

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لا ندر



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

جریان‌های هیچ‌جا صفر در گراف‌ها

نگارنده: نسیم عباسی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

بهمن ۱۳۹۵



مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم: نسیم عباسی به شماره دانشجویی ۹۳۱۱۶۷۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات تحت عنوان جریان های هیچ جا صفر در گراف ها که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۱۸ با حضور هیأت محترم داوران در شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ قبول (با درجه: امتیاز ۱۸/۷۴)	☐ دفاع مجدد	☐ مردود
☒ نوع تحقیق: نظری	☐ عملی	

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۲- بسیار خوب (۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۹۹ - ۱۶)

۴- قابل قبول (۹۹ - ۱۵)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	آقای دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	آقای دکتر نادر جعفری راد	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	آقای دکتر عبدالله آل هوز	استادیار	

رئیس دانشکده:

تقدیم به خدایی که عالم را بر اساس حساب و هندسه آفرید...
و تقدیم به کسانی که مهر آسمانی شان،

آرام بخش آلام زمینی من است
و درخشش نگاه پر امیدشان،
روشنی بخش راهم.

سپاس گزاری...

خدایا! شکر که تو را حدی برای متصور نیست. سپاس تو را که بی‌نهایت مهربانی و بی‌شمار پاک
خدایا! حمد و سپاس از آن توست که محیطی بر تمام عالم و تو تکیه‌گاهی بر تمام موجودات
خداوندا! بنده‌ای هستم سراپا تقصیر که وجودم بر محور حیات در محاصره پیکان‌های شیاطین
است

خدایا! دستم را بگیر که من کسری از توام و وجودم از آن توست و همه مرا به نام تو می‌شناسند
که من مشتقی از حد بی‌انتهای توام
خدا را شاکرم که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. در آغاز از استاد
ارجمند، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی، استاد راهنمای بزرگوaram که در حین انجام این پایان‌نامه از
راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره بردم، کمال تشکر و قدردانی را دارم.
همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر نادر جعفری‌راد و جناب آقای دکتر عبدالله
آل‌هوز که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، سپاس‌گذاری نمایم.
در پایان از تمامی کسانی که در طول این مدت زحمات مرا متحمل شدند، نهایت تشکر را دارم.

نسیم عباسی

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب نسیم عباسی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **جریان های هیچ جا صفر در گراف ها**، تحت راهنمایی میثم علیشاهی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نسیم عباسی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. همچنین فرض کنید l و k دو عدد صحیح نامنفی باشند. برای گراف بدون جهت G ، جریان مجموع l ، تخصیص اعداد حقیقی ناصفر به هر یال G می باشد، به طوری که برای هر رأس v متعلق به $V(G)$ ، مجموع مقادیر همه یال های متصل به v برابر l باشد. k -جریان مجموع l ، یک جریان مجموع l است که مقادیر آن در مجموعه ی $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ قرار می گیرند.

در این پایان نامه، ابتدا جریان مجموع صفر در گراف های منتظم بررسی می شود و سپس بیان می شود که یک گراف از مرتبه ی n که جریان مجموع صفر دارد، دارای $(n+3)^2$ -جریان مجموع صفر است. در نهایت، به بررسی ۵-جریان مجموع یک در گراف های r -منتظمی که مرتبه ی زوج دارند، پرداخته می شود.

کلمات کلیدی: جریان هیچ جا صفر، جریان مجموع صفر، جریان مجموع یک، گراف منتظم

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه و تعاریف
۱	۱.۱ تعاریف و قضایای کلی
۱	۱.۱.۱ مفاهیم اساسی در گراف‌ها
۸	۲.۱.۱ تطابق
۹	۳.۱.۱ مقدمه‌ای از جبر خطی
۱۱	۲.۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جا صفر
۱۱	۱.۲.۱ تاریخچه
۱۲	۲.۲.۱ تعاریف
۱۵	۲ جریان مجموع صفر در گراف‌ها
۱۸	۱.۲ جریان مجموع صفر از دیدگاه جبر خطی
۲۲	۲.۲ معادل بودن حدس مجموع صفر و حدس پوشیت
۲۴	۳.۲ جریان مجموع صفر در گراف‌های منتظم
۳۸	۴.۲ جریان مجموع صفر در گراف‌های مرتبه‌ی n
۴۴	۵.۲ k -جریان‌های مجموع صفر در گراف‌های کوچک
۴۹	۳ جریان مجموع یک در گراف‌ها
۶۱	مراجع

فهرست تصاویر

۲		گراف چندگانه	۱.۱
۳		گرافی ۳-منتظم	۲.۱
۴		گراف K_5	۳.۱
۴		گرافی دوبخشی	۴.۱
۶		گراف جهت‌دار	۵.۱
۷		درخت ریشه‌دار	۶.۱
۸		یک تطابق کامل	۷.۱
۱۶		گرافی با ۶-جریان مجموع صفر	۱.۲
۱۷		مثالی برای لم $5.0.2$	۲.۲
۲۹		گرافی ۳-منتظم بدون ۴-جریان مجموع صفر	۳.۲
۴۱		دور فرد C_5	۴.۲
۴۴		کوچک‌ترین گراف‌ها بدون ۳-جریان مجموع صفر	۵.۲
۴۴		کوچک‌ترین گراف‌ها بدون ۴-جریان مجموع صفر	۶.۲
		الف: کوچک‌ترین گراف بدون ۵-جریان مجموع صفر، ب: یک ۶-جریان مجموع صفر برای گراف داده شده در قسمت الف، ج: یک $\mathbb{Z}_4$ -جریان مجموع صفر برای گراف داده شده در قسمت الف.	۷.۲
۴۶		گراف‌هایی از مرتبه‌ی ۹ و ۱۰ بدون ۵-جریان مجموع صفر	۸.۲
۴۶		گراف‌های دوبخشی از مرتبه‌ی ۱۳ و ۱۴ بدون ۴-جریان مجموع صفر	۹.۲
۴۸		گرافی بدون $\mathbb{Z}_3$ -جریان مجموع صفر	۱۰.۲
۵۰		گرافی ۳-منتظم بدون ۳-جریان مجموع یک	۱.۳

فهرست جداول

۴۷	گراف‌های بدون ۴- جریان مجموع صفر	۱.۲
۴۷	گراف‌های بدون ۵- جریان مجموع صفر	۲.۲
۴۷	گراف‌های دوبخشی بدون ۴- جریان مجموع صفر	۳.۲

فصل ۱

مقدمه و تعاریف

در این فصل، ابتدا به تعاریف و مفاهیم بنیادی در نظریه‌ی گراف‌ها و همچنین قضایای مهم و اساسی که در فصول بعد موردنیاز می‌باشد، می‌پردازیم. سپس مقدمه‌ای مختصر در رابطه با نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جا صفر در گراف‌ها بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای کلی

در قسمت اول این بخش، تعاریف و قضایای اولیه و موردنیاز از گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در قسمت بعد، به تعریف تطابق و قضیه‌های آن می‌پردازیم و در قسمت آخر، تعاریف موردنیاز از جبرخطی را بیان می‌کنیم. تمام تعاریف در این بخش، برگرفته از مراجع [۵]، [۲۵]، [۲۰] و [۴] می‌باشد.

۱.۱.۱ مفاهیم اساسی در گراف‌ها

تعریف ۱.۱.۱. گراف^۱ G ، یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ از رأس‌ها^۲، یک مجموعه‌ی $E(G)$ از یال‌ها^۳ (مجزا از $V(G)$) و یک تابع وقوع^۴ ψ_G ، که به هر یال G ، یک زوج نامرتب از رأس‌های G را که لزوماً متمایز نیستند، نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v دو رأس باشند به‌طوری که $\psi_G(e) = uv$ ، آنگاه e ، رأس‌های u و v را به یکدیگر

^۱Graph

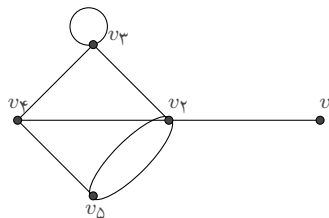
^۲Vertices

^۳Edges

^۴Incidence function

وصل کرده است و رأس‌های u و v ، دو انتهای یال e نامیده می‌شوند. اگر $uv \in E(G)$ ، آنگاه u و v **مجاور**^۵ هستند، یعنی بر روی یال مشترکی واقعند. به همین ترتیب، دو یال واقع بر روی یک رأس مشترک نیز مجاورند.

تعریف ۲.۱.۱. یک یال با دو انتهای یکسان، **طوقه**^۶ و یک یال با دو انتهای متمایز، **یال پیوندی**^۷ نامیده می‌شود. اگر بین دو رأس بیش از یک یال وجود داشته باشد، **یال‌های موازی یا چندگانه**^۸ به وجود می‌آیند. گرافی که فاقد طوقه و یال چندگانه باشد، **گراف ساده**^۹ می‌باشد، در غیر این صورت **گراف چندگانه**^{۱۰} نامیده می‌شود. لفظ گراف معمولاً برای گراف‌های ساده به کار می‌رود و اگر گراف چندگانه مورد نظر باشد، از لفظ گراف چندگانه استفاده می‌شود. نمونه‌ای از گراف‌های چندگانه در شکل ۱.۱ نشان داده شده است. یالی که رأس v_3 را به خودش متصل کرده است، طوقه است. همچنین بین دو رأس v_2 و v_5 دو یال وجود دارد که یال‌های موازی هستند.



شکل ۱.۱: گراف چندگانه

تعریف ۳.۱.۱. تعداد **رئوس** گراف G را با $|V(G)| = n$ نشان می‌دهند و آن را **مرتبه**^{۱۱} G می‌نامند. همچنین تعداد **یال‌های** گراف G را با $|E(G)| = m$ نشان می‌دهند و آن را **اندازه**^{۱۲} G می‌نامند. اگر مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف را **متناهی**^{۱۳} می‌نامند، در غیر این صورت، گراف **نامتناهی**^{۱۴} است. تمام گراف‌های مورد مطالعه در این پایان‌نامه، گراف‌های **متناهی** هستند.

تعریف ۴.۱.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد، **بدیهی**^{۱۵} و سایر گراف‌ها را **غیر بدیهی**^{۱۶} می‌نامند. رأسی

^۵ Adjacent

^۶ Loop

^۷ Link

^۸ Multiple edges

^۹ Simple graph

^{۱۰} Multigraph

^{۱۱} Order

^{۱۲} Size

^{۱۳} Finite

^{۱۴} Infinite

^{۱۵} Trivial

^{۱۶} Nontrivial

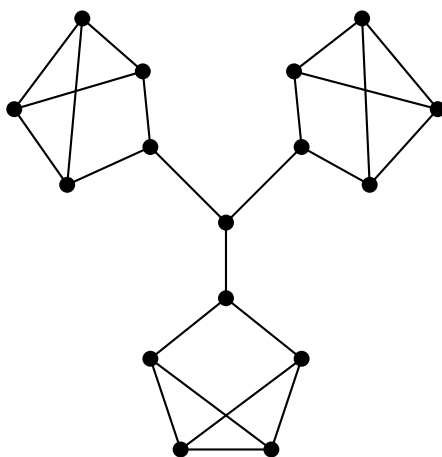
که هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس **ایزوله**^{۱۷} یا **تنها** نام دارد. گرافی که دارای هیچ یالی نباشد را، **گراف تهی**^{۱۸} می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. یک گراف **مسطح**^{۱۹} نامیده می‌شود، اگر بتوان آن را به طریقه‌ای رسم کرد که هر یال آن، تنها در رأس‌های دو انتهای خود با یال‌های دیگر برخورد داشته باشد.

تعریف ۶.۱.۱. **درجه**^{۲۰} رأس v در G به وسیله $d_G(v)$ نشان داده می‌شود و برابر تعداد یال‌های متصل به v می‌باشد. در این تعریف، هر طوقه به عنوان دو یال شمرده می‌شود. کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های G به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود.

اگر درجه‌ی رأسی در گراف عددی زوج باشد، آن رأس، **رأس زوج**^{۲۱} و اگر عددی فرد باشد، **رأس فرد**^{۲۲} نامیده می‌شود. یک گراف **اویلری**^{۲۳} نامیده می‌شود، اگر همه‌ی رئوس آن زوج باشند.

تعریف ۷.۱.۱. گراف r - **منتظم**^{۲۴} گرافی است که درجه‌ی همه‌ی رئوس آن r می‌باشد. شکل ۲.۱، گرافی ۳ - منتظم را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: گرافی ۳ - منتظم

برای مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی $\{a_1, \dots, a_r\}$ ، یک **گراف** $\{a_1, \dots, a_r\}$ - **گراف**، گرافی است که درجه‌ی هر رأس آن متعلق به مجموعه‌ی $\{a_1, \dots, a_r\}$ می‌باشد. همچنین برای دو عدد صحیح a و b که $1 \leq a \leq b$ ، یک **گراف** $[a, b]$ - **گراف**، گرافی مانند G است به طوری که برای هر $v \in V(G)$ ، $a \leq d_G(v) \leq b$ باشد.

^{۱۷}Isolated

^{۱۸}Empty graph

^{۱۹}Planar

^{۲۰}Degree

^{۲۱}Even vertex

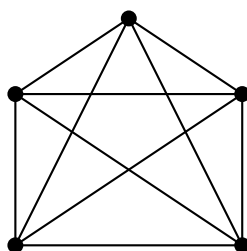
^{۲۲}Odd vertex

^{۲۳}Eulerian

^{۲۴} r -regular

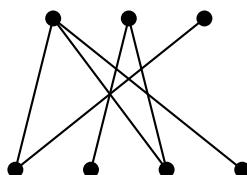
تعریف ۸.۱.۱. ^{۲۵} **یال آویزان**، یک یال متصل به یک رأس درجه‌ی ۱ می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۱. ^{۲۶} **گراف ساده‌ای** که در آن هر دو رأس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، **گراف کامل** ^{۲۶} نامیده می‌شود. یک گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهند. ترسیمی از K_5 ، در شکل ۳.۱ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱: گراف K_5

تعریف ۱۰.۱.۱. ^{۲۷} یک **گراف دوبخشی** است اگر بتوان مجموعه‌ی رأس‌های آن را به دو زیر مجموعه‌ی X و Y طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. نمونه‌ای از یک گراف دوبخشی در شکل ۴.۱ نشان داده شده است.



شکل ۴.۱: گرافی دوبخشی

تعریف ۱۱.۱.۱. ^{۲۸} **همسایه‌های** رأس v در G توسط $N_G(v)$ نمایش داده می‌شود و برابر مجموعه‌ی همه‌ی رئوس مجاور با رأس v می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. ^{۲۹} **زیرگراف** H از گراف G است و به صورت $H \subseteq G$ نوشته می‌شود، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد.

^{۲۵}Pendant edge

^{۲۶}Complete graph

^{۲۷}Bipartite

^{۲۸}Neighbours

^{۲۹}Subgraph

در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک **زیرگراف فراگیر**^{۳۰} می‌نامند.

فرض کنید V' ، یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از V باشد. زیرگرافی از G که مجموعه‌ی رأس‌های آن، V' و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی یال‌هایی از G باشد که هر دو انتهایشان در V' واقع است، **زیرگراف القا شده**^{۳۱} توسط V' نامیده شده، با $G[V']$ نمایش داده می‌شود.

حال فرض کنید E' یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از E باشد. زیرگرافی از G که مجموعه‌ی رأس‌های آن برابر مجموعه‌ی رأس‌های دو انتهای یال‌های E' و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر E' باشد، **زیرگراف القا شده** توسط E' نامیده شده، با $G[E']$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید G_1 و G_2 زیرگراف‌هایی از G باشند. اگر G_1 و G_2 هیچ رأس مشترکی نداشته باشند، آن‌ها را **مجزا**^{۳۲} می‌گویند و اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند، به آن‌ها **یال-مجزا**^{۳۳} گفته می‌شود. **اجتماع** G_1 و G_2 ، زیرگرافی است با مجموعه رأس‌های $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1) \cup E(G_2)$ و با $G_1 \cup G_2$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. دو گراف G و H یکسانند و به صورت $G = H$ نوشته می‌شود، اگر $V(G) = V(H)$ ، $E(G) = E(H)$ و $\psi_G = \psi_H$ باشد. دو گراف G و H را **یکریخت**^{۳۴} می‌گویند و به صورت $G \cong H$ نشان داده می‌شود، اگر نگاشت‌های دوسویی $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ و $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ وجود داشته باشند، به طوری که داشته باشیم:

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

تعریف ۱۵.۱.۱. یک **گشت**^{۳۵} در G ، دنباله‌ی ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ است به طوری که جملات آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها بوده و برای هر $1 \leq i \leq k$ ، v_i و v_{i-1} ، دو انتهای e_i هستند. در این صورت W ، یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارتی دیگر یک (v_0, v_k) -گشت است. عدد صحیح k ، **طول** W است. اگر یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ در گشت W متمایز باشند، W یک **گذر**^{۳۶} نامیده می‌شود. اگر علاوه بر یال‌ها، رأس‌های $v_0, v_1, \dots, v_k$ نیز متمایز باشند، W را یک **مسیر**^{۳۷} می‌نامند.

تعریف ۱۶.۱.۱. گراف G را **همبند**^{۳۸} می‌گویند، هرگاه بین هر دو رأس آن **مسیری** وجود داشته باشد. در غیر این صورت گراف را **ناهمبند** می‌گویند.

دو رأس u و v از G **همبند** یا متصلند، اگر یک (u, v) -مسیر در G وجود داشته باشد. همبندی، یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه رأس‌های V تشکیل می‌دهد. بنابراین افزایی از V به زیرمجموعه‌های

^{۳۰}Spanning subgraph

^{۳۱}Induced

^{۳۲}Disjoint

^{۳۳}Edge-disjoint

^{۳۴}Isomorphism

^{۳۵}Walk

^{۳۶}Trail

^{۳۷}Path

^{۳۸}Connected

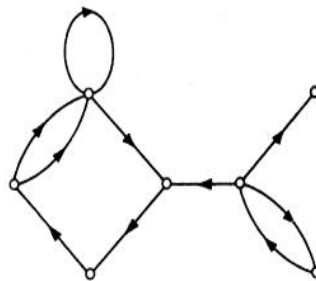
ناتهی $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ وجود دارد که در آن دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به مجموعه‌ی V_i یکسانی باشند.

زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ و $G[V_\omega]$ مؤلفه‌های^{۳۹} G نامیده می‌شوند. اگر گراف G دقیقاً یک مؤلفه داشته باشد، همبند است و در غیر این صورت **ناهمبند** خواهد بود. تعداد مؤلفه‌های G با $\omega(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۷.۱.۱. مسیری که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، **دور**^{۴۰} نامیده می‌شود. **دور زوج** در گراف G دنباله‌ی $C = (v_0, v_1, \dots, v_{2k})$ از رؤس G می‌باشد که لزوماً متمایز نیستند و $v_0 = v_{2k}$ و همچنین برای $i = 0, 1, \dots, 2k - 1$ یال‌های متمایز G هستند. مجموعه‌ی $2k$ یال C را با $E(C)$ نشان می‌دهیم. **دور فرد** نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

قضیه ۱۸.۱.۱. [۵] یک گراف **دوبخشی** است اگر و تنها اگر هیچ **دور فردی** نداشته باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. **گراف جهت‌دار**^{۴۱} D ، یک سه‌تایی مرتب $(V(D), A(D), \psi_D)$ است که متشکل از یک مجموعه‌ی ناتهی $V(D)$ از **رأس‌ها**، یک مجموعه‌ی $A(D)$ از **کمان‌ها**^{۴۲} (مجزا از $V(D)$) و یک **تابع وقوع** ψ_D است که به هر کمان D ، یک زوج مرتب از رأس‌های D که لزوماً متمایز نیستند، را نسبت می‌دهد. اگر a یک کمان و u و v دو رأس باشند به‌طوری که $\psi_D(a) = (u, v)$ ، آنگاه a را u به v وصل کرده است. u ، **دم**^{۴۳} a و v ، **سر**^{۴۴} a نامیده می‌شود. شکل ۵.۱، یک گراف جهت‌دار را نشان می‌دهد.



شکل ۵.۱: گراف جهت‌دار

تعریف ۲۰.۱.۱. گراف همبند فاقد **دور** را **درخت**^{۴۵} می‌گویند. زیرگراف فراگیری از G که درخت باشد، یک **درخت فراگیر** از G نامیده می‌شود.

^{۳۹}Component

^{۴۰}Cycle

^{۴۱}Directed graph

^{۴۲}Arcs

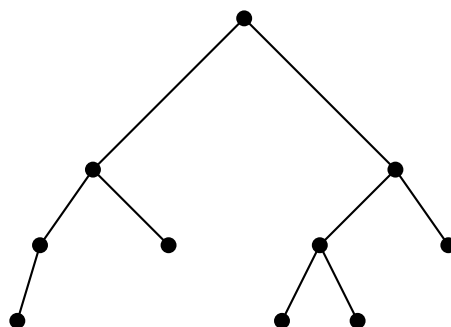
^{۴۳}Tail

^{۴۴}Head

^{۴۵}Tree

قضیه ۲۱.۱.۱. [۵] در درخت، هر دو رأس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصلند.

