دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اثبات ترکیبیاتی حدس کنسر

مهری سادات سیدابوالحسینی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

شهریور۱۳۹۵

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر و فرزند عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مهری سادات سیدابوالحسینی

شهریور ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **مهری سادات سیدابوالحسینی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **اثبات ترکیبیاتی حدس کنسر** ، تحت راهنمایی **دکتر میثم علیشاهی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهری سادات سیدابوالحسینی
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

هدف این پایان‌نامه معرفی گراف کنسر و اثبات حدس کنسر با استفاده از روش‌های مختلف توپولوژیکی و ترکیبیاتی می‌باشد.

راس‌های گراف کنسر از زیرمجموعه‌های k−تایی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ تشکیل شده‌اند و دو راس به یکدیگر متصل هستند اگر مجموعه‌های متناظر آنها اشتراک نداشته باشند. کنسر در سال ۱۹۵۵ نشان داد این گراف قابل رنگ‌آمیزی با حداکثر $n - ۲k + ۲$ رنگ است. همچنین او حدس زد که کمترین تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی این گرافها $n - ۲k + ۲$ است. ابتدا لواژ در سال ۱۹۷۸ در یک اثبات بسیار هوشمندانه و با استفاده از توپولوژی جبری حدس کنسر را ثابت کرد. بعد از اثبات لواژ اثبات‌ها و تعمیم‌های زیادی برای حدس کنسر ارائه شد. در این پایان‌نامه به بررسی بعضی از این تعمیم‌ها و اثبات‌های آنها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی:

گراف کنسر، عدد رنگی، رنگ‌آمیزی واقعی ، عدد رنگی دوری ، مثلث‌بندی، مجتمع سادکی ، برچسب‌گذاری

مقدمه

.

تعدادی از نتایج مهم در ترکیبیات، هندسه گسسته و علم نظری کامپیوتر با استفاده از کاربردهای شگفت توپولوژی جبری، ارتقا پیدا کرده‌اند. اثبات لواژ از حدس کنسر در سال ۱۹۷۸ از اولین و برجسته‌ترین مثالها در این زمینه است.
در طی دو دهه‌ی اخیر، روش‌های توپولوژیکی در ترکیبیات به دقت شرح داده شده‌است. به بیان دیگر، قسمت‌های پیشرفته‌ی توپولوژی جبری کاربردهای موفقی داشته‌اند. تعداد زیادی از نتایج اولیه می‌توانند تنها با استفاده از مفاهیم و روش‌های توپولوژیکی اولیه اثبات شوند.
در دنیای اطراف ما مسایل فراوانی وجود دارند که می‌توان توسط نموداری متشکل از مجموعه نقاط به علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند، نشان داد. چنین نمودارهایی را گراف می‌نامند.
کنسر گرافی را معرفی کرد که راس‌های آن را زیرمجموعه‌های k -تایی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و یال‌های آن متشکل از زوج‌هایی است که اشتراک آنها تهی می‌باشد. کنسر حدس زد که عدد رنگی چنین گرافی $n - ۲k + ۲$ است.
ما در فصل اول این پایان‌نامه تاریخچه‌ای کوتاه و تعاریف مقدماتی از گراف را ارایه می‌دهیم.
در فصل دوم یک اثبات ترکیبیاتی از حدس کنسر را بیان می‌کنیم.
در فصل سوم قضیه کنسر-لواژ را بیان می‌کنیم و یک اثبات توپولوژی از آن را ارایه می‌دهیم و همچنین یک تعمیم از این قضیه را می‌گوییم و چندین اثبات دیگر برای آن بیان می‌کنیم.
در فصل چهارم قضیه رنگ‌آمیزی متناوب گراف کنسر را بیان کرده و به اثبات آن می‌پردازیم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و نمادهای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

فضای توپولوژی یک جفت (X,O) است که X مجموعه زمینه و $O \subseteq ۲^X$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های باز از X است به‌طوریکه:

۱) $\emptyset \in O$و$X \in O$

۲) اشتراک تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز است و اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است.

در سال ۱۹۵۵ مارتین کنسر [۸][1] یک رنگ‌آمیزی مجاز برای گراف $KG(n,k)$ با $n - ۲k + ۲$ رنگ ارایه داد و سپس حدس زد این کمترین تعداد رنگ مورد نیاز است. در سال ۱۹۷۸ لواژ[2] [۱۰] اولین کسی بود که این حدس را با استفاده از روش توپولوژی جبری ثابت کرد. لواژ در اثباتش از قضیه‌ی بورسوک–اولام [3] استفاده کرد. اثبات حدس کنسر توسط لواژ [۱۰]باعث به وجود آمدن ارتباط بین توپولوژی جبری و ترکیبیات شده است.

بعد از آن ارایه یک اثبات مستقل از توپولوژی جبری برای حدس کنسر مورد توجه قرار گرفت. در سال ۲۰۰۰ متوسک [۱۱] اولین اثبات ترکیبیاتی از آن را ارایه داد. جانسون [4] و هولروید [5] و استال [6] [۷]عدد رنگی دوری گراف کنسر را مورد مطالعه قرار دادند و حدس زدند که عدد رنگی دوری گراف کنسر با عدد رنگی خود گراف برابر است که این حدس توسط چن [7][۲] ثابت شد. همچنین یک خانواده از

[1] Martin Kneser

[2] Lovász

[3] Borsuk-Ulam

[4] Johnson

[5] Holroyd

[6] Stahl

[7] Chen

زیرگراف‌های گراف کنسر توسط اسکرایور [8][۱۴]معرفی شد و ثابت‌شد که عدد رنگی این گراف‌ها نیز با عدد رنگی خود گراف برابر است. در این پایان‌نامه برخی از روش‌های متفاوت برای اثبات حدس کنسر و تعمیم‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. گراف: گراف G یک جفت (V, E) است که V یک مجموعه (مجموعه راس‌ها) و $E \subseteq \binom{V}{2}$ مجموعه یال‌هاست. مجموعه راس‌ها را با $V(G)$ و مجموعه یال‌ها را با $E(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. ابرگراف: یک جفت (V, G) است که V یک مجموعه (متناهی) و $E \subseteq 2^V$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های V است. E یال‌ها یا ابریال‌های گراف نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۲.۱. گراف کامل: گرافی است که تمام یال‌های ممکن را دارد، یعنی به صورت $(V, \binom{V}{2})$ است.

تعریف ۴.۲.۱. زیرگراف: گراف G را زیرگراف H می‌نامیم هرگاه
$$V(G) \subseteq V(H) \quad , \quad E(G) \subseteq E(H).$$

تعریف ۵.۲.۱. همریختی: تابع $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ را یک همریختی می‌نامیم هرگاه
$$(xy \in E(G) \longrightarrow f(x)f(y) \in E(H).)$$

تعریف ۶.۲.۱. :گشت[9]: در گراف G، دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ که جمله‌های آن بطور متناوب راس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، v_i, v_{i-1} باشد را گشتی از v_0 به v_k گویند.

تعریف ۷.۲.۱. گشت بسته: گشتی است با حداقل یک یال، که ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.

تعریف ۸.۲.۱. گذر[10]: اگر یال‌های $e_1, e_2, \cdots, e_k$ در گشت W متفاوت باشند، W را گذر می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. مسیر[11]: اگر راس‌های گشتW متفاوت باشند، W را مسیر می‌نامند.

تعریف ۱۰.۲.۱. طول مسیر: به تعداد یال‌های مسیر، طول مسیر گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. مدار[12]: گشت بسته‌ای که از هر یال یک‌بار عبور کند، مدار نامیده می‌شود.

[8] Scherijver

[9] walk

[10] trail

[11] path

[12] circuit

تعریف ۱۲.۲.۱. مولفه‌ی گراف G: افرازی از مجموعه‌ی رئوس V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \cdots, V_\omega$ وجود دارد به‌طوری‌که دو راس u و v توسط لااقل یک مسیر به یکدیگر متصل شده‌اند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_\omega]$ مولفه‌های گراف G نامیده می‌شوند. تعداد مولفه‌های G را با $o(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. گرافی که فاقد طوقه باشد و بین هر دو راس آن بیش از یک یال موجود نباشد را **گراف ساده** می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. مجموعه‌ای از راس‌ها که با راس v از گراف G مجاور باشند را **همسایگی** راس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دو راس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد.

تعریف ۱۶.۲.۱. زیرمجموعه S از راس‌های گراف G را **مجموعه مستقل** می‌نامیم، هرگاه هیچ دو راسی در مجموعه S مجاور نباشند، یعنی برای هر راس $v \in S$ داشته باشیم $|N(v) \cap S| = 0$.

تعریف ۱۷.۲.۱. رنگ‌آمیزی گراف: هر تابع $f : V(G) \longrightarrow A$ که V(G) مجموعه‌ی راس‌های گراف و $A \neq \varnothing$ مجموعه‌ی رنگهاست را یک رنگ‌آمیزی از گراف G می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. رنگ‌آمیزی مجاز: اگر $f : V(G) \longrightarrow A$ یک رنگ‌آمیزی از گراف G باشد آنگاه f را یک رنگ‌آمیزی مجاز گوییم هرگاه

$$xy \in E(G) \longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

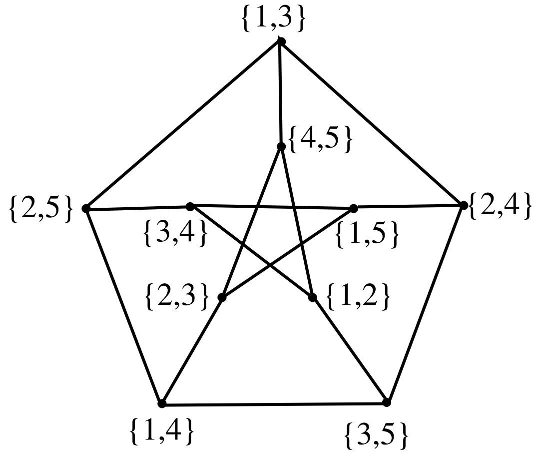
تعریف ۱۹.۲.۱. k-رنگ‌آمیزی: k-رنگ‌آمیزی از گراف $G = (V, E)$ یک تابع $C : V \longrightarrow [K]$ است بطوری‌که $C(u) \neq C(v)$ و $\{u, v\} \in E$ یالی از گراف G است.

تعریف ۲۰.۲.۱. عدد رنگی: مینیمم K که گراف G k-رنگ‌پذیر باشد را عدد رنگی گراف G می‌نامند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱.۲.۱. هر زیرگراف کامل گراف G را **خوشه** گراف G می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. تعداد راس‌های بزرگترین زیرگراف کامل گراف G را **عدد خوشه‌ای** گراف گوییم و با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. بیشترین تعداد راس‌هایی از گراف G که هیچ دوتایی مجاور نیستند (با یک یال بهم وصل نباشند) را **عدد استقلال** گراف G گوییم و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱.۱: گراف پترسن

تعریف ۲۴.۲.۱. زیرمجموعه‌ای از یال‌های G که هیچ دوتایی از آنها راس مشترک نداشته باشند **تطابق** نام دارد. تعداد یال‌های تطابق را **اندازه تطابق** می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$

تعریف ۲۶.۲.۱. $\|x\|$: برای $x \in \mathbb{R}^n$ داریم: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

تعریف ۲۷.۲.۱. $\mathbb{S}^n$: $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \quad \|x\| = 1\right\}$ که کره واحد نامیده می‌شود.

تعریف ۲۸.۲.۱. $\mathbb{B}^n$: $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\| \leq 1\}$ که گوی واحد نامیده می‌شود.

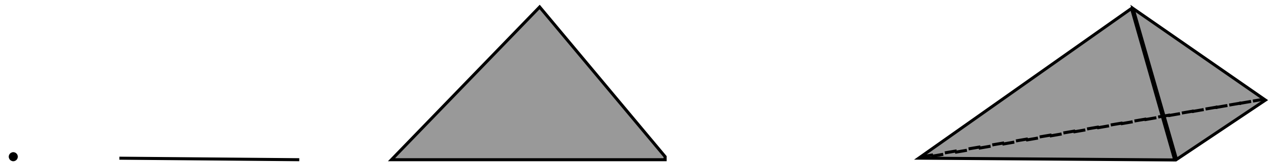
تعریف ۲۹.۲.۱. گراف کنسر: اگر X مجموعه‌ای محدود باشد و $\mathbf{F} \subseteq 2^X$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد(2^X خانواده تمام زیرمجموعه‌های X) گراف کنسر $\mathbf{F}$ با $KG(\mathbf{F})$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:
$\mathbf{F}$ مجموعه راس‌های گراف است و دو مجموعه‌ی $F_1, F_2 \in \mathbf{F}$ در گراف به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$

$$KG(\mathbf{F}) = (\mathbf{F}, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathbf{F}, F_1 \cap F_2 = \emptyset\})$$

اگر $\mathbf{F} = \binom{[n]}{k}$ (زیرمجموعه‌های k-تایی از $[n]$) باشد گراف کنسر با $KG(n, k)$ نشان داده می‌شود.
یکی از جالب‌ترین مثال‌ها از گراف کنسر، گراف پترسن است $KG(5, 2)$: شکل ۲.۱

تعریف ۳۰.۲.۱. مجموعه‌ی محدب: مجموعه‌ی $C \subseteq \mathbb{R}$ محدب است اگر برای هر $x, y \in C$، قطعه‌ی xy در C قرار داشته باشد یعنی

$$\{\forall \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha) y \in C\}$$



شکل ۲.۱: سادک k-بعدی

تعریف ۳۱.۲.۱. پوسته‌ی محدب: پوسته‌ی محدب از هر مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^d$ اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب شاملX است که با conve(x) نشان داده می‌شود.
هر $x \in conve\,(X)$ را می‌توان به صورت ترکیب محدب از نقاط X نوشت:
نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ و اعداد طبیعی $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ قرار دارند به طوری‌که
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad , \quad x \in \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (اگر $X \subseteq \mathbb{R}^d$ می‌توان $n < d+1$ انتخاب کرد)

تعریف ۳۲.۲.۱. مجموعه‌ی وابسته‌ی آفینی: فرض کنیم $v_0, v_1, \ldots, v_k$ نقاطی در $\mathbb{R}^d$ باشند. این نقاط را وابسته آفینی گوییم هرگاه اعداد حقیقی $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ وجود داشته باشند که برای هر i, $\alpha_i \neq 0$ بطوریکه $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i = 0$ و $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$. در غیر اینصورت، مجموعه مستقل آفینی است.
مثال:دو نقطه v_0, v_1 مستقل آفینی است بدین معنا که $v_0 \neq v_1$.
برای سه نقطه مستقل آفینی بدین معناست که v_0, v_1, v_2 روی یک خط مشترک واقع نمی‌شوند.
برای چهار نقطه مستقل آفینی بدین معناست که v_0, v_1, v_2, v_3 روی یک صفحه مشترک قرار ندارند.
در اینجا دو توصیف ساده و مفید دیگری از مجموعه مستقل آفینی بیان می‌کنیم:
لم: هر دو شرایط زیر با مستقل آفینی بودن نقاط $v_0, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^d$ هم‌ارز است:
۱) k تا بردار $v_1 - v_0, \ldots, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ مستقل خطی‌اند.
۲) بردارهای $-(d+1)$بعدی $(1, v_0), \ldots, (1, v_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ مستقل خطی‌اند.
همچنین توجه کنید که $d+1$ بزرگترین اندازه از یک مجموعه مستقل آفینی از نقاط، در $\mathbb{R}^d$ است.

