در نظر بگیریم که برای هر $\ell \in L$، $\ell(x) > 1$ برای هر $x \in z + K$ و $\ell(x) \leq 1$ برای هر $x \in B_\delta$. بدلایل مشابه برای هر هر نقطه x در مرز $z + K$ وجود دارد $\ell \in L$ بقسمی که $\ell(x) = 1$. برای هر $x \in X$ قرار می دهیم $p(x) = \inf_{\ell \in L} \ell(x)$. آنگاه برای $\alpha \geq 0$ و هر $x, y \in X$ داریم

$$p(\alpha x) = \inf_{\ell \in L} \ell(\alpha x) = \alpha \inf_{\ell \in L} \ell(x) = \alpha p(x)$$

و

$$p(x + y) = \inf_{\ell \in L} \ell(x + y) = \inf_{\ell \in L} (\ell(x) + \ell(y)) \geq \inf_{\ell \in L} \ell(x) + \inf_{\ell \in L} \ell(y) = p(x) + p(y)$$

در اینصورت p فوق خطی و

$$\lim \sup_{y \longrightarrow x} p(y) = \lim \sup_{y \longrightarrow x} \inf_{\ell \in L} \ell(y)$$

$$\leq \lim \sup_{y \longrightarrow x} \ell(y) = \lim_{y \longrightarrow x} \ell(y) = \ell(x)$$

با توجه به تعریف inf داریم

$$\lim\sup_{y\longrightarrow x} p(y)\leq p(x)$$

در نتیجه p $u.s.c.$ است و همچنین داریم $z+K=\{x\in X:\ \ell(x)>1\}$ در اینصورت بنا به تعریف p داریم $z+K=\{x\in X:\ p(x)>1\}$ حال فقط کافی است نشان دهیم که p پیوسته است، توجه می کنیم که نرم توابع خطی بصورت $\|\ell\|=\sup\{|\ell(x)|:\|x\|\leq 1\}$ است و همچنین با توجه به ([] کولوموگروف) داریم $d_{H_1(\ell)}(0)=\|\ell\|^{-1}$ که $H_1(\ell)=\{x\in X:\ell(x)=1\}$ و d_A فاصله تابع از مجموعه A است، علاوه براین $d_{H_1(\ell)}(0)\geq\delta$ برای هر $\ell\in L$. بنابراین مجموعه L کراندار است که کران آن $M=\frac{1}{\delta}$ لذا برای هر $x\in B=\{\|x\|\leq 1\}$ داریم

$$p(x)=\inf_{\ell\in L}\ell(x)=\inf_{\ell\in L}\|\ell\|\leq M$$

و

$$p(x)=\inf_{\ell\in L}\ell(x)\geq\inf_{\ell\in L}-\|\ell\|=-M$$

در نتیجه p روی یک گوی یکه کراندار است و دامنه موثر آن X را می پوشاند بنابراین p پیوسته است.

□

حال در ادامه بر اساس این نتایج نتیجه زیر را بیان می کنیم که نقش اساسی در ادامه اثبات ها در این پایان نامه دارد.

نتیجه ۳.۲.۲ برای هر مجموعه بسته رادیانت و ناتهی $A\subset X$ و هر نقطه $x\notin A$ وجود دارد یک تابع فوق خطی پیوسته $p:X\longrightarrow I\!R$ بقسمی که $p(a)\leq 1$ برای هر $a\in A$ و $p(x)>1$.

