بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم یک فرایند لوی

نگارنده: حسین محمدخانی

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به تمام کسانی که ریاضی را دوست دارند.

نیایش...

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار **خانم دکتر الهام دسترنج** ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را

از همسر مهربان و فرزند دلبندم که در تمام طول تحصیل همراه وهمگام من بوده اند

از استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم ومعرفت مرا یاری نموده‌اند

از آنان که نفس خیرشان ودعای روح‌پرورشان بدرقه‌ی راهم بودند

و از دوستان عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حسین محمدخانی

بهمن ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **حسین محمدخانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم یک فرایند لوی** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حسین محمدخانی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرایند لوی یکی از مهم ترین و پرکاربرد ترین فرایند در ریاضیات مالی به شمار می‌آید.پای این فرایند زمانی به بازار بورس کشیده می شود که در بازار یک پرش ناگهانی قیمت رخ دهد. برای مدل سازی تصادفی چنین بازارهایی از فرایند لوی استفاده می شود بنابراین مسائل پیرامون این فرایند جهت مدل کردن بازارهای بورس اهمیت ویژه ای دارد. در این رساله ابتدا خود فرایند معرفی شده سپس در ادامه رابطه آن با فرایندهای پواسون ،پواسون مرکب وتوزیع‌های بی‌نهایت تقسیم‌پذیر بیان شده است ودرفصل آخر برای ماکسیمم این فرآیند، نمایش مارتینگلی محاسبه شده است.

کلمات کلیدی:

فرایندلوی، فرایند پواسون، فرایند براونی ، اندازه تصادفی ، اندازه تصادفی پواسون، بی‌نهایت تقسیم‌پذیر ،متغیرتصادفی،قریب به یقین ،تابع توزیع

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

از آنجا که آشنایی با برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه برای درک بهتر این پایان نامه مورد نیاز است، در این بخش سعی بر آن شده است که به طور خلاصه به آنها پرداخته شود. مطالب ارائه شده در این بخش به جز مواردی که به روشنی ذکر شده است، از مراجع [۱۰] و [۱۳] و [۲۱] آورده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ را یک **نرم** روی V گوییم هرگاه

۱. برای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$،

۲. برای هر $x \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۳. برای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

۴. برای هر $x \in V$ ، $\|x\| = 0$اگر و فقط اگر $x = 0$.

به $(V, \|\cdot\|)$ **فضای نرمدار** می‌گوییم. هرگاه V با متر $d(x,y) = \|x - y\|$ فضای متریک تام باشد، به آن **فضای باناخ** می‌گوییم.

۲.۱ اندازه و اندازه پذیری

مفاهیمی که در این بخش و بخش بعدی آمده، از مرجع [۲۰] می‌باشد.
فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی و C دسته ای ناتهی از زیر مجموعه های X باشد.

۱. C را یک **نیم حلقه** از زیر مجموعه های Xگوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد.

۲. C را یک **حلقه** از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. C را یک **نیم میدان** (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد.

۴. C را یک σ-**میدان** از زیر مجموعه های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر و مکمل بسته باشد.

دسته های گوناگون از بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب‌های دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه هستند.
فرض کنیم C دسته ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه ها باشد، منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است به‌طوری که در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر A در C، $\circ \leq \mu(A) \leq \infty$.

۲) هرگاه $\{A_n, n \geq ۱\}$، دنباله ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد به‌طوری که $(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n)$.

فرض کنیم C دسته ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد، (برحسب رابطه‌ی شمول) کوچکترین σ-میدان شامل C از زیر مجموعه‌های X را σ- میدان تولید شده توسط C
می‌نامیم و به صورت $\sigma(C)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام σ-جبرهای شامل C است. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و C دسته‌ی تمام بازه ها باشد. σ-جبر تولید شده توسط C را σ-جبربورل گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه ها به صورت $[a, b)$ یا $[a, b]$ یا (a, b) که در آن a, b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$اند.

ملاحظه ۱.۲.۱. الف) به‌طور کلی در یک فضای توپولوژیکی σ-میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز را σ-میدان بورل می‌نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.

ب) دسته مجموعه‌های بورل، کوچکترین σ-میدانی است که حاوی همه‌ی مجموعه‌های باز است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم C سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی C باشد. **اندازه μ را روی** C، **متناهی گوییم** هرگاه برای هر A در C، $\mu(A) < \infty$ و σ- متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq ۱\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری‌که $X = \cup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه های X و μ اندازه ای σ-متناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیر مجموعه‌ی دلخواه A از X **اندازه خارجی** A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq ۱} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \cup_{n\geq ۱} I_n\}$$

ملاحظه ۴.۲.۱. الف) برای $I \in \mathcal{H}$، $\mu^*(I) = \mu(I)$

ب) اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای دلخواه باشد آن‌گاه

$$\mu^*(\cup_{n\geq ۱} A_n) \leq \sum_{n\geq ۱} \mu^*(A_n).$$

زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A).$$

ملاحظه ۵.۲.۱. الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیراند.

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

تعریف ۶.۲.۱. منظور از یک **فضای اندازه پذیر** عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند X و σ-میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی اندازه پذیر می‌نامیم. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** و μ یک **اندازه** روی σ-میدان $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۷.۲.۱. گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، **تقریبا همه جا** [۱] یا (a.e.) برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه پذیر و دارای اندازه μ صفر باشند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, B)$ را اندازه‌پذیر یا $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $u \in B$، داشته باشیم

$$f^{-۱}(U) := \{x \in X;\ f(x) \in U\} \in \mathcal{A}.$$

تابع $Y : (\Omega, F) \to (\mathbb{R}^n, B)$ را در نظر بگیرید. σ- **میدان** F_Y **تولید شده توسط** Y، کوچکترین σ-میدان روی Ω شامل مجموعه های

$$Y^{-۱}(B); \qquad B \in B,$$

می‌باشد، به عبارت دیگر

$$F_Y = \{Y^{-۱}(B);\ B \in B\}.$$

به وضوح Y نسبت به F_Y، اندازه‌پذیر است.

---

[۱] Almost everywhere

انتگرال

تعریف ۹.۲.۱. اگر A مجموعه ای دلخواه از σ-میدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi_A(x)=\begin{cases} ۱ & x\in A \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع ساده تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ با مقادیر متمایز $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ باشد. می‌توان نوشت $\varphi=\sum_{i=۱}^{n}a_i\chi_{A_i}$ که در آن $A_i=\{x\in X:\varphi(x)=a_i\}$، روشن است که A_i ها مجزا هستند.

اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_iها اندازه‌پذیراند. انتگرال φ نسبت به اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_X \varphi d\mu=\sum_{i=۱}^{n}a_i\mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $۰\times\infty=۰$. فرض می‌کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A\in\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A fd\mu=\sup\{\int_A\varphi d\mu:\varphi\leq f\},$$

که در آن φ تابعی ساده و نامنفی است.

ملاحظه ۱۱.۲.۱. فرض کنیم f تابع اندازه‌پذیر روی X و $A_۱,A_۲,\ldots$ دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای A باشد و $A=\cup_{i=۱}^{\infty}A_i$. در این‌صورت خواهیم داشت

$$\int_A fd\mu=\sum_{i=۱}^{\infty}\int_{A_i}f\mathrm{d}\mu.$$

قرارداد ۱. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی مجموعه اندازه‌پذیر A، انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$\int_A f\mathrm{d}\mu<\infty.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر f تابعی حقیقی با دامنه دلخواه باشد، متناظر با f برای هر x از دامنه f توابع f^- و f^+ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^-(x)=\max\{-f(x),۰\}\qquad,\qquad f^+(x)=\max\{f(x),۰\}.$$

f^- و f^+ را به ترتیب جزء منفی و جزء مثبت f می‌نامیم. در این‌صورت $f=f^+-f^-$، یعنی هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $|f|=f^+-f^-$. روشن است اگر f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه f^- و f^+ نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید (X, A, μ) یک فضای اندازه باشد. تابع f که روی X تعریف شده است را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه $\int f^-$ و $\int f^+$ هر دو متناهی باشند. در این‌صورت برای هر $A \in \mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \mathrm{d}\mu - \int_A f^- \mathrm{d}\mu.$$

۳.۱ نظریه احتمال

نظریه احتمال مطالعه رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر، نظریه احتمال به شاخه ای از ریاضیات گویند که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. هسته تئوری احتمال را متغیرهای تصادفی و فرآیندهای تصادفی و پیشامدها تشکیل می‌دهند. نظریه احتمال علاوه بر توضیح پدیده‌های تصادفی به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازد که لزوماً تصادفی نیستند ولی با تکرار زیاد دفعات آزمایش نتایج از الگویی مشخص پیروی می‌کنند، مثلاً در آزمایش پرتاب سکه یا تاس با تکرار آزمایش می‌توانیم احتمال وقوع پدیده‌های مختلف را حدس بزنیم و مورد بررسی قرار دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. **فضای احتمال** عبارت است از فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به طوری که $P(\Omega) = ۱$، Ω را فضای نمونه، اعضای $\mathcal{F}$ را پیشامد و P را اندازه احتمال می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی $A \in \mathcal{F}$ را **P-پوچ** می‌نامیم هرگاه $P(A) = ۰$.

تعریف ۳.۳.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **کامل یا تام** می‌نامیم هرگاه $\mathcal{F}$ شامل تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی P-پوچ باشد.

به روشنی، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را می‌توان با اضافه کردن زیر مجموعه‌های هر مجموعه‌ی P-پوچ به $\mathcal{F}$ کامل نمود.

تعریف ۴.۳.۱. اگر $P(A) = ۱$ می‌گوییم پیشامد A با احتمال ۱ رخ می‌دهد یا A قریب به یقین [۲] رخ می‌دهد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $(\Omega_۱, \mathcal{F}_۱)$، $(\Omega_۲, \mathcal{F}_۲)$، . . . ، $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ فضاهای اندازه پذیر باشند. زیر مجموعه های $F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n$ از $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ رابرای $F_۱ \subseteq \Omega_۱$، $F_۲ \subseteq \Omega_۲$، . . . و $F_n \subseteq \Omega_n$ راست گوشه و برای $F_۱ \in \mathcal{F}_۱$، $F_۲ \in \mathcal{F}_۲$ ، . . .، $F_n \in \mathcal{F}_n$ راست گوشه اندازه پذیر می‌نامیم. دسته راست‌گوشه‌های اندازه پذیر، یک نیم میدان روی $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ است. σ-میدان تولیدشده در $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ توسط نیم میدان راست‌گوشه‌های اندازه‌پذیر را σ-میدان حاصلضربی نامیده و با نماد $\mathcal{F}_۱ \otimes \mathcal{F}_۲ \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$ نشان می‌دهیم.

اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$، P_i یک اندازه روی $\mathcal{F}_i$ باشد، اندازه P روی نیم‌حلقه راست گوشه‌های اندازه‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n) = P_۱(F_۱) \times P_۲(F_۲) \times \cdots \times P_n(F_n).$$

[۲] almost surely

تعریف ۶.۳.۱. گیریم $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ دسته ای از زیر σ-میدان‌های $\mathcal{F}$ باشد. σ-میدان الحاقی این دسته از σ-میدان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bigvee_{\alpha\in I} U_\alpha = \sigma(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$$

از این پس، همه جا منظور از (Ω, F, P) فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ- میدان مفروض روی آنها σ- میدان بورل است و $\mathcal{B}$ نشانگر σ-میدان بورل روی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه روی $(X, \mathcal{A})$ باشند. اندازه $\mu_۱$ را نسبت به اندازه $\mu_۲$ **مطلقا پیوسته** گوییم و می‌نویسیم $\mu_۱ \ll \mu_۲$، هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (\mu_۲(A) = ۰ \Rightarrow \mu_۱(A) = ۰).$$

قضیه ۸.۳.۱. (**مشتق رادون-نیکودیم** [۳]) فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه σ-متناهی روی $(X, \mathcal{A})$ باشند به‌طوری‌که $\mu_۱ \ll \mu_۲$. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی X وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu_۱(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu_۲.$$

۱.۳.۱ متغیر تصادفی-امید ریاضی

در سراسر این رساله توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ-میدان مفروض روی آنها σ-میدان بورل است.

اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضایی احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ **متغیر تصادفی** نامیده می‌شود. معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Z, U, \ldots$ استفاده می‌کنیم.

بردار تصادفی n-بعدی $\overline{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$، تابعی است اندازه‌پذیر که دامنه آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مقادیر آن در $\mathbb{R}^n$ است یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$ داریم

$$\{\omega : \overline{X}(\omega) \in A\} = \{(X_۱, X_۲, \ldots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F},$$

که در آن $\mathcal{B}_n$، σ-میدان بورل روی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، σ- **میدان تولید شده توسط** X که بانماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-۱}(A) : A \in \mathcal{B}\}$$

تعریف ۱۰.۳.۱. اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد، تابع توزیع X که آن را با F_X نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

که در آن P_X اندازه‌ی القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

[۳] Radon-Nikodym Derivation

تعریف ۱.۳.۱۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. $\int_\Omega XdP$ را **امید ریاضی** X می‌گوییم و با نماد $E(X)$ نشان می‌دهیم.

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی، مثل $g(X)$ به‌طور طبیعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X)dP.$$

تعریف ۱.۳.۱۲. **واریانس** متغیر تصادفی X را با $\sigma^{۲}(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma^{۲}(X) = E\left[(X - E(X))^{۲}\right].$$

به طور کلی اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد و $\int\limits_\Omega |f\,(X(\omega))\,|P(\omega) < \infty$ آن‌گاه

$$E\left[f(X)\right] := \int\limits_\Omega f\,(X(\omega))\;P(\omega) = \int\limits_\mathbb{R} f(x)\,P_X(x).$$

تعریف ۱.۳.۱۳. اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را **کواریانس** می‌نامیم. (اگر دو متغیر یکی باشند کواریانس برابر واریانس خواهد شد) برای متغیرهای تصادفی X و Y که امید ریاضی آنها $E[X] = \mu$ و $E[Y] = \nu$ هستند کواریانس برابر است با

$$cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))] = E[(X - \mu)(Y - \nu)]$$

چنان‌که دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند، کواریانس آنها صفر می‌شود.

خواص کواریانس

۱. $cov(X,X) = var(X)$

۲. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

۳. برای هر $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

(آ) $cov(X,a) = ۰$

(ب) $cov(aX,bY) = abcov(X,Y)$

(ج) $cov(X+a,Y+b) = cov(X,Y)$

تعریف ۱.۳.۱۴. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آن‌گاه $E(X^r)$ (که r یک عدد طبیعی است) را **گشتاور مرتبه** r**-ام** پیرامون مبدا می‌گوییم.

تعریف ۱.۳.۱۵. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، **تابع مولد گشتاور** X را با علامت $M_X(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t) = E(\mathbf{e}^{tX})$$

تعریف ۱.۳.۱۶. دو پیشامد A و B از فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **مستقل** است هرگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

تعریف ۱.۳.۱۷. دو متغیر تصادفی $X, Y : (\Omega, F, P) \to (\mathbb{R}, B)$ را مستقل گوییم هرگاه σ-میدان‌های تولید شده توسط X و Y یعنی F_X و F_Y مستقل باشند، به این معنا که برای هر $A \in F_X$ و $B \in F_Y$ داشته باشیم.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$(F_X = \{X^{-1}(B) : B \in \beta\})$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۱.۳.۱۸. متغیر تصادفی X را انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$EX < \infty$$

باشد، به عبارت دیگر امید ریاضی متغیر تصادفی X متناهی باشد.

نتیجه ۱.۳.۱۹. اگر $E(|X|) < \infty$ باشد، آن‌گاه $EX < \infty$ می‌باشد.

با توجه به تعریف ۱.۳.۱۸ و نتیجه ۱.۳.۱۹ نتیجه می‌گیریم که متغیر تصادفی X انتگرال‌پذیر است، اگر $|X|$ انتگرال‌پذیر باشد.

۱.۳.۲ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش فضای احتمال مفروض (Ω, F, P) است. همچنین σ- میدان مفروض روی فضاهای اقلیدسی σ- میدان بورل است. خانواده $\{X_t\}_{t \in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک (Ω, F, P) را **فرآیند تصادفی** [۴] می‌نامیم (مجموعه اندیس‌گذار I می‌تواند شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد).

فرآیند تصادفی $\{X(t), t \in T\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است. یعنی، به ازاء هر $t \in T$، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. مجموعه اندیس‌گذار T را زمان نامیده و $X(t)$ را حالت فرآیند [۵] در زمان t می‌خوانیم. اگر مجموعه اندیس‌گذار T شمارا باشد، فرآیند را گسسته زمان [۶] نامیده، و اگر T پیوسته باشد فرآیند را پیوسته زمان [۷] می‌نامیم. مقادیری که متغیر تصادفی $X(t)$ اختیار می‌کند را فضای حالات [۸] نامیده و این فضا می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. گوییم فرآیند دارای نموهای مستقل [۹] است، هرگاه به ازاء هر دنباله از اندیس‌ها مانند $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$، متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقل از هم بوده، و گوییم دارای نموهای ایستا [۱۰] است اگر $X(t+s) - X(t)$ برای تمامی t های متعلق به T دارای توزیع ثابت باشد.

---
[۴] Stochastic Process
[۵] Process State
[۶] Discrete-Time
[۷] Continuouse-Time
[۸] State Space
[۹] Independent Increment
[۱۰] Stationary Increment

۳.۳.۱ امید شرطی

فرض کنید (Ω, F, P) فضایی احتمال باشد و فرض کنید D زیر σ- میدانی از F و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. **امید** Y **به شرط** D یک متغیر تصادفی D- اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Y|D)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in D, \quad \int_D E(Y|D)dP = \int_D YdP.$$

برای متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دلخواه Y ، امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(Y|D) = E(Y^+|D) - E(Y^-|D),$$

که در آن برای هر ω، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), \circ\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), \circ\}$.

خواص امید شرطی

۱. اگر $X \geq \circ$ آن‌گاه

$$E(X|D) \geq \circ, \qquad a.s.$$

۲. $E(X+Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \qquad a.s.$.

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \qquad a.s.$$

۴. اگر $D = \{\Omega, \emptyset\}$ آنگاه

$$E(X|D) = E(X), \qquad a.s.$$

۵. اگر $D_۱ \subseteq D_۲$

$$E(E(X|D_۲)|D_۱) = E(X|D_۱), \qquad a.s.$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X), \qquad a.s.$$

۴.۳.۱ انواع همگرایی

تعریف ۲۰.۳.۱. دنباله $\{X_n : n \geq ۱\}$ ازمتغیرهای تصادفی را **همگرای نقطه به نقطه** گوییم،هرگاه به ازای هر $\omega \in \Omega$ دنباله عددی $\{X_n(\omega) : n \geq ۱\}$ همگرا باشد.مقدار $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ مسلما به ω بستگی دارد.لذا به ازای هر ω از Ω مقداری که از $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ مشخص می‌شود در $\mathbb{R}$ به دست می‌آید.اگر X حد نقطه به نقطه $\{X_n\}$ باشد از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$$X_n \xrightarrow{p.w} X.$$

تعریف ۲۱.۳.۱. فرض کنید R خاصیتی از اعضای فضای نمونه‌ای باشد.البته ممکن است چنین نباشد که تمام اعضای فضای نمونه‌ای Ω دارای این خاصیت باشند.می‌گوییم این خاصیت تقریبا مطمئن برقرار است .هرگاه

اولا -نقاطی که دارای این خاصیت نیستند یک پیشامد باشند.

ثانیا -احتمال آن پیشامد برابر صفر باشد.

حال فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشند .گوییم X_n **تقریبا مطمئن** به X همگراست. و می‌نویسیم

$$X_n \xrightarrow{a.s} X$$

اگر

$$\mathbb{P}(\omega : X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)) = ۱.$$

تعریف ۲۲.۳.۱. فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشند .گوییم X_n **در احتمال** به X همگراست. ومی‌نویسیم

$$X_n \xrightarrow{p} X$$

هرگاه به ازای ، $\epsilon > ۰$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = ۰.$$

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنید $\{\Phi_n\}$ دنباله‌ای از اندازه‌های احتمال روی $\mathbb{R}$ باشند.می‌گوییم Φ_n **بطور ضعیف** به Φ همگراست .و می‌نویسیم

$$\Phi_n \xrightarrow{w} \Phi$$

هرگاه برای هر تابع پیوسته وکراندار f داشته باشیم،

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\Phi_\mathrm{n} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\Phi.$$

۵.۳.۱ پیچش

تعریف ۲۴.۳.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توابع چگالی $f(x)$و$g(x)$ که روی هر عدد حقیقی مثبت تعریف شده باشند. **پیچش** [۱۱] این دو تابع را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f * g) = \int_{۰}^{x} f(\xi) g(x-\xi) \mathrm{d}\xi, \quad \xi + y = x.$$

[۱۱] Convulotion

مثال :فرض کنید $f(x) = e^{ax}, g(x) = e^{bx}$ با ثابت های aوb،آنگاه برای $a \neq b$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\circ}^{x} e^{a\xi} e^{b(x-\xi)} \mathrm{d}\xi \\ &= e^{(bx)} \int_{\circ}^{x} e^{(a-b)\xi} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{e^{bx}}{a-b} (e^{(a-b)\xi}) \mid_{\xi=\circ}^{\xi=x} \\ &= \frac{e^{bx}(e^{(a-b)x} - ۱)}{a-b} \\ &= \frac{e^{ax} - e^{bx}}{a-b}\end{aligned}$$

تعریف ۲۵.۳.۱. فرض کنید μوν دو اندازه احتمال روی فضای $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d)))$ باشند . پیچش این دو اندازه را برای هر $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \mu * \nu : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mu * \nu)(B) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{I}_B(x+y)(\mu \times \nu)(\mathrm{d}(x,y)). \end{cases}$$

مثال ۲۶.۳.۱. فرض کنید XوYدو متغیر تصادفی مستقل وتعریف شده روی $\mathbb{R}^d$ باشند وبه ترتیب دارای توزیع های μوν باشند .آنگاه توزیع متغیر تصادفی $X+Y$ بوسیله پیچش توزیع آنها بدست می آید.

برای هر، $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y \in B) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X \in B - y | Y = y)\nu(\mathrm{dy}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(B-y)\nu(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\beta}(x+y)(\mu \times \nu)(\mathrm{d}(x,y)) = \mu * \nu\end{aligned}$$

ملاحظه ۲۷.۳.۱. اگر μ و ν دواندازه احتمال روی $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$ باشند.آنگاه پیچش این دو اندازه، یک اندازه روی $\mathbb{R}^d$ خواهدبود.

برهان.برای اندازه بودن $\mu * \nu$ داریم

۱. $\mu * \nu(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\emptyset}(x+y)(\mu \times \nu)(\mathrm{d}(x,y)) = \circ$

۲. فرض کنید $\{B_i\}$ ها، $B_i \in \beta(\mathbb{R}^d)$ مجموعه‌های دوبه دو مجزا از هم باشند.بطوری که

$B=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. آنگاه

$$\begin{aligned}\mu*\nu(B)=&\mu*\nu(\cup_{i=1}^{\infty}B_i)\\ &=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\mathbb{I}_{\cup_{i=1}^{\infty}B_i}(x+y)(\mu\times\nu)(\mathrm{d}(x,y))\\ &=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{I}_{B_i}(x+y)(\mu\times\nu)(\mathrm{d}(x,y))\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\mathbb{I}_{B_i}(x+y)(\mu\times\nu)(\mathrm{d}(x,y))\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\mu*\nu(B_i)\end{aligned}$$

قضیه ۲۸.۳.۱. مجموعه $M_1\{\mathbb{R}^d\}$ تمام اندازه‌های تعریف شده روی $\mathbb{R}^d$ رادر نظر بگیرید .آنگاه این مجموعه نسبت به پیچش دارای خواص زیر است.

