دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

کران برای صفرهای چند جمله‌ای

نگارش

سارا اسماعیلی

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

آبان ۱۳۸۹

قدردانی

قبل از هر چیزخداوند مهربان را شکر می گویم که این موهبت را نصیب من نمود تا بتوانم در وادی علم ودانش ، قدمی هر چند ناچیز بردارم .

از استاد راهنمایم آقای دکتر احمد زیره به خاطر کمکهای بی دریغش صمیمانه تشکر می کنم .

همچنین مراتب تشکر وقدردانی خود را ازاستاد مشاورم آقای دکتر هاشمی ابراز می دارم .

از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم .

تقدیمی به :

پدر و مادر عزیزم

در برابر گوهر وجودتان زانوی ادب بر زمین می نهم

وبا دلی مالامال از عشق بر خاک پایتان بوسه می زنم

واز صمیم قلب می گویم که تا حد پرستش دوستتان دارم ...

وبه **همسر عزیزم** که همواره در این راه مرا یاری و پشتیبانی نمودند .

چکیده

بنابر قضیه اساسی جبر، هر چند جمله‌ای غیر ثابت حداقل یک ریشه دارد. از این قضیه به راحتی می توان نتیجه گرفت که هر چند جمله‌ای غیر ثابت از درجه‌ی n ، دقیقاً n ریشه (که لزوماً متمایز نیستند) دارد .این قضیه وجود ریشه‌ها را ثابت می کند و لی روشی برای پیدا کردن مکان ریشه‌ها ارائه نمی دهد.از آنجایی که هیچ روشی برای پیدا کردن مکان دقیق ریشه‌ها ($n \geq ۵$)موجود نمی باشد ، لذا طی قرون گذشته مقالات زیادی در این خصوص به چاپ رسیده است که هر کدام با اعمال شرایطی روی ضرایب ، مکان ریشه ها را مورد مطالعه قرار می دهد . همچنین روش های متعددی برای پیدا کردن ناحیه هایی (دوایری) در صفحه مختلط ارائه شده که می توان مطمئن بود در شرایط خاص ، ریشه‌های یک چند جمله‌ای در این نواحی باشند . در قرن بیستم مسأ له بررسی ریشه‌های یک چند جمله‌ای ، یک قسمت از نظریه‌ی کاربردی توابع را تشکیل داد. این زمینه‌ی خاص در نظریه‌ی کاربردی توابع را نظریه‌ی آنالیزی چند جمله‌ای ها یا هندسه‌ی چند جمله‌ای هانامیده می شود. مسأ له مهمی که در هندسه‌ی چند جمله‌ای ها مطرح می شود، محاسبه وتخمین کران های بالایی وپائینی برای قدر مطلق ریشه های یک چند جمله‌ای مختلط است . به عبارت دیگر اساساً این موضوع مدنظر است که قرص بسته یابازی در صفحه مختلط پیدا کنیم که همه یا$p < n$ ریشه از یک چند جمله‌ای مختلط درجه n ام را در بر گیرد.برای مثال این کران ها کاربردهای عملی سودمندی در آنالیز عددی و مسائل آن وهمچنین مسائل مقدار ویژه خواهند داشت.. زیرااین مساله‌ثابت شده است که هیچ فرمول ویا دستور مشخصی برای محاسبه ریشه های چند جمله‌ای مختلط $f(z) = z^n + a_n z^{n-۱} + \cdots + a_۱$ که $a_i \in \mathbb{C}$ و $n \geq ۵$ وجود ندارد ، بنابراین ،این کران ها نواحی خاصی در صفحه مختلط معرفی می کنند که برای هر چند جمله ای مختلط می توان مطمئن بود ریشه‌ها در آن نواحی به طور بهینه قرار دارند .به طور کلی ، در این رساله ، با چند جمله‌ای های مختلط یعنی چند جمله ای هایی که دارای ضرایب مختلط هستند سر وکار داریم . در این رساله ،بامکان ریشه های یک چند جمله ای مختلط یک متغیره سر وکار خواهیم داشت وکران های بالایی وپائینی برای قدر مطلق ریشه های این چند جمله ای هامعرفی وثابت می کنیم که در واقع به معنی معرفی یک قرص باشعاع جدید در صفحه مختلط است به طوریکه ،برای یک چند جمله‌ای مختلط یک متغیره تمامی ریشه های آن داخل این قرص باشند.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم ، به ارائه‌ی کران برای صفرهای چند جمله‌ای برپایه‌ی ضرایب پرداخته می شود .

در فصل سوم ، کران هایی برای صفرهای چند جمله‌ای بر پایه‌ی محاسبه‌ی ماتریس همراه ارائه می شود .

در فصل چهارم ، به ارائه‌ی چندین مثال برای نتایج به دست آمده در فصل های قبل پرداخته وبایکدیگرمقایسه می کنیم .

مراجع اصلی در این پایان نامه عبارتند از [۲۳] و [۲۲] و [۲] و [۱۹] و[۹] و[۸] و [۳].

واژه‌های کلیدی: چند جمله‌ای مختلط – کران –اعدادفیبوناتچی –اعداد پل [۱] – ماتریس همراه—نرم—مقداریژه.

---

[۱] Pell

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نماد و تعاریف

در این رساله از علائم زیر استفاده می‌شود :

$\mathbb{C}$: مجموعه‌ی اعداد مختلط

$|z|$: قدر مطلق صفرهای چند جمله‌ای

$I = \{0, 1, \cdots, n\}$

$B(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$

$\overline{B(r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$

$z[p(z)]$: مجموعه‌ی صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$

$M[p(z)]$: بزرگترین قدر مطلق صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱ چند جمله‌ای $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ به طوری که $a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \in I$ وبرای بعضی مقادیر i ، $a_i \neq 0$ باشد ، چند جمله‌ای مختلط نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱ چند جمله ای $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ چند جمله‌ای تکین نامیده می شود هرگاه $a_n = 1$ باشد .

تعریف ۳.۱.۱ در این رساله $a = \max_{i \in I} |a_i|$ تعریف می شود .

تعریف ۴.۱.۱ اعداد فیبوناتچی[1] به صورت زیر تعریف می شوند: [۷]

$F_0 = 0$ ، $F_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ داریم $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

تعریف ۵.۱.۱ اعداد پل[2] به صورت زیر تعریف می شوند:

$P_0 = 0$ ، $P_1 = 1$ وبرای $n \geq 2$ $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

---

[1] Fibonatchi

[2] Pell

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید $p(z) = z^n + a_n z^{n-۱} + a_{n-۱} z^{n-۲} + \cdots + a_۲ z + a_۱$ یک چند جمله‌ای تکین از درجه‌ی $n \geq ۳$ با ضرایب مختلط باشد به طوری که $a_۱ \neq ۰$ باشد . ماتریس همراه به صورت زیرتعریف می شود:

$$C(P) = \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-۱} & \cdots & -a_۲ & -a_۱ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $M_n(\mathbb{C})$ فضای همه‌ی ماتریس های $n \times n$ مختلط باشد، آنگاه برای $A \in M_n(\mathbb{C})$ داریم :

الف : $\sigma(A)$: مجموعه‌ی مقادیرویژه‌ی A که طیف A نامیده می شود.

ب : $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = ۱\}$ برد عددی A نامیده می شود .

ج : $r(A) = \max_{i \in I} |\lambda_i|$ شعاع طیفی A نامیده می شود(λ_i هامقادیرویژه‌ی ماتریس A هستند).

د : $w(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in W(A)\}$ شعاع عددی A نامیده می شود .

ه : $\|A\|$ نرم طیفی A نامیده می شود .

تعریف ۸.۱.۱ ماتریس A نرمال نامیده می شود هرگاه $A^\star A = AA^\star$ باشد.

تعریف ۹.۱.۱ ماتریس A هرمیتی نامیده می شود هرگاه$A = A^\star = (\overline{A})^t$ باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ منظور از مقدار ویژه‌ی A ، اسکالر λ است که به ازای آن یک ماتریس $n \times ۱$ ناصفر x وجود داشته باشد به طوریکه $Ax = \lambda x$. این ماتریس ستونی x را بردار ویژه‌ی نظیر λ می نامند .

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$، آنگاه ماتریس متمم A برابر با ماتریس $n \times n$ با نماد $adjA$ تعریف می شود به طوریکه $[adjA]_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$.

تعریف ۱۲.۱.۱ برای هر ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ نامساوی چور[۳] به صورت زیربیان می شود:

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \tag{۲}$$

[۳] Schur's

۲.۱ قضایای پایه

در این بخش چند قضیه از آنالیز مختلط که در فصول بعدی مورد نیاز هستند بیان می شود .

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه اساسی جبر) اگر $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ $(a_n \neq 0)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد ، آنگاه $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ موجودند به‌طوریکه

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \qquad (۳)$$

و z_i ها لزوماً متمایز نیستند.

قضیه ۲.۲.۱ چند جمله‌ای

$$Q(x) = x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \cdots - |a_1|x - |a_0|$$

به طوری که a_i ها ضرایب مختلط باشند ، ریشه‌ی مثبت ویکتا دارد. [۴]

برهان: بدیهی است وقتی $x \to \infty$، $Q(x) \to \infty$ وهمچنین برای $\epsilon > 0$، $Q(x) < 0$ می باشد ، بنابراین Q(x) حداقل یک صفر مثبت دارد.

اثبات یکتایی

فرض کنید Q(x) دو ریشه‌ی مثبت ویکتا داشته باشد.

$$Q_*(x) = x^n(\frac{1}{x^n} - C_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} - C_{n-2}\frac{1}{x^{n-2}} - \cdots - C_1\frac{1}{x} - C_0)$$

$$Q_*(x) = x^n Q(\frac{1}{x}) = -|a_0|x^n - |a_1|x^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|x + 1$$

با استفاده از قضیه رول Q_* یک نقطه‌ی بحرانی مثبت دارد ولی واضح است که برای $x > 0$ ، $Q_*'(x) < 0$ می باشد .

$$Q_*'(x) = -n|a_0|x^{n-1} - (n-1)|a_1|x^{n-2} - \cdots - |a_{n-1}|$$

که یک تناقض است . □

قضیه ۳.۲.۱ (کران کلاسیک یا قدیمی کوشی)

فرض کنید $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چند جمله‌ای مختلط باشد ،آنگاه همه‌ی صفرهای $P(z)$ در دیسک زیر قرار می گیرند .

$$\{z : |z| < \eta\} \subset \{z : |z| < 1 + a\} \tag{4}$$

به طوری که $a = \max_{i \in I} |a_i|$ و η ریشه‌ی مثبت و یکتای چند جمله‌ای Q(x) با ضرایب ثابت می باشد .به طوریکه

$$Q(x) = x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \cdots - |a_1|x - |a_0|. \tag{5}$$

قضیه ۴.۲.۱ صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$ دقیقاً مقادیر ویژه‌ی ماتریس همراه $C(P)$ می باشند .

قضیه ۵.۲.۱ اگر $T = a \otimes b$ آنگاه $w(t) = \frac{\|a\|.\|b\| + |<a|b>|}{2}$

فصل ۲

کران برای صفرهای چند جمله‌ای با استفاده از ضرایب

۱.۲   اعداد فیبوناتچی

در این بخش از اعداد فیبوناتچی و ضرایب چند جمله‌ای استفاده کرده و یک ناحیه حلقه‌ای شامل صفرهای چندجمله‌ای به دست می آوریم .

لم ۱.۱.۲ برای اعداد فیبوناتچی وضرایب چند جمله‌ای رابطه‌ی زیر برقرار است :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}3^{k}F_{k}C(n,k)=F_{4k} \qquad (1)$$

و $F_n=a\alpha^n+b\beta^n$ به طوری که $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $b=\frac{-1}{\sqrt{5}}$ و $\alpha=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ و $\beta=\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$.