برهان. بنابر گزاره ۱.۲.۲ وجود دارد یک مخروطی محدب باز مانند K که $x\in K$ و وجود دارد $\beta\in(0,1)$ بقسمی که $A\cap(\beta x+K)=\emptyset$ حال از آنجا که K یک مخروطی محدب است و $\beta\in(0,1)$ و $x\in K$ دراینصورت داریم $\beta x\in K$ و همچنین $K\neq A\neq\emptyset$ در نتیجه $K\neq X$ و بنابر گزاره ۲.۲.۲ وجود دارد یک تابع

فوق خطی $p : X \longrightarrow I\!R$ بقسمی که $\beta x + K = \{y \in X |\ p(y) > 1\}$ حال چون $A \cap (\beta x + K) = \emptyset$ پس در اینصورت به $p(a) \leq 1$ ازای هر $a \in A$ و همچنین داریم $x = \beta x + (1-\beta)x \in \beta x + K$ پس در اینصورت $p(x) > 1$ است. □

نتیجه فوق گسترش یافته گزاره ۸.۱.۲ در فضای نامتناهی بعد است بداین صورت که اگر گزاره ۸.۱.۲ که در فضای $I\!R^n$ است قرار دهیم $p(x) = \min_{i=1,..n}[\ell_i, x]$ در اینصورت p یک تابع فوق خطی است.

۱.۲.۲ رابطه قطبیت روی مجموعه های رادیانت

اگر X یک مجموعه دلخواه، 2^X نمایش خانواده ای از زیرمجموعه های X و $\bar{R}^X$ نمایش خانواده ای از تمام توابع $f : X \longrightarrow \bar{I\!R} = I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$ باشد آنگاه رابطه قطبیت بین مجموعه های X و W عبارت است از نگاشت $\Delta : 2^X \longrightarrow 2^W$ که برای هر مجموعه اندیس دار $I \neq \emptyset$ در شرط زیر صدق کند:

$$\Delta(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \Delta(A_i) \quad (\{A_i\}_{i\in I} \subset 2^X),$$

و در حالت خاص داریم:

$$\Delta(A) = \Delta(\bigcup_{x\in A} \{x\}) = \bigcap_{x\in A} \Delta(\{x\}) \quad (A \subset X).$$

اگر L را مجموعه توابع فوق خطی وپیوسته تعریف شده روی فضای نرمدار X دارای توپولوژی همگرایی نقطه‌ای[۱] در نظر بگیریم، بطوری که $b_n \longrightarrow b$ اگر و تنها اگر $b_n(x) \longrightarrow b(x)$ برای هر $x \in X$، در اینصورت L یک مخروطی محدب است (زیرا برای هر $\alpha, \beta \geq 0$ و هر $p_1, p_2 \in L$ داریم برای هر $a \geq 0$، $(\alpha p_1 + \beta p_2)(ax) = \alpha p_1(ax) + \beta p_2(ax) = a(\alpha p_1 + \beta p_2)(x)$ و همچنین برای هر $x, y \in X$،

$$(\alpha p_1 + \beta p_2)(x+y) = \alpha p_1(x+y) + \beta p_2(x+y) \geq \alpha p_1(x) + \alpha p_1(y) + \beta p_2(x) + \beta p_2(y)$$

$$= (\alpha p_1 + \beta p_2)(x) + (\alpha p_1 + \beta p_2)(y)$$

---

[۱] Pointwise convergence

پس در اینصورت $\alpha p_1 + \beta p_2 \in L$ و L یک مخروطی محدب است.) حال یک رابطه ترتیبی روی L تعریف می کنیم که تنها مقادیر مثبت را در بر می گیرد بدین صورت که اگر فرض کنیم $p,q \in L$ می نویسیم $p \geq_1 q$ اگر $[q > 1] \supset [p > 1]$ باشد. به آسانی می توان نشان داد که $\geq_1$ یک رابطه بازتابی و تعدی روی L است. علاوه براین $p \geq_1 q$ به این معنی است که $p \geq q$ در مجموعه ای که به ازای آن هر دوی آنها مثبت هستند و بنابراین $p \geq q$ نتیجه می دهد $p \geq_1 q$. (زیرا از $p \geq q$ داریم که برای هر $x \in X$، $p(x) \geq q(x)$ در نتیجه اگر فرض کنیم $y \in [q > 1]$ لذا $q(y) > 1$ و $p(y) \geq q(y) > 1$ دراینصورت $y \in [p > 1]$ پس $[p > 1] \supset [q > 1]$ که این یعنی $p \geq_1 q$). ولی عکس این مطلب برقرار نیست زیرا اگر فرض کنیم $p(x) = 3x - |x|$ و $q(x) = x$ بوضوح اگر $q(x) = x > 1$ آنگاه $p(x) = 3x - |x| > 1$ و $p \geq_1 q$ ولی $p \geq q$ برقرار نیست (زیرا اگر $x = -1$ در اینصورت $q(x) = -1$ و $p(x) = -4$ که $p(x) < q(x)$ است).