تعریف ۲۲.۱.۱. ریشه‌ی درخت، یک رأس ثابت در درخت است که هر رأس گراف، با یک مسیری به ریشه متصل است. در درخت، به رئوس با درجه‌ی یک، برگ می‌گویند. به عبارت دیگر، ریشه رأس ابتدایی گراف و برگ رأس انتهایی گراف است. یک درخت ریشه‌دار^{۴۶}، درختی است که ریشه‌ای به نام r دارد. برای هر رأس v ، (v, r) - مسیر یکتای درخت را با $P(v)$ نشان می‌دهند. پدر v ، همسایه‌ی رأس v در $P(v)$ است و فرزندان v دیگر همسایه‌های رأس v هستند. برگ‌ها نیز رئوس بدون فرزند گراف هستند. در شکل ۶.۱، یک درخت ریشه‌دار نشان داده شده است.



شکل ۶.۱: درخت ریشه‌دار

تعریف ۲۳.۱.۱. یک یال برشی^{۴۷} از G ، یالی مانند e است که شرط $\omega(G - e) > \omega(G)$ را برآورده سازد.

قضیه ۲۴.۱.۱. [۵] یال e یک یال برشی از G است اگر و تنها اگر e روی هیچ دوری از G واقع نباشد.

قضیه ۲۵.۱.۱. [۵] یک گراف همبند درخت است اگر و تنها اگر هر یال آن یک یال برشی باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱. رأس v از G ، یک رأس برشی^{۴۸} نامیده می‌شود، اگر بتوان E را به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی E_1 و E_2 طوری افراز کرد که $G[E_1]$ و $G[E_2]$ فقط در رأس v مشترک باشند. اگر G بدون طوقه و غیربدیهی باشد، در این صورت v یک رأس برشی از G است اگر و تنها اگر شرط $\omega(G - v) > \omega(G)$ برقرار باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. یالی مانند e از گراف همبند G را یک پل^{۴۹} می‌نامند، اگر با حذف آن، گراف ناهمبند شود، یعنی گراف جدید بیش از یک مؤلفه داشته باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱. گراف G ، k -یال همبند^{۵۰} نامیده می‌شود اگر تعداد یال‌هایی که باید از گراف حذف شوند تا گراف ناهمبند شود، حداقل k باشد.

^{۴۶} Rooted tree

^{۴۷} Cute edge

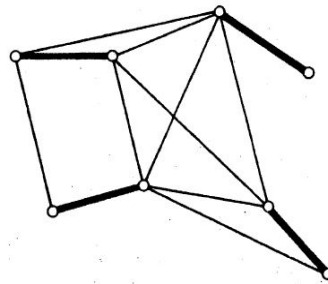
^{۴۸} Cute vertex

^{۴۹} Bridge

^{۵۰} k -edge connected

۲.۱.۱ تطابق

تعریف ۲۹.۱.۱. زیرمجموعه‌ی M از E یک **تطابق**^{۵۱} در G نامیده می‌شود، اگر عضوهای آن، یال‌های پیوندی بوده و هیچ دوتای آن‌ها در G مجاور نباشند. اگر یالی از M مجاور رأس v باشد، M رأس v را **آلوده**^{۵۲} کرده است و v را نیز M -**آلوده** می‌نامیم، در غیر این صورت v ، M -**ناآلوده** نامیده می‌شود. اگر هر رأس G ، M -آلوده باشد، تطابق M را **تطابق کامل**^{۵۳} می‌نامند. یک تطابق کامل در شکل ۷.۱ نشان داده شده است.



شکل ۷.۱: یک تطابق کامل

تعریف ۳۰.۱.۱. **فاکتور**^{۵۴} در یک گراف زیرگراف فراگیری از آن گراف می‌باشد. k -**فاکتور**، فاکتوری k -**منتظم** است. در حالت خاص، ۲ -**فاکتور** اجتماعی از **دورهای مجزا**ست که همه‌ی رئوس را می‌پوشانند. فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. یک k -**فاکتورگیری**^{۵۵} از G ، افراز یال‌های G به k -فاکتورهای **مجزا** می‌باشد.

قضیه ۳۱.۱.۱. [۵] فرض کنید G یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد. در این صورت G دارای تطابق کاملی است که تمام رأس‌های X را آلوده می‌کند اگر و تنها اگر به‌ازای هر $S \subseteq X$ داشته باشیم:

$$|N(S)| \geq |S|$$

قضیه ۳۲.۱.۱. (قضیه‌ی ازدواج هال^{۵۶}). [۵] اگر G یک گراف دوبخشی k -منتظم با شرط $k > 0$ باشد، در این صورت دارای یک تطابق کامل است.

با توجه به زوج یا فرد بودن تعداد رأس‌های یک مؤلفه، آن مؤلفه را زوج یا فرد می‌نامیم. تعداد **مؤلفه‌های فرد** G را با $o(G)$ نمایش می‌دهیم.

^{۵۱} Matching

^{۵۲} Saturated

^{۵۳} Perfect matching

^{۵۴} Factor

^{۵۵} k -factorization

^{۵۶} Hall's Marriage Theorem

یک شرط لازم و کافی برای وجود تطابق کامل در یک گراف، توسط تات^{۵۷} در سال ۱۹۴۷ ارائه شده است.

قضیه ۳۳.۱.۱. [۵] گراف G دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر به ازای هر $S \subset V$ داشته باشیم:

$$o(G - S) \leq |S|$$

قضیه ۳۴.۱.۱. [۲۱] هر گراف چندگانه‌ی $2r$ - منتظم، دارای یک 2 - فاکتورگیری می‌باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. برای دو عدد صحیح a و b که $1 \leq a \leq b$ ، یک $[a, b]$ - فاکتور از G فاکتوری مانند F از G تعریف شده است به طوری که برای هر $v \in V(G)$ ، $a \leq d_F(v) \leq b$ باشد. زمانی که $a = b$ باشد، a - فاکتور نامیده می‌شود.

قضیه ۳۶.۱.۱. [۱۸] فرض کنید $r \geq 3$ یک عدد صحیح فرد و k عدد صحیحی باشد که $1 \leq k \leq \frac{2r}{3}$ ، آنگاه هر گراف r - منتظم، $[k-1, k]$ - فاکتور دارد که هر مؤلفه‌اش منتظم می‌باشد.

۳.۱.۱ مقدمه‌ای از جبر خطی

در این قسمت به تعاریف مقدماتی جبر خطی که در فصول بعد مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۳۷.۱.۱. فضای برداری^{۵۸}، مجموعه‌ای مانند V مرکب از اشیایی به نام بردار است، که دو عمل جمع و ضرب اسکالر روی آنها تعریف شده است. جمع بردارها به این معنی است که با مفروض بودن دو بردار x و y در V ، قاعده‌ای وجود دارد که برداری مانند $x + y$ را، که آن نیز در V است، معین می‌کند و این بردار را حاصل جمع x و y می‌نامند. منظور از ضرب اسکالر، قاعده‌ای است که به هر بردار x در V و هر اسکالر حقیقی α ، یک بردار αx در V نسبت می‌دهد. این بردار را مضرب اسکالر بردار x با ضریب اسکالر α می‌نامند.

فرض کنید x, y و z متعلق به V و α و β اعدادی حقیقی باشند. اصول فضای برداری عبارتند از:

$$(1) \quad x + y = y + x \quad (\text{قانون جابجایی برای جمع بردارها})$$

$$(2) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{قانون شرکت‌پذیری برای جمع بردارها})$$

(۳) عنصری در V وجود دارد که آن را با 0 نشان می‌دهند به طوری که $0 + x = x + 0 = x$ می‌باشد. بردار 0 را، که وجودش در V به عنوان اصل پذیرفته شده است، بردار صفر می‌نامند.

(۴) برای هر x در V ، یک عنصر $-x$ در V وجود دارد به طوری که $x + (-x) = (-x) + x = 0$ می‌باشد. بردار $-x$ را بردار منفی (قرینه‌ی) بردار x می‌نامند.

$$(5) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(6) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(7) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$(8) \quad 1.x = x$$

^{۵۷}Tute

^{۵۸}Vector space

تعریف ۳۸.۱.۱. اگر V یک فضای برداری و H زیرمجموعه‌ای غیرتهی از V با خواص زیر باشد، آنگاه H را یک **زیرفضای**^{۵۹}، فضای برداری V می‌نامند، هرگاه:

- (۱) اگر x و y متعلق به H باشند، آنگاه $x + y$ متعلق به H است.
 - (۲) اگر x متعلق به H و α یک اسکالر باشد، آنگاه αx متعلق به H است.
- به عبارت دیگر، یک زیرفضای V زیرمجموعه‌ای است که تحت اعمال جبری جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری باشد. همچنین فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ و بردارهایی در V و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اسکالر باشند. اگر بردار y متعلق به فضای برداری V را بتوان به صورت $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ نوشت، آنگاه y را یک **ترکیب خطی**^{۶۰} $x_1, x_2, \dots, x_n$ و x_n گویند.

زیرمجموعه‌ی H از فضای برداری V زیرفضاست، اگر و تنها اگر وقتی $x_1, x_2, \dots, x_n$ متعلق به H باشند، هر ترکیب خطی از $x_1, x_2, \dots, x_n$ نیز متعلق به H باشد.

تعریف ۴۰.۱.۱. مجموعه‌ی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از بردارهای یک فضای برداری را **مستقل خطی**^{۶۱} می‌نامند، اگر $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ ایجاب کند:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

تعریف ۴۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری و $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از بردارها در V باشد. مجموعه‌ی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را یک **پایه**^{۶۲} برای V می‌نامند اگر:

- (۱) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی مستقل از بردارها باشد،
- (۲) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای V را پدید آورد.

تعریف ۴۲.۱.۱. به تعداد بردارهایی که فضای برداری V را تولید می‌کنند و مستقل خطی هستند، **بعد**^{۶۳} فضای برداری می‌گویند.

تعریف ۴۳.۱.۱. فرض کنید V و W فضاهای برداری باشند و T تابعی از V به W با خواص زیر باشد:

- الف) به ازای همه‌ی بردارهای x و y در V ، $T(x + y) = T(x) + T(y)$ باشد.
- ب) به ازای هر بردار x در V و هر اسکالر α ، $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ باشد.

در این صورت T را یک **تبدیل خطی**^{۶۴} می‌نامند. برای نمایش یک تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W ، اغلب می‌نویسیم $T: V \rightarrow W$.

^{۵۹}Subspace

^{۶۰}Linear combination

^{۶۱}Linearly independent

^{۶۲}Basis

^{۶۳}Dimension

^{۶۴}Linear transformation

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنید $T : V \rightarrow W$ تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. در این صورت مجموعه‌ی بردارهای $R_T = \{y : y = T(x); x \in V, y \in W\}$ زیرفضایی از W است و به آن **برد**^{۶۵} تبدیل خطی T می‌گویند. $\dim R_T$ که **بعد برد** تبدیل خطی T می‌باشد را، رتبه^{۶۶} T می‌نامند و با $\text{rank}(T)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴۵.۱.۱. فرض کنید $T : V \rightarrow W$ تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. در این صورت $N_T = \{x : x \in V, T(x) = 0\}$ زیرفضایی از V است و آن را **فضای پوچ**^{۶۷} تبدیل خطی T می‌نامند. $\dim N_T$ که **بعد فضای پوچ** تبدیل خطی T می‌باشد را، **پوچی**^{۶۸} T می‌نامند و با $\text{nul}(T)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۴۶.۱.۱. [۲۰] فرض کنید $T : V \rightarrow W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری با بعد متناهی باشد. در این صورت:

$$\dim R_T + \dim N_T = \dim V$$

و یا

$$\text{rank}(T) + \text{nul}(T) = \dim V$$

۲.۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جا صفر

در این بخش، ابتدا تاریخچه‌ای مختصر در رابطه با جریان‌های هیچ‌جا صفر بیان می‌کنیم و سپس، به تعاریف آن می‌پردازیم. تعاریف و قضایای این بخش، برگرفته از مراجع [۱] و [۴] می‌باشد.

۱.۲.۱ تاریخچه

نظریه‌ی **جریان‌های هیچ‌جا صفر**^{۶۹} برای گراف‌ها، نخستین بار در سال ۱۹۴۹ توسط تات برای گسترش قضیه‌های وابسته به رنگ‌آمیزی وجهی گراف‌های مسطح به گراف‌های عمومی معرفی شد [۲۳]. از آن زمان به بعد، تئوری جریان‌های هیچ‌جا صفر یکی از جذاب‌ترین مسائل در نظریه‌ی گراف هستند. مسئله‌ی بسیار مهمی که از آغاز پیدایش نظریه‌ی جریان‌های هیچ‌جا صفر، ریاضی‌دانان برای پاسخ دادن به آن تلاش کرده‌اند، یافتن کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند k (در صورت وجود) است، به‌طوری که گراف داده شده‌ی G ، یک k -جریان هیچ‌جا صفر^{۷۰} داشته باشد. در واقع مسئله‌ی اصلی که توسط تات مطرح شد این است که برای یک گراف دلخواه، به‌ازای چه مقادیری از k ، یک k -جریان هیچ‌جا صفر وجود دارد. بر این اساس، تات حدسی را ارائه داد. حدس مشهور تات می‌گوید که:

^{۶۵}Range^{۶۶}Rank^{۶۷}Null space^{۶۸}Nullity^{۶۹}Nowhere-zero flows^{۷۰}Nowhere-zero k -flow

حدس ۱.۲.۱ (حدس ۵- جریان تات). [۲۴] هر گراف فاقد پل^{۷۱}، یک ۵-جریان هیچ‌جا صفر دارد.

در سال ۱۹۷۹ ایگر^{۷۲} بر پایه‌ی حدس ۵-جریان تات، قضیه‌ای را بیان کرد:

قضیه ۲.۲.۱. [۱۶] هر گراف فاقد پل، دارای یک ۸-جریان هیچ‌جا صفر است.

پس از آن، در سال ۱۹۸۱ سیمور^{۷۳} حدس ۵-جریان تات را برای $k = 6$ اثبات کرد:

قضیه ۳.۲.۱. [۲۲] هر گراف فاقد پل، یک ۶-جریان هیچ‌جا صفر دارد.

تحقیقات بسیاری در این زمینه انجام شده و نتایج زیادی نیز به‌دست آمده است که نشان می‌دهند حدس ۵-جریان تات، تنها برای برخی گراف‌ها به اثبات رسیده است.

۲.۲.۱ تعاریف

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. یک جریان^{۷۴} برای G ، دوتایی (D, f) است که $D = (V, \vec{E})$ ، یک جهت‌گذاری برای G می‌باشد و $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ ، تابعی است که برای هر $v \in V(G)$ ، مجموع مقادیر تابع f روی یال‌های ورودی^{۷۵} برابر با مجموع مقادیر تابع f روی یال‌های خروجی^{۷۶} است.

جریان هیچ‌جا صفر در G ، جریانی است که برای هر $\vec{e} \in \vec{E}(G)$ ، مقدار $f(\vec{e})$ مخالف صفر باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید l و k دو عدد صحیح نامنفی باشند. k -جریان برای گراف G جریانی است که به هر یال گراف، عدد صحیحی اختصاص می‌دهد که قدر مطلق مقادیر اختصاص داده شده به هر یال، کمتر از k می‌باشد.

k -جریان هیچ‌جا صفر، یک k -جریان بدون صفر است.

ملاحظه ۶.۲.۱. فرض کنید گراف G دارای یک k -جریان هیچ‌جا صفر باشد. اگر جهت یالی از آن را برعکس کرده و مقدار اختصاص داده شده به آن یال را قرینه کنیم، k -جریان هیچ‌جا صفر دیگری برای G به‌دست خواهد آمد. بنابراین وجود یک k -جریان هیچ‌جا صفر روی G ، مستقل از جهت‌گذاری روی آن است. به عبارت دیگر، اگر گراف G تحت یک جهت‌گذاری خاص، دارای یک k -جریان هیچ‌جا صفر باشد، آنگاه برای هر جهت‌گذاری دلخواه نیز، یک k -جریان هیچ‌جا صفر خواهد داشت. همچنین اگر گرافی دارای یک k -جریان هیچ‌جا صفر باشد، آنگاه این گراف یک $(k+1)$ -جریان هیچ‌جا صفر نیز دارد.

^{۷۱}Bridgeless

^{۷۲}Jaeger

^{۷۳}Seymour

^{۷۴}Flow

^{۷۵}Incoming edges

^{۷۶}Outgoing edges

تعریف ۷.۲.۱. برای گراف بدون جهت $G^{\vee}$ ، جریان مجموع $l^{\vee 8}$ ، تخصیص اعداد حقیقی ناصفر به هر یال G می‌باشد، به‌طوری که برای هر رأس v متعلق به $V(G)$ مجموع مقادیر همه‌ی یال‌های متصل به v برابر l باشد.

k -جریان مجموع $l^{\vee 9}$ ، یک جریان مجموع l است که مقادیر آن در مجموعه‌ی $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ قرار می‌گیرند.

$\vee$ Undirected

$\vee 8$ l -sum flow

$\vee 9$ l -sum k -flow

فصل ۲

جریان مجموع صفر در گراف‌ها

فرض کنید G یک گراف، $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ باشد. ماتریس وقوع^۱ برای گراف بدون جهت G که با $W(G)$ نشان داده می‌شود، ماتریسی $n \times m$ است که سطرهای^۲ آن، مجموعه‌ی رئوس G و ستون‌ها^۳، مجموعه‌ی یال‌های G می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \text{ و } e_j \text{ بهم متصل باشند،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

به وضوح، بین جریان در گراف G و یک عنصر از فضای پوچ $W(G)$ یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. در واقع، جریان‌های G عناصر فضای پوچ $W(G)$ هستند. اگر $[c_1, \dots, c_m]^T$ یک عنصر از فضای پوچ $W(G)$ باشد، آنگاه می‌توان مقدار c_i را به e_i اختصاص داد و در نتیجه یک جریان بدست آورد. یک عنصر از فضای پوچ $W(G)$ تابع $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، به طوری که برای هر رأس $v \in V(G)$ داریم:

$$\sum_{u \in N(v)} f(uv) = 0,$$

که $N(v)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ای از رئوس مجاور رأس v است. اگر f هرگز مقدار صفر نگیرد، آنگاه **جریان مجموع صفر**^۴ برای G نامیده می‌شود. k -**جریان مجموع صفر**، یک جریان مجموع صفر است که مقادیر آن اعداد صحیحی است که قدر مطلق این اعداد کمتر از k می‌باشد.

^۱Incidence matrix

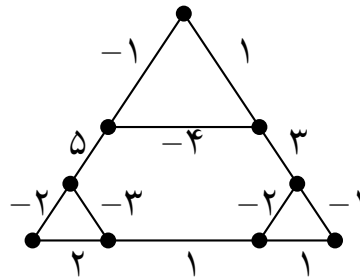
^۲Rows

^۳Columns

^۴Zero-sum flow

بنابراین در زبان جبر خطی حدس ۵- جریان تات (۱.۲.۱) می‌گوید که اگر G یک گراف فاقد پل جهت‌دار باشد، آنگاه یک بردار در فضای پوچ $W(G)$ وجود دارد که درایه‌هایش اعداد صحیح ناصفری هستند که قدرمطلق این مقادیر کمتر از ۵ می‌باشد.

شکل ۱.۲، یک ۶-جریان مجموع صفر را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲: گرافی با ۶-جریان مجموع صفر

در سال ۲۰۰۹ اکبری و همکارانش حدسی برای جریان‌های مجموع صفر زدند [۲] که مشابه حدس ۵-جریان تات برای جریان‌های هیچ‌جا صفر می‌باشد:

فرض کنید G گرافی بدون جهت با ماتریس وقوع W باشد. اگر یک بردار در فضای پوچ W وجود داشته باشد که درایه‌هایش اعداد حقیقی ناصفر باشند، آنگاه یک بردار نیز در آن فضا وجود دارد که درایه‌هایش اعداد صحیح ناصفری هستند که قدر مطلق این مقادیر کمتر از ۶ می‌باشند، یا معادلاً حدس مجموع صفر را داریم:

حدس ۱.۰.۲ (حدس مجموع صفر). [۱] اگر G گرافی باشد که دارای جریان مجموع صفر است، آنگاه G ، یک ۶-جریان مجموع صفر دارد.

ملاحظه ۲.۰.۲. گراف‌هایی وجود دارند که ۶-جریان مجموع صفر دارند اما ۵-جریان مجموع صفر ندارند. شکل ۱.۲، نمونه‌ای از این گراف‌ها را نشان می‌دهد. در بخش ۵.۲، به بررسی آن می‌پردازیم.

لم ۳.۰.۲. [۲] فرض کنید G گراف دوبخشی ۲-یال همبند باشد، آنگاه G ، دارای یک ۶-جریان مجموع صفر است.