تعریف ۳۳.۲.۱. سادک: پوسته‌ی محدب مجموعه‌ی مستقل آفینی متناهی $A \subset \mathbb{R}^n$ را یک سادک گوییم و با σ نشان می‌دهیم. نقاط A (A مجموعه گسسته است) راس‌های سادک هستند و بعد سادک برابر است با: $dim\sigma = |A| - 1$.
هر سادک k-بعدی را یک k-سادک می‌نامیم.
مثال: شکل‌های زیر به ترتیب از چپ سادک‌های ۰-بعدی، ۱-بعدی، ۲-بعدی و ۳-بعدی هستند.شکل ۲.۱

تعریف ۳۴.۲.۱. وجه: پوسته‌ی محدب از هر زیرمجموعه‌ی دلخواه از راس‌های سادک σ یک وجه [۱۳] از آن نام دارد. هر سادک مجموعه تهی را به عنوان یک وجه دارد.

[۱۳] Face

شکل ۳.۱: وجه‌های مثلث

برای مثال وجه‌های مثلث زیر را می‌شماریم:
یک مثلث کامل، ۳ تا یال، ۳ تا راس و مجموعه تهی. بنابراین ۸ وجه داریم. شکل ۳.۱

تعریف ۳۵.۲.۱. مجتمع سادکی: یک خانواده‌ی غیر تهی $\triangle$، از سادک‌ها را مجتمع سادکی [۱۴] گوییم در صورتی‌که دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) هر وجه از هر سادک $\sigma \in \triangle$ یک سادک از $\triangle$ هم باشد.

(۲) اشتراک هر دو سادک $\sigma_1, \sigma_2 \in \triangle$ یک وجه از هر دو سادک σ_1, σ_2 باشد.

تعریف ۳۶.۲.۱. زیرمجتمع: زیرمجتمعی از مجتمع سادکی $\triangle$ یک زیرمجموعه از آن است که خود یک مجتمع سادکی باشد (تحت گرفتن وجه‌ها بسته است).
مثالی از یک زیر مجتمع، یک k-اسکلت از مجتمع سادکی $\triangle$ است که شامل تمام سادک‌های $\triangle$ از بعد حداکثر k می‌باشد و با $\triangle^{\leq}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳۷.۲.۱. درون بسته: درون بسته سادک σ بعد از برداشتن تمام وجه‌های با بعد کوچکتر از σ بدست می‌آید.

تعریف ۳۸.۲.۱. n-سادک: مجتمع سادکی است که شامل تمام وجه‌های یک سادک n-بعدی دلخواه می‌باشد. n-سادک را با σ^n نشان می‌دهند.

تعریف ۳۹.۲.۱. $\| \triangle \|$: اجتماع تمام سادک‌ها در یک مجتمع سادکی دلخواه یک چندوجهی از آن است که با $\| \triangle \|$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴۰.۲.۱. مثلث‌بندی:اگر X یک فضای توپولوژی باشد و یک مجتمع سادکی وجود داشته‌باشد که $X \cong \left\|\Delta\right\|$ آنگاه Δ یک مثلث بندی [۱۵] از X است.
ساده‌ترین مثلث‌بندی از یک کره $\mathbb{S}^{n-1}$ مرزی از یک n-سادک است که زیرمجتمعی از σ^n است که با حذف تنها سادک n-بعدی آن و باقی‌ماندن بقیه وجه‌ها بدست می‌آید.

[۱۴] Simplical Complex
[۱۵] Triangulation

تعریف ۴۱.۲.۱. رشته علامت‌دار رشته علامت‌دار به‌صورت رشته $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ است به طوری که $0 \leq m \leq n$ و
$s_1, \ldots, s_m \in \{\pm 1, \ldots, \pm n\}$ و به ازای هر $i \neq j$ داریم $|s_i| \neq |s_j|$.

تعریف ۴۲.۲.۱. اگر رشته علامت‌دار $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ را در نظر بگیریم آنگاه رشته m+1-تایی از مجموعه‌های مرتب جدا از هم

$$(A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{s_j : \quad j \in [i], s_j > 0\},$$
$$B_i = \{-s_j : \quad j \in [i], s_j < 0\}.$$

به عبارت دیگر $A_0 = B_0 = \emptyset$ و (A_i, B_i)، اگر $s_i > 0$ باشد، با اضافه کردن s_i به A_{i-1} و اگر $s_i < 0$ باشد با اضافه کردن $-s_i$ به B_{i-1} به‌دست می‌آید.

تعریف ۴۳.۲.۱. عدد استقلال گراف: ماکزیمم اندازه مجموعه‌ای مستقل در گراف G را عدد استقلال G گوییم و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۴.۲.۱. عدد رنگی کسری: عدد رنگی کسری گراف G را با $\chi_f(G)$ نشان می‌دهیم که برابر با اینفیمم (به طور دقیق مینیمم) کسر $\frac{a}{b}$ است به طوری‌که $V(G)$ بتواند با a تا مجموعه مستقل پوشیده شود بطوریکه هر راس، حداقل b بار پوشیده شده باشد.

ما همواره داریم :

$$\frac{|V|}{\alpha\left(G\right)} \leq \chi_f(G) \leq \chi(G).$$

تعریف ۴۵.۲.۱. m-رنگ‌پذیری ابرگراف : اگر F یک سیستم از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X باشد، یک رنگ‌آمیزی $C : X \longrightarrow [m]$ یک m -رنگ‌آمیزی (درست) از ابرگراف $(X,\boldsymbol{F})$ است اگر هیچ یالی از آن تکرنگ نباشد. (برای هر $F \in \boldsymbol{F}$ داریم $|C(F)| > 1$)
عدد رنگی $\chi\left(\mathbf{F}\right)$، کوچکترین m-ای است که ابرگراف $(X, \mathbf{F})$، m-رنگ‌پذیر باشد.

تعریف ۴۶.۲.۱. خم $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ به طوری که $\gamma(t) := (t, t^2, \ldots, t^d)$ باشد را **خم گشتاور** در $\mathbb{R}^d$ گوییم.

تعریف ۴۷.۲.۱. مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ را با $[n]$ مشخص می‌کنیم و برای هر $x, y \in [n]$ داریم:

$$d_n(x, y) = min\{|x-y|, n-|x-y|\}.$$

تعریف ۴۸.۲.۱. (p,q)-رنگ‌آمیزی: p, q دو عدد صحیح مثبت می‌باشند به طوری که $p \geq ۲q$، رنگ‌آمیزی $f : V \longrightarrow [p]$ از گراف $G = (V, E)$ یک (p,q)-رنگ‌آمیزی است اگر برای تمام راس‌های مجاور u, v داشته باشیم:

$$q \leq |f(u) - f(v)| \leq p - q$$

که

$$d_p(f(u), f(v)) \geq q.$$

تعریف ۴۹.۲.۱. عدد رنگی دوری گراف: عدد رنگی دوری گراف $G = (V, E)$ را با $\chi_c(G)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_c(G) = inf\{\frac{p}{q} \quad ; \quad \text{یک}(p,q) - \text{رنگ‌آمیزی از}G\text{وجود دارد}\}$$

تعریف ۵۰.۲.۱. $\{+, -, \circ\}^n$: (مجموعه تمام زیرمجموعه‌های علامت‌دار $[n]$)
خانواده‌ای از تمام جفت‌های (X^+, X^-) از زیرمجموعه‌های از هم جدا از مجموعه $[n]$ هستند به طوری که

$$X^+ := \{i \in [n] : X_i = +\},$$
$$X^- := \{i \in [n] : X_i = -\}.$$

|X|: اگر $X \in \{+, -, \circ\}^n$ داریم:

$$|X| = \text{تعداد علامت‌های غیر صفر در } X$$

بنابراین

$$|X| = |X^+| + |X^-|$$

تعریف ۵۱.۲.۱. طول بزرگترین زیررشته متناوب از علامت‌های غیر صفر X را $alt(X)$ می‌نامند.

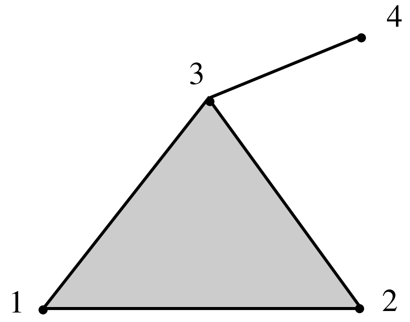
تعریف ۵۲.۲.۱. بردار $X \in \{+, -, \circ\}^n$ برداری k-متناوب است اگر

- $alt(X) = k$
- به ازای هر $۱ \leq k \leq n$ داشته باشیم: $max(X^+ \cup X^-) = k$

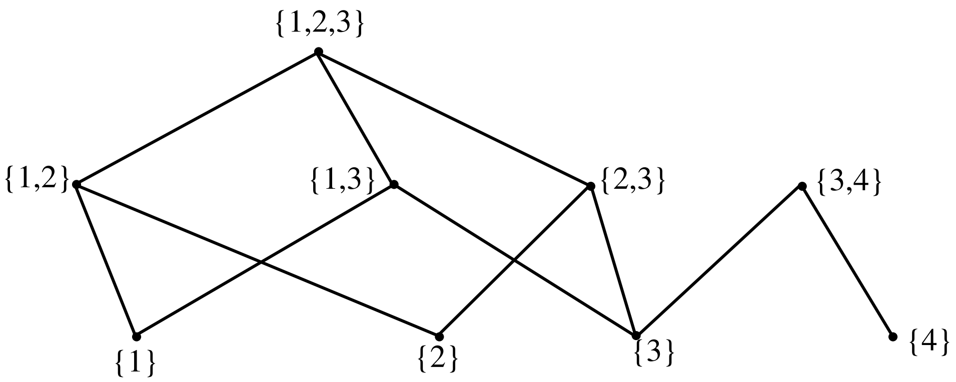
در اینجا

$$max(X) = \text{بزرگترین جایگاه مولفه‌ی غیر صفر در X است}$$

تعریف ۵۳.۲.۱. مجموعه مرتب جزئی: یک جفت $(P, \preceq)$ است که P یک مجموعه و $\preceq$ یک رابطه ترتیبی روی P است که



شکل ۴.۱: سادک



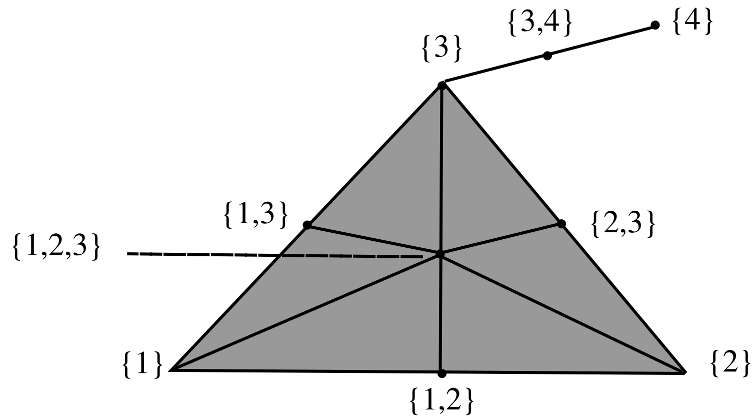
شکل ۵.۱: مجموعه مرتب جزئی

- بازتابی است (x)
- شرکت‌پذیر است ($x \preceq y, y \preceq z \longrightarrow x \preceq z$)
- نامتقارن است ($x \preceq y, y \preceq x \longrightarrow x = y$)

هر مجموعه مرتب جزئی یک فضای توپولوژی واحدی را طراحی می‌کند.

تعریف ۵۴.۲.۱. مجموعه مرتب جزئی بدست آمده از یک سادک: یک مجموعه مرتب جزئی بدست آمده از یک مجتمع سادکی K، یک $P(K)$ است که مجموعه تمام سادک‌های غیرتهی K است که با رابطه شمول مرتب شده‌اند. برای مثال برای مجتمع سادکی شکل ۴.۱ مجموعه مرتب جزئی بدست آمده از آن را در شکل ۵.۱ داریم.

تعریف ۵۵.۲.۱. سادک ترتیبی: سادک ترتیبی از یک مجموعه مرتب جزئی P یک مجتمع سادکی $\triangle(P)$ است که راس‌ها، اعضای P هستند و سادک‌ها تمام رشته‌هایی به صورت $(x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ است که در P، $x_k < \ldots < x_۱$.



شکل ۶.۱: سادک ترتیبی

تعریف ۵۶.۲.۱. اولین زیرتقسیم مرکز ثقلی: برای یک مجتمع سادکی K، مجتمع سادکی $sd\left(K\right) := \triangle\left(P\left(K\right)\right)$ اولین زیرتقسیم مرکز ثقلی از K است که راس‌های آن سادک‌های غیر تهی K هستند و سادک‌های آن رشته‌هایی از سادک‌های K مرتب شده توسط رابطه شمول هستند.
می‌توان راس‌های $sd\left(K\right)$ را مطابق با سادک‌های σ در ثقل σ قرار داد. مانند آنچه در تصویر قبل مشاهده کردیم.

تعریف ۵۷.۲.۱. $[-۱,۱]^n$: مکعب n−بعدی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[-۱,۱]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\|_\infty \leq ۱\}$$

تعریف ۵۸.۲.۱. $(sd[-۱,۱]^n)$: یک مجتمع سادکی است که راس‌های آن نقاطی در $[-۱,۱]^n$ با درایه‌های $۱,۰,۱-$ است.
مجتمع سادکی $sd\left([-۱,۱]^n\right)$ یک مثلث‌بندی از $[-۱,۱]^n$ است.
مرز $sd\left([-۱,۱]^n\right)$ را با $\partial\left(sd\left([-۱,۱]^n\right)\right)$ نشان می‌دهیم که یک مثلث‌بندی از کره $\mathbb{S}^{n-۱}$ است.
$\partial\left(sd\left([-۱,۱]^n\right)\right)$ یک سادک در رشته از مجموعه‌های علامتدار $X_t < \ldots < X_۲ < X_۱ = \emptyset$ است.

فصل ۲

قضیه بورسوک-اولام

قضیه بورسوک-اولام یکی از مفیدترین ابزارهای ارایه شده توسط توپولوژی جبری مقدماتی است. این قضیه از لم تاکر نیز نتیجه می‌شود. اولین بار برنی این قضیه را ارایه و ثابت کرد. اثبات‌های مشابه دیگری نیز توسط میرسن [۱] و رایت[۲] و استینلین[۳] برای این قضیه بیان شده‌است. در زیر علت‌های اهمیت این قضیه ذکر شده‌است
.

(۱) چندین نسخه هم‌ارز مختلف دارد.

(۲) اثبات‌های مختلف زیاد.

(۳) گروهی از تعمیم‌ها و بسط‌ها.