تعریف ۴.۲.۲ فرض کنیم $A \subseteq X$ باشد در اینصورت تعریف می کنیم مجموعه قطبی[۲] A را بصورت:

$$A^\vee = \{p \in L \ : \ p(a) \leq 1, \ \forall a \in A\}$$

تعریف می کنیم.

تذکر: در تعریف کلاسیک آنالیز محدب رابطه قطبیت بین زیر مجموعه های X و X^* را بدین صورت تعریف می کنند، اگر $A \subseteq X$ در اینصورت مجموعه $A^o = \{\ell \in X^* \ : \ \ell(a) \leq 1\}$ مجموعه قطبی A است حال با توجه به این تعریف داریم $A^o = A^\vee \cap X^*$، که این رابطه در واقع مقایسه بین $\vee-$قطبیت با قطبیت معمولی است.

گزاره ۵.۲.۲ برای هر مجموعه دلخواه A خواص زیر برقرار است:

۱) $A^\vee \subseteq L$ بسته است (برای توپولوژی همگرایی نقطه‌ای).

۲) $A^\vee$ رادیانت است.

---

[۲] Polar set

۳) $A^\vee$ محدب است.(یعنی اگر $p_1,p_2 \in A^\vee$ باشد آنگاه $[tp_1+(1-t)p_2](a) \leq 1$ برای هر $t \in [0,1]$ و هر $a \in A$)

برهان. ۱) اگر $\{p_n\} \subseteq A^\vee$ و وجود داشته باشد $p \in L$ بقسمی که $p_n \longrightarrow p$ باشد در اینصورت با توجه به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای داریم به ازای هر $a \in A$ داریم $p_n(a) \longrightarrow p(a)$ و دراینصورت چون p_n در $A^\vee$ است لذا $p_n(a) \leq 1$ حال اگر $n \longrightarrow \infty$ داریم $p(a) \leq 1$ پس $p \in A^\vee$.

۲) اگر $p \in A^\vee$ و $\alpha \in [0,1]$ باشد آنگاه داریم $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) \leq \alpha \leq 1$ و دراینصورت $\alpha p \in A^\vee$ لذا $A^\vee$ رادیانت است.

۳) اگر $p_1,p_2 \in A^\vee$ و برای هر $a \in A$ داریم $[tp_1+(1-t)p_2](a) = tp_1(a)+(1-t)p_2(a) \leq t+(1-t) = 1$ در نتیجه $tp_1+(1-t)p_2 \in A^\vee$.

□

گزاره ۶.۲.۲ هر مجموعه $A^\vee$ به ازای $A \subseteq X$ نسبت به رابطه‌های ترتیبی $\leq$ و $\leq_1$ یک مجموعه رو به پایین است.

برهان. بوضوح اگر $p_2 \in A^\vee$ و $p_1 \leq p_2$ آنگاه $p_1 \in A^\vee$ است، پس $A^\vee$ نسبت به رابطه $\leq$ یک مجموعه رو به پایین است. حال اگر $p_2 \in A^\vee$ و $p_1 \leq_1 p_2$ باشد آنگاه داریم $[p_2 > 1] \supseteq [p_1 > 1]$ و لذا با متمم گیری از طرفین داریم $[p_1 \leq 1] \supseteq [p_2 \leq 1]$ و چون $p_2 \in A^\vee$ پس $p_1 \in A^\vee$ است. □

تعریف ۷.۲.۲ برای هر زیرمجموعه $B \subseteq L$، مجموعه دوگان قطبی [۳] B را بصورت

$$B^\vee = \{x \in X \ : \ p(x) \leq 1, \ \forall p \in B\}$$

[۳] Dual polar set

تعریف می کنیم.