الف. خاصیت جابجایی $\quad \mu*\nu=\nu*\mu$

ب. خاصیت شرکت پذیری $\quad \mu*(\nu*\lambda)=(\mu*\nu)*\lambda$

ج. اگر δ_0 اندازه دیراک باشد دراینصورت $\quad \mu*\delta_0=\delta_0*\mu=\mu$

برهان.به[۹]رجوع شود.

۶.۳.۱ تابع مشخصه

تعریف ۲۹.۳.۱. تابع مشخصه یک اندازه احتمال مانند μ روی $\mathbb{R}^d$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{cases}\hat{\mu}:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}\\ \hat{\mu}(u)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{iux}\mu(dx)\end{cases}$$

تعریف ۳۰.۳.۱. تابع مشخصه یک متغیر تصادفی مانند X که از روی تابع مشخصه مربوط به توزیع آن یعنی $\hat{\mathbb{P}_X}$ تعریف می شود را با ϕ_X نشان میدهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\phi_X(u)=\hat{\mathbb{P}_X}(u)=E[e^{iuX}]$$

در قضیه زیر بعضی ازخواص تابع مشخصه را بیان خواهیم کرد.

قضیه ۳۱.۳.۱. فرض کنید μ و ν و μ_n توزیع های احتمال روی $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$ ، و X و Y و Y_n متغیرهای تصادفی روی $\mathbb{R}^d$ باشند .آنگاه

۱. اگر تابع مشخصه $\mu * \nu$ را با نماد $\widehat{\mu * \nu}$ نشان دهیم ،آنگاه داریم

$$\widehat{\mu * \nu}(u) = \hat{\mu}(u) * \hat{\nu}(u), \qquad \hat{\delta_\circ}(u) = ۱.$$

۲. اگر $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ آنگاه $\mu = \nu$

۳. $\hat{\mu}$ یک تابع پیوسته یکنواخت است ، $\hat{\mu}(\circ) = ۱$ همچنین $\hat{\mu}$ متناهی و نامنفی است .یعنی اینکه برای هر $u_۱, u_۲, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^d$ و $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n \in \mathbb{C}$ خواهیم داشت

$$\sum_{j=۱}^{n} \sum_{k=۱}^{n} \hat{\mu}(u_j - u_k)\xi_j \xi_k \geq \circ.$$

۴. اگر $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ یک نگاشت باشد بطوری که $\phi(\circ) = ۱$ وهمچنین ϕ در $u = \circ$ پیوسته ،متناهی ونامنفی باشد، آنگاه μ تابع مشخصه یک توزیع روی $\mathbb{R}^d$ خواهد بود.

۵. اگر μ_n بطور ضعیف به μهمگرا باشد آنگاه $\hat{\mu_n}$ بطور نقطه به نقطه به $\hat{\mu}$ همگرا می‌شود.وبر عکس اگر $\hat{\mu_n}$ بطور نقطه به نقطه به $\hat{\mu}$ همگراباشد آنگاه μ_n بطور ضعیف به μ همگرا می شود.

۶. اگر $\phi \xrightarrow{p.w} \mu_n$ ، همچنین ϕ در $u = \circ$ پیوسته باشد آنگاه ϕ تابع مشخصه یک توزیع روی $\mathbb{R}^d$ خواهد بود.

۷. اگر ، $X = (X_۱, X_۲, \cdots, X_n)$ یک متغیر تصادفی روی $\mathbb{R}^{nd}$ باشد. در اینصورت $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ مستقل هستند اگر وفقط اگر برای هر ، $Z_j \in \mathbb{R}^d$، $Z = (Z_۱, Z_۲, \cdots, Z_n)$ داشته باشیم.

$$\hat{\mathbb{P}_X}(z) = \prod_{j=۱}^{n} \mathbb{P}_{X_j}(z_j)$$

۸. اگر XوY متغیر های تصادفی مستقل روی $\mathbb{R}^d$ باشند آنگاه تابع مشخصه $X + Y$ بصورت زیر بدست می‌آید

$$\hat{\mathbb{P}}_{X+Y}(u) = \hat{\mathbb{P}_X}(u)\hat{\mathbb{P}_Y}(u).$$

برهان .به [۶] و[۹] مراجعه شود.

مثال ۳۲.۳.۱. اگر $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}X^۲}$ تابع احتمال متغیر تصادفی نرمال باشد آنگاه تابع مشخصه آن بصورت زیر خواهد بود.

$$\Phi_X(t) = e^{-\frac{۱}{۲}t^۲}$$

زیرا طبق تعریف تابع مشخصه داریم

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) = E(e^{itX}) =& E[\cos(tX) + i\sin(tX)] && (۱.۱)\\ =& E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)] && (۲.۱)\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tX)f(x)dx + \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tX)f(x)dx}_{\circ} && (۳.۱) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tX)f(x)dx \qquad (۴.۱)$$

حال با مشتق گیری از طرفین رابطه(۱.۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Phi_X(t) = E[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{itX}] =& E[iXe^{itX}]\\ =& E[iX(\cos(tX) + i\sin(tX))]\\ =& -iE[X\cos(tX)] - E[X\sin(tX)]\\ =& \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty} X\cos(tX)f(x)dx}_{\circ} - \int_{-\infty}^{\infty} X\sin(tX)f(x)dx\\ =& -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tX)\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}X^۲}dx\\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tX)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)dx\\ =& \underbrace{\sin(tX)f(x)]_{-\infty}^{\infty}}_{\circ} - \int_{-\infty}^{\infty} tX\cos(tX)f(x)dx\\ =& -t\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tX)f(x)dx \end{aligned}$$

حال باتوجه به معادله ۴.۱ خواهیم داشت . $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Phi_X(t) = -t\Phi_X(t)$ بنابراین نتیجه می‌شود

$$\Phi_X(t) = e^{-\frac{۱}{۲}t^۲}$$

۷.۳.۱ زمان توقف

تعریف ۳۳.۳.۱. نگاشت $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ را نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_n$ **زمان توقف** [۱۲] می نامیم، اگر برای هر، $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ داشته باشیم $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

[۱۲] Stopping time

قضیه ۳۴.۳.۱. فرض کنید $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$. آنگاه τ نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_n$ یک زمان توقف است اگر وتنها اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$

برهان.ابتدا فرض کنید τ یک زمان توقف باشد. نشان می دهیم برای هر، $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

.

زیرا $\{\tau = ۰\} = \{\tau \leq ۰\}$ همچنین برای هر، $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau \leq n - ۱\}^{\complement}}_{\in \mathcal{F}_{n-۱} \subset \mathcal{F}_n}$$

بنابراین $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

حال برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید برای هر، $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. در اینصورت خواهیم داشت

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{۰ \leq k \leq n} \{\tau = k\}.$$

اما برای $k \leq n$ پیشامد $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. از طرفی $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ این نشان دهنده آنست که

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

تعریف ۳۵.۳.۱. $\tau_A := inf\{t > ۰ : X_t \in A\}$ {که در آن A یک مجموعه بورل است} را **اولین زمان برخورد** می‌نامیم.

تعریف ۳۶.۳.۱. برای هر فرایند از راست پیوسته و دارای حد چپ، σ **-جبر متوقف شده** $\mathcal{F}_T$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall \quad t \geq ۰\}.$$

۸.۳.۱ مارتینگل

تعریف ۳۷.۳.۱. یک مارتینگل [۱۳] نسبت به فیلتر $\mathcal{F}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مانند ξ_n است .بطوری که

۱. برای هر، $n \in \mathbb{Z}^+$ آنگاه ξ_n انتگرال‌پذیر باشد.یعنی $E(|\xi_n|) < \infty$

۲. ξ_n نسبت به $\mathcal{F}$ اندازه‌پذیر باشد.در این حالت می‌گوییم ξ_n نسبت به $\mathcal{F}$ سازگار [۱۴] است.

۳. وبرای هر، $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم

$$E[\xi_{n+۱}|\mathcal{F}_n] = \xi_n \quad (a.s.)$$

[۱۳] Martingale
[۱۴] adapted

نتیجه ۳۸.۳.۱. فرض کنید $\{\xi_n\}$ یک مارتینگل باشد.برای هر $n > m$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E(\xi_n|\mathcal{F}_m) =& E(E(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_m) \qquad (a.s) \\ &= E(\xi_{n-1}|\mathcal{F}_m) \qquad (a.s) \\ &= \cdots \\ &= E(\xi_{m+1}|\mathcal{F}_m) \qquad (a.s) \\ &= \xi_m \qquad (a.s) \end{aligned}$$

مثال ۳۹.۳.۱. فرض کنید $X_0, X_1, \cdots$ متغیرهای تصادفی انتگرال‌پذیر،مستقل از هم ودارای میانگین صفر باشند.و همچنین برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ فرض کنید $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)$ قرار دهید

$$.\xi_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n)$$

در اینصورت روشن است که ξ_n نسبت به $\mathcal{F}$ سازگار است.وهمچنین

۱. ξ_n انتگرال‌پذیر است.زیرا

$$\begin{aligned} E(|\xi_{n+1}|) =& E(X_0 + X_1 + \cdots + X_n) \\ &\leq E(|X_0|) + E(|X_1|) + \cdots + E(|X_n|) \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

۲. همچنین داریم

$$\begin{aligned} E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) =& E(X_{n+1} + \xi_n|\mathcal{F}_n) \\ &= E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + E(\xi_n|\mathcal{F}_n) \\ &= E(X_{n+1}) + \xi_n \\ &= \xi_n \end{aligned}$$

واین نشان می‌دهد ξ_n یک مارتینگل نسبت به $\mathcal{F}_n$ است.

تعریف ۴۰.۳.۱. اگر در تعریف مارتینگل شرایط تعریف شده برقرار باشد و بجای خاصیت سوم داشته باشیم
برای هر، $n \in \mathbb{Z}^+$

$$E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)] > \xi_n \quad (a.s.)$$

آنگاه ξ_n یک زیر مارتینگل نامیده میشود.

قضیه ۴۱.۳.۱. فرض کنید X_t مارتینگل یا یک زیر مارتینگل و ϕ یک تابع محدب و $E(|\phi(X_t)|) < \infty$ باشد.آنگاه $\phi(X_t)$ یک زیر مارتینگل خواهد بود.

برهان:فرض کنید X_t مارتینگل یا یک زیر مارتینگل باشد در اینصورت

$$E(\phi(X_t)|\mathcal{F}_s) \overset{\text{Jencen}}{\geq} \phi(X_t|\mathcal{F}_s) \geq \phi(X_s).$$

۹.۳.۱ قدم زدن تصادفی

فرض کنید c عددی طبیعی و بزرگتر ازیک باشد. ذره ای را در نظر بگیرید که ابتدا در وضعیت j (عددی صحیح درداخل بازه $[۰, c]$) قرار دارد.هر بار با احتمال p یک گام به طرف راست و با احتمال $q = ۱ - p$ یک گام به طرف چپ بر می دارد.به محض اینکه ذره به صفر یا به c رسید همان جا متوقف می شود.همچنین فرض کنید هرگام مستقل از گام دیگر برداشته می شود.در صورتیکه X_n را موقعیت ذره پس از گام nام تعریف کنیم، چنین فرایندی را قدم زدن تصادفی [۱۵] می نامیم.