برهان:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}3^{k}F_{k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1-\alpha\beta)^{n-k}(1-2\alpha\beta)^{k}F_{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^{2}+\alpha\beta+\beta^{2})^{n-k}(\alpha^{3}+\alpha^{2}\beta+\alpha\beta^{2}+\beta^{3})^{k}F_{k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{(n-k)}\binom{n}{k}(\alpha\beta)^{n-k}\left(\sum_{\ell}^{2}\beta^{\ell}\alpha^{2-\ell}\right)^{n-k}\\
&\times \left(\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right)^{k}(a\alpha^{k}+b\beta^{k})\\
&= a\alpha^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\beta^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{2}\beta^{\ell}\alpha^{2-\ell}\right)^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right)^{k}\right\}\\
&+ b\beta^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{2}\beta^{\ell}\alpha^{2-\ell}\right)^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right)^{k}\right\}\\
&= a\alpha^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right)^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{2}\beta^{\ell+1}\alpha^{2-\ell}\right)^{n-k}\right\}\\
&+ b\beta^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right)^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{2}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right)^{n-k}\right\}\\
&= a\alpha^{n}\left\{\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}-\sum_{\ell=0}^{2}\beta^{\ell+1}\alpha^{2-\ell}\right\}^{n}\\
&+ b\beta^{n}\left\{\sum_{\ell=0}^{3}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}-\sum_{\ell=0}^{2}\beta^{\ell}\alpha^{3-\ell}\right\}^{n}\\
&= a\alpha^{n}(\alpha^{3})^{n}+b\beta^{n}(\beta^{3})^{n}=a\alpha^{4n}+b\beta^{4n}=F_{4n}.
\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۱.۲ فرض کنید $(a_k \neq ۰)$ $A(z) = \sum_{k=۰}^{n} a_k z^k$ یک چند جمله‌ای مختلط غیر ثابت و z یک صفر p(z) باشد .آنگاه همه‌ی صفرهای چند جمله‌ای در حلقه‌ی

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r_۱ \leq |z| \leq r_۲\}$$

قرار می گیرند به طوری که

$$r_۱ = \frac{۳}{۲} \min_{۱\leq k\leq n} \left\{ \frac{۲^n F_k C(n,k)}{F_{۴n}} \left|\frac{a_۰}{a_k}\right| \right\}^{\frac{۱}{k}} \tag{۲}$$

و

$$r_۲ = \frac{۳}{۲} \max_{۱\leq k\leq n} \left\{ \frac{F_{۴n}}{۲^n F_k C(n,k)} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \right\}^{\frac{۱}{k}} . \tag{۳}$$

برهان: برای اثبات قضیه ازرابطه‌ی زیراستفاده می شود:

$$\sum_{k=۱}^{n} ۲^{n-k} ۳^k F_k C(n,k) = F_{۴k} \tag{۴}$$

بااستفاده ازرابطه‌ی (۲) داریم :

$$r_۱^k \leq \frac{۲^{n-k} ۳^k F_k C(n,k)}{F_{۴n}} \left|\frac{a_۰}{a_k}\right| \qquad k = ۱, ۲, \cdots, n \tag{۵}$$

باید نشان دهیم $r_۱ \leq |z|$.

فرض کنید $|z| < r_۱$ (فرض خلف)

$$\begin{aligned} |A(z)| &= |\sum_{k=۰}^{n} a_k z^k| \\ &\geq |a_۰| - \sum_{k=۱}^{n} |a_k||z^k| \end{aligned}$$

$$> \quad |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| r_1^k$$

$$= \quad |a_0|(1 - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_k}{a_0}\right| r_1^k) \qquad (6)$$

از (۵) داریم :

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| r_1^k \leq \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \qquad k = 1, 2, \cdots, n. \qquad (7)$$

با جایگذاری (۷) در (۶) ، داریم :

$$|A(z)| > |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_k}{a_0}\right| r_1^k\right) \geq |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}}\right) = 0 \qquad (8)$$

ثابت شد اگر $|z| < r_1$ ، آنگاه $A(z) > 0$. در نتیجه $A(z)$ هیچ صفری در $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$ ندارد، بنابراین داریم :

$$|z| \geq r_1$$

بدیهی است همه‌ی صفرهای $A(z)$ قدر مطلقی کمتر یامساوی ریشه‌ی مثبت ویکتای معادله‌ی

$$G(z) = |a_n| z^n - |a_{n-1}| z^{n-1} - \cdots - |a_1| z - |a_0| = 0 \qquad (9)$$

دارند. [۲۸]

برای اثبات قسمت دوم قضیه کافیست نشان دهیم $G(r_2) \geq 0$.

بااستفاده ازرابطه‌ی (۳) داریم :

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} r_2^k \qquad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (10)$$

بنابراین

$$G(r_2) \quad = \quad |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| r_2^{n-k} \right]$$

$$\geq \quad |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} r_2^k \right) r_2^{n-k} \right]$$
$$= \quad |a_n| r_2^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \right) = 0.$$

□

قضیه ۳.۱.۲ فرض کنید r و s ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - ax - b = 0$ و a و b اعداد حقیقی و مثبت باشند .دو دنباله‌ی $\{A_n\}_{n\in N}$ و $\{B_n\}_{n\in N}$ به صورت زیر تعریف می شوند :

$$A_n = cr^n + ds^n \qquad , \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k s^{n-1-k}$$

به طوری که c و d اعداد ثابت حقیقی باشند .

اگر $j \geq 2$ آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bB_{j-1})^{n-k} B_j^k A_k = A_{jn}. \tag{11}$$

در جمله‌ی قبل اگر $r \neq s$ ، $B_n = (r^n - s^n)/(r-s)$ و اگر $r = s$ ، $B_n = ns^{n-1}$.

برهان: از معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - ax - b = 0$ داریم :

$$a = r + s \qquad , \qquad b = -rs.$$

با جایگذاری a و b و A_n و B_n در (۱۱) داریم :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (rs)^{n-k} \left(\sum_{\ell=0}^{j-2} s^\ell r^{j-2-\ell} \right)^{n-k} \left(\sum_{\ell=0}^{j-1} s^\ell r^{j-1-\ell} \right)^{k} (cr^k + ds^k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} r^{n-k} s^{n-k} \left(\sum_{\ell=0}^{j-2} s^\ell r^{j-2-\ell} \right)^{n-k} \left(\sum_{\ell=0}^{j-1} s^\ell r^{j-1-\ell} \right)^{k} cr^k$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}r^{n-k}s^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell}r^{j-2-\ell}\right)^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right)^{k}ds^{k}\\
&=cr^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}s^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell}r^{j-2-\ell}\right)^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right)^{k}\right\}\\
&+ds^{k}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}r^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell}r^{j-2-\ell}\right)^{n-k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right)^{k}\right\}\\
&=cr^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right)^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell+1}r^{j-2-\ell}\right)^{n-k}\right\}\\
&+ds^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right)^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right)^{n-k}\right\}\\
&=cr^{n}\left\{\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}-\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell+1}r^{j-2-\ell}\right\}^{n}\\
&+ds^{n}\left\{\sum_{\ell=0}^{j-1}s^{\ell}r^{j-1-\ell}-\sum_{\ell=0}^{j-2}s^{\ell}r^{j-1-\ell}\right\}^{n}\\
&=cr^{n}(r^{j-1})^{n}+ds^{n}(s^{j-1})^{n}=cr^{jn}+ds^{jn}=A_{jn}
\end{aligned}
$$

□

توجه کنید اگر $a=b=1$ و $j=2,3$ ، ازرابطه‌ی $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(bB_{j-1})^{n-k}B_j^kA_k=A_{jn}$ اتحادهای cecaro به دست می آید به طوری که

اگر $j=2$ داریم :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n} \tag{12}$$

واگر $j=3$

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}F_k=F_{3n} \tag{13}$$

قضیه ۴.۱.۲ فرض کنید $(a_k\neq 0)$ $A(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ یک چند جمله‌ای مختلط غیر ثابت و z یک صفر p(z) باشد .آنگاه برای $j\geq 2$ ، همه‌ی صفرهای چند جمله‌ای در حلقه‌ی $C=\{z\in\mathbb{C}:r_1\leq|z|\leq r_2\}$ قرار می گیرند ، به طوری که

$$r_{۱} = \min_{۱\leq k\leq n}\left\{\frac{\binom{n}{k}A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}}\left|\frac{a_\circ}{a_k}\right|\right\}^{\frac{۱}{k}} \tag{۱۴}$$

و

$$r_{۲} = \max_{۱\leq k\leq n}\left\{\frac{A_{jn}}{\binom{n}{k}A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\right\}^{\frac{۱}{k}} \tag{۱۵}$$

برهان: برای اثبات کافی‌است نشان دهیم $|z| \leq r_{۱}$. فرض کنید $|z| > r_{۱}$ (فرض خلف) ، آنگاه از $A(z) = \sum_{k=\circ}^{n} a_k z^k$ داریم :

$$\begin{aligned} |A(z)| &= |\sum_{k=\circ}^{n} a_k z^k| \\ &\geq |a_\circ + \sum_{k=۱}^{n} a_k z^k| \\ &\geq |a_\circ| - \sum_{k=۱}^{n} |a_k||z^k| \\ &> |a_\circ| - \sum_{k=۱}^{n} |a_k| r_{۱}^k \\ &= |a_\circ|(۱ - \sum_{k=۱}^{n}\left|\frac{a_k}{a_\circ}\right| r_{۱}^k) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

بااستفاده ازتعریف $r_{۱}$ داریم :

$$\left|\frac{a_k}{a_\circ}\right| r_{۱}^k \leq \frac{\binom{n}{k}A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}}, \qquad k = ۱, ۲, \cdots, n. \tag{۱۷}$$

با جایگذاری (۱۷) در (۱۶) داریم :

$$|A(z)| > |a_\circ|\left(۱ - \sum_{k=۱}^{n}\left|\frac{a_k}{a_\circ}\right| r_{۱}^k\right) \geq |a_\circ|\left(۱ - \sum_{k=۱}^{n}\frac{\binom{n}{k}A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}}\right) = \circ. \tag{۱۸}$$

بنابراین $A(z)$ هیچ صفری در $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$ ندارد . واضح است که همه‌ی صفرهای $A(z)$ قدر مطلقی کمتر یا مساوی ریشه‌ی مثبت و یکتای معادله‌ی زیر دارند :

$$B(z) = |a_n|z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \cdots - |a_1|z - |a_0| = 0$$

قسمت دوم قضیه اثبات خواهد شد اگر نشان دهیم $B(r_2) \geq 0$.

بااستفاده از تعریف r_2 داریم :

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-1})^{n-k}}{A_{jn}} r_2^k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{19}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} B(r_2) = |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| r_2^{n-k}\right] &\geq |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-1})^{n-k}}{A_{jn}} r_2^k\right) r_2^{n-k}\right] \\ = |a_n| r_2^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-1})^{n-k}}{A_{jn}}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

□

نتیجه ۵.۱.۲ فرض کنید $(a_k \neq 0) \quad A(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ یک چند جمله‌ای مختلط غیر ثابت باشد. آنگاه همه‌ی صفرهای آن در حلقه‌ی $C = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ قرار می گیرند ، به طوری که

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^k P_k \binom{n}{k}}{P_{2n}} \left|\frac{a_0}{a_k}\right| \right\}^{\frac{1}{k}} \tag{21}$$

و

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{P_{2n}}{2^k P_k \binom{n}{k}} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \right\}^{\frac{1}{k}} \tag{22}$$

برهان: طبق رابطه‌ی (۱۱) داریم :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(bB_{j-1})^{n-k}B_j^kA_k=A_{jn}$$

رابطه‌ی فوق را برای اعداد پل[1] می نویسیم. داریم :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{j-1}^{n-k}B_j^kP_k=P_{jn}$$

با قرار دادن $j=2$ دررابطه‌ی قبل و با به کار بردن قضیه‌ی (۴.۱.۲) نتیجه ثابت خواهد شد . □

در این قسمت $Q(x)$ به صورت زیرتعریف می شود :

$$Q(x)=x^n-|a_{n-1}|x^{n-1}-|a_{n-2}|x^{n-2}-\cdots-|a_1|x-|a_0| \qquad (23)$$

چند جمله‌ای $Q(x)$ تنها یک ریشه‌ی مثبت ویکتامانند η دارد.هم چنین داریم :

$$Q(x)<0 \quad \forall x\in(0,\eta) \quad , \quad Q(\eta)=0 \quad , \quad Q(x)>0 \quad \forall x\in(\eta,\infty)$$

چند جمله‌ای درجه ۳ با ضرایب حقیقی $Q_3(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$Q_3(x)\equiv x^3+(2-|a_{n-1}|)x^2+(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|)x-a \qquad (24)$$

و $a=\max_{i\in I}|a_i|$

به آسانی می توان نتیجه گرفت که چند جمله‌ای $Q_3(x)=0$ نیز ریشه‌ی مثبت و یکتا مانند δ_3 دارد.

قضیه ۶.۱.۲ همه صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$ در

$$|z|\leq\frac{1}{2}\{1+|a_{n-1}|+\sqrt{(1-|a_{n-1}|)^2+4a}\} \qquad (25)$$

قرار دارند . [۶]

---

[1] Pell

قضیه ۷.۱.۲ همه صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$ در

$$\{z:|z|<\eta\}\subset\{z:|z|<1+\delta_3\}\subseteq\{z:|z|<1+a\} \tag{26}$$

قرار می گیرند ،به طوری که δ_3 ریشه‌ی مثبت ویکتای معادله

$$Q_3(x)\equiv x^3+(2-|a_{n-1}|)x^2+(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|)x-a=0 \tag{27}$$

می باشد و $a=\max_{i\in I}|a_i|$ [۲۹] .