(۴) کاربردهای جالب زیاد.

ساده‌ترین نسخه آن بیان می‌کند که برای هر تابع پیوسته $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک $x \in \mathbb{S}^n$ وجود دارد به طوری که $f(x) = f(-x)$.
مثالی برای $n = ۲$ بیان می‌کنیم:
توپی لاستیکی را در نظر بگیرید، باد توپ را خالی کرده و آن را مچاله کنید حال روی زمین بخوابانید. دو نقطه متقارن روی توپ وجود دارد. به عبارت دیگر در هر زمان داده شده دو مکان متقارن روی زمین وجود دارد که دمای مشابه دارند و در یک زمان، فشار هوای یکسانی دارند.
تعمیم‌های زیادی از قضیه بورسوک-اولام [۱۲] وجود دارد که تعدادی از آنها به شرح زیر است:

[۱] Meyerson

[۲] Wright

[۳] Steinlien

قضیه فان [۱۲]یک تعمیمی از این قضیه است به‌طوریکه:
فرض کنیم $A_۱, A_۲, \cdots, A_m$ مجموعه‌های بسته باشند که $\mathbb{S}^n$ را می‌پوشانند و

$$\forall i \qquad A_i \cap (-A_i) = \emptyset$$

(توجه کنید که m از n مستقل است و قضیه ایجاب می‌کند که $(m \geq (n+۲)$) سپس اندیس‌های $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_{n+۲}$ و نقطه $x \in \mathbb{S}^n$ وجود دارند که

$$\forall j = ۱, ۲, \cdots, n+۲ \qquad (-۱)^j x \in A_{i_j}$$

مجموعه‌های بسته می‌توانند با مجموعه‌های باز جابجا شوند. سیمونی[۴] و تاردوش[۵] [۱۵] این قضیه را برای مساله رنگ‌آمیزی گرافها بکار بردند.
قضیه‌های بورینگ-یانگ-تایپ[۶] [۱۲] تعمیم‌های دیگری از قضیه بورسوک-اولام هستند.

۱.۰.۲ قضیه بورسک-اولام در نسخه‌های دیگر

(۱) برای هر تابع پیوسته $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نقطه $x \in \mathbb{S}^n$ وجود دارد به طوری که $f(x) = f(-x)$.

(۲) برای هر تابع متقارن $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (که f پیوسته است و برای تمام $x \in \mathbb{S}^n$، $f(x) = f(-x)$.) نقطه $x \in \mathbb{S}^n$ وجود دارد به طوری که $f(x) = ۰$.

(۳) هیچ تابع متقارن $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-۱}$ وجود ندارد.

(۴) تابع پیوسته $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-۱}$ وجود ندارد به طوری که روی مرز خودش متقارن باشد. یعنی برای هر $x \in \mathbb{S}^{n-۱} = \partial B^n$ رابطه $f(x) = f(-x)$ برقرار نیست.

(۱) برای هر پوشش $F_۱, \ldots, F_{n+۱}$ از کره S^n با $n+۱$ مجموعه باز، حداقل یک مجموعه شامل یک جفت از نقاط متقارن وجود دارد.(یعنی $\exists i, F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).

قضیه ۵۹.۰.۲. *(لیوسترنیک و شنیرلمن) (L.S.) [۱۲]*
برای هر پوشش $F_۱, \cdots, F_{n+۱}$ از کره‌ی $\mathbb{S}^n$ با $n+۱$ مجموعه‌ی بسته (باز) حداقل یک مجموعه شامل یک جفت از نقاط متقارن وجود دارد که $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$

---
[۴] Simonyi
[۵] Tardos
[۶] Bourgin-Yang-Type

۱.۲ اثبات ترکیبیاتی حدس کنسر

مقدمه

مجتمع سادکی یک پل ارتباطی بین ترکیبیات و توپولوژی است که می‌تواند به عنوان یک موضوع کاملا ترکیبیاتی توصیف شود و یا به عنوان یک موضوع پیوسته مثلا یک فضای توپولوژیکی در نظر گرفته شود. تعداد زیادی از زیر فضاهای توپولوژیکی $\mathbb{R}^d$ را می‌توان به عنوان مجتمع‌های سادکی توصیف کرد یعنی آنها از به هم پیوستن سادکها که شامل بخش‌ها، مثلث‌ها و چندوجهی‌ها هستند بدست می‌آیند.
موضوع ترکیبیاتی مجتمع سادکی را، مجتمع سادکی مجرد[۷] می‌نامیم که با موضوع هندسی[۸] آن متفاوت است ولی این تفاوت در برد خیلی زیاد برقرار نیست یعنی هر دو یک توصیف متفاوت از یک موضوع ریاضی هستند.
یک مجتمع سادکی مجرد یک جفت (V,K) است که V یک مجموعه و $K \subseteq ۲^V$ (۲^V خانواده تمام زیرمجموعه‌های V) یک خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های نزولی V است یعنی $\emptyset \in K$ و اگر $F \in K$ و $G \subseteq F$ آنگاه $G \in K$.
کنسر [۸]یک رنگ‌آمیزی مجاز برای گراف $KG(n,k)$ با $n - ۲k + ۲$ رنگ ارایه داد و سپس حدس زد این کمترین تعداد رنگ مورد نیاز است یعنی

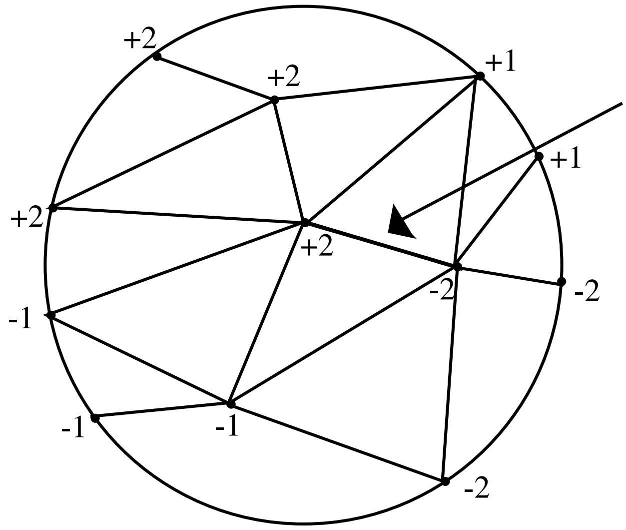
$$\chi(KG(n,k)) \geq n - ۲k + ۲ \quad , \quad n \geq ۲k \geq ۲.$$

جری متوسک[۹][۱۱] اولین اثبات ترکیبیاتی از حدس کنسر را ارایه داد. او ابتدا نشان داد که حدس کنسر به طور مستقیم از لم تاکر[۱۰][۱۶] نتیجه گرفته می‌شود و سپس اثباتی به طور کاملا مستقل از توپولوژی و مثلث‌بندی بیان کرد.

۲.۲ لم تاکر

فرض کنید $\mathbb{B}^n$ گویی در $\mathbb{R}^n$ باشد و $\mathbb{S}^{n-۱}$ مرز آن باشد.
همچنین $K_۰$ را مثلث‌بندی از $\mathbb{B}^n$ فرض کنید. K را مثلث‌بندی خاصی از $\mathbb{B}^n$ گوییم هرگاه در اطراف مبدا متقارن بوده و تظریفی از $K_۰$ باشد.
لم تاکر[۱۶]:
فرض کنیم K مثلث‌بندی خاصی از $\mathbb{B}^n$ باشد (یعنی مجموعه‌ای از سادک‌های K که در $\mathbb{S}^{n-۱} = \partial\mathbb{B}^n$ قرار دارند یک مثلث‌بندی در اطراف مبدا، متقارن از $\mathbb{S}^{n-۱}$ است. بنابراین اگر $\sigma \in \mathbb{S}^{n-۱}$ یک سادک

[۷] Abestact Simplical Complex
[۸] Geometric Simplical Complex
[۹] Jeří Matoušek
[۱۰] Tucker



شکل ۱.۲: مثلث‌بندی خاص از $\mathbb{B}^2$

از K باشدسپس $-\sigma$ نیز یک سادک از K است.)
هر راس v از K را با برچسب‌های

$$\lambda(v) \in \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$$

طوری برچسب گذاری می‌کنیم که برای راس‌های K که روی $\mathbb{S}^{n-1}$ قرار دارند برچسب‌ها به‌صورت زیر باشند:

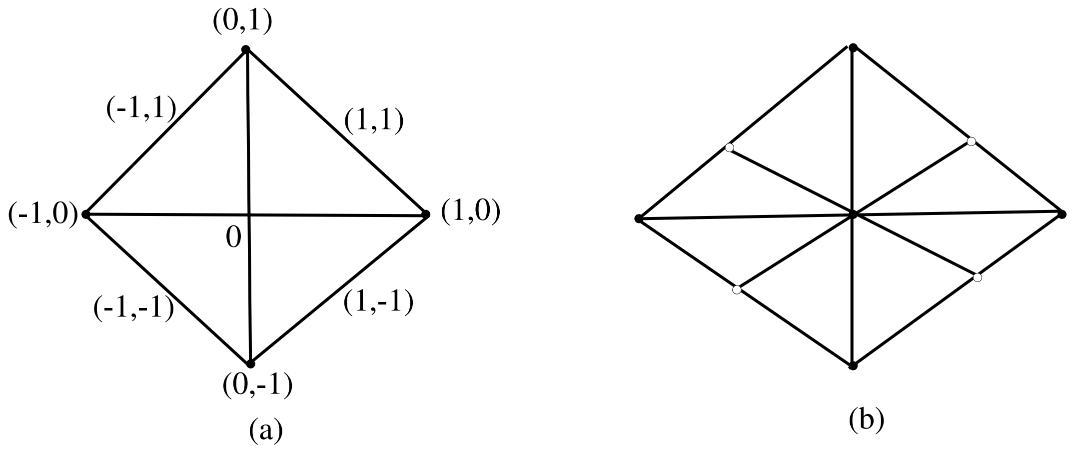
$$\lambda(-u) = -\lambda(u).$$

سپس یک 1-سادک (یال) از K وجود دارد به طوری که مکمل است. به عبارت دیگر راس‌های دو طرف یال برچسب‌های متقارن دارند.
مثال: برای $(n = 2)$ داریم. شکل ۱.۲

۳.۲ اثبات حدس کنسر با استفاده از لم تاکر

L_0 را زیرمجتمعی از K_0 شامل سادک‌ها روی $\mathbb{S}^{n-1}$ در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف $\mathbb{S}^{n-1}$ که سادک‌های غیرتهی از L_0 یک به یک با بردارهای غیر صفر $V = \{-1, 0, 1\}^n$ مطابقند.
مثال: برای $(n = 2)$ داریم. شکل ۲.۲

رابطه شمول روی سادک‌های L_0 مطابق با رابطه $\preceq$ روی V است به طوری که $u \preceq v$ اگر $u_i \preceq v_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ و $1 \preceq 0$ و $-1 \preceq 0$.
L'_0 را اولین زیرتقسیم مرکز ثقلی از L_0 قرار می‌دهیم. بنابراین راس‌های L'_0 مرکزهای ثقل سادک‌های L_0 هستند و سادک‌های L'_0 رشته‌هایی از سادک‌های L_0 هستند که تحت رابطه شمول مرتب شده‌اند. سادکی از L'_0 می‌تواند با یک رشته در مجموعه $V \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ تحت رابطه $\preceq$ یکسان باشد.



شکل ۲.۲: (a) مثلث‌بندی $K_۰$ و $L_۰$، (b) K

اگر مثلث‌بندی K را به‌صورت زیر تعریف شود:
K شامل همه سادک‌های $L'_۰$ و مخروط‌هایی با راس ۰ روی هر سادک است و این همان مثلث‌بندی خاص از $\mathbb{B}^n$ در لم تاکر است.
$n \geq ۲k \geq ۲$ در نظر می‌گیریم. فرض C رنگ‌آمیزی از گراف کنسر $KG(n,k)$ با $n - ۲k + ۱$ رنگ باشد. برای راحتی کار، رنگ‌ها را با $۲k, ۲k+۱, \dots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم.
می‌خواهیم برچسب‌گذاری از راس‌های K را طبق لم تاکر تعریف کنیم. این راس‌ها با بردارهای V یکسان‌اند و ما برچسب‌گذاری $\lambda : V \longrightarrow \{\pm۱, \dots, \pm n\}$ را داریم.
رابطه $\leq$ روی $۲^{[n]}$ را ترتیب جزیی بر اساس اندازه در نظر می‌گیریم به طوری که اگر $|A| \leq |B|$ آنگاه $A < B$.
$v \in V$ را بردار علامت‌داری فرض کنید. برای تعریف $\lambda(v)$، جفت مرتب (A,B) از زیرمجموعه‌های $[n]$ را به‌صورت زیر داریم:

$$A = \{i \in [n] \quad : \quad v_i = ۱\},$$
$$B = \{i \in [n] \quad : \quad v_i = -۱\}.$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم.
حالت اول: اگر $|A| + |B| \leq ۲k - ۲$ آنگاه

$$\lambda(v) = \begin{cases} |A| + |B| + ۱ & if \quad A \geq B, \\ -(|A| + |B| + ۱) & if \quad A < B. \end{cases}$$

حالت دوم: اگر $|A| + |B| \geq ۲k - ۱$ آنگاه حداقل یکی از A و B ها از اندازه حداقل k می‌باشد. اگر $|A| \geq k$ فرض شود آنگاه $C(A) = C(A')$ که A' اولین kتایی از A است.
اگر $|B| \geq k$، $C(B)$ را به طور مشابه تعریف می‌کنیم.

در این حالت قرار می‌دهیم:

$$\lambda(v) = \begin{cases} C(A) & if \quad A > B, \\ -C(B) & if \quad B > A. \end{cases}$$

بنابراین برچسب‌های حالت اول در مجموعه‌ی

$$\{\pm ۱, \pm ۲, \dots, \pm(۲k - ۱)\}$$

وبرچسب‌های حالت دوم در مجموعه‌ی

$$\{\pm ۲k, \dots, \pm n\}$$

قرار دارند.
واضح است که λ تابعی خوشتعریف از V به $\{\pm ۱, \pm ۲, \dots, \pm n\}$ است و برای هر بردار غیر صفر $v \in V$ داریم $\lambda(-v) = -\lambda(v)$.
طبق لم تاکر یالی مکمل از K وجود دارد. فرض این یال مکمل راس‌های $v_۱, v_۲ \in V$ را به هم وصل می‌کند بنابراین $\lambda(v_۱) = -\lambda(v_۲)$. چون $v_۱, v_۲$ یالی از K هستند، $v_۱ \preceq v_۲$ را می‌توان فرض کرد.
اگر $(A_۱, B_۱)$جفت متناظر با $v_۱$ و $(A_۲, B_۲)$ جفت متناظر با $v_۲$ باشند داریم $A_۱ \subseteq A_۲$ و $B_۱ \subseteq B_۲$.
چون $v_۱ \preceq v_۲$ بنابراین حداقل یکی از دو رابطه اکید می‌باشد و از طرفی داریم

$$|A_۱| + |A_۲| < |B_۱| + |B_۲|$$

و

$$\lambda(v_۱) = -\lambda(v_۲)$$

پس $|\lambda(v_۱)| = |\lambda(v_۲)|$ لذا $\lambda(v_۱)$ و $\lambda(v_۲)$ هیچکدام در حالت اول قرار نمی‌گیرند.
$\lambda(v_۱)$ و $\lambda(v_۲)$، یکی در حالت اول و یکی در حالت دوم هم نمی‌توانند باشند چون $|\lambda(v_۱)| = |\lambda(v_۲)|$
ولی برچسب‌های طراحی شده در حالت اول در مجموعه

$$\{\pm ۱, \pm ۲, \dots, \pm(۲k - ۱)\}$$

و برچسب‌های طراحی شده در حالت دوم در مجموعه

$$\{\pm ۲k, \dots, \pm n\}$$

قرار دارند.
پس هر دو باید در حالت دوم قرار داشته باشند. حال فرض می‌کنیم $\lambda(v_۱) > ۰$. با توجه به تعریف حالت دوم $\lambda(v_۱)$ رنگ k-تایی اول $A_۱$ است و $\lambda(v_۲) = -\lambda(v_۱)$ رنگ k-تایی اول $B_۲$ می‌باشد.
داریم:

$$A_۲ \cap B_۲ = \emptyset \qquad , \qquad A_۱ \subseteq A_۲$$

پس

$$A_۱ \cap B_۲ = \emptyset$$

در نتیجه دوتا k−تایی جدا از هم با رنگ مشابه داریم، بنابراین رنگ‌آمیزی C نمی‌تواند رنگ‌آمیزی مجاز از گراف کنسر $KG(n,k)$ باشد.