تذکر: برای هر $B \subseteq L$، $B^\vee$ یک زیر مجموعه بسته و رادیانت در X است.

برای هر مجموعه $A \subseteq X$، دوقطبی [۴] A را بصورت $A^{\vee\vee} = (A^\vee)^\vee$ معرفی می‌کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که $A \subseteq A^{\vee\vee}$ است (زیرا $A^{\vee\vee} = (A^\vee)^\vee = \{x \in X \ : \ p(x) \leq 1, \ \forall p \in A^\vee\}$ و همچنین $A^\vee = \{p \in L \ : \ p(a) \leq 1, \ \forall a \in A\}$ لذا بوضوح اگر $a \in A$ باشد آنگاه $a \in A^{\vee\vee}$ است.)

گزاره ۸.۲.۲ اگر $A \subseteq X$ ناتهی باشد در اینصورت A بسته و رادیانت است اگر وتنها اگر $A = A^{\vee\vee}$ باشد.

برهان. اگر $A = A^{\vee\vee}$ باشد بوضوح A بسته و رادیانت است، حال اگر A بسته و رادیانت باشد در اینصورت اگر $A = X$ باشد که قضیه اثبات می‌شود حال فرض کنیم که $A \neq X$ در اینصورت با توجه به نتیجه ۳.۲.۲ وجود دارد $p \in L$ بقسمی که $p(a) \leq 1$ برای هر $a \in A$ یا بعبارت دیگر $A^{\vee\vee} \subseteq A$ و در نتیجه $A = A^{\vee\vee}$ است. $\square$

از آنجا که اشتراک تمام مجموعه های رادیانت، رادیانت است در اینصورت به ازای هر $A \subseteq X$ اشتراک تمام مجموعه‌های رادیانت شامل A را رادیانت هال[۵] A می‌نامیم و با $radA$ نمایش می‌دهیم. حال کوچکترین مجموعه بسته و رادیانت شامل A را رادیانت هال بسته نامیده و با $cl\ radA$ نمایش می‌دهیم، در اینصورت با استفاده از عملیات قطبی روی مجموعه $A \subseteq X$ داریم $A^{\vee\vee} = cl\ radA$، (زیرا از آنجا که $A^{\vee\vee}$ بسته رادیانت و شامل A است لذا $cl\ radA \subseteq A^{\vee\vee}$، حال ثابت می‌کنیم که $A^{\vee\vee}$ است، فرض کنیم $x \notin cl\ radA$ و از آنجا که $cl\ radA$ بسته و رادیانت باشد لذا وجود دارد $p \in L$ بقسمی که $p(x) > 1$ پس $x \notin A^{\vee\vee}$ و نتیجه حاصل می‌شود.)

---

[۴] Bipolar

[۵] Radiant hull

فصل سوم

مشخص سازی مجموعه‌های رادیانت

در این فصل به مشخص سازی مجموعه های رادیانت با استفاده از مجموعه های محدب می‌پردازیم و با بیان یک قضیه رابطه بین مجموعه های بسته و رادیانت با مجموعه های محدب را مشخص می‌نماییم، در ادامه با استفاده از مفهموم جداسازی فوق خطی مجموعه‌هایی تعریف می‌کنیم که در ارتباط مستقیم با مجموعه‌های رادیانت هستند و سپس به بررسی ویژگی‌ها و مشخصه‌های اینگونه مجموعه ها می‌پردازیم.

۱.۳ رابطه بین مجموعه‌های رادیانت با مجموعه‌های محدب

گزاره ۱.۱.۳ فرض کنیم $A \subseteq X$ بسته و رادیانت باشد، دراینصورت A محدب است اگروتنهااگر برای هر $p \in A^{\vee}$ وجود داشته باشد $\ell \in X^*$ بقسمی که $\ell \in A^{\vee}$ و $\ell \geq p$.