قضیه ۴۲.۳.۱. در قدم زدن تصادفی در فاصله $[۰, c]$ اگر μ_j احتمال برخورد ذره به صفر قبل از c به شرط شروع از j بگیریم آنگاه داریم

$$\mu_j = \begin{cases} \frac{c-j}{c} & p = q \\ \frac{(\frac{q}{p})^j - (\frac{q}{p})^c}{۱ - (\frac{q}{p})^c} & p \neq q \end{cases}$$

برهان .به [۱۷]مراجعه شود.

مثال ۴۳.۳.۱. فرض کنید فرد A دارای a واحد پول و فرد B دارای b واحد پول باشند.این دو نفر متواليا بر سر یک واحد پول بازی می کنند.درهربازی شانس برد A برابر p و شانس برد B برابر q است و بازی تا ورشکستگی یکی از این دو ادامه می یابد.با استفاده از قدم زدن تصادفی می توان احتمال ورشکستگی هر یک را محاسبه کرد.

فرض کنید ، X_n : دارایی فرد A پس از n بار بازی باشد.

پس مسئله به صورت قدم زدن تصادفی در فاصله $[۰, a + b]$ خواهد شد که شروع حرکت از a است.

لذا داریم

$\mu_a =$ احتمال ورشکستگی A $\qquad$ $\nu_b =$ احتمال ورشکستگی B

در اینصورت با فرض $p = q$ از قضیه (۴۲.۳.۱) خواهیم داشت

$$\mu_a = \frac{b}{a+b} \qquad \nu_b = \frac{a}{a+b}.$$

از اینکه $\mu_a + \nu_b = ۱$ نتیجه می گیریم در بازی دو فرد A و B(با هر مقدار موجودی اولیه و با هر احتمال برد هریک)دیر یا زود یکی ورشکست خواهد شد و همه موجودی خود را خواهد باخت.

[۱۵] Random walk

فصل ۲

فرایند لوی

۱.۲ معرفی فرایند لوی ومعرفی چند فرایند و رابطه آن‌ها با فرایند لوی

نام فرآیند لوی برگرفته از نام یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان قرن بیستم به نام **پل لوی** می‌باشد . او در سال ۱۸۸۶ در پاریس به دنیا آمد و در دانشکده پلی تکنیک پاریس مدرک دکتری خود را در رشته ریاضی دریافت کرد . سپس در سال ۱۹۱۳ استاد همان دانشگاه شد.از ایشان می‌توان به عنوان یکی از پیشگامان تئوری احتمال جدید نام برد که در آن زمان در مرحله آغازین خودش بود.او در تئوری فرآیند های تصادفی کشف‌های زیادی انجام داد.قضیه حد مرکزی را مستقل از روش لیندبرگ که از تئوری پیچش استفاده می‌کرد،با استفاده از توابع مشخصه اثبات کرد.

در طی جنگ جهانی اول لوی در بخش توپ‌خانه ارتش خدمت می‌کرد و ذهن او درگیر استفاده از مهارت های ریاضی در حل مسائل مربوط به دفاع بر علیه حملات هوایی بود.

در سال ۱۹۶۳ به عنوان یک عضو افتخاری انجمن ریاضی لندن انتخاب شد .ودر سال بعدی به عنوان یکی از اعضای علوم آکادمیک انتخاب شد. او پس از سال ها خدمت به ریاضیات در سال ۱۹۷۱ در پاریس درگذشت.

در این بخش ابتدا به معرفی فرایند لوی خواهیم پرداخت و در ادامه رابطه آن را با توزیع های بی نهایت بار تقسیم پذیر ، فرایندهای پواسون و پواسون مرکب بیان خواهیم کرد .

تعریف ۱.۱.۲. به فرآیند تصادفی، $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}))$ **فرآیند لوی** [1] گفته می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱. $X_\circ = \circ$

۲. X_t یک فرایند ایستا باشد ،یعنی یک رشد ثابت داشته باشد. به عبارت دیگر برای هر $h \geq \circ$ آنگاه $X_{t+h} - X_t$ هم توزیع X_h باشد. یعنی اینکه $X_{t+h} - X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_h$. خاصیت رشد ثابت از فرایندهای تصادفی خاصیتی است که نشان می دهد که توزیع احتمال از یک فرایند تصادفی فقط به بازه زمانی که اتفاق می افتد بستگی دارد نه به زمان مطلق.به عبارت دیگر اگر X فرایندی باشد که دارای خاصیت رشد ثابت باشد، آنگاه برای هر، $s < t$ توزیع $X_t - X_s$ با توزیع X_{t-s} یکسان خواهد بود.به این معنی که توزیع احتمال برای $X_t - X_s$ فقط به طول بازه زمانی $t - s$ بستگی دارد وهر بازه زمانی که طول بازه آن برابر $t - s$ باشد توزیع احتمال یکسان با آن خواهد داشت.

به عنوان مثال فرض کنید که $[t_\circ, t_۱]$ و $[t_۲, t_۳]$ بازه های زمانی متمایز از هم باشند.حال اگر طول این دو بازه با هم برابر باشد و فرایند X دارای خاصیت رشد ثابت باشد، آنگاه توزیع $X_{t_۱} - X_{t_\circ}$ با توزیع $X_{t_۳} - X_{t_۲}$ یکسان خواهد بود.

۳. X_t رشد مستقل داشته باشد. یعنی اگر، $\circ \leq t_۱ \leq t_۲ \cdots \leq t_n$ آنگاه متغیرهای تصادفی،

$$X_{t_۲} - X_{t_۱}, X_{t_۳} - X_{t_۲}, \cdots X_{t_n} - X_{t_{n-۱}}$$

از هم مستقل باشند.

۴. X_s دراحتمال همگرا به X_t باشد. یعنی برای هر، $\epsilon > \circ$

$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}\{|X_t - X_s| > \epsilon\} = \circ.$$

۵. هر مسیر نمونه ای از X_t از راست پیوسته و دارای حد چپ باشد.

□

۲.۲ توزیع‌های بی نهایت تقسیم پذیر

در این بخش نشان خواهیم داد که بین فرایند لوی و توزیع بی‌نهایت تقسیم پذیر رابطه بسیار نزدیکی وجود دارد. نشان خواهیم داد اگر $X = \{X_t\}_{t \geq \circ}$ یک فرایند لوی باشد آنگاه برای هر t، X_t متغیر تصادفی بینهایت تقسیم پذیر خواهد بود. و بر عکس اگر μ یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر باشد در اینصورت فرایند لوی $X = \{X_t\}_{t \geq \circ}$ وجود دارد بطوری که توزیع X_t برابر μ^t خواهد شد. یعنی اینکه توزیع X بوسیله توزیع μ نمایش داده می شود .بنابراین مطالعه در مورد توزیع‌های بی‌نهایت تقسیم‌پذیر به بهتر شناختن فرایندهای لوی خواهد انجامید .وبرعکس

[1] levy processes

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید، $n \in \mathbb{N}$ و $\mu \in M_1(\mathbb{R}^d)$. **مرتبه** μ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\mu^n = \underbrace{\mu * \mu * \cdots * \mu}_{n \quad time}, \qquad \mu^\circ = \delta_\circ.$$

تعریف ۲.۲.۲. توزیع احتمال μ روی $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$ **بی نهایت تقسیم‌پذیر** [۲] نامیده می شود اگر و فقط اگر ریشه nام پیچش یک توزیع مانند ν باشد .به عبارت دیگر برای هر ، $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\nu = \mu^{(\frac{1}{n})}$. به بیان دیگر برای هر ، $n \in \mathbb{N}$ یک توزیع احتمال وجود داشته باشد بطوریکه $\mu = \nu^n$.

همچنین متغیر تصادفی X روی $\mathbb{R}^d$ بی نهایت بار تقسیم پذیر نامیده می شود ،اگر و فقط اگر توزیع آن $\mathbb{P}_X$ این چنین باشد.

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید μ توزیع نرمال با میانگین بردار $\gamma \in \mathbb{R}^d$ و کواریانس ماتریس $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ باشد. آنگاه تابع مشخصه این توزیع بصورت

$$\hat{\mu}(u) = exp(i < u, \gamma > -\frac{1}{2} < u, \Sigma u >)$$

خواهد بود. روشن است که عبارت

$$exp(\frac{1}{n}(i < u, \gamma > -\frac{1}{2} < u, \Sigma u >))$$

ریشهnام $\hat{\mu}$ است، که خودش تابع مشخصه یک توزیع نرمال با میانگین $\frac{1}{n}\gamma$ و کواریانس ماتریکس $\frac{1}{n}\Sigma$ خواهد بود. بنابراین متغیر تصادفی با توزیع نرمال یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

مثال ۴.۲.۲. فرض کنید μ یک توزیع پواسون بامیانگین λ باشد .یعنی برای هر ، $k = 0, 1, \cdots$ خواهیم داشت

$$\mu(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

آنگاه تابع مشخصه آن بصورت $\hat{\mu}(u) = \exp(\lambda(e^{iu} - 1))$ خواهد بود.روشن است که $\exp(\frac{\lambda}{n}(e^{iu} - 1))$ ریشه n ام ، $\hat{\mu}$ خواهدبود.و همچنین تابع مشخصه یک توزیع پواسون با میانگین $\frac{\lambda}{n}$ است .بنابراین متغیر تصادفی با توزیع پواسون ،توزیع بی‌نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

لازم به ذکر است که در مورد فرایند پواسون در بخش مربوط به فرایندهای شمارشی به تفصیل صحبت خواهد شد.

قضیه ۵.۲.۲. اگر تابع مشخصه توزیع μ رابا $\hat{\mu}$ نشان دهیم آنگاه توزیع μ بینهایت تقسیم پذیر است اگر وفقط اگر برای هر ، $n \in \mathbb{N}$، $\hat{\mu}$ ریشه nام پیچش ، تابع مشخصه یک توزیع مانند ν باشد.به عبارت دیگر اگر $\mu = \nu^n$ آنگاه $\hat{\mu} = \hat{\nu}^n$.

برهان.به[۱۸] رجوع شود.

این قضیه به ما کمک می کند در بعضی مواقع برای آنکه نشان دهیم یک توزیع بی نهایت بار تقسیم پذیر است صرفا کافیست نشان دهیم تابع مشخصه آن بی نهایت بار تقسیم پذیر است.

[۲] Infinitely divisible

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ یک تابع اکیدا مثبت باشد بطوری که برای هر s و t داشته باشیم $\mu(t+s) = \mu(t)\mu(s)$. و μ روی مجموعه‌های فشرده کراندار باشد. آنگاه برای $\lambda \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت $\mu(t) = e^{\lambda t}$.

برهان. قرار دهید $\lambda = \ln(\mu(۱))$. و تعریف کنید $\nu(t) = e^{-\lambda t}\mu(t)$. کافی است نشان دهیم $\nu \cong ۱$. زیرا در اینصورت خواهیم داشت

$$e^{-\lambda t}\mu(t) = ۱ \Longrightarrow \mu(t) = \frac{۱}{e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}.$$

روشن است

$$\nu(۱) = e^{-\lambda}\mu(۱) = e^{-\ln\mu(۱)}\mu(۱) = \frac{۱}{e^{\ln\mu(۱)}}\mu(۱) = \frac{\mu(۱)}{\mu(۱)} = ۱.$$

حال اگر $q \in \mathbb{N}$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\nu(q) = e^{-\lambda q}\mu(q) =& e^{-\lambda q}\underbrace{\mu(۱)\times\mu(۱)\times\cdots\times\mu(۱)}_{q \quad \text{times}}\\ &= e^{-\lambda q}\mu(۱)^q = (e^{-\lambda.\mu(۱)})^q\\ &= \nu(۱)^q = ۱\end{aligned}$$

حال برای $\frac{۱}{q}, q \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت

$$۱ = \nu(۱) = \nu(\frac{q}{q}) = \nu(\frac{۱}{q})^q \Longrightarrow \nu(\frac{۱}{q}) = \sqrt[q]{۱} = ۱.$$

اگر $(q \neq ۰)$, $\frac{p}{q}$ یک عدد گویا باشد آنگاه

$$\nu(\frac{p}{q}) = \nu(\frac{۱}{q})^p = (۱)^p = ۱.$$

حال فرض کنید $t \geq ۰$ باشد .بطوری که نتوان t را بصورت یک عدد گویا نوشت . نشان می‌دهیم دراین حالت نیز $\nu(t) = ۱$.