قضیه ۸.۱.۲ همه صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$ در

$$\{z:|z|<\eta\}\subset\{z:|z|<1+\delta_4\}\subseteq\{z:|z|<1+\delta_3\}\subseteq\{z:|z|<1+a\} \tag{28}$$

قرار می گیرند ،به طوری که δ_4 ریشه‌ی مثبت ویکتای معادله‌ی

$$Q_4(x)\equiv x^4+(3-|a_{n-1}|)x^3+(3-2|a_{n-1})x^2+(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|-|a_{n-3}|)x-a=0 \tag{29}$$

می باشد [۲۹].

لم ۹.۱.۲ فرض کنید

$$P(z)=z^n+\sum_{j=0}^{n-1}a_jz^j \qquad , \qquad a=\max_{j.\in I}|a_j|,$$

$Q_k(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$Q_k(x)\equiv x^k+\sum_{v=2}^{k}\left[C_{k-v}^{k-1}-\sum_{j=1}^{v-1}C_{k-v}^{k-j-1}|a_{n-j}|\right]x^{k+1-v}-a=0 \tag{30}$$

و برای $k > n$ داریم

$$\left[x^n + (n - |a_{n-1}|)x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)|a_{n-1}|\right)x^{n-2} + \cdots\right.$$
$$\left. +(1 - |a_{n-1}| - \cdots - |a_0|) - a\frac{(1+x)^{n-(k-1)}}{x}\right] = \frac{(1+x)^{n-(k-1)}}{x}Q_k(x).$$

برهان: برای اثبات لم فوق از بسط دوجمله‌ای استفاده می شود.

$$(1+x)^{(k-1)-n} = x^{(k-1)-n} + (k-1-n)x^{(k-1)-n-1} + \cdots + (k-1-n)x + 1$$

فرض کنید $k > n$ ، بنابراین

$$(1+x)^{(k-1)-n}\left[x^n + (n - |a_{n-1}|)x^{n-1} + \cdots + (n - (n-1)|a_{n-1}| - \cdots - |a_1|)x\right.$$
$$\left. +(1 - |a_{n-1}| - \cdots - |a_0|) - a\frac{(1+x)^{n-(k-1)}}{x}\right]$$
$$= x^n\left[x^{(k-1)-n} + (k-1-n)x^{(k-1)-n-1} + \cdots + (k-1-n)x + 1\right]$$
$$+(n - |a_{n-1}|)x^{n-1}\left[x^{(k-1)-n} + (k-1-n)x^{(k-1)-n-1} + \cdots + (k-1-n)x + 1\right] +$$
$$\vdots$$
$$+(n - (n-1)|a_{n-1}| - \cdots - |a_1|)x\left[x^{(k-1)-n} + (k-1-n)x^{(k-1)-n-1} + \cdots + (k-1-n)x + 1\right]$$
$$+(1 - |a_{n-1}| - \cdots - |a_0|)\left[x^{(k-1)-n} + (k-1-n)x^{(k-1)-n-1} + \cdots + (k-1-n)x + 1\right] - \frac{a}{x}$$
$$x^{k-1} + (k-1-n+n-|a_{n-1}|)x^{k-2} + \cdots + \left[n - (n-1)|a_{n-1}| - \cdots - 2|a_2| - |a_1|\right.$$
$$\left. +(1 - |a_{n-1}| - \cdots - |a_0|)(k-1-n)\right]x + (1 - |a_{n-1}| - \cdots - |a_0|) - \frac{a}{x}$$
$$= \frac{Q_k(x)}{x}$$

با ضرب کردن طرفین رابطه‌ی فوق در $(1+x)^{n-(k-1)}$ اثبات لم به پایان می رسد . □

قضیه ۱۰.۱.۲ همه صفرهای چند جمله‌ای $P(z)$ در

$$\{z:|z|<1+\delta_k\}\subseteq\{z:|z|<1+\delta_{k-1}\}\cdots\subseteq\{z:|z|<1+\delta_1\}\subseteq\{z:|z|<1+a\}$$

قرار می گیرند به طوری که δ_k ریشه مثبت ویکتای k امین درجه معادله‌ی

$$Q_k(x)\equiv x^k+\sum_{v=2}^{k}\left[C_{k-v}^{k-1}-\sum_{j=1}^{v-1}C_{k-v}^{k-j-1}|a_{n-j}|\right]x^{k+1-v}-a=0 \qquad (31)$$

می باشد و $a=\max_{j\in I}|a_j|$ واگر $j<0$، $a_j=0$ وبرای عدد صحیح ومثبت k، C_k^m ضرایب چند جمله‌ای هستند که به صورت

$$C_k^m=\frac{m!}{k!(m-k)!}\ ,\quad 0!=1$$

تعریف می شوند ،به طوری که اگر $k<0$ آنگاه $C_k^m=0$.

برهان:

$$Q(1+\delta_k)=(1+\delta_k)^n-|a_{n-1}|(1+\delta_k)^{n-1}-|a_{n-2}|(1+\delta_k)^{n-2}-$$

$$|a_{n-3}|(1+\delta_k)^{n-3}-\cdots-|a_1|(1+\delta_k)-|a_0|$$

$$\geq(1+\delta_k)^n-|a_{n-1}|(1+\delta_k)^{n-1}-\cdots-|a_{n-(k-1)}|(1+\delta_k)^{n-(k-1)}-$$

$$a(1+\delta_k)^{n-k}-\cdots-a(1+\delta_k)-a$$

$$=(1+\delta_k)^n-|a_{n-1}|(1+\delta_k)^{n-1}-\cdots-|a_{n-(k-1)}|(1+\delta_k)^{n-(k-1)}-$$
$$a\left[\frac{(1+\delta_k)^{n-k+1}-1}{\delta_k}\right]$$

$$>(1+\delta_k)^{n-(k-1)}\Big[(1+\delta_k)^{k-1}-|a_{n-1}|(1+\delta_k)^{k-2}-$$

$$|a_{n-2}|(1+\delta_k)^{k-3}-\cdots-|a_{n-(k-1)}|-\frac{a}{\delta_k}$$

$$=\frac{(1+\delta_k)^{n-(k-1)}}{\delta_k}\Big[(1+\delta_k)^{k-1}\delta_k-|a_{n-1}|(1+\delta_k)^{k-2}\delta_k-$$

$$
\begin{aligned}
&|a_{n-2}|(1+\delta_k)^{k-3}\delta_k - \cdots - |a_{n-(k-1)}|\delta_k - a\Big] \\
&= \frac{(1+\delta_k)^{n-(k-1)}}{\delta_k}\Big[\delta_k^k + (k-1-|a_{n-1}|)\delta_k^{k-1} \\
&+ \left(\frac{(k-1)(k-2)}{2} - (k-2)|a_{n-1}| - |a_{n-2}|\right)\delta_k^{k-2} + \\
&\vdots \\
&+(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|-\cdots-|a_{n-(k-1)}|)\delta_k - a\Big] \\
&= \frac{(1+\delta_k)^{n-(k-1)}}{\delta_k} Q_k(\delta_k) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

بنابراین $Q(1+\delta_k) > 0$. از آن جایی که $Q(0) = -|a_0| < 0$ می باشد ،می توان گفت اگر η ریشه‌ی مثبت ویکتای چند جمله ای $Q(x)$ باشد ،بنابراین

$$\eta < 1 + \delta_k.$$

اگر $k > n$ ،با استفاده‌ازبسط چند جمله‌ای داریم :

$$
\begin{aligned}
&Q(1+\delta_k) = (1+\delta_k)^n - |a_{n-1}|(1+\delta_k)^{n-1} - |a_{n-2}|(1+\delta_k)^{n-2} - \\
&|a_{n-3}|(1+\delta_k)^{n-3} - \cdots - |a_1|(1+\delta_k) - |a_0| \\
&\delta_k^n + n\delta_k^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\delta_k^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}\delta_k^2 + n\delta_k + 1 \\
&-|a_{n-1}\left(\delta_k^{n-1} + (n-1)\delta_k^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\delta_k^{n-3} + \cdots\right. \\
&\left.+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\delta_k^2 + (n-1)\delta_k + 1\right) - \\
&\vdots \\
&-|a_1|\delta_k - |a_1| - |a_0| \\
&> \delta_k^n + (n-|a_{n-1}|)\delta_k^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)|a_{n-1}|\right)\delta_k^{n-2} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$+(n-(n-۱)|a_{n-۱}|-(n-۲)|a_{n-۲}|-\cdots-۲|a_۲|-|a_۱|)\delta_k$$
$$+(۱-|a_{n-۱}|-\cdots-|a_\circ|)-a\frac{(۱+\delta_k)^{n-(k-۱)}}{\delta_k}$$
$$\frac{(۱+\delta_k)^{n-(k-۱)}}{\delta_k}Q_k(\delta_k),$$
$$=\circ.$$

بنابراین

$$Q(۱+\delta_k)>\circ$$

که نتیجه می دهد

$$\eta<۱+\delta_k.$$

حال فرض می کنیم $\hat{z}\in Z[P(z)]$ (مجموعه‌ی همه‌ی صفرهای چند جمله‌ای $\mathrm{P(z)}$) به طوری که

$$P(\hat{z})\equiv\hat{z}^n+a_{n-۱}\hat{z}^{n-۱}+\cdots+a_۱\hat{z}+a_\circ=\circ.$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}|\hat{z}|^n &= |\hat{z}^n|\\ &= |a_{n-۱}\hat{z}^{n-۱}+a_{n-۲}\hat{z}^{n-۲}+\cdots+a_۱\hat{z}+a_\circ|\\ &\leq |a_{n-۱}||\hat{z}|^{n-۱}+|a_{n-۲}||a_{n-۲}||\hat{z}|^{n-۲}+\cdots+|a_۱||\hat{z}|+|a_\circ|\end{aligned}$$

بنابراین

$$Q(|\hat{z}|)=|\hat{z}|^n-|a_{n-۱}||\hat{z}|^{n-۱}-|a_{n-۲}||\hat{z}|^{n-۲}-\cdots-|a_۱||\hat{z}|-|a_\circ|\leq\circ$$

در نتیجه

$$|\hat{z}|\leq\eta$$

که نشان می دهد همه‌ی صفرهای چند جمله‌ای $\mathrm{P(z)}$ در $|z|<۱+\delta_k$ قرار می گیرند .

حال برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم $\delta_k\leq\delta_{k-۱}$ وازآن جایی که $\delta_{k-۱}$ ریشه‌ی مثبت

ویکتای $Q_{k-1}(x)=0$ می باشد، داریم $Q_{K-1}(\delta_{k-1})=0$.

بنابراین

$$
\begin{aligned}
Q_k(\delta_{k-1}) &= Q_k(\delta_{k-1})-\delta_{k-1}Q_{k-1}(\delta_{k-1})\\
&= \left[\delta_{k-1}^{k}+\sum_{\nu=2}^{k}\left(C_{k-\nu}^{k-1}-\sum_{j=1}^{\nu-1}C_{k-\nu}^{k-j-1}|a_{n-j}\right)\delta_{k-1}^{k+1-\nu}-a\right]\\
&\quad-\left[\delta_{k-1}^{k}+\sum_{\nu=2}^{k-1}\left(C_{k-1-\nu}^{k-2}-\sum_{j=1}^{\nu-1}C_{k-1-\nu}^{k-j-2}|a_{n-j}\right)\delta_{k-1}^{k+1-\nu}+a\delta_{k-1}\right]\\
&\quad-\left[\delta_{k-1}^{k-1}+\sum_{\nu=2}^{k-1}\left(C_{k-1-\nu}^{k-2}-\sum_{j=1}^{\nu-1}C_{k-1-\nu}^{k-j-2}|a_{n-j}\right)\delta_{k-1}^{k-\nu}+a\right]\\
&= \left[(k-1-|a_{n-1}|)\delta_{k-1}^{k-1}+\left(\frac{(k-1)(k-2)}{2}-(k-2)|a_{n-1}|-|a_{n-2}|\right)\delta_{k-1}^{k-2}\right.\\
&\quad+\left(\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3}-\frac{(k-2)(k-3)}{2}|a_{n-1}|\right.\\
&\quad\left.-(k-3)|a_{n-2}|-|a_{n-3}|\right)\delta_{k-1}^{k-3}\\
&\quad\vdots\\
&\quad+((k-1)-(k-2)|a_{n-1}|-(k-3)|a_{n-2}|-\cdots-|a_{n-(k-2)}|)\delta_{k-1}^{2}\\
&\quad\left.+(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|-\cdots-|a_{n-(k-1)}|)\delta_{k-1}\right]\\
&\quad+\left[-(k-2-|a_{n-1}|)\delta_{k-1}^{k-1}-\left(\frac{(k-2)(k-3)}{2}-(k-3)|a_{n-1}|-|a_{n-2}|\right)\delta_{k-1}^{k-2}\right.\\
&\quad-\left(\frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{3}-\frac{(k-3)(k-4)}{2}|a_{n-1}|-(k-4)|a_{n-2}|\right.\\
&\quad\left.--|a_{n-3}|\right)\delta_{k-1}^{k-3}\\
&\quad\vdots\\
&\quad\left.-(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|-\cdots-|a_{n-(k-2)}|)\delta_{k-1}^{2}+a\delta_{k-1}\right]\\
&\quad+\left[-\delta_{k-1}^{k-1}-(k-2-|a_{n-1}|)\delta_{k-1}^{k-2}\right.\\
&\quad-\left.\frac{(k-2)(k-3)}{2}-(k-3)|a_{n-1}|-|a_{n-2}|\right)\delta_{k-1}^{k-3}\\
&\quad-\left(\frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{3}-\frac{(k-3)(k-4)}{2}|a_{n-1}|\right.\\
&\quad\left.-(k-4)|a_{n-2}|-|a_{n-3}|\right)\delta_{k-1}^{k-4}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$-(1-|a_{n-1}|-|a_{n-2}|-\cdots-|a_{n-(k-2)}|)\delta_{k-1}\Big].$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} Q_k(\delta_{k-1}) &= -|a_{n-(k-1)}|\delta_{k-1}+a\delta_{k-1} \\ &= \delta_{k-1}(a-|a_{n-(k-1)}|) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین $Q_k(\delta_{k-1}) \geq 0$ وازآن جایی که $Q_k(\delta_k)=0$، داریم :

$$\delta_k \leq \delta_{k-1}.$$

$\square$

گویل[۲] در [۱۴] لم زیر را اثبات کرد.