۴.۲ اثبات ترکیبیاتی مستقیم حدس کنسر

موضوع اصلی در این اثبات جفت‌های مرتب جدا از هم (A,B) هستند به طوری که $A,B \subseteq [n]$ و $A \cap B = \emptyset$ می‌باشد.
با فرض خلف C را رنگ‌آمیزی مجاز از گراف کنسر $KG(n,k)$ با $n - ۲k + ۱$ رنگ در نظر می‌گیریم و رنگ‌ها را با $۲k, \dots, n$ شماره گذاری می‌کنیم.
رابطه $\leq$ را مرتب‌سازی خطی از زیرمجموعه‌های $[n]$ قرار می‌دهیم به طوری که اگر $|B| > |A|$ آنگاه $A < B$. برای هر جفت مرتب جدا از هم (A,B)، برچسب $\lambda(A,B)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
حالت اول: اگر $|A| + |B| \leq ۲k - ۲$ داریم

$$\lambda(A,B) = \begin{cases} |A| + |B| + ۱ & if \quad A \geq B, \\ -(|A| + |B| + ۱) & if \quad A < B. \end{cases}$$

حالت دوم: اگر $|A| + |B| \geq ۲k - ۱$ ، بنابراین لااقل یکی از BیاA از اندازه‌ی حداقل k می‌باشند.
اگر $|B| > |A|$، $C(A)$ را رنگ k−تایی اول A و اگر $|A| > |B|$، $C(B)$ را رنگ k−تایی اول B درنظر می‌گیریم. پس داریم

$$\lambda(A,B) = \begin{cases} C(A) & if \quad A > B, \\ -C(B) & if \quad B > A. \end{cases}$$

پس برچسب‌های طراحی شده در حالت اول در مجموعه $\{\pm ۱, \pm ۲, \dots, \pm(۲k - ۱)\}$ و برچسب‌های طراحی شده در حالت دوم در مجموعه $\{\pm ۲k, \dots, \pm n\}$ قرار دارند.
همچنین رشته برچسب متحد با $(s_۱, \dots, s_m)$ به‌صورت $(\lambda_۰, \lambda_۱, \dots, \lambda_m)$ خواهد بود به طوری که $\lambda_i = \lambda(A_i, B_i)$.
بنابراین با توجه به تعریف λ هر رشته برچسب با $(۱, \pm ۲, \dots)$ شروع می‌شود.
ادعا می‌کنیم که اگر C یک رنگ‌آمیزی مجازی برای گراف کنسر باشد آنگاه رشته برچسب هر رشته علامت‌دار هرگز شامل دو برچسب مکمل نیست. به عبارت دیگر برای $i \neq j$، $\lambda_i = -\lambda_j$ وجود ندارد.
فرض می‌کنیم برای $i \neq j$ داریم $\lambda_i = -\lambda_j$. i و j در قسمت اول نمی‌توانند باشند زیرا اگر $i < j$ فرض شود آنگاه داریم:

$$\lambda_i = \lambda(A_i, B_i) \quad , \quad \lambda_j = \lambda(A_j, B_j).$$

و

$$|\lambda_i| = |\lambda_j| \qquad , \qquad A_i \subseteq A_j \qquad , \qquad B_i \subseteq B_j.$$

از طرفی با توجه به تساوی $|\lambda_i| = |\lambda_j|$ داریم:

$$|A_i| + |B_i| = |A_j| + |B_j| \Longrightarrow$$
$$A_i = A_j \quad , \quad B_i = B_j \quad \Longrightarrow$$
$$|s_i| = |s_j|.$$

که تناقض است.
بنابراین $i, j \geq ۲k - ۱$. به عبارت دیگر برچسب‌ها باید بنابر حالت دوم طراحی شوند.
برای مثال $i < j$ و $\lambda_i > ۰$ فرض شود. بنابراین

$$A_j \cap B_j = \emptyset \qquad , \qquad A_i \subseteq A_j$$

پس

$$A_i \cap B_j = \emptyset$$

در نتیجه A_i و B_j دو زیرمجموعه جدا از هم از $[n]$ با $C(A_i) = C(B_j)$ هستند. یعنی دوتا k-تایی جدا از هم با رنگ مشابه داریم که متناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی C است. حال ثابت می‌کنیم که یک رشته علامت دار با رشته‌ای که دارای برچسب‌های مکمل است، وجود دارد.
از برهان خلف استفاده می‌کنیم و برای ادامه اثبات به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۱.۴.۲. رشته علامت‌دار $s = (s_۱, \dots, s_m)$ را رشته مجاز گوییم هرگاه به ازای هر $i \in [m]$ داشته باشیم $s_i \in \{\lambda_۰, \dots, \lambda_m\}$. که $(\lambda_۰, \dots, \lambda_m)$ رشته برچسب s می‌باشد. برای مثال یک رشته مجاز با t جمله یا بیشتر که $t \leq ۲k - ۱$ شامل ۱+، ۲+ یا ۲−،...، t+ یا t− می‌باشد.

حال فرض کنیم هیچ رشته علامتداری شامل برچسب‌های مکمل وجود نداشته باشد. یک یا دو رشته مجاز همسایه برای هر رشته مجاز تعریف می‌کنیم به طوری که رابطه همسایه بودن متقارن است.
تنها رشته مجاز با یک همسایگی،رشته‌ی یک تنها است، بقیه آنها به طور دقیق دو همسایگی دارند. این امکان ندارد چون تعداد راسهای گراف با درجه فرد زوج است و این تناقض را ایجاد می‌کند.
تنها همسایگی رشته‌ی یک، رشته مجاز ۱+ است.
$s = (s_۱, \dots, s_m)$ را رشته مجاز غیر تهی فرض می‌کنیم که $(\lambda_۰ = ۱, \lambda_۱, \dots, \lambda_m)$ رشته برچسب آن می‌باشد. حداقل mتا عدد جدا از هم از $m + ۱$ برچسب وجود دارند که $s_۱, \dots, s_m$ نامیده می‌شوند.
با توجه به برچسب باقی‌مانده، دو حالت اتفاق می‌افتد

(i) دو برچسب منطبق باشند:

$$i < j \qquad , \qquad \lambda_i = \lambda_j$$

(ii) یک برچسب اضافه وجود داشته باشد:

$$\lambda_i \notin \{s_۱, s_۲, \dots, s_m\}$$

در حالت (i) یکی از دو همسایه s با جابه‌جایی $(i, i+1)$ به‌دست می‌آید یعنی رشته
$$(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, s_i, s_{i+2}, \ldots, s_m)$$
را داریم. (توجه کنید که برای $i = 0$ ممکن نیست زیرا برچسب $\lambda_0 = 1$ در مکان دیگری از رشته برچسب اتفاق نمی‌افتد) که این جابه‌جایی تمام جمله‌های یک رشته برچسب به جز λ_i را حفظ می‌کند لذا همسایگی تعریف شده رشته‌ای مجاز است. دومین همسایه s با جابه‌جایی $(j, j+1)$ به ازای هر $j < m$ به‌دست می‌آید. برای $j = m$ دومین همسایه s رشته $(s_1, \ldots, s_{m-1})$ می‌باشد.
در حالت (ii)، یکی از دو همسایه s، رشته توسعه یافته $(s_1, \ldots, s_m, \lambda_i)$ است. این رشته مجاز است چون فرض کردیم که هیچ برچسب مکملی وجود ندارد بنابراین
$$|\lambda_i| \notin \{|S_1| \ldots |S_m|\}.$$
برای تعریف همسایگی دوم باید حالتهای دیگری را در نظر بگیریم. اگر λ_i نه اولین و نه آخرین جمله باشد، به بیان دیگر $1 \leq i \leq m-1$،دومین همسایگی s با جابجایی $(i, i+1)$ بدست می‌آید.
اگر $i = m$ سپس دومین همسایگی s با انقباض رشته رخ می‌دهد. یعنی رشته همسایه‌ی $(s_1, \ldots, s_{m-1})$ را خواهیم داشت.
اگر $i = 0$ سپس دومین همسایگی از تغییر علامت رشته‌ی s بدست خواهد آمد که رشته همسایگی $(-s_1, \ldots, -s_m)$ را داریم.
با این روش دو تا همسایگی جدا از هم برای هر رشته مجاز غیر تهی وجود دارد.

فصل ۳

قضیه کنسر-لواژ

لواژ[۱۰] اولین کسی بود که حدس کنسر[۸] را ثابت کرد، بعد از اثبات لواژ اثبات‌های متعددی برای آن ارایه شد و همچنین این حدس تعمیم داده شد.
در این فصل قضیه‌ی کنسر-لواژ را بیان می‌شود و به چند روش آن را اثبات خواهدشد. همچنین تعمیمی از آن را ارایه داده می‌شود.

۱.۰.۳ قضیه کنسر-لواژ[۱۲]

قضیه ۲.۰.۳. *به ازای هر $k > ۰$ و $n \geq ۲k - ۱$ داریم:*

$$\chi(KG(n,k)) = n - ۲k + ۲.$$

گراف‌های کنسر $KG(n,k)$ مثالی از گراف‌ها با عدد رنگی بالا هستند. یکی از علت‌های مهم برای اهمیت این گراف‌ها و به طور احتمال علت این که اثبات حدس کنسر مشکل است، اختلاف زیاد بین عدد رنگی و عدد رنگی کسری این گراف‌ها می‌باشد.
همواره داریم:

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

که تنها قسمتی از رابطه زیر است

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi_f(G) \leq \chi(G).$$

در هرصورت برای گراف کنسر داریم:

$$\chi_f(KG(n,k)) = \frac{n}{k}.$$

۱.۳ کران بالایی برای عدد رنگی

به سادگی می‌توان نشان داد که عدد رنگی گراف کنسر $KG(n,k)$ نمی‌تواند از $n-۲k+۲$ بزرگتر باشد. به این صورت که راس‌های گراف کنسر را به صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم:
برای هر راس F از گراف قرار می‌دهیم $\chi(F) := min\{min \quad (F), n-۲k+۲\}$
در این صورت برای هر زیرمجموعه $F \in \binom{[n]}{k}$ داریم:

$$\chi(F) \in \{۱,۲,\ldots,n-۲k+۲\}.$$

اگر دو مجموعه F, F' با رنگ مشابه i رنگ‌آمیزی شوند و $i < n-۲k+۲$ یعنی

$$\chi(F) = \chi(F') = i.$$

لذا این راس‌ها نمی‌توانند به هم متصل باشند چون هر دو در مولفه i اشتراک دارند.
اگر دو مجموعه k-تایی، با رنگ $n-۲k+۲$ رنگ‌آمیزی شوند آنگاه هر دو مجموعه زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{n-۲k+۲,\ldots,n\}$ هستند. این مجموعه تنها $۲k-۱$ عضو دارد بنابراین دو مجموعه k-تایی حداقل در یک عضو اشتراک دارند، پس نمی‌توانند از هم جدا باشند، لذا مجاور نمی‌باشند.

۲.۳ اثبات توپولوژی قضیه کنسر-لواژ

تمام اثبات‌های شناخته شده برای $\chi(KG(n,k))$ توپولوژی هستند و یا حداقل از روشهای توپولوژی پیروی می‌کنند. در اینجا ما ساده‌ترین آنها را که اخیرا توسط گرین [1] ارایه شده را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. *[۱۲]: به ازای هر $k > ۰$ و $n \geq ۲k-۱$ داریم:*

$$\chi(KG(n,k)) = n-۲k+۲.$$

برهان. گراف کنسر $KG(n,k)$ را در نظر می‌گیریم و $d := n-۲k+۱$ قرار می‌دهیم. فرض $X \subset S^d$ زیرمجموعه‌ای n-نقطه‌ای از S^d باشد به طوری که هیچ ابرصفحه‌ای گذرنده از مرکز S^d شامل بیشتر از d نقطه از X نباشد. این شرایط برای یک مجموعه در وضعیت کلی برقرار است، بنابراین ما با نقاط در $\mathbb{R}^{d+۱}$ سر و کار داریم و به نقاطی که هیچ $d+۱$ تا از آنها روی یک ابرصفحه مشترک گذرنده از مبدا قرار نداشته باشد نیاز داریم:
مجموعه راس‌های $KG(n,k)$ را به‌صورت $\binom{X}{k}$ فرض می‌کنیم (اعضای $[n]$ را با نقاط X یکسان می‌کنیم). فرض می‌کنیم یک رنگ‌آمیزی مجاز از $KG(n,k)$ با حداکثر $d = n-۲k+۱$ رنگ وجود دارد. این رنگ‌آمیزی را ثابت در نظر گرفته و مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_d \subseteq S^d$ را تعریف می‌کنیم به طوری که برای $x \in S^d$ داریم $x \in A_i$ اگر حداقل یک k-تایی $F \in \binom{X}{k}$ از رنگ i در نیمکره

[1] Greene

$H(x)$ ($H(x)=\{y\in\mathbb{S}^d:\langle x,y\rangle>\text{۰}\}$) به مرکز x وجود داشته باشد. همچنین مجموعه $A_{d+\text{۱}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_{d+\text{۱}}=S^d\setminus(A_\text{۱}\cup A_\text{۲}\cup\ldots\cup A_d)$$

طبق تعریف A_iها به وضوح $A_\text{۱}$ تا A_d مجموعه‌های باز هستند. پس $A_{d+\text{۱}}$ مجموعه‌ای بسته است. با توجه به قضیه‌ی ۵۹.۰.۲ $i\in[d+\text{۱}]$ و $x\in S^d$ وجود دارند به طوری که $x,-x\in A_i$. اگر $i\le d$ دو مجموعه k-تایی جدا از هم با رنگ i داریم که یکی در نیمکره باز $H(x)$ و دیگری در نیمکره باز $H(-x)$ وجود دارند. یعنی رنگ‌آمیزی بیان شده رنگ‌آمیزی مجازی برای گراف کنسر نیست. اگر $i=d+\text{۱}$ آنگاه $H(x)$ شامل حداکثر $k-\text{۱}$ نقطه از X است و $H(-x)$ نیز شامل حداکثر $k-\text{۱}$ نقطه از X است. بنابراین $S^d\setminus(H(x)\cup H(-x))$ (که خط استوا است و از اشتراک S^d با ابرصفحه گذرنده از مبدا به‌دست آمده) شامل حداقل $n-\text{۲}k+\text{۲}=d+\text{۱}$ نقطه از X است که این تناقض با انتخاب X دارد. $\square$

۳.۳ تعمیم قضیه کنسر-لواژ

در این بخش تعمیم‌هایی از قضیه کنسر-لواژ و نتایج مربوط به آن را بیان می‌کنیم.