ابتدا فرض کنید $\nu(t) \neq ۱$، $\nu(t) = c \geq ۰$. در اینصورت خواهیم داشت

$$\nu(nt) = e^{-\lambda nt}\mu(nt) = e^{-\lambda nt}\mu(\underbrace{t+t+\cdots+t}_{n \quad times})$$

$$= e^{-\lambda nt}\underbrace{\mu(t)\mu(t)\cdots\mu(t)}_{n \quad times} = (e^{-\lambda t}\mu(t))^n = (c)^n.$$

بنابراین

$$\nu(nt) = c^n$$

حال وقتی n به بی نهایت میل کند ،آنگاه مقدار c^n نیز به بی نهایت میل می کند.که این با کراندار بودن ν در تناقض است.

حال فرض کنید $\nu(t) = c < \circ$. در اینصورت انتخاب کنید $N \in \mathbb{N}$ بطوری که $N > nt$. در اینصورت خواهیم داشت $\nu(N - nt) = (-c)^n \longrightarrow \infty$. یعنی در این حالت نیز وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند ν می تواند هر مقدار دلخواه بزرگ را اختیار کند .حال فرض کنید L یک مقدار بزرگ باشد،بطوری که $\nu(t) = L$. آنگاه برای هر عدد گویای $\frac{p}{q}$ داریم $\nu(t - \frac{p}{q}) = L$. پس ν می تواند هر مقداراز L راروی تمامی بازه ها اختیار کند که این با کراندار بودن ν در تناقض است پس باید $\nu = ۱$.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دوتوزیع بی‌نهایت تقسیم پذیر و X و Y دو متغیر تصادفی بی نهایت تقسیم پذیر و مستقل از هم باشند.آنگاه

۱. پیچش دو توزیع بی نهایت تقسیم پذیر خود یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

۲. مجموع دو متغیر مستقل و بی نهایت بار تقسیم پذیر خود یک متغیر تصادفی بی نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

برهان (۱).فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو توزیع بی نهایت تقسیم پذیر باشند.بنابراین توزیع های $\nu_۱$ و $\nu_۲$ وعددهای طبیعی n و m وجود دارند به طوری که $\mu_۱ = \nu_۱^n$، $\mu_۲ = \nu_۲^m$. حال با فرض $n \geq m$ خواهیم داشت،

$$\mu_۱ * \mu_۲ = (\nu_۱)^n * (\nu_۲)^m = (\nu_۱ * \nu_۲)^m, \qquad m = \inf\{m, n\}$$

یعنی عددی مانند m و توزیع $\nu_۱ * \nu_۲$ یافت شد بطوری که ، $\mu_۱ * \mu_۲ = (\nu_۱ * \nu_۲)^m$. پس توزیع $\mu_۱ * \mu_۲$ بی نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

برهان ۲.فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی بی نهایت تقسیم پذیر ومستقل از هم باشند.بنابراین خواهیم داشت $P_X = {\mu_۱}^n$، $P_Y = {\mu_۲}^m$. اگر $\hat{P}$ توزیع القاءشده توسط بردار تصادفی (X, Y) باشد آنگاه خواهیم داشت ،

$$\hat{P} = P_{X+Y} = P_X . P_Y = {\mu_۱}^n * {\mu_۲}^m = (\mu_۱ * \mu_۲)^m.$$

پس داریم

$$\hat{P} = (\mu_۱ * \mu_۲)^m, \qquad m = \inf\{m, n\}$$

.

قضیه ۸.۲.۲. ۱. اگر μ یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشد.آنگاه تابع پیوسته و یکتا

$$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

وجود دارد، بطوری که

$$f(\circ) = \circ \qquad , \hat{\mu}(u) = e^{f(u)}.$$

۲. اگر μ یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیرباشد آنگاه ریشه تلفیقیnام آن یکتاست .به عبارت دیگر یک توزیع یکتا مانند ν وجود دارد بطوری که، $\mu = \nu^n$.

۳. اگر $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از توزیع های بی نهایت تقسیم پذیر باشد . دراینصورت اگر $\mu \longrightarrow \mu_n$ آنگاه μ نیز یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

برهان. به[۱۸]رجوع شود.

ملاحظه ۹.۲.۲. می دانیم اگر μ یک توزیع بی‌نهایت تقسیم پذیر باشد آنگاه $\mu^{\frac{1}{n}}$ ریشه nام پیچش آن است و این ریشه nام پیچش یکتاست .حال اگر تعریف کنیم $\mu^{0} = \delta_0$ (اندازه دیراک در صفر). همچنین برای هر عدد گویای $\frac{p}{q} \geq 0$ ، تعریف کنید

$$\mu^{\frac{p}{q}} = (\mu^{\frac{1}{q}})^p$$

حال برای بسط دادن این مفهوم برای هر عدد حقیقی نامنفی قضیه زیر می‌تواند راه‌گشا باشد.

قضیه ۱۰.۲.۲. اگر μ یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر باشد ، آنگاه برای هر $t \geq 0$، μ^t یک توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر خواهد بود.

برهان . فرض کنید μ توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر باشد.قبلا برای هر، $n \in \mathbb{N}$ تعریف کردیم $\mu^{\frac{1}{n}}$. بنابراین $\mu^{\frac{1}{n}}$ خودش یک توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر خواهد بود.چون برای هر، $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{\mu}(u)^{\frac{1}{n}} = (\hat{\mu}(u)^{\frac{1}{nk}})^k$$

حال اگر $\frac{m}{n}$ یک عدد گویا باشد

$$\hat{\mu}(u)^{\frac{m}{n}} = (\hat{\mu}(u)^{\frac{1}{n}})^m$$

این نشان می‌دهد اگر t یک عدد گویا باشد آن گاه μ^t بی‌نهایت تقسیم‌پذیر خواهد بود.

حال فرض کنیم t یک عدد گویا نباشد آنگاه دنباله‌ای از اعداد گویا مانند q_n وجود دارد که به t همگراست چون q_n گویاست پس $\hat{\mu}(u)^{q_n}$ توزیع بی‌نهایت تقسیم پذیر خواهد بود. ولی

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(u)^{q_n} \longrightarrow \hat{\mu}(u)^t$$

بنابراین با توجه به قضیه (۳۱.۳.۱) روشن است که μ^t بی‌نهایت تقسیم پذیر خواهد بود.

قضیه ۱۱.۲.۲. فرض کنید $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی روی $\mathbb{R}^d$ باشد.آنگاه برای هر، $t \geq 0$، X_t یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر روی $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$ خواهد بود .و بیشتر آنکه اگر، μ توزیع X_1 باشد آنگاه μ^t توزیع X_t خواهد بود.

برهان:برای $t \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید

$$X_t = (X_{\frac{t}{n}} - X_0) + (X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}) + \cdots + (X_{\frac{tn}{n}} - X_{\frac{t(n-1)}{n}})$$

چون $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی است .بنابر خاصیت ایستا و مستقل بودن فرایند های لوی ،آنگاه فرایندهای $X_{\frac{t}{n}} - X_0$ ، $X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}$ و $X_{\frac{tn}{n}} - X_{\frac{t(n-1)}{n}}$ دارای توزیع یکسان با فرایند $X_{\frac{t}{n}}$ خواهند بود.پس اگر $\mu_{\frac{t}{n}}$ توزیع مربوط به فرایند $X_{\frac{t}{n}}$ باشد.و μ_t توزیع مربوط به X_t باشد .با توجه قسمت دوم قضیه (۷.۲.۲) خواهیم داشت .

$$\mu_t = \underbrace{\mu_{\frac{t}{n}} * \mu_{\frac{t}{n}} * \cdots \mu_{\frac{t}{n}}}_{n \text{ times}} = (\mu_{\frac{t}{n}})^n$$

که این نشان دهنده آنست که μ_t توزیع بی نهایت تقسیم پذیرخواهد بود.

حال برای اثبات قسمت دوم فرض کنید t یک عدد گویا باشد. یعنی $t = \frac{p}{q}$ آنگاه می توان نوشت

$$X_t = X_{\frac{p}{q}} = (X_{\frac{1}{q}} - X_0) + (X_{\frac{2}{q}} - X_{\frac{1}{q}}) + \cdots + (X_{\frac{p}{q}} - X_{\frac{p-1}{q}}).$$

حال با توجه به خاصیت ایستا بودن فرایند لوی درسمت راست تساوی بالا به تعداد p تا متغیر تصادفی با توزیع $\mu_{\frac{1}{q}}$ خواهیم داشت.بنابراین

$$\mu_t = \underbrace{\mu_{\frac{1}{q}} * \mu_{\frac{1}{q}} * \cdots * \mu_{\frac{1}{q}}}_{p \text{ times}} = (\mu_{\frac{1}{q}})^p = (\mu)^{\frac{p}{q}} = \mu^t.$$

واگر t یک عدد گویا نباشد می توان از برهان مربوط به قضیه (۱۰.۲.۲) استفاده کرد.

حال می بینیم که بین توزیع بی نهایت تقسیم پذیر و فرایند لوی رابطه خیلی نزدیکی وجود دارد.

۳.۲ فرایند مارکف

یکی از فرایندهای تصادفی که رابطه نزدیکی با فرایند های لوی دارند فرایند های مارکف هستند.فرایند های مارکف رده‌ای مهم از فرایندهای تصادفی هستند.

تعریف ۱.۳.۲. فرایند تصادفی را مارکف گویند هرگاه آینده فرایند به گذشته آن بستگی نداشته باشد و اصطلاحا آن را فرایند بی حافظه می گوییم.

شرط مارکف را برای $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$ می توان بصورت زیر بیان کرد

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n).$$

برای هر مقدار n ، i و i_n، i_{n-1}، $\cdots$ این احتمال که به آن احتمال تغییر وضعیت از i_n به j در یک گام گفته می شود،در حالت کلی به n بستگی دارد.

پس فرایند مارکف دنباله‌ای ازمتغیرهای تصادفی است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ با فرض معلوم بودن X_n متغیر تصادفی X_{n+1} به طور شرطی از $X_0, \cdots, X_{n-1}$ مستقل باشد.

مثال ۲.۳.۲. یک رده مهم از فرایندهای مارکف با فضای حالت‌های گسسته قدم زدن تصادفی است که فضای حالت‌های آن زیر مجموعه‌ای از اعداد صحیح نامنفی است.زیرا در قدم زدن تصادفی (تلو تلو خوردن)گام n ام مستقل از گام های قبلی است.

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرایند لوی $\mathbb{R}^d$ مقدارباشد. همچنین فرض کنید، $u \in \mathbb{R}^d$ آنگاه $M_t^u = \frac{e^{i<u,X_t>}}{E(e^{i<u,X_t>})}$ یک مارتینگل مربع انتگرال پذیر از راست پیوسته و دارای حد چپ خواهد بود.

برهان : فرض کنید μ یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر باشد.آنگاه طبق قسمت (۱) از قضیه (۸.۲.۲) تابع پیوسته و یکتا η وجود دارد بطوری که،

$$\begin{cases} \eta : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ \eta(0) = 0 \\ \hat{\mu}(u) = e^{\eta(u)} \end{cases}$$

همچنین فرض کنید $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی باشد و μ توزیع مربوط به X_1 باشد. بلافاصله از قضیه (۱۱.۲.۲) نتیجه می شود که X_t دارای توزیع μ^t خواهد بود. بنابراین تابع مشخصه X_t بصورت $E[e^{i<u,X_t>}] = e^{t\eta(u)}$ خواهد بود.لازم به ذکر است به η لوی نمایی از X گفته می شود.