لم ۱۱.۱.۲ فرض کنید f(z) در $|z|\leq 1$ تحلیلی باشد و $f(0)=a$ به طوری که $|a|<1$ و $f'(0)=b$ باشد و در $|z|=1$ ، $|f(z)|\leq 1$ باشد. آنگاه برای $|z|\leq 1$ داریم :

$$|f(z)| \leq \frac{(1-|a|)|z|^2+|b||z|+|a|(1-|a|)}{|a|(1-|a|)|z|^2+|b||z|+(1-|a|)} \qquad (32)$$

لم ۱۲.۱.۲ فرض کنید f(z) در $|z|\leq R$ تحلیلی باشد و $f(0)=0$ و $f'(0)=b$ وبرای $|z|=R$ ، $|f(z)|\leq M$. آنگاه برای $|z|\leq R$ داریم :

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R^2}\frac{M|z|+R^2|b|}{M+|z||b|} \qquad (33)$$

---

[۲] Govil

این لم به آسانی با به کاربردن لم قبل برای تابع $\frac{f(Rz)}{M}$ به دست می آید.

لم ۱۳.۱.۲ فرض کنید n و j اعداد صحیح ومثبت باشند ، به طوری که $n \geq j$ و $C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ضرایب دو جمله‌ای باشند. آنگاه[۳]

$$n ۲^{n-۱} = \sum_{j=۱}^{n} jC_j^n. \qquad (۳۴)$$

قضیه ۱۴.۱.۲ همه‌ی صفرهای چند جمله‌ای $P(z) = z^n + \sum_{j=\circ}^{n-۱} a_j z^j$ در دیسک

$$\begin{aligned} R_۱ \leq |z| \leq \{z : |z| < ۱ + \delta_k\} \quad &\subseteq \quad \{z : |z| < ۱ + \delta_{k-۱}\} \cdots \\ &\subseteq \quad z : |z| < ۱ + \delta_۱\} \subseteq \{z : |z| < ۱ + a\} \qquad (۳۵) \end{aligned}$$

قراردارند به طوریکه δ_k ریشه‌ی مثبت ویکتای k امین درجه‌ی معادله‌ی

$$Q_k(x) \equiv x^k + \sum_{v=۲}^{k} \left[C_{k-v}^{k-۱} - \sum_{j=۱}^{v-۱} C_{k-v}^{k-j-۱} |a_{n-j}| \right] x^{k+۱-v} - a = \circ \qquad (۳۶)$$

می باشد و $a = \max_{j \in I} |a_j|$, $a_j = \circ$ اگر $j < \circ$ وبرای عدد صحیح ومثبت k، C_k^m ضرایب چند جمله‌ای هستند که به صورت

$$C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!} \ \ , \ \ \circ! = ۱$$

تعریف می شوند ،به طوری که $k < \circ$ ، $C_k^m = \circ$ و

$$R_۱ = \frac{-R^۲|a_۱|(M - |a_\circ|) + \sqrt{۴R^۲M^۳|a_\circ| + \{R^۲|a_۱|(M - |a_\circ|)\}^۲}}{۲M^۲} \qquad (۳۷)$$

که دراین معادله $M = \frac{R^{n+۱} + (A-۱)R^n - AR}{(R-۱)}$ و $R = ۱ + \delta_k$ و $a = \max_{\circ \leq j \leq n-۱} |a_j|$.

برهان: با توجه به قضیه‌ی (۵.۲.۲) کافی است نشان دهیم چند جمله‌ای $P(z) = a_\circ + \sum_{j=1}^{n-1} a_j z^j + z^n$ هیچ صفری در $|z| < R_1$ ندارد.

فرض کنید $f(z) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j z^j + z^n$. آنگاه در $|z| \leq R$ ، به طوری که $R = 1 + \delta_k$ داریم :

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \max_{|z|=R} |f(z)| \\ &\leq R^n + \sum_{j=1}^{n-1} |a_j| R^j \\ &\leq R^n + a \sum_{j=1}^{n-1} R^j \\ &= R^n + a\left\{\frac{R(R^{n-1}-1)}{R-1}\right\} \\ &= \frac{R^{n+1} + (a-1)R^n - aR}{R-1} \\ &= M \end{aligned}$$

ازآن جایی که $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = a_1$ ، بنابراین با به کاربردن لم (۷.۲.۲) برای تابع f(z) داریم :

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R^2} \frac{M|z| + R^2|a_1|}{M + |z||a_1|} \quad for |z| \leq R \tag{۳۸}$$

بنابراین برای $|z| \leq R$ داریم :

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_\circ + f(z)| \\ &\geq |a_\circ| - |f(z)| \\ &\geq |a_\circ| - \frac{M|z|}{R^2} \frac{M|z| + R^2|a_1|}{M + |z||a_1|} \\ &= \frac{-1}{R^2(M + |z||a_1|)} \left[M^2|z|^2 + R^2|a_1||z|(M - |a_\circ|) - |a_\circ|R^2 M\right] \\ &> \circ. \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۵.۱.۲ فرض کنید $P(z) = \sum_{j=\circ}^{n} a_j z^j$ $(a_j \neq \circ)$ یک چند جمله‌ای مختلط غیر ثابت باشد . آنگاه همه‌ی صفرهای آن در حلقه‌ی

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\} \tag{۳۹}$$

قرار دارند ، به طوری که

$$r_1 = \min_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{jC_j^n}{n2^{n-1}}\left|\frac{a_0}{a_j}\right|\right\}^{\frac{1}{j}}$$

$$r_2 = 1 + \delta_k$$

برهان: برای اثبات قضیه کافی‌است نشان دهیم P(z) هیچ صفری در $|z| < r_1$ ندارد.

با استفاده ازتعریف r_1 داریم :

$$r_1^j \leq \frac{jC_j^n}{n2^{n-1}}\left|\frac{a_0}{a_j}\right| \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{40}$$

برای $|z| < r_1$ داریم :

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left|a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j z^j\right| \\
&\geq |a_0| - \sum_{j=1}^{n} |a_j||z|^j \\
&> |a_0| - \sum_{j=1}^{n} |a_j|r_1^j \\
&= |a_0|\left(1 - \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_j}{a_0}\right| r_1^j\right) \\
&\geq \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} jC_j^n}{n2^{n-1}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین اگر $|z| < r$ ، $|P(z)| > 0$ می باشد. درنتیجه P(z) هیچ صفری در $|z| < r_1$ ندارد. □

فصل ۳

کران برای صفرهای چند جمله‌ای با استفاده از ماتریس همراه

۱.۳ مقدمه

فرض کنید

$$p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1 \qquad , a_1 \neq 0 \tag{1}$$

یک چند جمله‌ای تکین از درجه‌ی $n \geq 3$ با ضرایب مختلط باشد . ماتریس

$$C(P) = \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ماتریس همراه نامیده می شود .

همان طورکه درفصل اول بیان شد صفرهای چند جمله‌ای P دقیقاً مقادیر ویژه‌ی ماتریس C(P) می باشند [۱۷].

ابدوراخ مانو[1] و فوجی[2] و کوبو[3] قضیه‌ی زیر را ثابت کردند [۱] و[۱۰] .

قضیه ۱.۱.۳ اگر z یک صفر $P(z) = 0$ باشد ، آنگاه

$$|z| \leq \frac{1}{2}\left(|a_n| + \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\frac{\pi}{n})^2 + \left(1 + \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} |a_j|^2}\right)^2}\right) \tag{3}$$

و

$$|z| \leq \cos\frac{\pi}{n+1} + \frac{1}{2}\left(|a_n| + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2}\right). \tag{4}$$

---

[1] Abdurakhmanov
[2] Fujii
[3] Kubo

برهان: اثبات ۴)

ازآن جایی که $C = s - e_{1} \otimes a$ به طوری که

$$a = \begin{pmatrix} \overline{a_{n-1}} \\ \overline{a_{n-2}} \\ \vdots \\ \overline{a}_{0} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$e_{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

داریم :

$$w(C) = w(s - e_{1} \otimes a) \leq w(s) + w(e_{1} \otimes \overline{a}) = w(s) + \frac{\|a\| + |a_{n-1}|}{2} \qquad (8)$$

حال $w(s)$ را محاسبه می کنیم.

اگر $f \in \mathbb{C}^{n}$ و $f = (f_{1}, f_{2}, \cdots, f_{n})$ آنگاه داریم :

$$< sf, f > = < (0, f_{1}, f_{2}, \cdots, f_{n-1}), (f_{1}, f_{2}, \cdots, f_{n}) > = f_{1}\tilde{f}_{2} + f_{2}\tilde{f}_{3} + \cdots f_{n-1}\tilde{f}_{n}$$

در نتیجه

$$| < sf, f > | \leq |f_{1}||f_{2}| + \cdots + |f_{n-1}||f_{n}|$$

برای اثبات قضیه باید مقدار $\sup\{|f_{1}||f_{2}| + \cdots + |f_{n-1}||f_{n}|\}$ ، باشرط $\sum_{i=1}^{n} |f_{i}|^{2} = 1$ محاسبه شود.

فرض کنید $r_{i} = |f_{i}|$ ، قرار دهید:

$$F(r_1, r_2, \cdots, r_n, \lambda) = r_1 r_2 + \cdots r_{n-1} r_n - \lambda(\sum_{i=1}^{n} r_i^2 - 1)$$

آنگاه داریم :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_1} &= r_2 - 2\lambda r_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_2} &= r_1 + r_3 - 2\lambda r_2 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial r_{n-1}} &= r_{n-1} - 2\lambda r_n = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

فرض کنید $x = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

بنابراین $Ax = 2\lambda x$ و $A = 2B$ به طوری که B ماتریس هرمیتی است که دارای $\frac{1}{2}$ زیرقطری و $\frac{1}{2}$ بالا قطری وسایر جاهاصفر می باشد. در نتیجه λ یک مقدارویژه از B است که این مقادیر ویژه از B به صورت زیرمی باشند :

$$\lambda = \cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

با ضرب کردن روابط (۹) در $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$ وجمع کردن آن ها داریم :

$$2(r_1 r_2 + \cdots + r_{n-1} r_n) - 2\lambda(r_1^2 + \cdots + r_n^2) = 0$$

بنابراین $\lambda = r_1 r_2 + \cdots + r_{n-1} r_n$.

از آن جایی که مقدار λ برابر با $w(s)$ می باشد ، داریم :

$$w(s) = \sup\{\cos\frac{k\pi}{n+1} \quad k = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$w(s) = \sup\{|\lambda| \quad : \lambda \in W(s)\}$$

□

لم های زیر را می توان در[۱۸] و [۱۷] و[۳۰] و[۱۵] و[۱۷] مشاهده نمود.

لم ۲.۱.۳ فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ به صورت زیر افراز شده باشد

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

به طوری که A_{ij} یک ماتریس $n_i \times n_j$ برای $i,j = 1,2$ و $n = n_1 + n_2$ باشد .