۱.۳.۳ قضیه دلنیکوف

اثبات قضیه کنسر-لواژ که در بخش قبل بیان شد یک نتیجه‌ی کلی دیگری برای بحث را برمی‌انگیزد و آن معرفی کردن یک کران پایین برای عدد رنگی گراف کنسر $KG(\boldsymbol{F})$ برای یک خانواده‌ی متناهی از مجموعه‌ها است. در این قسمت ما یک پارامتر استاندارد کوچکتری از خانواده‌ی مجموعه‌ی $\boldsymbol{F}$ به نام m-رنگ‌پذیری ناقص را بیان می‌کنیم. همچنین قضیه دلنیکوف [۲][۳] را که تعمیمی از حدس کنسر[۸] است را بیان و اثبات می‌کنیم. این اثبات تعمیمی از اثبات گرین می‌باشد که بعدا توسط کریز به ابرگراف‌ها تعمیم داده شد.

m-رنگ‌پذیری ناقص

m -رنگ‌پذیری ناقص را با $cd_m(\boldsymbol{F})$ نشان می‌دهیم. فرض X مجموعه‌ای محدود و $\boldsymbol{F}\subseteq \text{۲}^X$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت $cd_m(\boldsymbol{F})$ مینیمم اندازه مجموعه Y ($Y\subseteq X$) است به طوری که سیستم مجموعه‌های $\boldsymbol{F}$ که شامل هیچ نقطه‌ای از Y نیست، m-رنگ‌پذیر باشد. به عبارت دیگر

$$cd_m(\boldsymbol{F})=min\{|Y|\quad:\quad(X\backslash Y\quad,\quad\{F\in\boldsymbol{F}\quad,\quad F\cap Y=\emptyset\}\ \text{رنگ‌پذیر باشد}-m\}.$$

[۲] Dol nikov

مثال ۱.۳.۳. برای $m = ۲$ می‌خواهیم هر نقطه از X را قرمز، آبی و یا سفید رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ مجموعه‌ای از $\boldsymbol{F}$ به طور کامل قرمز یا به طور کامل آبی نباشد. (اما ممکن است به طور کامل سفید باشد) $cd_۲(\boldsymbol{F})$، مینیمم تعداد سفید مورد نیاز برای این رنگ‌آمیزی است.

گزاره ۲.۳.۳. *اگر $\boldsymbol{F}$ شامل تمام زیرمجموعه‌های k نقطه‌ای از $[n]$ باشد و $n \geq ۲k$. با حذف $n-۲k+۱$ نقطه، سیستم همه زیرمجموعه‌های k-تایی از مجموعه $(۲k-۱)$-تایی را داریم. به ازای هر رنگ‌آمیزی آبی و قرمز از این مجموعه، یکی از رنگ‌ها حداقل k نقطه دارد بنابراین یک مجموعه k-تایی تک رنگ داریم، پس $cd_۲(\boldsymbol{F}) \geq n - ۲k + ۲$.*

قضیه ۳.۳.۳. *(قضیه‌ی دلنیکوف):*
به ازای هر سیستم مجموعه متناهی $(X,\boldsymbol{F})$ که X مجموعه‌ای متناهی و $\boldsymbol{F} \subseteq ۲^X$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X است داریم:

$$\chi(KG(\boldsymbol{F})) \geq cd_۲(\boldsymbol{F}).$$

برهان. قرار می‌دهیم $d := \chi(KG(\boldsymbol{F}))$. هر عضو از مجموعه زمینه $\boldsymbol{F}$ را با یک نقطه از مجموعه $X \subset S^d$ متناظر می‌کنیم به طوری که X در وضعیت عمومی قرار دارد.
برای $x \in S^d$، $x \in A_i$ قرار می‌دهیم اگر نیمکره باز $H(x)$ شامل یک مجموعه $F \in \boldsymbol{F}$ با رنگ i که $i \in [d]$ وجود داشته باشد و $A_{d+۱} = S^d \setminus (A_۱ \cup \ldots \cup A_d)$ قرار می‌دهیم. برای تعدادی i و $x \in S^d$ داریم $x, -x \in A_i$(طبق قضیه۲.۰.۵۹).
$i \leq d$ نمی‌تواند باشد چون دو مجموعه جدا از هم از $\boldsymbol{F}$ که در نیمکره های باز مخالف قرار دارند رنگ یکسان i را می‌گیرند، بنابراین $i = d + ۱$ می‌باشد.
نقاطی از x که در $H(x)$ وجود دارند را با رنگ قرمز و نقاطی از X که در $H(-x)$ وجود دارند را با رنگ آبی رنگ‌آمیزی می‌کنیم. نقاط روی خط استوا که دو نیمکره را از هم جدا می‌کند را با رنگ سفید رنگ‌آمیزی می‌کنیم. چون X در وضعیت عمومی قرار دارد لذا حداکثر d نقطه می‌تواند سفید رنگ باشد پس $cd_۲(\boldsymbol{F}) \leq d$. □

۲.۳.۳ لم گیل

در این قسمت لم گیل [۳] را بیان می‌کنیم و با استفاده از این لم یک اثبات هندسی دیگری از قضیه‌ی کنسر-لواژ را ارایه می‌دهیم.
این اثبات توسط برنی [۴][۱] پیدا شد که مشابه با اثبات [۵]گرین است اما در این اثبات نقاط روی کره‌ی با یک بعد پایین‌تر قرار دارد. قبل از اثبات لم گیل به اثبات لم زیر می‌پردازیم:

[۳] Gale
[۴] Bárány
[۵] Green

لم ۴.۳.۳. *هر ابرصفحه‌ی h گذرنده از مبدا،خم گشتاور $\bar{\gamma}$[۶] را در بیشتر از d نقطه قطع نمی‌کند. به طور هم ارز هر مجموعه از $d+1$ نقطه جدا از $\bar{\gamma}$ مستقل آفینی است. یعنی اگر $\bar{\gamma}$ ابرصفحه‌ی h را در d نقطه‌ی جدا قطع کند سپس $\bar{\gamma}$، h را از یک طرف به طرف دیگر در هر اشتراک می‌گذراند.*

برهان. برای ابرصفحه‌ی h گذرنده از مبدا داریم

$$a_1x_1 + \ldots + a_dx_d = 0 \qquad s.t. \qquad (a_1, \ldots, a_d) \neq 0$$

اگر یک نقطه $\bar{\gamma}$ روی h قرارداشته‌باشد، داریم

$$a_1t + \cdots + a_dt^d = 0$$

این بدان معناست که مقادیر t متقابل با اشتراکهای h و $\bar{\gamma}(t)$ ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای غیرصفر $p(t) = \sum_{i=1}^{i=d} a_it^i$ از درجه‌ی حداکثر d می‌باشد. $p(t)$ حداکثر d ریشه دارد بنابراین بیشتر از d اشتراک نداریم.

□

لم ۵.۳.۳. *(لم گیل)[۵]: به ازای هر $d \geq 0$ و هر $k \geq 1$، مجموعه‌ی $X \subset S^d$ شامل $2k+d$ نقطه وجود دارد به طوری که هر نیمکره باز از S^d شامل حداقل k نقطه از X است.*

برهان. برای اثبات لم گیل، نسخه هم ارز آن را ثابت می‌کنیم .
داریم $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. نقاط را در مجموعه $\mathbb{R}^{d+1}$ در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم نقاط $v_1, \ldots, v_{2k+d} \in \mathbb{R}^{d+1}$ وجود دارند به طوری که به ازای هر نیم فضای باز که با ابرصفحه گذرنده از صفر کراندار شده‌است، حداقل k تا از این نقاط را دارد.
ابر صفحه‌ی $x_1 = 1$ را در نظر می‌گیریم. خم گشتاور زیر را داریم:

$$\bar{\gamma} := \{(1, t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^{d+1} \quad : \quad t \in \mathbb{R}\}$$

$2k+d$ نقطه جدا از هم روی مجموعه $\bar{\gamma}$ را در نظر می‌گیریم و آنها را با $w_1, \ldots, w_{2k+d}$ نام گذاری می‌کنیم که در امتداد خم

$$(\{\bar{\gamma(t)} : t \in \mathbb{R}\})$$

قرار دارند. پس به ازای هر $1 \leq i \leq 2k+d$ می‌توان $w_i = \bar{\gamma(i)}$ قرار داد.
$w_2, w_4, \ldots$ را نقاط زوج و $w_1, w_3, \ldots$ را نقاط فرد می‌نامیم. $v_i = (-1)^iw_i$ قرار دهید. اگر h ابرصفحه‌ی گذرنده از مبدا باشد و $h^{\oplus}$ و $h^{\ominus}$ دو نیم فضای باز مشخص شده توسط آن باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $h^{\oplus}$ و $h^{\ominus}$ هر کدام شامل حداقل k نقطه از v_iها می‌باشند.
ابتدا برای $h^{\oplus}$ ثابت می‌کنیم.
برای i زوج $v_i = w_i$ و برای i فرد $v_i = -w_i$ در نظر می‌گیریم. پس کافی است ثابت کنیم تعداد نقاط زوج w_i در $h^{\oplus}$ به اضافه تعداد نقاط فرد w_i در $h^{\ominus}$ حداقل k تا است.

---
[۶] moment curve

طبق ۴.۳.۳ داریم هر ابرصفحه h گذرنده از مبدا، $\bar{\gamma}$ را در بیشتر از d نقطه قطع نمی‌کند. ابرصفحه‌ی دلخواهی گذرنده از مبدا داده شده است، این ابرصفحه را به طور پیوسته به موقعیتی که شامل مرکز باشد و به طور دقیق d نقطه از $W := \{w_۱, \ldots, w_{d+۲k}\}$ را دربر گیرد، حرکت می‌دهیم تا زمانی که هیچ نقطه‌ای از W از یک طرف صفحه به طرف دیگر حرکت نکند. این امکان دارد زیرا اگر کمتر از d نقطه از W روی h وجود داشته باشد ابرصفحه h را حول زیرفضا تولید شده توسط این j نقطه و ۰ می‌چرخانیم تا به نقطه ای دیگر برسیم، اگر تعداد نقاط روی h، d تا باشد که به نتیجه رسیده‌ایم در غیر این‌صورت ابرصفحه h را حول زیرفضا تولید شده توسط $j+۱$ نقطه جدید و ۰ می‌چرخانیم، این کار را تا رسیدن به d نقطه ادامه می‌دهیم، فرض می‌کنیم که h، $\bar{\gamma}$ را به طور دقیق در d نقطه قطع می‌کند به طوری که همگی در W قرار دارند.

W_{on} را زیرمجموعه d نقطه‌ای از مجموعه W در نظر می‌گیریم به طوری که روی h قرار دارند و مجموعه

$$W_{off} := W \setminus W_{on}$$

$۲k$ نقطه باقی‌مانده باشد.

اگر $w_i \in W_{off}$ زوج باشد و در $h^{\oplus}$ وجود داشته باشد و یا فرد باشد و در $h^{\ominus}$ وجود داشته باشد آنگاه آنرا سیاه رنگ می‌کنیم. در غیر اینصورت w_i را با سفید رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

طبق ۴.۳.۳ چون در هر نقطه از مجموعه W_{on}، $\bar{\gamma}$ از یک طرف از h به طرف دیگر آن عبور می‌کند، اگر w, w' دو نقطه متوالی از مجموعه W_{off} در طول منحنی $\bar{\gamma}$ با j نقطه از مجموعه W_{on} بین آنها باشند، به ازای j زوج، w, w' هر دو در نیم فضایی مشابه قرار دارند یکی از آنها زوج و دیگری فرد است. لذا یکی رنگ سیاه و دیگری رنگ سفید دارد.

به ازای j فرد، w, w' در فضاهای متفاوت قرار دارند، اما هر دو یا زوج یا فرد هستند بنابراین یکی سیاه و دیگری سفید است. پس تعداد نقاط سیاه حداقل

$$\lfloor \frac{۱}{۲} |W_{off}| \rfloor \geq k$$

می‌باشد. □

۴.۳ اثبات قضیه کنسر-لواژ با استفاده از لم گیل

قضیه ۱.۴.۳. *[۱۲] به ازای هر $k > ۰$ و $n \geq ۲k - ۱$ داریم:*

$$\chi(KG(n,k)) = n - ۲k + ۲.$$

برهان. گراف کنسر $KG(n,k)$ را در نظر می‌گیریم و $d := n - ۲k$ قرار می‌دهیم. $X \subset S^d$ مجموعه‌ای در لم گیل است (شامل $۲k + d$ نقطه است به طوری که هر نیمکره باز از S^d شامل حداقل k نقطه از X است).

$[n]$ را با X متناظر می‌کنیم، پس راس های $KG(n,k)$ زیرمجموعه های k نقطه ای از X هستند. فرض

کنیم که یک d+1-رنگ‌آمیزی مجاز از $KG(n,k)$ انتخاب کرده‌ایم.
مجموعه‌های $A_1, \dots, A_{d+1} \subseteq S^d$ را تعریف می‌کنیم به طوری که $x \in A_i$، اگر حداقل یک k-تایی $F \in \binom{X}{k}$ از رنگ i در نیمکره باز $H(x)$ به مرکز x وجود داشته باشد. $A_1, \dots, A_{d+1}$ پوششی باز از S^d را تشکیل می‌دهند، چون هر مجموعه $H(x)$ شامل حداقل یک k-تایی با استفاده از لم گیل می‌باشد. لذا طبق قضیه‌ی ۵۹.۰.۲ $i \in [d+1]$ و $x \in S^d$ وجود دارند به طوری که $x, -x \in A_i$. بنابراین دو مجموعه k-تایی به رنگ یکسان، یکی در $H(x)$ و دیگری در $H(-x)$ قرار دارند و این تناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی گراف کنسر $KG(n,k)$ دارد. $\square$

فصل ۴

زیرگراف‌های رنگین کمانی از گراف کنسر

لواژ [۱۰]کاربردهایی از توپولوژی جبری را برای رنگ‌آمیزی گراف کنسر استفاده کرد و این روش یک ابزار مهم با کاربردهای وسیعی در ترکیبیات شد.
در ابتدا جانسون [۱]، هولروید [۲] ، استال[۷] [۳] عدد رنگی دوری گراف کنسر را بررسی کردند وحدس زدند که عدد رنگی دوری گراف کنسر $KG(n,k)$ با عدد رنگی خود گراف برابر است. این حدس توجه زیادی را به خود جلب کرد و اثباتهای زیادی برای آن ارایه شد.
زو حاجی‌ابوالحسن و [۴] این حدس را برای یک k ثابت و n به اندازه کافی بزرگ به روش ترکیبیاتی ثابت کردند.
همچنین این حدس برای n زوج با استفاده از لم فان [۴] و به روش توپولوژیکی ثابت شده است. در هر دو اثبات از یک زیر گراف از گراف کنسر $KG(n,k)$، به نام گراف اسکرایور $SG(n,k)$[۱۴] استفاده شده است.
این حدس به طور کامل توسط چن [۲]ثابت شد. چن برای این اثبات از لم فان[۴] استفاده کرد. یک مرحله‌ی اساسی در اثبات چن ، اثبات لم رنگ‌آمیزی متناوب گراف کنسر[۵] است . این لم ساختار ظریفی از $n-2k+2$ -رنگ‌آمیزی از گراف $KG(n,k)$ مشخص می‌کند.
در این فصل لم فان رابیان میشود و به اثبات حالت خاصی از آن پرداخته خواهد شد و همچنین اثبات قضیه‌ی رنگ‌آمیزی متناوب کنسر را ملاحظه می‌شود.