برهان. فرض کنید G گراف دوبخشی ۲-یال همبند است، یعنی یال برشی ندارد. بنا به قضیه‌ی سیمور (۳.۲.۱)، هر گراف دوبخشی ۲-یال همبند، یک ۶-جریان هیچ‌جا صفر دارد. یعنی به هر یال G ، مقداری اختصاص داده شده است به‌طوری که بیشترین مقدار اختصاص داده شده برابر ۵ است و برای هر رأس گراف، مجموع مقادیر یال‌های ورودی برابر با مجموع مقادیر یال‌های خروجی می‌باشد.

بدون از دست رفتن کلیت، می‌توان فرض کرد که جهت همه‌ی یال‌ها، از یک بخش G به بخش دیگر آن باشد. آنگاه برای هر رأس در بخش اول، یال ورودی نداریم و همه‌ی یال‌ها خروجی می‌باشند. در نتیجه

مجموع مقادیر یال‌های ورودی برابر صفر است و چون مجموع مقادیر یال‌های ورودی با مجموع مقادیر یال‌های خروجی برابر است، باید مجموع مقادیر یال‌های خروجی نیز صفر باشد. حال با حذف جهت همه‌ی یال‌ها می‌توان نتیجه گرفت که در هر رأس قاعده‌ی مجموع صفر صدق می‌کند و چون همه‌ی مقادیر اختصاص داده شده به یال‌ها کمتر از ۶ می‌باشد، در نتیجه گراف G ، یک ۶-جریان مجموع صفر دارد و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

□

بنابر لم ۳.۰.۲ و قضیه‌ی ۶-جریان سیمور (۳.۲.۱)، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

نتیجه ۴.۰.۲. [۱] اگر یک گراف دوبخشی جریان مجموع صفر داشته باشد، آنگاه دارای یک ۶-جریان مجموع صفر است.

لم ۵.۰.۲. [۱] احکام زیر برقرارند:

(الف) هر دور زوج، دارای یک ۲-جریان مجموع صفر می‌باشد.

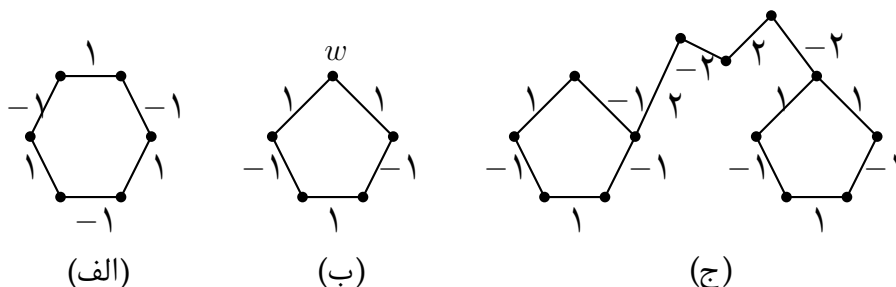
(ب) فرض کنید C دوری فرد و w یک رأس از C باشد. آنگاه تابعی مانند $f : E(C) \rightarrow \{\pm 1\}$ وجود دارد به طوری که

$$\forall v \in V(C) \setminus \{w\} : \sum_{u \in N(v)} f(uv) = 0$$

۹

$$\sum_{u \in N(w)} f(uw) = 2.$$

(ج) فرض کنید C_1 و C_2 دو دور فرد باشند و $v_1 \in C_1$ و $v_2 \in C_2$ باشد. همچنین فرض کنید P مسیری متمایز از $E(C_1)$ و $E(C_2)$ است و v_1 را به v_2 متصل می‌کند. آنگاه ۳-جریان مجموع صفری وجود دارد که مقادیر روی $E(C_1) \cup E(C_2)$ برابر ± 1 و مقادیر روی $E(P)$ برابر ± 2 می‌باشد.



شکل ۲.۲: مثالی برای لم ۵.۰.۲

برهان. اثبات ساده می‌باشد و با مثال در شکل ۲.۲، توضیح داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، چون به هر رأس در یک دور، دو یال متصل است، می‌توان مقادیر ۱ و ۱- را به دو یال متصل به هر رأس اختصاص داد. در نتیجه در یک دور زوج، در هر رأس، قاعده‌ی مجموع صفر صدق می‌کند. بنابراین هر دور زوج، یک ۲- جریان مجموع صفر دارد.

در هر دور فرد، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، رأسی وجود دارد که قاعده‌ی مجموع صفر برای آن برقرار نیست، در نتیجه دور فرد، جریان مجموع صفر ندارد.

توجه شود که در قسمت (ج)، دو مورد کمی متفاوت مربوط به طول P وجود دارد و تنها یک مورد در شکل نشان داده شده است. همان‌طور که می‌بینید به یال‌های هر دور به‌طور متناوب، مقدار ۱ و ۱- داده شده است و همچنین یال‌های مسیر نیز به‌طور متناوب، مقدار ۲ و ۲- گرفته‌اند که در نتیجه برای هر رأس، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است. بنابراین گراف داده شده، دارای یک ۳- جریان مجموع صفر است.

□

تعریف ۶.۰.۲. دو دور فرد یال مجزای C_1 و C_2 که توسط مسیر P به هم متصل شده‌اند و یال‌های این مسیر مجزا از یال‌های C_1 و C_2 می‌باشند را یک **دمبل**^۵ در گراف می‌گویند.

لم زیر در [۶] اثبات شده است.

لم ۷.۰.۲. اگر G گرافی با جریان مجموع صفر باشد، آنگاه هر یال G در یک دور زوج یا یک دمبل قرار دارد.

در بخش اول این فصل، جریان مجموع صفر را از دیدگاه جبرخطی بررسی می‌کنیم. در بخش دوم، نشان می‌دهیم که حدس مجموع صفر و حدس پوشیت^۶ برای گراف‌های دوجهته، با هم معادلند. پس از آن، در بخش سوم، به بررسی جریان مجموع صفر در گراف‌های منتظم می‌پردازیم. سپس، در بخش چهارم، جریان مجموع صفر را در گراف‌های مرتبه‌ی n بررسی می‌کنیم. در نهایت، در بخش پنجم، به بررسی وجود k -جریان مجموع صفر در گراف‌های کوچک می‌پردازیم.

۱.۲ جریان مجموع صفر از دیدگاه جبرخطی

قضیه ۱.۱.۲. [۱۰] فرض کنید G گرافی با n رأس و c مؤلفه‌ی همبندی دوبخشی باشد. اگر W ماتریس وقوع G باشد، آنگاه بعد فضای پوچ $W(G)$ برابر $m - n + c$ است.

برهان. تبدیل خطی برای W که ماتریسی $n \times m$ است، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

^۵Dumbbell

^۶Bouchet

با استفاده از قضیه ۴۶.۱.۱، برای تبدیل خطی T داریم:

$$\text{rank}(T) + \text{nul}(T) = m$$

پس کافیت ثابت شود:

$$\text{rank}(W) = n - c.$$

فرض کنید که $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ یک بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که $z^T W = 0$ باشد. اگر uv یالی در G باشد، آنگاه $z_u + z_v = 0$ می باشد. پس با استقرا می توان نتیجه گرفت که اگر u و v رؤوسی در G باشند که توسط مسیری به طول r به هم متصل شده اند، آنگاه داریم:

$$z_u = (-1)^r z_v$$

بنابراین اگر G دارای مؤلفه ای باشد که دوبخشی نیست، یعنی این مؤلفه دارای دور فرد است، آنگاه:

$$\forall i : z_i = 0$$

می باشد. در نتیجه بعد فضای پوچ ماتریس وقوع این مؤلفه برابر صفر است و اگر G دارای مؤلفه ای دوبخشی باشد، آنگاه بعد فضای پوچ ماتریس وقوع این مؤلفه برابر یک می باشد. بنابراین بعد فضای پوچ ماتریس وقوع گراف برابر تعداد مؤلفه های دوبخشی یعنی c می شود. تبدیل خطی برای W^T که ماتریسی $m \times n$ است، به صورت زیر می باشد:

$$T' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

بنابراین $\text{rank}(T') + \text{nul}(T') = n$ می شود. در نتیجه $\text{rank}(W^T) = n - c$ می باشد. همچنین داریم:

$$\text{rank}(W) = \text{rank}(W^T)$$

پس:

$$\text{rank}(W) = \text{rank}(W^T) = n - c$$

در نهایت داریم:

$$\text{nul}(W) = m - (n - c) = m - n + c.$$

□

قضیه بعدی تفسیری هندسی برای گراف هایی که جریان مجموع صفر دارند، ارائه می دهد.

قضیه ۲.۱.۲. [۲] فرض کنید G گرافی دوبخشی نباشد، آنگاه G جریان مجموع صفر دارد اگر و تنها اگر به ازای هر یال $e \in E(G)$ ، گراف $G \setminus \{e\}$ مؤلفه ای دوبخشی نداشته باشد.

برهان. بدون از دست رفتن کلیت، فرض کنید گراف G همبند می باشد. ابتدا فرض شده است که G جریان مجموع صفر دارد و ثابت شده است که $G \setminus \{e\}$ مؤلفه ای دوبخشی ندارد. دو حالت در نظر بگیرید:

حالت ۱. فرض کنید که $G \setminus \{e\}$ دارای دو مؤلفه‌ی H_1 و H_2 باشد. همچنین برای $i = 1, 2$ ، فرض کنید H_i از مرتبه‌ی n_i و اندازه‌ی m_i باشد و $nul(H_i)$ بعد فضای پوچ ماتریس وقوع H_i تعریف شده باشد.

حال فرض کنید H_1 دوبخشی باشد. بنابراین چون H_1 همبند می‌باشد، دارای یک مؤلفه‌ی دوبخشی است. در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی ۱.۱.۲ داریم:

$$nul(H_1) = m_1 - n_1 + 1$$

همچنین داریم:

$$nul(H_2) \geq m_2 - n_2$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} nul(G \setminus \{e\}) &= nul(H_1) + nul(H_2) \\ &\geq (m_1 - n_1 + 1) + (m_2 - n_2) \\ &= (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) + 1 \\ &= (m - 1) - n + 1 \\ &= m - n, \end{aligned}$$

که n و m به ترتیب، مرتبه و اندازه‌ی گراف G می‌باشند. از طرف دیگر $nul(G) \geq nul(G \setminus \{e\})$ است. چون گراف G دوبخشی نیست، داریم:

$$nul(G) = m - n$$

در نتیجه $nul(G) \geq nul(G \setminus \{e\}) = m - n$ می‌باشد. بنابراین:

$$nul(G \setminus \{e\}) = m - n.$$

چون $nul(G) = m - n$ و همچنین $nul(G \setminus \{e\}) = m - n$ می‌باشد، نتیجه گرفته می‌شود که هر عنصر از فضای پوچ گراف G روی یال e ، صفر است که تناقض است، چون گراف G ، جریان مجموع صفر دارد و مقدار اختصاص داده شده به هر یال ناصفر می‌باشد.

حالت ۲. فرض کنید $G \setminus \{e\}$ گرافی همبند و دوبخشی باشد. بنابراین:

$$nul(G \setminus \{e\}) = (m - 1) - n + 1 = m - n$$

همانند حالت ۱، داریم:

$$nul(G) = m - n$$

در نتیجه:

$$nul(G) = nul(G \setminus \{e\})$$

بنابراین مانند حالت ۱، در تناقض با دارا بودن جریان مجموع صفر می‌باشد.

پس بنابر حالت ۱ و حالت ۲، با حذف یک یال از گراف G ، گراف حاصل مؤلفه‌ی دوبخشی ندارد. حال برای اثبات کفایت، فرض شده است گراف $G \setminus \{e\}$ مؤلفه‌ی دوبخشی ندارد و ثابت شده است گراف G دارای جریان مجموع صفر است. برای این کار، ابتدا نشان داده می‌شود که برای هر یال e ، یک عنصر در فضای پوچ گراف G وجود دارد که درایه‌ی متناظر با e ، ناصفر است. اگر یال e روی دور زوج قرار گیرد، آنگاه با اختصاص مقادیر ۱ و -1 به‌طور متناوب به یال‌های دور، بلافاصله حکم ثابت می‌شود.

اگر e ، یال برشی G باشد، آنگاه چون هیچ‌یک از مؤلفه‌های $G \setminus \{e\}$ دوبخشی نیست، G شامل دو دور فرد متصل توسط یک مسیر مانند P می‌باشد که یال e روی این مسیر قرار دارد. بنابراین به یال‌هایی که روی مسیر قرار می‌گیرند، به‌طور متناوب، ۲ و -2 اختصاص دهید. اگر مقدار اختصاص داده شده به یک یال انتهایی مسیر ۲ بود، سپس به دو یال دور مجاور با این یال مسیر، -1 دهید و یال‌های باقیمانده‌ی دور را، به‌طور متناوب توسط ۱ و -1 ، نامگذاری کنید. اگر مقدار اختصاص داده شده به یک یال انتهایی مسیر -2 بود، سپس به دو یال دور مجاور با این یال مسیر، ۱ دهید و یال‌های باقیمانده‌ی دور را، به‌طور متناوب توسط -1 و ۱، نامگذاری کنید. در نتیجه یک عنصر در فضای پوچ ماتریس وقوع G وجود دارد که درایه‌ی متناظر با e ناصفر است. حال فرض کنید که e روی هیچ دور زوجی قرار نگیرد ولی روی تعدادی دور فرد که $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود، قرار گیرد. ادعا شده است که دور فرد $\mathcal{C}_1$ در G وجود دارد که شامل e نیست و داریم:

$$|V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}_1)| \leq 1$$

اگر ادعا ثابت شود، چون G همبند می‌باشد، دو دور فرد حاصل می‌شود که یکی از آنها شامل e می‌باشد و دو دور توسط مسیر P به هم متصل شده‌اند. در نتیجه روش قبل برای نشان دادن وجود یک عنصر در فضای پوچ ماتریس وقوع G که درایه‌ی متناظر با e ناصفر است، به کار می‌رود. توجه شود که در حالت $|V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}_1)| = 1$ طول مسیر P برابر صفر می‌باشد.

برای اثبات ادعا ابتدا باید نشان داده شود که دور فردی که شامل e نباشد، وجود دارد. همچنین در صورت وجود دور فرد، باید ثابت شود که تعداد رئوس مشترک بین دور فردی که شامل e نیست و بقیه‌ی دورهای فرد، کمتر یا مساوی یک است.

چون $G \setminus \{e\}$ دوبخشی نیست، شامل دور فرد می‌باشد. بنابراین در گراف G ، دور فردی مانند $\mathcal{C}'$ وجود دارد که شامل e نیست. حال فرض کنید که $|V(\mathcal{C}') \cap V(\mathcal{C})| > 1$ باشد، بنابراین دو رأس مانند u و v وجود دارد که متعلق به $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}')$ است. همچنین فرض کنید که کمان uv مسیری روی $\mathcal{C}$ است که شامل e می‌باشد و داریم:

$$V(uv) \cap V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}') = \{u, v\}$$

چون $\mathcal{C}'$ دوری فرد می‌باشد، دو مسیر متفاوت روی $\mathcal{C}'$ وجود دارد که متشکل از دو رأس u و v می‌باشد. اگر دو مسیر y_1 و y_2 نامیده شود، آنگاه $y_1 + y_2 = 2k + 1$ می‌شود، که $2k + 1$ عددی فرد است. دو مسیر نیز، دور $\mathcal{C}$ را تشکیل می‌دهند. اگر مسیری که رأس u را به رأس v متصل می‌کند و شامل یال e می‌باشد، مسیر x_1 و بقیه‌ی دور $\mathcal{C}$ ، مسیر x_2 نامیده شود، آنگاه $x_1 + x_2 = 2k + 1$ می‌باشد.

همچنین چون یال e روی هیچ دور زوجی قرار ندارد، بنابراین $x_1 + y_2 = 2k + 1$ می‌شود. در نتیجه:

$$(x_1 + x_2) + (x_1 + y_2) = 2k,$$

که از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$x_2 + y_2 = 2k \implies x_2 \equiv y_2 \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2)$$

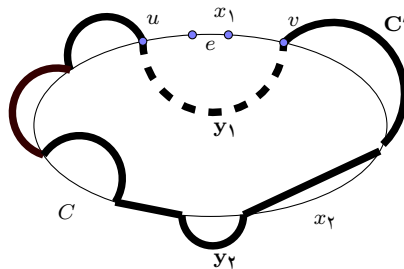
با توجه به فرد بودن دو دور $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ داریم:

$$x_1 \equiv y_1 \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2) \implies x_1 + y_1 = 2k$$

بنابراین یک دور زوج شامل e وجود دارد که تناقض می‌باشد، چون یال e روی هیچ دور زوجی قرار نگرفته است. پس $|V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}')| \leq 1$ می‌باشد و ادعا ثابت شده است. در نتیجه یک عنصر در فضای پوچ ماتریس وقوع G وجود دارد که درایه‌ی متناظر با e ناصفر است.

حال فرض کنید $e \in E(G)$ و W_e مجموعه‌ی همه‌ی بردارها در فضای پوچ ماتریس وقوع G باشد که درایه‌های متناظر با e صفر هستند. به‌وضوح W_e ، فضای برداری می‌باشد.

فرض کنید W فضای پوچ ماتریس وقوع G باشد. اگر $W \subseteq \bigcup_{e \in E(G)} W_e$ آنگاه چون W فضای برداری روی میدان نامتناهی $\mathbb{R}$ است، مشخص است که یالی مانند e وجود دارد به‌طوری که $W \subseteq W_e$ ، که این تناقض است. پس یک عنصر مانند α وجود دارد که $\alpha \in W \setminus \bigcup_{e \in E(G)} W_e$ است و اثبات کامل می‌شود.



□

۲.۲ معادل بودن حدس مجموع صفر و حدس پوشیت

تعریف ۱.۲.۲. گراف دوجهته $G^\vee$ گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ ، به‌طوری که هر یال به یکی از چهار حالت ممکن جهت‌دهی شده است:

^۲Bidirected graph



یک یال با جهت‌دهی $\bullet \longrightarrow \bullet$ ، **yal خارجی**^۸ و یک یال با جهت‌دهی $\bullet \longleftarrow \bullet$ ، **yal داخلی**^۹ نامیده می‌شود. یک یال که نه یال داخلی باشد و نه یال خارجی، یک **yal معمولی**^{۱۰} نامیده می‌شود.

فرض کنید G گرافی دوجهته باشد. برای هر $v \in V(G)$ ، مجموعه‌ی همه‌ی یال‌های با دم در v با $E^+(v)$ و مجموعه‌ی همه‌ی یال‌های با سر در v با $E^-(v)$ نشان داده می‌شود. تابع $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ جریانی دوجهته برای G است، اگر برای هر $v \in V(G)$ ، داشته باشیم:

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e).$$

اگر f مقداری از مجموعه‌ی $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ بگیرد، آنگاه k -جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر نامیده می‌شود.

جریان‌های دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر، تعمیم یافته‌ی مفاهیم جریان‌های مجموع صفر و هیچ‌جا صفر هستند. اگر همه‌ی یال‌های G را به‌صورت معمولی جهت‌دهی کنیم، آنگاه جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر در این جایگذاری، با جریان هیچ‌جا صفر معمولی متناظر است، و اگر همه‌ی یال‌های G را به‌صورت یال داخلی جهت‌دهی کنیم، آنگاه جریان دوجهته با جریان مجموع صفر، متناظر است. در سال ۱۹۸۳، پوشیت حدس جالب ذیل را ارائه داد.

حدس ۲.۲.۲. [۶] حدس پوشیت. هر گراف دوجهته که جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر داشته باشد، دارای یک ۶-جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر خواهد بود.

پوشیت نشان داد که حدس فوق درست است اگر ۶ با ۲۱۶ جابجا شود. سپس زیکا^{۱۱} ۲۱۶ را به ۳۰ کاهش داد [۲۸]. همچنین دیواس^{۱۲} حدس پوشیت را با جابجا کردن ۶ با ۱۲، اثبات کرد [۹]. قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که برای اثبات حدس پوشیت، کفایت نشان داده شود که حدس مجموع صفر درست است.

قضیه ۳.۲.۲. [۱] حدس پوشیت و حدس مجموع صفر معادلند.