برهان. فرض کنیم A محدب باشد و $p \in A^{\vee}$، از آنجا که $p(a) \leq 1$ برای هر $a \in A$، آنگاه مجموعه‌های A و $P = [p > 1]$ جدا از هم هستند. اگر $P = \emptyset$ باشد آنگاه $p \leq 0$، زیرا اگر $p = 1$ باشد دراینصورت برای هر

$x \in X$، $p(x+0) \geq p(x) + p(0)$ و در نتیجه $2 < 1$ و تناقض است. حال اگر $0 < p < 1$ باشد دراینصورت برای هر $x \in X$، $p(x) = p(x+0) \geq p(x) + p(0)$ و چون $p(x)$ و $p(0)$ دو مقدار مثبت هستند در اینصورت این یک تناقض است، پس باید $p \leq 0$ باشد. حال با قرار دادن $\ell = 0_{X^*}$ (که 0_{X^*} نگاشت صفر است) قضیه برقرار است. اگر $P \neq \emptyset$ باشد، آنگاه P یک مجموعه محدب و باز است که می‌توان آنرا از A جدا کرد(بنابر قضیه هان—باناخ)، در حقیقت وجود دارد $\nu \in X^*$ و $\alpha \in I\!R$ بقسمی که $\nu(a) \leq \alpha$ برای هر $a \in A$ و $\nu(x) > \alpha$ برای هر $x \in P$. از آنجا که $0 \in A$ (زیرا A رادیانت است) در اینصورت $\alpha \geq 0$ (زیرا $0 \in A$ پس $\nu(0) = 0 \leq \alpha$ و لذا $\alpha \geq 0$) حال می‌خواهیم ثابت کنیم که α مثبت است، فرض می‌کنیم $I = \{r \in I\!R \ : \ \nu(a) \leq r < \nu(x), \ \forall a \in A, \forall x \in P\}$ که $I \neq \emptyset$ (زیرا $\alpha \in I$) و فرض می‌کنیم که $I = \{0\}$ باشد. در اینصورت $\inf\{\nu(x), \ x \in P\} = 0$ یعنی وجود دارد یک دنباله $\{x_n\} \subseteq P$ بقسمی که $\nu(x_n) \longrightarrow 0$. از طرف دیگر به آسانی می‌توان مشاهده کرد که $Cone\ P = [p > 0]$ (زیرا برای هر $x \in P = [p > 1]$ و $\lambda > 0$ داریم $p(\lambda x) = \lambda p(x) > \lambda > 0$ پس $Cone\ P = [p > 0]$) و همچنین $\nu(k) > 0$ برای هر $k \in Cone\ P$ (زیرا اگر $k \in Cone\ P$ در اینصورت وجود دارد $x \in P$ و $\lambda > 0$ که $k = \lambda x$ و دراینصورت $\nu(\lambda x) = \lambda \nu(x) > 0$) از آنجاکه p پیوسته است، برای یک مقدار ثابت $-1 < \eta < 0$ پیدا می‌کنیم $\varepsilon > 0$ را که $p(z) > \eta$ برای هر $z \in \varepsilon B$ (که B یک گوی یکه بسته است). حال با اثر دادن p روی مجموعه $P + \varepsilon B$ بدست می‌آوریم:

$$p(x+z) \geq p(x) + p(z) > 1 + \eta > 0 \ , \ \forall x \in P, \ \forall z \in \varepsilon B$$