---

[۱] Janson

[۲] Holroyd

[۳] Stahl

[۴] Zhu

[۵] Alternative Kneser Coloring

۱.۴ قراردادها

(۱) زیرمجموعه غیرتهی S از مجموعه $\{+,-,\circ\}^n \setminus \{(\circ,\dots,\circ)\}$ متقارن است اگر $X \in S$ آنگاه $-X \in S$.

برای اعداد صحیح مثبت n,k که $1 \leq k \leq n$ داریم:

(i)

$$\{+,-,\circ\}^n_{\geq k} := \{X \in \{+,-,\circ\}^n \quad : \quad |X| \geq k\}$$

(ii)

$$\{+,-,\circ\}^n_{k} := \{X \in \{+,-,\circ\}^n \quad : \quad |X| = k\}$$

(۲) برای اعداد صحیح مثبت m,n و زیرمجموعه متقارن $S \subseteq \{+,-,\circ\}^n \setminus \{\circ\}^n$ داریم:
تابع برچسب‌گذاری $\lambda : S \longrightarrow \{\pm 1,\dots,\pm m\}$ متقارن است اگر

$$\lambda(-X) = -\lambda(X).$$

(۳) $\lambda : \{+,-,\circ\}^n \setminus \{\circ\}^n \longrightarrow \{\pm 1,\dots,\pm n\}$ در نظر می‌گیریم به طوری که

(i) λ متقارن است.

(ii) اگر $X \leq Y$ آنگاه $\lambda(X) \neq -\lambda(Y)$.

بنابراین به ازای هر $X \in \{+,-,\circ\}^n \setminus \{\circ\}^n$، $\alpha(X,\lambda,n)$ تعداد σهایی است که

(i) σ یک n-1−سادک از مرز مجموعه $(sd([-1,+1]^n))$ می‌باشد.

(ii) مجموعه راس‌های σ شامل راس‌های X هستند.

(iii) برچسب‌های σ که با λ طراحی شده‌اند از فرم $\{+1,-2,\dots,(-1)^{n-1}n\}$ می‌باشند.

حال قرار می‌دهیم:

$$\sum_{2k-2}^{n} = \{X \in \{+,-,\circ\}^n_{\geq 2k-2} \quad : \quad |X^+| \geq k \quad \text{یا} \quad |X^-| \geq k\}$$

واضح است که مجموعه $\sum_{2k-2}^{n}$ زیرمجموعه متقارنی از مجموعه $\{+,-,\circ\}^n \setminus \{\circ\}^n$ است.

(۴) فرض کنید تابع

$$\varphi : \sum_{2k-2}^{n} \longrightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-2k+2)\}$$

را با شرایط زیر داریم:

(i) φ تابعی متقارن است.

(ii) به ازای هر $X \leq Y$ داریم:
$$\varphi(X) \neq -\varphi(Y).$$

(iii) به ازای هر $X \leq Y$ داریم:
$$|\varphi(X)| \leq |\varphi(Y)|.$$

آنگاه دنباله‌ای از مجموعه‌های علامت‌دار $X_{۲k-۱}, X_{۲k}, \ldots, X_n$ را، دنباله‌ای φ-مجاز در $\sum_{۲k-۲}^{n}$ می‌نامیم اگر برای این مجموعه‌های علامت‌دار شرایط زیر برقرار باشد:

(i)
$$X_{۲k-۱} \leq X_{۲k} \leq \ldots \leq X_n.$$

(ii) برای $j = ۲k-۱, ۲k, \ldots, n$ داریم:
$$|X_j| = j.$$

(iii)
$$\{\varphi(X_{۲k-۱}), \ldots, \varphi(X_n)\} \in \{ \quad \{+۱, -۲, \ldots, (-۱)^{n-۱}(n-۲k+۲)\} \quad , \\ \{-۱, +۲, \ldots, (-۱)^{n}(n-۲k+۲)\} \quad \}$$

(۵) دو دنباله φ-مجاز
$$X_{۲k-۱}, X_{۲k}, \ldots, X_n$$
و
$$Y_{۲k-۱}, Y_{۲k}, \ldots, Y_n$$
در $\sum_{۲k-۲}^{n}$ یک جفت از دنباله‌های φ-مجاز مطابق نامیده می‌شوند اگر

(i) برای $j = ۲k-۱, ۲k, \ldots, n$ داریم
$$\varphi(X_j) = -\varphi(Y_j).$$

(ii) یک مجموعه علامت‌دار
$$Z \in \{+, -, ۰\}_{۲k-۲}^{n}$$
که
$$|Z^+| = |Z^-| = k-۱$$
وجود دارد به طوری که
$$Z \leq Y_{۲k-۱} \quad , \quad Z \leq X_{۲k-۱}.$$

۲.۴ لم ترکیبیاتی فان

لم ۱.۲.۴. *[۲] K را زیر تقسیم مرکز ثقلی از کره S^n در نظر می‌گیریم. فرض کنید که به هر راس از K برچسبی از مجموعه $\{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm m\}$ نسبت داده شده به طوری که*

(i) مجموع برچسب‌ها در راس‌های متقارن برابر صفر است.

(ii) مجموع برچسب‌ها در راس‌های مجاور صفر نیست.

پس تعداد فردی n-سادک وجود دارند به طوری که برچسب‌های آنها از فرم زیر است.

$$۱ \leq k_۱ \leq k_۲ \leq \ldots \leq k_{n+۱} \leq m \quad , \quad \{k_۱, -k_۲, \ldots, (-۱)^n k_{n+۱}\}$$

که $n + ۱ \leq m$.

دراین لم می‌توان $\partial(sd([-۱, +۱]^n))$ را بکار برد و لم زیر را بیان کرد.

۳.۴ لم فان

لم ۱.۳.۴. *[۲] فرض n عددی مثبت باشد و داشته باشیم:*

$$\lambda : \{+, -, ۰\}^n \setminus \{۰\}^n \longrightarrow \{\pm ۱, \ldots, \pm n\}$$

به طوری که

(i) λ تابعی متقارن است.

(ii) برای هر X, Y اگر $X \leq Y$ آنگاه $\lambda(X) \neq -\lambda(Y)$

سپس تعداد فردی (n-1)-سادک وجود دارند به طوری که برچسب‌های آنها از فرم

$$\{۱, -۲, \ldots, (-۱)^{n-۱} n\}$$

و تعداد فردی (n-1)-سادک وجود دارند به طوری که برچسب‌های آنها از فرم

$$\{-۱, ۲, \ldots, (-۱)^n n\}$$

می‌باشند.

قضیه ۲.۳.۴. *[۲] فرض n, k اعداد مثبتی باشند به طوری که $۴ \leq ۲k \leq n$. فرض کنید*

$$\varphi : \sum_{۲k-۲}^{n} \longrightarrow \{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm (n - ۲k + ۲)\}$$

با این شرایط که

(i) φ تابعی متقارن است.

(ii)

$$\forall \quad X,Y \qquad , \qquad X \leq Y \longrightarrow \varphi(X) \neq -\varphi(Y)$$
$$\forall \quad X,Y \qquad , \qquad X \leq Y \longrightarrow |\varphi(X)| \leq |\varphi(Y)|.$$

آنگاه یک جفت رشته φ-مجاز مطابق در $\sum_{۲k-۲}^{n}$ وجود دارد.

برهان. ابتدا قرار می‌دهیم:

$$\Gamma = \{X \in \{+,-,\circ\}^n_{\geq ۲k-۲} \quad : \quad |X^+| = |X^-| = k-۱\}$$

و تعریف می‌کنیم:

$$f : \{+,-,\circ\}^n \setminus \{\circ\}^n \longrightarrow \{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm n\}.$$

حالت اول . $X \notin \sum_{۲k-۲}^{n}$

قرار می‌دهیم $f(X) = \pm(n - ۲k + ۲ + |X|)$. که علامت‌ها نشان دهنده $max(X^+)$ یا $max(X^-)$ هستند. بنابراین داریم:

$$f(X) \in \{\pm(n-۲k+۳), \pm(n-۲k+۴), \ldots, \pm n\}$$

حالت دوم به ازای هر $X \in \sum_{۲k-۲}^{n}$ تعریف می‌کنیم $f(X) = \varphi(X)$. بنابراین

$$f(X) \in \{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm(n-۲k+۲)\}.$$

(۱) f تابعی متقارن است زیرا اگر $X \in \sum_{۲k-۲}^{n}$ آنگاه $\varphi(X)$ متقارن است لذا تابع f متقارن است. اگر $X \notin \sum_{۲k-۲}^{n}$ چون $|X| = |-X|$ پس $f(X) = -f(X)$.

(۲)

$$\forall X,Y \quad ; \quad X \leq Y \longrightarrow f(X) \neq -f(Y).$$

بنابر حالت دوم داریم:

$$\forall X,Y \in \sum_{۲k-۲}^{n} \quad ; \quad X \leq Y \longrightarrow |f(X)| = |\varphi(X)| \leq |\varphi(Y)| = |f(Y)|. \qquad (۱.۴)$$

می‌دانیم که Γ مجموعه‌ای از مجموعه‌های علامت‌دار در $\{+,-,\circ\}^n \backslash \{\circ\}^n$ است به طوری که برچسب‌های طراحی شده توسط f در $\{-n,+n\}$ قرار دارند. برای هر (n-1)-سادک در $\partial(sd([-۱,۱]^n))$ که برچسب‌های طراحی شده توسط تابع f از فرم

$$\{+۱, -۲, \ldots, (-۱)^{n-۱} n\}$$

یا

$$\{-۱, +۲, \ldots, (-۱)^n n\}$$

هستند، ثابت می‌کنیم مجموعه راس‌ها به طور دقیق باید شامل یک مجموعه علامت‌دار در مجموعه Γ باشند. ثابت می‌کنیم حداقل یکی هستند و بیشتر از یکی نیست. هر (n-1)-سادک یک زنجیر از اعضای $X \in \{+,-,0\}^n \setminus \{0\}^n$ با طول n می‌باشد به طوری که

$$X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n.$$

همچنین

$$\{f(X_1), \ldots, f(X_n)\} \in \{+1, -2, \ldots, (-1)^{n-1}n\}.$$

همواره به ازای هر $i < j$ داریم $X_i \subsetneq X_j$

می‌دانیم تعداد برچسب‌ها به طور دقیق nتا است بنابراین $f(X_i) \neq f(X_j)$. پس اگر $X_i = X_j$، متناقض با تابع بودن f است. در نتیجه

$$1 \leq |X_1| < |X_2| < \ldots < |X_n| \leq n \qquad , \qquad |X_i| \neq |X_j|.$$

لذا به ازای هر i داریم $|X_i| = i$.

پس اگر قرار باشد حداقل یکی از X_iها در Γ باشد باید اندازه آن برابر $2k-2$ بوده به طوری که

$$X_{2k-2} = (X^+_{2k-2}, X^-_{2k-2}).$$

حال باید ثابت کنیم به طور دقیق یکی در Γ وجود دارد.

$$if \qquad X_i \in \sum_{2k-2}^{n} \longrightarrow \forall i \leq j \qquad X_i \subseteq X_j.$$

به ازای هر $X \in \sum_{2k-2}^{n}$ داریم:

$$f(X) = \varphi(X) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-2k+2)\}.$$

$$|\{f(X_i), f(X_{i+1}), \ldots, f(X_n)\}| \leq n-2k+2,$$

$$n-i+1 \leq n-2k+2 \longrightarrow 2k-1 \leq i.$$

بنابراین

$$X_1, \ldots, X_{2k-2} \notin \sum_{2k-2}^{n}$$

چون

$$|X_1| < |X_2| < \ldots < |X_{2k-2}| \qquad , \qquad f(X) = \pm(n-2k+2+|X|)$$

لذا

$$|f(X_1)| < \ldots < |f(X_{2k-2})|$$

و

$$|f(X_i)| = n-2k+2+i \qquad ; \qquad 1 \leq i \leq 2k-2.$$

حال اگر

$$\begin{aligned}
f(X_1) &= +(n-2k+2+1) \xrightarrow{|X_1|=1} X_1^+ = \{a\} \quad , \quad X_1^- = \emptyset \\
f(X_2) &= -(n-2k+2+2) \xrightarrow{|X_2|=2} X_2^+ = \{a\} \quad , \quad X_2^- = \{b\} \\
&\vdots \\
f(X_{2k-2}) &= -(n-2k+2+2k-2) = -n \longrightarrow |X_{2k-2}^+| = |X_{2k-2}^-| = k-1.
\end{aligned}$$

بنابراین $X_{2k-2} \in \Gamma$.