برهان. برای اثبات معادل بودن این دو حدس، باید فرض کرد یکی از این دو حدس برقرار است و درستی حدس دیگر را، از آن نتیجه گرفت. ابتدا فرض شده است که حدس پوشیت درست است. فرض کنید H گرافی بدون جهت و f جریان مجموع صفر روی H باشد. گراف دوجهته‌ی G ، توسط H ، طوری ساخته شده است که همه‌ی یال‌های آن، یال داخلی می‌باشند. اگر همان مقادیر تابع f ، به یال‌های G اختصاص داده شود، به‌سادگی می‌توان دید که گراف دوجهته‌ی G ، جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا

^۸Out-edge

^۹In-edge

^{۱۰}Ordinary edge

^{۱۱}Zyka

^{۱۲}DeVos

صفر دارد. چون برای هر $v \in V(G)$ ، یال با دم نداریم، $\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = 0$ می‌باشد و با توجه به مقادیر f نیز، $\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = 0$ است، درنتیجه برای هر $v \in V(G)$ داریم:

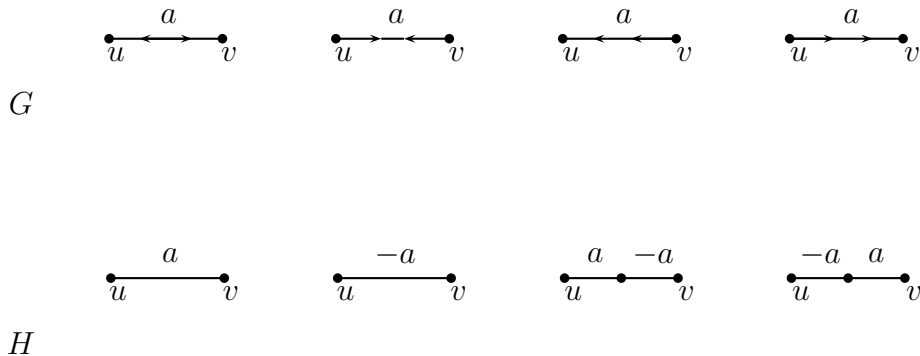
$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e)$$

پس جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر برای G برقرار است. بنابراین با توجه به حدس پوشیت، برای G ، یک ۶-جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر وجود دارد که f' نامیده می‌شود. درنتیجه f' ، یک ۶-جریان مجموع صفر برای گراف بدون جهت H است و حدس مجموع صفر صحیح می‌باشد. یعنی هر گرافی که دارای جریان مجموع صفر باشد، یک ۶-جریان مجموع صفر دارد.

سپس نشان داده شده است که اگر حدس مجموع صفر برقرار باشد، آنگاه حدس پوشیت صحیح است.

فرض کنید G گرافی دوجهته و g جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر روی G باشد. جهت همه‌ی یال‌های G را حذف کرده و گراف حاصل را توسط H نامگذاری کنید.

حال اگر یالی در گراف G ، یال خارجی با مقدار a بود، $(\bullet \xrightarrow{a} \bullet)$ ، به یال متناظر در H ، مقدار a دهید، $(\bullet \xleftarrow{a} \bullet)$ ، اگر یال داخلی با مقدار a بود، $(\bullet \xrightarrow{a} \bullet)$ ، مقدار $-a$ دهید، $(\bullet \xleftarrow{-a} \bullet)$ ، اگر یال معمولی با مقدار a بود، $(\bullet \xrightarrow{a} \bullet)$ یا $(\bullet \xleftarrow{a} \bullet)$ ، یال متناظر در H را، با مسیری به طول ۲، با مقادیر a و $-a$ عوض کنید. ملاحظه می‌کنیم که مقادیر ذیل برای هر یال H به صورت زیر می‌باشد:



به راحتی می‌توان دید که این مقادیر یک k -جریان مجموع صفر برای H تعریف می‌کنند، اگر و تنها اگر g ، یک k -جریان هیچ‌جا صفر برای G باشد. حال، چون حدس مجموع صفر برقرار است، نتیجه می‌گیریم که H ، یک ۶-جریان مجموع صفر دارد. بنابراین G ، دارای یک ۶-جریان دوجهته‌ی هیچ‌جا صفر است و حدس پوشیت صحیح می‌باشد.

□

۳.۲ جریان مجموع صفر در گراف‌های منتظم

در سال ۲۰۰۹، اکبری و همکارانش نشان دادند هر گراف ۳-منتظم، دارای یک ۵-جریان مجموع صفر است و اگر $r \geq 4$ عددی زوج باشد، آنگاه هر گراف r -منتظم، یک ۳-جریان مجموع صفر دارد

[۲]. پس از آن در سال ۲۰۱۰، اکبری و دیگر همکارانش ثابت کردند هر گراف r -منتظم ($r \geq 3$)، دارای یک ۷-جریان مجموع صفر است و اگر $r \mid 3$ ، آنگاه هر گراف r -منتظم، یک ۵-جریان مجموع صفر دارد [۱]. بر این اساس حدس زدند که هر گراف r -منتظم ($r \geq 3$)، دارای یک ۵-جریان مجموع صفر است [۱]. در سال ۲۰۱۲ حدس خود را برای گراف‌های r -منتظمی که $r \geq 3$ و $r \neq 5$ باشد، ثابت کردند [۳]. در نهایت در سال ۲۰۱۶ نشان دادند که حدسشان برای گراف‌های ۵-منتظم نیز درست می‌باشد [۴].

در این بخش به بررسی قضایای ارائه شده در رابطه با جریان مجموع صفر در گراف‌های منتظم می‌پردازیم. برای اثبات این قضایا، لم مقابل ارائه شده است که اثبات آن در مرجع [۲] آورده شده است.

لم ۱.۳.۲. [۲] اگر G یک $\{1, 3\}$ -گراف همبند باشد و زیرگراف حاصل توسط رئوس درجه‌ی ۳ گراف G ، ۲-یال همبند باشد، آنگاه تابعی مانند f ، روی $E(G)$ وجود دارد به‌طوری که $f(e) \in \{-2, 1, 4\}$ است و قاعده‌ی مجموع صفر برای هر رأس درجه‌ی ۳، برقرار می‌باشد و برای هر یال e نیز، $f(e) \in \{-2, 4\}$ است. بعلاوه، یک یال e باید دارای مقدار از پیش اختصاص داده شده باشد.

قضیه ۲.۳.۲. [۲] هر گراف ۳-منتظم دارای یک ۵-جریان مجموع صفر است.

برهان. در واقع نتیجه‌ی قوی‌تری برای هر گراف ۳-منتظم به‌دست آمده است به‌طوری که هر گراف ۳-منتظم مانند G ، جریان مجموع صفری دارد که مقادیر آن در مجموعه‌ی $\{1, -2, 4\}$ قرار دارد و مقدار هر یال برشی ۲- یا ۴ می‌باشد.

برای اثبات این قضیه، درخت ریشه‌دار T توسط G به‌گونه‌ای ساخته شده است که هر زیرگراف ماکسیمال ۲-یال همبند G ، یک رأس T در نظر گرفته شده است و $E(T)$ شامل همه‌ی یال‌های برشی G می‌باشد. حال با حرکت روی درخت T ، مرحله به مرحله، یک ۵-جریان مجموع صفر برای G یافت می‌شود. از ریشه‌ی T که H نام دارد، شروع می‌کنیم. با استفاده از لم ۱.۳.۲، به هر یال H مقداری اختصاص داده شده است که این مقادیر متعلق به مجموعه‌ی $\{1, -2, 4\}$ می‌باشد و هر یال برشی G ، که به H متصل است، مقدار ۲- یا ۴ گرفته است به‌طوری که برای هر $v \in V(H)$ ، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است. سپس به سمت رأس بعدی این مرحله‌ی T حرکت می‌کنیم. فرض کنید H' رأس مجاور H در T باشد. در این مرحله از فرایند، تنها یک یال برشی G ، متصل به H' وجود دارد که توسط ۲- یا ۴ علامت‌گذاری شده‌اند.

حال، با به‌کار بردن لم ۱.۳.۲، یال‌های H' نیز علامت‌گذاری شده‌اند و همان روشی که برای H به‌کار برده شد، برای H' نیز اجرا می‌شود. با ادامه‌ی این روش، برای G ، یک ۵-جریان مجموع صفر به‌دست می‌آید.

□

قضیه ۳.۳.۲. [۲] فرض کنید r یک عدد صحیح زوج باشد و $r \geq 4$ ، آنگاه هر گراف r -منتظم، یک ۳-جریان مجموع صفر دارد.

برهان. فرض کنید G گرافی r -منتظم با r زوج باشد. در این حالت، با استفاده از قضیه‌ی ۳۴.۱.۱، G ، ۲-فاکتورپذیر می‌باشد. یعنی یال‌های G قابل افراز به دورهای مجزایی می‌باشد که همه‌ی رئوس G را

می‌پوشانند. اگر تعداد ۲-فاکتورها زوج باشد، آنگاه مقدار ۱ را به یال‌های نیمی از ۲-فاکتورها و ۱-را به یال‌های نیمی دیگر اختصاص دهید. در نتیجه قاعده‌ی مجموع صفر با مقادیر ۱ و -۱، برای هر رأس G صدق می‌کند.

اگر تعداد ۲-فاکتورها فرد باشد، آنگاه سه ۲-فاکتور F_1, F_2, F_3 را انتخاب کرده و ۲ را به یال‌های F_1 و ۱-را به یال‌های F_2 و F_3 اختصاص دهید. حال تعداد ۲-فاکتورهای باقیمانده زوج می‌باشد و به ابتدای اثبات برمی‌گردیم. در نتیجه در این حالت نیز، برای هر رأس G ، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است. بنابراین گراف G ، دارای یک ۳-جریان مجموع صفر می‌باشد.

□

قضیه ۴.۳.۲. [۱] فرض کنید G گرافی r -منتظم باشد ($r \geq 3$). بنابراین G ، دارای یک ۷-جریان مجموع صفر است. اگر $r \equiv 3 \pmod{4}$ ، آنگاه G ، یک ۵-جریان مجموع صفر دارد.

برهان. برای اثبات قضیه، ابتدا گراف جدید G' تعریف شده است.

فرض کنید $V(G) = \{1, \dots, n\}$ و G' گرافی دوبخشی با دو بخش $\{u_1, \dots, u_n\}$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. در گراف G' ، u_i به v_j متصل شده است، اگر و تنها اگر دو رأس i و j در G مجاور باشند. فرض کنید G' ، k -یک جریان مجموع صفر داشته باشد و a_{ij} مقدار یال $u_i v_j$ باشد. آنگاه داریم:

$$a_{ij} \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k-1)\}$$

و

$$\sum_{v_j \in N(u_i)} a_{ij} = 0, \quad \sum_{u_j \in N(v_i)} a_{ji} = 0.$$

اگر به‌ازای همه‌ی i, j ها، $a_{ij} + a_{ji} \neq 0$ باشد، آنگاه به روش زیر، یک $(2k-1)$ -جریان مجموع صفر برای G ساخته می‌شود.

فرض کنید e_{ij} یال بین دو رأس مجاور i و j در G باشد. چون $a_{ij} \neq 0$ و $a_{ij} = a_{ji}$ می‌باشد، $a_{ij} + a_{ji}$ نیز مخالف صفر می‌شود. بنابراین $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ به e_{ij} اختصاص داده شده است. با این فرض داریم:

$$b_{ij} \in \{\pm 1, \dots, \pm(2k-2)\}$$

پس یافت می‌شود:

$$\sum_{j \in N(i)} b_{ij} = \sum_{v_j \in N(u_i)} a_{ij} + \sum_{u_j \in N(v_i)} a_{ji} = 0.$$

و این یعنی عدد b_{ij} ، یک $(2k-1)$ -جریان مجموع صفر برای G تعریف می‌کند.

پس اگر گراف دوبخشی G' ، ساخته شده توسط G ، یک k -جریان مجموع صفر داشته باشد، آنگاه گراف G ، دارای یک $(2k-1)$ -جریان مجموع صفر است.

حال چون G' یک گراف r -منتظم دوبخشی است، با استفاده از قضیه‌ی ازدواج هال (۳۲.۱.۱)، همه‌ی یال‌های G' می‌توانند به r تطابق کامل افزاش شوند. فرض کنید $E_1, E_2, \dots, E_r$ مجموعه‌ی یال‌های این تطابق‌ها باشند.

اگر $r \mid 3$ ، آنگاه $s = r/3$ فرض شده است و $f(e)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(e) = \begin{cases} 2 & e \in E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s, \\ -1 & e \in E_{s+1} \cup \dots \cup E_{3s}. \end{cases}$$

با این تعریف بدیهی است f ، یک 3 -جریان مجموع صفر برای G' است، چون برای هر رأس G' داریم:

$$\sum_{e \in E_r} f(e) = (2) \binom{r}{3} + (-1) \left(r - \frac{r}{3} \right) = (2) \binom{r}{3} + (-1) \left(\frac{2r}{3} \right) = \left(\frac{2r}{3} \right) + \left(-\frac{2r}{3} \right) = 0.$$

و در رابطه‌ی $a_{ij} + a_{ji} \neq 0$ نیز صدق می‌کند. در نتیجه چون گراف دوبخشی G' ، دارای یک 3 -جریان مجموع صفر است، پس گراف r -منتظم G ، یک 5 -جریان مجموع صفر دارد.

اگر $r \equiv 1 \pmod{3}$ (به پیمانه‌ی ۳)، آنگاه $r = 3s + 4$ فرض شده است و $f(e)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(e) = \begin{cases} 2 & e \in E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s, s > 0 \\ -1 & e \in E_{s+1} \cup \dots \cup E_{3s}, s > 0 \\ 3 & e \in E_{3s+1} \\ -1 & e \in E_{3s+2} \cup E_{3s+3} \cup E_{3s+4} \end{cases}$$

چون $r = 3s + 4$ است، آنگاه $3s = r - 4$ می‌باشد و برای هر رأس G' داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_r} f(e) &= (2) \left(\frac{r-4}{3} \right) + (-1) \left[(r-4) - \left(\frac{r-4}{3} \right) \right] + (3)(1) + (-1)(3) \\ &= \left(\frac{2r-8}{3} \right) + \left(\frac{-(3r-12-r+4)}{3} \right) + (3) + (-3) \\ &= \left(\frac{2r-8}{3} \right) + \left(\frac{-(2r-8)}{3} \right) + (3) + (-3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

در نتیجه تابع f ، یک 4 -جریان مجموع صفر برای گراف دوبخشی G' است که با استفاده از بحث بالا، یک 7 -جریان مجموع صفر برای گراف r -منتظم G می‌دهد.

حال اگر $r \equiv 2 \pmod{3}$ (به پیمانه‌ی ۳)، آنگاه $r = 3s + 5$ فرض شده است و $f(e)$ نیز به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$f(e) = \begin{cases} 2 & e \in E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s, s > 0 \\ -1 & e \in E_{s+1} \cup \dots \cup E_{3s}, s > 0 \\ -3 & e \in E_{3s+1} \cup E_{3s+2} \\ 2 & e \in E_{3s+3} \cup E_{3s+4} \cup E_{3s+5} \end{cases}$$

در نتیجه برای هر رأس G' داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E_r} f(e) &= (2) \left(\frac{r-5}{3} \right) + (-1) \left[(r-5) - \left(\frac{r-5}{3} \right) \right] + (-3)(2) + (2)(3) \\ &= \left(\frac{2r-10}{3} \right) + \left(\frac{-(3r-15-r+5)}{3} \right) + (-6) + (6) \\ &= \left(\frac{2r-10}{3} \right) + \left(\frac{-(2r-10)}{3} \right) + (-6) + (6) \\ &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین تابع f نیز، یک 4 -جریان مجموع صفر برای گراف دوبخشی G' است که برای گراف r -منتظم G ، یک 7 -جریان مجموع صفر می‌دهد.

□

تعریف ۵.۳.۲. فرض کنید v یک رأس دلخواه از گراف G با درجه‌ی k باشد. m -**گسترش**^{۱۳} رأس v که $1 \leq m \leq k$ ، تعویض v با دو رأس $\{v_1, v_2\}$ ، و اتصال v_1 به m همسایه‌ی دلخواه v و v_2 به $k-m$ همسایه‌ی باقیمانده‌ی v است.

قضیه ۶.۳.۲. [۱] اگر هر گراف r -منتظم، یک k -جریان مجموع صفر داشته باشد، آنگاه هر گراف که درجانش بر r بخشپذیر باشند نیز، دارای یک k -جریان مجموع صفر است.

برهان. فرض کنید G یک گراف باشد. همچنین $v \in V(G)$ و $\deg(v) = \ell r$ باشد ($\ell > 1$). با استفاده از یک r -گسترش رأس v ، می‌توان دو رأس v_1 و v_2 را جایگزین رأس v کرد که v_1 از درجه‌ی r و v_2 از درجه‌ی $r(\ell-1)$ می‌باشد. با تکرار این روش، v با ℓ رأس $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ از درجه‌ی r جابجا می‌شود. گراف حاصل با G' نشان داده شده است. بدیهی است یک تناظر بین یال‌های متصل به $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ و یال‌های متصل به v وجود دارد. بنابراین هر k -جریان مجموع صفر برای G' ، یک k -جریان مجموع صفر برای G فراهم می‌کند.

برای هر رأس G که درجه‌اش بزرگ‌تر از r است، روش بالا را انجام دهید. در نتیجه یک گراف r -منتظم حاصل می‌شود و با استفاده از فرض، این گراف، دارای یک k -جریان مجموع صفر است. بنابراین G نیز، یک k -جریان مجموع صفر دارد.

□

نتیجه ۷.۳.۲. [۱] فرض کنید G گرافی باشد که همه‌ی درجانش بر 3 بخشپذیرند، آنگاه G ، دارای یک 5 -جریان مجموع صفر می‌باشد.

برهان. همانند قضیه‌ی ۶.۳.۲، با استفاده از یک 3 -گسترش برای هر رأس $v \in V(G)$ ، می‌توان دو رأس v_1 و v_2 را جایگزین رأس v کرد که v_1 از درجه‌ی 3 و v_2 از درجه‌ی $3(\ell-1)$ است، به‌طوری که $\ell = \frac{\deg(v)}{3}$ می‌باشد. با تکرار این روش، v با ℓ رأس $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ از درجه‌ی 3 جابجا می‌شود.

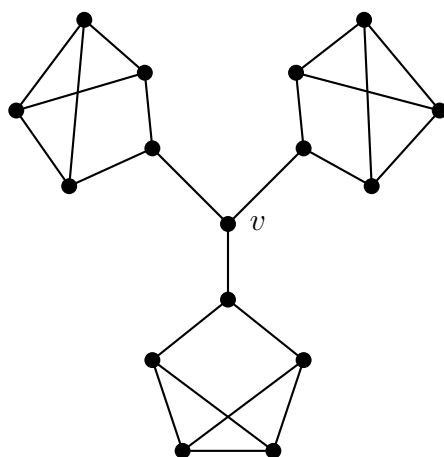
^{۱۳} m -blowing

با ادامه‌ی این فرایند برای هر رأس، گرافی حاصل می‌شود که ۳-منتظم است. درنتیجه با استفاده از قضیه‌ی ۲.۳.۲، گراف G ، یک ۵-جریان مجموع صفر دارد.

□

ملاحظه ۸.۳.۲. برخی گراف‌های منتظم وجود دارند که ۴-جریان مجموع صفر ندارند. برای تحقیق، گراف داده شده در شکل ۳.۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید (فرض خلف)، که این گراف یک ۴-جریان مجموع صفر دارد. چون مجموع مقادیر هر سه یال متصل به یک رأس، صفر می‌باشد، همه نمی‌توانند فرد باشند، بنابراین باید روی دقیقاً یکی از یال‌های متصل به هر رأس، ۲- یا ۲ ظاهر شود. از طرف دیگر، دو عدد با قدرمطلق ۲ نیز، نمی‌توانند در همسایگی یک رأس ظاهر شوند. بنابراین یال‌های G با مقادیر ± 2 یک تطابق کامل تشکیل می‌دهند.

اما با استفاده از قضیه‌ی مشهور تات (۳۳.۱.۱)، چون $o(G-v) = 3$ و درنتیجه $o(G-v) \geq 1$ می‌باشد، بنابراین G تطابق کامل ندارد. درنتیجه تناقض به‌وجود می‌آید. پس گراف داده شده، ۴-جریان مجموع صفر ندارد.



شکل ۳.۲: گرافی ۳-منتظم بدون ۴-جریان مجموع صفر

لم ۹.۳.۲. [۳] اگر G گرافی r -منتظم باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح زوج q ، که $2r \leq q \leq 4r$ است، تابعی مانند $f: E(G) \rightarrow \{2, 3, 4\}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $u \in V(G)$ ، داریم:

$$\sum_{v \in N_G(u)} f(uv) = q$$

برهان. به‌ازای هر یال $e = uv$ ، یال جدید $e' = uv$ به گراف G اضافه شده و گراف حاصل G' نامیده شده است. به‌وضوح، G' یک گراف چندگانه‌ی $2r$ -منتظم می‌باشد. با استفاده از قضیه‌ی ۳۴.۱.۱، G' دارای ۲-فاکتورگیری با ۲-فاکتورهای $F_1, F_2, \dots, F_r$ و F_r می‌باشد.

حال برای هر $e \in F_i$ ، که $1 \leq i \leq r$ ، تابع $g : E(G') \rightarrow \{1, 2\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$g(e) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq \frac{q-2r}{2}; \\ 1, & \frac{q-2r}{2} < i. \end{cases}$$

چون

$$\begin{aligned} \sum_{v \in N_{G'}(u)} g(uv) &= 2 \left[(2) \left(\frac{q-2r}{2} \right) + (1) \left(r - \frac{q-2r}{2} \right) \right] \\ &= 2 \left(\frac{2q-4r}{2} + \frac{2r-q+2r}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{2q-4r+4r-q}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{q}{2} \right) = q, \end{aligned}$$

است، در نتیجه برای هر $u \in V(G')$ داریم:

$$\sum_{v \in N_{G'}(u)} g(uv) = q.$$

هر یال G' مقدار ۱ یا ۲ دارد، بنابراین برای گراف r -منتظم G ، تابع $f : E(G) \rightarrow \{2, 3, 4\}$ طوری تعریف شده است که برای هر $e = uv \in E(G)$

$$f(e) = g(e) + g(e')$$

می باشد که $e' = uv$ در G' است.

