بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضی مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و منعکس شده جزئی و نابرابری های تغییراتی

نگارنده: فاطمه تیموری

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

تیر ۱۳۹۶

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:

به پدرم به استوارترین تکیه گاهم و حامی من در طول تمام زندگی.

به مادرم به زلالی چشمه و سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت.

به برادرم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بود و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من می باشد.

به دوستی که بودنش معنای واقعی لطف الهی در زندگانی من است و همدلی و همراهی اش دلیل استواری گام هایم شد.

سپاس خداوند یکتایی را که در تمام مراحل زندگی مرا یاری نمود و به من نیروی تلاش و همتی عطا فرمود تا این مرحله از زندگی را نیز با موفقیت به اتمام برسانم.

از استاد گرانقدر و ارجمندم؛ جناب آقای دکتر علی مس فروش که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

و از برادر عزیزم همراه همیشگی و پشتوانه زندگیم؛

و از دوست مهربانم که همراه و همگام من بوده است.

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فاطمه تیموری
تیر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه تیموری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و منعکس شده جزئی و نابرابری های تغییراتی** ، تحت راهنمایی **علی مس فروش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه تیموری
تیر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیمه خطی به شکل زیر که دارای مانع هستند را بررسی می‌کنیم،

$$(\partial_t + L)_u + f(t, x, u, \partial^* \nabla_u) + \mu = 0 \qquad u \geq h, u_T = g,$$

که در اینجا h مانع است. جواب این معادلات زوج مرتب به شکل (u, μ)است، که در آن $u \in L^2([0, T]; H^1)$ است و μ اندازه مثبت رادن روی $\{u = h\}$ است. ثابت می‌شود که این رده از معادلات دارای جواب یکتا است و u جواب ماکزیمال نسبت به نابرابری تغییراتی است. برداشت احتمالی از فرمول فاینمن_کاک این مطلب را نشان می‌دهد که برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده روش جدیدی برای جواب ارائه می‌شود که از اصل ماکزیمال در آن استفاده شده است.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده، نابرابری تغییراتی، مانع، جواب ماکزیمال، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل مروری بر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی می‌کنیم. که به این منظور به بیان مفاهیمی از نظریه اندازه و احتمال، مارتینگل و انواع معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌پردازیم، که برگرفته از مراجع [۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۳] می‌باشد.

۱.۱ تعاریف مورد نیاز

۱.۱.۱ اندازه و اندازه‌پذیری

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و C مجموعه‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X باشد. C را یک σـ*میدان* از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر و مکمل، بسته باشد.

تعریف ۲.۱.۱. C را یک نیم *حلقه* از زیر مجموعه‌های X گوییم، اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد.

تعریف ۳.۱.۱. زیرمجموعه‌ی A از X را نسبت به μ *اندازه پذیر* گوییم. اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ که دراینجا $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X است، داشته باشیم:

$$\mu(I) = \mu(I \cap A) + \mu(I - A).$$

تعریف ۴.۱.۱. فضای اندازه‌پذیر عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$، که از مجموعه ناتهی X و σـ میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X تشکیل شده است. هرعضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی *اندازه‌پذیر* می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. منظور از یک فضای اندازه، سه تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ یک اندازه روی σـ میدان $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۶.۱.۱. اگر $X = \mathbb{R}$ و H مجموعه بازه‌ها و μ تابع طول باشد، زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ نسبت به μ^* اصطلاحاً *اندازه‌پذیر لبگ* [۱] نامیده می‌شود.

۲.۱.۱ نظریه احتمال و متغیرهای تصادفی

تعریف ۷.۱.۱. *فضای احتمال* به شکل سه گانه $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ نمایش داده می‌شود که در آن

- Ω فضای نمونه است.
- $\mathcal{F}$ زیر مجموعه‌ای اندازه‌پذیر از Ω است که σـ میدان نامیده می‌شود.
- P فضای احتمال است.

تعریف ۸.۱.۱. اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ متغیر *تصادفی* نامیده می‌شود. برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ انگلیسی مانند $Z, X, \ldots$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. خانواده‌ی $\{X_t\}_{t\in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک *فرآیند تصادفی* می‌نامیم. (مجموعه‌ی اندیس‌گذار I می‌تواند شمارا یا ناشمارا باشد.)

تعریف ۱۰.۱.۱. دنباله صعودی از σـ میدان‌های $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ روی Ω را با خاصیت $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$ یک *فیلتر* می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ *سازگار* می‌گوییم هرگاه برای $t \geq 0$ ، $X_t \in \mathcal{F}_t$؛ یعنی متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ـ اندازه پذیر باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *فرآیند قابل پیش بینی*[۲] گوییم هرگاه برای هر $n \in N$، متغیر تصادفی X_n ، $\mathcal{F}_{n-1}$ـ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. منظور از *فرآیند* $Cadlag$ یک فرآیند تصادفی است به گونه‌ای که مسیرهای $t \to X_t$ در هر نقطه پیوسته از راست باشند و حد چپ آن‌ها نیز موجود باشد، همچنین دارای احتمال ۱ باشند.

[۱] Lebesgue measurable
[۲] Predictable process

تعریف ۱۴.۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$ را *حرکت براونی* [۳] گوییم، هرگاه

۱. $X(t)$ دارای نموهای مستقل باشند. یعنی به ازای هر $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقل باشند. به عبارت دیگر، تغییرات مقادیر آن روی فاصله‌های زمانی مستقل باشند.

۲. $X(t)$ دارای نموهای نرمال مانا باشد، یعنی $s \leq t$، $X(t) - X(s)$ برای تمام t ها دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ باشد. نمو مانا یعنی توزیع تغییرات مقادیر در بین هر دو نقطه فقط به فاصله آن دو نقطه بستگی داشته باشد.

۳. $X(t)$ تابعی پیوسته از t باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. اگر حرکت براونی در نقطه صفر شروع شود $(X(0) = 0)$ آنگاه فرآیند را *حرکت براونی استاندارد* یا فرآیند وینر گویند و با W نشان می‌دهند.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. $\int_\Omega X \mathrm{dP}$ را *امید ریاضی* X می‌گوییم و با نماد $E(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σـ میدان $\mathcal{A}$ باشد، *تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی* A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $V = \mathcal{V}(X)$ مجموعه تمام توابع حقیقی و اندازه‌پذیر روی $(X, \mathcal{A})$ باشد. برای $P \geq 1$ تعریف می‌کنیم:

$$L_{\mathrm{p}} = L_{\mathrm{p}}(X) = \{f \in V : \int |f|^{\mathrm{p}} \mathrm{d}\mu < \infty\}$$

۳.۱.۱ مارتینگل

تعریف ۱۹.۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ *مارتینگل* [۴] می‌نامیم، هرگاه

۱. برای هر n، X_nـ انتگرال‌پذیر باشد، یعنی برای هر n ، $\mathrm{E}(|X_n|) < \infty$

۲. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشند.

۳. برای هر n ، تقریباًهمه جا $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ *زیرمارتینگل* [۵] می‌نامیم. هرگاه

[۳] Brownian motion
[۴] Martingale
[۵] Submartingale

۱. n، X_nـانتگرال‌پذیر باشد، یعنی برای هر n ، $\mathrm{E}(|X_n|) < \infty$
۲. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشند.
۳. برای هر n، $X_n \leq \mathrm{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ *فوق مارتینگل* [۶] می‌نامیم. هرگاه

۱. n، X_nـانتگرال‌پذیر باشد، یعنی برای هر n ، $\mathrm{E}(|X_n|) < \infty$
۲. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشند.
۳. برای هر n، $X_n \geq \mathrm{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

تعریف ۲۲.۱.۱. نگاشت $\tau : \Omega \to \mathbb{Z}^+ \bigcup\{\infty\}$ را *زمان توقف* [۷] نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ گوییم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم؛

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

تعریف ۲۳.۱.۱. دنباله‌ی $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ از زمان‌های توقف را یک *دنباله‌ی موضعی* می‌نامیم هرگاه برای هر $n \geq ۱$ ، $T_n \geq T_{n-۱}$ و $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty, a.s$

تعریف ۲۴.۱.۱. گوییم فرآیند تصادفی $\{X_t : ۰ \leq t \leq T\}$ *مارتینگل موضعی* است اگر دنباله‌ای از زمان‌های توقف $T_n \uparrow T$ موجود باشد که $\{X_{t\wedge T_n}, t > ۰\}$ یک مارتینگل باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. روی فضای احتمال فیلتر شده $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰}, P)$ فرآیند تصادفی حقیقی مقدار X_t را یک نیمه‌مارتنیگل [۸] گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$X_t = M_t + A_t$$

که درآن M_t مارتینگل موضعی را نشان می‌دهد و A_t یک فرآیند سازگار، تغییر متناهی، پیوسته از راست و دارای حد از چپ $(cadlag)$ است. حرکت براونی و مارتینگل موضعی، نیم‌مارتنیگل هستند.

قضیه ۱.۱.۱. *(قضیه نمایش مارتنیگل)* [۹] فرض کنید W_t یک فرآیند تصادفی n بعدی و $\mathcal{F}_t$ فیلتر تولید شده توسط W_t باشد به گونه‌ای که امکان وجود فیلتری بزرگتر نباشد. فرض کنید $\xi \in L_۲(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (یعنی برای هر t داشته باشیم: $\mathrm{E}|\xi(t)|^۲ < \infty$) آنگاه فرآیندی n بعدی $f = (f_۱, f_۲, ..., f_n)$ از فضای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر i، $f_i \in L_{۲۲}$، ($L^\circ_{۲۲}$ مجموعه همه فرآیندهای تصادفی است که مسیرهای صعودی دارند و $L_{۲۲}$ مجموعه همه فرآیندهای تصادفی است که حدود دنباله‌هایی در $L^\circ_{۲۲}$ هستند.) و نیز داشته باشیم:

$$\xi = \mathrm{E}[\xi] + \int_۰^T f(t)\mathrm{d}W(t)$$

[۶] Supermartingale
[۷] Stopping time
[۸] Semimartingale
[۹] Martingale Representation Theorem

تعریف ۲۶.۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_n$ را L^1 فرآیند گوییم هرگاه برای هر n، $X_n \in L^1$.

قضیه ۲.۱.۱. *(قضیه L^1 همگرایی)* فرض کنید X_n به طور یکنواخت فوق مارتینگل باشد. آنگاه متغیر تصادفی X وجود دارد به طوری که $X_n \to X$ در L^1 همگراست. [۱۲]

قضیه ۳.۱.۱. *(قضیه دوب_میر)* [۱۰]

الف)فرض کنید که $\{X_n\}$ یک فرآیند L^1 و سازگار، M_n یک مارتینگل و A_n یک فرآیند قابل پیش‌بینی باشد، آن‌گاه X_n به صورت زیر قابل تجزیه است:

$$X_n = X_0 + M_n + A_n.$$

این تجزیه یکتاست یعنی اگر دو فرآیند مارتینگل و قابل پیش‌بینی مانند A'_n و M'_n داشته باشیم به طوری که

$$\begin{cases} X_n = X_0 + M_n + A_n, \\ X_n = X_0 + M'_n + A'_n, \end{cases}$$

آنگاه

$$M'_n = M_n, A'_n = A_n.$$

ب) اگر $\{X_n\}$ یک زیرمارتینگل باشد، آنگاه $\{A_n\}$ یک فرآیند صعودی است. [۱۲]

۴.۱.۱ انتگرال ایتو

می‌خواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان بدست آوریم. چون مکان ذره در لحظه t ، $t \in [0, T]$ و $(T > 0)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت (۱.۱) است.

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) Z_t \qquad (۱.۱)$$

که در آن b, σ توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (0, \infty)$ هستند و اختلال Z_t، فرآیندی تصادفی است که در سه شرط زیر صدق می‌کند،

۱. برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$ که $t_1 \neq t_2$ است Z_{t_1}, Z_{t_2} مستقل از هم باشند.

۲. توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, Z_{t_2+t}, ..., Z_{t_n+t}$ و $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.

۳. برای هر $\mathrm{E}(Z_t) = 0, t \in (0, T]$

[۱۰] Doob-Meyer Decomposition

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ افرازی از بازه $[0, T]$ است. با گسسته‌سازی فرمول (۱.۱) داریم:

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} = b(t_j, X_{t_j})\Delta t_j + \sigma(t_j, X_{t_j})\Delta t_j Z_t \qquad (۲.۱)$$

تنها فرآیندی که با این ویژگی‌ها دارای مسیرهای پیوسته است، فرآیند براونی می‌باشد. با جمع کردن رابطه (۲.۱) روی j از 0 تا $k-1$ و با توجه به تلسکوپی بودن سری $\sum_{j=0}^{k-1} X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ رابطه (۳.۱) را خواهیم داشت؛

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j \qquad (۳.۱)$$

اگر حد طرف راست (۳.۱) وقتی $\Delta t \longrightarrow 0$ وجود داشته باشد داریم:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, w)ds + \int_0^t \sigma(s, w)\mathrm{d}B_s.$$

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}$ ناگزیر از محاسبه انتگرال‌های به شکل (۴.۱) هستیم؛

$$\int_s^T f(t, w)\mathrm{d}B_t(w), \qquad (۴.۱)$$

که در آن $B_t(w)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $[0, \infty) \times \Omega$ است. انتگرال‌های به شکل (۴.۱) را انتگرال ایتو [۱۱] می‌نامیم.

برای محاسبه (۴.۱) نیاز به مفاهیمی داریم که در ادامه به آنها می‌پردازیم.

فرض کنید $\varphi : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ تابعی مقدماتی [۱۲] روی $[0, \infty) \times \Omega$ باشد یعنی برای هر $a, b \in [0, \infty)$ داشته باشیم؛

$$\varphi(t, w) = X(w) I_{(a,b]}(t) \qquad a, b \in [0, \infty).$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^t \varphi(s, w)\mathrm{d}B_s = \int_a^t X(w)\chi_{[a,b)}(s)\mathrm{d}B_s(w) = X(w)[B_{b\wedge t}(w) - B_{a\wedge t}(w)]$$

که در آن برای $x, y \in \mathbb{R}$، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

فرض کنید f تابعی ساده [۱۳] روی $[0, \infty) \times \Omega$ باشد. یعنی $f = \sum_{j=0}^{n} \varphi_i$

[۱۱] Ito integrals
[۱۲] Elementary function
[۱۳] simple function

که φ ها توابعی مقدماتی هستند. در این صورت $\int_0^t f\mathrm{d}B_s$ به شکل (۵.۱) تعریف می‌کنیم؛

$$\int_a^t f\mathrm{d}B_s = \sum_{j=0}^{n}\int_a^t \varphi_i \mathrm{d}B_s. \tag{۵.۱}$$

تعریف ۲۷.۱.۱. رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t,w)$ روی مجموعه $[0,\infty)\times\Omega$ رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است:

- تابع $f(t,w) \to (t,w)$، $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ــ اندازه‌پذیر باشد.
- به ازای هر t، تابع $f(t,0)$ ، $\mathcal{F}_t$ــ اندازه‌پذیر باشد.
- برای هر $T \geq 0$، $\mathrm{E}\left[\int_0^T f^2(s,w)\mathrm{d}s\right] < \infty$.

لم ۱.۱.۱. (لم ایزومتری ایتو) اگرتابع $\varphi(t,w)$ کراندار و مقدماتی باشد، آنگاه

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_s^T \varphi(t,w)\mathrm{d}B_t(w)\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\int_s^T \varphi^2(t,w)\mathrm{d}t\right]$$

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

لم ۲.۱.۱. اگر $f \in \mathcal{P}_2$ آنگاه دنباله $\{\varphi\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که اگر $n \to \infty$ آنگاه؛

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T |\varphi(s) - f_n(s)|^2 \mathrm{d}s\right] \to 0$$

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

اکنون می‌توانیم $\int_0^T f(t,w)\mathrm{d}B_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_2$ تعریف کنیم. برای $f \in \mathcal{P}_2$ با توجه به لم ۲.۱.۱ دنباله‌ای از توابع مقدماتی مانند $\{\varphi\}$ موجود است که در نرم L^2 به f میل می‌کند. پس می‌توان انتگرال ایتو را به شکل (۶.۱) تعریف کرد:

$$\int_0^T f\mathrm{d}B_t = \sup_{n\to\infty}\int_0^T \varphi\mathrm{d}B_t \tag{۶.۱}$$

۵.۱.۱ فرمول ایتو

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید $(B_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد. انتگرال تصادفی یک بعدی، فرآیند تصادفی مانند X_t روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ است به طوری که

$$X_t(w) = X_0(w) + \int_0^t u(s,w)\mathrm{d}s + \int_0^t v(s,w)\mathrm{d}B_s(w) \tag{۷.۱}$$

که در آن توابع u,v به این صورت $u,v : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ داده شده‌اند. با مشتق‌گیری از طرفین (۷.۱) می‌توان $\mathrm{d}X_t$ را به صورت زیر بدست آورد؛

$$\mathrm{d}X_t = u\mathrm{d}t + v\mathrm{d}B_t$$

قضیه ۴.۱.۱. (فرمول یک بعدی ایتو [۱۴]) فرض کنید $\mathrm{d}X_t = u\mathrm{d}t + v\mathrm{d}B_t$ و $Y_t = g(t, X_t)$، در این صورت

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(\mathrm{d}X_t)^2$$

توجه داریم:

$$(\mathrm{d}B)^2 = \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t.\mathrm{d}t = \mathrm{d}t.\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}B_t.\mathrm{d}t = 0.$$

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$ در این صورت $g(t, x) = \frac{1}{2}x^2$، لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial g}{\partial x^2} = 1,$$

با استفاده از فرمول ایتو داریم:

$$\mathrm{d}Y_t = B_t\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}t$$

قضیه ۵.۱.۱. (فرمول کلی ایتو) فرض کنید $\mathrm{d}X_t = u\mathrm{d}t + v\mathrm{d}B_t$ یک انتگرال تصادفی n بعدی و $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک نگاشت C^2 باشد. در این صورت $Y(t, w) = g(t, X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و داریم:

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i x_j}(t, X_t)\mathrm{d}X_i\mathrm{d}X_j$$

توجه داریم:

$$\mathrm{d}B_i.\mathrm{d}B_j = \delta_{i,j}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t.\mathrm{d}t = \mathrm{d}t.\mathrm{d}B_i = \mathrm{d}B_i.\mathrm{d}t = 0.$$

مثال ۲.۱.۱. اگر $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$، آنگاه $g(t, x) = x_1^2 + x_2^2$ لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{i,j},$$

بنابراین

$$\mathrm{d}X_t = \sum_{i=1}^{2} 2B_i\mathrm{d}B_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2}\delta_{i,j}\mathrm{d}B_i\mathrm{d}B_j = 2(B_1\mathrm{d}B_1 + B_2\mathrm{d}B_2 + \mathrm{d}t).$$

لم ۳.۱.۱. فرض کنید $y(t), f(t), g(t)$ توابعی نامنفی روی بازه $[0, T]$ باشند و برای تمام $0 \leq t \leq T$ داشته باشیم:

$$y(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s)y(s)\mathrm{d}s.$$

آنگاه برای $0 \leq t \leq T$ نامساوی (۸.۱) برقرار است.

$$y(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s)f(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)\mathrm{d}s. \tag{۸.۱}$$

[۱۴] Ito formula

برهان. فرض کنید

$$I(t) := \int_{\circ}^{t} g(s)y(s)\mathrm{d}s \quad ,G(t) := \int_{\circ}^{t} g(s)\mathrm{d}s$$

حال

$$I'(t) = g(t)y(t) \leq g(t)f(t) + g(t)I(t)$$

خارج از مجموعه شمارا و

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-G(t)}I(t) = e^{-G(t)}\{I'(t) - g(t)I(t)\} \leq e^{-G(t)}g(t)f(t),$$

بنابراین

$$e^{-G(t)}I(t) < \int_{\circ}^{t} e^{-G(s)}g(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

خواهیم داشت:

$$I(t) \leq \int_{\circ}^{t} e^{G(t)-G(s)}g(s)f(s)\mathrm{d}s,$$
$$y(t) \leq f(t) + I(t) \leq f(t) + \int_{\circ}^{t} e^{G(t)-G(s)}g(s)f(s)\mathrm{d}s$$

□

تعریف ۲۹.۱.۱. تابع $f : X \to Y$ پیوسته *لیپ‌شتیز* [۱۵] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ مقدار ثابت C موجود باشد به گونه‌ای که نامساوی (۹.۱) برقرار باشد.

$$\mathrm{d}(f(x_۱) - f(x_۲)) \leq C.\mathrm{d}(x_۱, x_۲). \tag{۹.۱}$$

قضیه ۶.۱.۱. *(قضیه کشی_شوارتز)* [۱۶] اگر $a_۱, \ldots, a_n$ و $b_۱, \ldots, b_n$ دنباله‌های حقیقی دلخواهی باشند آنگاه نامساوی (۱۰.۱)

$$\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_k b_k\Big)^۲ \leq \Big(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\Big)\Big(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\Big). \tag{۱۰.۱}$$

برقرار است. به علاوه، اگر حداقل یکی از a_i ها صفر نباشد، تساوی، برقرار است.
اگر و تنها اگر به ازای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n$ عدد حقیقی x وجود داشته باشد، به قسمی که $a_n x + b_n = ۰$ برقرار باشد. [۶]

---
[۱۵] Lipschitz Continuous
[۱۶] Cauchy-Schwarz

۲.۱ مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل تصادفی

معادله دیفرانسیل رابطه‌ای میان تابع مجهولی از یک یا چند متغییر مستقل و مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت ـ در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی ـ طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در ریاضیات به ویژه در هندسه و نیز در مهندسی و اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم فراوان‌اند.

معادلات دیفرانسیل در بسیاری پدیده‌های علوم رخ می‌دهد. هر زمان که رابطه‌ای بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود داشته باشد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌ها یا حالات مختلف شناخته شده باشد می‌توان آن پدیده را با معادله دیفرانسیل بیان کرد.

معادلات دیفرانسیل به طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. (معادلات دیفرانسیل معمولی) [۱۷] اگر در معادله دیفرانسیل تابع مجهول برحسب یک متغیر باشد آنگاه معادله دیفرانسیل را یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌نامیم.

۲. (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی) [۱۸] اگر تابع مجهول دارای بیش از یک متغیر مستقل باشد آنگاه معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل جزئی می‌نامیم.

بیشتر فرآیندهای طبیعی را می‌توان در سطح میکروسکوپی، بدون شرح رفتار تک تک مولکول‌ها، اتم‌ها، الکترون‌ها و یا اجزای دیگر، کیمت‌های مانند سرعت، چگالی، فشار، دما، غلظت یا میدان الکترومغناطیسی، توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بدست می‌آیند. این معادلات، زبانی برای فرمول‌بندی بسیاری از مسئله‌های مهندسی و علمی است، که در پیش‌بینی و کنترل خواص دینامیکی و استاتیکی ساختمان‌ها، گرم کردن و ذوب کردن فلزات، عکس‌برداری تشدید مغناطیسی و... به کار می‌رود. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند که در آن، توابع مجهول برحسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی توابع نسبت به آن متغیرها، وجود داشته باشد.

تنها تفاوت بین معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی این است که معادلات دیفرانسیل معمولی اغلب در سیستم‌های دینامیکی یک بعدی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در سیستم‌های چند بعدی مدل‌بندی می‌شوند.

اولین کاربر روی معادلات دیفرانسیل تصادفی [۱۹] برای توصیف حرکت براونی درمقاله

---

[۱۷] Ordinary Differential Equations(ODE)

[۱۸] Partial Differential Equations (PDE)

[۱۹] Stochastic Differential Equations (SDE)

انیشتن [۲۰] و همان زمان توسط اسملچوسکی [۲۱] و باچلیر [۲۲] انجام شد. بعد از آن ایتو و استراتنویچ [۲۳] معادلات دیفرانسیل را در ریاضیات به کار بردند. حرکت براونی $B_t(w)$ [۲۴]، [۲۵] مدلی ریاضی برای توصیف نوعی از حرکت تصادفی ذراتی است که در داخل یک سیال(مایع یا گاز) غوطه‌ور هستند. حرکت براونی مبنای کار معادلات دیفرانسیل تصادفی است. به بیان ساده‌تر حرکت براونی، حرکت تصادفی ذرات معلق پخش شده در مایعات و گازها است. حرکت *براونی* B_t تابعی است که همه جا پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست و دارای خصوصیات زیر است:

۱. $B_\circ = \circ$

۲. به ازای هر $\circ \leq s \leq t$ نمو B_t دارای توزیع نرمال به صورت $B_t - B_s \sim (\circ, t-s)$ می‌باشد.

۳. حرکت براونی دارای نموهای مانا(یعنی نمو آن درهر زمان توزیع ثابتی دارد) و مستقل است.

۴. مسیرهای حرکت براونی توابعی پیوسته هستند.

تعریف ۱.۲.۱. اختلال سفید، مشتق حرکت براونی نسبت به زمان است. پس اگر اختلال سفید که منجر به $\mathrm{d}B_t = W(t)\mathrm{d}t$ می‌گردد، را با $W(t)$ نشان دهیم، آنگاه

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t} = W(t)$$

برخی از خواص اختلال سفید عبارتند از:

۱. $W_{t_۱}, W_{t_۲}$ برای $t_۱ \neq t_۲$ مستقل هستند.