اگر

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \|A_{11}\| & \|A_{12}\| \\ \|A_{21}\| & \|A_{22}\| \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

بنابراین

$$i) r(A) \leq r(\tilde{A}), \tag{۱۳}$$

$$ii) w(A) \leq w(\tilde{A}), \tag{۱۴}$$

$$iii) \|A\| \leq \|\tilde{A}\|. \tag{۱۵}$$

برهان: i) در حالت کلی برای هر $B = (B_{ij})_{n\times n}, A = (A_{ij})_{n\times n}$ داریم :

$$\|\widetilde{AB}\| \leq \|\tilde{A}\tilde{B}\|$$

در حقیقت $\tilde{A}\tilde{B} - \widetilde{AB}$ یک ماتریس نامنفی است زیرا

$$\widetilde{AB} = \left(\|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\|\right)_{n\times n}$$

$$\tilde{A}\tilde{B} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|A_{ik}\|\|B_{kj}\|\right)_{n\times n}$$

در نتیجه داریم :

$$\|\widetilde{AB}\| \leq \|\tilde{A}\tilde{B}\|$$

$$\Longrightarrow \|A^m\| \leq \|\tilde{A^m}\| \leq \|\tilde{A}^m\|$$

$$r(A) \leq r(\tilde{A})$$

ii) برای هر بردار $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ داریم :

$$|x| = (\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|)^T$$

اگر x یک بردار واحد در H باشد آنگاه $|x|$ یک بردار واحد در فضای هیلبرت[۴] $\mathbb{C}^n$ می باشد.

از آن جایی که

$$| < Ax, x > | = |\sum_{i,j}^{n} < A_{ij}x_j, x_i > | \leq \sum_{i,j}^{n} \|A_{ij}\|x_i\|\|x_j\| = (\tilde{A}|x|, |x|)$$

داریم :

$$w(A) = \sup | < Ax, x > | \leq \sup < \tilde{A}|x|, |x| > \leq w(\tilde{A})$$

$$w(A) \leq w(\tilde{A})$$

iii) فرض کنید $x \in \mathbb{C}$

$$\|A\|^2 = \sup \|Ax\|^2 = \sup < A^\star Ax, x > = \sup |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} < A_{kj}x_j, A_{ki}x_i > |$$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \|A_{kj}\|\|A_{ki}\|\|x_j\|\|x_i\|$$

---

[۴] Hilbert

$$= \sup(\tilde{A}^{\star}\tilde{A}|x|, |x|) = \|\tilde{A}\|^{۲}$$

در نتیجه

$$\|A\| \leq \|\tilde{A}\|$$

$\square$

لم ۳.۱.۳ اگر $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ ، آنگاه

$$w(A) \leq w([|a_{ij}|]) = \frac{۱}{۲} r([|a_{ij}| + |a_{ji}|]). \qquad (۱۶)$$

لم ۴.۱.۳ فرض کنید T_n ماتریس سه قطری $n \times n$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$T_n = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & & \cdots & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} & & \cdots & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & & \cdots & ۰ \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

مقادیر ویژه‌ی T_n بصورت زیر می باشد:

$$\lambda_j = \cos\frac{j\pi}{n+۱} \quad for \;\; j = ۱, ۲, \cdots, n \qquad (۱۸)$$

همچنین بردارهای ویژه‌ی متناظربه صورت زیر می باشند :

$$v_j = \left[\sqrt{\frac{۲}{n+۱}}\sin\frac{j\pi}{n+۱}, \sqrt{\frac{۲}{n+۱}}\sin\frac{۲j\pi}{n+۱}, \cdots, \sqrt{\frac{۲}{n+۱}}\sin\frac{nj\pi}{n+۱}\right]^t \qquad (۱۹)$$

و $j = ۱, ۲, \cdots, n$.

لم ۵.۱.۳ فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ دارای تجزیه‌ی دکارتی $A = B + iC$ باشد. آنگاه

$$W(A) \subseteq W(B) + iW(C). \tag{۲۰}$$

لم ۶.۱.۳ .فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ یک ماتریس هرمیتی باشد که به صورت زیر افراز شده است :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & x^\star \\ x & A_1 \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

به طوری که $x \in \mathbb{C}^{n-1}, A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. آنگاه

$$detA = a_{11} detA_1 - x^\star (adjA_1)x. \tag{۲۲}$$

فرض کنید z یک صفر $P(z) = 0$ باشد ، با به کار بردن لم قبل برای ماتریس همراه C(P) داریم :

$$|z| \leq r(C(P)) \leq w(C(P)). \tag{۲۳}$$

قضیه ۷.۱.۳ . اگر z یک صفر $P(z) = 0$ باشد ، آنگاه

$$|z| \leq \frac{1}{2}\left(|a_n| + 1 + \sqrt{(|a_n| - 1)^2 + 4\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} |a_j|^2}}\right) \tag{۲۴}$$

برهان: برای اثبات قضیه‌ابتدا ماتریس C(p) را به صورت زیر افراز می کنیم :

$$C(P) = \left[\begin{array}{c|cccc} -a_n & -a_{n-۱} & \cdots & -a_۲ & -a_۱ \\ \hline ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ \end{array}\right] \qquad (۲۵)$$

با استفاده از لم (۱۶.۱.۳)

$$\tilde{C}(P) = \begin{bmatrix} |a_n| & \sqrt{\sum_{j=۱}^{n-۱} |a_j|^۲} \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

از آن جایی که $r(C(P)) = \max_{i\in I} |\lambda_i|$ و بااستفاده از لم (۱۲.۱.۳) داریم :

$$\begin{aligned} r(C(P)) &\leq r(\tilde{C}(P)) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + ۱ + \sqrt{(|a_n| - ۱)^۲ + ۴\sqrt{\sum_{j=۱}^{n-۱} |a_j|^۲}}\right). \end{aligned}$$

□

قضیه ۸.۱.۳ فرض کنید z یک صفر $P(z) = ۰$ باشد ، آنگاه

$$|z| \leq \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\frac{\pi}{n})^۲ + (|a_{n-۱}| + ۱)^۲ + \sum_{j=۱}^{n-۲} |a_j|^۲}\right) \qquad (۲۷)$$

برهان: با به کار بردن لم (۱۳.۱.۳) برای ماتریس C(P) داریم :

$$w(C(p)) \leq r\left(\begin{bmatrix} |a_n| & v^t \\ v & T_{n-۱} \end{bmatrix}\right). \qquad (۲۸)$$

به‌طوری که

$$v = [\tfrac{1}{2}(|a_{n-1}| + 1)\ ,\ \tfrac{1}{2}|a_{n-2}|\ ,\ \cdots,\ \tfrac{1}{2}|a_2|\ ,\ \tfrac{1}{2}|a_1|]^t$$

همچنین T_{n-1} ماتریس سه قطری $(n-1)\times(n-1)$ داده شده در لم (۱۴.۱.۳) می باشد . از آن جایی که ماتریس T_{n-1} هرمیتی است ، نتیجه می شود: $\|T_{n-1}\| = r(T_{n-1}) = \cos\frac{\pi}{n}$.

با استفاده ازرابطه ی (۲۸) ولم(۱۲.۱.۳) ، داریم :

$$\begin{aligned} w(C(P)) &\leq r\left(\begin{bmatrix} |a_n| & v^t \\ v & T_{n-1} \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|a_n| + \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\frac{\pi}{n})^2 + 4\|v\|^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|a_n| + \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\frac{\pi}{n})^2 + (|a_{n-1}|+1)^2 + \sum_{j=1}^{n-2}|a_j|^2}\right) \end{aligned} \tag{۲۹}$$

با استفاده از (۲۸) و (۲۳) داریم:

$$|z| \leq \tfrac{1}{2}\left(|a_n| + \cos\tfrac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\tfrac{\pi}{n})^2 + (|a_{n-1}|+1)^2 + \sum_{j=1}^{n-2}|a_j|^2}\right).$$

□

کارمیشل[۵] ومیسون[۶] قضیه‌ی زیر را اثبات کرده اند [۵].

قضیه ۹.۱.۳ فرض کنیدz یک صفر P(z)=0 باشد، آنگاه

$$|z| \leq (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} =: B_{CM} \tag{۳۰}$$

---

[۵] Carmichael
[۶] Mason

برهان: ابتدا ماتریس C(P) را به صورت $C(P) = S + R$ افراز می کنیم .

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$R = \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

داریم :

$$\|C(P)\|_2^2 = \|C(p)^*C(P)\|_2 = \|(S+R)^*(S+R)\|_2 = \|S^*S + R^*R\|_2 \leq \|S^*S\|_2 + \|R^*R\|_2$$

ازآن جایی که $|z| \leq \|C(P)\|$

داریم :

$$|z| \leq (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

□

فوجی [7] وکوبو[8] وکیتانه [9] در[10] و[18] و [21] و[23] و[25] ولیندن[10] در[26] و[27] با به کار بردن ویژگی های ماتریس ها برای ماتریس همراه کران هایی برای صفرهای چند جمله‌ای ها به صورت زیر به دست آورده اند .

قضیه ۱۰.۱.۳ فرض کنید z یک صفر P(z)=0 باشد، آنگاه

$$|z| \leq cos\frac{\pi}{n+1} + \frac{1}{2}\left(|a_n| + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2}\right) =: B_{FK} \qquad (Fujii, Kubo) \tag{33}$$

---

[7] Fujii

[8] Kubo

[9] Kittaneh

[10] Linden

$$|z| \leq \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + ۱ + \sqrt{(|a_n| - ۱)^۲ + ۴\sqrt{\sum_{j=۱}^{n-۱} |a_j|^۲}}\right) =: B_K \qquad (Kittaneh) \qquad (۳۴)$$

$$|z| \leq \frac{|a_n|}{n} + (\frac{n-۱}{n}(n - ۱ + \sum_{j=۱}^{n} |a_j|^۲ - \frac{|a_n|^۲}{n}))^{\frac{۱}{۲}} =: B_L \qquad (Linden) \qquad (۳۵)$$

قضیه زیر توسط کیتانه در[۲۱] اثبات شده است .

قضیه ۱۱.۱.۳ فرض کنیدz یک صفر P(z)=0 باشد و C ماتریس همراه باشد، آنگاه

$$s_n(C) \leq |z| \leq s_۱(C), \qquad (۳۶)$$

به طوری که

$$s_۱(C) = \left(\frac{۱}{۲}\left(۱ + \sum_{j=۱}^{n} |a_j|^۲ + \sqrt{\left(۱ + \sum_{j=۱}^{n} |a_j|^۲\right)^۲ - ۴|a_۱|^۲}\right)\right)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۳۷)$$

و

$$s_n(C) = \left(\frac{۱}{۲}\left(۱ + \sum_{j=۱}^{n} |a_j|^۲ - \sqrt{\left(۱ + \sum_{j=۱}^{n} |a_j|^۲\right)^۲ - ۴|a_۱|^۲}\right)\right)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۳۸)$$

همچنین Kittaneh در[۲۱] نشان داد $s_j(C) = ۱$ و $j = ۲, ۳, \cdots, n - ۱$.

۲.۳ تخمین هایی برای $\|C^{۲}\|$ و $\|C^{۳}\|$

توان دوم وسوم ماتریس همراه $C(P)$ به صورت زیرتعریف می شود :

$$C^{۲}(P)=K=\begin{bmatrix} b_n & b_{n-۱} & \cdots & b_{۳} & b_{۲} & b_{۱} \\ -a_n & -a_{n-۱} & \cdots & -a_{۳} & -a_{۲} & -a_{۱} \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۳۹)$$

به‌طوری که $b_j=a_na_j-a_{j-۱}$ و

$$C^{۳}(P)=M=\begin{bmatrix} c_n & c_{n-۱} & \cdots & c_{۴} & c_{۳} & c_{۲} & c_{۱} \\ b_n & b_{n-۱} & \cdots & b_{۴} & b_{۳} & b_{۲} & b_{۱} \\ -a_n & -a_{n-۱} & \cdots & -a_{۴} & -a_{۳} & -a_{۲} & -a_{۱} \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۴۰)$$

به طوری که $c_j=-a_nb_j+a_{n-۱}a_j-a_{j-۲}$ و $a_{۰}=a_{-۱}$ و $j=۱,۲,\cdots,n$.

قضیه ۱.۲.۳ فرض کنید C ماتریس همراه باشد، آنگاه

$$\|C^{۲}\|\leq\left(۱+\sum_{j=۱}^{n}(|a_j|^{۲}+|b_j|^{۲})\right)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۴۱)$$

برهان:

$$R=\begin{bmatrix} b_n & b_{n-۱} & \cdots & b_{۱} \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}, \qquad (۴۲)$$

$$S = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ -a_n & -a_{n-۱} & \cdots & -a_۱ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix}, \tag{۴۳}$$

$$T = \begin{bmatrix} & \circ & \circ \\ I_{n-۲} & & \circ \end{bmatrix} \tag{۴۴}$$

به طوری که $I_{n-۲}$ ماتریس همانی ازمرتبه‌ی n-2 است .

$$K = C^۲ = R + S + T \qquad , \qquad R^\star S = R^\star T = S^\star R = S^\star T = T^\star R = T^\star S = \circ.$$

بنابراین ، با استفاده از نامساوی مثلثی داریم :

$$\|K\|^۲ = \|K^\star K\| = \|R^\star R + S^\star S + T^\star T\| \leq \|R^\star R\| + \|S^\star S\| + \|T^\star T\|.$$

با یک محاسبه‌ی ساده داریم :

$$\|R^\star R\| = \lambda_۱(R^\star R) = \lambda_۱(RR^\star) = \textstyle\sum_{j=۱}^n |b_j|^۲,$$

$$\|S^\star S\| = \lambda_۱(S^\star S) = \lambda_۱(SS^\star) = \textstyle\sum_{j=۱}^n,$$

$$\|T^\star T\| = \lambda_۱(T^\star T) = ۱.$$

در نتیجه

$$\|K\|^۲ \leq ۱ + \sum_{j=۱}^n (|a_j|^۲ + |b_j|^۲). \tag{۴۵}$$

□

از آن جایی که $|z| \leq \|C^۲\|^{\frac{۱}{۲}}$

آنگاه نتیجه زیر برقرار است .