بنابراین $P + \varepsilon B \subseteq [p > 0]$ پس ν باید روی مجموعه $P + \varepsilon B$ مثبت باشد (زیرا $P + \varepsilon B \subseteq [p > 0] = Cone\ P$ و همچنین ν به ازای هر عضو $Cone\ P$ مثبت است). وقتی که ν را روی مجموعه‌های $x_n + \varepsilon B$ محاسبه می‌کنیم یک تناقض مشاهده می‌کنیم. از آنجا که $\nu(x_n) \longrightarrow 0$ پس در نهایت وجود دارد $z \in \varepsilon B$ که $\nu(x_n) + z) < 0$ (زیرا در غیر اینصورت داریم برای هر $z \in \varepsilon B$ داریم $\nu(x_n + z) \geq 0$ در نتیجه $\nu(x_n) + \nu(z) \geq 0$ حال اگر $n \longrightarrow \infty$ داریم $\nu(z) \geq 0$ برای هر $z \in \varepsilon B$، در اینصورت $z \in \varepsilon B$ و $\nu(z) \geq 0$ پس $-z \in \varepsilon B$ و دراینصورت $\nu(-z) \leq 0$ پس برای هر $z \in \varepsilon B$ داریم $\nu(z) = 0$ و لذا $\nu(x_n + z) = \nu(x_n) + \nu(z) < \varepsilon + 0$ که این تناقض است). پس پیدا می‌کنیم $r \in I$ و $s = \sup I > 0$ و $0 \neq$. قرار می‌دهیم $\ell = \frac{\nu}{s}$ مشاهده می‌کنیم که $\ell(a) \leq 1$

برای هر $a \in A$ و $1 > \ell(x)$ برای هر $x \in P$ و $\inf\{\ell(x)\ ,\ x \in P\} = 1$ (زیرا $1 \leq \frac{r}{s} \leq \frac{\nu(a)}{s} = \ell(a)$ و همچنین $\nu(x) > r$ و چون $s = \sup I$ پس در نتیجه $s < \nu(x)$ و $1 < \ell(x)$). از اینکه $p(x) = 1$ است نتیجه می‌گیریم که $\ell(x) \geq 1$ و سپس $[p \geq 1] \subseteq [\ell \geq 1]$. علاوه براین برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $\bar{x} \in X$ بقسمی که $p(\bar{x}) = 1$ و

$$1 = p(\bar{x}) \leq \ell(\bar{x}) < 1 + \varepsilon. \tag{۱}$$

با استفاده از ویژگی همگن مثبت بودن و پیوستگی ℓ و p داریم که $\ell(x) \geq p(x)$ برای هر $x \in [\ell \geq 0]$ و از آنجا $p(y) \leq 0$ که $y = \{x \in X\ :\ \ell(x) = 0\}$. اثبات با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم که وجود داشته باشد $\bar{z} \in X$ بقسمی که $\ell(\bar{z}) < p(\bar{z})$. در اینصورت باید $\ell(\bar{z})$ باشد. انتخاب می‌کنیم $\varepsilon > 0$ بقسمی که

$$0 < -\varepsilon\ell(\bar{z}) < p(\bar{z}) - \ell(\bar{z})$$

و فرض می‌کنیم $\bar{x}$ ثابت باشد بطوری که ۱ برقرار باشد. از آنجا که $\bar{x} \notin H$ وجود دارد $y \in H$ و $0 \neq \beta \in I\!R$ بقسمی که $\bar{z} = y + \beta\bar{x}$. از آنجا که $\ell(\bar{z}) < 0$ و $\ell(\bar{x}) > 0$ لذا $\ell(\bar{z}) = \ell(y + \beta\bar{x}) < 0$ و $\ell(y) + \beta\ell(\bar{x}) < 0$ و از آنجا که $\ell(y) = 0$ پس $\beta < 0$. حال با استفاده از خاصیت فوق جمعی p داریم

$$p(y) = p(y + \beta\bar{x} - \beta\bar{x}) \geq p(y + \beta\bar{x}) + p(-\beta\bar{x})$$

از آنجا

$$p(\bar{z}) = p(y + \beta\bar{x}) \leq p(y) - p(-\beta\bar{x}) = \beta p(\bar{x}) = \beta. \tag{۲}$$

از آنجا که $\ell(\bar{z}) = \beta\ell(\bar{x})$، از ۱ نتیجه می‌گیریم که $\beta(1 + \varepsilon) < \ell(\bar{z}) \leq \beta$ و از اینرو

$$\ell(\bar{z}) < p(\bar{z}) + \varepsilon\ell(\bar{z}) \leq \beta + \varepsilon\beta = \beta(1 + \varepsilon) < \ell(\bar{z}),$$

که این یک تناقض است. بنابراین $\ell \geq p$ و این قسمت از قضیه ثابت می‌شود.