طبق تعریف f ، چون برای هر $u \in V(G')$ داریم $\sum_{v \in N_{G'}(u)} g(uv) = q$ ، پس برای هر $u \in V(G)$ نیز داریم:

$$\sum_{v \in N_G(u)} f(uv) = q.$$

بنابراین نتیجه‌ی مورد نظر به دست آمده است، یعنی تابع $f : E(G) \rightarrow \{2, 3, 4\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $u \in V(G)$ داریم:

$$\sum_{v \in N_G(u)} f(uv) = q.$$

□

قضیه ۱۰.۳.۲. [۳] فرض کنید $r \geq 3$ و $r \neq 5$ ، آنگاه هر گراف r -منتظم، دارای یک ۵-جریان مجموع صفر است.

برهان. اگر r عدد صحیح زوج و $r \geq 4$ باشد، آنگاه طبق قضیه ۳.۳.۲، حکم برقرار است. همچنین اگر $r \mid 3$ ، آنگاه با توجه به قضیه ۴.۳.۲، نیز، حکم برقرار است.

ابتدا قضیه برای $r = ۷$ ثابت شده است. فرض کنید G گرافی ۷-منتظم باشد. آنگاه بنابه قضیه ۳۴.۱.۱، اجتماع مجزای گراف ۳-منتظم $H_۱$ و گراف ۴-منتظم $H_۲$ می‌باشد. بنابه قضیه ۳۴.۱.۱، $H_۲$ می‌تواند به دو ۲-فاکتور $H'_۲$ و $H''_۲$ تجزیه شود. حال برای گراف ۳-منتظم $H_۱$ ، با استفاده از لم ۹.۳.۲، تابعی مانند $f : E(H_۱) \rightarrow \{۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $u \in V(H_۱)$ ، داریم:

$$\sum_{v \in N_{H_1}(u)} f(uv) = ۸.$$

حال، ۲- را به یال‌های ۲-فاکتورهای $H'_۲$ و $H''_۲$ اختصاص دهید. بنابراین برای هر رأس گراف، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است و در نتیجه هر گراف ۷-منتظم، یک ۵-جریان مجموع صفر دارد. حال، فرض کنید $r \geq ۱۱$ ، یک عدد صحیح فرد باشد. بنابه قضیه ۳۶.۱.۱، برای هر k ، که $k \leq \frac{۲r}{۳}$ می‌باشد، گراف r -منتظم G ، دارای $[k-۱, k]$ -فاکتوری است که مؤلفه‌هایش منتظم هستند. فرض کنید $k = \lfloor \frac{۲r}{۳} \rfloor$ و $k' = r - k$ باشد و H ، $[k-۱, k]$ -فاکتوری از G باشد که $H_۱$ اجتماع مؤلفه‌های $(k-۱)$ -منتظم H و $H_۲$ اجتماع مؤلفه‌های k -منتظم H است. حال چون

$$\begin{aligned} ۲k' &= ۲(r - k) = ۲r - ۲k \\ &= ۲r - ۲ \left\lfloor \frac{۲r}{۳} \right\rfloor \geq \frac{۶r}{۳} - \frac{۴r}{۳} \\ &= \frac{۲r}{۳} \geq \left\lfloor \frac{۲r}{۳} \right\rfloor \end{aligned}$$

است، پس

$$k \leq ۲k'.$$

در حالت کلی برای هر r داریم:

$$\frac{۲r - ۲}{۳} \leq \left\lfloor \frac{۲r}{۳} \right\rfloor.$$

چون

$$\begin{aligned} ۲k' &= ۲(r - k) = ۲r - ۲k = ۲r - ۲ \left\lfloor \frac{۲r}{۳} \right\rfloor \\ &\leq ۲r - ۲ \left(\frac{۲r - ۲}{۳} \right) = ۲r - \left(\frac{۴r - ۴}{۳} \right) \\ &= \frac{۶r}{۳} - \left(\frac{۴r - ۴}{۳} \right) = \frac{۲r}{۳} + \frac{۴}{۳} \end{aligned}$$

می‌باشد و همچنین داریم:

$$۲k - ۴ = ۲ \left\lfloor \frac{۲r}{۳} \right\rfloor - ۴ \geq ۲ \left(\frac{۲r - ۲}{۳} \right) - ۴,$$

در نتیجه برای نشان دادن $2k' \leq 2k - 4$ ، کفایت نشان دهیم:

$$\frac{2r}{3} + \frac{4}{3} \leq 2 \left(\frac{2r-2}{3} \right) - 4, \quad (1.2)$$

فرض کنید رابطه‌ی (۱.۲) برقرار باشد. بنابراین داریم:

$$2r + 4 \leq 2(2r - 2) - 12 \Rightarrow 2r + 4 \leq 4r - 16$$

در نتیجه:

$$2r \geq 20 \Rightarrow r \geq 10.$$

بنابراین برای هر $r \geq 10$ ، رابطه‌ی (۱.۲) برقرار است. در نهایت برای هر $r \geq 10$ ، داریم:

$$2k' \leq \frac{2r}{3} + \frac{4}{3} \leq 2 \left(\frac{2r-2}{3} \right) - 4 \leq 2k - 4.$$

پس نشان دادیم برای هر $r \geq 10$ ، رابطه‌ی

$$k \leq 2k' \leq 2k - 4 \quad (2.2)$$

برقرار است.

حال، با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲) داریم:

$$2k + 4 \leq 4k' + 4 \leq 4k - 4.$$

چون $2k + 4 < 2k - 2$ ، عدد صحیح زوج $4k' + 4$ وجود دارد که:

$$2(k-1) \leq 4k' + 4 \leq 4(k-1).$$

بنابراین بنابه لم ۹.۳.۲، تابعی مانند $f : E(H_1) \rightarrow \{2, 3, 4\}$ وجود دارد، به طوری که برای هر $u \in V(H_1)$ ، داریم:

$$\sum_{v \in N_{H_1}(u)} f(uv) = 4k' + 4.$$

حال $4 -$ را به هر یال $E(G) \setminus E(H_1)$ اختصاص دهید.

همچنین با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲) نیز داریم:

$$2k \leq 4k' \leq 4k - 8.$$

چون $4k - 8 < 4k$ ، عدد صحیح زوج $4k'$ وجود دارد که

$$2k \leq 4k' \leq 4k.$$

بنابراین بنابه لم ۹.۳.۲ نیز، تابعی مانند $f = E(H_2) \rightarrow \{2, 3, 4\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $v \in V(H_2)$ ، داریم:

$$\sum_{v \in N_{H_2}(u)} f(uv) = 4k'.$$

در نهایت ۴- را به هر یال $E(G) \setminus E(H_2)$ اختصاص دهید.
در نتیجه برای هر رأس گراف، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است. بنابراین هر گراف r -منتظم، دارای یک ۵-جریان مجموع صفر است.

□

لم ۱۱.۳.۲. [۱۷، ۱۸] فرض کنید G یک گراف چندگانه‌ی n -یال همبند باشد، $(n \geq 1)$. همچنین فرض کنید θ عددی حقیقی باشد به طوری که $0 < \theta < 1$ و f تابعی به صورت زیر باشد:

$$f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots\}.$$

اگر گزاره‌های (i) ، (ii) و یکی از $(iiia)$ یا $(iiib)$ ، برقرار باشد، آنگاه گراف G ، دارای یک f -فاکتور است.

$(i) \sum_{v \in V(G)} f(v)$ زوج باشد.

$(ii) \sum_{v \in V(G)} |f(v) - \theta d_G(v)| < 2$

$(iiia) n(1 - \theta) \geq 1$ و $n\theta \geq 1$

$(iiib)$ مجموعه‌ی $\{f(v)\}$ شامل اعداد زوج باشد و $m(1 - \theta) \geq 1$ ، به طوری که $m \in \{n, n + 1\}$ و $m \equiv 1 \pmod{2}$.

لم ۱۲.۳.۲. [۴] فرض کنید G ، یک $[2, 5]$ -گراف چندگانه‌ی ۲-یال همبند باشد. اگر

$$3|\{v \in V(G) : d_G(v) = 2\}| + 2|\{v \in V(G) : d_G(v) = 3\}| \\ + |\{v \in V(G) : d_G(v) = 4\}| \leq 4,$$

آنگاه گراف G ، دارای یک ۲-فاکتور می‌باشد.

برهان. تابع f روی $V(G)$ برای هر $v \in V(G)$ ، به صورت $f(v) = 2$ تعریف شده است و $\theta = \frac{2}{5}$ فرض شده است. اگر تعداد رئوس گراف برابر k باشد، آنگاه چون $f(v) = 2$ است، در نتیجه داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} f(v) = 2k$$

بنابراین $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ زوج می‌باشد و گزاره‌ی (i) برقرار است. همچنین داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} |f(v) - \theta d_G(v)| = \sum_{v \in V(G)} \left| 2 - \frac{2}{5} d_G(v) \right| = \frac{2}{5} \sum_{v \in V(G)} |5 - d_G(v)|.$$

برای هر $2 \leq i \leq 5$ ، مجموعه‌ی T_i به صورت زیر تعریف شده است:

$$T_i = \{v : d_G(v) = i\}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V(G)} |f(v) - \theta d_G(v)| &= \frac{2}{5} \sum_{v \in T_1} |5 - d_G(v)| + \frac{2}{5} \sum_{v \in T_2} |5 - d_G(v)| \\
 &\quad + \frac{2}{5} \sum_{v \in T_3} |5 - d_G(v)| + \frac{2}{5} \sum_{v \in T_4} |5 - d_G(v)| \\
 &= \frac{2}{5} (3|T_1| + 2|T_2| + |T_3| + 0) \\
 &= \frac{2}{5} (3|\{v \in V(G) : d_G(v) = 2\}| \\
 &\quad + 2|\{v \in V(G) : d_G(v) = 3\}| \\
 &\quad + |\{v \in V(G) : d_G(v) = 4\}|) \\
 &\leq \frac{8}{5} < 2
 \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{v \in V(G)} |f(v) - \theta d_G(v)| < 2$ و گزاره‌ی (ii) نیز برقرار است. حال چون برای هر $v \in V(G)$ ، تابع f به صورت $f(v) = 2$ می‌باشد، مجموعه‌ی $\{f(v)\}$ شامل اعداد زوج است.

همچنین چون گراف G ، یک گراف ۲-یال همبند است باید $m \in \{2, 3\}$ باشد و چون $m \equiv 1$ (به پیمانه‌ی ۲) می‌باشد، در نتیجه $m = 3$ است. بنابراین:

$$m(1 - \theta) = 3 \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{9}{5} \geq 1$$

و گزاره‌ی (iiib) نیز برقرار است.

پس با توجه به لم ۱۱.۳.۲، گراف G ، دارای یک ۲-فاکتور می‌باشد.

□

لم بعد نشان می‌دهد که لم ۱۱.۳.۲ می‌تواند برای هر $\{1, 3\}$ -گراف، تعمیم یافته شود.

لم ۱۱.۳.۲. [۴] فرض کنید G یک $\{1, 3\}$ -گراف همبند و h یک یال آویزان G باشد. برای هر مقدار دلخواه $\alpha \in \{-2, 4\}$ ، تابعی مانند $f : E(G) \rightarrow \{-2, 1, 4\}$ وجود دارد به طوری که $f(h) = \alpha$ است و قاعده‌ی مجموع صفر در هر رأس درجه‌ی ۳، برقرار می‌باشد و مقدار هر یال آویزان در مجموعه‌ی $\{-2, 4\}$ قرار دارد.

برهان. درخت ریشه‌دار T حاصل از G را طوری در نظر بگیرید که هر زیرگراف ماکسیمال ۲-یال همبند G ، یک رأس T در نظر گرفته شده باشد و $E(T)$ شامل همه‌ی یال‌های برشی G باشد، به طوری که ریشه‌ی T یکی از رئوسی است که زیرگراف ماکسیمال ۲-یال همبند می‌باشد و به یال آویزان داده شده‌ی h متصل است. همچنین یک زیرگراف با یک رأس نیز، یک زیرگراف ۲-یال همبند در نظر گرفته شده است.

حال، از ریشه‌ی T شروع کنید. اگر ریشه شامل یک رأس باشد، آنگاه می‌توان مقادیر مورد نظر را به

سه یال متصل به ریشه طوری اختصاص داد که قاعده‌ی مجموع صفر برقرار باشد. بنابراین فرض کنید که زیرگراف ماکسیمال ۲-یال همبندی از G که متناظر با ریشه‌ی T است و H نام دارد، حداقل دارای مرتبه‌ی ۲ باشد. پس زیرگرافی از G که از زیرگراف ماکسیمال ۲-یال همبند H ، با اضافه کردن همه‌ی یال‌های برشی G مجاور با H ، حاصل شده است، گرافی است که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند. حال با استفاده از لم ۱.۳.۲، یک نسبت‌دهی f به یال‌های متصل به ریشه‌ی T ، از مقادیر $\{-2, 1, 4\}$ داریم، که یال‌های آویزان مقدار زوج دارند و همچنین $f(h) = \alpha$ می‌باشد. در ادامه‌ی اثبات، یک زیرگراف ماکسیمال ۲-یال همبندی از G مانند K که متناظر با فرزند ریشه‌ی T می‌باشد، در نظر بگیرید و دوباره لم ۱.۳.۲ را به گونه‌ای استفاده کنید که یالی که K را به ریشه وصل می‌کند، متناظر با یال آویزان داده شده در لم ۱.۳.۲ باشد. با ادامه‌ی این روند می‌توان تابع مورد نظر را روی مجموعه‌ی یال‌های گراف G به دست آورد.

□

لم ۱۴.۳.۲. [۴] اگر G یک $\{1, 5\}$ -گراف همبند و $\{e_1, \dots, e_s\} \subseteq E(G)$ ، مجموعه‌ی همه‌ی یال‌های آویزان G باشد و همچنین اگر $G - \{e_1, \dots, e_s\}$ ، گرافی ۲-یال همبند باشد، آنگاه تابعی مانند f روی $E(G)$ با $f(e) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ وجود دارد به طوری که برای هر رأس درجه‌ی ۵، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است و برای هر $i = 1, \dots, s$ نیز، $f(e_i) \in \{-2, 2, 4\}$ می‌باشد. بعلاوه، یک یال آویزان e_i باید مقدار از پیش اختصاص داده شده داشته باشد.

برهان. فرض کنید $s = 5p + q$ باشد، به طوری که $0 \leq q \leq 4$ و $p \geq 0$ ، اعدادی صحیح هستند. یعنی تعداد یال‌های آویزان G برابر $5p + q$ می‌باشد. از بین $5p + q$ یال آویزان گراف، $5p$ یال آویزان را انتخاب کرده و به p گروه افراز کنید، به طوری که هر گروه شامل ۵ یال باشد. نقاط انتهایی هر گروه از یال‌های آویزان را همانند کرده تا p رأس جدید از درجه‌ی ۵ حاصل شود. رؤس جدید $v_1, v_2, \dots, v_p$ و v_p نامیده شده‌اند. q یال آویزان باقیمانده را از G حذف کرده و گراف چندگانه‌ی حاصل را توسط H نامگذاری کنید. چون H از G به وسیله‌ی حذف q یال آویزان حاصل شده است، H خاصیت زیر را داراست:

$$3|\{v : d_H(v) = 2\}| + 2|\{v : d_H(v) = 3\}| + |\{v : d_H(v) = 4\}| \leq 4.$$

بنابراین با استفاده از لم ۱۲.۳.۲، گراف H دارای ۲-فاکتوری مانند F می‌باشد. به همه‌ی یال‌های ۲-فاکتور F ، مقدار ۳ را اختصاص دهید و به یال‌های باقیمانده‌ی H نیز، مقدار ۲-دهید. همچنین q یال آویزان حذف شده‌ی G نیز، مقدار ۲-گرفته‌اند. حال اگر به گراف H حاصل، q یال آویزان حذف شده را اضافه کنیم، برای هر رأس درجه‌ی ۵ گراف حاصل، قاعده‌ی مجموع صفر برقرار است، چون برای هر رأس مانند v ، داریم:

$$\sum_{u \in N(v)} f(uv) = 2(3) + 3(-2) = 0.$$

حال اگر یک دور C از ۲-فاکتور F ، شامل حداقل یک رأس متعلق به مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ باشد، آنگاه یک رأس را انتخاب کرده و v_i بنامید. سپس مقادیر یال‌های این دور را به طور متناوب توسط ۲

و ۴ طوری تغییر دهید که شروع تناوب از یک یال متصل به v_t باشد و با یال دیگری که متصل به v_t است، خاتمه یابد.

توجه شود که اگر یک دور C شامل هیچ رأسی متعلق به مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ نباشد، مقادیر یال‌های C تغییر نمی‌کند.

سپس $5p$ یال متصل به مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ در H را از هم جدا کنید تا $5p$ یال آویزان G حاصل شود. در نتیجه هر یال آویزان، مقداری دارد که متعلق به مجموعه‌ی $\{-2, 2, 4\}$ می‌باشد و همچنین برای هر رأس درجه‌ی ۵ گراف G قاعده‌ی مجموع صفر صدق می‌کند. بنابراین تابعی مانند $f: E(G) \rightarrow \{-2, 2, 3, 4\}$ برای G وجود دارد، به طوری که برای هر رأس درجه‌ی ۵، جریان مجموع صفر برقرار است.

برای اثبات آخرین قسمت لم، سه حالت در نظر گرفته شده است:

(۱) اگر $f(e_l) = -2$ باشد، همانند قبل، گراف H را در نظر بگیرید. همان طور که می‌دانیم H دارای ۲-فاکتوری مانند F است. اگر یال e_l در ۲-فاکتور F نباشد، آنگاه تخصیص مقادیر به یال‌های گراف همانند قبل می‌باشد. یعنی به همه‌ی یال‌های ۲-فاکتور F ، مقدار ۳ را اختصاص داده و به یال‌های باقیمانده‌ی H نیز، مقدار ۲- دهید. همچنین q یال آویزان حذف شده‌ی G نیز، مقدار ۲- دارند. بنابراین یال آویزان e_l نیز مقدار ۲- دارد.

اگر یال e_l در ۲-فاکتور F باشد و به رأس v_r متصل باشد، آنگاه به همه‌ی یال‌های ۲-فاکتور F ، مقدار ۳- را اختصاص داده و به بقیه‌ی یال‌های H نیز، مقدار ۲- دهید. سپس مقادیر یال‌های دور C را که شامل یال e_l است، به طور متناوب، توسط ۲- و ۴- با شروع از e_l ، تغییر دهید.

توجه شود که این فرایند برای هر دوری از F که شامل یک رأس در مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ باشد، انجام می‌شود.

سپس $5p$ یال متصل به مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ در H را از هم جدا کنید تا $5p$ یال آویزان G حاصل شود. در نتیجه یال آویزان e_l مقدار ۲- دارد.

(۲) اگر $f(e_l) = 2$ باشد، همانند قبل، گراف H را در نظر بگیرید. همان طور که می‌دانیم H دارای ۲-فاکتوری مانند F است. اگر یال e_l در ۲-فاکتور F باشد و به رأس v_r متصل باشد، آنگاه تخصیص مقادیر به یال‌های گراف همانند قبل می‌باشد. یعنی به همه‌ی یال‌های ۲-فاکتور F ، مقدار ۳ را اختصاص داده و به یال‌های باقیمانده‌ی H نیز، مقدار ۲- دهید. همچنین q یال آویزان حذف شده‌ی G نیز، مقدار ۲- دارند. سپس همانند قبل، مقادیر یال‌های دور C را که شامل یال e_l است، به طور متناوب، توسط ۲ و ۴ با شروع از e_l ، تغییر دهید. بنابراین با جدا کردن $5p$ یال متصل به مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ در H ، $5p$ یال آویزان G حاصل می‌شود. در نتیجه یال آویزان e_l نیز مقدار ۲- دارد. اگر یال e_l در ۲-فاکتور F نباشد، آنگاه به همه‌ی یال‌های ۲-فاکتور F ، مقدار ۳- را اختصاص داده و به یال‌های باقیمانده‌ی H نیز، مقدار ۲- دهید. همچنین q یال آویزان حذف شده‌ی G نیز، مقدار ۲- دارند. بنابراین یال آویزان e_l نیز مقدار ۲- دارد.