نتیجه ۲.۲.۳ فرض کنیدz یک صفر $P(z) = \circ$ باشد ، آنگاه

$$|z| \leq \left(1 + \sum_{j=1}^{n} (|a_j|^2 + |b_j|^2)\right)^{\frac{1}{4}} =: B_1 \tag{۴۶}$$

قضیه ۳.۲.۳ فرض کنید C ماتریس همراه باشد، آنگاه

$$\|C^3\| \leq \left(1 + \sum_{j=1}^{n} (|a_j|^2 + |b_j|^2 + |c_j|^2)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{۴۷}$$

برهان:

$$Q = \begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{۴۸}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{۴۹}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{۵۰}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-3} & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۱}$$

به طوری که I_{n-3} ماتریس همانی از مرتبه‌ی n-3 می باشد. آنگاه

$$M = C^{3} = Q + R + S + T$$

و

$$Q^{\star}R = Q^{\star}S = Q^{\star}T = R^{\star}Q = R^{\star}S = R^{\star}T = S^{\star}Q = S^{\star}R = S^{\star}T = T^{\star}Q = T^{\star}R = T^{\star}S = 0$$

با استفاده‌ی مشابه از اثبات قضیه‌ی قبل نتیجه حاصل می شود . □

از آن جایی که $|z| \leq \|C^{3}\|^{\frac{1}{3}}$ آنگاه نتیجه‌ی زیر برقرار است .

نتیجه ۴.۲.۳ فرض کنید z یک صفر $P(z) = 0$ باشد ، آنگاه

$$|z| \leq \left(1 + \sum_{j=1}^{n} (|a_j|^{2} + |b_j|^{2} + |c_j|^{2})\right)^{\frac{1}{6}} =: B_{2} \qquad (۵۲)$$

قضیه ۵.۲.۳ * فرض کنید C ماتریس همراه باشد، آنگاه

$$||C^{4}|| \leq (1 + \sum_{j=1}^{n} (|a_j|^{2} + |b_j|^{2} + |c_j|^{2} + |d_j|^{2}))^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۳)$$

نتیجه ۶.۲.۳ * فرض کنیدz یک صفر $P(z) = 0$ باشد ، آنگاه

$$|z| \leq (1 + \sum_{j=1}^{n} (|a_j|^{2} + |b_j|^{2} + |c_j|^{2} + |d_j|^{2}))^{\frac{1}{8}} =: B_{5} \qquad (۵۴)$$

۳.۳ کران برای صفرهای چند جمله‌ای بر پایه ویژگی های شعاع طیفی

همان طور که در فصل اول بیان شداگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ ، آنگاه

$$r(A) = r(A^k)^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|_{\frac{1}{k}} \leq \|A\| \qquad for \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$
$$r(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|_{\frac{1}{k}},$$

r(A) شعاع طیفی A می باشد.

در این بخش از افراز C^2, C^3 برای محاسبه‌ی $r(C^2), r(C^3)$ استفاده نموده و کران بهتری برای صفرهای چند جمله‌ای به دست می آوریم .

لم ۱.۳.۳ فرض کنید برای $n \geq 4$

$$L = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

آنگاه

$$\|L\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \alpha + \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4(|a_1|^2 + |a_2|^2)}\right), \tag{56}$$

به طوری که $\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} |a_j|^2$.

برهان: چند جمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $LL^\star$ ، دترمینان ماتریس افراز شده‌ی زیر می باشد.

$$\lambda I - LL^\star = \left[\begin{array}{cccccc|c} \lambda - \alpha & 0 & -a_{n-1} & \cdots & -a_4 & & -a_3 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ -\bar{a}_{n-1} & 0 & \lambda - 1 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -\bar{a}_4 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - 1 & & 0 \\ \hline -\bar{a}_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \lambda - 1 \end{array}\right] \tag{57}$$

حال با استفاده از لم (۳.۱.۱۶) ، داریم :

$$det(\lambda I - LL^\star) = (\lambda - ۱)det\tilde{A}_۱ - \lambda(\lambda - ۱)^{n-۴}|a_۳|^۲, \qquad (۵۸)$$

به طوری که

$$\tilde{A}_۱ = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & ۰ & -a_{n-۱} & \cdots & -a_۴ \\ ۰ & \lambda & ۰ & \cdots & ۰ \\ -\bar{a}_{n-۱} & ۰ & \lambda - ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_۴ & ۰ & ۰ & \cdots & \lambda - ۱ \end{bmatrix} \qquad (۵۹)$$

با به کار بردن لم (۳.۱.۱۶)برای $\tilde{A}_۱$، داریم :

$$det\tilde{A}_۱ = (\lambda - ۱)det\tilde{A}_۲ - \lambda(\lambda - ۱)^{n-۵}|a_۴|^۲, \qquad (۶۰)$$

به طوری که

$$\tilde{A}_۲ = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & ۰ & -a_{n-۱} & \cdots & -a_۵ \\ ۰ & \lambda & ۰ & \cdots & ۰ \\ -\bar{a}_{n-۱} & ۰ & \lambda - ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_۵ & ۰ & ۰ & \cdots & \lambda - ۱ \end{bmatrix}. \qquad (۶۱)$$

با ادامه این روند می توان نتیجه گرفت :

$$\begin{aligned} \det \tilde{A}_{n-۳} &= (\lambda - ۱)\begin{vmatrix} \lambda - \alpha & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{vmatrix} - \lambda(\lambda - ۱)|a_{n-۱}|^۲ \\ &= \lambda(\lambda - ۱)(\lambda - \alpha) - \lambda(\lambda - ۱)|a_{n-۱}|^۲. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
det(\lambda I - LL^{\star}) &= (\lambda-1)\left((\lambda-1)det\tilde{A}_2 - \lambda(\lambda-1)^{n-5}|a_4|^2\right) - \lambda(\lambda-1)^{n-4}|a_3|^2 \\
&= (\lambda-1)^2 det\tilde{A}_2 - \lambda(\lambda-1)^{n-4}(|a_3|^2+|a_4|^2) \\
&\vdots \\
&= (\lambda-1)^{n-3} det\tilde{A}_{n-3} - \lambda(\lambda-1)^{n-4}\left(\sum_{j=3}^{n-1}|a_j|^2\right) \\
&= \lambda(\lambda-1)^{n-3}(\lambda-\alpha) - \lambda((\lambda-1)^{n-4}(\lambda-|a_1|^2-|a_2|^2 \\
&= \lambda(\lambda-1)^{n-4}(\lambda^2-(1+\alpha)\lambda+|a_1|^2+|a_2|^2).
\end{aligned}$$

با توجه به این که $s_j^2(L) = \lambda_j(LL^{\star})$ ، نتیجه می گیریم :

$$\|L\|^2 = s_j^2(L) = \frac{1}{2}\left(1+\alpha+\sqrt{(1+\alpha)^2-4(|a_1|^2+|a_2|^2)}\right), \qquad (62)$$

$$\begin{aligned}
&s_{n-2}^2(L) = \tfrac{1}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{(1+\alpha)^2-4(|a_1|^2+|a_2|^2)}\right), \\
&s_{n-1}(L) = 0 \quad , \quad s_j(L) = 1 \quad for \;\; j = 2,\cdots,n-3.
\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۳.۳ فرض کنیدz یک صفر $P(z) = 0$ باشد و $n \geq 4$ ، آنگاه

$$|z| \leq \left(\frac{1}{2}\left[|b_n|+\beta+\sqrt{(|b_n|-\beta)^2+4\gamma\sqrt{1+|a_n|^2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}} =: B_3 \qquad (63)$$

به طوری که

$$\gamma = \left(\sum_{j=1}^{n-1} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\beta = \left(\frac{1}{2}\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|^2+\sqrt{\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|^2\right)^2-4(|a_1|^2+|a_2|^2)}\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

برهان: با افراز بندی $K = C^2$ به صورت

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{64}$$

به طوری که

$$K_{11} = [b_n] \quad , \qquad K_{12} = [b_{n-1} \cdots b_1],$$
$$K_{21} = \begin{bmatrix} -a_n \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{65}$$

و با استفاده از لم (۳.۱.۱۲) داریم :

$$\begin{aligned} r(k) &\leq r\left(\begin{bmatrix} \|K_{11}\| & \|K_{12}\| \\ \|K_{21}\| & \|K_{22}\| \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|K_{11}\|+\|K_{22}\|+\sqrt{(\|K_{11}\|-\|K_{22}\|)^2+4\|K_{12}\|\|K_{21}\|}\right). \end{aligned}$$

از آنجایی که $\|K_{12}\| = \gamma \quad , \quad \|K_{11}\| = |b_n|$ و $\|K_{21}\| = \sqrt{1+|a_n|^2}$ و $\|K_{22}\| = \beta$ ، نتیجه می شود :

$$|z| \leq \frac{1}{2}\left(|b_n|+\beta+\sqrt{(|b_n|-\beta)^2+4\gamma\sqrt{1+|a_n|^2}}\right). \tag{66}$$

وبا توجه به رابطه‌ی $|z| \leq r(K)^{\frac{1}{2}}$

اثبات قضیه به پایان می رسد .

لم ۳.۳.۳ فرض کنید

$$N = \begin{bmatrix} -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۶۷}$$

و $n \geq 5$ باشد. آنگاه

$$\|N\|^2 = \frac{1}{2}\left(1+\delta+\sqrt{(1+\delta)^2 - 4(|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2)}\right), \tag{۶۸}$$

به طوری که $\delta = \sum_{j=1}^{n-2} |a_j|^2$.

قضیه ۴.۳.۳ فرض کنید $P(z) = 0$ و $n \geq 5$ ، آنگاه

$$|z| \leq \left(\frac{1}{2}\left[\lambda+\eta+\sqrt{(\lambda-\eta)^2+4\mu\tau}^{\frac{1}{3}} =: B_4\right.\right. \tag{۶۹}$$

به طوری که

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\left[\sum_{j=n-1}^{n}(|b_j|^2+|c_j|^2) + \sqrt{\left(\sum_{j=n-1}^{n}(|b_j|^2-|c_j|^2)\right)^2 + 4\left|\sum_{j=n-1}^{n} b_j\bar{c}_j\right|^2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{۷۰}$$

$$\tau = \left(\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n-2}(|b_j|^2+|c_j|^2) + \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n-2}(|b_j|^2-|c_j|^2)\right)^2 + 4\left|\sum_{j=1}^{n-2} b_j\bar{c}_j\right|^2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{۷۱}$$

$$\eta = \left(\frac{1}{2} \left[1 + \sum_{j=1}^{n-2} |a_j|^2 + \sqrt{\left(1 + \sum_{j=1}^{n-2} |a_j|^2 \right)^2 - 4(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2)} \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (72)$$

و

$$\mu = \sqrt{|a_n|^2 + |a_{n-1}|^2 + 1}. \quad (73)$$

برهان: با افراز بندی $M = C^3$ به صورت زیر داریم :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (74)$$

به طوری که

$$M_{11} = \begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_{n-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$M_{۲۲} = \begin{bmatrix} -a_{n-۲} & -a_{n-۳} & \cdots & -a_۴ & -a_۳ & -a_۲ & -a_۱ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۷۸)$$

بااستفاده ازلم (۱۲.۱.۳) ، داریم :

$$\begin{aligned} r(C^۳) &\le r\left(\begin{bmatrix} \|M_{۱۱}\| & \|M_{۱۲}\| \\ \|M_{۲۱}\| & \|M_{۲۲}\| \end{bmatrix}\right) \\ &\le \frac{۱}{۲}\left(\|M_{۱۱}\| + \|M_{۲۲} + \sqrt{(|M_{۱۱}\| - \|M_{۲۲})^۲ + ۴\|M_{۱۲}\|\|M_{۲۱}\|}\right). \end{aligned}$$

همچنین با استفاده از لم (۳.۳.۳) ، نتیجه می گیریم $\|M_{۲۲}\| = \eta$. و بامحاسبه‌ی ساده می توان نشان داد $\|M_{۱۱}\| = \lambda, \|M_{۱۲}\| = \tau$. از آن جایی که $\|M_{۲۱}\| = \mu$ نتیجه می شود :

$$r(M) \le \left(\frac{۱}{۲}\left[\lambda + \eta + \sqrt{(\lambda - \eta)^۲ + ۴\mu\tau}\right]\right). \qquad (۷۹)$$

و با استفاده از رابطه‌ی $|z| \le r(M)^{\frac{۱}{۳}}$ اثبات قضیه به پایان می رسد .