۲. W_t ایستای قوی هستند، یعنی توزیع توأم $\{W_{t_۱+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$ با توزیع توأم $\{W_{t_۱}, \dots, W_{t_k}\}$ برابر است.

۳. برای هر $t > \circ$ تساوی $E(W_t) = \circ$ برقرار است.

۴. برای هر $t > \circ$ تساوی $var(W_t) = \sigma^۲$ برقرار است. که در آن $\sigma^۲$ مقداری ثابت است.

معادله دیفرانسیل تصادفی معادله دیفرانسیلی است که شامل حداقل یک فرآیند تصادفی باشد. جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی نیز یک فرآیند تصادفی است. معادلات دیفرانسیل تصادفی

[۲۰] Einstein

[۲۱] Smoluchowski

[۲۲] Bachelier

[۲۳] Stratonovich

[۲۴] Robert Brown

[۲۵] رابرت براون(گیاه شناس، اولین فردی بود که این نوع مشخصه فیزیکی ذرات را مشاهده نمود و با نام براون شناخته می‌شود.)

برای مدل سازی پدیده‌های متنوعی مانند نوسان قیمت سهام، نوسانات حرارتی سیستم‌های فیزیکی و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور معمول معادلات دیفرانسیل تصادفی ترکیب اختلال سفید است که می‌تواند به عنوان مشتق حرکت براونی در نظر گرفته شود.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت (۱۱.۱) می‌باشد.

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}B_t, \tag{۱۱.۱}$$

که در آن به $\mu(X_t, t)$ ضریب تاثیر [۲۶] و به $\sigma(X_t, t)$ ضریب انتشار [۲۷] گفته می‌شود و B_t یک حرکت براونی است. باتوجه به تعریف ۱.۲.۱ ، معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل (۱۲.۱) قابل بیان است.

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)W(t)\mathrm{d}t. \tag{۱۲.۱}$$

با انتگرال گیری از طرفین (۱۲.۱) جواب معادله دیفرانسیل تصادفی را می‌توان به صورت (۱۳.۱) بدست آورد:

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t \mu(X_s, s)\mathrm{d}s + \int_\circ^t \sigma(X_s, s)W(s)\mathrm{d}s, \tag{۱۳.۱}$$

که درآن انتگرال دوم، انتگرال ایتو است.

قضیه ۱.۲.۱. (وجود و یکتایی جواب)

فرض کنید $T > \circ$ و

$$\mu(\cdot,\cdot) : [\circ, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \sigma(\cdot,\cdot) : [\circ, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(n\times m)}$$

توابع اندازه‌پذیر باشند که به ازای مقدار ثابت مثبت C و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $t \in [\circ, T]$ در شرط زیر صدق می‌کنند،

$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(۱ + |x|),$$

و به ازای مقدار ثابت مثبت D و برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $t \in [\circ, T]$ نامساوی زیر برقرار باشد.

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x - y|.$$

همچنین فرض کنید Z متغیر تصادفی باشد که برای هر $s \geq \circ$ مستقل از حرکت براونی $B_s(\circ)$ است. و $\mathrm{E}(|Z^۲|) < \infty$ آنگاه یک جواب یکتای $X_t(w)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۴.۱) صدق می‌کند،

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}B_t, & \circ \leq t \leq T, \\ X_\circ = Z. \end{cases} \tag{۱۴.۱}$$

[۲۶] Impact factor

[۲۷] Diffusion coefficient

تعریف ۲.۲.۱. اگر فضای احتمالی با یک فیلتر و حرکت براونی $\widehat{B}(t)$ و یک فرآیند سازگار $\widehat{X}(t)$ با همان فیلتر وجود داشته باشد، به طوری که $\widehat{X}(\circ)$ دارای توزیع باشد به ازای هر t، $\widehat{X}(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{X}(t) = \widehat{X}(\circ) + \int_\circ^t \mu(\widehat{X}(x), x)\mathrm{d}x + \int_\circ^t \sigma(\widehat{X}(x), x\mathrm{d}\widehat{B}(t)$$

پس $\widehat{X}(t)$ را یک *جواب ضعیف* معادله دیفرانسیل تصادفی می‌نامیم.

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(X(t), t)\mathrm{d}t + \sigma(X(t), t)\mathrm{d}B(t).$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $X(t), \widehat{X}(t)$ جواب‌های واقعی و تقریبی معادله دیفرانسیل تصادفی زیر می‌باشند:

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t, X(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, X(t))\mathrm{d}B(t),$$

با مقدار اولیه $X(\circ) = X_\circ$ باشند، گوییم جواب معادله دیفرانسیل تصادفی با مقدار اولیه $X_\circ$ یکتا است اگر هر دو جواب $X(t), \widehat{X}(t)$ روی بازه $[\circ, T]$ معادل باشند، بنابراین تساوی

$$P(\sup_{\circ \leq t \leq T} |X(t) - \widehat{X}(t)|) = \circ$$

برقرار است.

مثال ۱.۲.۱. معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر را در بگیرید:

$$\mathrm{d}X(t) = \mu X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}B_t, \qquad , X(\circ) = ۱,$$

قرار می‌دهیم $f(x) = \ln x$ آنگاه $f'(x) = \frac{۱}{x}$ و $f''(x) = -\frac{۱}{x^۲}$ ، با استفاده از انتگرال ایتو و انتگرال‌گیری جزبه‌جز یک جواب قوی بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\ln X(t)) &= \frac{۱}{X(t)}\mathrm{d}X(t) + \frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{X(t)^۲})\sigma^۲ X(t)^۲\mathrm{d}t \\
&= \frac{۱}{X(t)}(\mu X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}B_t) - \frac{۱}{۲}\sigma^۲\mathrm{d}t \\
&= (\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B(t)
\end{aligned}$$

بنابراین $Y(t) = \ln X(t)$ در

$$\mathrm{d}Y(t) = (\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B(t)$$

صدق می‌کند. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Y(t) = (\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)t + \sigma B(t) \\ X(t) = X(\circ)e^{(\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)t + \sigma B(t)} \end{cases}$$

در مثال بعدی جواب قوی وجود ندارد. اما یک جواب ضعیف و منحصربه‌فرد وجود دارد.

مثال ۲.۲.۱. معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{d}X(t) = \mathrm{sign}(X(t))\mathrm{d}B(t)$$

که درآن

$$\begin{cases} \mathrm{sign}(x) = ۱, & x \geq ۰, \\ -۱, & x < ۰. \end{cases}$$

نشان می‌دهیم حرکت براونی جواب ضعیف یکتا برای معادلات دیفرانسیل تصادفی است.

فرض کنید $X(t)$ تعدادی حرکت براونی باشد. در فرآیند

$$Y(t) = \int_{۰}^{t} \frac{۱}{\mathrm{sign}(X(s))}\mathrm{d}X(s) = \int_{۰}^{t} \mathrm{sign}(X(s))\mathrm{d}X(s)$$

- $\mathrm{sign}(X(t))$ سازگار می‌باشد.
- $\int_{۰}^{t}(\mathrm{sign}(X(t))^{۲}\mathrm{d}t = T < \infty$
- $Y(t)$ یک مارتینگل است.

حال $[Y,Y](t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$[Y,Y](t) = \int_{۰}^{t} \mathrm{sign}^{۲}(X(s))d[X,X](s) = \int_{۰}^{t} \mathrm{d}s = t,$$

لذا، $Y(t)$ یک حرکت براونی است.

$$\widehat{\beta}(t) = \int_{۰}^{t} \frac{dX(s)}{\mathrm{sign}(X(s))}$$

بنابراین هر جواب ضعیف، یک حرکت براونی است.

تعریف ۴.۲.۱. (فاینمن_ کاک).[۲۸] معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{d}X(u) = \beta(u,X(u))\mathrm{d}u + \gamma(u,X(u))\mathrm{d}W(u).$$

اگر $h(y)$ تابع اندازه‌پذیر بورل باشد. $T > ۰$ ثابت در نظر می‌گیریم، اگر $t \in [۰,T]$ داده شده باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(t,x) = \mathrm{E}^{t,x}h(X(T)).$$

(فرض کنید که برای تمام t,x، $\mathrm{E}^{t,x}|h(X(T))| < \infty$ باشد.) آنگاه $g(t,x)$ در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی صدق می‌کند،

$$g_t(t,x) + \beta(t,x)g_x(t,x) + \frac{۱}{۲}\gamma^{۲}(t,x)g_{xx}(t,x) = ۰$$

[۲۸] Feynman-Kac

و برای هر x شرط نهایی:

$$g(T, x) = h(x).$$

برقرار است. [۱۳]

قضیه ۲.۲.۱. (قضیه مقایسه).[۲۹] فرض کنید دو معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو استاندارد و دو جواب نهایی $(\bar{F}, \bar{Q}), (F, Q)$ را داریم. اگر $(\bar{Y}, \bar{Z}), (Y, Z)$ دو جواب دیگر باشند. فرض کنید که برای برخی از S، شرایط زیر را داریم:

۱. $Q \geq \bar{Q}$

۲. $\mu \times \mathbb{P} \quad a.s$ روی بازه $[S, T] \times \Omega$ که $F(w, u, \bar{Y_u}, \bar{Z_u}) \geq \bar{F}(w, u, \bar{Y_u}, \bar{Z_u})$

۳. برای هر j، اندازه $\tilde{P_j}$ معادل P وجود دارد به طوری که $j \in X$ همان طور که $r \geq s$ تعریف شده است.

$$e_j^* X_r = -\int_{[s,r]} e_j^* F(w, u, \bar{Y_u}, \bar{Z_u}) - \bar{F}(w, u, \bar{Y_u}, \bar{Z_u}) \mathrm{d}\mu_u + \sum_j \int_{[s,r]} e_j^* [Z_u^i - \bar{Z_u^i}] \mathrm{d}\mu_u^i$$

$\tilde{P_j}$ فوق‌مارتینگل است روی بازه $[S, T]$.

۴. اگر با تمام $r \in [S, T]$؛

$$e_i^* Y_r - E_{\tilde{P_i}} \left[\int_{[r,t]} e_i^* F(w, u, Y_u, Z_u) \mathrm{d}\mu_u \mid F_r \right] \geq e_i^* \bar{Y}_r - E_{\tilde{P_i}} \left[\int_{[r,t]} e_i^* F(w, u, \bar{Y_u}, Z_u) \mathrm{d}\mu_u \mid F_r \right]$$

برای تمام iها آنگاه $Y_r \geq \bar{Y_r}$ برای تمام $r \in [s, t]$ قعطه قعطه است. سپس $Y \geq \bar{Y}$ روی بازه $[s, T]$ به استثنای احتمال در برخی از مجموعه‌ها. [۲۰]

کاربرد حرکت براونی درتحلیل ریاضی مالی

برای اولین بار لوئیس باچلیر (۱۹۰۰) نشان داد که بازارهای مالی از فرآیندهای گام تصادفی تبعیت می‌کنند. بنابراین می‌توان برای الگوسازی بازارهای مالی از حساب احتمالات استاندارد استفاده کرد. فرآیندهای گام تصادفی اساساً یک حرکت براونی می‌باشند. که تغییرات گذشته مستقل از تغییرات مقدار متغیر در آینده و گذشته می‌باشد. حرکت براونی دارای ویژگی‌های خوش رفتار ریاضی است، به گونه‌ای که در آن می‌توان یک الگو را با دقت بالا برآورد و همچنین احتمالات را محاسبه کرد. از این رو تحلیل‌گران وقتی با تجزیه و تحلیل یک فرآیند چند بعدی با منشأ ناشناخته (مانند بازار سهام) مواجه هستند، به روندهای مستقل مانند حرکت براونی روی می‌آورند. تئوری حرکت براونی و الگوهای گام تصادفی به طور گسترده در مدل‌سازی بازارهای مالی مورد استفاده قرار گرفته است.

[۲۹] Comparison theorem

فصل ۲

مروری بر معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو

۱.۲ مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده توسط ال کارونی [۱]، کاپودجیان [۲]، پاردوکس [۳]، پنگ [۴] و کیونز [۵] مطرح شده است [۲۳] که در آن مبحث خوش رفتاری این معادلات بر اساس فرضیاتی هم چون

۱. لیپ‌شیتز بودن f

۲. شرط نهایی مربوط به انتگرال مربع

۳. مانع پایین یک نیمه مارتینگل

مورد مطالعه قرارگرفت. علاوه بر آن فرضیات تحلیلی روی (f,ξ) نیز در نظر گرفته شده است. خوش رفتاری برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو در برخی از موارد، نیز توسعه یافته

[۱] El Karouni

[۲] Kapoudjian

[۳] Pardoux

[۴] Peng

[۵] Quenez

است. کابولانسکی [۶] در [۲۹] با فرض اینکه f در z سهموی، y لیپ شیتز و ξ کراندار است، که خوش رفتاری معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو را به دست آورد. همچنین در [۳۲] ، لیپلتیر [۷] و سان مارتین [۸] بدون در نظر گرفتن فرض دوم کابولانسکی، f را دارای خاصیت رشد خطی تدریجی در y فرض کردند و سپس با استفاده از همان تکنیکی که کابولانسکی به کار گرفته بود، نتایج آنالوگی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو وقتی که L کراندار باشد به دست آوردند. در ادامه، محققانی مانند ژو [۹]، بریاند [۱۰]، لیپلتیر و سان مارتین مطالعاتی را بر روی معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو انجام دادند و نشان دادند که این نوع معادلات تحت فرضیات زیر خوش رفتار هستند [۱۷]:

۱. ξ کراندار باشد؛

۲. f در z سهموی باشد؛

۳. f در y یکنوا با رشد دلخواه باشد.

همچنین لیپلتیر و ژو رفتار یک مورد از معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده را با شرط نهایی ξ غیرکراندار و مانع کراندار L مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [۳۳]. همزمان بیراکتر [۱۱] و یائو [۱۲] شرط کراندار بودن L را از مطالعات خود نیز حذف کردند. لازم به یادآوری است که فرض‌های f در z سهموی و در y لیپ شیتز است در تمامی مطالعات مد نظر قرار گرفته شده است. چنین مطالعاتی با پیشرفت‌هایی هم همراه بود از آن جمله می‌توان به تحقیق هو و بریاند که بر روی معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو سهموی با شرایط نهایی غیرکراندار صورت گرفت اشاره کرد [۱۵، ۱۶].

اخیراً معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو سهموی با شرایط نهایی کراندار به صورت ساده شده در نظر گرفته می‌شود. توزادزه [۱۳] و بریاند و ایلی [۱۴] در این مورد، ایده‌هایی مشابهی داده‌اند، هرچند ایده‌های آنان نتایج معکوسی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده دارند [۳۵]. تمام مواردی که در بالا آورده شده است خلاصه‌ای از نتایج مطالعاتی است

[۶] Kabylanski
[۷] Lepeltoer
[۸] SanMartin
[۹] Xu
[۱۰] Briand
[۱۱] Bayraktar
[۱۲] Yao
[۱۳] Tevzadze
[۱۴] Elie

که قبلاً بر روی معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو انجام شده است. در ادامه ژانگ در [۳۷] نشان داد که اگر f و g هر دو لیپ شیتز باشد آنگاه نتیجه نظم مسیر به ازای $p=۲$ حاصل می‌شود. این کار باعث شده است که فضا برای مطالعه همگرایی تقسیم زمانی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو لیپ شیتز مهیا گردد، در نتیجه تحقیقاتی توسط ژانگ در [۳۸] و بوچارد [۱۵] ـ توزی [۱۶] در [۱۴] انجام گرفته است. برنامه‌های تقسیم‌بندی زمانی مختلفی به منظور به دست آوردن تقریبی از جواب معادله صورت گرفته است که می‌توان به تحقیق کریسان [۱۷] و مانولاراکیس [۱۸] اشاره کرد [۲۲] در این تحقیق یک برنامه تلفیقی ارائه گردید و سپس نشان داده شد که همگرایی آن از مرتبه ۲ می‌باشد. اخیراً نیز روش‌های معادله دیفرانسیل معمولی تطبیقی برای تقسیم‌بندی زمانی در نظر گرفته شده است، روش معرفی شده توسط چاساگنوکس [۱۹] و کریسان برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو از این نوع می‌باشد [۱۹]. علاوه بر آن چندین مقاله نیز به بررسی و مطالعه تقریب‌های عددی جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو سهموی با شرط نهایی کراندار پرداخته شده است. که خوانندگان علاقمند به این تحقیقات می‌توانند مقاله ریچو [۲۰] و چاساگنوکس را مطالعه نمایند [۱۸].

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو را نخستین بار بیسموت [۲۱] در سال ۱۹۷۳ مطرح کرد. معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو در مسائل مختلف مالی دیده می‌شوند. نظریه قیمت گذاری ادعای احتمالی در بازار کامل را نخستین بار بلک و شولز [۲۲] در ۱۹۷۳ بر حسب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو به صورت معادله ای برای تعیین قیمت ادعای احتمالی در زمان سررسید بیان کردند. معادلات دیفرانسیل تصادفی با معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از قضیه نمایشی فاینمن‌ـ‌کاک [۲۳] ارتباط دارند. در ادامه معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و معادلات دیفرانسیل تصادفی پسروـ‌پیشرو را معرفی و سپس به رابطه بین معادلات دیفرانسیل تصادفی پسروـ‌پیشرو و معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی شبه خطی اشاره می‌شود. نشان می‌دهیم جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی شبه خطی را به وسیله جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو می توان نوشت که آن تعمیمی از قضیه نمایشی فاینمن‌ـ‌کاک می‌باشد.

---

[۱۵] Bouchard
[۱۶] Touzi
[۱۷] Crisan
[۱۸] Manolarakis
[۱۹] Chassagneux
[۲۰] Richou
[۲۱] Bismuth
[۲۲] Black-Scholes
[۲۳] Feynman-Kac

۲.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی

معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی معادله‌ای است که در آن یک یا چند متغیر، یک فرآیند تصادفی می‌باشند و جواب این نوع معادلات نیز یک فرآیند تصادفی خواهد بود. از معادلات دیفرانسیل تصادفی در مدل سازی‌های پیچیده‌ی احتمال استفاده بسیار گسترده‌ای می‌شود، که از جمله آن می‌توان به مدل‌سازی هزینه‌ی نوسانات بازار اشاره کرد. معمولاً در این گونه مدل سازی‌ها از اختلال سفید به عنوان پارامتر کاملاً تصادفی استفاده می‌شود که خود نوعی از فرآیند تصادفی وینر [۲۴] است. لازم به یادآوری است که در مدل‌سازی تصادفی پارامترها در یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی، استفاده از سایر فرآیندهای تصادفی نیز امکان پذیر است. قدیمی‌ترین استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی ، مقاله‌ی مشهور آلبرت اینشتین [۲۵] برای توصیف حرکت براونی است.

۳.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو

فرض کنید $[\circ, T]$ بازه زمانی دلخواه باشد. معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو [۲۶] به صورت (۱.۲) تعریف می‌شود،

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\mathrm{d}t + Z_t \mathrm{d}W_t, \\ Y_t = \xi \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که در آن W حرکت براونی ثابت روی فضای احتمال فیلتر استاندارد $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[\circ,T]}, P)$ است. علاوه بر آن فرض کنید $\mathcal{F}$ یک فیلتر ثابت است که W نامیده می‌شود. f تابعی از متغیرهای w و t و y و z می‌باشد، هر چند به وضوح متغیر مستقل w در ضابطه آن آورده نشده است. لازم به ذکر است که به f ضریب رانش گفته می‌شود.

در این معادله به دنبال پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو به صورت زوج مرتب $(Y_t, Z_t)_{t\in[\circ,T]}$ هستیم، که با استفاده از فرآیندهای تصادفی به دست می‌آید.

اساساً معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو تخمین پسرو در زمان متغیر حالت Y را بیان می‌کند. این کار را با استفاده از شرط نهایی ξ شروع می‌کند. در این نوع از معادلات دیفرانسیل، متغیر Z متغیر ثانویه یا متغیر کنترل نامیده می‌شود.

به طور کلی در معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو به صورت (۱.۲) نوشته می‌شود ولی در پاره‌ای از مواقع مشاهد می‌شود که به صورت انتگرال و به صورت (۲.۲) نیز نوشته می‌شود:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(u, Y_t, Z_u) - \int_t^T Z_u \mathrm{d}W_u. \tag{۲.۲}$$

[۲۴] Wiener process

[۲۵] Albert Einstein

[۲۶] Backward Stochastic Differential Equations($BSDE$)

شایان توجه است که معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو همان معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی با یک شرط نهایی ناسازگارند.

فرض کنید برای یک لحظه، مساله (۳.۲) را برای پیدا کردن Y داشته باشیم:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\mathrm{d}t, \\ Y_t = \xi. \end{cases} \tag{۳.۲}$$

به وضوح مشاهد می‌شود که فرمول فوق، معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی می‌باشد. اکنون فرض کنید که در رابطه فوق، $f = \circ$ و $\xi = W_T$ باشد. در این صورت تنها جواب ممکن برای Y، مقدار ثابتی در بازه $[\circ, T]$ می‌باشد. با در نظر گرفتن شرط نهایی، به ازای تمامی $t \in [\circ, T]$ می‌توان نوشت $Y_t = \xi = W_T$. بنابراین ملاحظه می‌شود که این دو نوع از معادلات دیفرانسیل یکی نیستند و با هم سازگار نیستند. از این رو برای از بین بردن این ناسازگاری معمولاً متغیر Z با درجه آزادی بالا در تعریف یک جواب از معادله دیفرانسیل در نظر گرفته می‌شود.

فرض کنید به دنبال پیدا کردن Y یا زوج مرتب (Y, Z) هستیم که در رابطه (۴.۲) صدق کند؛

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\mathrm{d}t + g(t, Y_t, Z_t)\mathrm{d}W_t, \\ Y_t = \xi \end{cases} \tag{۴.۲}$$

معادله بالا برای تمام Z های ثابت، معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی می‌باشد. مطابق آنچه که قبلاً نیز در نظر گرفته شده است فرض کنید $f = g = \circ$ در نتیجه، مشاهده می‌شود که جواب سازگاری وجود ندارد. بنابراین باید در اینجا Z با درجه آزادی کافی در نظر گرفته شود که ناسازگاری را که با افزایش $-f(t, Y_t, Z_t)d_t$ ناشی می‌شود از بین ببرد.

۴.۲ معادلات دیفرانسیل معمولی و تصادفی پسرو

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو را می‌توان به عنوان یک نسخه از معادلات دیفرانسیل معمولی پسرو در نظر گرفت. اگر Y_t یک جواب ناسازگار از معادلات دیفرانسیل معمولی پسرو به صورت $Y_t = \xi + \int_t^T f(Y_u)\mathrm{d}_u$ باشد. بهترین کار برای از بین بردن این ناسازگاری، استفاده از امید ریاضی شرطی از این جواب می‌باشد.

معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو مطرح شده در روابط (۱.۲) و (۲.۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید که زوج مرتب (Y, Z) جوابی از این معادله باشد. در نتیجه می‌توان گفت که Y سازگار است و لذا با استفاده از امید ریاضی شرطی می‌توان نوشت $Y_t = E(Y_t|\mathcal{F}_t)$. از طرفی دیگر $\mathrm{d}M_t = Z_t\mathrm{d}W_t$ قسمت مارتینگل و Y نیمه مارتینگل می‌باشد، بنابراین با توجه به (۱.۲) داریم:

$$Y_t = \mathrm{E}\left(\xi + \int_t^T f(u, Y_u, Z_u)\mathrm{d}_u|\mathcal{F}_t\right) \tag{۵.۲}$$

که در آن Z فرآیند قابل اندازه‌گیری می‌باشد به طوری که $\int Z\mathrm{d}W$ قسمت مارتینگل Y باشد. بنابراین با استفاده از قضیه ۱.۱.۱ و رابطه (۵.۲) با روابط (۱.۲) و (۲.۲) معادل است. با گرفتن امید ریاضی معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو را می‌توان به عنوان معادلات دیفرانسیل معمولی پسرو تفسیر کرد تا بهتر درک شوند.

۱.۴.۲ مارتینگل‌ها و مارتینگل‌های غیر خطی

در یک سری از معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو ، وقتی $f = 0$ را در نظر می‌گیریم می‌توان از (۵.۲) مشاهده کرد که جواب Y یک مارتینگل ساده با مقدار نهایی ξ می‌باشد. برای توضیح این مبحث، می‌توان معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو را به عنوان مارتینگل‌های غیرخطی در نظر گرفت. حال اگر شرط نهایی ξ به صورت تصادفی انتخاب نشود و f نیز به صورت تصادفی در نظر گرفته نشود، معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو تبدیل به معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی پسرو می‌شوند.

در هر دو حالت فوق داریم اگر $\xi \le \xi'$ و $f \le f'$ آنگاه $Y \le Y'$. این مطلب در حالت کلی برای تمامی معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو برقرار می‌باشد که قضیه مقایسه نامیده می‌شود. (برای اطلاعات بیشتر به [۳۹] مراجعه کنید.)