(۳) اگر $f(e_l) = 4$ باشد نیز، گراف H را همانند قبل در نظر بگیرید که دارای ۲-فاکتوری مانند F می‌باشد. سپس مانند قبل، به همه‌ی یال‌های ۲-فاکتور F ، مقدار ۳ را اختصاص دهید و به یال‌های

باقیمانده‌ی H نیز، مقدار ۲- دهید. همچنین q یال آویزان حذف شده‌ی G نیز، مقدار ۲- گرفته‌اند. اگر یال e_l در ۲- فاکتور F باشد و به رأس v_r متصل باشد، آنگاه مقادیر یال‌های دور C را که شامل یال e_l است، به‌طور متناوب، توسط ۴ و ۲ با شروع از e_l ، تغییر دهید. سپس $5p$ یال متصل به مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ در H را از هم جدا کنید تا $5p$ یال آویزان G حاصل شود. در نتیجه یال آویزان e_l مقدار ۴ دارد.

اگر یال e_l در ۲- فاکتور F نباشد، آنگاه با حذف همه‌ی یال‌های F از گراف H ، یک $[0, 3]$ -گراف حاصل می‌شود که لزوماً همبند نیست. برای یال e_l دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. یا e_l یالی از گراف $H - F$ باشد، یا e_l یالی از گراف H نباشد، یعنی یک یال آویزان حذف شده از گراف G باشد. در حالت اول فرض کنید که رأسی از درجه‌ی ۳ در گراف $H - F$ باشد که به یال e_l متصل است. حال، برای هر $v_i \in \{v_1, \dots, v_p\}$ نیز، ۳ یال متصل به v_i در گراف $H - F$ را جدا کنید تا برای هر v_i نیز، ۳ یال آویزان حاصل شود. سپس q یال آویزان حذف شده از G را نیز به گراف $H - F$ اضافه کنید. بنابراین گراف حاصل، یک $\{1, 3\}$ -گراف می‌باشد که K نامیده می‌شود، در حالی که e_l نیز یک یال آویزان است. در نتیجه با استفاده از لم ۱۳.۳.۲، تابعی مانند $\{-2, 1, 4\} \rightarrow E(K)$ وجود دارد به‌طوری که $g(e_l) = -2$ می‌باشد و مقدار هر یال آویزان در مجموعه‌ی $\{-2, 4\}$ قرار دارد و همچنین قاعده‌ی مجموع صفر در هر رأس درجه‌ی ۳ برقرار است. حال از مقدار اختصاص داده شده به همه‌ی یال‌های گراف K حاصل، ۲ تا کم کرده و عدد حاصل را در ۱- ضرب کنید.

سپس به یال‌های ۲- فاکتور F ، مقدار ۳- را اختصاص دهید و مقادیر همه‌ی یال‌های هر دوری از F که شامل یک رأس از مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ می‌باشد را، به‌طور متناوب توسط ۲- و ۴- تغییر دهید. با این روش، مقدار یال آویزان e_l برابر ۴ است و قاعده‌ی مجموع صفر برای هر رأس درجه‌ی ۵ گراف G برقرار است، که همان نتیجه‌ی مطلوب می‌باشد.

اگر یال e_l در H نباشد، آنگاه q یال آویزان حذف شده از G که شامل e_l می‌باشد را به گراف $H - F$ اضافه کنید تا یک $\{1, 3\}$ -گراف به نام K حاصل شود. حال مانند حالت اول، با استفاده از لم ۱۳.۳.۲، تابعی مانند $\{-2, 1, 4\} \rightarrow E(K)$ وجود دارد به‌طوری که $g(e_l) = -2$ می‌باشد و مقدار هر یال آویزان در مجموعه‌ی $\{-2, 4\}$ قرار دارد و همچنین قاعده‌ی مجموع صفر در هر رأس درجه‌ی ۳ برقرار است. در این حالت نیز، از مقدار اختصاص داده شده به همه‌ی یال‌های گراف K حاصل، ۲ تا کم کرده و عدد حاصل را در ۱- ضرب کنید.

سپس به یال‌های ۲- فاکتور F ، مقدار ۳- را اختصاص دهید و مقادیر همه‌ی یال‌های هر دوری از F که شامل یک رأس از مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_p\}$ می‌باشد را، به‌طور متناوب توسط ۲- و ۴- تغییر دهید. در نتیجه با این روش، مقدار یال آویزان e_l برابر ۴ است و قاعده‌ی مجموع صفر برای هر رأس درجه‌ی ۵ گراف G برقرار است، که در اینجا نیز به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسیم.

□

قضیه ۱۵.۳.۲. [۴] هر گراف ۵- منتظم، دارای یک ۵- جریان مجموع صفر است.

برهان. اگر G گرافی ۲- یال همبند باشد، چون G ، گرافی ۵- منتظم است، آنگاه با استفاده از لم ۱۲.۳.۲، گراف، ۲- فاکتوری مانند F دارد. بنابراین مقدار ۳ را به همه‌ی یال‌های F اختصاص دهید و

به همه‌ی یال‌های باقیمانده‌ی G ، مقدار -۲ دهید. در نتیجه برای هر رأس مانند v داریم:

$$\sum_{u \in N(v)} f(uv) = ۲(۳) + ۳(-۲) = ۰$$

که این همان جریان مجموع صفر مورد نظر می‌باشد. پس باید فرض کنیم که G ، گرافی ۲ -یال همبند نیست. درخت ریشه‌دار T حاصل از G را طوری در نظر بگیرید که هر زیرگراف ماکسیمال ۲ -یال همبند G ، یک رأس T در نظر گرفته شده باشد و $E(T)$ شامل همه‌ی یال‌های برشی G باشد. همچنین یک زیرگراف با یک رأس نیز، یک زیرگراف ۲ -یال همبند در نظر گرفته شده است.

حال، از ریشه‌ی T شروع کنید که زیرگراف حاصل توسط رئوس درجه‌ی ۵ ، گرافی ۲ -یال همبند می‌باشد. فرض کنید H زیرگراف ماکسیمال ۲ -یال همبندی از G است که متناظر با ریشه‌ی T می‌باشد. با استفاده از لم ۱۴.۳.۲، برای زیرگرافی از G که از H با اضافه کردن همه‌ی یال‌های برشی G مجاور با H ، حاصل شده است، یک نسبت‌دهی به یال‌های متصل به ریشه از مقادیر $\{\pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴\}$ داریم، به طوری که هر یال آویزان، دارای مقداری است که متعلق به مجموعه‌ی $\{-۲, ۲, ۴\}$ می‌باشد.

حال، یک زیرگراف ماکسیمال ۲ -یال همبندی از G مانند K ، که متناظر با فرزند ریشه‌ی T می‌باشد، را در نظر بگیرید. به زیرگراف K همه‌ی یال‌های برشی G که مجاور با K می‌باشند را اضافه کنید و دوباره لم ۱۴.۳.۲ را به گونه‌ای استفاده کنید که یک نسبت‌دهی به یال‌های متصل به ریشه و زیرگراف K ، حاصل شود. با ادامه‌ی این روند، ۵ -جریان مجموع صفری برای گراف G به دست می‌آید و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

□

۴.۲ جریان مجموع صفر در گراف‌های مرتبه‌ی n

G را گرافی با n رأس که جریان مجموع صفر دارد، در نظر بگیرید. هدف این بخش بررسی جریان مجموع صفر در گراف‌های مرتبه‌ی n است که اگر n زوج باشد آنگاه G ، دارای $(n+۳)^۲$ -جریان مجموع صفر است و اگر n فرد باشد آنگاه G ، دارای $(n+۲)^۲$ -جریان مجموع صفر است.

لم ۱.۴.۲. [۱] فرض کنید G گرافی $(۲k+۱)$ -منتظم باشد ($k \geq ۱$). آنگاه G ، دارای $(۲k+۳)$ -جریان مجموع صفری مانند f است، به طوری که برای هر یال e داریم:

$$f(e) \in \{-۲k, ۱, ۲k+۲\}$$

برهان. همانند قضیه‌ی ۴.۳.۲، برای اثبات لم، ابتدا گراف جدید G' تعریف شده است. فرض کنید $V(G) = \{۱, \dots, n\}$ و G' گرافی دوبخشی با دو بخش $\{u_1, \dots, u_n\}$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. در گراف G' ، u_i به v_j متصل شده است، اگر و تنها اگر دو رأس i و j در G مجاور باشند. چون G' گراف دوبخشی $(۲k+۱)$ -منتظم می‌باشد، با استفاده از قضیه‌ی ازدواج هال (۳۲.۱.۱)، یال‌های G' می‌توانند به $۲k+۱$ تطابق کامل افراز شوند. k تا از این تطابق‌ها را انتخاب کرده، به یال‌های آنها مقدار $k+۱$ اختصاص دهید و به یال‌های باقیمانده نیز مقدار $-k$ دهید. بنابراین هر یال

از گراف G' دارای مقداری متعلق به مجموعه‌ی $\{-k, k+1\}$ می‌باشد. حال همان‌طور که در اثبات قضیه‌ی ۴.۳.۲ انجام شد، برای هر یال $e \in E(G)$ داریم:

$$f(e) \in \{(k+1) - k, (k+1) + (k+1), -k - k\} = \{-2k, 1, 2k+2\}.$$

□

نتیجه ۲.۴.۲. [۱] فرض کنید G یک گراف و k یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر برای هر رأس $v \in V(G)$ رابطه‌ی $\deg(v) \mid 2k+1$ برقرار باشد، آنگاه G دارای $(2k+3)$ -جریان مجموع صفری مانند f است، به‌طوری که برای هر یال $e \in E(G)$ داریم:

$$f(e) \in \{-2k, 1, 2k+2\}$$

برهان. در اثبات از همان ایده‌ی اثبات قضیه‌ی ۶.۳.۲ استفاده می‌شود. یعنی برای هر رأس $v \in V(G)$ که درجه‌اش بزرگ‌تر از $2k+1$ است، از $(2k+1)$ -گسترش رأس v استفاده می‌شود و در نهایت درجه‌ی همه‌ی رئوس حاصل، برابر با $2k+1$ می‌شود. در نتیجه گراف حاصل، $(2k+1)$ -منتظم است و بنابر لم ۱.۴.۲، دارای $(2k+3)$ -جریان مجموع صفری است که مقادیر یال‌های آن، متعلق به مجموعه‌ی $\{-2k, 1, 2k+2\}$ می‌باشد.

□

تعریف ۳.۴.۲. Γ -جریان^{۱۴} برای گراف بدون جهت G و گروه آبدی^{۱۵} $(\Gamma, +)$ ، تابع $f: E(G) \rightarrow \Gamma$ است، به‌طوری که برای هر $v \in V(G)$ ، مجموع مقادیر یال‌های متصل به v در Γ صفر می‌باشد.

Γ -جریان مجموع صفر، Γ -جریانی است که مقدار هر یال گراف، ناصفر می‌باشد.

ملاحظه ۴.۴.۲. $\mathbb{R}$ -جریان مجموع صفر، به بیان ساده جریان مجموع صفر می‌باشد.

قضیه ۵.۴.۲. [۱] اگر گراف G ، دارای $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -جریان مجموع صفر باشد، آنگاه G دارای $(2k+1)^2$ -جریان مجموع صفر نیز است.

برهان. فرض کنید تابع f ، یک $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -جریان مجموع صفر برای گراف G باشد. تابعی مانند g که $g: E(G) \rightarrow \{1, \dots, 2k\}$ طوری در نظر گرفته شده است که برای هر یال e ، داریم:

$$g(e) = f(e) \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

حال گراف جدید G_1 ساخته شده توسط G به‌گونه‌ای است که $V(G_1) = V(G)$ و تعداد یال‌هایی که v_i را به v_j متصل می‌کند، برابر با مقدار $g(e)$ اختصاص داده شده به هر یال $e = v_i v_j \in E(G)$ می‌باشد و مجموعه‌ی این یال‌ها با $Q(e)$ نشان داده شده است.

چون گراف G ، دارای $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -جریان مجموع صفر می‌باشد، بنابراین برای هر رأس $v \in V(G)$ ، مجموع

^{۱۴} Γ -flow

^{۱۵} Abelian group

مقادیر یال‌های متصل به v ، به پیمانه‌ی $2k+1$ ، برابر صفر است، یعنی بر $2k+1$ بخشپذیر می‌باشد. پس تمام درجات رئوس G_1 بر $2k+1$ بخشپذیر هستند، بنابراین با استفاده از نتیجه‌ی ۲.۴.۲، گراف G_1 دارای $(2k+3)$ -جریان مجموع صفری است که f_1 نامیده می‌شود و به صورت زیر می‌باشد:

$$f_1 : E(G_1) \longrightarrow \{-2k, 1, 2k+2\}.$$

حال، برای هر یال e ، فرض کنید $h(e)$ به صورت زیر است:

$$h(e) = \sum_{e_1 \in Q(e)} f_1(e_1).$$

چون $g : E(G) \longrightarrow \{1, \dots, 2k\}$ است، بدیهی است داریم:

$$1 \leq |g(e)| \leq 2k$$

و همچنین چون $f_1 : E(G_1) \longrightarrow \{-2k, 1, 2k+2\}$ است نیز، داریم:

$$|f_1(e_i)| \leq 2k+2,$$

بنابراین:

$$|h(e)| \leq 2k(2k+2) = 4k^2 + 4k = (2k+1)^2 - 1.$$

همچنین، برای هر یال e_1 متعلق به G_1 ، داریم:

$$f_1(e_1) = 1, \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

بنابراین برای هر یال e متعلق به G نیز داریم:

$$h(e) = g(e) \neq 0, \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1).$$

از اینرو h ، یک $(2k+1)^2$ -جریان مجموع صفر برای G می‌باشد.

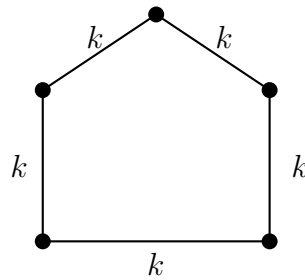
□

ملاحظه ۶.۴.۲. گراف‌هایی وجود دارند که $\mathbb{Z}_{2k}$ -جریان مجموع صفر دارند اما جریان مجموع صفر ندارند.

برای مثال دور فرد C_{2n+1} را در نظر بگیرید. با اختصاص $k \neq 0$ ، به هر یال C_{2n+1} ، مجموع مقادیر یال‌های متصل به هر رأس دور، برابر $2k$ می‌شود که به پیمانه‌ی $2k$ برابر صفر است. در نتیجه $\mathbb{Z}_{2k}$ -جریان مجموع صفر بدست می‌آید، اما قبلاً در لم ۵.۰.۲ نشان داده شده است که دور فرد C_{2n+1} جریان مجموع صفر ندارد.

تعریف ۷.۴.۲. گراف G ، $\mathbb{Z}_k$ -قوی^{۱۶} نامیده می‌شود، اگر به ازای هر تابع $\phi : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_k$ ، تابعی مانند $f : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_k$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر یال $e \in E(G)$ ، رابطه‌ی $f(e) \neq \phi(e)$ برقرار باشد و مجموع مقادیر یال‌های واقع بر هر رأس صفر شود.

^{۱۶} $\mathbb{Z}_k$ -strong

شکل ۴.۲: دور فرد C_5

ملاحظه ۸.۴.۲. یک گراف بدون یال، به‌وضوح به‌ازای هر $k, \mathbb{Z}_k$ -قوی می‌باشد.

ملاحظه ۹.۴.۲. به‌آسانی می‌توان دید که با جایگذاری $\phi \equiv \circ$ ، یک گراف $\mathbb{Z}_k$ -قوی، $\mathbb{Z}_k$ -جریان مجموع صفر دارد.

تعریف ۱۰.۴.۲. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت و G یک گراف باشد. یک عملگر k -پوش^{۱۷} در G ، جایگذاری تعدادی یال جدید به گراف G می‌باشد به‌طوری‌که:
 ۱. تعداد یال‌های جایگذاری شده کمتر از k است،
 ۲. یک دور زوج یا دمبل شامل یال‌های جایگذاری شده، در گراف جدید وجود دارد.

لم ۱۱.۴.۲. [۱] فرض کنید G' گرافی $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -قوی باشد. اگر یک عملگر $(2k+1)$ -پوش در G' اجرا شود و گراف جدید G حاصل شود، آنگاه G نیز $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -قوی می‌باشد.

برهان. فرض کنید I مجموعه‌ی یال‌های جایگذاری شده به G' و C یک دور زوج یا دمبل که شامل این یال‌ها می‌باشد و $\phi : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{2k+1}$ تابعی دلخواه باشد.
 طبق لم ۵.۰.۲، برای C یک ۳-جریان مجموع صفر وجود دارد که h نامیده می‌شود.
 برای هر $1 \leq i \leq 2k+1$ ، تعریف کنید:

$$h_i = ih \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

به‌سادگی می‌توان دید که هر h_i روی C ، یک $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -جریان است. برای یک یال جایگذاری شده مانند e ، داریم:

$$h(e) \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

بنابراین $h(e)$ و $2k+1$ نسبت به‌هم اولند.
 $h(e)$ نیز تابعی یک‌به‌یک و پوشاست، چون اگر $h_i(e) = h_{i'}(e)$ باشد، آنگاه داریم:

$$ih(e) = i'h(e) \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

^{۱۷} k -push

اگر طرفین این رابطه را در $h^{-1}(e)$ ضرب کنید، $i = i'$ می‌شود که نشان می‌دهد $h(e)$ تابعی یک‌به‌یک است. همچنین اگر $h_i(e) = j$ باشد، آنگاه داریم:

$$ih(e) = j \Rightarrow i = jh^{-1}(e) \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

پس $h(e)$ پوشاست. در نتیجه i یکتایی وجود دارد که:

$$h_i(e) = ih(e) = \phi(e) \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

چون تعداد یال‌های جایگذاری شده کمتر از $2k+1$ است، یک j وجود دارد که $1 \leq j \leq 2k+1$ است و برای هر $e \in I$ داریم:

$$h_j(e) \neq \phi(e) \quad (\text{به پیمانه‌ی } 2k+1)$$

حال تابع جدید $\phi' : E(G') \rightarrow \mathbb{Z}_{2k+1}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\phi'(e) = \begin{cases} \phi(e) - h_j(e) & e \in C \cap E(G') \\ \phi(e) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

G' گرافی $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -قوی می‌باشد، بنابراین $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -جریان مجموع صفری مانند g' وجود دارد که مقادیرش روی هر یال G' ، متفاوت از مقادیری است که ϕ' به هر یال G' اختصاص می‌دهد. در نتیجه برای گراف G ، یک $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -جریان مجموع صفر، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(e) = \begin{cases} h_j(e) & e \in I \\ g'(e) + h_j(e) & e \in C \setminus I \\ g'(e) & e \notin C \end{cases}$$

چون برای هر $e \in I$ ، رابطه‌ی $h_j(e) \neq \phi(e)$ برقرار است، پس برای هر $e \in I$ داریم:

$$g(e) \neq \phi(e),$$

همچنین تابع ϕ' برای هر $e \in C \cap E(G')$ برابر است با:

$$\phi'(e) = \phi(e) - h_j(e)$$

در نتیجه برای هر $e \in C \cap E(G')$ ، نیز $\phi(e) = \phi'(e) + h_j(e)$ است. چون $g'(e) \neq \phi'(e)$ است، بنابراین برای هر $e \in C \setminus I$ داریم:

$$g(e) \neq \phi(e),$$

و همچنین برای هر $e \notin C$ ، رابطه‌ی $\phi'(e) = \phi(e)$ و $g'(e) \neq \phi'(e)$ برقرار است. پس برای هر $e \notin C$ نیز داریم:

$$g(e) \neq \phi(e).$$

درنتیجه برای هر یال $e \in E(G)$ داریم:

$$g(e) \neq \phi(e)$$

بنابراین گراف G نیز، $\mathbb{Z}_{2k+1}$ -قوی می‌باشد.

□

لم ۱۲.۴.۲. [۱] فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی n و H زیرگرافی از G باشد. اگر G جریان مجموع صفر داشته باشد، آنگاه G می‌تواند از H با دنباله‌ای از عملگرهای $(n+2)$ -پوش، حاصل شود.

برهان. در اثبات از استقرا روی $|E(G)| - |E(H)|$ استفاده شده است. پایه‌ی استقرا $H = G$ می‌باشد، که واضح است. فرض کنید که $|E(H)| < |E(G)|$ و $e \in E(G) \setminus E(H)$ باشد. با توجه به لم ۷.۰.۲، یک دور زوج یا یک دمبل مانند C وجود دارد که شامل e می‌باشد. اگر C یک دور زوج باشد، آنگاه دارای n یال است و اگر C یک دمبل باشد، آنگاه دارای $n+1$ یال است. بنابراین با اضافه کردن حداکثر $n+1$ یال به گراف H ، یک دور زوج یا یک دمبل به وجود می‌آید. درنتیجه اضافه کردن یال‌های $E(C) \setminus E(H)$ به H ، یک عملگر $(n+2)$ -پوش می‌باشد. با اعمال این عملگر، گراف H' حاصل می‌شود. H' نیز یک زیرگراف G است اما تعداد یال‌هایش بیشتر از تعداد یال‌های H است. با استفاده از فرض استقرا، G می‌تواند از H' با دنباله‌ای از عملگرهای $(n+2)$ -پوش به دست آید. بنابراین گراف G نیز می‌تواند از H با دنباله‌ای از عملگرهای $(n+2)$ -پوش حاصل شود.