۴.۳ روابط اصلی برای صفرهای چند جمله‌ای

لم ۱.۴.۳ فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ و $R_i = \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|$ و $C_i = \sum_{j=۱}^{n} |a_{ji}|$ باشد . آنگاه

$$\prod_{j=۱}^{k} |\lambda_j(A)| \le \prod_{j=۱}^{k} R_{[j]} \qquad (۸۰)$$

$$\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^{k} C_{[j]} \tag{۸۱}$$

برای $k = 1, 2, \cdots, n$.

لم ۲.۴.۳ فرض کنید α_j و β_j برای $j = 1, 2, \cdots, n$ ، 2n عدد حقیقی نامنفی باشد به طوری که $\alpha_n \geq \cdots \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$ و $\beta_n \geq \cdots \geq \beta_2 \geq \beta_1$. اگر

$$\prod_{j=1}^{k} \alpha_j \leq \prod_{j=1}^{k} \beta_j \tag{۸۲}$$

برای $k = 1, 2, \cdots, n$ ، آنگاه

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \leq \sum_{j=1}^{k} \beta_j. \tag{۸۳}$$

فرض کنید $z_1, z_2, \cdots, z_n$ صفرهای چند جمله‌ای $P(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \cdots + a_2 z + a_1$ باشند به طوری که به صورت $|z_1| \geq |z_2| \geq \cdots \geq |z_n|$ مرتب شده اند . یاد آوری می کنیم که طبق کران کلاسیک مونتل[11] داریم :

$$|z_1| \leq \max\left(1, \sum_{j=1}^{n} |a_j|\right) \tag{۸۴}$$

[11] Montel

اولین نتیجه‌ای که از کران مونتل به‌دست می آید ، به صورت زیر می باشد .

قضیه ۳.۴.۳ فرض کنید z_j ها صفر های چند جمله ای مختلط $p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1$ باشند.برای $k = 1, 2, \cdots, n$ ، داریم :

$$\prod_{j=1}^{k} |z_j| \leq \max(1, \alpha), \tag{۸۵}$$

$$\prod_{j=1}^{k} |z_j|^2 \leq \max(1, \alpha, \beta, \alpha\beta), \tag{۸۶}$$

$$\prod_{j=1}^{k} |z_j|^3 \leq \max(1, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma), \tag{۸۷}$$

به طوری که $\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_j|$ و $\beta = \sum_{j=1}^{n} |b_j|$ و $\gamma = \sum_{j=1}^{n} |c_j|$.

برهان: از آنجائی که مربع (مکعب) صفرهای چند جمله‌ای $P(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \cdots + a_2 z + a_1$ مقادیرویژه‌ی C_P^2 (C_P^3) هستند ، نامساوی (۸۵) و(۸۶) و(۸۷) مستقیماً با به کار بردن (۸۰) برای C_P و C_P^2 وC_P^3 به دست می آید. □

برای $k = 1$ می توان بهبود هایی برای (۸۶) و (۸۷) به‌دست آورد .بنابراین

$$|z_1|^2 \leq \max(1, \alpha, \beta) \tag{۸۸}$$

و

$$|z_1|^3 \leq \max(1, \alpha, \beta, \gamma). \tag{۸۹}$$

آنگاه

$$|z_1| \leq \min(\max(1,\alpha), (\max(1,\alpha,\beta))^{\frac{1}{2}}, (\max(1,\alpha,\beta,\gamma))^{\frac{1}{3}}). \tag{۹۰}$$

با توجه به این که $|z_k|^k \leq \prod_{j=1}^{k} |z_j|$ برای $k = 1, 2, \cdots, n$ نتیجه‌ی زیر برقرار است .

نتیجه ۴.۴.۳ فرض کنید z_j ها صفر های چند جمله ای مختلط $p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1$ باشند.برای $k = 1, 2, \cdots, n$ ، داریم :

$$|z_k| \leq (\max(1,\alpha))^{\frac{1}{k}}, \tag{۹۱}$$

$$|z_k| \leq (\max(1,\alpha,\beta,\alpha\beta))^{\frac{1}{2k}}, \tag{۹۲}$$

و

$$|z_k| \leq (\max(1,\alpha,\beta,\gamma,\gamma,\alpha\gamma,\beta\gamma,\alpha\beta\gamma))^{\frac{1}{3k}}. \tag{۹۳}$$

با توجه به لم های بیان شده نتیجه‌ی زیر برقرار است .

نتیجه ۵.۴.۳ فرض کنید z_j ها صفر های چند جمله ای مختلط $p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1$ باشند.برای هر عدد حقیقی و مثبت r و $k = 1, 2, \cdots, n$ داریم :

$$\sum_{j=1}^{k} |z_j|^r \leq (\max(1,\alpha))^r + k - 1, \tag{۹۴}$$

$$\sum_{j=1}^{k} |z_j|^r \leq (\max(1,\alpha,\beta,\alpha\beta))^{\frac{r}{2}} + k - 1, \qquad (95)$$

$$\sum_{j=1}^{k} |z_j|^r \leq (\max(1,\alpha,\beta,\gamma,\alpha\beta,\alpha\gamma,\beta\gamma,\alpha\beta\gamma))^{\frac{r}{3}} + k - 1. \qquad (96)$$

به کار بردن روابط اصلی مقادیر ویژه برای C(P) نشان می دهداگر s_1 و s_2 بزرگترین و کوچکترین مقادیرویژه‌ی C(P) باشند ، داریم :

$$\sum_{j=1}^{k} |z_j|^r \leq s_1^r + k - 1 \qquad (97)$$

برای $r > 0$ و $k = 1,2,\cdots,n-1$ و

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^r \leq s_1^r + s_n^r + n - 2 \qquad (98)$$

برای $r \neq 0$ ، به طوری که

$$s_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + \sqrt{(1 + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2)^2 - 4|a_1|^2}\right) \qquad (99)$$

و

$$s_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - \sqrt{(1 + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2)^2 - 4|a_1|^2}\right). \qquad (100)$$

به ویژه

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + n - 1, \tag{101}$$

که یک نتیجه از نامساوی چور[12] می باشد .
یک تعمیم از(۱۰۱) به صورت زیر می باشد :

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \leq |a_1| + \sqrt{(1 + |a_n|^2) \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \sqrt{1 + |a_j|^2}}, \tag{102}$$

این نامساوی که نامساوی چور[13] را بهبود می بخشد به صورت زیر می باشد :

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{103}$$

ازنامساوی (۱۰۱) و (۱۰۲) می توان یک کران بالا برای $\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$ به دست آورد .
با استفاده از $traceC^2(P)$ ، یک کران پائین برای $\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$ به دست می آید.

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \geq |a_n^2 - 2a_{n-1}|. \tag{104}$$

از آن جایی که

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \geq |\sum_{j=1}^{n} z_j^2| = |trC^2(P)| = |a_n^2 - 2a_{n-1}|. \tag{105}$$

---

[12] Schur's
[13] Schur's

قضیه‌ی زیر یک کاربرد از مورد خاص (۸۱) برای $C(P), C^{۲}(P), C^{۳}(P)$ می باشد .

قضیه ۶.۴.۳ فرض کنید $z_{۱}$ ها صفرچند جمله ای مختلط $p(z) = z^n + a_n z^{n-۱} + a_{n-۱} z^{n-۲} + \cdots + a_{۲} z + a_{۱}$ باشد. آنگاه

$$|z_{۱}| \geq ۱ + \max |a_j|, \tag{۱۰۶}$$

$$|z_{۱}|^{۲} \leq ۱ + \max(|a_j| + |b_j|), \tag{۱۰۷}$$

$$|z_{۱}|^{۳} \leq ۱ + \max(|a_j| + |b_j| + |c_j|). \tag{۱۰۸}$$

همچنین می توان کران بالا وپائینی برای $\sum_{j=۱}^{n} (Rez_j)^{۲}$ و $\sum_{j=۱}^{n} (Imz_j)^{۲}$ به دست آورد ،به طوری که Rez_j و Imz_j قسمت های حقیقی وموهومی z_j می باشند.

همان طور که مشاهده می کنیم

$$\sum_{j=۱}^{n} (Rez_j)^{۲} + \sum_{j=۱}^{n} (Imz_j)^{۲} = \sum_{j=۱}^{n} |z_j|^{۲} \tag{۱۰۹}$$

همچنین داریم :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(Rez_j)^2-\sum_{j=1}^{n}(Imz_j)^2 &= \sum_{j=1}^{n}Rez_j^2\\ &= Re\left(\sum_{j=1}^{n}z_j^2\right)\\ &= Re\left(trC_P^2\right)\\ &= Re\left(a_n^2-2a_{n-1}\right). \end{aligned}\qquad (110)$$

از (۱۰۹) و(۱۱۰) داریم :

$$\sum_{j=1}^{n}(Rez_j)^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2+Re(a_n^2-2a_{n-1})\right)\qquad (111)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n}(Imz_j)^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2-Re(a_n^2-2a_{n-1})\right).\qquad (112)$$

بنابراین هر کران برای $\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2$ ، کران هایی برای $\sum_{j=1}^{n}(Rez_j)^2$ و $\sum_{j=1}^{n}(Imz_j)^2$ می دهد. برای مثال با استفاده‌از (۱۰۱)کران های بالایی زیر را به دست می آوریم .

$$\sum_{j=1}^{n}(Rez_j)^2\le\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2+n-1+Re(a_n^2-2a_{n-1})\right)\qquad (113)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n}(Imz_j)^2\le\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2+n-1-Re(a_n^2-2a_{n-1})\right).\qquad (114)$$

از طرف دیگر با استفاده‌از(۱۰۴) کران های پائینی زیر رابه دست می آوریم .

$$\sum_{j=1}^{n}(Rez_j)^2\ge\frac{1}{2}\left(|a_n^2-2a_{n-1}|+Re(a_n^2-2a_{n-1})\right)\qquad (115)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n}(Imz_j)^2 \geq \frac{1}{2}\left(|a_n^2 - 2a_{n-1}| - Re(a_n^2 - 2_{n-1})\right). \qquad (۱۱۶)$$

باتوجه به دونامساوی وابسته به نامساوی شوارتز، اگر $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ آنگاه

$$\sum_{j=1}^{n}(Re\lambda_j(A))^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}+\bar{a}_{ji}}{2}\right|^2 \qquad (۱۱۷)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n}(Im\lambda_j(A))^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}-\bar{a}_{ji}}{2}\right|^2. \qquad (۱۱۸)$$

با به کار بردن این نامساوی هابرای ماتریس C(P) کران های بالائی زیر به دست می آید.

$$\sum_{j=1}^{n}(Rez_j)^2 \leq \frac{1}{2}(n-1) + (Rea_n)^2 - Rea_{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|^2 \qquad (۱۱۹)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n}(Imz_j)^2 \leq \frac{1}{2}(n-1) + (Ima_n)^2 + Rea_{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|^2. \qquad (۱۲۰)$$

فصل ۴

نتایج تحقیق

۱.۴ مقایسه‌ی کران های به دست آمده درفصل دوم وسوم

در فصل دوم کران هایی با استفاده‌ازضرایب ودر فصل سوم کران هایی بر پایه‌ی محاسبه‌ی ماتریس همراه‌ارائه شد. در این فصل باارائه‌ی چند مثال کران های به دست آمده را با هم مقایسه می کنیم.

مثال ۱ فرض کنید $P(z) = z^{5} + z^{4} - 2z^{2} + 1$ باشد.
بااستفاده از قضیه‌ی (۲.۱.۲) داریم :

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

به طوری که

$$r_1 = \frac{3}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^n F_k C(n,k)}{F_{4n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{\frac{1}{k}}$$

و

$$r_2 = \frac{3}{2} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{4n}}{2^n F_k C(n,k)} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{\frac{1}{k}}.$$

بنابراین $0/255 \leq |z| \leq 102/61$.

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۵.۱.۲) داریم :

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

به طوری که

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^k P_k \binom{n}{k}}{P_{2n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{\frac{1}{k}}$$

و

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{P_{2n}}{2^k P_k \binom{n}{k}} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{\frac{1}{k}}$$

بنابراین $۵/۵ \leq |z| \leq ۶/۰$.

بااستفاده‌از قضیه‌ی (۵.۲.۲) داریم :

$$\{z : |z| < ۱ + \delta_k\} \subseteq \{z : |z| < ۱ + \delta_{k-۱}\} \cdots \subseteq \{z : |z| < ۱ + \delta_۱\} \subseteq \{z : |z| < ۱ + a\}$$

به طوری که δ_k ریشه‌ی مثبت ویکتای معادله‌ی زیر می باشد .

$$Q_k(x) \equiv x^k + \sum_{v=۲}^{k} \left[C_{k-v}^{k-۱} - \sum_{j=۱}^{v-۱} C_{k-v}^{k-j-۱} |a_{n-j}| \right] x^{k+۱-v} - a = ۰$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |z| \leq \{z : |z| < ۱.۷۸\} &\subseteq \{z : |z| < ۱/۸۳\} \subseteq \{z : |z| < ۲\} \subseteq \{z : |z| < ۲/۱\} \\ &\subseteq \{z : |z| < ۲/۴۱۲\} \subseteq \{z : |z| < ۳\} \end{aligned}$$

با افزایش k ،کران به دست آمده بهبود می یابد.