۵.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در این بخش فقط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی به شکل (۶.۲) را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} v_t + \frac{1}{2} v_{xx}.a + v_x.b + f(t,x,v,v_x\delta) = 0, \\ v(T,.) = \varphi. \end{cases} \tag{۶.۲}$$

به ازای هر $(t,x) \in D = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$ که در آن T ثابت و مثبت می‌باشد. در معادله (۶.۲) ، تابع v از مجموعه D به فضای $\mathbb{R}^n$ و شرط نهایی φ از فضای $\mathbb{R}^d$ به $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. به علاوه $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ و $a : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to S_d^+(\mathbb{R})$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$v_x.b = \sum_{i=1}^{d} \partial_i v b^i \in \mathbb{R}^n, v_{xx}.a = \sum_{i.j=1}^{d} \partial_{i,j} v a^{i,j} \in \mathbb{R}^n.$$

در اینجا همچنین ماتریس a به صورت زیر در نظر گرفته شده است،

$$a = \sigma\sigma^*$$

که در آن می‌تواند σ ماتریس متقارن و یا حتی یک ماتریس مربعی می‌باشد. به طور کلی، σ یک ماتریس $m \times d$ با مرتبه d است. که $d \leq m$. این نوع معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با سیستم معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو مطرح شده توسط دو رابطه (۷.۲) و (۸.۲) معادل است.

$$\mathrm{d}X_t^{s,x} = b(t, X_t^{s,x})\mathrm{d}t + \delta(t, X_t^{s,x})\mathrm{d}W_t \qquad X_s^{s,x} = x, \tag{۷.۲}$$

$$\mathrm{d}Y_t^{s,x} = -f(t, X_t^{s,x}, Y_t^{s,x}, Z_t^{s,x})\mathrm{d}t + Z_t\mathrm{d}W_t \qquad Y_t^{s,x} = \phi(x_t^{s,x}). \tag{۸.۲}$$

که در آن $t \in [s, T]$ و $(s, x) \in D = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$. معادل بودن این معادلات، باعث درک بهتر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شده است. مثال زیر این ادعا را واضح‌تر توضیح می‌دهد.

مثال ۱.۵.۲. اگر ثابت $(s, x) \in D$ باشد، آنگاه $v(s, x)$ به صورت زیر بدست می‌آید.
فرض کنید $(\bar{X}_t^{s,x})_{t\in[s,t]}$ توسط $(t, \bar{X}_t^{s,x}) = (\bar{X}_t^{s,x})_{t\in[s,t]}$ ارائه شده است. که درآن $X_t^{s,x} = x$ از طرفی $\mathrm{d}X_t^{s,x}$ با رابطه (۷.۲) ارائه شده است. در طول مسیر $\bar{X}^{s,x}$، $(\bar{Y}_t^{s,x}) = v(\bar{X}_t^{s,x}) = v(t, \bar{X}_t^{s,x})$ می‌باشد. اگر v متعلق به رده $C^{1,2}$ باشد با به کارگیری فرمول ایتو [۲۷] مشاهده می‌شود که اگر قرار دهیم:

$$Z_t^{s,x} = (v_x\delta)(t, X_t^{s,x}),$$

آنگاه زوج مرتب $(Y_t^{s,x}, Z_t^{s,x})_{t\in[s,T]}$ جوابی برای معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو (۸.۲) با شرط نهایی $Y_T^{s,x} = \varphi(X_T^{s,x})$ می‌باشد.

در حالت خاص، اگر $f = 0$ را در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$v(s, x) = Y_s^{s,x} = E[\phi(X_T^{s,x})]. \tag{۹.۲}$$

فرمول (۹.۲) به فرمول فاینمن_کاک معروف است. در حالت کلی، رابطه $v(s, x) = Y_s^{s,x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نظر جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو بیان می‌کند، این فرمول نیز به فرمول فاینمن_کاک غیرخطی شهرت یافته است. برعکس، اکنون فرض کنید $v(s, x) := Y_s^{s,x}$ یک جواب ازمعادله‌ی دیفرانسیل تصادفی پسرو باشد. تحت مفروضات، مناسب است که v با توجه به تعریفی که از آن شده است یک جواب برای (۴.۲) باشد.

[۲۷] Ito

۱.۵.۲ ارائه فرمولی بین کلاسی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی چند بعدی و معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو تخصیص یافته و کاربردهای آنان

در این قسمت ارتباط بین یک مساله معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادل با معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی پسرو آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی چند بعدی که در اینجا در نظر گرفته‌ایم به شکل (۱۰.۲) است:

$$\begin{cases} v_t + \frac{1}{2}\Delta v + v_x f(t,v,v_x) + g(t,v,v_x) = 0, \\ v(T,.) = \varphi. \end{cases} \tag{۱۰.۲}$$

که در آن توابع f و g از نوع لیپ‌شیتز هستند. در معادله فوق $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$، v، $\mathbb{R}^n$ مقدار و f، $\mathbb{R}^d$ مقدار است. عبارت $v_x f(t,v,v_x)$ قسمت سهموی v_x است. با ثابت در نظر گرفتن $(0,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ آنگاه معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو به صورت (۱۱.۲) است.

$$\begin{cases} X_s = x, \\ \mathrm{d}X_t = \mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}Y_t = -[Z_t f(t,Y_t,Z_t) + g(t,Y_t,Z_t)]\mathrm{d}t + Z_t \mathrm{d}W_t, \\ Y_T = \phi(X_T). \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

در نتیجه با ارزیابی رابطه زیر برای ارائه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌توان استفاده کرد.

$$\int_0^t P_s|\nabla u^i|^p(s,x)\mathrm{d}s \le c e^{peT}(||\phi||^p + |g(0,0)|^p T^p)\exp\left[\frac{p}{2(2-p)} t \sup_{|y|\le K} |f(y)|^2\right],$$

برای هر $p \in [1,2]$ ، $i \in 1,\ldots,n$، که در آن $(P_t)_{t\ge 0}$ و K یک عدد ثابت است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مقالات هو [۲۸] کی آن [۲۹] و هو، کی آن ـ ژانگ [۳۰] مراجعه نمایند. [۲۶] [۲۷]

---
۲۸ Hu
۲۹ Qian
۳۰ Zahang

۲.۵.۲ خوش رفتاری معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با استفاده از مارتینگل پیوسته

در حالت کلی فرمول معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده به صورت (۱۲.۲) است:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_s = -f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}_s - \mathrm{d}K_s + Z_s \mathrm{d}W_s, \\ Y_T = \xi, \\ Y_t \geq L_t \quad t \in [\circ, T], \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

که در آن K تابع پیوسته و صعودی است و از صفر شروع می‌شود و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\int_\circ^T \text{۱}(Y_s > L_s)\mathrm{d}K_s = \circ.$$

لازم به ذکر است که جواب معادله (۱۲.۲) به صورت (Y, Z, K) می‌باشد. درمبحث معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده که معادل احتمالی در مانع برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (نابرابری تغییراتی) هستیم، این است که به جای (۶.۲) اکنون می‌خواهیم v را تا زمانی که اکیداً بزرگتر از مانع l است برای صدق کردن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدست آوریم:

$$\max\{v_t + \frac{\text{۱}}{\text{۲}} v_{xx}.a + v_x.b + f(t, x, v, v_x\delta), l - v\} = \circ,$$

به طور کلی مسائل تصادفی پسرو در ارتباط با مسائل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ، چه با شرط اولیه، چه با شرط مرزی دیریکله [۳۱] و یا با شرایط مرزی نیومن، همه می‌توانند به یک شکل مورد مطالعه قرار بگیرند. برای اینکه تمامی این حالات پوشش داده شوند کافی است فرض کنیم که زمان نهایی T ممکن است، متوقف شود یا به صورت $f(t, Y_t, Z_t)\mathrm{d}t + g(t, Y_t)\mathrm{d}A_t$ که در آن A یک فرآیند افزایشی است، ظاهر گردد. در حقیقت به دنبال مطالعه معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده به فرم زیر هستیم:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -\mathrm{d}V(Y, N)_t - \mathrm{d}K_t + \mathrm{d}N_t, \\ Y_t = \xi, \\ Y \geq L, \\ \text{۱}_{(Y_t \geq L_t)} \mathrm{d}K_t = \circ, \end{cases}$$

که در آن

$$\mathrm{d}V(Y, N)_t = f(t, Y_t, Z_t\delta_t)\mathrm{d}C_t + \mathrm{d} < v, N^\perp > + g_s \mathrm{d} < N^\perp >_t,$$

[۳۱] Dirichlet

N از Y قسمت مارتینگل است، که تجزیه $\mathrm{d}N_t = Z_t \mathrm{d}M_t + \mathrm{d}N_t,$ روی مارتینگل M می‌باشد. که در آن $N^{\perp}$ بر M عمود است. در اینجا C یک فرآیند افزایشی و f و v و g ضرایب $\mathrm{d}V(Y,N)_t$ می‌باشند.

۶.۲ تقسیم‌بندی زمان معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو یکنوا با رشد چندجمله‌ای

قبلاً توضیح داده شده است که v، جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح شده در (۶.۲) به صورت $v(s,x) = Y_s^{s,x}$ و در حالت کلی به صورت زیر است:

$$v(s, X_t^{s,x}) = Y_t^{s,x}, \quad (v_x\delta)(s, X_t^{s,x}) = Z_t^{s,x},$$

که در آن $(X_t^{s,x}, Y_t^{s,x}, Z_t^{s,x})_{t\geq s}$ جوابی برای معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو (۷.۲) و (۸.۲) می‌باشد. استفاده از این شیوه باعث می‌شود که هر روش عددی برای محاسبه جواب (X,Y,Z) از معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو ، یک شیوه احتمالی برای تقریب جواب v از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه دهد.

در ادامه قصد بر این است که روی معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو (۷.۲) و (۸.۲) بیشتر تمرکز گردد. افراز بازه $[0,T]$ به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi^N : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود بازه $[0,T]$ دارای $N+1$ نقطه است. لازم به ذکر است که وقتی N به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، $|\pi^N| \to 0$. از طرفی واضح است که ساختار محاسبه‌ی عددی $(X_i)_{(i=0,\ldots,N)}$ بسیار نزدیک به $(X_t)_{t\in[0,T]}$ می‌باشد. اگر به ازای برخی $\gamma > 0$ داشته باشیم:

$$\max_{i=0,\ldots,N} \mathrm{E}[|X_{t_i} - X_i|^p]^{\frac{1}{p}} \leq c|\pi|^\gamma,$$

گفته می‌شود که همگرایی حداقل از مرتبه γ وجود دارد.

مطالعه روش‌های عددی برای محاسبه جواب تقریبی معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو مانند (Y,Z) یکی از موضوعاتی است که اخیراً مورد توجه قرار گرفته و تلاش‌های زیادی برای آن صورت گرفته است. مرحله اول در تمامی این روش‌ها، به دست آوردن تقسیم‌بندی زمان برای معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو مطرح شده در (۸.۲) می‌باشد. برای مثال در یکی از این روش‌ها که توسط آرنود لیونت [۳۲] ارائه شده است، پارامتر $\theta \in [0,1]$ برای نشان دهنده‌ی درجه ضمنی به کار گرفته شده است. همچنین در این روش متغیرهای Y_i و Z_i به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$Y_N = \varphi(X_N) \qquad Z_N = 0,$$

[۳۲] Arnaud Liermef

همچنین برای $i = 0, ..., N-1$، Y_i, Z_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_i = E(Y_{i+1} + \theta f(t_i, X_i, Y_i, Z_i)h_{i+1} + (1-\theta)f(t_{i+1}, X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})h_{i+1}|F_i).$$

$$Z_i = ((Y_{i+1} + (1-\theta)f(t_{i+1}, X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})h_{i+1})\frac{\Delta W_{i+1}}{h_{i+1}}|F_i),$$

که در آن $h_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ و $\Delta W_{i+1} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ می‌باشد. اولین سوال این است که $(Y_i, Z_i)_{i=0,...,N}$ به $(Y, Z)_{t\in[0,T]}$ همگرا می‌باشد. در تحقیق یاد شده، خطای مقدار جواب تقریبی به ازای برخی $\gamma > 0$ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\mathrm{ERR}_\pi(Y, Z) := \left(\max_{i=0,...,N} \mathrm{E}[|Y_{t_i} - Y_i|^2] + \sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{E}[|\bar{Z}_{t_i} - Z_i|^2]h_{i+1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq c|\pi|^\gamma,$$

که در آن

$$\bar{Z}_{t_i} = \frac{1}{h_{i+1}} E(\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_u \mathrm{d}u|F_i).$$

وقتی که دنباله‌ی تقسیم‌بندی زمان همگرا شد آنگاه مرحله دوم تقریب عددی امید شرطی است که با استفاده از متغیرهای تعریف شده Y_i و Z_i حاصل می‌شود.

در نهایت باید بیان شود که مطالعه همگرایی تقسیم‌بندی زمان همانند آنچه در بالا مطرح شد، برای جواب معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو مستلزم به دست آوردن نتایج بسیار ریز تئوری برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو غیر تقریبی معروف به نظم مسیر [33] می‌باشد. به عبارت دیگر مسیرهای Y و Z به طریقی پیوسته، باید در فضای $S^p \times H^p$ قرار گیرند. به طور خلاصه باید به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک π داشته باشیم:

$$\mathrm{E}\left[\sup_i \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |Y_t - Y_{t_i}|^p\right] + \mathrm{E}\left[\sup_i \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} |Y_t - Y_{t_{i+1}}|^p\right] \leq c|\pi|^{\frac{p}{2}},$$

و

$$\mathrm{E}\left[(\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_t - Z_{t_i}|^2 \mathrm{d}t)^p\right] + \mathrm{E}\left[(\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_t - Z_{t_{i+1}}|^2 \mathrm{d}t)^p\right] \leq c|\pi|^{\frac{1}{2}}$$

۷.۲ نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب مطرح شده می‌توان گفت که معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با یک مارتینگل پیوسته، خوش رفتار است. همچنین فرضیاتی نیز برای برقرار بودن خوش رفتاری معادلات فوق نیز در نظر گرفته شده است. این فرضیات شامل کراندار بودن شرط نهایی ξ معادله درجه دوم f در z، لیپ شیتز بودن در y، و یکنواختی با رشد دلخواه می‌باشد. در واقع می‌توان گفت که نتایجی که در [۳۰] در یک آرایش براونی [34] با فرض رشد

[33] Path-Regularity

[34] Brownian Setting

خطی و در [۳۶] با فرض یکنواختی با رشد دلخواه در y، به دست آمده، بسط داده شده است. همچنین در این بخش، قضیه مقایسه در آرایش خاصی با استفاده از تکنیک‌های زیر به نتیجه رسیده است. برای اثبات این قضیه، معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با مبحث خطی سازی و بحث BMO مطرح شده توسط هو، ایمکلر [۳۵] و مولر [۳۶] در [۲۸] مطابقت داده شده است. علاوه بر این، یک تخمینی برای سبک BMO برای فرآیند افزایشی K حاصل شده است.

از مهم‌ترین ویژگی‌های قضیه مقایسه معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده، نیز امکان مقایسه فرآیند افزایشی دو جواب را می‌دهد. در [۲۴، ۳۴، ۳۱] و [۳۰] این قضیه در یک آرایش براونی در موارد مختلفی اثبات شده است. این نتیجه‌ای که حاصل شد با تکنیک معرفی شده توسط توزادزه برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده، مطابقت داده می‌شود، [۳۵] برای انجام این کار مشکلاتی وجود دارد که باعث شده است مسئله اساسی و اصلی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده ، خطی نباشد و در نتیجه مجموع جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و پیشرو در حالت کلی یک جواب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده نباشد.

در نهایت، یک نتیجه منظم محلی که برای قسمت مارتینگل در BMO به صورت زیر به دست آمده است.

فرض کنید که وضعیت نهایی ξ بدست آمده، نشان می‌دهد $\mathbb{R} > \circ$ و $c(\xi) > \circ$ وجود دارد. به طوری که برای دیگر شرایط نهایی کراندار مانند ξ' و ξ'' در فاصله کمتر یا مساوی با $\mathbb{R}$ از ξ، و

$$S' = (Y', N', K'), \quad S'' = (Y'', N'', K''),$$

جواب‌های متناظر باشند آنگاه داریم:

$$||N'' - N'||_{BMO} \leq c(\xi) ||\xi'' - \xi'||_\infty.$$

رابطه فوق در [۲۸] بااستفاده از قاعده هولدر اصلاح و اثبات گردیده.

در این بخش به تحلیل و تفسیر تقسیم‌بندی زمان در موردی که f یکنوا و رشد چند جمله‌ای در y داشته، در Z لیپ شیتز و φ نیز لیپ شیتز باشد، پرداخته شد.

در ابتدا به اختصار تئوری نظم مسیر را مطرح و سپس برای $p \geq ۲$ اثبات شد. با استفاده از این تئوری قادر به مطالعه همگرایی روش تقسیم‌بندی زمان شدیم. در این بخش نیز اثبات شد که برای $\theta \geq \frac{۱}{۲}$ همگرایی روش تضمین می‌شود.

در حالت کلی می‌توان گفت که همگرایی روش مذکور از مرتبه $\gamma = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که اگر فرض شود $\theta = \frac{۱}{۲}$ و f روی z وابسته نباشد آنگاه مرتبه همگرایی برابر با $\gamma = \frac{۷}{۴}$ خواهد شد.

[۳۵] Imkeller

[۳۶] Muler

فصل ۳

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و جزئی منعکس شده و نابرابرهای تغییراتی

۱.۳ مقدمه

در این فصل قصد داریم رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیمه‌خطی به شکل (۱.۳) که دارای مانع هستند را بررسی می‌کنیم،

$$(\partial_t + L)_u + f(t, x, u, \partial^* \nabla_u) + \mu = 0 \quad u \geq h, u_T = g, \tag{۱.۳}$$

که در اینجا h مانع است. جواب این معادلات زوج مرتب به شکل (u, μ)است، که در آن $u \in L^2([0, T]; H^1)$ است و μ اندازه مثبت رادن روی $\{u = h\}$ است. ثابت می‌شود که این رده از معادلات دارای جواب یکتا است و u جواب ماکزیمال نسبت به نابرابری تغییراتی است. برداشت احتمالی از فرمول فاینمن- کاک این مطلب را نشان می‌دهد که برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده روش جدیدی برای جواب ارائه می‌شود که از اصل ماکزیمال در آن استفاده شده است.

معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو اولین بار توسط پاردوکس [۱] و پنگ [۲] در سال ۱۹۹۰ معرفی شد. این معادلات در بازیهای تصادفی، کنترل تصادفی و ریاضیات مالی، کابردهای زیادی دارند. درسال۱۹۹۲ بارلز [۳]، لسینگ [۴] ، بالی [۵] و ماتوسی [۶] رابطه بین معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو و جواب‌های نیم خطی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در فضای سوبولف را بررسی کرده‌اند.

اخیراً ال کاروی [۷] – کاپودیجان [۸] ـ پاردوکس ـ پنگ و کوئنز [۹] معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو را معرفی کردند. معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو معرفی شده این است که در آن‌ها فرآیند افزایشی K به منظور ارائه جواب Y مربوط به معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو معرفی شده است و فرآیند بزرگتر S را حفظ می‌کند، که مانع را نشان می‌دهد. آنها اثبات کرده‌اند که جواب معادلات دیفرانسیل پسرو منعکس شده، تابع مقدار بهینه مسئله است و تفسیر احتمالی جواب لختی مسئله مانع مربوط به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهمی غیرخطی ارائه می‌شود.

مسائل مانع برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیمه خطی و ارتباط آنها با مسئله توقف بهینه و مسائل کنترل توسط بنسوزان [۱۰] و لیونز [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفت است. آنها این مسائل را از طریق نابرابری‌های تغییراتی مدلسازی کردند.

در ابتدا ساختار جدیدی از جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با استفاده از اصل ماکزیمال ارائه شده است که به نظر می‌رسد روش کلاسیک در [۵۰] و [۴۱] جایگزین شده باشد. جالب است که روش جریمه جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده را به صورت حد رو به افزایش دنباله جواب‌های استاندارد ایجاد نموده است. این روش دنباله کاهشی را برای چنین جواب‌های ایجاد می‌نماید. بنابراین مرز بالائی و پایینی را بدست می‌آوریم و این از دیدگاه عددی مورد توجه است، زیرا سرعت همگرایی تقریبی بر پایه روش گسترده قابل دسترسی نیست. همچنین عنوان کرده‌ایم که ساختار ارائه شده در این فصل اثبات وجود و یکتایی را در معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با یک مانع مجاز می‌نماید که ممکن است پرش‌های داشته باشد.

نکته دوم، این است که بین معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده و نابرابری‌های

[۱] E.Pardoux
[۲] S.Peng
[۳] G.Barles
[۴] E.Lesigne
[۵] V.Bally
[۶] A.matoussi
[۷] N.karaui
[۸] C.kapoudijn
[۹] MC.qucnz
[۱۰] A.Bensoussan
[۱۱] JL.Lions

تغییراتی رابطه ایجاد شود در حقیقت، ما فرمول جدید مسئله مانع را بازگو می‌کنیم که اثبات یکتایی جواب مجاز می‌داند، نابرابری‌های تغییراتی یک جواب مینیمم دارد، اما یکتایی در صورتی مستثنی نیست که مانع بسیار یکسان و یکنواخت باشد و آن به قلمرو $\partial_t + L$ مرتبط است، که درآن L عمگلر دیفرانسیل مرتبه دوم در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعلق دارد. در چارچوب ما، فرض بر این است عامل مانع پیوسته باشد که در مورد بسیاری از کاربردها جالب محسوب می‌شود. جواب مسئله مانع در فرمول ما یک زوج مرتب (u, μ) است که در حقیقت u جواب نابرابری‌های تغییراتی است و μ اندازه مثبت را نشان می‌دهد که فقط زمانی اعمال می‌شود که u مانع را از بین ببرد. در بعضی مفاهیم μ کمیتی را نشان می‌دهد که امکان گذاشتن از نابرابری تا برابری را فراهم می‌نماید. با استفاده از روش‌های احتمالی، (مبتنی بر معادلات دیفرانسیل پسرو منعکس شده) اثبات می‌کنیم که زوج مرتب منحصربه‌فرد (u, μ) وجود دارد که مسئله ما را حل می‌کند، همچنین بازگو می‌کنیم که جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده سه جزئی (Y, Z, K) است و با u راتباط دارد و به صورت $\sigma\nabla_u(s, X_s) = Z_s \quad , u(s, X_s) = Y_s$ بدست می‌آید. بنابراین ما مفهوم احتمالی از u و ∇_u را داریم. در فرمول، رابطه بین فرآیند افزایشی K و اندازه μ را بدست می‌آوریم. (در بخش دوم قضیه ۱.۴.۳ دیده می‌شود.)

این کار ارائه شده در [۴۱] است که در آن رابطه بین معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده و مسائل کنترل و توقف بهینه را از یک طرف توسعه داده‌ایم و معالادت دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با دو مانع و از سویی دیگر با مسائل مانع مورد بحث قرار می‌دهیم. این موضوعات قبلا در [۵۰]،[۴۹](برای توقف بهینه) و [۴۶]،[۵۱] با دو مانع و ارتباط آن با دو مسئله را مورد بحث قرار داده‌ایم.

۲.۳ ساختن جواب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده

۱.۲.۳ مانع حقیقی

در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ برای $0 \leq t \leq T$ ، حرکت براونی $B_t = (B_t^1, ...B_t^d)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که فیلتر استاندارد $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ توسط B ایجاد شده است. به عبارت دیگر $\mathcal{F}_t$ شاخص $\sigma(B_s : s \leq t)$ با توجه به $(\mathcal{F}, P)$ در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید:

- H^2 فضای فرآیندهای قابل پیش‌بینی باشد که عناصر آن به صورت $\phi : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شوند، و انتگرال مربع آنها موجود است، یعنی $\mathrm{E}\int_0^T \phi^2(t, w)\mathrm{d}t < \infty$
- S فضای فرآیندهای سازگار ϕ است به گونه‌ای که $\mathrm{E}\sup_{t\leq T}|\phi_t|^2 < \infty$.

همچنین فرض کنید که موارد زیر نیز موجود باشند؛

فرضیه ((H_1)):
تابع محرک $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که

$$\begin{aligned} & f(0, y, z) \quad \in H^2 \\ & |f(t, w, y, z)| \leq k(1 + |y| + |z|) \\ & |f(t, w, y, z) - f(t, w, y', z')| \leq C|y - y'| + |z - z'|) \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

شایان ذکر است که تابع محرک [12] عبارتست از هر چیزی که بتواند بر درآمد یک شرکت تاثیر مستقیم بگذارد.
فرضیه ((H_2)):
مانع S_t را به صورت

$$S_t = \int_0^t (V_s, \mathrm{d}B_s) + \int_0^t U_s \mathrm{d}s + A_t \tag{۳.۳}$$

در نظر می‌گیریم. (منظور از مانع [13] کران پایین تابع است.) که در آن $V = (V^1, \ldots V^d)$، U فرآیندهای قابل پیش‌بینی هستند به گونه‌ای که نامساوی $\mathrm{E} \int_0^T |Y_t| \mathrm{d}t + \mathrm{E} \int_0^T |U_t| \mathrm{d}t < \infty$ برقرار باشد و A یک فرآیند $Cadlag$ سازگار است که دارای تغییرات متناهی می‌باشد به گونه‌ای که $\mathrm{E} \sup_{t \leq T} |A_t| < \infty$. (منظور از فرآیند $Cadlag$؛ [14] یک فرآیند تصادفی است به گونه‌ای که مسیرهای $X_t \to t$ در هر نقطه پیوسته از راست باشند و حد چپ آن‌ها نیز موجود باشد، همچنین دارای احتمال ۱ باشند.)