□

قضیه ۱۳.۴.۲. [۱] فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی n است که جریان مجموع صفر دارد. اگر n فرد باشد، آنگاه G ، دارای $(n+2)^2$ -جریان مجموع صفر است. اگر n زوج باشد، آنگاه G ، دارای $(n+3)^2$ -جریان مجموع صفر است.

برهان. ابتدا فرض کنید که n فرد باشد. اگر H گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ و بدون یال باشد، آنگاه با توجه به ملاحظه‌ی ۸.۴.۲، گراف H ، به‌وضوح $\mathbb{Z}_{n+2}$ -قوی می‌باشد. با استفاده از لم ۱۲.۴.۲، گراف G می‌تواند از H با دنباله‌ای از عملگرهای $(n+2)$ -پوش، حاصل شود. بنابراین با استفاده از لم ۱۱.۴.۲، گراف G نیز، $\mathbb{Z}_{n+2}$ -قوی می‌باشد. پس با توجه به ملاحظه‌ی ۹.۴.۲، دارای $\mathbb{Z}_{n+2}$ -جریان مجموع صفر است. درنتیجه با استفاده از قضیه‌ی ۵.۴.۲، گراف G ، دارای $(n+2)^2$ -جریان مجموع صفر است.

اگر n زوج باشد، رأس تنهای جدیدی به گراف G اضافه کنید. در اینصورت مرتبه‌ی گراف جدید، $n+1$ و فرد می‌باشد. بنابراین با توجه به قسمت اول اثبات، گراف جدید، دارای $(n+3)^2$ -جریان مجموع صفر است. درنتیجه گراف G نیز، دارای $(n+3)^2$ -جریان مجموع صفر است.

□

۵.۲- جریان‌های مجموع صفر در گراف‌های کوچک

در این بخش گراف‌هایی با کمترین تعداد رأس که جریان مجموع صفر دارند ولی برای یک k پیش فرض، k -جریان مجموع صفر ندارند را مطالعه می‌کنیم. بسیاری از این نتایج با استفاده از جستجوی برنامه‌ی کامپیوتری بدست آمده‌اند.

همه‌ی گراف‌هایی که کمتر از ۵ رأس دارند و دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، یک ۳-جریان مجموع صفر دارند.

دقیقاً دو گراف از مرتبه‌ی ۵ که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، وجود دارد که ۳-جریان مجموع صفر ندارند. اندازه‌ی آنها ۸ است و در شکل ۵.۲ نشان داده شده‌اند. دقیقاً ۱۵ گراف از مرتبه‌ی ۶ که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، وجود دارد که ۳-جریان مجموع صفر ندارند.



شکل ۵.۲: کوچک‌ترین گراف‌ها بدون ۳-جریان مجموع صفر

همه‌ی گراف‌هایی که کمتر از ۶ رأس دارند و دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، یک ۴-جریان مجموع صفر دارند.

دقیقاً یک گراف از مرتبه‌ی ۶ و دقیقاً یک گراف از مرتبه‌ی ۷ که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، وجود دارد که ۴-جریان مجموع صفر ندارند. آنها در شکل ۶.۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۶.۲: کوچک‌ترین گراف‌ها بدون ۴-جریان مجموع صفر

ملاحظه ۱.۵.۲. در ابتدا به نظر می‌رسد که همه‌ی گراف‌ها، دارای یک ۵-جریان مجموع صفر هستند. درحقیقت این برای گراف‌های تا ۸ رأس که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، درست است. کوچک‌ترین مثال نقض گراف T می‌باشد که در شکل ۷.۲ نشان داده شده است. درواقع اگر یک ۵-جریان مجموع صفر برای T وجود داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$x + a + b = 0, \quad y + b - a = 0$$

این ایجاب می‌کند که:

$$x + y = -2b, \quad x - y = -2a$$

بنابراین باید

$$x \equiv y \pmod{2}$$

۹

$$|x| \neq |y|$$

باشد. به‌طور مشابه، می‌بینیم که $x \equiv y \equiv z$ (به پیمانه‌ی ۲) و باید $|x|$ ، $|y|$ و $|z|$ متمایز باشند. در مجموعه‌ی $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ هیچ سه عددی که ویژگی مورد نظر را داشته باشد، وجود ندارد. بنابراین T ، یک ۵-جریان مجموع صفر ندارد. با استفاده از استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد که T ، دارای ۵-جریان مجموع صفر نیز نمی‌باشد. اما همان‌طور که در شکل ۷.۲ نشان داده شده است، یک ۶-جریان مجموع صفر دارد.

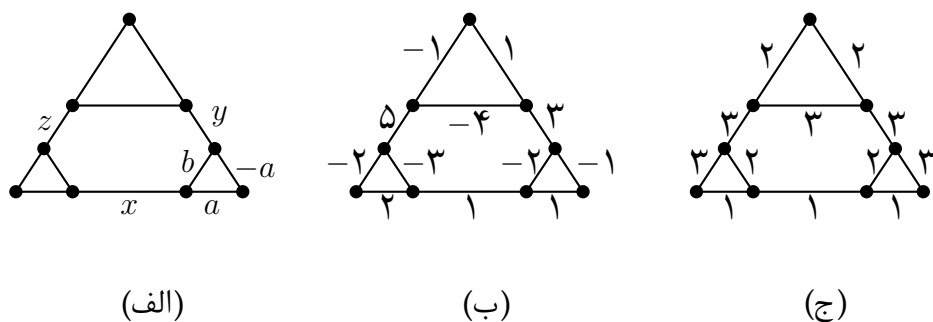
ملاحظه ۲.۵.۲. در مرجع [۲۴] ثابت شده است که یک گراف، $\mathbb{Z}_k$ -جریان هیچ‌جا صفر دارد، اگر و تنها اگر k -جریان هیچ‌جا صفر داشته باشد. مثال نشان داده شده در شکل ۷.۲، نشان می‌دهد که این واقعیت برای جریان‌های مجموع صفر درست نیست، همان‌طور که در شکل ۷.۲ می‌بینید T ، دارای ۴-جریان مجموع صفر است ولی ۴-جریان مجموع صفر ندارد.

دقیقاً یک گراف از مرتبه‌ی ۹ و دقیقاً یکی از مرتبه‌ی ۱۰ که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، وجود دارد که ۵-جریان مجموع صفر ندارند. آنها در شکل ۸.۲ نشان داده شده‌اند. دقیقاً هفت گراف از مرتبه‌ی ۱۱ که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، وجود دارد که ۵-جریان مجموع صفر ندارند.

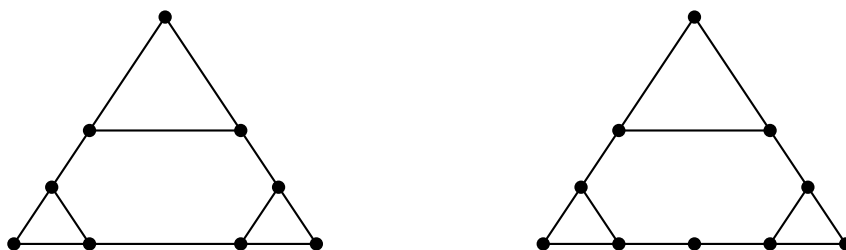
همه‌ی گراف‌های دوبخشی که کمتر از ۱۳ رأس دارند و دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، یک ۴-جریان مجموع صفر دارند.

فقط یک گراف از مرتبه‌ی ۱۳ و یک گراف از مرتبه‌ی ۱۴ که دارای جریان مجموع صفر می‌باشند، وجود دارد که ۴-جریان مجموع صفر ندارند، اما هردو، ۵-جریان مجموع صفر دارند، و در شکل ۹.۲ نشان داده شده‌اند.

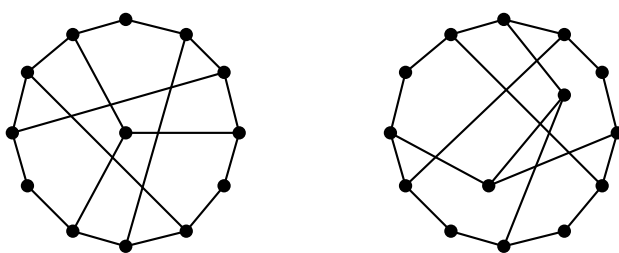
نتایج به‌دست آمده، در جداول ۱.۲، ۲.۲ و ۳.۲ به‌طور مختصر بیان شده‌اند.



شکل ۷.۲: الف: کوچک‌ترین گراف بدون ۵-جریان مجموع صفر، ب: یک ۶-جریان مجموع صفر برای گراف داده شده در قسمت الف، ج: یک $\mathbb{Z}_4$ -جریان مجموع صفر برای گراف داده شده در قسمت الف.



شکل ۸.۲: گراف‌هایی از مرتبه‌ی ۹ و ۱۰ بدون ۵-جریان مجموع صفر



شکل ۹.۲: گراف‌های دوبخشی از مرتبه‌ی ۱۳ و ۱۴ بدون ۴-جریان مجموع صفر

ملاحظه ۳.۵.۲. در شکل ۱۰.۲، گرافی بدون $\mathbb{Z}_3$ -جریان مجموع صفر نشان داده شده است. همان‌طور که می‌بینید، گراف داده شده دوبخشی نیست چون دارای دور فرد می‌باشد و همچنین با حذف یک یال، گراف حاصل نیز مؤلفه‌ی دوبخشی ندارد، بنابراین طبق قضیه‌ی ۲.۱.۲، جریان مجموع صفر دارد. درجه‌ی همه‌ی رئوس به‌جز رأس v ، برابر ۳ است. توجه شود که مجموع هر سه عضو ناصفر در $\mathbb{Z}_3$

جدول ۱.۲: گراف‌های بدون ۴ - جریان مجموع صفر

n	تعداد تمام گراف‌های همبند غیریکریخت از مرتبه‌ی n	بدون ۴ - جریان مجموع صفر	اندازه
۶	۱۱۲	۱	۱۰
۷	۸۵۳	۱	۱۰

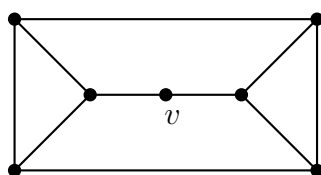
جدول ۲.۲: گراف‌های بدون ۵ - جریان مجموع صفر

n	تعداد تمام گراف‌های همبند غیریکریخت از مرتبه‌ی n	بدون ۵ - جریان مجموع صفر	اندازه
۹	۲۶۱۰۸۰	۱	۱۲
۱۰	۱۱۷۱۶۵۷۱	۱	۱۳
۱۱	۱۰۰۶۷۰۰۵۶۵	۷	۱۴ یا ۱۵

جدول ۳.۲: گراف‌های دوبخشی بدون ۴ - جریان مجموع صفر

n	تعداد تمام گراف‌های دوبخشی همبند غیریکریخت از مرتبه‌ی n	بدون ۴ - جریان مجموع صفر	اندازه
۱۳	۲۲۴۱۷۳۰	۱	۱۸
۱۴	۳۱۱۹۳۳۲۴	۱	۱۹
۱۵	۵۷۵۲۵۲۱۱۲	۵	۲۰ یا ۲۱

برابر صفر است اگر و تنها اگر با هم برابر باشند (به پیمانه‌ی ۳)، بنابراین اگر گراف داده شده یک $\mathbb{Z}_3$ - جریان مجموع صفر داشته باشد، آنگاه همه‌ی یال‌ها باید مقدار یکسان داشته باشند (به پیمانه‌ی ۳). چون درجه‌ی رأس v برابر ۲ است، پس مجموع مقادیر دو یال متصل به v در $\mathbb{Z}_3$ ، نمی‌تواند صفر شود. درنتیجه گراف داده شده، $\mathbb{Z}_3$ - جریان مجموع صفر ندارد.



شکل ۱۰.۲: گرافی بدون $\mathbb{Z}_3$ -جریان مجموع صفر

فصل ۳

جریان مجموع یک در گراف‌ها

در این فصل به بررسی جریان‌های مجموع یک در گراف‌های r -منتظمی که مرتبه‌ی زوج دارند، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۰.۳. برای گراف بدون جهت G ، **جریان مجموع یک**^۱، تخصیص اعداد حقیقی ناصفر به هر یال G می‌باشد، به‌طوری که برای هر رأس v متعلق به $V(G)$ ، مجموع مقادیر همه‌ی یال‌های متصل به v برابر با یک باشد.

k -**جریان مجموع یک**^۲، یک جریان مجموع یک است که مقادیر آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(e) \in \{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد، هر گراف r -منتظم ($r \geq 3$)، دارای یک k -جریان مجموع صفر است. حال می‌خواهیم جریان مجموع یک را در گراف‌های r -منتظم بررسی کنیم. بنابراین، در این فصل، به بررسی k -جریان مجموع یک در گراف‌های r -منتظمی که مرتبه‌ی زوج دارند، می‌پردازیم.

ملاحظه ۲.۰.۳. توجه شود که اگر گراف G ، دارای k -جریان مجموع یک باشد، باید مرتبه‌ی G زوج باشد.

^۱One-sum flow

^۲One-sum k -flow

چون f برای G ، یک جریان مجموع یک است، داریم:

$$\sum_{u \in N_G(v)} f(uv) = 1$$

بنابراین:

$$\sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} f(uv) = \sum_{v \in V(G)} 1 = |V(G)|$$

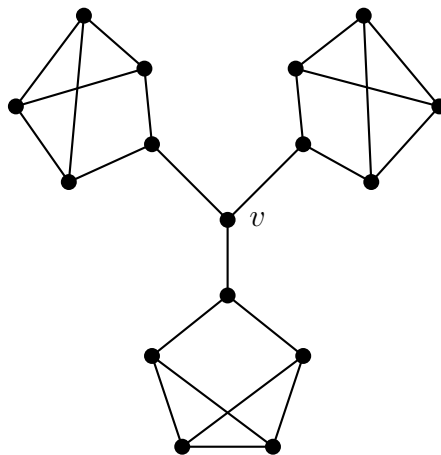
همچنین چون هر یال به دو رأس متصل است، بنابراین در شمارش تعداد یال‌ها، هر یال دو بار شمارش می‌شود، پس داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} f(uv) = 2 \sum_{e \in E(G)} f(e)$$

در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$|V(G)| = \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} f(uv) = 2 \sum_{e \in E(G)} f(e).$$

بنابراین باید $|V(G)|$ زوج باشد.



شکل ۱.۳: گرافی ۳-منتظم بدون ۳-جریان مجموع یک

ملاحظه ۳.۰.۳. گراف ۳-منتظم داده شده در شکل ۱.۳، دارای ۳-جریان مجموع یک نمی‌باشد. اگر گراف داده شده دارای یک ۳-جریان مجموع یک باشد، باید مقادیر اختصاص داده شده به یال‌ها، متعلق به مجموعه‌ی $\{\pm 1, \pm 2\}$ باشد.

به هر رأس، سه یال متصل است، بنابراین برای اینکه در هر رأس قاعده‌ی مجموع یک صدق کند، باید سه یال متصل به هر رأس، مقادیر ۱، ۱ و ۱- یا ۱، ۲ و ۲- بگیرند. این مقادیر را هر طور به یال‌های گراف اختصاص دهیم، رأسی وجود دارد که جریان مجموع یک در آن صدق نمی‌کند. مثلاً اگر به یال‌های متصل به رأس v ، مقادیر ۲، ۲- و ۱ اختصاص داده شود، در نهایت یک رأس وجود دارد که جریان مجموع یک برای آن برقرار نیست.

قضیه ۴.۰.۳. [۴] فرض کنید G یک گراف r -منتظم همبند از مرتبه‌ی زوج باشد، آنگاه احکام زیر برقرارند:

(i) اگر r یک عدد صحیح فرد یا $r = 4k + 2$ باشد، آنگاه گراف G ، دارای یک ۴-جریان مجموع یک می‌باشد.

(ii) اگر $r = 4k$ باشد، آنگاه G ، دارای یک ۵-جریان مجموع یک می‌باشد.

برهان. فرض کنید $V(G) = \{1, \dots, n\}$ باشد. ابتدا r را یک عدد صحیح فرد در نظر بگیرید. گراف دوبخشی B با دو بخش $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ توسط G طوری تعریف شده است که برای هر i و j که $1 \leq i, j \leq n$ می‌باشد، $x_i y_j \in E(B)$ است اگر و تنها اگر $ij \in E(G)$ باشد. بنابراین B گرافی r -منتظم می‌باشد و طبق قضیه‌ی ۳۲.۱.۱، B یک تطابق کامل دارد. پس دارای ۱-فاکتورهای $F_1, F_2, \dots, F_r$ می‌باشد.

حال برای هر $e \in E(F_i)$ که $1 \leq i \leq r$ ، تابع $g: E(B) \rightarrow \{\pm \frac{1}{r}, \pm \frac{2}{r}\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

اگر $r = 4k + 1$ باشد، داریم:

$$g(e) = \begin{cases} -\frac{3}{r}, & 1 \leq i \leq k; \\ \frac{1}{r}, & k < i \leq r. \end{cases}$$

همچنین اگر $r = 4k + 3$ باشد، داریم:

$$g(e) = \begin{cases} \frac{3}{r}, & 1 \leq i \leq k + 1; \\ -\frac{1}{r}, & k + 1 < i \leq r. \end{cases}$$

واضح است که برای هر $u \in V(B)$ داریم:

$$\sum_{v \in N_B(u)} g(uv) = \frac{1}{r}.$$

چون اگر $r = 4k + 1$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in N_B(u)} g(uv) &= (k) \left(-\frac{3}{r} \right) + (r - k) \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \left(-\frac{3k}{r} \right) + (4k + 1 - k) \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{-3k + 3k + 1}{r} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

و همچنین اگر $r = 4k + 3$ باشد نیز، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in N_B(u)} g(uv) &= (k+1) \left(\frac{3}{2} \right) + (r-k-1) \left(\frac{-1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{3k+3}{2} \right) + (4k+3-k-1) \left(\frac{-1}{2} \right) \\ &= \frac{3k+3-3k-2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

حال تابع $f: E(G) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3\}$ را طوری تعریف کنید که برای هر $ij \in E(G)$ ، داشته باشیم:

$$f(ij) = g(x_i y_j) + g(x_j y_i)$$

با این تعریف برای f ، نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. یعنی برای هر $i \in V(G)$ داریم:

$$\sum_{j \in N_G(i)} f(ij) = 1.$$

پس اگر r عددی فرد باشد، گراف r -منتظم G ، دارای یک ۴-جریان مجموع یک است. حال فرض کنید r عدد صحیحی زوج باشد. اگر G ، گرافی ۲-منتظم باشد، آنگاه با تخصیص اعداد صحیح ۱- و ۲ به یال‌های G ، به‌طور متناوب، برای هر رأس G قاعده‌ی مجموع یک برقرار است. در نتیجه گراف ۲-منتظم G ، یک ۳-جریان مجموع یک دارد. اگر $r = 4k$ باشد، آنگاه به‌ازای هر یال $e = ij \in E(G)$ ، یال جدید $e' = ij$ را به گراف G اضافه کنید تا گراف چندگانه‌ی $8k$ -منتظم G' حاصل شود. گراف G' شامل دو زیرگراف پوشای یال مجزای H_1 و H_2 است که با G یکرخت می‌باشند و H_1 قابل افراز به ۲-فاکتورهای $F_1, F_2, \dots, F_{2k}$ است. گراف چندگانه‌ی $(4k+2)$ -منتظم G'' به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$G'' = G' \setminus E(F_1) \cup \dots \cup E(F_{2k-1})$$

که شامل گراف $4k$ -منتظم H_2 می‌باشد. چون G'' ، گرافی ۲-یال همبند است، اگر تابع f برای هر $i \in V(G'')$ ، به‌صورت $f(i) = 2k+1$ تعریف شود و $\theta = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه با استفاده از قسمت‌های (i)، (ii) و (iii) از لم ۱۱.۳.۲، گراف G'' قابل افراز به دو $(2k+1)$ -فاکتور G''_1 و G''_2 می‌باشد. حال برای هر $e \in E(G')$ ، تابع $g: E(G') \rightarrow \{-2, 1, 3\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(e) = \begin{cases} -2, & e \in E(F_1) \cup \dots \cup E(F_{k-2}) \cup E(G''_1); \\ 1, & e \in E(F_{k-1}) \cup E(F_k) \cup E(F_{k+1}) \cup E(G''_2); \\ 3, & e \in E(F_{k+2}) \cup \dots \cup E(F_{2k-1}). \end{cases}$$

به‌وضوح برای هر $i \in V(G')$ داریم:

$$\sum_{j \in N_{G'}(i)} g(ij) = 1$$

چون:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in N_{G'}(i)} g(ij) &= (-2)(2k - 4 + 2k + 1) + (1)(6 + 2k + 1) + (3)(2k - 4) \\
 &= (-2)(4k - 3) + (1)(2k + 7) + (3)(2k - 4) \\
 &= -8k + 6 + 2k + 7 + 6k - 12 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

حال تابع $f: E(G) \rightarrow \{-4, -1, 1, 2, 4\}$ را طوری تعریف کنید که برای هر $e \in E(G)$ داشته باشیم:

$$f(e) = g(e) + g(e')$$

که e' دارای مقدار ۲- یا ۱- می باشد. بنابراین برای هر $i \in V(G)$ داریم:

$$\sum_{j \in N_G(i)} f(ij) = 1$$

که همان نتیجه‌ی مطلوب است، یعنی گراف G دارای یک ۵-جریان مجموع یک است. حال فرض کنید که $r = 4k + 2$ و $10, 14, 22, r \neq 6$ باشد. ابتدا توجه شود که هر عدد صحیح به فرم $4k + 2$ ، به صورت $12k + 2$ یا $12k + 6$ یا $12k + 10$ نوشته می شود. پس ابتدا فرض کنید $r = 12k + 2$ باشد. چون G ، گرافی ۲-یال همبند است، اگر تابع f برای هر $i \in V(G)$ ، به صورت $f(i) = 6k + 1$ تعریف شود و $\theta = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه با استفاده از قسمت‌های (i)، (ii) و (iii) از لم ۱۱.۳.۲، گراف G دارای دو $(6k + 1)$ -فاکتور H_1 و H_2 می باشد. از طرف دیگر، با استفاده از قضیه‌ی ۳۶.۱.۱، گراف H_2 دارای $[4k - 1, 4k]$ -فاکتوری به نام T است که مؤلفه‌های منتظم هستند. فرض کنید T_1 ، اجتماع مؤلفه‌های $(4k - 1)$ -منتظم T و T_2 ، اجتماع مؤلفه‌های $4k$ -منتظم T باشد. با توجه به قضیه‌ی ۳۴.۱.۱، گراف T_2 دارای ۲-فاکتورگیری با ۲-فاکتورهای $F_1, F_2, \dots, F_{4k}$ می باشد.