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۹.۲.۲) داریم :

$$R_۱ \leq |z|$$

به طوری که

$$R_۱ = \frac{-R^۲|a_۱|(M - |a_۰|) + \sqrt{۴R^۲M^۳|a_۰| + \{R^۲|a_۱|(M - |a_۰|)\}^۲}}{۲M^۲}$$

بنابراین $۰/۲۳۱۵ \leq |z|$.

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۱۱.۱.۳) داریم :

$$|z| \leq \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\frac{\pi}{n})^۲ + \left(۱ + \sqrt{\sum_{j=۱}^{n-۱}|a_j|^۲}\right)^۲}\right)$$

بنابراین $|z| \leq ۲/۵۲$.

همچنین

$$|z| \leq \cos\frac{\pi}{n+۱} + \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + \sqrt{\sum_{j=۱}^{n}|a_j|^۲}\right)$$

بنابراین $|z| \leq ۲/۵۸$.

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۱۷.۱.۳) داریم :

$$|z| \leq \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + ۱ + \sqrt{(|a_n| - ۱)^۲ + ۴\sqrt{\sum_{j=۱}^{n-۱}|a_j|^۲}}\right)$$

بنابراین $|z| \leq ۲/۴۹$.

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۱۸.۱.۳) داریم :

$$|z| \leq \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + \cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{(|a_n| - \cos\frac{\pi}{n})^۲ + (|a_{n-۱}| + ۱)^۲ + \sum_{j=۱}^{n-۲}|a_j|^۲}\right)$$

بنابراین $|z| \leq ۲/۱۲$.

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۱۹.۱.۳) داریم :

$$B_{CM} = \left(۱ + |a_۱|^۲ + |a_۲|^۲ + |a_۳|^۲ + \cdots + |a_n|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = (۱ + ۱ + ۴ + ۱)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۷} = ۲/۶۵.$$

بااستفاده‌از قضیه‌ی (۲۰.۱.۳) داریم :

$$B_{FK} = \cos\frac{\pi}{n+۱} + \frac{۱}{۲}\left(|a_n| + \sqrt{\sum_{j=۱}^{n}|a_j|^۲}\right) = \cos\frac{\pi}{۶} + \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۱ + ۴ + ۱}) = ۲/۵۹.$$

$$B_K=\frac{1}{2}\left(|a_n|+1+\sqrt{(|a_n|-1)^2+4\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|^2}}\right)=\frac{1}{2}(1+1+\sqrt{4\sqrt{1+4}})=2/5.$$

$$B_L=\frac{|a_n|}{n}+\left(\frac{n-1}{n}(n-1+\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2-\frac{|a_n|^2}{n})\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}+(\frac{4}{5}4+1+4+1-\frac{1}{5}))^{\frac{1}{2}}=3.$$

بااستفاده‌ازقضیه‌ی (۲۱.۱.۳) داریم :

$$s_n(C)\leq|z|\leq s_1(C), \tag{1}$$

به طوری که

$$s_1(C)=\left(\frac{1}{2}\left(1+\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2+\sqrt{\left(1+\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)^2-4|a_1|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

و

$$s_n(C)=\left(\frac{1}{2}\left(1+\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2-\sqrt{\left(1+\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)^2-4|a_1|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

بنابراین $0/38\leq|z|\leq 2/61$.

بااستفاده‌ازنتیجه‌ی (۲.۲.۳) داریم :

$$B_1=\left(1+\sum_{j=1}^{n}(|a_j|^2+|b_j|^2)\right)^{\frac{1}{4}}=(1+(2+1+8+4+2))^{\frac{1}{4}}=2/06.$$

بااستفاده‌ازنتیجه‌ی (۴.۲.۳) داریم :

$$B_2=\left(1+\sum_{j=1}^{n}(|a_j|^2+|b_j|^2+|c_j|^2)\right)^{\frac{1}{6}}=(1+11+8+9+2+3)^{\frac{1}{6}}=1/72.$$

بااستفاده‌ازنتیجه‌ی (۲.۳.۳) داریم :

$$B_3=\left(\frac{1}{2}\left[|b_n|+\beta+\sqrt{(|b_n|-\beta)^2+4\gamma\sqrt{1+|a_n|^2}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}=1/98.$$

بااستفاده‌از قضیه‌ی (۴.۳.۳) داریم :

$$B_4 = |z| \leq \left(\frac{1}{2}\left[\lambda + \eta + \sqrt{(\lambda - \eta)^2 + 4\mu\tau}\right.\right.^{\frac{1}{3}} = 1/66.$$

بااستفاده‌ازنتیجه‌ی (۶.۲.۳) داریم :

$$B_5 = |z| \leq (1 + \sum_{j=1}^{n}(|a_j|^2 + |b_j|^2 + |c_j|^2 + |d_j|^2))^{\frac{1}{8}} = 1/6.$$

با محاسبه‌ی توان های بالاتر ماتریس همراه $C(P)$ کران های به دست آمده در فصل سوم بهبود می یابد.

کتاب‌نامه

[1] Abdurakhmanov. A, The geometry of Hasdorff domain in location problem for the spectrum of arbitrary matrices. Math. USSR Sb., 59 (1988) 39-51 .

[2] Affaneh-Aji. Chadia , Aghrwal. Neha , Narendr ,Govil. K. ,Location of zeros of polynomials , Math .Comput .Modeling ., 50 (2009) 306-313.

[3] Affaneh-Aji. Chadia, Biaz. Saad, Govil. N. K, On annuli containing all the zeros of a polynomial. Mathematical and Computer Modelling., 52 (2010) 1532-1537 .

[4] Cauchy. A.L ,Excercises de mathematiques , IV Annee de Bure Freres ,Paris ., 1829 .

[5] Carmicheal. D.R and Mason. T.E , Note on roots of algebraic equations, Bull. Amer. Math. Society., 21 (1914) 14-22.

[6] Datt. B and Govil. N.K ,On the location of zeros of polynomials ,J.Approx .Theory ., 24 (1978) 78-82 .

[7] Diaz-Barrero. J.L ,Note on bounds of the zeros ,Missouri J., 14 (2002) ,88-91 .

[8] Diaz-Barrero. Luis Jose , An annulus for the zeros of polynomials, J.Math. Appl ., 273 (2002) 349-352 .

[9] Diaz-Barrero. J. L and Egozcue. J ,Bounds for the Moduli of Zeros, Applied Mathematics Letters., 17 (2004) 993-996.

[10] Fujii. M , Kubo. F. Buzano,s inequality for roots of algebraic equation , Proceedings of American Mathematical Society., 117 (1993) 359-361.

[11] Fujii. M , Kubo. F , Operator norms as bounds for roots of algebraic equations , Proceedings of the Japan Academy of Scinces ., 49 (1973) , 805-808 .

[12] Fujiwara. M , Ueber die obere Schranke des absoluten Betages der Wurzlen eine algebraischen Gliechung, Tohoku Math. J., 10 (1916) 167-171.

[13] Govil. N. K and Jain. V. K , On the Enestrom-Kakeya Theorem II .J. Approx. Theory ., 22 (1978) 1-10 .

[14] Govil. N.K , Rahman. Q.I ,Schmeisser. G, On the derivative of a polynomial, lllinois J. Math., 23 (1979) 319-329

[15] Gustafson. K. E. and D. K. M. Rao, Numerical Range. New York 1997.

[16] Hogatt. V.E, D. Stefanescu, Polynomials. An Algorithmic Apptoach, Springer-Verlag ., 1999 .

[17] Horn. R.A. and Johson. C.R , Matrix Analysis , Cambridge ., 1985 .

[18] Hou. J.C and H.K.DU , Norm inequalities of positive operator matrices.Integral Equations Operator Theory., 22 (1995) 281-294 .

[19] Jain. V.K ,On Cauchys bound for zeros of a polynomial ,Turk. Jour. Math., 30 (2006) 95-100 .

[20] Joyal. A,Labelle. G , and Rahman. Q.I , On the location of Zeros of Polynomials, Canad. Math. Bull., 10 (1967) 53-63.

[21] Kittaneh. F , Singular value of companion matrices and bounds on zeros of polynomials , SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications ., 16 (1995) , 333-340 .

[22] Kittaneh. F, Bounds for the zeros of polynomials from matrix inequalitiesII , Linear Maltilinear Algebra ., 55 (2007) , 147-158.

[23] Kittaneh. F , Bounds for the zeros of polynomials from matrix inequalities , Archiv des Mathematik ., 81 (2003) , 601-608.

[24] Kittaneh. F, Commutator inequalities associated with the polar decomposition ,Proceedings of the American Mathematical Society., 130 (2001) ,1279-1283 .

[25] Kittaneh. F., A Numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobnius companin matrix. Studia Mathmatica., 158 (2003) 11-17

[26] Linden. H , Bounds for zeros of polynomials using traces and determinants , Seminarberichte Fachbereich Mathematik FeU Hagen. 69 (2000) , 127-146.

[27] Linden. H , Bounds for the zeros of polynomials from eigenvalues and singular values of some companion matrices .Linear Algebra and its Applications ., 271 (1998) 41-82 .

[28] Marden. M ,The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable ,American Mathematical Society ., 1966 .

[29] Sun. Y.J and Hsieh. J.G., A note on cicular bound of polynomial zeros, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965) 1-8.

[30] Yoshino. T, Introductin to operator Theory. Essex 1993.

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

اثبات — Proof

افراز — Partition

اصل — Principle

اکیداً — Strictly

اندازه — Measure

بردار ویژه — Eigenvector

برد عددی — Numerical range

بهبود — Refinement

تحلیلی — Analytic

تعمیم — Generalization

چندجمله‌ای — Polynomial

دترمینان — Determinant

درجه — Degree

درون — Inside

روابط — Relation

ریشه — Zero

سه قطری — Tridiagonal

شعاع طیفی	Spectral radius
شعاع عددی	Numerical radius
صفر شدن	Vanish
ضرایب	Coefficients
طیف	Spectrum
قطبی	Polar
لم	Lemma
کران	Bound
کران بالا	Upper bound
ماتریس	Matrix
مبدأ	Origin
مختلط	Complex
مقدارویژه	Eigenvalue
ناحیه	Region
نامساوی	Inequlity
نرمال	Normal
نرم طیفی	Spectral norm
هرمیتی	Hermitian
همراه	Frobenius

واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی

Analytic .... تحلیلی

Bound .... کران

Coefficients .... ضرایب

Complex .... مختلط

Degree .... درجه

Determinant .... دترمینان

Eigenvector .... بردار ویژه

Frobenius .... همراه

Generalization .... تعمیم

Hermitian .... هرمیتی

Inequlity .... نامساوی

Inside .... درون

Lemma .... لم

Matrix .... ماتریس

Measure .... اندازه

Normal .... نرمال

Numerical range .... برد عددی

Numerical radius	شعاع طیفی
Numerical radius	شعاع عددی
Origin	مبدأ
Proof	اثبات
Partition	افراز
Polar	قطبی
Polynomial	چندجمله‌ای
Principle	اصل
Refinement	بهبود
Relation	رابطه
Region	ناحیه
Spectrum	طیف
Spectral norm	نرم طیفی
Strictly	اکیداً
Tridiagonal	سه قطری
Upper bound	کران بالا
Vanish	صفر شدن
Zero	ریشه

Abstract

Base on algebra theorem, every unconstant polynomial have at least one root. base on this theorem can obtain this result that every unconstant polynomial n degree exactly have n roots(don't distant in general).this theorem prove the existance of roots.but in general any method don't find for location of root. ($n \geq$ ۵).in this paper we study about complex polynomials that have complex coefficients.base on this direction , first chpter allocated to express the definition and theorm that are use in next chapter.

In second chpter , we speak about bounds relate to zero of polynomial base on coefficients.

In third chpter , we present bounds that relate zero of polynomial base on calculating the matrix.

In fourth chpter , we present examples that relate to abtain results in previos chpter and we compare them with eachother.

Main refrence in this thesis include :[23] , [22] , [2] , [19] , [9] , and [3].

Key words :complex polynomial , bound , fibunatchi numbers , pell numbers , companion matrix , norm , eigenvalue .

Faculty of Science

« **Mathematics Department**»

Master of Science

Subject

Bounds for the zeros of polynomials

by:

Sara Esmaili

Supervisor:

Dr. Ahmad Zireh

Advisor:

Dr. Ebrahim Hashemi

2010