همچنین فرض کنید که $\mathrm{d}A_t$ یک اندازه مثبت [15] باشد که نسبت به اندازه لبگ [16] تکین [17] باشد. (با توجه به موارد ذکر شده تجزیه (۳.۳) یکتا می‌باشد.)
فرضیه ((H_3)):
علاوه بر فرضیه (H_1) و (H_2) ، شرط مکمل فرضیه (H_3) را در نظر می‌گیریم. مقدار نهایی به صورت زیر فرض می‌شود که $\xi \geq S_t$ در نظر گرفته می‌شود؛

$$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P). \tag{۴.۳}$$

ملاحظه ۱.۲.۳. فرآیند A دارای پرش‌های مثبت [18] است، لذا فرآیند S نیز دارای این گونه پرش‌ها خواهد بود. توجه کنید که S نیز پیوسته است.

[12] driver
[13] Obstacle
[14] Cadlag process
[15] Positive measure
[16] Lebesgue measure
[17] Singular
[18] Positive Jumps

معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده (۵.۳) را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{f(s,w,Y_s,Z_s) + \alpha_s 1_{\{Y_s=S_s\}}(f(s,w,S_s,V_s)+U_s^-\}\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s \quad (۵.۳)$$

که از این پس آن را با $Eq(\xi,f,s)$ نشان می‌دهیم.

هدف یافتن جواب $Y_t \geq S_t$ است. به عبارت بهتر جواب معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q(\xi,f,s)$ سه‌گانه $(Y_t,Z_t,\alpha_t)_{0\leq t\leq T} \in (H^2)^{d+2}$ است، به گونه‌ای که در معادله $Eq(\xi,f,s)$ صدق می‌کند و برای $0 \leq t \leq T$ تقریباً همه جا نامساوی $Y_t \geq S_t$ برقرار باشد.

ملاحظه ۲.۲.۳. همچنین ممکن است که $\alpha_s 1_{\{Y_s=S_s\}}(f(s,w,Y_s,Z_s)+U_S)^-$ را به جای $\alpha_s 1_{\{Y_s=S_s\}}(f(s,w,S_s,V_s)+U_S)^-$ در معادله (۵.۳) قراردهیم. در واقع چیزی تغییر نمی‌کند: چون $Y_s = S_s$ را درنظر گرفته‌ایم مهم نیست اگر S یا Y را قرار دهیم. از طرف دیگر از آنجایی که $Y-S$ نیم مارتینگل و همچنین با بخشی از مارتینگل ارائه شده توسط $(Z_s-V_s)\mathrm{d}B_s$ است. کاملاً مشخص است که $1_{\{Y_s-S_s=0\}}(Z_s-V_s)^2\mathrm{d}s=0$ بنابراین $1_{\{Y_s-S_s=0\}}(Z_s-V_s)^2=0$، $\mathrm{d}s$ تقریباً همه جا برقرار است. این موضوع امکان جایگزینی V با Z را فراهم می‌آورد.

نتیجه اصلی در این بخش به صورت زیر است:

قضیه ۱.۲.۳. مفروضات (H_1)، (H_2) و (H_3) را در نظر می‌گیریم. پس $(Y_t,Z_t,\alpha_t)_{0\leq t\leq T} \in (H^2)^{d+2}$ جواب یکتای معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q(\xi,f,s)$ وجود دارد. بنابراین Y فرآیند پیوسته برای هر $0 \leq \alpha \leq 1, \mathrm{d}s\times\mathrm{d}p$ تقریباً همه جا نامساوی $\mathrm{E}(\sup_{t\leq T}|Y_t|^2) < \infty$ برقرار است.

اثبات قضیه ۱.۲.۳ در ادامه وجود دارد.

ملاحظه ۳.۲.۳. ویژگی یکتا بودن را به صورت زیر بیان می‌کنیم:
اگر $(Y_t,Z_t,\alpha_t)_{0\leq t\leq T}$ ، $(Y'_t,Z'_t,\alpha'_t)_{0\leq t\leq T}$ دو جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi,f,s)$ باشند؛ آنگاه برای $0 \leq t \leq T$، تقریباً همه جا $Y_t = Y'_t$، است و همچنین تقریباً همه جا $Z_t = Z'_t, \mathrm{d}t\times\mathrm{d}p$ و $\alpha_t = \alpha'_t 1_{\{Y_t=S_t\}}(f(t,w,Y_s,Z_s)+U_s)^-\mathrm{d}s\times\mathrm{d}p$ برقرار است.

ملاحظه ۴.۲.۳. در فرضیه (H_2) فرض کنیم $\mathrm{d}A_t$ یک اندازه مثبت است و از پرش‌های منفی مستثنی باشد، در واقع این یک محدودیت سطحی است و هنگامی که بتوانیم مسائل را با پرش‌های مثبت حل کنیم می‌توانیم مسائل را با پرش‌های منفی [۱۹] نیز با استفاده از یک روش تبدیل حل نماییم. می‌نویسیم $A = A^+ - A^-$ و با فرض $A^- = 0$ وجود و یکتایی قبلاً ثابت شده‌اند. در این صورت $\tilde{\xi} = \xi + A^-$، $\tilde{S} = S + A^-$ و $\tilde{f}(s,w,y,z) = f(s,w,y-A_s^-(w),z)$ را تعریف می‌کنیم و توجه داریم که سه تایی (Y,Z,K) در معادله $\mathrm{E}q(\xi,f,s)$ صدق می‌کند،

[19] Negative Jumps

اگر و تنها اگر $\tilde{Y} =: Y + A^-$، $\tilde{Z} = Z$ و $\tilde{K} = K - A^-$ جواب معادله $\mathrm{E}q(\tilde{\xi}, \tilde{f}, \tilde{s})$ باشد. لذا وجود و یکتایی جواب برای معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, s)$ از وجود و یکتایی جواب معادله $\mathrm{E}q(\tilde{\xi}, \tilde{f}, \tilde{s})$ به ازای آن $A^- = ۰$ نتیجه می‌شود.

ابزار اصلی در اثبات قضیه ۱.۲.۳ اصل ماکزیمال زیر است.

گزاره ۱.۲.۳. فرضیه $(H_۱)$، $(H_۲)$ و $(H_۳)$ را در نظر می‌گیریم و همچنین فرض کنیم $P(\mathrm{d}w)$ تقریباً برای هر w، فرضیه $(H_۴)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(f(s, w, S_s, V_s) + U_s)\mathrm{d}s + \mathrm{d}A_s \geq ۰ \tag{۶.۳}$$

آنگاه جواب (Y, Z) مربوط به معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو استاندارد که به صورت (۷.۳) نوشته می‌شود، که در $Y_t \geq S_t$ صدق می‌کند.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, w, Y_t, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s) \tag{۷.۳}$$

از این پس (۷.۳) را با $\mathrm{E}q(\xi, f)$ نشان می‌دهیم.

به ویژه $(Y, Z, ۰)$ جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, s)$ است.

ملاحظه ۵.۲.۳. از آنجایی که $\mathrm{d}A_t$ نسبت به اندازه لبگ تکین است. شرط بالا معادل $\mathrm{d}A_t \geq ۰$ است.

حال به اثبات گزاره ۱.۲.۳ می‌پردازیم.

برهان. فقط استدالال سازگار برای اثبات قضیه مقایسه از معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو استاندارد استفاده شده است. (اگر $A = ۰$ نتیجه پیامدی از قضیه مقایسه باشد.)(برای اطلاعات بیشتر به [۳۹] مراجعه کنید.)

$y_t = Y_t - S_t$، $z_t = Z_t - V_t$، $\theta_t = f(t, w, S_t, V_t) + U_t$ قرار می‌دهیم.

$$\alpha_t = \begin{cases} \dfrac{f(t, w, Y_t, Z_t) - f(t, w, S_t, V_t)}{Y_t - S_t}, & Y_t \neq S_t, \\ ۰, & Y_t = S_t. \end{cases} \tag{۸.۳}$$

$$\Gamma_{t,T} = \exp \int_t^T \alpha_s \mathrm{d}s \tag{۹.۳}$$

آنگاه

$$y_t = y_t - \int_t^T \alpha_s y_s \mathrm{d}s - \int_t^T \theta_s \mathrm{d}s - (A_T - A_t) + \int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s) \tag{۱۰.۳}$$

با استفاده از فرمول (۱۰.۳) و فرمول ایتو بدست می‌آوریم؛

$$\begin{aligned}\Gamma_{t,T}y_t &= \Gamma_{t,T}y_t - \Gamma_{t,T}\int_t^T \alpha_s y_s \mathrm{d}s - \Gamma_{t,T}\int_t^T \theta_s \mathrm{d}s - \Gamma_{t,T}(A_T - A_t) + \Gamma_{t,T}\int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s)\\ &= \Gamma_{t,T}y_t - \Gamma_{t,T}[\int_t^T \alpha_s y_s \mathrm{d}s - \int_t^T \theta_s \mathrm{d}s - (A_T - A_t) + \int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s)]\end{aligned}$$

با استفاده از (۸.۳) و (۹.۳) و روابط اخیر داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma_{t,T}\{-\int_t^T \theta_s \mathrm{d}s - (A_T - A_t)\} &= \exp\int_t^T \alpha_s \mathrm{d}s[-\int_t^T \theta_s \mathrm{d}s - (A_T - A_t)]\\ &= -\Gamma_{t,T}\int_t^T \theta_s \mathrm{d}s - \int_t^T \Gamma_{t,T}\mathrm{d}A_s\\ &= -\int_t^T \Gamma_{t,T}(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}A_s)\\ \Gamma_{t,T}\{\int_t^T \alpha_s y_s \mathrm{d}s - \int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s)\} &= \exp\int_t^T \alpha_s \mathrm{d}s\{\int_t^T \alpha_s y_s \mathrm{d}s - \int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s)\}\\ &= \exp\int_t^T \alpha_s \mathrm{d}s\int_t^T \alpha_s y_s \mathrm{d}s - exp\int_t^T \alpha_s \mathrm{d}s\int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s)\\ &= \int_t^T \Gamma_{t,T}(Z_s, \mathrm{d}B_s)\\ \Gamma_{t,T}y_t = \Gamma_{t,T}y_t - \int_t^T \Gamma_{t,T}(\theta_s + \mathrm{d}A_s) &+ \int_t^T \Gamma_{t,T}(Z_s, \mathrm{d}B_s)\end{aligned}$$

با گرفتن امید ریاضی شرطی به شکل (۱۱.۳) بدست می‌آید:

$$y_t = E(\Gamma_{t,T}y_t + \int_t^T \Gamma_{t,T}(\theta_s + \mathrm{d}A_s) \mid F_t) \geq ۰ \tag{۱۱.۳}$$

□

حال به اثبات قضیه ۱.۲.۳ می‌پردازیم.

برهان. **مرحله ۱.** یک دنباله از تابع $\phi_n \in C^\infty$ در نظر گرفته شده به گونه‌ای که $۰ \leq \phi_n \leq ۱$ است که به صورت (۱۲.۳) بیان می‌شود؛

$$\phi_n(y)\begin{cases}۱, & |y|\leq \frac{۱}{۲n},\\ ۰, & |y|\geq \frac{۲}{۲n},\end{cases} \tag{۱۲.۳}$$

و

$$f_n(t,w,y,z) = f(t,w,y,z) + \phi_n(y - S_t)(f(t,w,S_t,V_t) + U_t)^-$$

را تعریف می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم که $(f(t,w,S_t,V_t)+U_t)^-$ کراندار است. آنگاه f_n در y,z پیوستگی لیپ‌شیتز دارد و بنابراین معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو استاندارد $\mathrm{E}q(\xi,f_n)$ جواب یکتای (Y^n,Z^n) را دارد. از آنجایی که $f_n(t,w,S_t,V_t)+U_t\geq ۰$ است، لذا در فرضیه $(H_۴)$ صدق می‌کند و بنابراین $Y^n\geq S$ است. اگر $(f(t,w,S_t,V_t)+U_t)^-$ کراندار نباشد، $f_n^K=f+\phi_n[(f+U_s)^-\wedge K]$ را تعریف می‌کنیم و (Y_k^n,Z_k^n) جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi,f_n^k)$ تعریف می‌شود. با توجه به قضیه مقایسه Y_k^n صعودی است. بنابراین می‌توانیم $Y^n=\lim_k Y_k^n$ را تعریف کنیم. همگرایی Z_n^k از استدلالی مشابه پیروی می‌کند. بنابراین جواب (Y_n,Z_n) در معادله $\mathrm{E}q(\xi,f_n)$ صدق می‌کند.

برای مقدار ثابت C داریم:

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq T}|Y_t^n|^۲+\mathrm{E}\int_۰^T|Z_s^n|^۲\mathrm{d}s\leq C\mathrm{E}|\xi|^۲,\quad \forall n\in N, \tag{۱۳.۳}$$

با استفاده از فرمول ایتو، رشد خطی f و نامساوی ساده $|ab|\leq\frac{\alpha}{۲}|a|^۲+\frac{۱}{۲\alpha}|b|^۲$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|Y_t^n|^۲+\mathrm{E}\int_t^T|Z_s^n|^۲\mathrm{d}s&\leq \mathrm{E}|\xi|^۲+C\mathrm{E}\int_t^T|Y_s^n|(۱+|Y_s^n|+|Z_s^n|)\mathrm{d}s\\&\leq \mathrm{E}|\xi|^۲+C'\mathrm{E}\int_t^T(۱+|Y_s^n|^۲)\mathrm{d}s+\frac{۱}{۲}\mathrm{E}\int_t^T|Z_s^n|^۲\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

این رابطه را با لم گرونوال [۲۰] $\mathrm{E}|Y_t^n|^۲+\mathrm{E}\int_t^T|Z_s^n|^۲\mathrm{d}s\leq C.$ داریم. از نامساوی برکولدر [۲۱] برای جایگزینی $|Y_t^n|^۲$ با $\sup_{t\leq T}|Y_t^n|^۲$ استفاده می‌کنیم. بنابراین معادله (۱۳.۳) اثبات می‌شود.

مرحله ۲. از آنجایی که f_n نزولی است، با توجه به قضیه مقایسه Y_n هم نیز نزولی است. بنابراین $Y=\lim_n\downarrow Y^n$ را تعریف می‌کنیم.

با توجه به قضیه همگرایی یکنواخت داریم:

$$\mathrm{E}\int_۰^T|Y_t^n-Y_t|^۲\mathrm{d}t\to ۰ \tag{۱۴.۳}$$

علاوه بر این با استفاده از فرمول ایتو و رشد خطی f_n,f_m و معادله (۱۳.۳) و (۱۴.۳)

[۲۰] Gronwall's lemma

[۲۱] Burkholder's inequallity

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}|Y_t^n - Y_t^m|^{۲} + \mathrm{E}\int_t^T |Z_s^n - Z_s^m|^{۲}\mathrm{d}s \\
&\quad = ۲\mathrm{E}\int_t^T (Y_t^n - Y_t^m)(f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m))\mathrm{d}s \qquad (۱۵.۳)\\
&\quad \leq C'\mathrm{E}\int_t^T |Y_t^n - Y_t^m|(|f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| + |f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)|)\mathrm{d}s \to ۰
\end{aligned}$$

بنابراین دنباله $(Z)_{n\in N}^n$ در $L^{۲}$ کوشی است و آن را $Z = \lim Z^n$ تعریف می‌کنیم. در نهایت، با استفاده از نامساوی برکولدر می‌توان

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq T}|Y_t^n - Y_t^m|^{۲} \to ۰ \quad \text{as}, \quad n, m \longrightarrow \infty,$$

بنابراین

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq T}|Y_t^n - Y_t|^{۲} \to ۰$$

را بدست آورد. به ویژه Y پیوسته است.

مرحله ۳. نشان می‌دهیم $\alpha^n(s, w) = \phi_n(Y_s^n - S_s) \in L^{۲}([۰, T] \times \Omega, P, \mathrm{d}s \times \mathrm{d}p)$,
در اینجا p به طور کلی σـ میدان از فرآیندهای قابل پیش‌بینی در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که α^n کراندار است، لذا در $L^{۲}$ کراندار هستند، بنابراین $\alpha \in L^{۲}([۰, T] \times \Omega, P, \mathrm{d}s \times \mathrm{d}p)$ به گونه‌ای موجود است که زیر دنباله‌ی $(\alpha^n)_n$, به طور ضعیف به α همگرا است. ثابت می‌کنیم که (Y, Z, α) جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, s)$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم؛

$$\begin{aligned}
I_n(t) &=: Y_t^n - \xi - \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) + \alpha_s^n(f(s, S_s, , V_s) + U_s)^- \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^n \mathrm{d}B_s \\
I(t) &=: Y_t - \xi - \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) + \alpha_s(f(s, S_s, V_s) + U_s)^- \mathrm{d}s - \int t^T Z_s \mathrm{d}B_s.
\end{aligned}$$

$\theta \in L^{۲}([۰, T] \times \Omega, P, \mathrm{d}s \times \mathrm{d}p)$ رادر نظر می‌گیریم. چون α^n به طور ضعیف به α میل می‌کند داریم:

$$\mathrm{E}\int_{۰}^T \theta_s \alpha_s^n (f(s, S_s, V_s) + U_s)^- \mathrm{d}s \to \mathrm{E}\int_{۰}^T \theta_s \alpha_s (f(s, S_s, V_s) + U_s)^- \mathrm{d}s.$$

به علاوه چون $Y_n \longrightarrow Y$ و $Z_n \longrightarrow Z$ در $L^{۲}$ میل می‌کند، رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathrm{E}\int_{۰}^T \theta_s \Gamma_s^n \mathrm{d}s \to \mathrm{E}\int_{۰}^T \theta_s I_s \mathrm{d}s,$$

از آنجایی که (Y_n, Z_n, α) جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi, f_n, S)$ می‌باشد، لذا $I^n = ۰$ است که منجربه $E\int_{۰}^T \theta_s I_s \mathrm{d}s = ۰$ می‌گردد. در ادامه تقریباً همه جا $I = ۰, \mathrm{d}s \times \mathrm{d}p$ است و از آنجایی که تقریباً همه جا $s \to I_s(w)$ پیوسته است، به دست می‌آوریم $I_s(w) = ۰, \forall s \in [۰, T], \mathrm{d}p(w)$ که

تقریباً همه جا برقرار است. به این معنی که (Y, Z, α) جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, S)$ است. واضح است که $Y_t = \lim_n Y^n(t) \geq S(t)$

مرحله ۴. حال $\alpha_t = \alpha_t 1_{\{Y(t)=S(t)\}}$ را بررسی می‌کنیم، اگر $Y(t) > S(t)$ باشد؛ آنگاه $Y^n \geq Y(t) > S(t)$ است. بنابراین تقریباً همه جا $\alpha_t^n = \phi_n(Y_t^n - S_t) \to 0$ برقرار است. بنابراین؛

$$\mathrm{E}\int_0^T \alpha_t 1_{\{Y(t)>S(t)\}} \mathrm{d}t = \lim_n \mathrm{E}\int_0^T \alpha_t^n 1_{\{Y(t)>S(t)\}} \mathrm{d}t = 0.$$

مرحله ۵. درستی نامساوی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$0 \leq \alpha \leq 1, \mathrm{d}s \times \mathrm{d}p$$

$\epsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم، از آنجایی که $\alpha^n \leq 1$, بنابراین داریم؛

$$\delta_n =: \mathrm{E}\int_0^T (\alpha_t - \alpha_t^n) 1_{(\alpha_s > 1+\epsilon)} \mathrm{d}s \geq \epsilon \mathrm{E}\int_0^T 1_{(\alpha_s > 1+\epsilon)} \mathrm{d}s.$$

اما از آنجایی که $\alpha^n \longrightarrow \alpha$ ضعیف است. می‌دانیم که $\delta_n \longrightarrow 0$ بنابراین برای هر $\epsilon > 0$ داریم :

$$\mathrm{E}\int_0^T 1_{(\alpha_s > 1+\epsilon)} \mathrm{d}s = 0$$

پس اثبات کامل شده است. (اثبات $\alpha \geq 0,\ \mathrm{d}s \times \mathrm{d}P,\ a.s.$ به طور مشابه است). □

ملاحظه ۶.۲.۳. در اثبات قبلی از واقعیتی استفاده کردیم که زیر دنباله $(\alpha^n)_{n\in N}$ به طور ضعیف به α همگرا است. در واقع یکتا بودن جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, s)$ حاکی از این است که $(\alpha^n)_{n\in N}$ دارای حد می‌باشد، بنابراین $\alpha = \lim_n \alpha^n$ است.

مانع کلی

حال مانع کلی $S_t = C_t + A_t$ را در نظر می‌گیریم،
که $C \in S$ و A یک فرآیند سازگار است.
معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q(\xi, f, s)$ را به صورت زیر داریم.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, w, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s + K_T - K_t - \int_t^T (Z_s, \mathrm{d}B_s).$$

جواب این معادله به صورت سه‌گانه $(Y, Z, K) \in (H^2)^{\mathrm{d}+2}$ تعریف شده است. که در معادله صدق می‌کند، به گونه‌ای که

- برای هر $0 \leq t \leq T$ تقریباً همه جا $Y_t \geq S_t$ است.
- $Y \in S$ است،
- K نیز فرآیند افزایشی پیوسته است؛ به طوری که $\int_0^T (Y_t - S_t)\mathrm{d}K_t = 0$ است.

ملاحظه ۷.۲.۳. مطالعه قبلی نشان می‌دهد که، وقتی $\mathrm{d}S_t = V_t\mathrm{d}B_t + A_t$ باشد، داریم:

$$\mathrm{d}K_t = \alpha_t 1_{\{Y_t=S_t\}}(f(t,Y_t,Z_t) + U_t - V_t)^{-}\mathrm{d}t.$$

لم ۱.۲.۳. اگر (Y,Z,K) ، $(\overline{Y},\overline{Z},\overline{K})$ جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi,f,s)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\delta =: \mathrm{E}\int_0^T |S_s - \overline{S_s}|\mathrm{d}(K_s - \overline{K_s}) \tag{۱۶.۳}$$

به اندازه کافی کوچک است و در اثبات انتخاب شده است. پس ثابت C وجود دارد.به گونه‌ای که:

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}|K_s - \overline{K_s}|^2 + \mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}|Y_s - \overline{Y_s}|^2 + \int_0^T \mathrm{E}|Z_s - \overline{Z_s}|^2\mathrm{d}s \le C\sqrt{\delta}. \tag{۱۷.۳}$$

و

$$\mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}|K_s|^2 + \mathrm{E}\sup_{0\le s\le T}|Y_s|^2 + \int_0^T \mathrm{E}|Z_s|^2\mathrm{d}s \le C\mathrm{E}(|\xi|^2 + \sup_{0\le s\le T}|S_s|^2). \tag{۱۸.۳}$$

برقرار باشد.

حال به اثبات لم ۱.۲.۳ می‌پردازیم.