بلعکس، برای اثبات تحدب کافی است نشان دهیم که هر نقطه که متعلق به A نباشد را می‌توان با استفاده از توابه خطی پیوسته از A جدا نمود. برای این منظور فرض می‌کنیم $x \notin A$. از نتیجه ۳.۲.۲ داریم وجود دارد

$p \in L$ بقسمی که $p(x) > 1$ و $p(a) \leq 1$ برای هر $a \in A$ و $\ell(x) \geq p(x) > 1$ و قضیه اثبات می‌شود. $\square$

حال می‌توان یک تعبیر هندسی از نتایج بدست آمده در قبل را بیان نمود بدین صورت که اگر فرض کنیم $N \subseteq L$ یک مخروطی محدب از توابع فوق خطی پیوسته نامثبت باشد در اینصورت $-K$ $N = L \cap$ که K یک مخروطی محدب بسته از توابع با مقادیر نامنفی است و گزاره ۱.۱.۳ را می‌توان بدین صورت بیان کرد: یک مجموعه بسته و رادیانت A محدب است اگروتنهااگر $A^{\vee} = A^{o} + N$ (زیرا اگر $p \in A^{\vee}$ باشد آنگاه وجود دارد $\ell \in A^{o}$ و $f \in N$ بقسمی که $p = \ell + f$ و از آنجا که $f \geq 0$ پس $p \leq \ell$).

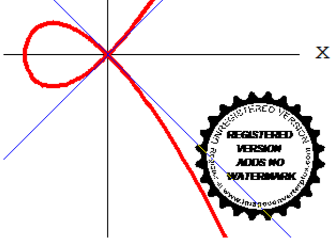
۲.۳ مجموعه‌های بطور هموار رادیانت

تعریف ۱.۲.۳ یک مجموعه را بطور هموار محدب نامیم اگر بتوان بصورت اشتراکی از نیم صفحه‌های باز نمایش داد.

مثال ۲.۲.۳ هر مجموعه محدب باز و هر مجموعه محدب بسته، بطور هموار محدب هستند.

تعریف ۳.۲.۳ مخروطی مماس مجموعه A در نقطه x عبارت است از:

$$T(A, x) = \{v \in X : \forall r > 0, \forall \delta > 0, \exists s \in (0, r), \exists u \in B_{\delta} : x + s(v + u) \in A\}.$$



شکل۳—۱: مخروطی محدب (سفید)

۱.۲.۳ عنوان زیربخش

متن

فصل چهارم

عنوان فصل

متن

۱.۴ عنوان بخش

متن

۱.۱.۴ عنوان زیربخش

متن

فصل پنجم

عنوان فصل

متن

۱.۵ عنوان بخش

متن

۱.۱.۵ عنوان زیربخش

متن

فصل ششم

عنوان فصل

متن

۱.۶ عنوان بخش

متن

۱.۱.۶ عنوان زیربخش

متن

فصل هفتم

عنوان فصل

متن

۱.۷ عنوان بخش

متن

۱.۱.۷ عنوان زیربخش

متن

پیوست

متن مربوط به پیوست در اینجا تایپ شود.

مراجع

[۱] First

[۲] Second

[۳] Third

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

لغت فارسی .... English Word

لغت فارسی .... English Word

لغت فارسی .... English Word

لغت فارسی .... English Word

لغت فارسی .... English Word

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

English Word .... لغت فارسی

English Word .... لغت فارسی

English Word .... لغت فارسی

English Word .... لغت فارسی

English Word .... لغت فارسی

Abstract

Enter the english abstract in here.

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences
Gava Zang, Zanjan, Iran

Title

Master/Ph. D. Thesis

NAME

Supervisor: ...

Advisor: ...

Date