آنگاه روشن است که

$$\begin{aligned}
E[M_t^u|\mathcal{F}_s] =& E[\frac{e^{i<u,X_t>}}{e^{t\eta(u)}}|\mathcal{F}_s] \\
&= E[e^{-t\eta(u)}|\mathcal{F}_s]E[e^{i<u,X_t>}|\mathcal{F}_s] \\
&= e^{-t\eta(u)}E[e^{i<u,X_t-X_s+X_s>}|\mathcal{F}_s] \\
&= e^{-t\eta(u)}E[e^{i<u,X_t-X_s>+i<u,X_s>}|\mathcal{F}_s] \\
&= e^{-t\eta(u)}e^{i<u,X_s>}e^{(t-s)\eta(u)} \\
&= e^{-t\eta(u)}e^{i<u,X_s>}e^{t\eta(u)}e^{-s\eta(u)} \\
&= \frac{e^{i<u,X_s>}}{e^{s\eta(u)}} \\
&= \frac{e^{i<u,X_s>}}{E[e^{i<u,X_s>}]} = M_s^u
\end{aligned}$$

این نشان می دهد که M_s^u مارتینگل است .چون $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی است پس از راست پیوسته و دارای حد چپ می‌باشد بنابراین M_t^u نیزاز راست پیوسته و دارای حد چپ می‌باشد.

حال برای مربع انتگرال پذیر بودن داریم،

$$\begin{aligned}
E[|M_t^u|^2] = E[|\frac{e^{i<u,X_s>}}{E[e^{i<u,X_s>}]}|^2] \\
=& E[|\frac{e^{i<u,X_t>}}{e^{t\eta(u)}}|^2] \\
=& |e^{-2t\eta(u)}|E[|e^{i<u,X_t>}|^2] \\
&= |e^{-t\eta(u)}|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

که نامساوی آخری با استفاده از خواص تابع مشخصه بدست آمده است.

قضیه ۴.۳.۲. خاصیت قوی مارکف
فرض کنید $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی روی $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ باشد .همچنین در نظربگیرید τ یک زمان توقف روی مجموعه $\{\tau < \infty\}$ باشد. آنگاه فرایند $Y_t = X_{\tau+t} - X_\tau$ فرایند لوی سازگار با $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\tau+t}$ خواهد بود و بیشتر آنکه Y مستقل از $\mathcal{F}_\tau$ است و دارای توزیع یکسان با X خواهد بود.

برهان .به[۱۶] رجوع شود.

۴.۲ فرایندهای شمارشی

در این بخش ابتدا فرایند شمارشی را بیان کرده و در ادامه به تفصیل به دو فرایند پواسون و پواسون مرکب که خود نوعی فرایند شمارشی هستند خواهیم پرداخت .

تعریف ۱.۴.۲. فرایند تصادفی $\{N_t\}_{t\geq 0}$ که در آن N_t نشان دهنده تعداد کل پیشامدهایی است که تا زمان t رخ داده است و در شرایط زیر صدق می کند، **فرایند شمارشی** [۳] گفته می شود.

۱. همواره N_t مقدار صحیح نامنفی اختیار می‌کند،

۲. به ازای هر، $\omega \in \Omega$ اگر $s \leq t$ آنگاه $N_s(\omega) \leq N_t(\omega)$،

۳. برای $s \leq t$ آنگاه $N_t - N_s$ نشان دهنده تعداد پیشامدهایی است که در بازه زمانی $(s, t]$ رخ داده است.

مثال ۲.۴.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ یک پایه تصادفی باشد و $T_0 = 0 \quad \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}},$ یک دنباله اکیدا صعودی از زمان ها باشد. مرتبط با این دنباله فرایند شمارشی N_t رابصورت زیر تعریف کنید $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{t\geq T_n}$.
حال اگر T_n زمان وقوع پیشامد n ام باشد،آنگاه N_t نشان دهنده تعداد پیشامدهای رخ داده تا زمان t خواهد بود .
این فرایند صعودی ،نمودار آن قطعه قطعه ثابت ، و جهش های آن فقط باندازه یک واحد خواهد بود .

فرایند پواسون

فرایند پواسون یک فرایند شمارشگر است که پیرامون وقوع رخدادهای تصادفی بر روی یک طول زمانی ،یا یک فاصله مکانی تعریف می‌شود.در بررسی این فرایند زمان بین دو پیشامد متوالی را یک توزیع نمایی مشخص می‌کند وبازه‌های زمانی ،مجزا ومستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند. فرایند پواسون یک فرایند پیوسته در زمان است.از این فرایند برای مدل سازی واپاشی رادیو اکتیو،تماس‌های تلفنی،انتقال داده از سایت‌های اینترنتی استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید زمان انتظار برای وقوع اتفاق از Y_1 تا Y_2 را با δ_1 و از Y_2 تا Y_3 را با δ_2 و $\cdots$ نشان دهیم حال اگر $i \geq 1 \quad \delta_i,$ همگی هم توزیع و مستقل از هم باشند ،آنگاه به اینگونه از فرایندها ، **فرایند تجدید** می گوییم.

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنید $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ یک دنباله از متغیر های تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ باشد .همچنین قرار دهید ، $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$. آنگاه به فرایند، $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{t\geq T_n}$ **فرایند پواسون** [۴] با پارامتر λ گفته می شود.

[۳] Counting process
[۴] Poisson process

ملاحظه ۵.۴.۲. در واقع می توان چنین بیان کرد که اگر در فرایند تجدید δ_i ها دارای توزیع نمایی و مستقل از هم باشند،آنگاه به این گونه از فرایندها، فرایند پواسون خواهیم گفت . وعلاوه بر آن N_t تعداد اتفاقات تا لحظه tام را می شمارد .

ملاحظه ۶.۴.۲. اگر توزیع δ_i توزیع نرمال باشد آنگاه فرایند، N_t یک فرایند براونی خواهد بود.

قضیه ۷.۴.۲. چند خاصیت از فرایند پواسون

۱. برای هر ، $t \geq ۰$ مجموع $\sum_{n\geq ۱} \mathbb{I}_{t\geq T_n}$ متناهی است.$(a.s.)$

۲. مسیرهای N_t قطعه قطعه ثابت و جهش هایی فقط به اندازه یک واحد دارند .

۳. مسیرها دارای پیوستگی از راست و دارای حد چپ می باشند.

۴. برای هر $t > ۰$ آنگاه $\mathbb{P}\{N_{t^-} = N_t\} = ۱$.

۵. امید ریاضی و واریانس یک فرایند پواسون بصورت

$$E(N_t) = \lambda t = Var(N_t)$$

خواهد بود. زیرا اگر $\{N_t\}_{t\geq ۰}$ یک فرایند پواسون باشد آنگاه خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}
E[N_t] = \sum_{n=۰}^{\infty} np(N_t = n) &= \sum_{n=۰}^{\infty} n\frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-۱)!} \\
&= \lambda t.e^{-\lambda t}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-۱}}{(n-۱)!} \\
&= \lambda t.e^{-\lambda t}.e^{\lambda t} \\
&= \lambda t.
\end{aligned}$$

۶. تابع مشخصه یک فرایند پواسون بصورت، $E[e^{iuN_t}] = exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}$ خواهد بود .

زیرا

$$\begin{aligned}\phi_{N_t}(u) = E[e^{iuN_t}] &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun}\mathbb{P}(N_t = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun}\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n\\ &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} e^{iun}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\\ &= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t e^{iu})^n}{n!}\\ &= e^{-\lambda t}e^{\lambda t e^{iu}} = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}.\end{aligned}$$

قضیه ۸.۴.۲. اگر فرایند لوی $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند شمارشی نیز باشد آنگاه X_t یک فرایند پواسون خواهد بود.

برهان . به[۱۹] رجوع شود.

پواسون مرکب

تعریف ۹.۴.۲. فرض کنید $n = 0, 1, 2, \cdots$، N یک متغیر تصادفی شمارشی با تابع احتمال ، $Y_n = \mathbb{P}(N = n)$ باشد.همچنین فرض کنید $\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی ،مستقل،هم توزیع و با تابع توزیع مشترک F باشند.بطوری که X_n ها مستقل از N باشند.آنگاه توزیع مجموع این متغیرهای تصادفی $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ را **توزیع مرکب** می‌نامیم .

که در این توزیع مرکب اگر، $N = 0$ باشد آنگاه خواهیم داشت $S = 0$.

تابع توزیع S طبق قانون احتمال کل بصورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S \leq x|N = n)\mathbb{P}(N = n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x)\mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

آنگاه طبق قسمت دوم قضیه (۸.۲.۲) داریم

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x) = \underbrace{F * F * \cdots * F}_{n \quad time}(x) = F^n(x)$$

معمولا نام توزیع مرکب را از نام توزیع N می‌گیرند.برای مثال اگر N دارای توزیع پواسون باشد،آنگاه S دارای توزیع پواسون مرکب خواهد بود.

تعریف ۱۰.۴.۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ،Y_n ها متغیرهای تصادفی $i.i.d$ روی $\mathbb{R}^d$ باتوزیع μ باشند .همچنین فرض کنید $\{T_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از زمان‌ها و $\{N_t\}_{t\geq ۰}$ یک فرایند پواسون با نرخ λ باشد. و از $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ مستقل باشند. آنگاه به فرایند

$$X_t = \sum_{n=۱}^{N_t} Y_n = \sum_{n\geq ۱} Y_n \mathbb{I}_{\{T_n\leq t\}} = \sum_n Y_n \mathbb{I}_{\{T_n\leq t\}}$$

یک **فرایند پواسون مرکب** [۵] با نرخ λ و توزیع جهشی μ گفته می شود.

مثال ۱۱.۴.۲. فرض کنید $S_n = \sum_{k=۱}^{n} Y_k$ که در آن، $Y_۱, Y_۲, \cdots, Y_k$ متغیر های تصادفی $i.i.d$ هستند ، قدم زدن تصادفی باشد. حال اگر زمان تغییر کند،جهش ها بین این زمان ها یک توزیع نمایی خواهد داشت .فرض کنید $\sigma_۱, \sigma_۲, \cdots, \sigma_k$ متغیر های تصادفی مستقل با توزیع نمایی و مستقل از $Y_۱, Y_۲, \cdots, Y_k$ باشند. قرار دهید $T_n = \sum_{k=۱}^{n} \sigma_k$. و همچنین در نظر بگیرید، $N_t = \sum_n \mathbb{I}_{\{T_n\leq t\}}$ یک ساختار فرایند پواسون داشته باشد.در اینصورت تعریف کنید

$$X_t = S_{N_t} = \sum_{n=۱}^{N_t} Y_n = \sum_{n\geq ۱} Y_n \mathbb{I}_{\{T_n\leq t\}}$$

آنگاه فرایند X_t یک فرایند پواسون مرکب خواهد بود.

حال اگر $X_t = \sum_{n=۱}^{N_t} Y_n$ یک فرایند پواسون مرکب با نرخ λ توزیع جهش μ آنگاه تابع مشخصه آن بصورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}
E(e^{i<\mu,X_t>}) &= \sum_{n=۰}^{\infty} E(e^{i<\mu,\sum_{k=۱}^{n} Y_k|N_t=n>})\mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty} (E(e^{i<\mu,Y>}))^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(\hat{\mu}(u)\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda t}(\hat{\mu}(u) - ۱)
\end{aligned}$$

تعریف ۱۲.۴.۲. به تابع از راست پیوسته $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ قطعه قطعه ثابت گوییم هر گاه وجود داشته باشد، $۰ < t_۰ < t_۱ < t_۲ \cdots$ ومقادیر ثابت ، $a_n \in \mathbb{R}^d$ بطوری که $f = \sum_n a_n \mathbb{I}_{(t_n,t_{n-۱})}$. روی هر بازه‌ی کراندار در $\mathbb{R}^d$ که شامل حداکثر تعداد متناهی از t_n باشد .