با استفاده از لم ۱.۳.۴ داریم

$$\sum_{X\in\Gamma} \alpha(X,f,n) = 1 \qquad (mod \quad 2).$$

در نتیجه مجموعه‌ی علامت‌دار $Z \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که

$$f(Z) = (-1)^{n-1} n$$

و

$$\alpha(Z,f,n) = 1 \qquad (mod \quad 2)$$

چون Z مجموعه‌ای ثابت است، تابع برچسب‌گذاری دیگری تعریف می‌کنیم:

$$g : \{+,-,0\}^n \setminus \{0\}^n \longrightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$$

$$g(X) = \begin{cases} -f(X) & if \quad X \in \{Z,-Z\}, \\ f(X) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

واضح است که تابع g تابعی متقارن است و

$$X \leq Y \longrightarrow g(X) \neq g(Y)$$

با توجه به رابطه ۱.۴ داریم:

$$\forall X,Y \in \sum_{2k-2}^{n} \quad , \quad X \leq Y \longrightarrow |g(X)| \leq |g(Y)|. \tag{۲.۴}$$

با توجه به لم ۱.۳.۴ داریم:

$$\sum_{X\in\Gamma} \alpha(X,g,n) = 1 \qquad (mod \quad 2).$$

بنابراین

$$\alpha(Z,f,n)+\alpha(-Z,f,n)+\sum_{X\in\Gamma\setminus\{Z,-Z\}}\alpha(X,f,n)=$$

$$\alpha(Z,g,n)+\alpha(-Z,g,n)+\sum_{X\in\Gamma\setminus\{Z,-Z\}}\alpha(X,g,n)=۱$$

واضح است که

$$\sum_{X\in\Gamma\setminus\{Z,-Z\}}\alpha(X,f,n)=\sum_{X\in\Gamma\setminus\{Z,-Z\}}\alpha(X,g,n)$$

چون تابع f تابعی متقارن است لذا

$$g(Z)=-f(Z)=f(Z)$$

همچنین

$$\alpha(-Z,f,n)=\alpha(Z,g,n)=۰$$

چون اگر

$$\alpha(-Z,f,n)=\alpha(Z,g,n)\neq ۰$$

آنگاه $X_۱\subseteq X_۲\subseteq\ldots\subseteq X_n$ یک (n-1)-سادک با برچسب تابع g وجود دارد. چون $Z\in\Gamma$ لذا $f(Z)=n$ یا $f(Z)=-n$ و از طرفی طبق تعریف تابع g، $|g|=|f|$ می‌باشد درنتیجه

$$|g(X_۱)|<|g(X_۲)|<\ldots<|g(X_{۲k-۲})|$$

داریم:

$$|g(X_۱)|=n-۲k+۲+۱,\ldots,|g(X_{۲k-۲})|=n$$

پس برچسب $X_{۲k-۲}$ برابر با $(-۱)^{n-۱}n$ است یعنی

$$g(X_{۲k-۲})=(-۱)^{n-۱}n$$

و چون $Z\in\Gamma$ و ثابت کردیم فقط $X_{۲k-۲}\in\Gamma$ بنابراین $Z=X_{۲k-۲}$.

$$f(-Z)=-f(Z)=g(Z)=(-۱)^{n-۱}n\Longrightarrow(-۱)^n n=(-۱)^{n-۱}n$$

که تناقض است. لذا از $\alpha(Z,f,n)=\alpha(-Z,g,n)=۰$ داریم

$$\alpha(Z,f,n)=\alpha(-Z,g,n)=۱\qquad(mod\quad ۲)$$

به عبارت دیگر یک (n-1)-سادکی وجود دارد که Z راسی از آن است و برچسب‌های طراحی شده توسط تابع f از فرم

$$\{+۱,-۲,\ldots,(-۱)^{n-۱}n\}$$

است و (n-1)-سادک دیگری با راس $Z-$ وجود دارد که برچسب‌های طراحی شده توسط تابع g از فرم

$$\{+1, -2, \ldots, (-1)^{n-1}n\}$$

هستند. چون تابع g متقارن است لذا یک (n-1)-سادک وجود دارد که Z راسی از آن است و برچسب‌های طراحی شده توسط تابع g از فرم

$$\{-1, +2, \ldots, (-1)^{n}n\}$$

است. با توجه به ۱.۴ و ۲.۴ و تعریف‌های توابع f و g، مجموعه‌های علامت‌دار

$$X_{2k-1}, \ldots, X_n \qquad , \qquad Y_{2k-1}, \ldots, Y_n$$

در $\sum_{2k-2}^{n}$ وجود دارند به طوری که

(i)

$$Z \leq X_{2k-1} \leq X_{2k} \leq \ldots \leq X_n$$
$$Z \leq Y_{2k-1} \leq \ldots \leq Y_n.$$

(ii)

$$|X_j| = |Y_j| = j \qquad for \qquad j = 2k-1, 2k, \ldots, n.$$

(iii)

$$f(X_j) = (-1)^{j-1}(j-2k+2),$$
$$g(Y_j) = f(Y_j) = (-1)^{j}(j-2k+2).$$

بنابراین

$$X_{2k-1}, \ldots, X_n \qquad , \qquad Y_{2k-1}, \ldots, Y_n$$

یک جفت رشته φ-مجاز مطابق هستند. □

۴.۴ قضیه رنگ‌آمیزی متناوب گراف کنسر

قضیه ۱.۴.۴. *[۲] فرض n, k اعداد مثبتی باشند که $2 \leq 2k \leq n$ و تابع*

$$C : \binom{[n]}{k} \longrightarrow [n-2k+2]$$

رنگ‌آمیزی مجازی از گراف کنسر $KG(n,k)$ با $n-2k+2$ رنگ باشد آنگاه زیرمجموعه‌های k-1-عضوی S و T از مجموعه $[n]$ و اعداد $i_1, i_2, \ldots, i_{n-2k+2} \in [n] \setminus (S \cup T)$ وجود دارند به طوری که

$$C(S \cup \{i_j\}) = C(T \cup \{i_j\}).$$

برهان. به وضوح قضیه برای $k=۱$ برقرار است. $k \geq ۲$ را در نظر می‌گیریم. تابع

$$g : \sum_{۲k-۲}^{n} \longrightarrow \{+,-,\circ\}^{n-۲k+۲} \setminus \{o\}^{n-۲k+۲}$$

را تعریف می‌کنیم به طوری که $g(X)=(g(X)^+, g(X)^-)$ و

$$g(X)^+ = \{C(A) : A \subseteq X^+ \quad , \quad A \in \binom{[n]}{k}\}$$

$$g(X)^- = \{C(A) : A \subseteq X^- \quad , \quad A \in \binom{[n]}{k}\}.$$

g تابعی متقارن است و برای همه $X,Y \in \sum_{۲k-۲}^{n}$ داریم:

$$X \leq Y \longrightarrow g(X) \leq g(Y). \tag{۳.۴}$$

تابع h را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h : \{+,-,\circ\}^{n-۲k+۲} \setminus \{o\}^{n-۲k+۲} \longrightarrow \{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm(n-۲k+۲)\}$$

به طوری که $max(X)=t$ برای $t \in \{۱,۲,\ldots,n-۲k+۲\}$.

حالت اول: X مجموعه‌ای t-متناوب باشد، قرار می‌دهیم

$$h(X) = \pm t.$$

به طوری که علامت‌ها مشخص می‌کنند که $max(X^+)$ یا $max(X^-)$ برابر مقدار t است. لذا

$$h(X) \in \{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm(n-۲k+۲)\}.$$

حالت دوم: X مجموعه‌ای t-متناوب نباشد. قرار می‌دهیم

$$h(X) = \pm(t-۱).$$

بنابراین

$$h(X) \in \{\pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm(n-۲k+۲)\}.$$

h تابعی متقارن است و برای همه Xها داریم

$$max(X) - ۱ \leq |h(X)| \leq max(X). \tag{۴.۴}$$

ادعا می‌کنیم که برای همه

$$X,Y \in \{+,-,\circ\}^{n-۲k+۲} \setminus \{o\}^{n-۲k+۲}$$

داریم

$$X \leq Y \Longrightarrow h(X) \neq -h(Y). \tag{۵.۴}$$

اثبات ادعا:

(فرض خلف) فرض می‌کنیم که وجود دارد

$$X, Y \in \{+, -, \circ\}^{n-2k+2} \setminus \{o\}^{n-2k+2}$$

و $X \leq Y$ به طوری که $h(X) = -h(Y)$. داریم $|h(X)| = |h(Y)|$ و از $X \leq Y$ نتیجه می‌شود که

$$max(X) \leq max(Y)$$

و از طرفی توابع $h(X)$ و $h(Y)$ علامت‌های متفاوتی دارند، لذا

$$max(X) \neq max(Y) \Longrightarrow max(X) \leq max(Y) - 1$$

با توجه با رابطه ۴.۴ داریم:

$$max(Y) - 1 \leq |h(Y)| = |h(X)| \leq max(X) \leq max(Y) - 1$$

لذا

$$max(X) = |h(X)| = |h(Y)| = max(Y) - 1$$

بنابراین مجموعه X در حالت اول قرار می‌گیرد. چون توابع $h(X)$ و $h(Y)$ علامت‌های متفاوتی دارند لذا مجموعه Y نیز در حالت اول قرار می‌گیرد درنتیجه $h(X) \neq -h(Y)$ که تناقض است. حال ادعا می‌کنیم که برای تمام

$$X, Y \in \{+, -, \circ\}^{n-2k+2} \setminus \{o\}^{n-2k+2}$$

که $X \leq Y$ نتیجه می‌دهد:

$$|h(X)| \leq |h(Y)|. \qquad (۶.۴)$$

اثبات ادعا:

(فرض خلف) فرض می‌کنیم که وجود دارد

$$X, Y \in \{+, -, \circ\}^{n-2k+2} \setminus \{o\}^{n-2k+2}$$

و $X \leq Y$ به طوری که $|h(Y)| < |h(X)|$.

به وضوح $max(X) \leq max(Y)$. با توجه به رابطه ۴.۴ داریم

$$max(Y) - 1 \leq |h(Y)| < |h(X)| \leq max(X) \Longrightarrow |h(Y)| < |h(X)| = max(X) = max(Y)$$

بنابراین مجموعه X در حالت اول قرار می‌گیرد و چون $X \leq Y$ لذا $X = Y$ می‌باشد درنتیجه $h(X) = h(Y)$ که تناقض است. واضح است که تابع $h \circ g$ تابعی متقارن است. از رابطه‌های ۳.۴ و ۵.۴ و ۶.۴، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $X, Y \in \sum_{2k-2}^{n}$ که $X \leq Y$ داریم:

$$(h \circ g)(X) \neq -(h \circ g)(Y)$$

و

$$|(h \circ g)(X)| \leq |(h \circ g)(Y)|$$

با توجه به قضیه ۲.۳.۴، یک جفت تطابق (hog)ـمجاز دنباله‌ای زیر وجود دارد

$$A_{2k-1}, A_{2k}, \ldots, A_n \in \sum_{2k-2}^{n},$$
$$B_{2k-1}, B_{2k}, \ldots, B_n \in \sum_{2k-2}^{n}.$$

و به عبارت دیگر برای $j = 2k-1, \ldots, n$ داریم

$$|A_j| = j = |B_j|. \tag{۷.۴}$$

بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم

$$h(g(A_j)) = (-1)^{j-1}(j-2k+2).$$

برای $j = 2k-1, \ldots, n$ داریم

$$h(g(B_j)) = (-1)^{j}(j-2k+2). \tag{۸.۴}$$

با توجه به رابطه ۸.۴ و تعریف تابع h مجموعه‌های $g(A_n)$ و $g(B_n)$ مجموعه‌ای $(n-2k+2)$-متناوب هستند. توابع $h(g(A_n))$ و $h(g(A_{n-1}))$ توابعی با علامت‌های مختلف هستند و می‌دانیم که

$$max(g(A_{n-1})) \leq max(g(A_n)) = n-2k+2.$$

در نتیجه

$$max(g(A_{n-1})) \leq n-2k+2.$$

چون $|(h \circ g)(A_{n-1})| = n-2k+1$ لذا $g(A_{n-1})$ تابعی $(n-2k+1)$-متناوب است. به طور مشابه مجموعه $g(B_{n-1})$ نیز مجموعه‌ای $(n-2k+1)$-متناوب است. با ادامه این روش ثابت می‌شود که به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n-2k+2$ مجموعه‌های زیر i-متناوب هستند.

$$g(B_{2k-2+i}) \qquad , \qquad g(A_{2k-2+i}). \tag{۹.۴}$$

بنابراین به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n-2k+2$ داریم:

$$\begin{aligned} & g(A_{2k-2+i})^{+} \cup g(A_{2k-2+i})^{-} = \\ & g(B_{2k-2+i})^{+} \cup g(B_{2k-2+I})^{-} = [i]. \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

چون مجموعه‌های A_j و B_j برای $j = 2k-1, \ldots, n$ یک جفت تطابق $(h \circ g)$-مجاز دنباله‌ها هستند، مجموعه علامت‌دار C با شرط $|C^{+}| = |C^{-}| = k-1$ وجود دارد به طوری که $C \leq A_{2k-1}$ و $C \leq B_{2k-1}$. با توجه به رابطه ۸.۴ داریم

$$h(g(A_{2k-1})) = +1 \qquad , \qquad h(g(B_{2k-1})) = -1.$$

لذا

$$g(A_{۲k-۱}) = (+, ۰, \dots, ۰),$$
$$g(B_{۲k-۱}) = (-, ۰, \dots, ۰).$$

لذا طبق تعریف تابع g داریم که

$$|A^{+}_{۲k-۱}| = k = |B^{-}_{۲k-۱}|$$
$$|A^{-}_{۲k-۱}| = k - ۱ = |B^{+}_{۲k-۱}|. \qquad (۱۱.۴)$$

با توجه به رابطه‌های ۷.۴ و ۹.۴ و ۱۱.۴ و تعریف تابع g برای $j = ۲k-۱, ۲k, \dots, n$ نتیجه زیر را داریم

$$|A^{-}_{j}| = \lfloor \frac{j}{۲} \rfloor = |B^{+}_{j}|,$$
$$|A^{+}_{j}| = \lfloor \frac{j+۱}{۲} \rfloor = |B^{-}_{j}|. \qquad (۱۲.۴)$$

با توجه به رابطه ۱۲.۴ داریم:

$$C^{-} = A^{-}_{۲k-۱},$$
$$C^{+} = B^{+}_{۲k-۱},$$
$$|A^{+}_{۲k-۱}| = |B^{-}_{۲k-۱}| = k.$$

با توجه به رابطه ۹.۴ و تابع g نتیجه می‌گیریم

$$C(A^{+}_{۲k-۱}) = C(B^{-}_{۲k-۱}) = ۱.$$

این یعنی $A^{+}_{۲k-۱} \cap B^{-}_{۲k-۱} \neq \emptyset$. در غیر این صورت تناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی C برای گراف کنسر $KG(n,k)$ دارد. قرار می‌دهیم

$$S = C^{+} \subseteq A^{+}_{۲k-۱},$$
$$T = C^{-} \subseteq B^{-}_{۲k-۱}.$$

به وضوح مجموعه‌های S و T جدا از هم هستند.بنابراین عدد $i_۱ \in [n] \setminus (S \cup T)$ چنان وجود دارد که

$$C(S \cup \{i_۱\}) = C(T \cup \{i_۱\}) = ۱.$$

در نتیجه

$$(A^{+}_{۲k-۱}, A^{-}_{۲k-۱}) = (S \cup \{i_۱\}, T),$$
$$(B^{+}_{۲k-۱}, B^{-}_{۲k-۱}) = (S, T \cup \{i_۱\}). \qquad (۱۳.۴)$$

قضیه را با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم.