حال تابع $g: E(G) \setminus E(T_1) \rightarrow \{-3, -2, -1, 2\}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(e) = \begin{cases} -3, & e \in E(H_2) \setminus E(T); \\ -2, & e \in E(F_i), \quad 1 \leq i \leq k-1; \\ -1, & e \in E(F_i), \quad k \leq i \leq 4k; \\ 2, & e \in E(H_1). \end{cases}$$

سپس یال‌های T_1 به این صورت مقداردهی شده‌اند.

بدون از دست رفتن کلیت، می توان فرض کرد که $V(T_1) = \{1, \dots, q\}$ باشد. گراف دوبخشی L با دو بخش $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ و $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ طوری تعریف شده است که برای هر i و j ، که $1 \leq i, j \leq q$ می باشد، $x_i y_j \in E(L)$ است اگر و تنها اگر $ij \in E(T_1)$ باشد. بنابراین

L گرافی $(4k-1)$ -منتظم است و با استفاده از قضیه ۳۲.۱.۱، دارای ۱-فاکتورهای F'_4, F'_1 ، ... و F'_{4k-1} می‌باشد. حال برای هر $e \in E(F'_i)$ ، به‌طوری که $1 \leq i \leq 4k-1$ است، تابع $g' : E(L) \rightarrow \{\frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}\}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$g'(e) \begin{cases} \frac{-3}{4}, & 1 \leq i \leq k-2; \\ \frac{-1}{4}, & k-1 \leq i \leq 4k-1. \end{cases}$$

به‌وضوح برای هر $i \in V(L)$ داریم:

$$\sum_{j \in N_L(i)} g'(ij) = \frac{-6k+5}{4}$$

چون:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_L(i)} g'(ij) &= \left(\frac{-3}{4}\right)(k-2) + \left(\frac{-1}{4}\right)(3k+1) \\ &= \left(\frac{-3k}{4}\right) + (3) + \left(\frac{-3k}{4}\right) + \left(\frac{-1}{4}\right) \\ &= \frac{-6k+5}{4} \end{aligned}$$

حال برای گراف G تابعی مانند $f : E(G) \rightarrow \{-3, -2, -1, 2\}$ طوری تعریف شده است که برای هر $e \in E(G) \setminus E(T_1)$ داریم:

$$f(e) = g(e)$$

و برای هر $e = ij \in E(T_1)$ داریم:

$$f(e) = g'(x_i y_j) + g'(x_j y_i)$$

درنتیجه برای هر $i \in V(G)$

$$\sum_{j \in N_G(i)} f(ij) = 1$$

می‌باشد، چون:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_G(i)} f(ij) &= (2)(6k+1) + (-2)(2k-2) + (-1)(2k+2) + (-3)(2k+1) \\ &= (12k+2) + (-4k+4) + (-2k-2) + (-6k-3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $r = 12k+2$ باشد، آنگاه در هر رأس گراف r -منتظم G ، قاعده‌ی مجموع یک برقرار است و درنتیجه G دارای یک ۴-جریان مجموع یک است.

حال فرض کنید $r = 12k+6$ باشد. چون G ، گرافی ۲-یال همبند است، اگر تابع f برای هر $i \in V(G)$ ، به‌صورت $f(i) = 6k+3$ تعریف شود و $\theta = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه با استفاده از قسمت‌های

(i)، (ii) و (iii) از لم ۱۱.۳.۲، گراف G دارای دو $(6k+3)$ -فاکتور H_1 و H_2 می‌باشد. از طرف دیگر، با استفاده از قضیه ۳۶.۱.۱، گراف H_2 دارای $[4k+1, 4k+2]$ -فاکتوری به نام T است که مؤلفه‌هایش منتظم هستند. فرض کنید T_1 ، اجتماع مؤلفه‌های $(4k+1)$ -منتظم T و T_2 ، اجتماع مؤلفه‌های $4k+2$ -منتظم T باشد. با توجه به قضیه ۳۴.۱.۱، گراف T_2 ، دارای ۲-فاکتورگیری با ۲-فاکتورهای $F_1, F_2, \dots, F_{4k+1}$ می‌باشد.

حال تابع $g : E(G) \setminus E(T_1) \rightarrow \{-3, -2, -1, 2\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(e) = \begin{cases} -3, & e \in E(H_2) \setminus E(T); \\ -2, & e \in E(F_i), \quad 1 \leq i \leq k; \\ -1, & e \in E(F_i), \quad k+1 \leq i \leq 4k+1; \\ 2, & e \in E(H_1). \end{cases}$$

سپس یال‌های T_1 نیز به این صورت مقداردهی شده‌اند. بدون از دست رفتن کلیت، می‌توان فرض کرد که $V(T_1) = \{1, \dots, q\}$ باشد. گراف دوبخشی L با دو بخش $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ و $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ طوری تعریف شده است که برای هر i و j ، که $1 \leq i, j \leq q$ می‌باشد، $x_i y_j \in E(L)$ است اگر و تنها اگر $ij \in E(T_1)$ باشد. بنابراین L گرافی $(4k+1)$ -منتظم است و با استفاده از قضیه ۳۲.۱.۱، دارای ۱-فاکتورهای $F'_1, F'_2, \dots, F'_{4k+1}$ می‌باشد. حال برای هر $e \in E(F'_i)$ ، به طوری که $1 \leq i \leq 4k+1$ است، تابع $g' : E(L) \rightarrow \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$g'(e) = \begin{cases} -\frac{3}{2}, & 1 \leq i \leq k-1; \\ -\frac{1}{2}, & k \leq i \leq 4k+1. \end{cases}$$

به وضوح برای هر $v \in V(L)$ داریم:

$$\sum_{v \in N_L(u)} g'(uv) = \frac{-6k+1}{2}$$

چون:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in N_L(u)} g'(uv) &= \left(-\frac{3}{2}\right)(k-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(3k+2) \\ &= \left(-\frac{3k}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3k}{2}\right) + (-1) \\ &= \frac{-6k+1}{2} \end{aligned}$$

حال برای گراف G تابعی مانند $f : E(G) \rightarrow \{-3, -2, -1, 2\}$ طوری تعریف شده است که برای هر $e \in E(G) \setminus E(T_1)$ داریم:

$$f(e) = g(e)$$

و برای هر $e = ij \in E(T_1)$ داریم:

$$f(e) = g'(x_i y_j) + g'(x_j y_i)$$

در نتیجه برای هر $i \in V(G)$

$$\sum_{j \in N_G(i)} f(ij) = 1$$

می‌باشد، چون:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_G(i)} f(ij) &= (2)(6k+3) + (-2)(2k) + (-1)(2k+2) + (-3)(2k+1) \\ &= (12k+6) + (-4k) + (-2k-2) + (-6k-3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $r = 12k+6$ باشد، آنگاه در هر رأس گراف r -منتظم G ، قاعده‌ی مجموع یک برقرار است و در نتیجه G دارای یک 4 -جریان مجموع یک است.

سپس، فرض کنید $r = 12k+10$ باشد. چون G ، گرافی 2 -یال همبند است، اگر تابع f برای هر $i \in V(G)$ به صورت $f(i) = 6k+5$ تعریف شود و $\theta = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه با استفاده از قسمت‌های (i)، (ii) و (iii) از لم ۱۱.۳.۲، گراف G دارای دو $(6k+5)$ -فاکتور H_1 و H_2 می‌باشد. از طرف دیگر، با استفاده از قضیه‌ی ۳۶.۱.۱، گراف H_2 دارای $[4k+1, 4k+2]$ -فاکتوری به نام T است که مؤلفه‌هایش منتظم هستند. فرض کنید T_1 ، اجتماع مؤلفه‌های $(4k+1)$ -منتظم T و T_2 ، اجتماع مؤلفه‌های $4k+2$ -منتظم T باشد. با توجه به قضیه‌ی ۳۴.۱.۱، گراف T_2 دارای 2 -فاکتورگیری با 2 -فاکتورهای $F_1, F_2, \dots, F_{4k+1}$ می‌باشد.

حال تابع $g : E(G) \setminus E(T_1) \rightarrow \{-3, -2, -1, 2\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(e) = \begin{cases} -3, & e \in E(H_2) \setminus E(T); \\ -2, & e \in E(F_i), \quad 1 \leq i \leq k+2; \\ -1, & e \in E(F_i), \quad k+3 \leq i \leq 4k+1; \\ 2, & e \in E(H_1). \end{cases}$$

سپس یال‌های T_1 نیز به این صورت مقداردهی شده‌اند.

بدون از دست رفتن کلیت، می‌توان فرض کرد که $V(T_1) = \{1, \dots, q\}$ باشد. گراف دوبخشی L با دو بخش $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ و $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ طوری تعریف شده است که برای هر i و j ، که $1 \leq i, j \leq q$ می‌باشد، $x_i y_j \in E(L)$ است اگر و تنها اگر $ij \in E(T_1)$ باشد. بنابراین L گرافی $(4k+1)$ -منتظم است و با استفاده از قضیه‌ی ۳۲.۱.۱، دارای 1 -فاکتورهای $F'_1, F'_2, \dots, F'_{4k+1}$ می‌باشد. حال برای هر $e \in E(F'_i)$ به طوری که $1 \leq i \leq 4k+1$ است، تابع $g' : E(L) \rightarrow \{\frac{-3}{4}, \frac{-1}{4}\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$g'(e) = \begin{cases} \frac{-3}{4}, & 1 \leq i \leq k-2; \\ \frac{-1}{4}, & k-1 \leq i \leq 4k+1. \end{cases}$$

به وضوح برای هر $v \in V(L)$ داریم:

$$\sum_{v \in N_L(u)} g'(uv) = \frac{-6k+3}{2}$$

چون:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in N_L(u)} g'(uv) &= \left(\frac{-3}{2}\right)(k-2) + \left(\frac{-1}{2}\right)(3k+3) \\ &= \left(\frac{-3k}{2}\right) + (3) + \left(\frac{-3k}{2}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) \\ &= \frac{-6k+3}{2} \end{aligned}$$

حال برای گراف G تابعی مانند $f: E(G) \rightarrow \{-3, -2, -1, 2\}$ طوری تعریف شده است که برای هر $e \in E(G) \setminus E(T_1)$ داریم:

$$f(e) = g(e)$$

و برای هر $e = ij \in E(T_1)$ داریم:

$$f(e) = g'(x_i y_j) + g'(x_j y_i)$$

در نتیجه برای هر $i \in V(G)$

$$\sum_{j \in N_G(i)} f(ij) = 1$$

می باشد، چون:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_G(i)} f(ij) &= (2)(6k+5) + (-2)(2k+4) + (-1)(2k-2) + (-3)(2k+1) \\ &= (12k+10) + (-4k-8) + (-2k+2) + (-6k-3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $r = 12k + 10$ باشد، آنگاه در هر رأس گراف r -منتظم G ، قاعده‌ی مجموع یک برقرار است و در نتیجه G دارای یک 4 -جریان مجموع یک است.

اکنون فرض کنید که G گرافی r -منتظم است به طوری که $r = 4k + 2$ و $r \in \{6, 10, 14, 22\}$ باشد. چون G ، گرافی 2 -یال همبند است، اگر تابع f برای هر $i \in V(G)$ به صورت $f(i) = 2k + 1$ تعریف شود و $\theta = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه با استفاده از قسمت‌های (i)، (ii) و (iii) از لم ۱۱.۳.۲، گراف G دارای دو $(2k+1)$ -فاکتور G_1 و G_2 می باشد.

از طرف دیگر، با استفاده از قضیه ۳۶.۱.۱، برای هر t که $1 \leq t \leq \frac{2r}{3}$ است، G_2 دارای $[t-1, t]$ -فاکتوری به نام T است که مؤلفه‌هایش منتظم هستند. فرض کنید T_1 ، اجتماع مؤلفه‌های $(t-1)$ -منتظم T و T_2 ، اجتماع مؤلفه‌های t -منتظم T باشد.

اگر $r = ۶$ باشد، آنگاه $G_۲$ که گرافی ۳-منتظم است، دارای یک $[۱, ۲]$ -فاکتور می‌باشد.
تابع $f : E(G) \rightarrow \{-۲, ۱, ۲, ۳\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(e) = \begin{cases} -۲ & e \in E(G_۱) \\ ۳ & e \in E(G_۲) \setminus E(T) \\ ۱ & e \in E(T_۱) \\ ۲ & e \in E(T_۲) \end{cases}$$

اگر $r = ۱۰$ باشد، آنگاه $G_۲$ که گرافی ۵-منتظم است، دارای یک $[۱, ۲]$ -فاکتور می‌باشد.
تابع $f : E(G) \rightarrow \{-۲, -۱, ۱, ۳\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(e) = \begin{cases} -۲ & e \in E(G_۱) \\ ۳ & e \in E(G_۲) \setminus E(T) \\ -۱ & e \in E(T_۱) \\ ۱ & e \in E(T_۲) \end{cases}$$

اگر $r = ۱۴$ باشد، آنگاه $G_۲$ که گرافی ۷-منتظم است، دارای یک $[۳, ۴]$ -فاکتور می‌باشد. با توجه به قضیه ۳۴.۱.۱، گراف ۴-منتظم $T_۲$ دارای دو ۲-فاکتور $T'_۱$ و $T'_۲$ است.
تابع $f : E(G) \rightarrow \{-۳, -۱, -۲, ۲\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(e) = \begin{cases} ۲ & e \in E(G_۱) \\ -۱ & e \in E(G_۲) \setminus E(T) \\ -۳ & e \in E(T_۱) \\ -۲ & e \in E(T'_۱) \\ -۳ & e \in E(T'_۲) \end{cases}$$

اگر $r = ۲۲$ باشد، آنگاه $G_۲$ که گرافی ۱۱-منتظم است، دارای یک $[۲, ۳]$ -فاکتور می‌باشد.
تابع $f : E(G) \rightarrow \{-۳, ۱, ۲, ۳\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(e) = \begin{cases} ۲ & e \in E(G_۱) \\ -۳ & e \in E(G_۲) \setminus E(T) \\ ۳ & e \in E(T_۱) \\ ۱ & e \in E(T_۲) \end{cases}$$

در نتیجه در همه‌ی حالت‌ها، برای هر $i \in V(G)$ داریم:

$$\sum_{j \in N_G(i)} f(ij) = ۱$$

که همان نتیجه‌ی مطلوب می‌باشد.

بنابراین هر گراف r -منتظم که مرتبه‌ی زوج دارد، دارای یک ۵- جریان مجموع یک است.



بر این اساس در سال ۲۰۱۶، اکبری و همکارانش حدس زیر را ارائه دادند:

حدس ۵.۰.۳. [۴] هر گراف k -منتظم همبند که مرتبه‌ی زوج دارد، دارای یک ۴- جریان مجموع یک می‌باشد.

مراجع

- [1] Akbari S. and Daemi A. and Hatami O. and Javanmard A. and Mehrabian A. (2010), "Zero-sum flows in regular graphs" **Graphs and Combinatorics**, 26(5), 603-615.
- [2] Akbari S. and Ghareghani N. and Khosrovshahi G.B. and Mahmoody A. (2009), "On zero-sum 6-flows of graphs" **Linear Algebra and its Applications**, 430(11-12), 3047-3052.
- [3] Akbari S. and Ghareghani N. and Khosrovshahi G.B. and Zare S. (2012), "A note on zero-sum 5-flows in regular graphs" **The Electronic Journal of Combinatorics**, 19(2), P7.
- [4] Akbari S. and Kano M. and Zare S. (2016), "0-Sum and 1-sum flows in regular graphs" **The Electronic Journal of Combinatorics**, 23(2), P2-37.
- [5] Bondy J. A. and Murty U.S.R. (1976), "**Graph theory with applications**", North Holland, New York.
- [6] Bouchet A. (1983), "Nowhere-zero integral flows on a bidirected graph" **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, 34(3), 279-292.
- [7] Brualdi R.A. and Ryser H.J. (1991), "**Encyclopedia of Mathematics and its Applications**", Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] Chartrand G. and Goldsmith D.L. and Seymour S. (1979), "A sufficient condition for graphs with 1-factors" **In Colloquium Mathematicae**, 41(2), 339-344.
- [9] DeVos M. (2013), "Flows on bidirected graphs" **preprint**.
- [10] Godsil C. and Royle G.F. (2013), "**Algebraic graph theory**, Springer Science and Business Media.
- [11] Graham R.L. and Grotschel M. and Lovasz L. (1995), "**Handbook of combinatorics**", The MIT Press/North-Holland, Amsterdam.

- [12] Hall P. (1935), "On representatives of subsets" **J. London Math. Soc**, 10(1), 26-30.
- [13] Hu S.W. and Wang T.M. (2011), "Constant sum flows in regular graphs" **Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management**, Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, .168-175
- [14] Hu S.W. and Wang T.M. (2012), "Zero-sum flow numbers of regular graphs" **Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management**, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag 7285, 269-278.
- [15] Jaeger F. (1979), "Flows and generalized coloring theorems in graphs" **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, 26(2), 205-216.
- [16] Jaeger F. (1988), "Nowhere-zero flow problems" **Selected Topics in Graph Theory**, 71-95.
- [17] Kano M. (1985), "[a,b]-factorization of a graph" **Journal of Graph Theory**, 9(1), 129-146.
- [18] Kano M. (1986), "Factors of regular graphs" **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, 41(1), 27-36.
- [19] Mehrabian A. (2007), "A Computer Search Tech. Rep", Sharif University of Technology, Tehran.
- [20] O’Nan M. (1971), "**Linear Algebra**" Eagle Mathematics Series.
- [21] Petersen J. (1891), "Die Theorie der regularen graphen" **Acta Mathematica**, 15(1), .193-220
- [22] Seymour P.D. (1981), "Nowhere-zero 6-flows" **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, 30(2), 130-135.
- [23] Tutte W.T. (1949), "On the imbedding of linear graphs in surfaces", **Proc. London Math. Soc. Ser 2** 51, 464–483.
- [24] Tutte W.T. (1954), "A contribution to the theory of chromatic polynomials" **Canad. J. Math**, 6, 80-91.
- [25] West D.B. (2001), "**Introduction to graph theory**", Upper Saddle River: Prentice hall.

- [26] Xu R. and Zhang C.Q. (2005), "On flows in bidirected graphs" **Discrete Mathematics**, 299(1), 335-343.
- [27] Zhang C.Q. (1997), "**Integer flows and cycle covers of graphs**" Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc, New York.
- [28] Zyka O. (1987), "Nowhere-zero 30-flow on bidirected graphs" **Department of Applied Mathematics**, Charles University.

Aabstract

Let $G = (V, E)$ be a graph. Assume that l and k are two non-negative integer numbers. An l -sum flow on a graph G is an assignment of non-zero real numbers to the edges of G such that for every vertex v of G the sum of values of all edges incident with v equals l . An l -sum k -flow is an l -sum flow with values from the set $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$.

In this thesis, we first study zero-sum flow in regular graphs. Next, we show that a graph of order n with a zero-sum flow has a zero-sum $(n+3)^2$ -flow. Finally, we prove that every r -regular graph of even order admits a one-sum 5-flow.

keywords: Nowhere-zero flow; Zero-sum flow; One-sum flow; Regular graph



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatory

On nowhere-zero flows in graphs

By: Nasim Abbasi

Supervisor

Meysam Alishahi

February 2017