برهان. قرار می‌دهیم:

$\Delta Y = Y - \overline{Y}, \Delta Z = Z - \overline{Z}, \Delta K = K - \overline{K}$ و $\Delta f_s = f(s,X_s,Y_s,Z_s) - f(s,X_s,\overline{Y_s},\overline{Z_s})$

آنگاه در معادله زیر صدق می‌کنند؛

$$\Delta Y_s = \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r).$$

با استفاده از فرمول ایتو و معادله فوق داریم:

$$|\Delta Y_s| = \left|\int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)\right|$$

$$\begin{aligned}
|\Delta Y_s|^2 &= \Delta Y_s \Delta Y_s \\
&= \Big\{\int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)\Big\} \\
&\times \Big\{\int_0^T \Delta f_r\mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)\Big\} \\
&= \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r + \Delta K_T \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r - \Delta K_s \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r - \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \\
&+ \Delta K_T \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r + \Delta K_T^2 - \Delta K_T \Delta K_s - \Delta K_T \int_s^T (\Delta Z_r\mathrm{d}r, \mathrm{d}B_r) - \Delta K_s \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r - \Delta K_s \Delta K_T \\
&- \Delta K_s^2 + \Delta K_s \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) - \int_s^T \Delta f_r\mathrm{d}r \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) - \Delta K_T \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \\
&+ \Delta K_s \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) + \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)
\end{aligned}$$

$$\Delta Z = Z - \overline{Z} \qquad \Delta Z_r = Z - \overline{Z_r} \qquad |\Delta Z_r|^{۲} = (Z - \overline{Z}).(Z - \overline{Z})$$

$$\begin{aligned}
|\Delta Y_s|^{۲} + \int_s^T |\Delta Z_r|^{۲} \mathrm{d}r &= \Big(\int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \Big) \\
&.\Big(\int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r \Big) + \Big(\int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \Big)(\Delta K_T - \Delta K_s) \\
&- \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) + \int_s^T |\Delta Z_r|^{۲} \mathrm{d}r \\
&= ۲ \left\{ \int_s^T \Delta Y_r \Delta f_r \mathrm{d}r + \int_s^T \Delta Y_r \Delta K_r - \int_s^T \Delta Y_r (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \right\}
\end{aligned}$$

$$|\Delta Y_s|^{۲} + \int_s^T |\Delta Z_r|^{۲} \mathrm{d}r = ۲ \left\{ \int_s^T \Delta Y_r \Delta f_r \mathrm{d}r + \int_s^T \Delta Y_r \Delta K_r - \int_s^T \Delta Y_r (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \right\} \tag{۱۹.۳}$$

زمانی که $S = Y$ باشد، K افزایش می‌یابد(به‌ترتیب K،$\overline{K}$) (به ترتیب $\overline{S} = \overline{Y}$) و $S \geq Y$ و $.\overline{Y} \geq \overline{S}$

$$\int_s^T \Delta Y_r \mathrm{d}\Delta K_r = \int_s^T (S_r - \overline{Y_r}) \mathrm{d}K_r + \int_s^T (\overline{S_r} - Y_r) \mathrm{d}\overline{K_r} \leq \int_s^T |\overline{S_r} - S_r| \mathrm{d}(K_r + \overline{K_r}) \tag{۲۰.۳}$$

و بنابراین

$$\mathrm{E} \int_s^T \Delta Y_r \mathrm{d}\Delta K_r \leq \delta$$

با استفاده از پیوستگی لیپ‌شیتز f، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\Delta Y_s &= \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \\
\Delta Y_s \Delta f_r &= \Delta f_r \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta f_r \Delta K_T - \Delta f_r \Delta K_s - \Delta f_r \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \\
|\Delta Y_s \Delta f_r| &= \left| \Delta f_r \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta f_r \Delta K_T - \Delta f_r \Delta K_s - \Delta f_r \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \right| \\
&\leq \left| \Delta f_r \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r \right| + |\Delta f_r \Delta K_T| - |\Delta f_r \Delta K_s| - \left| \Delta f_r \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \right|
\end{aligned}$$

اما داریم:

$$\begin{aligned}
|\Delta Y_r| &= \left| \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \right| \\
&\leq \left| \int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r \right| + |\Delta K_T| - |\Delta K_s| - \left| \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r) \right|
\end{aligned}$$

از طرفی خواهیم داشت:

$$|\Delta Y_r \Delta f_r|= |\Delta Y_r||\Delta f_r|$$

با توجه به شرط لیپشیتز داریم؛

$$\begin{aligned}
|\Delta f_r| &\leq C(|\Delta Y_r|+|\Delta Z_r|) \\
|\Delta Y_r \Delta f_r| &\leq C|\Delta Y_r|(|\Delta Y_r|+|\Delta Z_r|) \\
&= C\Big(\int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)\Big) \\
&= \Big(\Big(\int_s^T \Delta f_r \mathrm{d}r + \Delta K_T - \Delta K_s - \int_s^T (\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)\Big) + |\Delta Z_r|\Big) \\
&\Longrightarrow |\Delta Y_r \Delta f_r|\leq C''|\Delta Z_r| \rightarrow |\Delta Y_r \Delta f_r|\leq C'|\Delta Y_r|^{۲}+\frac{۱}{۴}|\Delta Z_r|^{۲}
\end{aligned}$$

$$|\Delta Y_r \Delta f_r|\leq C|\Delta Y_r|(|\Delta Y_r|+|\Delta Z_r|) \leq C'|\Delta Y_r|^{۲}+\frac{۱}{۴}|\Delta Z_r|^{۲} \tag{۲۱.۳}$$

معادله (۱۹.۳) را در نظر می‌گیریم و از این نامساوی برای بدست آوردن رابطه زیر استفاده می‌کنیم؛

$$\mathrm{E}|\Delta Y_s|^{۲}+\frac{۱}{۲}\mathrm{E}\int_s^T |\Delta Z_r|^{۲}\mathrm{d}r \leq C\mathrm{E}\int_s^T |\Delta Y_r|^{۲}\mathrm{d}r + \delta,$$

و در نهایت با لم گرنوال خواهیم داشت؛

$$\mathrm{E}|\Delta Y_s|^{۲}+\frac{۱}{۲}\mathrm{E}\int_s^T |\Delta Z_r|^{۲}\mathrm{d}r \leq C\delta \tag{۲۲.۳}$$

حال باید با استفاده از نامساوی برکولدر به منظور دست یابی به $\sup_s$ توسط معادله (۱۹.۳) و دو نامساوی (۲۰.۳) و (۲۱.۳) به صورت نامساوی (۲۳.۳)نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\sup_{۰\leq s\leq T}|\Delta Y_s|^{۲} &\leq C\int_۰^T |\Delta Y_r|(|\Delta Y_r|+|\Delta Z_r|)\mathrm{d}r \\
&\quad + ۲\int_۰^T |\overline{S_r} - S_r|\mathrm{d}(K_r + \overline{K_r}) + ۲\sup_{۰\leq s\leq T}|M_s|
\end{aligned} \tag{۲۳.۳}$$

با توجه به $M_s = \int_۰^s \Delta Y_r(\Delta Z_r, \mathrm{d}B_r)$ ، ابتدا با استفاده از نامساوی برکولدر و نامساوی شوارتز بدست می‌آوریم؛

$$\mathrm{E}|\Delta Y_s|^{۲}+\frac{۱}{۲}\mathrm{E}\int_s^T |\Delta Z_r|^{۲}\mathrm{d}r \leq C\delta$$

با توجه به مفروضات داریم:

$$M_s=\int_0^s \Delta Y_r(\Delta Z_r,\mathrm{d}B_r)=\int_0^s \Delta Y_r\Delta f_r\mathrm{d}r+\int_0^s \Delta Y_r\mathrm{d}\Delta K_r-\frac{1}{2}|\Delta Y_r|^2-\int_s^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{E}|\Delta Y_s|^2\leq C\delta-\frac{1}{2}\mathrm{E}\int_s^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{E}(M_s)=\mathrm{E}\Big(\int_0^s \Delta Y_r(\Delta Z_r,\mathrm{d}B_r)\Big)$$

$$=\mathrm{E}\Big(\int_0^s \Delta Y_r\Delta f_r\mathrm{d}r\Big)+\mathrm{E}\Big(\int_0^s \Delta Y_r\mathrm{d}\Delta K_r\Big)-\mathrm{E}(\frac{1}{2}|\Delta Y_s|^2)-\mathrm{E}\Big(\int_s^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r\Big)$$

$$\mathrm{E}|\Delta Y_s|^2\leq C\mathrm{E}\Big(\int_s^T|\Delta Y_r|^2\mathrm{d}r\Big)-\frac{1}{2}\mathrm{E}\Big(\int_s^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r\Big)+\delta$$

$$|M_s|\leq|\int_0^s \Delta Y_r\Delta f_r\mathrm{d}r|+|\int_0^s \Delta Y_r\mathrm{d}\Delta K_r|-\frac{1}{2}|\Delta Y_s|^2-|\int_s^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r|$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\sup_{0\leq s\leq T}|M_s|&\leq b\mathrm{E}[\Big(\int_0^T|\Delta Y_r|^2|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}}]\\&\leq b\mathrm{E}[\Big(\sup_{0\leq s\leq T}|\Delta Y_r|^2\int_0^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}}]\\&\leq b(1+\mathrm{E}\sup_{0\leq s\leq T}|\Delta Y_r|^2\Big(\mathrm{E}\int_0^T|\Delta Z_r|^2\mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}})\\&\leq\frac{1}{4}\mathrm{E}\sup_{0\leq s\leq T}|\Delta Y_r|^2+C'\sqrt{\delta}\end{aligned}\tag{۲۴.۳}$$

آخرین نامساوی شروع نتیجه معادله (۲۲.۳) و معادله (۱۶.۳) است، δ را طوری انتخاب می‌کنیم که نامساوی $b\sqrt{C^{\frac{1}{2}}\delta}\leq\frac{1}{4}$ برقرار باشد. C در معادله (۲۲.۳) ثابت است.

حال با توجه به نامساوی‌های (۲۲.۳)، (۲۳.۳) و (۲۴.۳) خواهیم داشت؛

$$\mathrm{E}\sup_{0\leq s\leq T}|\Delta Y_s|^2\leq C\sqrt{\delta}\tag{۲۵.۳}$$

به معادله (۲۳.۳) برمی‌گردیم و از ویژگی پیوستگی لیپشیتز f استفاده می‌کنیم، در نهایت داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq s\leq T}|\Delta K_s|^2&\leq 2\sup_{0\leq s\leq T}|\Delta Y_s|^2+C\int_0^T(|\Delta Y_r|+|\Delta Z_r|)^2\mathrm{d}r\\&+2\sup_{0\leq s\leq T}\Big|\int_s^T(Z_s,\mathrm{d}B_s)\Big|\end{aligned}$$

به علاوه با معادله (۲۲.۳) ، (۲۵.۳) و نامساوی برکولدر $E\sup_{t\leq s\leq T}|\Delta K_s|^2\leq\sqrt{\delta}$ است و اثبات معادله (۱۷.۳) کامل می‌شود. اثبات معادله (۱۸.۳) مشابه است. □

قضیه ۲.۲.۳. فرضیه‌های (H_1) و (H_3) را در نظر می‌گیریم. آنگاه معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q(\xi,f,s)$ یک جواب یکتا دارد.

حال به اثبات قضیه ۲.۲.۳ می‌پردازیم.

برهان. یکتای جواب از معادله (۱۷.۳) حاصل می‌شود. برای ساختن جواب C_n را $C_n = C * \phi_n$ تعریف می‌کنیم، و به شکل $S_n = C_n + A$ قرار می‌دهیم، چون $t \to C_n(t)$ به طور کلی مشتق‌پذیر است و $|\partial_t C_n(t)| \leq ۲^n \sup_t |C(t)|$ است، مانع S_n در مفروضات مربوط به قضیه ۱.۲.۳ صدق می‌کند، بنابراین جواب (Y_n, Z_n, K_n) را برای معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, S_n)$ داریم.

با توجه به معادله (۱۷.۳) و (۱۸.۳) داریم؛

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\sup_t |Y_n(t) - Y_m(t)|^۲ &+ \mathrm{E}\sup_t |K_n(t) - K_m(t)|^۲ + \mathrm{E}\int_۰^T |Z_n(t) - Z_m(t)|^۲ \mathrm{d}t \\
&\leq C \left(\mathrm{E}\int_۰^T |S_n(t) - S_m(t)| \mathrm{d}(K_n(t) - K_m(t)) \right)^{\frac{۱}{۲}} \\
&\leq C \left(\mathrm{E}\sup_t |S_n(t) - S_m(t)|^۲ \right)^{\frac{۱}{۴}} (\mathrm{E}(|K_n(T) - K_m(T)|))^{\frac{۱}{۴}} \\
&\leq C' \left(\mathrm{E}\sup_t |S_n(t) - S_m(t)|^۲ \right)^{\frac{۱}{۴}}.
\end{aligned}$$

زمانی که n, m به سمت بی‌نهایت میل کند سمت راست نامساوی فوق به صفر میل خواهد کرد.

در نهایت بنابراین $Y = \lim_n Y_n$, $Z = \lim_n Z_n$ و $K = \lim_n K_n$ را داریم و با توجه به حد معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, S_n)$ ، بررسی می‌کنیم که (Y, Z, K) جواب معادله $\mathrm{E}q(\xi, f, S)$ می‌باشد. □

۳.۳ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منعکس شده نیمه خطی

۱.۳.۳ مانع منظم (حقیقی)

دراین بخش چهارچوب مارکوین را در نظر می‌گیریم. ابتدا به معرفی برخی از مفاهیم می‌پردازیم.

$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ پیوسته است و تابعی کاملاً مثبت است که در ادامه ثابت فرض شده است و وزن را نمایش می‌دهد. فرض بر این است که $\int \rho(x)\mathrm{d}x < \infty$ باشد. برای مثال می‌توان $\rho(x)$ را به صورت $\rho(x) = (۱ + |x|)^{-\beta}, \beta > ۱$ در نظر گرفت. باید با توابعی در فضای وزن‌دار $L^۲$، $L^۲ =: L^۲(\mathbb{R}^N, \rho(x)\mathrm{d}x)$. کار کنیم. اهدافی که در این بخش با آن روبه‌رو هستیم، به صورت زیر هستند:

• عملگر بی‌نهایت کوچک

$$\begin{aligned} L\phi(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^*)^{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\phi(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\phi(x) \\ &= \sigma^*\nabla(\sigma^*\nabla\phi) + \tilde{b}\nabla\phi \end{aligned}$$

که

$$\sigma \in C_b^3(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times \mathrm{d}}), b \in C_b^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) \tag{۲۶.۳}$$

و $\tilde{b} =: \frac{1}{2}\sigma^*\nabla\sigma + b$

• فضای سوبولف وزن‌دار:

$$\begin{aligned} &H_\rho^1 = \{U : [0,T]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, u_t \in L_\rho^2, \forall 0 \le t \le T, \\ &\sigma^*\nabla u \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^N, \mathrm{d}t \times \rho(x)\mathrm{d}x)\} \end{aligned}$$

(برای اطلاعات بیشتر به [۴۰] مراجعه کنید.)

• فرآیند انتشار با عملگر بی‌نهایت کوچک L، که از x در زمان t شروع می‌شود؛

$$X_s^{t,x} = x + \sum_{j=1}^{\mathrm{d}}\int_t^s \sigma^{ij}(X_r^{t,x})\mathrm{d}B^j(r) + \int_t^s b^i(X_r^{t,x})\mathrm{d}r, \qquad t \le s \le T.$$

• مانع $h+q$ با

$$h \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \tag{۲۷.۳}$$

به طوری که

$$|h(x)| \le C(1+|x|^\beta)$$

$$h(t,0) \in L_\rho^2, \quad \forall 0 \le t \le T, \quad \partial_t h, \partial_x h, \partial_x^2 h \in L^2(\mathrm{d}t \times \rho(x)\mathrm{d}x).$$

$$q : [0,T]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \tag{۲۸.۳}$$

اندازه پذیر است، و برای هر t, x داریم:

$$|q(x)| \le C(1+|x|^\beta)$$

$s \to q(s, X_s^{t,x})$ زیرمارتینگل است که به شکل مربعی انتگرال‌پذیر است.

در اینجا β عدد مثبتی است که در دنباله ثابت است.

• شرط نهایی

$$g \in L^{۲}_{\rho}, \quad g \geq h_T + q_T. \tag{۲۹.۳}$$

• تابع محرک $f : [۰, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر است، به گونه‌ای که معادله به شکل (۳۰.۳) و (۳۱.۳) نوشته می‌شود:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)|f(t,x,۰,۰)|^{۲}\mathrm{d}x < \infty, \tag{۳۰.۳}$$

$$|f(t,x,y,z) - f(t,x,y',z')| \leq C(|y-y'|+|z-z'|) \tag{۳۱.۳}$$

• معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیمه خطی

$$(\partial_t + L)u(t,x) + F(t,x,\alpha(t,x),u,\sigma^*\nabla u) = ۰, \forall ۰ \leq t \leq T,$$
$$u(T,x) = g(x), u \geq h,$$

که از این پس آن را با $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ نشان می‌دهیم.
که

$$F(t,x,a,y,z) = f(t,x,y,z)$$
$$+ a۱_{\{y=(h+q)(t,x)\}}(f(t,x,h(t,x),\sigma\nabla h(t,x)) + (\partial_t + L)h(t,x))^-.$$

که معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\int_t^T \int_{\mathbb{R}^N} u\partial_s\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\varphi(T,x) - u(t,x)\varphi(t,x)\mathrm{d}x$$
$$+ \int_t^T \int_{\mathbb{R}^N} (\sigma^*\nabla u)(\sigma^*\nabla\varphi) + u\nabla(\tilde{b}\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$= \int_t^T \int_{\mathbb{R}^N} \varphi F(s,x,\alpha,\sigma^*\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}s, \quad \forall\varphi \in C_c^{۱,۱}(\mathbb{R}^N, R)$$

تعریف ۱.۳.۳. جواب ضعیف معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ ، یک زوج از توابع $(u,\alpha) \in H^{۱}_{\rho} \times L^{۲}([۰,T] \times \mathbb{R}^N, \mathrm{d}t \times \rho(x)\mathrm{d}x)$ که در معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ صدق می‌کند، به گونه‌ای که؛ $u(t,x) \geq h(t,x) + q(t,x), \forall (t,x) \in [۰,T] \times \mathbb{R}^N$ است.

ملاحظه ۱.۳.۳. تابع F را با توجه به تعریف ۱.۳.۳ به صورت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\bar{F}(t,x,a,y,z) = f(t,x,y,z)$$
$$+ a۱_{\{y=(h+q)(t,x)\}}(f(t,x,y,z) + (\partial_t + L)h(t,x))^-$$

و معادله بدون تغییر باقی می‌ماند. (به توضیح بعد از معادله (۵.۳) مراجعه کنید.)

- معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده

$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T F(r, \alpha_r^{t,x}, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\mathrm{d}r - \int_s^T (Z_r^{t,x}, \mathrm{d}B_r)$$

که از این پس آن را با $\mathrm{E}q^{t,x}(g,f,h,q)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۲.۳.۳. معادله فوق با معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q(g(X_T^{t,x}), f_{t,x}, S_{t,x})$ برابر است که در اینجا داریم؛

$$f_{t,x}(s,w,y,z) = f(s, X_s^{t,x}(w), y, z),$$
$$S_{t,x}(s,w) = (h+q)(s, X_s^{t,x}(w))$$

ابتدا با استفاده از قضیه ۱.۱.۱ و قضیه ۳.۱.۱ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q(s, X_s^{t,x}(w)) = \int_t^s (\theta_r^{t,x}, \mathrm{d}B_r) + \int_t^s \lambda_s^{t,x}\mathrm{d}r A_s^{t,x}$$

که در اینجا $\theta_s^{t,x}$ فرآیند مربع انتگرال‌پذیر است. $\lambda_s^{t,x}$ یک فرآیند انتگرال‌پذیر است و $A_s^{t,x}$ یک فرآیند سازگار غیر کاهشی است، به گونه‌ای که $\mathrm{d}A_s^{t,x}$ با توجه به اندازه لبگ تکین است. با توجه به آنچه گفته شد $V_s = \theta_r^{t,x} + \sigma\nabla h(r, X_r^{t,x})$ و $U_s = \lambda_r^{t,x} + (\partial_s + L)h(s, X_s^{t,x})$ و $A_s = A_s^{t,x}$ است.

در این بخش، وجود و یکتایی را برای معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ اثبات می‌کنیم و تفسیر احتمالي جواب‌ها به شکل معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده است. ایده اصلي ما به کارگيري وجود و یکتایی براي جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده است، به منظور انجام این برنامه، باید از نامساوی‌های زیر استفاده کنیم، [۴۲، ۴۴، ۵۴]. دو ثابت $0 < c < C < \infty$ وجود دارد، به طوری که تحت فرضیات معادله (۲۶.۳) برای هر $0 \le t \le s \le T$ و برای هر $\phi \ge 0$ اندازه‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned} c\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \phi(s,x)\rho(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \quad &\le \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{E}\phi(s, X_s^{t,x})\rho(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\le C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \phi(s,x)\rho(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{۳۲.۳}$$

قضیه ۱.۳.۳. جواب یکتا (u,α) برای معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ وجود دارد. این جواب که مربوط به جواب $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, \alpha_s^{t,x})_{t\le s\le T}$ از معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q^{t,x}(g,f,h,q)$ است، توسط

$$Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x}), \qquad Z_s^{t,x} = \sigma^*\nabla u(s, X_s^{t,x}), \qquad \alpha_s^{t,x} = \alpha(s, X_s^{t,x})$$

بدست می‌آید.

حال به اثبات قضیه ۱.۳.۳ می‌پردازیم.

برهان. برای هر $(t,x)\in[\circ,T]\times\mathbb{R}^N$ جواب $(Y_s^{t,x},Z_s^{t,x},\alpha_s^{t,x})_{t\leq s\leq T}$ را از معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q(g(X_T^{t,x}),f_{t,x},S_{t,x})$ در نظر می‌گیریم. ابتدا اثبات می‌کنیم که توابع اندازه‌پذیر u,v,α موجودند به گونه‌ای که :

$$Y_s^{t,x}=u(s,X_s^{t,x}),\qquad Z_s^{t,x}=v(s,X_s^{t,x}),\qquad \alpha_s^{t,x}=\alpha(s,X_s^{t,x})\mathrm{d}s\times\rho(x)\mathrm{d}x\times\mathrm{d}p$$

که تقریباً همه جا برقرار است.

اثبات مربوط به Y,Z یک کاربرد مستقیم معادله نتیجه نهایی محسوب می‌شود. از روش تقریب یکسان به عنوان اثبات قضیه ۱.۲.۳ استفاده می‌کنیم. توابع زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$f_n(s,w,y,z)=f(s,X_s^{t,x},y,z)-\phi_n(y-S_s^{t,x})\theta(s,X_s^{t,x}))^-$$

با $\theta(t,x)=(f(t,x,h(t,x),\sigma\nabla h(t,x))+(\partial_t+L)h(t,x))^-$ و $(Y_{n,s}^{t,x},Z_{n,s}^{t,x})_{t\leq s\leq T}$ تعریف می‌کنیم، که جواب از معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو استاندارد $\mathrm{E}q(g(X_T^{t,x}),f_n)$ باشد. می‌دانیم که برای هر x معادله (۳۳.۳) به شکل زیر است:

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y_{n,s}^{t,x}-Y_s^{t,x}|^{۲}+\mathrm{E}\int_t^T|Z_{n,s}^{t,x}-Z_s^{t,x}|^{۲}\mathrm{d}s\to\circ \qquad (۳۳.۳)$$

همچنین می‌دانیم؛

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y_{n,s}^{t,x}|^{۲}+\mathrm{E}\int_t^T|Z_{n,s}^{t,x}|^{۲}\mathrm{d}s\leq C\mathrm{E}|g(X_T^{t,x})|^{۲}$$

با استفاده از نامساوی دوم در (۳۲.۳) بدست می‌آوریم:

$$\int\rho(x)\mathrm{E}|g(X_T^{t,x})|^{۲}\mathrm{d}x\leq C\int\rho(x)|g(x)|^{۲}\mathrm{d}x<\infty$$

و بنابراین با استفاده از معادله (۱۳.۳) و (۳۳.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\sup|Y_{n,s}^{t,x}|^{۲}+\mathrm{E}\int_t^T|Z_{n,s}^{t,x}|^{۲}\mathrm{d}s\leq C\mathrm{E}|g(X_T^{t,x})|^{۲}\\
&\Longrightarrow\rho(x)\mathrm{E}\sup|Y_{n,s}^{t,x}|^{۲}+\rho(x)\mathrm{E}\int_t^T|Z_{n,s}^{t,x}|^{۲}\mathrm{d}s\leq\rho(x)C\mathrm{E}|g(X_T^{t,x})|^{۲}\\
&\Longrightarrow\int\rho(x)\mathrm{E}\sup|Y_{n,s}^{t,x}|^{۲}\mathrm{d}x+\int\rho(x)\mathrm{E}\int_t^T|Z_{n,s}^{t,x}|^{۲}\mathrm{d}x\leq\int\rho(x)C\mathrm{E}|g(X_T^{t,x})|^{۲}\mathrm{d}x\\
&\leq C\int\rho(x)|g(x)|^{۲}\mathrm{d}x\leq C|g(x)|^{۲}_{max}\int\rho(x)\mathrm{d}x<\infty \qquad (۱)
\end{aligned}$$

با توجه به معادله (۳.۳۳) داریم:

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y^{t,x}_{n,s}-Y^{t,x}_{s}|^{۲}+\mathrm{E}\int_{t}^{T}|Z^{t,x}_{n,s}-Z^{t,x}_{s}|^{۲}\mathrm{d}s=\xi\to ۰$$

$$\rho(x)\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y^{t,x}_{n,s}-Y^{t,x}_{s}|^{۲}+\rho(x)\mathrm{E}\int_{t}^{T}|Z^{t,x}_{n,s}-Z^{t,x}_{s}|^{۲}\mathrm{d}s=\rho(x)\xi$$

$$\int\rho(x)\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y^{t,x}_{n,s}-Y^{t,x}_{s}|^{۲}\mathrm{d}x+\int\rho(x)\mathrm{E}\int_{t}^{T}|Z^{t,x}_{n,s}-Z^{t,x}_{s}|^{۲}\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\int\rho(x)\xi\mathrm{d}x$$

$$=\xi_{max}\int\rho(x)\mathrm{d}x \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه (۲)، (۱) وقتی که ξ به صفر میل می‌کند، آنگاه $\xi_{max}\int\rho(x)\mathrm{d}x$ به صفر میل خواهد کرد. لذا

$$\int\rho(x)\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y^{t,x}_{n,s}-Y^{t,x}_{s}|^{۲}\mathrm{d}x+\int\rho(x)\mathrm{E}\int_{t}^{T}|Z^{t,x}_{n,s}-Z^{t,x}_{s}|^{۲}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\to ۰$$

$u_n(t,x)=Y^{t,x}_{n,t}$ نشان داده می‌شود. می‌دانیم که $Y^{t,x}_{n,s}=u_n(s,X^{t,x}_s), u_n\in H^{۱}_{\rho}$ و $Z^{t,x}_{n,s}=v_n(s,X^{t,x}_s)$ است که درآن $v_n=\sigma^*\nabla u_n$ می‌باشد [۴۲].