[۵] Compound poisson process

قضیه ۱۳.۴.۲. فرایند X_t یک فرایند پواسون مرکب است اگر و فقط اگر $X=\{X_t\}_{t\geq \circ}$ یک فرایند لوی با **مسیر نمونه‌ای**[۶] قطعه قطعه ثابت باشد $(a.s.)$.

برهان.فرض کنید $X_t=\sum_{n=1}^{N_t} Y_n$ یک فرایند پواسون مرکب باشد که در آن N_t یک فرایند پواسون با نرخ λاست. هم چنین Y_n ها دو به دو مستقل ،دارای توزیع مشترک μ و هم چنین نسبت به $(N_t)_{t>\circ}$ مستقل باشند .قرار دهید $S_n=\sum_{k=1}^{n} Y_k$ قدم زدن تصادفی مربوط به آنها باشد بنابراین $X_t=S_{N_t}$. از این رو X_t دارای جهش هایی است که فقط در زمان N_t انجام میگیرد چون N_t از راست پیوسته واز چپ دارای حد است بنابراین X_t نیز این چنین خواهد بود.و از آنجایی که N_t به دلیل $\mathbb{P}(N_t<\infty)=1$ قطعه قطعه ثابت است ،X_t نیز این چنین خواهد بود.حال فرض کنید

$B_\circ, B_1, B_2,\cdots\in\beta(\mathbb{R}^d)$ و $\circ<t_\circ<t_1<\cdots$ آنگاه با توجه به رشد ثابت و مستقل فرایند پواسون و قدم زدن تصادفی خواهیم داشت .

$$\mathbb{P}(X_{t_\circ}\in B_\circ, X_{t_1}-X_{t_\circ}\in B_1,\cdots, X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\in B_K)$$

$$=\sum_{n_\circ,n_1,n_k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N_{t_\circ}=n_\circ, N_{t_1}-N_{t_\circ}=n_1,\cdots, N_{t_k}-N_{t_{k-1=n_k}}, S_{n_\circ}\in B_\circ, S_{n_\circ+n_1}-S_{n_\circ}\in B_1,\cdots, S_{n_\circ+n_1+\cdots+n_k}-S_{n_\circ+n_1+\cdots+n_{k-1}}\in B_k)$$

$$=\sum_{n_\circ,n_1,n_k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N_{t_\circ}=n_\circ)\mathbb{P}(N_{t_1}-N_{t_\circ}=n_1)\cdots\mathbb{P}(N_{t_k}-N_{t_{k-1}})\mathbb{P}(S_{n_\circ}\in B_\circ)\mathbb{P}(S_{n_1}\in B_1)\cdots\mathbb{P}(S_{n_k}\in B_k)$$

$$=\mathbb{P}(X_{t_\circ}\in B_\circ)\mathbb{P}(X_{t_1-t_\circ}\in B_1)\cdots\mathbb{P}(X_{t_k-t_{k-1}})\in B_k.$$

پس

$$\mathbb{P}(X_{t_1}-X_{t_\circ}\in B_\circ)=\mathbb{P}(X_{t_\circ}\in\mathbb{R}^d, X_{t_1}-X_{t_\circ}\in B_1).$$

که نشان می دهد $X_{t_1}-X_{t_\circ}$و$X_{t_1-t_\circ}$ توزیع یکسانی دارند .بنابراین X_t یک رشد ثابت دارد .این نتایج نشان می دهد

$$\mathbb{P}(X_{t_\circ}\in B_\circ, X_{t_1}-X_{t_\circ}\in B_1,\cdots, X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\in B_K)$$

$$=\mathbb{P}(X_{t_\circ}\in B_\circ)\mathbb{P}(X_{t_n}-X_{t_\circ}\in B_1)\cdots\mathbb{P}(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\in B_K)$$

واین یعنی X_t یک رشد مستقل دارد.

نتیجه ۱۴.۴.۲. چون هر تابع از راست پیوسته ودارای حد چپ را می توان بصورت یک تابع قطعه قطعه ثابت بیان کرد.بنابراین می توان هر فرایند لوی را با استفاده از یک فرایند پواسون مرکب بیان کرد.

[۶] Sample paths

فصل ۳

آنالیز پرش ها در فرایند لوی

۱.۳ جهش های شمارش پذیر

تعریف ۱.۱.۳. اگر $\mathbb{R}^d \longrightarrow (\circ,\infty] : f$ و $\circ \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$ آنگاه تغییرات تابع f راروی بازه $(t_1, t_2]$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم .

$$V(f:(t_1,t_2]) = sup\sum_{j=1}^{n}|f(s_j)-f(s_{j-1})|.$$

که در آن سوپریموم روی افراز $s_\circ \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n$ گرفته می‌شود.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید $\{M_t\}$و $\{N_t\}$ دو مارتینگل که از راست پیوسته ودارای حد چپ و M مربع انتگرال پذیر باشد. اگر $V_t(N)$ نشان دهنده تغییرات N روی بازه $[\circ, t]$ باشد،بطوری که $E(V_t(N^2)) < \infty$ آنگاه خواهیم داشت

$$E(M_tN_t) = E\sum_{s\leq t}\Delta M_s\Delta N_s.$$

برهان .به[۱۵] رجوع شود.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید $X = (X^1, X^2, \cdots, X^d)$ یک فرایند لوی d-بعدی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد.به ΔX_t که ازرابطه $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$ بدست می آید ، **فرایند جهش** [۱] می گوییم .

[۱] Jump process

این تعریف به خاطر اینکه X یک فرایند لوی است مفهوم دارد.و واقعا ممکن است مجموع $\sum_{s\leq t}\Delta X_s^i$ کراندار نباشد ،به خاطر اینکه فرایندهای لوی از راست پیوسته ودارای حد چپ می باشند. اما روی هربازه زمانی کراندار $[\circ, T]$ دوباره به خاطر اینکه فرایند X از راست پیوسته ودارای حد چپ می‌باشد.آنها جهش های خیلی زیاد ولی با تعداد متناهی روی این بازه خواهند داشت.

فرض کنید، $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$ می گوییم که مجموعه B کراندار دور از صفر است هرگاه ، $\circ \notin \bar{B}$.

فرض کنید B یک مجموعه کراندار دور از صفر و X یک فرایند لوی باشد. دنباله $\{\tau_n^B\}_{n\geq ۱}$ اکیدا صعودی از زمان های توقف را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tau_{n+۱}^B = inf\{t > \tau_n^B : \Delta X_t \in B\} \qquad , \tau_\circ^B = \circ.$$

آنگاه دنباله $\{\tau_n^B\}_{n\geq ۱}$ نشان دهنده زمان‌های جهش X است که اندازه این جهش‌ها در B می‌افتد.

فرایند شمارشی $N_t(B)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_t(B) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mathbb{I}_{\{T_n^B\leq t\}} = \sum_{\circ\leq s\leq t} \mathbb{I}_B(\Delta X_s).$$

این فرایند شمارشی، تعداد جهش های X را که اندازه این جهش ها در B می افتد را می‌شمارد.

پارامتر $\nu(B)$ از فرایند شمارشی $N_t(B)$ را بصورت

$$\nu(B) = E[N_۱(B)]$$

در نظر بگیرید. که نشان دهنده تعداد جهش های مورد انتظار X در هر واحد زمان است .آنگاه $\nu(B)$ نشان دهنده جهش های مورد انتظار X در B در هر واحد زمان می‌باشد.

زمانی که مجموعه B کراندار دوراز صفر باشد آن گاه خواهیم داشت، $\nu(B) < \infty$. آنگاه ν یک اندازه روی $\beta(\mathbb{R}^d \backslash \{\circ\})$ خواهد بود .زیرا برای هر ، $\omega \in \Omega$ نگاشت

$$\begin{cases} N_t^{(\cdot)}(\omega) : \beta(\mathbb{R}^d\backslash\{\circ\}) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ B \longrightarrow N_t^{(B)}(\omega) \end{cases}$$

یک اندازه شمارشی است ،که در بازه زمانی $[\circ, t)$ تعداد جهش های X در B را تا زمان t می شمارد. و از آنجایی که $\nu(B) = E[N_۱(B)]$ با توجه به قضیه همگرایی یکنوا [۲] ν اندازه خواهد بود.

قضیه ۴.۱.۳. اگر X یک فرایند لوی$\mathbb{R}^d$ مقدار باشد .برای هر ، $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$ تعریف کنید

$$N_t^{(B)} = \sum_{s\leq t} \mathbb{I}_B(\Delta X_s) \tag{۱.۳}$$

آنگاه

۱. $N_t^{(B)}$ یک فرایند پواسون با پارامتر $\nu(B)$ خواهد بود.

[۲] Monotone convergence theorem

۲. اگر ، $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \beta(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ مجموعه های دوبه دو مجزا از هم باشند ،آنگاه فرایندهای تصادفی، $N_t^{(B_1)}, N_t^{(B_2)}, \cdots, N_t^{(B_m)}$ از هم مستقل خواهند بود.

برهان(۱). با توجه به تعریف (۴.۱.۳) روشن است که $N_t^{(B)}$ یک فرایند شمارشی است.

نشان می دهیم این فرایند یک فرایند لوی نیز هست .

$N_0^{(B)} = 0$ ، زیرا

$$N_0^{(B)} = \sum_{s\leq 0} \mathbb{I}_B(\Delta X_s) = \mathbb{I}_B(0) = 0.$$

$N_t^{(B)}$ از راست پیوسته ودارای حد چپ است.زیرا

$$\begin{aligned}\Delta N_t^{(B)} =& N_t^{(B)} - N_{t^-}^{(B)}\\ =& \sum_{s\leq t} \mathbb{I}_B(\Delta X_s) - \sum_{s<t} \mathbb{I}_B(\Delta X_s)\\ =& \mathbb{I}_B(\Delta X_t).\end{aligned}$$

واین نشان دهنده آن است که $N_t^{(B)}$ زمانی جهش دارد که X جهش داشته باشد.و چون X از راست پیوسته و دارای حد چپ است ،بنابراین $N_t^{(B)}$ نیز این چنین خواهد بود.

$N_t^{(B)} - N_s^{(B)}$ تعداد جهش ها در بازه زمانی $(s, t]$ را می‌شمارد،که نسبت به σ -میدان $\sigma\{X_u - X_v \quad : s \leq u < v\}$ - اندازه پذیر است ،بنابراین نسبت به $\mathcal{F}_s$ مستقل خواهد بود .چون X رشد مستقل دارد، بنابراین $N_t^{(B)}$ رشد مستقل خواهد داشت.

چون فرایند های X_uو$X_{u+s} - X_s$ دارای توزیع یکسان هستند بنابراین جهش هادر بازه‌های $(s, t]$ و $(0, t-s]$ دارای توزیع یکسان خواهند بود. در نتیجه $N_t^{(B)} - N_s^{(B)}$ و $N_{t-s}^{(B)}$ دارای توزیع یکسان خواهند داشت.واین نشان دهنده آن است که $N_t^{(B)}$ دارای رشد ثابت است.

نشان دادیم $N_t^{(B)}$ یک فرایند شمارشی همچنین لوی است .بنابراین طبق قضیه (۸.۴.۲) $N_t^{(B)}$ یک فرایند پواسون است . بیشتر آنکه اگر λ_B یک پارامتر از فرایند پواسون $N_t^{(B)}$ باشد ،آنگاه خواهیم داشت

$$E[N_1^{(B)}] = \lambda_B, \quad \lambda_B = v(B).$$

برهان (۲). ابتدا فرض کنید $B, C \in \beta(\mathbb{R}^d)$ مجموعه های مجزا از هم و کراندار دور از صفر باشند .سپس مسئله رادرحالت کلی برای تمامی مجموعه های بورل اثبات خواهیم کرد.