مرحله اول: از رابطه ۱۲.۴ داریم

$$A^{+}_{۲k} = A^{+}_{۲k-۱},$$
$$B^{-}_{۲k} = B^{-}_{۲k-۱}.$$

و

$$|A^{-}_{۲k}| = |B^{+}_{۲k}| = k.$$

با توجه به رابطه ۱۳.۴ اعداد p و q وجود دارند به طوری که

$$p, q \in [n] \setminus (S \cup T \cup \{i_۱\}).$$

و

$$A^{-}_{۲k} = A^{-}_{۲k-۱} \cup \{p\} = T \cup \{p\},$$
$$B^{+}_{۲k} = B^{+}_{۲k-۱} \cup \{q\} = S \cup \{q\}.$$

با توجه به رابطه ۱۰.۴ و تعریف تابع g داریم

$$C(T \cup \{p\}) \in g(A_{۲k})^{-} \subseteq \{۱, ۲\}$$
$$C(S \cup \{q\}) \in g(B_{۲k})^{+} \subseteq \{۱, ۲\}.$$

از رابطه $C(S \cup \{i_۱\}) = C(T \cup \{i_۱\}) = ۱$ نتیجه می‌شود که
$$C(T \cup \{p\}) = C(S \cup \{q\}) = ۲.$$

در این صورت تناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی C برای گراف کنسر $KG(n, k)$ دارد.
چون مجموعه‌های S و T مجموعه‌هایی جدا از هم هستند ولی راس‌های $S \cup \{q\}$ و $T \cup \{p\}$ رنگ یکسانی گرفته‌اند و C یک رنگ‌آمیزی مجاز است لذا $p = q$ خواهد شد. $p = q = i_۲$ قرار می‌دهیم و این یعنی اعداد مختلف $i_۱, i_۲ \in [n] \setminus (S \cup T)$ چنان وجود دارد که

$$C(S \cup \{i_۱\}) = C(T \cup \{i_۱\}) = ۱,$$
$$C(S \cup \{i_۲\}) = C(T \cup \{i_۲\}) = ۲.$$

و لذا

$$(A^{+}_{۲k}, A^{-}_{۲k}) = (S \cup \{i_۱\}, T \cup \{i_۲\}),$$
$$(B^{+}_{۲k}, B^{-}_{۲k}) = (S \cup \{i_۲\}, T \cup \{i_۱\}).$$

مرحله دوم: t را عددی با شرط $۲ \leq t \leq n - ۲k + ۱$ در نظر می‌گیریم. فرض، t، عدد مختلف $i_۱, i_۲, \ldots, i_t \in [n] \setminus (S \cup T)$ چنان وجو دارد که

(a) برای $j = ۱, ۲, \ldots, t$

$$C(S \cup \{i_j\}) = C(T \cup \{i_j\}) = j.$$

(b)

$$(A^+_{۲k-۲+t}, A^-_{۲k-۲+t}) = (S \cup \{i_۱, i_۳, \ldots, i_{۲\lceil\frac{t-۱}{۲}\rceil}\}, T \cup \{i_۲, i_۴, \ldots, i_{۲\lfloor\frac{t-۱}{۲}\rfloor+۱}\}).$$

(c)

$$(B^+_{۲k-۲+t}, B^-_{۲k-۲+t}) = (S \cup \{i_۲, i_۴, \ldots, i_{۲\lfloor\frac{t-۱}{۲}\rfloor}\}, T \cup \{i_۱, i_۳, \ldots, i_{۲\lceil\frac{t-۱}{۲}+۱\rceil}\}).$$

اگر t عددی **فرد** باشد آنگاه

$$\begin{aligned} t &= ۲\lfloor\frac{(t+۱)-۱}{۲}\rfloor + ۱ = ۲\lfloor\frac{t-۱}{۲}\rfloor + ۱, \\ t+۱ &= ۲\lceil\frac{(t+۱)-۱}{۲}\rceil = ۲\lceil\frac{t-۱}{۲}\rceil + ۲. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه ۱۲.۴ داریم

$$\begin{aligned} A^+_{۲k-۱+t} &= A^+_{۲k-۲+t}, \\ |A^-_{۲k-۱+t}| &= |A^-_{۲k-۲+t}| + ۱. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} B^-_{۲k-۱+t} &= B^-_{۲k-۲+t}, \\ |B^+_{۲k-۱+t}| &= |B^+_{۲k-۲+t}| + ۱. \end{aligned}$$

از روابط b و c اعداد $p, q \in [n] \setminus (S \cup T \cup \{i_۱, i_۲, \ldots, i_t\})$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} A^-_{۲k-۱+t} &= A^-_{۲k-۲+t} \cup \{p\} = T \cup \{i_۲, i_۴, \ldots, i_{t-۱}, p\}, \\ B^+_{۲k-۱+t} &= B^+_{۲k-۲+t} \cup \{q\} = S \cup \{i_۲, i_۴, \ldots, i_{t-۱}, q\}. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه ۱۰.۴ و تعریف تابع g داریم

$$C(T \cup \{p\}) \in g(A_{2k-1+t})^- \subseteq \{1, 2, \ldots, t+1\},$$
$$C(S \cup \{q\}) \in g(B_{2k-1+t})^+ \subseteq \{1, 2, \ldots, t+1\}.$$

از رابطه (a) داریم

$$C(T \cup \{p\} = C(S \cup \{q\}) = t + 1.$$

در این صورت تناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی C برای گراف کنسر $KG(n,k)$ دارد. فرض می‌کنیم: $i_{t+1} = p = q$. به عبارت دیگر عدد i_{t+1} چنان وجود دارد که

$$i_{t+1} \in [n] \setminus (S \cup T \cup \{i_1, \ldots, i_t\})$$

و

$$C(S \cup \{i_{t+1}\}) = C(T \cup \{i_{t+1}\}) = t + 1.$$

لذا نتیجه می‌گیریم

$$A^-_{2k-1+t} = T \cup \{i_2, i_4, \ldots, i_{t+1}\},$$
$$B^+_{2k-1+t} = S \cup \{i_2, i_4, \ldots, i_{t+1}\}.$$

به طوری که داریم

$$t = 2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} + 1 \rceil,$$
$$t + 1 = 2\lfloor \frac{(t+1)-1}{2} \rfloor.$$

حال اگر t عددی **زوج** باشد پس

$$t = 2\lfloor \frac{(t+1)-1}{2} \rfloor = 2\lfloor \frac{(t-1)}{2} \rfloor,$$
$$t + 1 = 2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} + 1 \rceil = (2\lceil \frac{(t-1)}{2} \rceil + 1) + 2.$$

با توجه به رابطه ۱۲.۴ داریم

$$\begin{aligned} |A^+_{2k-1+t}| &= |A^+_{2k-2+t}| + 1, \\ A^-_{2k-1+t} &= A^-_{2k-2+t}, \\ B^+_{2k-1+t} &= B^+_{2k-2+t}, \\ |B^-_{2k-1+t}| &= |B^-_{2k-2+t}| + 1. \end{aligned}$$

با توجه به روابط (b) و (c) اعداد

$$p, q \in [n] \setminus (S \cup T \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_t\})$$

وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} A^+_{2k-1+t} &= A^+_{2k-2+t} \cup \{p\} = S \cup \{i_1, i_3, \ldots, i_{t-1}, p\}, \\ B^-_{2k-1+t} &= B^-_{2k-2+t} \cup \{q\} = T \cup \{i_1, i_3, \ldots, i_{t-1}, q\}. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه ۱۰.۴ و تعریف تابع g داریم

$$\begin{aligned} C(S \cup \{p\}) &\in g(A_{2k-1+t})^+ \subseteq \{1, 2, \ldots, t+1\}, \\ C(T \cup \{q\}) &\in g(B_{2k-1+t})^- \subseteq \{1, 2, \ldots, t+1\}. \end{aligned}$$

از رابطه (a) داریم

$$C(S \cup \{p\}) = C(T \cup \{q\}) = t + 1.$$

در این صورت متناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی C برای گراف کنسر $KG(n,k)$ است. لذا $p = q$ خواهد شد.قرار می‌دهیم: $i_{t+1} = p = q$.

به عبارت دیگر عدد صحیح i_{t+1} چنان وجود دارد که

$$i_{t+1} \in [n] \setminus (S \cup T \cup \{i_1, \ldots, i_t\})$$

و

$$C(S \cup \{i_{t+1}\}) = C(T \cup \{i_{t+1}\}) = t + 1.$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} A^+_{2k-1+t} &= S \cup \{i_1, i_3, \ldots, i_{t+1}\}, \\ B^-_{2k-1+t} &= T \cup \{i_1, i_3, \ldots, i_{t+1}\}. \end{aligned}$$

به طوری که

$$t = 2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} \rceil,$$
$$t+1 = 2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} \rceil + 1.$$

بنابراین اعداد

$$i_1, i_2, \ldots, i_{t+1} \in [n] \setminus (S \cup T)$$

چنان وجود دارند که برای $j = 1, 2, \ldots, t+1$ داریم

$$C(S \cup \{i_j\}) = C(T \cup \{i_j\}) = j,$$

$$(A^+_{2k-2+(t+1)}, A^-_{2k-2+(t+1)}) = (A^+_{2k-1+t}, A^-_{2k-1+t)}) =$$

$$(S \cup \{i_1, i_3, \ldots, i_{2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} \rceil + 1}\}, T \cup \{i_2, i_4, \ldots, i_{2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} \rceil}\})$$

و

$$(B^+_{2k-2+(t+1)}, B_{2k-2+9t+1)}) = 9B^+_{2k-1+t}, B^-_{2k-1+t}) =$$

$$(S \cup \{i_2, i_4, \ldots, i_{2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} \rceil}\}, T \cup \{i_1, i_3, \ldots, i_{2\lceil \frac{(t+1)-1}{2} \rceil + 1}\}).$$

به استقرا $n - 2k + 2$ عدد صحیح

$$i_1, i_2, \ldots, i_{n-2k+2} \in [n] \setminus (S \cup T)$$

وجود دارد به طوری که برای $j = 1, 2, \ldots, n - 2k + 2$ داریم

$$C(S \cup \{i_j\}) = C(T \cup \{i_j\}) = j.$$

□

مراجع

[1] I. Bárány. A short proof of Kneser's Conjecture. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 25: 325-326 (refs: PP. 60, 64)

[2] P. -A. Chen, A new coloring theorem of Kneser Graphs, J. Combin. Theory Ser. A 118 (3) (2011) 1026-1071.

[3] V.L. Dol nikov, A certain combinatorial inequality, Siberian Math. J. 29 (1988) 375-397.

[4] K. Fan,A generalization of Tucker's Combinatorial lemma with topological applications, Ann. of math. 56 (1952) 431-437.

[5] Gal 56: M. R. Garey and D. S. Johnson. The Complexity of near-optimal.

[6] H. Hajiabolhassan, X. Zhu, Circular cheromatic number of Kneser graphs, J. combin. theory ser. B 88 (2) (2003) 299-303.

[7] A. Johnson, F.C. Holroyd, S. Stahl, Multichromatic numbers, star cheromatic numbers and Kneser graphs, J. Graph theory 26 (3) (1997) 137-145.

[8] M. Kneser, Ein Satz über, abelsche Gruppen mit Anwendungen auf. die Geometrie Zahlen. Math. Z. 61, 429-434, 1955

[9] I. Kříž: Equivariant Cohomology and lower bounds for Chromatic numbers, Tardos. Amer. Math. Soc. 333 (1992), 567-577.

[10] L. Lovász, Kneser's Conjecture, chromatic number, and homotopy, J. combin. theory ser. A, 25 (3) (1978) 319-324.

[11] J. Matoušek, A Combinatorial proof of Kneser's Conjecture, Combinatorica 24 (2004) 163-170

[12] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, lectures on topological methods in combinatorics and geometry, written in cooperation with A. Bj̈orner and G.M. Ziegler, 2003.

[13] F. Meunier, A topological lower bound for the circular chromatic number of Schrijver graphs, J. Graph theory 49 (4) (2005) 257-261.

[14] A. Scrhrijver, Vertex-Critical subgraphs of Kneser graphs, Nieuw Arch. Wisk. (3) 26 (1978) 454-461.

[15] G. Simonyi, G. Tardos, local Chromatic number, Ky Fan's Theorem and circular colorings, Combinatorica 26 (5) (2006) 578-626.

[16] A.W. Tucker, Some topological properties of disk sphere, in: proc. First Canadian Math. Congress, Montreal, 1945, University of Toronto press, Toronto, 1946, pp. 285-309.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

رنگ آمیزی .... coloring
$k-$رنگ پذیر .... k-colorable

خ

خم .... curve

د

دنباله .... sequence

ر

راس .... vertex
راس‌ها .... vertices
رنگ‌آمیزی .... coloring
رنگ‌آمیزی مجاز .... proper coloring

ز

زیرگراف .... subgraph
زوج .... even

ش

شرایط .... conditions

ع

عدد رنگی .... chromatic number
عدد رنگی کسری .... fractional chromatic number
عدد رنگی دوری .... circular chromatic number

ک

کلاس‌رنگی .... color class
کمر .... girth

گ

گراف .... graph

گراف ساده .... simple graph

گراف کامل .... complete graph

گراف کنسر .... kneser graph

گشتاور .... moment

م

متقابل .... corresponding

متقاطع .... intersecting

متعامد .... orthogonal

مثلث‌بندی .... triangulation

مجاور .... adjacent

مجموعه‌ی مستقل .... independent set

مسیر .... path

مجتمع سادکی .... simplicail complex

ن

نیمکره .... hemisphere

ه

همسایه .... neighbor

هندسی .... geometric

ی

یال .... edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent .... مجاور

B

chromatic number .... رنگی عدد

coloring .... رنگ‌آمیزی

C

chromatic number .... عدد رنگی

coloring .... رنگ آمیزی

complete graph .... گراف کامل

condittions .... شرایط

corresponding .... متقابل

curve .... خم

cycle .... دور

D

degree .... درجات

E

edge .... یال

elementary .... اصلی

even .... زوج

extension .... بسط

F

fractional chromatic number .... عدد رنگی کسری

G

geometric .... هندسی

graph .... گراف

H

hemisphere .... نیمکره

I

independent set .... مجموعه مستقل

intersecting .... متقاطع

K

k-colorable .... $k-$رنگ پذیر

k-coloring .... $k-$رنگ آمیزی

Kneser gragh .... گراف کنسر

M

moment .... گشتاور

N

neighbor .... همسایه

O

orthogonal .... متعامد

P

proper coloring .... رنگ آمیزی مجاز

S

sequence .... دنباله

simple graph .... گراف ساده

subgraph .... زیرگراف

system .... کمر

T

triangulation .... مثلث‌بندی

V

vertex .... راس

vertice .... راس‌ها

نمایه

Abstract

A Kneser gragh KG(n,k) is a gragh whose vertex set is the set of all k-subsets of $\{1, 2, ..., n\}$ and two vertices are adjecent if their corresponding sets are disjoint. Kneser 1955 conjectured the chromatic number of $KG(n, k)$ is $n - 2k + 2$ provided that $n \geq 2k$. This conjecture received an affirmative answer by a break through of Lovasz. He used algebraic topology in his proof which is known as the begining of the field of combinatorial topology. Lovasz's result has been generalized in several ways with different proofs. In this thesis, we discuss some of these generalization.

Keywords:

Kneser graph; chromatic number; proper coloring; circular chromatic number; traingulation; simplicial complex

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

A COMBINATORIAL PROOF OF KNESER'S CONJECTURE

Mehri Seyedabolhosini

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

2016