با استفاده از هم ازری نرم‌ها داریم:

$$\int\rho(x)|(u_m-u_n)(t,x)|^{۲}\mathrm{d}x+\int_{t}^{T}\int\rho(x)|(v_m-v_n)(t,x)|^{۲}\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$\leq C\int\rho(x)\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq T}|Y^{t,x}_{m,s}-Y^{t,x}_{n,s}|^{۲}\mathrm{d}x+C\int\rho(x)\mathrm{E}\int_{t}^{T}|Z^{t,x}_{m,s}-Z^{t,x}_{n,s}|^{۲}\mathrm{d}s\to ۰$$

بنابراین $u=\lim_n u_n$ و $v=\lim_n v_n$ را تعریف می‌کنیم، حد آن‌ها در $L^{۲}(\rho(x)\mathrm{d}x)$ است. همچنین $u(t,x)=Y^{t,x}_t\geq S^{t,x}_t=(h+q)(t,x)$ را داریم.

ضمناً با هم ازری نرم‌ها خواهیم داشت:

$$\int\rho(x)\mathrm{E}|Y^{t,x}_s-u(s,X^{t,x}_s)|^{۲}\mathrm{d}x$$
$$\leq ۲\int\rho\mathrm{E}|Y^{t,x}_s-Y^{t,x}_{n,s}|^{۲}\mathrm{d}x+۲\int\rho\mathrm{E}|u_n(s,X^{t,x}_s)-u(s,X^{t,x}_s)|^{۲}\mathrm{d}x$$
$$\leq ۲\int\rho\mathrm{E}|Y^{t,x}_s-Y^{t,x}_{n,s}|^{۲}\mathrm{d}x+C\int\rho\mathrm{E}|u_n(s,x)-u(s,x)|^{۲}\mathrm{d}x\to ۰$$

به گونه‌ای که تقریباً همه جا $Y^{t,x}_s=u(s,X^{t,x}_s)\mathrm{d}x\times\mathrm{d}p$ برقرار است. به همین روش، می‌توان اثبات کرد که تقریباً همه جا $Z^{t,x}_s=v(s,X^{t,x}_s), \mathrm{d}s\times\rho(x)\mathrm{d}x\times\mathrm{d}p$ است.

با استدلال‌های مشابه توابع $u_n\to u$ و $\sigma\nabla_{u_n}\to v$ را می‌توان نشان داد، لذا $u\in H^{۱}_{\rho}$ و $\sigma\nabla u_n=v$ است. (برای جزئیات بیشتر به [۴۲] مراجعه کنید.)

حال α را می‌سازیم. اگر $\alpha_{n,s}^{t,x} = \phi_n(Y_{n,s}^{t,x} - S_{n,s}^{t,x})$ باشد. به واسطه‌ی ملاحضه‌ی ۲.۳.۳ پس از اثبات قضیه ۱.۲.۳ ، می‌دانیم که برای هر ثابت x، $\alpha_s^{t,x} = \lim_n \alpha_{n,s}^{t,x}$ و حد ضعیفی در $L^2(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}p)$ وجود دارد، [۴۷، ۴۸]. که ممکن است ترکیب محدب $\beta_{n,s}^{t,x} = \sum_1^{k_n} \lambda_k^n \alpha_{k,s}^{t,x}$ ایجاد شود، به گونه‌ای که $\alpha_s^{t,x} = \lim_n \beta_{n,s}^{t,x}$ از یک حد قوی در $L^2(\mathrm{d}s \times \mathrm{d}p)$ آغاز می‌شود.

از طرف دیگر $\alpha_{n,s}^{t,x} = \phi_n((u_n - (q+h))(s, X_s^{t,x})$ را داریم. به طوری که $\alpha_{n,s}^{t,x} = \alpha_n(s, X_s^{t,x})$ با $\alpha_n(t,x) = \alpha_{n,t}^{t,x}$ را خواهیم داشت.

نتیجه می‌شود که $\beta_{n,s}^{t,x} = \beta_n(s, X_s^{t,x})$ با $\beta_n = \sum_1^{k_n} \lambda_k^n \alpha_n^k = \beta_{n,s}^{t,x}$ است. برای بدست آوردن نامساوی زیر از هم‌ارزی نرم‌ها استفاده می‌کنیم؛

$$\int_0^T \int |(\beta_n - \beta_m)(s,x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x \leq C\mathrm{E} \int_0^T \int |(\beta_n - \beta_m)(s, X_s^{t,x})|^2 \rho(x)\mathrm{d}x.$$

از آنجایی که $(\beta_{n,s}^{t,x})_n$ یک دنباله کوشی در $L^2(\mathrm{d}s \times \rho(x)\mathrm{d}x \times \mathrm{d}p)$ است. نتیجه می‌شود که $(\beta_n(s,x))_n$ نیز تقریباً همه جا دنباله کوشی در $L^2(\mathrm{d}s \times \rho(x)\mathrm{d}x \times \mathrm{d}p)$ است و بنابراین می‌توانیم $\alpha = \lim_n \beta_n$ را تعریف کنیم. استدلال مشابه همانند آنچه در بالا عنوان شد حاکی از این است که تقریباً همه جا $\alpha_s^{t,x} = \alpha(s, X_s^{t,x})\mathrm{d}x \times \mathrm{d}p$ است.

بنابراین می‌دانیم که $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{t \leq s \leq T}$ به طور کلی جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو استاندارد می‌باشد؛

$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T \bar{f}(r, X_T^{t,x})\mathrm{d}r - \int_s^T (Z_T^{t,x}, \mathrm{d}B_r).$$

با $\bar{f}(r,x) = F(r,x,\alpha(r,x),u(r,x),v(r,x))$. به ویژه بالي، ماتوزي اثبات کرده‌اند که $u \in H_\rho^1$ ، $v = \sigma^* \nabla u$ و u جواب معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ است. $\square$

در این بخش که مسئله مانع توسعه‌اي از اصل ماکزیمم کلاسیك می‌باشد، را مورد بررسی قرار مي‌دهيم. دو تابع $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ و $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ را در نظر مي‌گيريم و جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با u^F به صورت زیر نمایش مي‌دهيم:

$$(\partial_t + L)u^f + f(t,x,u^f,\sigma\nabla u^f) = 0, \quad u^f(T,x) = g(x)$$

اصل ماکزیمم کلاسیک تحت تاثیر فرضیه‌ای مناسب براي هر $h \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$، وجود دارد، اگر

$$g(x) \geq h(T,x), \quad (\partial_t + L)h + f(t,x,h,\sigma\nabla h) \geq 0 \to u^f \geq h. \tag{۳۴.۳}$$

برقرار باشد. به ویژه با استفاده از قضیه مقایسه، این نشان می‌دهد که برای هر $F \geq f$، $u^F \geq u^f \geq h$ عنوان می‌شود، بنابراین نامساوی (۳۴.۳) را دوباره به صورت زیر بیان مي‌كنيم:

$$g(x) \geq h(T,x) \quad , \quad (\partial_t + L)h + f(t,x,h,\sigma\nabla h) \geq 0 \to u^F \geq h, \forall F \geq f$$

حال دوباره به مسئله مانع برمي‌گرديم و $\alpha_{f,h}$ را به صورت تابعي نشان مي‌دهيم كه در جواب معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h)$ مشاهده مي‌شود. پس محدوديت $(\partial_t+L)h+f(t,x,h,\sigma\nabla h)\geq 0$ را داريم و به صورت زير بيان كنيم:

$$g(x)\geq h(T,x)\rightarrow u^F\geq h$$
$$\forall F(t,x,y,z)\geq f(t,x,y,z)+\alpha_{f,h}(x)1_{(y=h(t,x))}((\partial_t+L)h+f(t,x,h,\sigma\nabla h))^-$$

به منظور اثبات آن خواهيم داشت:

$$\tilde{f}(t,x,y,z)=f(t,x,y,z)+\alpha_{f,h}(x)1_{(y=h(t,x))}((\partial_t+L)h+f(t,x,h,\sigma\nabla h))^-$$

و توجه داشته باشيد كه طبق قضيه ۱.۳.۳ داريم $\tilde{u}\geq h$ ، كه $\tilde{u}$ جواب معادله $\mathrm{PDE}(g,\tilde{f},h,0)$ است. با استفاده از قضيه مقايسه، $u^F\geq\tilde{u}\geq h$ نتيجه مي‌شود. بنابراين نتيجه زير را بدست مي‌آوريم.

نتيجه ۱.۳.۳. (اصل ماكزيمم): فرض كنيد كه f در معادله (۲۶.۳) صدق مي‌كند، آنگاه براي هر $h\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ ، تابع $\alpha_{f,h}=\alpha_{f,h}(x)\in[0,1]$ وجود دارد، به گونه‌اي كه:

$$g(x)\geq h(T,x)\rightarrow u^F\geq h$$
$$\forall F(t,x,y,z)\geq f(t,x,y,z)+\alpha_{f,h}(x)1_{(y=h(t,x))}((\partial_t+L)h+f(t,x,h,\sigma\nabla h))^-$$

.

ملاحظه ۳.۳.۳. طبيعي است فكر كنيم كه تابع $\alpha_{f,h}$ توسط مسأله مانع درست شده است؛ به اين منظور است كه وزن مينيمال براي $1_{(y=h(t,x))}((\partial_t+L)h+f(t,x,h,\sigma\nabla h))^-$ وجود دارد، كه امكان بدست آوردن نامساوي بالا را براي هر F را فراهم مي‌كند. اما هنوز مشخص نيست كه چگونه آن را مي‌توانيم اثبات كنيم.

۴.۳ مانع كلي

هدف اصلي اين بخش، اين است كه نتايج ارائه شده در بالا با توجه به مانع h كه منظم نيست را به طور كلي تعميم دهد. فرض بر اين است كه h يك تابع پيوسته است.
در نتيجه، دنباله $h_n\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^N), n\in N$ وجود دارد، به گونه‌اي كه تقريباً همه جا $h_n(t,x)\rightarrow h(t,x), \mathrm{d}t\times\mathrm{d}x, |h_n(t,x)|\leq C(1+|x|)^\beta$ است و براي هر $t\in[0,T]$ داريم:

$$\mathrm{E}\sup|(h_m-h_n)(s,X_s^{t,x})|^2\rightarrow 0 \quad \text{a.s} \quad n,m\rightarrow\infty, \mathrm{d}x, a.s \tag{۳۵.۳}$$

ملاحظه ۱.۴.۳. در ادامه تنها چيزي كه بايد از آن استفاده كنيم، معادله (۳۵.۳) است كه در واقع حتي در صورتي كه h پيوسته نباشد نيز صحيح است. (به عنوان مثال اگر h در فرضيه (H_1)

به صورت تابع x باشد.) به منظور ساده کردن عبارت، این نوع تعمیم را در نظر می‌گیریم. این موارد در [۴۱] ارائه شده است.

از آنجایی که $\alpha(f+(\partial_t+L)h)^-$ هیچ مفهوم کاملی ندارد، باید آن را با يك اندازه جابجا کنیم. به طور دقیق‌تر به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی توجه بیشتری داریم؛

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PDE}(g,f,h,q)\\
&\int_t^T\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_s\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_{\mathbb{R}^N}(g(x)\varphi(T,x)-u(t,x)\varphi(t,x))\mathrm{d}x\\
&\qquad+\int_t^T\int_{\mathbb{R}^N}((\sigma^*\nabla u)(\sigma^*\nabla\varphi)+u\nabla(\tilde{b}\varphi))\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\qquad=\int_t^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi f(s,x,u,\sigma^*\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_t^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(t,x)۱_{(u=h+q)}\mathrm{d}\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s)\\
&\forall\varphi\in C_c^{۱,۱}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}),\circ\le t\le T.
\end{aligned}$$

جواب معادله بالا يك زوج مرتب (u,μ) است که در معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ با $u\in H_\rho^۱$ صدق می‌کند. به گونه‌ای که $u\ge h+q, \mathrm{d}s\times\mathrm{d}x$ تقریباً همه جا برقرار است و μ يك اندازه مثبت است، به گونه‌ای که $\int_\circ^T\int\rho(x)\mathrm{d}\mu(t,x)<\infty$ است.

ملاحظه ۲.۴.۳. همچنین معادله (۱.۳) ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$(\partial_t+L)u+f(t,x,u,\sigma^*\nabla u)=-۱_{\{u=h+q\}}\mu,\quad u\ge h+q,\quad u_T=g$$

معادله به مفهوم توزیع در نظر گرفته شده است. چون μ یک اندازه مثبت است، می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned}
(\partial_t+L)u+f(t,x,u,\sigma^*\nabla u)&\le\circ,\quad u\ge h+q,\quad u_T=g,\\
(\partial_t+L)u+f(t,x,u,\sigma^*\nabla u)&=\circ\quad on\quad u>h+q.
\end{aligned}$$

که دقیقاً فرمول با مسئله مانع توسط بنسوزان و لیون در [۴۵] ارائه شده است. تعریف ما شامل پیش نیازهاي منظم تري است. در نهایت $(\partial_t+L)u+f(t,x,u,\sigma^*\nabla u)$ اندازه‌پذیر است. چنین خصوصیاتي در [۴۵] نیز بحث شده است.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده تطابق دارد. اما در این مورد باید فرآیند افزایشی K را در نظر بگیریم که براي رسیدن به $Y\ge S$ به کار گرفته شده است. (برای جزئیات بیشتر به [۵۰] مراجعه کنید.)

$$\mathrm{Eq}^{t,x}(g,f,h,q)\quad Y_s^{t,x}=g(X_T^{t,x})+\int f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\mathrm{d}r+K_T^{t,x}-K_s^{t,x}-\int_s^T(Z_r^{t,x},\mathrm{d}B_r).$$

جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده سه گانه $(Y_s^{t,x},Z_s^{t,x},K_s^{t,x})_{t\le s\le T},(t,x)\in[\circ,T]\times\mathbb{R}^n,$ است. به گونه‌ای که؛

.۱

$$(t, s, x, w) \to (Y_s^{t,x}(w), Z_s^{t,x}(w), K_s^{t,x}(w)) \quad (۳۶.۳)$$

اندازه‌پذیر است و برای هر ثابت t, x، $(s, w) \to (Y_s^{t,x}(w), Z_s^{t,x}(w), K_s^{t,x}(w))$ یک فرآیند پیش روند قابل اندازه‌گیری محسوب می‌شود.

.۲

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)(\mathrm{E}|X_T^{t,x}|^۲ + \int_t^T (\mathrm{E}|Y_s^{t,x}|^۲ + \mathrm{E}|Z_s^{t,x}|^۲)\mathrm{d}s)\mathrm{d}x < \infty. \quad (۳۷.۳)$$

تقریباً برای هر $x \in \mathbb{R}^N$ داریم:

۳. $s \to K_t^{t,x}$ یک فرآیند پیوسته و غیر کاهشی است و $K_s^{t,x} = ۰,$

.۴

$$Y_s^{t,x} \geq S_s^{t,x}, \qquad \forall t \leq s \leq T, \mathrm{dP} \quad (۳۸.۳)$$

تقریباً همه جا برقرار است، که در اینجا $S_s^{t,x} = (h+q)(s, X_s^{t,x}),$

.۵

$$\int_t^T (Y_s^{t,x} - S_s^{t,x})\mathrm{d}K_s^{t,x} = ۰, \mathrm{dP}a.s. \forall t \leq T \quad (۳۹.۳)$$

۶. جواب سه گانه $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, K_s^{t,x})_{t \leq s \leq T}$ برای هر $t \leq T$ در معادله $\mathrm{E}q^{t,x}(g, f, h, q)$ صدق می‌کند.

ملاحظه ۳.۴.۳. برای هر (t, x) معادله $\mathrm{E}q^{t,x}(g, f, h, q)$ یک معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده با مانع $S_s^{t,x}$ است. بنابراین اگر $h + q$ یک تابع پیوسته باشد، چیزی که در اینجا متفاوت است، این است که $s \to q(s, X_s^{t,x})$ می‌تواند پرش‌های مثبت داشته باشد، بنابراین $s \to S_s^{t,x}$ به طور کلی پیوسته نیست. (برای جزئیات بیشتر به [۵۰] مراجعه کنید.)

به نکات بیشتری نیاز داریم. کاملاً مشخص است که می‌توان نسخه‌ای از جریان تصادفی $x \to X_s^{t,x}$ را انتخاب کرد که با توجه به مشتق x و معکوس آن مشتق‌پذیر است. به وسیله $X_s^{t,x}$، معکوس $x \to X_s^{t,x}$ را نشان می‌دهیم و همچنین با توجه به $J(X_s^{t,x})$ دترمینال ماتریس ژاکوبین $\widehat{X}_s^{t,x}$ را نشان می‌دهیم.

نتایج اصلی در این بخش به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱.۴.۳. فرض می‌کنیم که رابطه (۲۶.۳) برقرا باشد ولی به جای رابطه (۲۷.۳) فرض می‌کنیم که h پیوسته است. همچنین فرض می‌کنیم که $\rho(x) = (۱ + |x|)^{-p}$ با $p \geq \beta + ۲$.

۱. برای هر (t,x) یک جواب یکتا، $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, K_s^{t,x})_{t\le s\le T}$ از معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منکعس شده $\mathrm{E}q^{t,x}(g,f,h,q)$ وجود دارد.

۲. جواب (u,μ) مربوط به معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ وجود دارد، به گونه‌ای که:

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} &= u(s, X_s^{t,x}), Z_s^{t,x} \\ &= \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) \end{aligned} \tag{۳.۴۰آ}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \int_t^T \phi(s, \widehat{X}_s^{t,x}) J(\widehat{X} s^{t,x}) \psi(s,x) \mathbb{1}_{\{u=h+q\}}(s,x) \mathrm{d}\mu(s,x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_t^T \phi(s,x) \psi(s, X_s^{t,x}) \mathrm{d}K_s^{t,x} \mathrm{d}x, \mathrm{Pa.s.} \end{aligned} \tag{۳.۴۰ب}$$

برای هر تابع اندازه‌پذیر کراندار ومثبت ψ و ϕ وجود دارد.

۳. حال $\bar{u}, \bar{\mu}$ را به عنوان جواب دیگری از معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ در نظر می‌گیریم، به گونه‌ای که $\bar{\mu}$ در ویژگی معادله (۳.۴۰ب) صدق می‌کند که در آن فرایند معین $\bar{K}$ جایگزین K است. فرض بر این است که $\bar{K}$ در معادله‌های (۳)، (۳۷.۳)، (۳۶.۳) صدق می‌کند، آنگاه $\bar{u} = u, \bar{\mu} = \mu$ است.

ملاحظه ۴.۴.۳. معادله (۳.۴۰آ)، رابطه استاندارد بین جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و جواب معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو را نمایش می‌دهد، اما معادله (۳.۴۰ب) جدید به نظر می‌رسد.

حال به اثبات قضیه ۱.۴.۳ می‌پردازیم.

برهان. وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q^{t,x}(g,f,h,q)$ نتیجه قضیه (۱.۳.۳) است.

برای ساخت جواب معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ از تقریب استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $h_n \in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^N), n\in N$ دنباله ای از توابع ارائه شده در معادله (۳۵.۳) باشد. $(Y_{n,s}^{t,x}, Z_{n,s}^{t,x}, \alpha_{n,s}^{t,x})_{t\le s\le T}$، جواب معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده $\mathrm{E}q^{t,x}(g,f,h_n,q)$ نیز در نظر گرفته می‌شود و (u_n,α_n) جواب معادله $\mathrm{PDE}(f,g,h_n,q)$ با مفهوم و معنی ارائه شده در بخش قبلی در نظر گرفته شده است، می‌دانیم که؛

$$Y_s^{t,x} = u_n(s, X_s^{t,x}), \quad Z_s^{t,x} = \sigma^* \nabla u_n(s, X_s^{t,x}), \quad \alpha_{n,s}^{t,x} = \alpha_n(s, X_s^{t,x})$$

حال نشان می‌دهیم که:

$$\begin{aligned} \gamma_n(t,x) &= \mathbb{1}_{u_n = h_n + q_n}(t,x) \alpha_n(t,x) (f(t,x,u_n(t,x), \sigma^* \nabla u_n(t,x)) + (\partial_t + L) h_n(t,x))^- \\ K_{n,s}^{t,x} &= \int_t^s \gamma_n(r, X_r^{t,x}) \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

بنابراین $(Y^{t,x}_{n,s}, Z^{t,x}_{n,s}, K^{t,x}_{n,s})$ در معادله $\mathrm{E}q^{t,x}(g,f,h_n,q)$ صدق مي‌کنند. طبق معادله (۱۷.۳) مي‌دانیم که؛

$$\mathrm{E}\sup_{t\le s\le T}|K^{t,x}_{n,s}-K^{t,x}_{m,s}|^۲+\mathrm{E}\sup_{t\le s\le T}|Y^{t,x}_{n,s}-Y^{t,x}_{m,s}|^۲+\mathrm{E}\int_t^T|Z^{t,x}_{n,s}-Z^{t,x}_{m,s}|^۲\mathrm{d}s$$
$$\le C\left(\mathrm{E}\int_t^T|S^{t,x}_{n,s}-S^{t,x}_{m,s}|\mathrm{d}(K^{t,x}_{n,s}+K^{t,x}_{m,s})\right)^{\frac{۱}{۲}}$$
$$\le C\left(\mathrm{E}\sup_{t\le s\le T}|S^{t,x}_{n,s}-S^{t,x}_{m,s}|^۲\right)^{\frac{۱}{۴}}\times\left(\mathrm{E}\sup_{t\le s\le T}|K^{t,x}_{n,s}+K^{t,x}_{m,s}|^۲\right)^{\frac{۱}{۴}} \quad (۴۱.۳)$$

با استفاده از معادله (۱۸.۳) روي h_n+q ، داریم:

$$\mathrm{E}\sup|K_s|^۲+\mathrm{E}\sup|Y_s|^۲+\int_۰^T\mathrm{E}|Z_s|^۲\mathrm{d}s\le C\mathrm{E}(|\xi|^۲+\sup|S_s|^۲)$$
$$\mathrm{E}\sup|K_s|^۲\le\mathrm{E}(\sup|Y_s|^۲-\int_۰^T\mathrm{E}|Z_s|^۲\mathrm{d}s+C|\xi|^۲+C\sup|S_s|^۲)$$
$$\mathrm{E}\sup|K_s|^۲\le C\mathrm{E}\sup|S_s|^۲=\mathrm{E}\sup|Y_s|^۲-\mathrm{E}\int_۰^T\mathrm{E}|Z_s|^۲\mathrm{d}s+C\mathrm{E}|\xi|$$
$$h_n+q:$$
$$\mathrm{E}|K^{t,x}_{n,s}|^۲\le C\mathrm{E}|g(X^{t,x}_T)|^۲+\sup|S^{t,n}_s|^۲$$
$$\le C(۱+\mathrm{E}|g(X^{t,x}_T)|^۲+\sup|X^{t,x}_s|^{۲\beta})\le C(۱+\mathrm{E}|g(X^{t,x}_T)|^۲)+|x|^{۲\beta}$$

به ویژه، با استفاده از هم‌ارزی نرم‌های معادله (۳۲.۳) و این حقیقت که $g\in L^۲_\rho$ است معادله زیر را بدست می‌آوریم:

$$\sup_n\mathrm{E}|K^{t,x}_{n,T}|^۲\le C(۱+|x|^{۲\beta}) \quad (۴۲.۳)$$

و نیز به وسیله معادله (۳۵.۳) داریم $\lim_n\mathrm{E}\,\underset{t\le s\le T}{sup}|S^{t,x}_{n,s}-S^{t,x}_{m,s}|^۲=۰$ و بنابراین

$$\mathrm{E}\sup_{t\le s\le T}|K^{t,x}_{n,s}-K^{t,x}_{m,s}|^۲+\mathrm{E}\sup_{t\le s\le T}|Y^{t,x}_{n,s}-Y^{t,x}_{m,s}|^۲+\mathrm{E}\int_t^T|Z^{t,x}_{n,s}-Z^{t,x}_{m,s}|^۲\mathrm{d}s\to۰ \quad (۴۳.۳)$$

بنابراین $Y=\lim_n Y_n$ و $Z=\lim_n Z_n$ و $K=\lim_n K_n$ را تعریف می‌کنیم. بررسی صدق کردن معادله (۳۶.۳) کار سختي نیست، بنابراین معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده حل می‌شود و در نهایت رابطه ((۳۶.۳) اثبات شده است. حال معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ را حل می‌کنیم. ابتدا مشاهده مي‌کنیم که طبق معادله (۴۱.۳) و (۴۲.۳) همگرایی در معادله (۴۳.۳)، به طور کلی در $L^۲_p$ در نظر گرفته مي‌شود.

چون $Z^{t,x}_{n,s} = \sigma^*\nabla u_n(s, X^{t,x}_s), Y^{t,x}_{n,s} = u_n(t,x)$ مي‌توان از هم‌ارزی نرم‌ها و معادله (۴۳.۳) براي بدست آوردن رابطه زیر استفاده کنیم؛

$$\begin{aligned}
&\int \rho(x)|u_n(t,x) - u_m(t,x)|^۲\mathrm{d}x \\
&+ \int\int_t^T \rho(x)\mathrm{E}|\sigma^*\nabla u_n(s,x) - \sigma^*\nabla u_m(s,x)|^۲\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&\leq \int \rho(x)\mathrm{E}|Y^{t,x}_{n,s} - Y^{t,x}_{m,s}|^۲\mathrm{d}x + C\mathrm{E}\int \rho(x)\int_t^T |Z^{t,x}_{n,s} - Z^{t,x}_{m,s}|^۲\mathrm{d}s\mathrm{d}x \to \circ.
\end{aligned}$$

بنابراین دنباله $(u_n)_n$ در $H^۱_p$ کوشي است و مي‌توانيم $u = \lim_n u_n$ را تعریف کنیم. به علاوه $u \in H^۱_\rho$ و بنابراین $\sigma^*\nabla u \in L^۲(\mathrm{d}t \times \rho(x)\mathrm{d}x)$ می‌باشد.

حال اندازه μ را می‌سازیم. این نکته دشواری است و در چند مرحله انجام شد است.

مرحله ۱. $\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \gamma_n(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ و $v_n = \rho\mu_n$ را نشان مي‌دهیم و اثبات مي‌کنیم که:

$$\sup_n v_n([\circ, T] \times \mathbb{R}^N) < \infty \tag{۴۴.۳}$$

با استفاده از هم ارزی نرم‌ها و معادله (۴۲.۳)، در نهایت بدست می‌آید؛

$$\begin{aligned}
v_n([\circ,T]\times\mathbb{R}^N) &= \int\int_\circ^T \rho(x)\gamma_n(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leq C\int\int_\circ^T \rho(x)\mathrm{E}\gamma_n(t, X^{\circ,x}_t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= C\int \rho(x)\mathrm{E}|K^{\circ,x}_{n,T}|\mathrm{d}x \leq C\int \rho(x)(۱+|x|)^\beta \mathrm{d}x < \infty
\end{aligned}$$

مرحله ۲. به یاد داریم که $\rho(x) = (۱+|x|)^{-p}, p \geq \beta + ۲$. پس اثبات مي‌کنیم که

$$\int \frac{۱}{\rho(x)}\left(\mathrm{E}\sup_{t\leq r\leq T}|\rho(X^{\circ,x}_r)|^۴)^{\frac{۱}{۴}}\right)\mathrm{d}x < \infty \tag{۴۵.۳}$$

از آنجایی که $|\rho(x)| \leq ۱$ بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\sup_{\circ\leq r\leq T}|\rho(X^{t,x}_r)|^۴ &\leq \mathrm{E}\left(\sup_{\circ\leq r\leq T}|\rho(X^{t,x}_r)|^۴ ۱_{\{\sup_{\circ\leq r\leq T}|X^{t,x}_r - x|\leq |x|/۲\}}\right) + P\left(\sup_{\circ\leq r\leq T}|X^{t,x}_r - x| \geq \frac{|x|}{۲}\right) \\
&=: A(x) + B(x).
\end{aligned}$$

اگر $\sup_{\circ\leq r\leq T}|X^{\circ,x}_r - x| \leq \frac{|x|}{۲}$ آنگاه $|X^{\circ,x}_r| \leq \frac{|x|}{۲}$ و بنابراین $|\rho(X^{\circ,x}_r)| \leq (۱+\frac{|x|}{۲})^{-P}$ را داریم. بدین معنا که $A(x) \leq (۱+\frac{|x|}{۲})^{-۴P}$ ، بنابراین $\int(۱+|x|)^P A(x)^{\frac{۱}{۴}}\mathrm{d}x < \infty$ است. از سوی دیگر، اگر $|x| \geq ۴\|b\|_\infty T$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$B(x) \leq P(\sup_{\circ\leq r\leq T}|\int_\circ^s \sigma(X^{\circ,x}_r)\mathrm{d}B_r| \geq \frac{|x|}{۴}) \leq Cexp(-C'|x|^۲)$$

و بنابراین داریم؛ $\int (۱+|x|)^P B(x)^{۱/۲}\mathrm{d}x < \infty$

مرحله ۳. اثبات خواهیم کرد که براي هر $\epsilon > ۰$ ، ثابت K وجود دارد به گونه‌ای که:

$$\int_۰^T \int ۱_{\{|x|\geq ۲K\}}\mathrm{d}v_n(s,x) \leq \epsilon, \forall n \in N. \tag{۴۶.۳}$$

پس می‌توانیم رابطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\int_۰^T \int ۱_{\{|x|\geq ۲K\}}\mathrm{d}v_n(s,x) &= \int_۰^T \int ۱_{\{|x|\geq ۲K\}} \left(۱_{\{|\widehat{X}_s^{۰,x}(w)-x|\}\leq K} + ۱_{\{|\widehat{X}_s^{۰,x}(w)-x|\}\geq K}\right)\mathrm{d}v_n(s,x)\\ &=: I_K^n(w) + L_K^n(w).\end{aligned}$$

این معادله براي هر w برقرار است و با گرفتن امید ریاضی از طرفین داریم:

$$\int_۰^T \int ۱_{|x|\geq ۲K}\mathrm{d}v_n = \mathrm{E}I_K^n + \mathrm{E}L_K^n.$$

با معادله (۴۴.۳)، براي $K \geq ۲||b||_\infty T$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}L_K^n &\leq \int_۰^T \int P(\sup_{t\leq r\leq T}|\widehat{X}_r^{۰,x} - x|\geq K)\mathrm{d}v_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\ &\leq C\exp(-C'K^۲)v_n([۰,T]\times\mathbb{R}^N) \leq C''\exp(-C'K^۲)\end{aligned}$$

و بنابراین $\mathrm{E}L_K^n$ براي هر K به اندازه کافي بزرگ است. از سوي ديگر، اگر $|x|\geq ۲K$ و $|\hat{X}_s^{۰,x} - x|\leq K$ ، آنگاه $|\hat{X}^{۰,x}|\geq K$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}I_K^n &\leq \mathrm{E}\int_۰^T \int ۱_{|\widehat{X}_s^{۰,x}|\geq K}\mathrm{d}v_n(s,x)\\ &= \mathrm{E}\int_۰^T \int ۱_{|\widehat{X}_s^{۰,x}|\geq K}\rho(x)\alpha_n(s,x)(f+(\partial_s+L)h_n)-(s,x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\end{aligned}$$

که با تغییر متغیر $v = \hat{X}_s^{۰,x}$ ، تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\int_۰^T \int ۱_{\{|y|\geq K\}}\rho(X_s^{۰,y})J(\widehat{X}_s^{۰,y})\alpha_n(s,X_s^{۰,y})(f+(\partial_y+L)h_n)-(s,X_s^{۰,y})\mathrm{d}s\mathrm{d}y\\ &\leq \mathrm{E}\int \rho(x)\left(\rho(x)^{-۱}۱_{\{|x|\geq K\}}\sup_{t\leq r\leq T}\rho(X_r^{۰,y})J(\hat{X}_r^{۰,x})\right)K_{n,T}^{۰,x}\mathrm{d}x\\ &\leq \left(\mathrm{E}\int\left(\rho(x)^{-۱}۱_{\{|x|\geq K\}}\sup_{t\leq r\leq T}\rho(X_r^{۰,x})J(\widehat{X}_r^{۰,x})\right)^۲\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{۱/۲}\left(\mathrm{E}\int(K_{n,T}^{۰,x})^۲\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{۱/۲}\\ &\leq C\left(\mathrm{E}\int\rho(x)^{-۱}\left(۱_{\{|x|\geq K\}}\sup_{t\leq r\leq T}\rho(X_r^{۰,x})J(\widehat{X}_r^{۰,x})\right)^۲\mathrm{d}x\right)^{۱/۲}\end{aligned}$$

نامعادله آخر نتیجه معادله (۴۲.۳) است. حال دلیل کافی برای اثبات وجود دارد:

$$\int (\rho(x)^{-1}\mathrm{E}\left[\left(\sup_{\circ\leq r\leq T}\rho(X_r^{\circ,x})J(\hat{X}_r^{\circ,x})\right)^{۲}\right]\mathrm{d}x<\infty$$

توجه داشته باشید که؛

$$\mathrm{E}\left[\left(\sup_{\circ\leq r\leq T}\rho(X_r^{\circ,x})J(\widehat{X}_r^{\circ,x})\right)^{۲}\right]\leq\left(\mathrm{E}\sup_{\circ\leq r\leq T}|\rho(X_r^{\circ,x})|^{۴}\right)^{۱/۲}\left(\mathrm{E}\sup_{\circ\leq r\leq T}|J(\widehat{X}_r^{\circ,x})|^{۴}\right)^{۱/۲}$$
$$\leq C\left(\mathrm{E}\sup_{\circ\leq r\leq T}|\rho(X_r^{\circ,x})|^{۴}\right)^{۱/۲}.$$

بنابراین نتیجه معادله (۴۵.۳) بیان می‌شود.

مرحله ۴ . حالا قادر به ساخت اندازه μ هستیم. چون دنباله $c_n=v_n([\circ,T]\times\mathbb{R}^N), n\in N$ کراندار است، و مي توان به دنباله‌ای رسید که $v_n\to v$ در اینجا v اندازه مثبتي از c است. $\mu=\rho^{-۱}v$ را تعريف مي كنيم و بنابراین داریم:

$$\int_t^T\int\phi d\mu_n=\int_t^T\int\frac{\phi}{\rho}\mathrm{d}v_n\to\int_t^T\int\frac{\phi}{\rho}\mathrm{d}v=\int_t^T\int\phi\mathrm{d}\mu$$

براي هر $\phi\in C([\circ,T]\times\mathbb{R}^N)$ که با توجه به $x\in R^N$. محمل فشرده دارد در نظر گرفته می‌شود. حال حد را در معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h_n,q)$ در نظر می‌گیریم، آنگاه (u,μ) در معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ اثبات می‌شود.

حال اثبات کنیم که μ در رابطه (۳.۴۰ب) صدق می‌کند.

دو تابع پیوسته $\phi,\psi:[\circ,T]\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}_+$ را داریم که احتمال محمل فشرده در x است، و تابع پیوسته با احتمال محمل فشرده $\theta:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}_+$ معادله زیر را خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}&\int\int_t^T\phi(s,\hat{X}_s^{t,x})J(\hat{X}_s^{t,x})\psi(s,x)\theta(x)\mathrm{d}\mu(s,x)\\&=\lim_n\int\int_t^T\phi(s,\hat{X}_s^{t,x})J(\hat{X}_s^{t,x})\psi(s,x)\theta(x)\gamma_n(s,x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\&=\lim_n\int\int_t^T\phi(s,x)\psi(s,X_s^{t,x})\theta(X_s^{t,x})\gamma_n(s,X_s^{t,x})\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\&=\lim_n\int\int_t^T\phi(s,x)\psi(s,X_s^{t,x})\theta(X_s^{t,x})\mathrm{d}K_{n,s}^{t,x}\mathrm{d}x\\&=\int\int_t^T\phi(s,x)\psi(s,X_s^{t,x})\theta(X_s^{t,x})\mathrm{d}K_{n,s}^{t,x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

برای بدست آوردن معادله (۳.۴۰ب)، $\theta=\theta_R$ را تنظیم شده [۲۲] تابع شاخصی از گوئی به شعاع R در نظر گرفته و حد آن را در حالتی که $R\to\infty$ محاسبه می‌کنیم.

[۲۲] Regularization

حال اثبات می‌کنیم که $\mu = ۱_{\{u=h+q\}}$ است. با استفاده از رابطه (۳۸.۳) و (۳۹.۳)، $\mathrm{d}K_s^{t,x} = ۱_{\{u=h+q\}}(s, X_s^{t,x})\mathrm{d}K_s^{t,x}$ است. آنگاه رابطه (۳.۴۰ب) با $\psi = ۱_{\{u=h+q\}}$ ، نتیجه می‌دهد :

$$\int\int_t^T \phi(s, \hat{X}_s^{t,x})J(\hat{X}_s^{t,x})۱_{\{u=h+q\}}(s,x)\mathrm{d}\mu(s,x) = \int\int_t^T \phi(s, \hat{X}_s^{t,x})J(\hat{X}_s^{t,x})\mathrm{d}\mu(s,x)$$

لازم به ذکر است که، تقریباً همه جا $P(\mathrm{d}w)$, خانواده توابع $A(w) = \left\{(s,x) \to \phi(\hat{X}_s^{t,x}(w)) : \phi \in C_c^\infty\right\}$ یک رابطه جبري است که نقاط را مجزا می‌کند. (زیرا $\hat{X}_s^{t,x}(w) \longrightarrow x$ پوشا و یک‌به‌یک است.) با توجه به مجموعه فشرده K، $A(w)$ در $C([\circ, T]\times K)$ متراکم است. بنابراین تقریباً برای هر w در نظر گرفته می‌شود، که به دنبال آن $J(X_s^{t,x}(w))\mathrm{d}\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) = J(\hat{X}_s^{t,x}(w))۱_{\{u=h+q\}}(s,x)\mathrm{d}\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s)$ است. چون $J(\hat{X}_s^{t,x}(w)) > \circ$ تقریباً برای هر w بدست می‌آوریم،

$\mathrm{d}\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) = ۱_{\{u=h+q\}}[s,x]\mathrm{d}\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s)$ و آنگاه اثبات وجود آن کامل می‌شود.

(برای اثبات یکتایی به [۴۲] مراجعه کنید.) □

حال درباره رابطه بین مساله مانع بالا و اصل ماکزیمم بحث می‌کنیم. u^f جواب ضعیف است در مفهوم متغیر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (بدون مانع) را داریم:

$$(\partial_t + L) + f(t,x,u^f,\sigma^*\nabla u^f) = \circ, \quad u_T = g$$

گزاره ۱.۴.۳. *(اصل ماکزیمم)*

۱. حال $h \in C^{۱,۱}([\circ, T]\times\mathbb{R}^d)$ را در نظر می‌گیریم. اندازه مثبت $\mu_{f,h}$ وجود دارد به گونه‌ای که اگر $g \geq h(T,\circ)$ باشد و بنابراین داریم:

$$F(t,x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq f(t,x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}t + (f(t,x,h(t,x),\sigma^*\nabla h(t,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \mu_{f,h}(\mathrm{d}x\mathrm{d}t))^-, \forall y,z$$

آنگاه $u^F \geq h$ است.

۲. فرض بر این است که f به z بستگي ندارد و $h \in C([\circ, T]\times\mathbb{R}^d)$ باشد. اندازه مثبت $\mu_{f,h}$ وجود دارد به گونه‌ای که اگر $g \geq h(T,\circ)$ باشد و در نهایت خواهیم داشت:

$$F(t,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq f(t,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + (f(t,x,h(t,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \mu_{f,h}(\mathrm{d}x\mathrm{d}t))^-, \forall y$$

آنگاه $u^F \geq h$ است.

ملاحظه ۵.۴.۳. نتیجه رضایت بخش نیست، زیرا ما قادر به توسعه رابطه

$$f(t,x,h,\sigma^*\nabla h) + (\partial_t + L)h > \circ \Rightarrow \mu_{f,h} = \circ$$

نیستیم که براي يك h همواره درست باشد. همچنین قادر به اثبات این نکته نیستیم که اندازه $\mu_{f,h}$ که توسط مسئله مانع ایجاد می‌شود، مینیمال باشد.

حال بار دیگر به ویژگی مسئله یکتایی باز می‌گردیم. معادله (۳.۴۰ب) پیچیده است بنابراین ویژگی یکتایی تحت مفروضات ساده‌تر اثبات خواهد شد.

قضیه ۲.۴.۳. فرض می‌کنیم که (۲۶.۳)، به استثنا رابطه (۲۷.۳) ، برقرار است و به طور کلی h پیوسته است. وزن $\rho(x) = (1 + |x|^2)^p, p \geq \frac{1}{2}\beta + 1$، را در نظر می‌گیریم، همچنین فرض می‌کنیم که براي ثابت مثبت a نامساوی $\sigma\sigma^* \geq aI$. برقرار است .آنگاه معادله $\mathrm{PDE}(g, f, h, q)$ ، جواب پیوسته یکتای دارد.

حال به اثبات قضیه ۲.۴.۳ می‌پردازیم.

برهان. حال پیوستگی جواب u را بررسی می‌کنیم، که در قضیه ۱.۴.۳ ارائه شده است. ابتدا فرض کنید که $h \in C^{1,2}$ است، خواهیم داشت:

$$u(t, x) = \mathrm{E}g(X_T^{t,x}) + \int_t^T \mathrm{E}\phi(s, X_s^{t,x})\mathrm{d}s \tag{۴۷.۳}$$

که در اینجا $\phi(s, x) = F(s, x, \alpha(s, x), u(s, x), \sigma^*\nabla u(s, x))$ است. (۴۷.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u(t, x) = \int P_{T-t}(x, y)g(y) + \int_t^T \int P_{s-t}(x, y)\phi(s, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

که درآن $P_{s-t}(x, y)$ تابع چگالی $X_s^{t,x}$ است. زیرا $(t, x) \to P_{s-t}(x, y)$ پیوسته است که به دنبال آن u نیز پیوسته است.

حال فرض کنید که h فقط پیوسته است و با توجه به قانون تعمیم $h_n, n \in N$ را خواهیم داشت. براي هر $\mathbb{R} > 0$، داریم:

$$\delta_{n,\mathbb{R}} =: \sup_{|x|\leq\mathbb{R}} \sup_{t\leq T} \mathrm{E} \sup_{t\leq s\leq T} |h_n(s, X_s^{t,x}) - h(s, X_s^{t,x})|^2 \to 0$$

که از معادله (۴۱.۳) ، عبارت

$$\sup_{|x|\leq\mathbb{R}} \sup_{t\leq T} |u_n(t, x) - u(t, x)| \leq C\delta_{n,\mathbb{R}} \to 0$$

بدست می‌آید. بنابراین u پیوسته است. حال یکتایی اثبات می‌شود. فرض بر این است که یکتایی در حالت خطی وقتي که f به z، y بستگي ندارد برقرار است. حال ثابت می‌کنیم که در حالت غیر خطی نیز برقرار است. در حالت کلي جواب ساخته شده در قضیه ۱.۴.۳ برای $\mathrm{PDE}(g, f, h, q)$ رابا (u, μ) و جواب دیگر را با $(\tilde{u}, \tilde{\mu})$ نشان می‌دهیم.

$\tilde{f}(t, x) =: f(t, x, \tilde{u}(t, x), \sigma^*\nabla\tilde{u}(t, x))$ را تعریف می‌کنیم. کاملاً آشکار است که جواب $(\tilde{u}, \tilde{\mu})$ معادله خطي $\mathrm{PDE}(g, \tilde{f}, h, q)$ می‌باشد و بنابراین با توجه به ویژگی یکتا بودن برای معادلات خطي هم زمان با جواب (u, v) درقضیه ۱.۴.۳ ساخته شده است. به ویژه $\bar{\mu}$ در معادله (۳.۴۰ب) صدق می‌کند.

حال (u^2,μ^2) و (u^1,μ^1) دو جواب از معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ باشند و اگر $u=u^1-u^2$ و $\mu=\mu^1-\mu^2$ باشد، $u_t^\epsilon(x)=\epsilon^{-1}\int_0^\epsilon u(t+s,x)1_{\{t+s\leq T\}}\mathrm{d}s$ را تعریف می‌کنیم. تابع آزمایش $\phi\in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ را بررسی می‌کنیم برای هر $0\leq t\leq T$ داریم؛

$$\int_t^T[(u_s^\epsilon,\partial_s\phi_s)-e(u_s^\epsilon,\phi_s)+(b\nabla u_s^\epsilon,\phi_s)]\mathrm{d}s+\int_t^T\int_{R^N}\left[\epsilon^{-1}\int_0^\epsilon\phi(t+r,x)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\mu(s,x)=0$$

که $(\cdot,\cdot)$ حاصل ضرب اسکالر در L^2 و $e(u,v)=:(\sigma^*\nabla u,\sigma^*\nabla v)$ می‌باشد. معادله بالا را براي تابع آزمایش $u^\epsilon\rho\pi_K$ نوشته‌ایم که در اینجا رابطه π_K پیچش تنظیم شده [۲۳]
$B_K=\{x:|x|\leq K\}.(u^\epsilon\notin C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^N))$ در نظر گرفته می‌شود، اما به طورکلی $u\in H_p^1$ است. می‌توانیم u^ϵ را با چنین توابعي تقریب بزنیم. توجه داشته باشید که؛

$$\int_t^T(u_s^\epsilon,\partial_s u_s^\epsilon\rho\pi_K)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_t^T\partial_s||u_s^\epsilon\sqrt{\rho\pi_K}||_{L^2}^2\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}||u_s^\epsilon\sqrt{\rho\pi_K}||_{L^2}^2 \qquad (۴۸.۳)$$

به گونه‌ای که معادله (۴۸.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||u_s^\epsilon\sqrt{\rho\pi_K}||_{L^2}^2+\int_t^T e(u_s^\epsilon,u_s^\epsilon\rho\pi_K)\mathrm{d}s\\&=\int_t^T(b\nabla u_s^\epsilon,u_s^\epsilon\rho\pi_K)\mathrm{d}s+\int_t^T\int_{R^N}\left[\epsilon^{-1}\int_0^\epsilon u_{s+r}^\epsilon(x)\mathrm{d}r\right]\rho\pi_K(x)\mathrm{d}\mu(s,x).\end{aligned}$$

پس خواهیم داشت؛

$$e(u_s^\epsilon,u_s^\epsilon\rho\pi_K)\geq||\sqrt{\rho\pi_K}\sigma^*\nabla u_s^\epsilon||_{L^2}^2-\delta_{\epsilon,K}(s)$$

با

$$\delta_{\epsilon,K}(s)=||u_s^\epsilon(\sigma^*\nabla u_s^\epsilon)(\sigma^*\nabla(\rho\pi_K))||_{L^1}.$$

به یاد آورید که $\rho(x)=(1+|x|^2)^{-p}$ است. به گونه‌ای که $|\nabla\rho|\leq C\rho$ و به دنبال آن این نامساوی را داریم:

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon,K}(s)&\leq C||u_s^\epsilon(\sigma^*\nabla u_s^\epsilon)\rho\pi_K||_{L^1}+C||u_s^\epsilon(\sigma^*\nabla u_s^\epsilon)\rho\nabla\pi_K||_{L^1}\\&\leq\frac{1}{2}||\sqrt{\rho\pi_K}\sigma^*\nabla u_s^\epsilon||_{L^2}^2+C'||\sqrt{\rho\pi_K}u_s^\epsilon||_{L^2}^2+C||u_s^\epsilon(\sigma^*\nabla u_s^\epsilon)\rho\nabla\pi_K)||_{L_1}\end{aligned}$$

بنابراین داریم؛

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\rho\pi_K}\sigma^*\nabla u_s^\epsilon||_{L^2}^2\leq e(u_s^\epsilon,u_s^\epsilon\rho\pi_K)+C'||\sqrt{\rho\pi_K}u_s^\epsilon||_{L^2}^2+C||u_s^\epsilon(\sigma^*\nabla u_s^\epsilon)\rho\nabla\pi_K)||_{L_1}$$

[۲۳] Regularization by convolution

به علاوه براي هر $c > ۰$ خواهیم داشت:

$$|(b\nabla u_s^\epsilon, u_s^\epsilon \rho\pi_K)| \leq c||\sqrt{\rho\pi_K} b\nabla u_s^\epsilon||_{L^۲}^۲ + c^{-۱}||\sqrt{\rho\pi_K} u_s^\epsilon||_{L^۲}^۲.$$

چون $\sigma\sigma^* \geq aI$ می‌توان c را به گونه‌ای انتخاب کرد که؛

$$c\|\sqrt{\rho\pi_K} b\nabla u_s^\epsilon\|_{L^۲}^۲ \leq \frac{۱}{۲}\|\sqrt{\rho\pi_K}\sigma^*\nabla u_s^\epsilon\|_{L^۲}^۲$$

برقرار باشد. به طوری که؛

$$|(b\nabla u_s^\epsilon, u_s^\epsilon \rho\pi_K)| \leq e(u_s^\epsilon, u_s^\epsilon \rho\pi_K) + C''\|\sqrt{\rho\pi_K} b\nabla u_s^\epsilon\|_{L^۲}^۲ + \delta'_{\epsilon,K}(s)$$

که در اینجا $C'' = c^{-۱} + C''$ و $\delta'_{\epsilon,K}(s) = C\|u_s^\epsilon(\sigma^*\nabla u_s^\epsilon)\rho\nabla\pi_k\|_{L^۱}$ است.
با توجه به معادله قبلی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}\|\sqrt{\rho\pi_k}\|_{L^۲}^۲ &\leq C''\int_t^T \|\sqrt{\rho\pi_k} u_s^\epsilon\|_{L^۲}^۲ \mathrm{d}s + \int_t^T \delta'\epsilon, K(s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_t^T \int_{\mathbb{R}^N}\left[\epsilon^{-۱}\int_۰^\epsilon u_{r+\epsilon}^\epsilon(x)\mathrm{d}r\right]\rho\pi_K(x)\mathrm{d}\mu(s,x)\end{aligned}$$

در نامساوی بالا با حدگیری و میل دادن $\epsilon \to ۰$ داریم؛

$$\|\sqrt{\rho\pi_K} u_s^\epsilon\|_{L^۲}^۲ \to \|\sqrt{\rho\pi_K} u_s\|_{L^۲}^۲$$

به علاوه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_t^T \delta'_{\epsilon,K}(s)\mathrm{d}s &\leq \int_t^T \mathrm{d}s\int(|u_s^\epsilon|^۲ + |\sigma^*\nabla u_s^\epsilon|^۲\rho|\nabla\pi_k|^۲)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_t^T \mathrm{d}s\int_{B_{k+۱}^c}\epsilon^{-۱}\int_۰^\epsilon(|u_{s+r}|^۲ + |\sigma^*\nabla_{s+r}|^۲)\mathrm{d}r\rho\mathrm{d}x \\ &\leq \int_t^T \mathrm{d}s\int_{B_{k+۱}^c}(|u_s|^۲ + |\sigma^*\nabla u_s|^۲)\rho\mathrm{d}x =: \delta_K\end{aligned}$$

در نهایت چون u پیوسته است، می‌توان نوشت:

$$\int_t^T \int_{\mathbb{R}^N}\left[\epsilon^{-۱}\int_۰^\epsilon u_{r+\epsilon}^\epsilon(x)\mathrm{d}r\right]\rho\pi_K(x)\mathrm{d}\mu(s,x) \to \int_t^T \int_{\mathbb{R}^N} u_s\rho\pi_K(x)\mathrm{d}\mu(s,x)$$

چون μ^i وابسته به $\{u^i = h+q\}$ و $\rho\pi_K u\mathrm{d}\mu$ است که در آن

$$\rho\pi_K u\mathrm{d}\mu = \rho\pi_K[(h+q-u^۲)\mathrm{d}\mu^۱ + (h+q-u^۱)\mathrm{d}\mu^۲] \leq ۰$$

می‌باشد، بنابراین بدست می‌آید؛

$$\frac{۱}{۲}||u_t\sqrt{\rho\pi_K}||^۲_{L^۲}\leq C''\int_t^T||\sqrt{\rho\pi_K}u_s||^۲_{L^۲}\mathrm{d}s+\delta_K.$$

لم گرونوال به صورت $||u_t\sqrt{\rho\pi_K}||^۲_{L^۲}\leq C\delta_K$ عنوان مي‌شود. چون $u\in H^۱_\rho$ ، $\delta_K\to ۰\ as\ K\to\infty$ است، بنابراین با توجه به حد $\delta_K\to ۰$ داریم: $||u_t\sqrt{\rho}||_{L^۲}=۰$
(برای جزئیات بیشتر به [۴۲] مراجعه کنید.) □

ملاحظه ۶.۴.۳. جاي تعجب است اثبات آناليزي زماني استفاده شده كه f به z و y بستگي نداشته است. كه اين خود می‌تواند یکتایی را در موارد کلی نیز اثبات کند. اين استدلال زماني است كه بتوان ارزیابی کرد:

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-۱}\left|\int_۰^\epsilon\left[(t+s,x,u^۱_{t+s},\sigma^*\nabla u^۱_{t+s})-f(t+s,x,u^۲_{t+s},\sigma^*\nabla u^۲_{t+s})\right]\mathrm{d}s\right|\\&\leq C\epsilon^{-۱}\int_۰^\epsilon(|u^۱_{t+s}-u^۲_{t+s}|+|\sigma^*\nabla(u^۱_{t+s}-u^۲_{t+s})|)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

چون $s\to|u^۱_s-u^۲_s|$ پیوسته است، $\epsilon^{-۱}\int_۰^\epsilon|u^۱_{t+s}-u^۲_{t+s}|\mathrm{d}s\to|u^۱_t-u^۲_t|$ را داریم، بنابراین ما این عبارت را بررسی می‌کنیم. اما $s\to|\sigma^*\nabla|(u^۱_{t+s}-u^۲_{t+s})|$ پیوسته نیست، بنابراین از حد نمی‌گذرد. از سوي ديگر، $\epsilon^{-۱}\int_۰^\epsilon|\sigma^*\nabla|(u^۱_{t+s}-u^۲_{t+s})|$ با $|\epsilon^{-۱}\int_۰^t\sigma^*\nabla(u^۱_{t+s}-u^۲_{t+s})\mathrm{d}s|$ نشان داده نمي‌شود. بنابراين روش لغو کردن بر اساس انرژي عمل نمي‌کند. به نظر مي‌رسد که چهارچوب کلی‌تری در استدلال آنالیز وجود دارد، که در نهایت عنوان مي‌شود؛
$f(t,x,y,z)=f_۱(t,x,y)+f_۲(x)z$.

۵.۳ نابرابری تغییراتی

در [۴۵] ، بنسوزان و لیون با توجه به مسئله مانع که در اینجا باعث شد نابرابری تغییراتي زیر را مورد بحث قرار دادند:

$$\begin{aligned}&(\partial_t+L)u+f\leq ۰\\&((\partial_t+L)u+f)(u-h-q)=۰\\&u\geq h+q\\&u_T=g\end{aligned}\tag{۴۹.۳}$$

از آنجایی که در این مسئله جواب کلاسیک وجود ندارد، آن‌ها فرمول ضعیف زیر را ارائه مي‌کنند. جواب نابرابري تغییراتي (۴۹.۳) تابع $u\in L^۲([۰,T],H^۱_\rho)$ است به گونه‌ای که تقریباً همه جا $u\geq h+q$ است و به طوری که :

$$\int_۰^T(\partial_t\phi_t,u_t-\phi_t)\mathrm{d}t-\int_۰^TA(u_t,u_t-\phi_t)\mathrm{d}t+\int_۰^T(f_t,u_t-\phi_t)\mathrm{d}t+\frac{۱}{۲}|\phi_T-g|^۲\geq ۰\tag{۵۰.۳}$$

باشد، براي هر $\phi \in C^{1,1}$ به گونه‌ای که تقریباً همه جا $\phi \geq h+q$ است.

در اینجا $(\cdot,\cdot)$، حاصل ضرب اسکالر در $L^2(\mathrm{d}x)$ و $A(u,\phi) = (\sigma^*\nabla u)(\sigma^*\nabla\phi) + u\nabla(\tilde{b}\phi)$ است.

میگلوت و پائول وجود جواب را برای نابرابری تغییراتی بالا، ثابت کردند [۴۵].

این جواب در حالت کلی یکتا نیست اما اثبات کردند که جواب مینیمال یکتا وجود دارد، جواب u وجود دارد، به گونه‌ای که براي هر جواب دیگری مانند v داریم: $u \leq v$

رابطه بین معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ و نابرابری تغییراتی در قضیه زیر مطرح می‌شود:

قضیه ۱.۵.۳. حال (u,μ) جوابي از معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ ساخته شده در بخش قبلي است. آنگاه u، جواب معادله (۵۰.۳) می‌باشد. اگر مانع $h+q$ تابع پیوسته از (t,x) باشد و اگر $\sigma\sigma^* > cI$، آنگاه u جواب مینیمال است.

حال به اثبات قضیه ۱.۵.۳ می‌پردازیم.

برهان. به معادله زیر نیاز داریم که در پایان اثبات می‌شود؛

$$\int_0^T A(u_t,u_t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(|g|^2 - |u_0|^2) + \int_0^T (f_t,u_t)\mathrm{d}t + \int_0^T \int u(t,x)\mathrm{d}\mu(t,x) \qquad (۵۱.۳)$$

که در اینجا داریم:

$$f_t = f(t,x,u(t,x),\sigma^*\nabla u(t,x))$$

براي یک لحظه‌ای فرض مي‌کنیم که معادله (۵۱.۳) برقرار است و معادله (۵۰.۳) را اثبات می‌کنیم. برای تابع آزمایش $\phi \in C^{1,1}$ نیز داریم:

$$\int_0^T (\partial_t\phi_t,\phi_t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(|\phi_T|^2 - |\phi_0|^2) \qquad (۵۲.۳)$$

و پس با استفاده از معادله، $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\partial_t\phi_t, u_t-\phi_t)\mathrm{d}t - \int_0^T A(u_t,u_t-\phi_t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(|\phi_T|^2 - |\phi_0|^2)\\
&+ \frac{1}{2}(|g|^2 - |u_0|^2) + \int_0^T (f_t,u_t) + \int_0^T \int u(t,x)\mathrm{d}\mu(t,x)\\
&= (\phi_T,g) - (\phi_0,u_0) + \int_0^T (f_t,\phi_t)\mathrm{d}t + \int_0^T \int \phi(t,x)\mathrm{d}\mu(t,x)
\end{aligned}$$

چون

$$\frac{1}{2}(|\phi_T|^2 - |\phi_0|^2) + \frac{1}{2}(|g|^2 - |u_0|^2) - (\phi_T,g) + (\phi_0,u_0) = \frac{1}{2}|\phi_T - g|^2 - \frac{1}{2}|\phi_0 - u_0|^2$$

پس بدست می‌آوریم؛

$$\int_\circ^T (\partial_t\phi_t, u_t-\phi_t)\mathrm{d}t - \int_\circ^T A(u_t, u_t-\phi_t)\mathrm{d}t + \int_\circ^T (f_t, u_t-\phi_t)\mathrm{d}t + \frac{۱}{۲}|\phi_T - g|^۲$$
$$= \frac{۱}{۲}|\phi_\circ - u_\circ|^۲ + \int_\circ^T \int (\phi-u)(t,x)\mathrm{d}\mu(t,x).$$

به یاد آورید که μ اندازه مثبت است که روی مجموعه $\{u=h+q\}$ است، بنابراین اگر $\phi \geq h+q$ باشد، (که موردی برای توابع آزمایش می‌باشد.) عضو دوم از نامساوی بالا مثبت باشد، معادله (۵۰.۳) اثبات می‌شود.

حال معادله (۵۱.۳) را اثبات می‌کنیم. برای یک لحظه فرض می‌کنیم که $u\in C^{۱,۱}$ ، به گونه‌ای که آن را به عنوان یک تابع تست در معادله $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ در نظر می‌گیریم. آنگاه با استفاده از معادله (۵۲.۳) برای u، معادله (۵۱.۳) را بدست می‌آوریم. ولی در حالت کلی $u\notin C^{۱,۱}$، لذا باید از فرآیندی تقریبی استفاده کنیم. از نماد $\bar{\gamma}_n$ برای نمایش پیچش تنظیم شده γ_n که در اثبات قضیه ۱.۴.۳ تعریف شده است استفاده می‌کنیم و جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $(\partial_t+L)\bar{u}_n + f_n + \bar{\gamma}_n = \circ$ را با $\bar{u}_n$ نمایش می‌دهیم. آنگاه $\bar{u}_n\in C^{۱,۲}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_\circ^T A(\bar{u}_n(t), \bar{u}_n(t))\mathrm{d}t = \frac{۱}{۲}(|g|^۲ - |\bar{u}_n(\circ)|^۲) + \int_\circ^T (f_n(t)+\bar{\gamma}_n(t), \bar{u}_n(t))\mathrm{d}t$$

همان استدلال به کار رفته در قضیه ۱.۴.۳ نشان می‌دهد که $\bar{u}_n\to u$ در $H_p^۱$ وجود دارد، بنابراین از حد عبور می‌کند و برای معادله (۵۱.۳) جواب u را به دست می‌آوریم.

حال فرض کنیم که $h+q$ پیوسته باشد و $\sigma\sigma* \geq cI$ است و اگر v جواب معادله (۵۰.۳) باشد، آنگاه $v\geq u$ است. اگر u_n جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی باشد، پس

$$(\partial_t+L)u_n + f(t,x,u,\sigma^*\nabla u) + n(u_n-h-q)^- = \circ, u_n(T,x) = g(x)$$

برقرار است. در [۴۵] اثبات شده است، که اگر v جواب معادله (۵۰.۳) باشد،آنگاه $v\geq u_n$ است. بنابراین تنها چیزی که باید ثابت کنیم این است که $u_n\to u$.

اگر $Y_{n,s}^{t,x} = u_n(s, X_s^{t,x}), Z_{n,s}^{t,x} = \sigma^*\nabla u_n(s, X_s^{t,x})$ باشد. در [۴۲] اثبات شده است که $(Y_{n,s}^{t,x}, Z_{n,s}^{t,x})_{t\leq s\leq T}$ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو زیر می‌باشد؛

$$Y_{n,s}^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_{n,r}^{t,x}, Z_{n,r}^{t,x}) + n(Y_{n,r}^{t,x} - (h+q)(r, X_T^{t,x}))^-\mathrm{d}r - \int_s^T (Z_{n,r}^{t,x}, \mathrm{d}B_r)$$

و در [۵۰] برای هر ثابت (t,x) اثبات شده است که $u_n(t,x) = Y_{n,t}^{t,x}\to Y_t^{t,x} = u(t,x)$ است.(در اینجا پیوستگی مانع مورد نیاز است.) اثبات کامل شده است. □

ملاحظه ۱.۵.۳. معادله (۵۲.۳) که معادل با $\mathrm{PDE}(g,f,h,q)$ است فرمول دقیق‌تری از نابرابری تغییراتی (۵۰.۳) را نمایش می‌دهد. در واقع (۵۰.۳) فقط یک نامساوی است که امکان

جلوگیري از رويارويي با اندازه μ را فراهم مي‌کند. دشواري در ساخت μ شامل اين موضوع است که μ به عنوان حد دنباله $\mu_n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) - \phi_n(f + (\sigma_s + L)h_n) - (s, x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$ به نظر مي‌رسد. به دليل بخش منفي آن، نمي‌توان انتگرال‌گيري را انجام داد و بنابراين نمي‌توان فرمول نابرابري تغييراتي براي معادله بدست آورد. بنابراین یک راه عاقلانه برای جلوگیری از این مشکل این است که برای تضعیف برابری تا نابرابری، با استفاده از ارزیابی داده شده توسط معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو منعکس شده رابطه بین μ_n و تطابق با فرآیند افزایشی K_n این مشکل را حل می‌کنیم و اندازه μ را ایجاد می‌کنیم. این موضوع مي‌تواند به عنوان یک نتیجه منظم دیده شود. به هر حال بیان شده که مانع را به طور منظم فرض کرده‌ایم. اگر h فقط یک عضو از $L^۲$ باشد، دیگر هیچ چیز نمي‌توانيم مطرح کنيم.

مراجع

[۱] ابراهیم بیگی آ، (۱۳۹۴)، پایان‌نامه ارشد: ’’ فرایند G ـ برآونی و کاربردهای آن’’، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود،

[۲] آزاد ع، (۱۳۹۳)، پایان‌نامه ارشد: ’’سازگاری و پایداری طرح المان محدود میلستین ـ گالرکین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه خطی ’’، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود،

[۳] اسمعیل وندی آ،۱۳۹۱، پایان‌نامه ارشد: ’’ روش المان‌های محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی’’، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود،

[۴] سعیدی نژاد ع، (۱۳۸۹)، پایان‌نامه ارشد: ’’ مدل قیمت گذاری اختیار با تغییرپذیری تصادفی تحت شرط SVRH’’ ، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی تهران،

[۵] کاشان پور ر، (۱۳۹۲)’’قیمت گذاری اختیار اروپایی در مدل تلاطم تصادفی لوی با نرخ بهره تصادفی’’، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبایی تهران،

[۶] تام م.اپوستل. (۱۳۶۹) .**’’آنالیز ریاضی’’** چاپ دوم. موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

[۷] مهرآلیان س. حسین استادزاد ع. (۱۳۹۱)، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، ’’حرکت براونی و شبیه سازی فرآیندهای تصادفی با رویکردی کاربردی در ریاضیات مالی’’ ، دانشگاه سمنان.

[8] Fima C Klebaner. (2005), "**Introductin to Stochastic Calculus with Applications** " , Vol 57 world Scientific .

[9] Raf Cluckers (joint work with G. Comte and F. Loeser) (2008). " Lipschitz continuity properties". Raf Cluckers MODNET Barcelona Conference 3 - 7 November

[10] Qksendal, B. (2003). " **Stochastic differential equations**" . Springer Berlin Heidelberg, 65-84

[11] Varsei, A. ”Red Analysis- Notes” . Lecture Notes, Preprint.

[12] Wilde, I. F. (2009). ”Stochastic Analysis- Notes” . Lecture Notes, King’s Collge, London.

[13] Steven E. Shreve. (2004). ”**Stochastic Calcu I us for Finance II Continuous-Time Models**” (Springer finance series) Includes bibliographical references and index. Contents v. 2. Continuous-time models. ISBN 0-387-40101-6 (alk. paper)

[14] B. Bouchard and N.Touzi. (2004). ” Discrete-time approximation and Monte-carlo simulation of backward stochastic differential equations ”. **Stochastic Processes and their Applications**, 111(2):175-206.[7]

[15] P. Briand and Y. Hu. (2006). ” BSDEs with quadratic growth and unbounded terminal value ”. **Probability Theory and Related Fields**, 136(4):604-618.[13]

[16] P. Briand and Y. Hu. (2008). ” Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions ”. **Probability Theory and Related Fields**, 141(3-4):543-567.[14]

[17] P. Briand, J.-P. Lepeltier, and J. San Martin. (2007). ” One-dimensional backward stochastic differential equations whose coefficient is monotonic in y and non-lipschitz in z ”. Bernoulli, 1.3(1):80-91. [15]

[18] J.-F. Chassagneux. (2013). ” Linear multi-step schemes for BSDEs ”. arXiv:1306.5548v1. [17]

[19] J.-F. Chassagneux and D. Crisan. (2012).” Runge-Kutta schemes for BSDEs ”. **Forthcoming in Annals of Applied Probability**. [18]

[20] S. Cohen and R. Elliott. (2012). ” Existence uniqueness and comparison for BSDEs in general spaces ”. **Annals of Probability**, 40(5):2264-2297. [20]

[21] D. Crisan and K. Manolarakis. (2010). ” Probabilistic methods for semilinear partial differential equations ”. Applications to finance. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 44(05):1107-1133. [21]

[22] D. Crisan and K. Manolarakis. (2010). ” Second order discretization of Backward SDEs ”. arXiv:1012.5650v1, Dec. [22]

[23] N. El Karoui, C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng, and M.-C. Quenez. (1997). ”Reflected solutions of backward SDE’s and related obstacle problems for PDE’s ”. **Annals of Probability**, 25(2):702-737. [30]

[24] S. Hamadene, J.-P. Lepeltier, and A. Matoussi. (1997). ”Double barrier reflected backward SDE’s with continuous coefficient ”. In El Karoui and Mazliak, editors, Backward stochastic diffierential equations (Paris, 1995-1996), volume 364 of Pitman Re- search Notes in Mathematics Series, pages 161-175. Longman. [37]

[25] Y. Hu, P. Imkeller, and M. Muller. (2005). ” Utility maximization in incomplete markets ”. **Annals Of Applied Probability**, 15(3):1691-1712. [40]

[26] Y. Hu and Z. Qian. (2012). ”BMO martingales and positive solutions of heat equations ”. arXiv:1201.5454. [41]

[27] Y. Hu, Z. Qian, and Z. Zhang. (2012). ” Gradient estimates for porous medium and fast diffusion equations via FBSDE approach ”. 1206.1394. [42]

[28] N. Kazi-Tani, D. Possamai, and C. Zhou. (2012). ” Quadratic BSDEs with jumps and related non-linear expectations ”: a fixed-point approach. arXiv:1208.5581. [48]

[29] M. Kobylanski. (2000). ” Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth ”. **Annals of Probability**, 28(2):558-602. [50]

[30] M. Kobylanski, J.-P. Lepeltier, M.-C. Quenez, and S. (2002). ” Torres. Reflected BSDE with superlinear quadratic coefficient ” . **Probability and Mathematical Statistics**, 22(1):51-83. [51]

[31] J.-P. Lepeltier, A. Matoussi, and M. Xu. (2005). ” Reflected backward stochastic differential equations under monotonicity and general increasing growth conditions ”. **Advances in Applied Probability**, 37(1):134-159. [54]

[32] J.-P. Lepeltier and J. San Martin. (1998). ” Existence for BSDEs with superlinear-quadratic coefficient ”. **Stochastics and Stochastic Reports**, 63(3-4):227-240. [55]

[33] J.-P. Lepeltier and M. Xu. (2007). ” Reflected BSDEs with quadratic growth and unbounded terminal value ”. arXiv:0711.0619. [56]

[34] S. Peng and M. Xu. (2005). ” The smallest g-supermartingale and reected BSDEs with single and double L2 obstacles ” . **Annales de l’Institut Henri Poincare B, Probability and Statistics**, 41(3):605-630. [71]

[35] R. Tevzadze. (2008). ” Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth ”. **Stochastic Processes and their Applications**, 118(3):503-515. [77]

[36] M. Xu. (2008). " Backward stochastic differential equations with reflction and weak assumptions on the coefficients ". **Stochastic processes and their applications**, 118(6):968-980. [79]

[37] J. Zhang. (2001). " Some fine properties of backward stochastic differential equations". PhD thesis, Purdue University (USA). [81]

[38] J. Zhang. (2004). " A numerical scheme for BSDEs ". **Annals of Applied Probability**, 14(1):459-488. [82]

[39] By Samuel N. Cohen1 and Robert J. Elliott. (2012). "**Existence, Uniqueness and Comparisons for BSDES in General spaces**" The Annals of Probability 2012, Vol. 40, No. 5, 2264–2297 DOI: 10.1214/11-AOP679, arXiv:1001.0439v2 [math.PR] 12 Oct 2012

c Institute of Mathematical Statistics,

[40] J.E. Marsden. L. Sirovich. S.S. Antman. (2009). "Partial Differential Equations with Numerical Methods" Department of Mathematics and Institute for Physical Science and Technology University of Maryland College Park, MD 20742-4015 USA ssa@math.umd.edu

[41] V.Bally,M.C.Caballero,B.Fernandez: (1999), " **Reflected BSDE's , PDE's and Variational Inequalities** ", Prperint of Laboratoiro de Probabilites , Universite Paris VI, PMA-492,

[42] V.Bally, A.Matoussi: "Stochastis PDE's and Doubly Stochastic Backward Differentiable Equations ". **J.of Theoretical Probability**,...

[43] V.Bally , E.Pardoux ,L.Stoica : "BSDE's associated to semilinear PDE's with measurable cofficuents ". In Preparation.

[44] G.Barles,E.Lesigne: (1997), SDE ,BSDE and PDE . "In Bakward Stochastic Differential Equations" , N.El Karoui and L. Mazliak , editors, Pitman Research Notes in Math. Series, 364, Lonqman.

[45] A.Bensoussan,J . L. Lions: (1978), " Applications des Inequations variationelles en control stochastique ". Dunot , Paris .

[46] J. Cvitanic ,I.Karatzas: (1996), " **Backward Stochatic Differential Equations with reflection and Dynkin games** ". The Annals of Proba. Vol 24, no.4, 2024-2056 .

[47] N.Dunford , J.T .Schwarz: (1963), Linear operators I: General theory. Whily, New York.

[48] I.Ekeland ,R. Temam. (1976), ”Convex analysis and variational problems ”. North Holland, Amsterdam.

[49] N.EL Karoui , S.Peng, MC .Quenez: (1994), ” Backward stochastic differential equations in finance ”. Math. Finance.

[50] N.El Karoui, C. Kapoudjan, E. Pardoux, S. Peng, M.C. Quenez: (1997), ” Reflected solutions of Backward SDE’s, and related obstacle problems for PDE’s ”. **The Annals of Probability**, Vol. 25,No 2, 702-737.

[51] S. Hamaden, J.P.Lepeltier, A. Matoussi: (1997), Double barrier backward SDEs with continuous coeffcient. ”In Backward Stochastic Differential Equations”, N.El Karoui and L. Mazliak, editors, **Pitman Research Notes in Math**. Series, 364, Longman, 177-193.

[52] S.Hamadene, L J.P.Lepeltier: (1995), ”Backward Equations, Stochastic Control and Zero-sum Stochastic Differential Games ”. **Stoch and Stoch. Repports**, Vol 54, p. 221-231,

[53] S.Hamaden, L J.P.Lepeltier: ” Reflected Backward SDE’s, mixed control problems and game problems ” .

[54] H. Kunita: (1994), ” Stochastic flow acting on Schwartz distributions ”. **Journal of theoretical Probability**, Vol 7, 247-278.

[55] H. Kunita: (1994), ” Generalized Solutions of a Stochastic Partial differential Equation ”. **Journal of theoretical Probability**. Vol 7, 2, 279-308.

[56] N. Ikeda and S.Watanabe: (1989), ” Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes ”. North - Holland.

[57] F. Mignot, J.P. Puel: (1975), ” **Solutions maximum de certaines inequations d’esolution paraboliques et inequations quasi-variationnelles paraboliques** ”, C.R.A.S. 280, serie A, P 259.

[58] E. Pardoux, S. Penq: (1990), ” Adapted solution of a backward stochastic differential equation”. **Systems Control Letters**, 14, 55-61.

[59] E. Pardoux, S. Penq: (1992), Backward SDE’s and quasilinear PDE’s . ” In Stochastic Partial Differential Equations and their Applications ”, B.L. Rozovskii and R.B. Sowers, editors. Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 176, Springer, Berlin.

Aabstract

We discuss a class of semilinear PDE with obstacle, of the form

$$(\partial_t + L)_u + f(t, x, u, \partial^* \nabla_u) + \mu = 0 \quad u \geq h, u_T = g,$$

where h is the obstacle. The solution of such an equation (in variational sense) is a couple (u, μ) where $u \in L^2([0, T]; H^1)$ and μ is a positive Radon measure concentrated on $\{u = h\}$.

We prove that this equation has a unique solution and u is the maximal solution of the corresponding variational inequality. The probabilistic interpretation (Feynman-Kac formula) is given by means of Reflected Backward Stochastic Differential Equations. We give a new construction of solution of such equations using a maximum principle. This perimts to consider obstacles with jumps.

Key-words: Reflected Backward Stochastic Differential Equations, variational inequality, obstacles, maximal solution, Partial Differential Equations.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Math

Reflected BSDE's , PDE's and Variational Inequalities

By: Fatemeh Teymoori

Supervisor

Dr. Ali Mesforush

july 2017