قرار دهید ،

$$M_B^u(t) = \frac{e^{iuN_t^{(B)}}}{E(e^{iuN_t^{(B)}})} - 1, \qquad M_C^v(t) = \frac{e^{ivN_t^{(C)}}}{E(e^{ivN_t^{(C)}})} - 1.$$

با توجه به قضیه (۳.۳.۲) M_B^uو M_C^v مارتینگل های از راست پیوسته ودارای حدچپ هستند . همچنین $M_C^v(t)$ و $M_B^u(t)$ زمانی جهش دارند که $N_t^{(B)}$ و $N_t^{(C)}$ جهش داشته باشند.

از طرفی چون B و C اشتراک ندارند ،پس این دو در هیچ زمان مشترک با هم دیگر جهش نخواهند داشت .بنابراین داریم،

$$\Delta M_B^u(s)\Delta M_C^v(s)=0$$

حال به توجه به قضیه (۲.۱.۳) خواهیم داشت

$$E[M_B^u(t).M_C^v(t)]=E[\sum_{s\leq t}\Delta M_B^u(s)\Delta M_C^v(s)]=0.$$

حال با جاگذاری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}E[M_B^u(t).M_C^v(t)]=&E[(\frac{e^{iuN_t(B)}}{E(e^{iuN_t(B)})}-1)(\frac{e^{ivN_t(C)}}{E(e^{ivN_t(C)})}-1)]\\&=-E[(\frac{e^{iuN_t(B)}}{E(e^{iuN_t(B)})}]-E[\frac{e^{ivN_t(C)}}{E(e^{ivN_t(C)})}]+1\\&+E[(\frac{e^{iuN_t(B)}}{E(e^{iuN_t(B)})})(\frac{e^{ivN_t(C)}}{E(e^{ivN_t(C)})})]\\&=-1-1+1+\frac{E(e^{iuN_t(B)+ivN_t(C)})}{E(e^{iuN_t(B)})E(e^{ivN_t(C)})}\\&=-1+\frac{E(e^{iuN_t(B)+ivN_t(C)})}{E(e^{iuN_t(B)})E(e^{ivN_t(C)})}=0.\end{aligned}$$

بنابراین داریم،

$$E(e^{iuN_t(B)+ivN_t(C)})=E(e^{iuN_t(B)})E(e^{ivN_t(C)}).$$

واین نشان می‌دهد که $N_t(C)$و $N_t(B)$ از هم مستقل هستند. بنابراین اگر $B_1,B_2,\cdots,B_m$ مجموعه های دو به دو از هم مجزا و کراندار دور از صفر باشند آنگاه $N_t(B_1),N_t(B_2)\cdots,N_t(B_m)$ دو به دو مستقل از هم خواهند بود .

حال مسئله را در حالت کلی برای زیر مجموعه های بورل $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ اثبات می کنیم.

فرض کنید ، $B\in(\beta(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$. سپس تعریف کنید $D_B^n=\{x\in B:|x|\geq\frac{1}{n}\}$. روشن است که D_B^n ها مجموعه های بورل کراندار دور از صفر هستند. همچنین $B=\bigcup_n D_B^n$. بنابراین

$$N_t(B)=\lim_{n\to\infty}N_t(D_B^n).$$

حال با توجه به قسمت اول این قضیه $N_t(D_B^n)$ یک فرایند پواسون با میانگین $v(D_B^n)$ خواهد بود. بنابراین از این همگرائی می توان همگرائی در توزیع رانتیجه گرفت $(a.s.)$.

حال با توجه به خاصیت تابع مشخصه $N_t(B)$ یک فرایند پواسون با میانگین $\lim_{n\to\infty}v(D_B^n)=v(B)$ خواهد بود.

سرانجام اگر ،

$$B_1,B_2,\cdots,B_m\in\beta(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$$

و مستقل از هم باشند آنگاه، $N_t(D_{B_1}^{n_1}), \cdots, N_t(D_{B_m}^{n_m})$ مستقل از هم خواهند بود. و برای هر، $n_1, \cdots, n_m \in$ $(\mathbb{N})$ چون $N_t(B) \in \sigma(N_t(D_B^n) : n \in \mathbb{N})$. این نشان می دهد که $N_t(B_1), N_t(B_2), \cdots, N_t(B_m)$ از هم مستقل هستند.

قضیه ۵.۱.۳. ν یک اندازه σ -متناهی روی $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ می باشد.

برهان . چون برای هر، $B \in \mathbb{R}^d$ که کراندار دور از صفر باشد ،داریم $\nu(B) < \infty$. بنابراین ν یک اندازه σ -متناهی روی $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ خواهد بود.

توجه کنید که این تعریف روی σ -جبر $\beta \in (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ تعریف شده است ،و تعمیم آن روی $\beta \in (\mathbb{R}^d)$ با قرار دادن $\nu\{0\} = 0$ به راحتی انجام می پذیرد.

به ν که از فرایند لوی X بدست آمده است اندازه لوی گفته می شود.

۲.۳ اندازه تصادفی پواسون

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و (E, ϵ) یک فضای اندازه باشد.به نگاشت

$$M : \Omega \times \epsilon \longrightarrow \mathbb{R}$$

اندازه تصادفی [۳] می گوییم هرگاه،

۱. برای هر $\omega \in \Omega$، $M(\omega, .)$ یک اندازه روی ϵ باشد.

۲. برای هر $A \in \epsilon$،$M(., A)$ اندازه پذیر روی E باشد.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و (E, ϵ) فضای اندازه پذیر باشد و همچنین μ یک اندازه روی (E, ϵ) باشد .به

$$M : \Omega \times \epsilon \longrightarrow \mathbb{R}$$

اندازه تصادفی پواسون [۴] با شدت μ گوییم ، هرگاه

۱. برای هر، $A \in \epsilon$ که $\mu(A < \infty)$. $M(A)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $E[M(A)] = \mu(A)$ باشد.

۲. برای مجموعه های جدا از هم، $A_1, A_2 \cdots, A_n$ اندازه‌های تصادفی $M(A_1), M(A_2), \cdots, M(A_n)$ دو به دو از هم مستقل باشند .

---

[۳] Random measure

[۴] Poisson random measure

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید E زیر مجموعه اندازه پذیر از $\mathbb{R}^d$ باشد.اگر μ یک اندازه σ -متناهی روی این زیر مجموعه باشد .آنگاه یک اندازه تصادفی پواسون روی E باشدت μ وجود خواهد داشت.

برهان : ابتدا فرض کنید $\mu(E) < \infty$. همچنین فرض کنید $\{X_i\}_{i\geq ۱}$ یک دنباله از متغیر های تصادفی مستقل از هم باشند ،بطوری که برای هر i و هر ، $A \in \beta(E)$ داشته باشیم $\mathbb{P}[X_i \in A] = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$ هم چنین فرض کنید $M(E)$ یک متغیر تصادفی پواسون با شدت $\mu(E)$ مستقل از $\{X_i\}_{i\geq ۱}$ باشد .آنگاه برای هر، $A \in \beta(E)$ اندازه تصادفی تعریف شده بصورت

$$M(A) = \sum_{i=۱}^{M(E)} \mathbb{I}_{(A)}(X_i)$$

یک اندازه تصادفی پواسون روی E با شدت μ خواهد بود.

حال فرض کنید $\mu(E) = \infty$. همچنین در نظر بگیرید که $\{E_i\}_{i\geq ۱}$ یک دنباله از مجموعه‌های جدا از هم و اندازه پذیر باشد. بطوری که برای هر i، $\mu(E_i) < \infty$ و $\bigcup_i E_i = E$. حال بنابر قسمت اول ، میتوانیم اندازه تصادفی پواسون M_i را روی هر E_i بصورت زیر تعریف کنیم .

برای هر $A \in \beta(E)$ قرار دهید

$$M(A) := \sum_{i=۱}^{\infty} M_i(A)$$

آنگاه $M(A)$ یک اندازه تصادفی پواسون روی E خواهد بود.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید M یک اندازه تصادفی پواسون روی (E, ε) با شدت μ، $B \in \varepsilon$ و هم چنین f یک تابع اندازه پذیر باشد بطوری که ، $\int_B |e^{f(x)} - ۱|\mu(\mathrm{dx}) < \infty.$ آنگاه ،

$$E[e^{\int_B f(x)M(\mathrm{dx})}] = exp[\int_B (e^{f(x)} - ۱)\mu(\mathrm{dx}).]$$

برهان .به[۱۹] رجوع شود.

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنید X یک فرایند لوی $\mathbb{R}^d$ مقدار باشد .برای هر، $B \in \beta(\mathbb{R}^d \backslash \{۰\})$ قرار دهید $N_t(B) = \sum_{s\leq t} \mathbb{I}_B(\Delta X_s)$. که نشان دهنده تعداد جهش های X در زمان t باشد .تعریف کنیداندازه ν را روی $\beta(\mathbb{R}^d \backslash \{۰\})$ بصورت $\nu(B) = E[N_۱(B)]$ آنگاه N_t یک اندازه پواسون تصادفی با اندازه شدت $t\nu$ خواهد بود

برهان .به[۱۹] رجوع شود.

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنید E یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}^d$ باشد.و $N : \beta(E) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازه تصادفی روی آن باشد. وهمچنین فرض کنید ، μ پارامتری از N باشد که برای $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$ بصورت $\mu(B) = E[N(B)]$ بدست می آید، یک اندازه - σ متناهی باشد .همچنین فرض کنید

۱. $N(B)$ یک متغیر تصادفی پواسون روی هر مستطیل $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$ باشد.

۲. اگر مستطیل های $B_۱, B_۲, \cdots, B_n$ مجزا از هم بودند ،آنگاه $N(B_۱), N(B_۲), \cdots, N(B_n)$ از هم مستقل باشند .

آنگاه N یک اندازه تصادفی پواسون با پارامتر μ خواهد بود.

برهان. به [۱۹] رجوع شود

۱.۲.۳ انتگرال گیری نسبت به اندازه تصادفی پواسون

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنید $(E, \beta(E), \mu)$ فضای اندازه متناهی باشد همچنین فرض کنید $N : \beta(E) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ یک اندازه تصادفی پواسون همراه با نرخ μ باشد همچنین در نظر بگیرید $f : (E, \beta(E)) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$ یک تابع اندازه پذیر باشد .آنگاه

۱. $Z(\omega) = \int_E f(x)N(\mathrm{d}x, \omega)$ یک متغیر تصادفی $\mathbb{R}^d$ مقدار با تابع مشخصه

$$\begin{aligned} E(e^{i<\mu,z>}) &= exp((\int_E e^{i<\mu,f(x)>} - ۱\mu(\mathrm{d}x))) \\ &= exp(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\mu,X>} - ۱(\mu f^{-۱})\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

خواهد بود.

یعنی اینکه Z یک متغیر تصادفی پواسون مرکب با توزیع جهش های $\frac{\mu f^{-۱}}{\mu f^{-۱}(\mathbb{R}^d)}$ واندازه شدت $\mu f^{-۱}(\mathbb{R}^d)$ خواهد بود.

۲. اگر، $\int_E |f^j(x)|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ آنگاه $E(z) = \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)$. که در آن $f^{(j)}$ مولفه j -ام f خواهد بود.

۳. اگر $\int_E |f(x)|^۲\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ آنگاه $E[|Z - E(z)|^۲] = \int_E |f(x)|^۲\mu(\mathrm{d}x)$

۴. اگر $B_۱, B_۲, \cdots, B_m \in \beta$ مجموعه‌های مجزا از هم باشند، آنگاه $Z_k = \int_{B_k} f(x)N(\mathrm{d}x, \omega)$ متغیر های تصادفی مستقل از هم خواهند بود.

برهان. از آنجا که $N(E)$ متناهی است . بنابراین $(a.s.)\quad Z < \infty$.بنابراین می توانیم Z را بوسیله متغیرهای تصادفی ساده تقریب بزنیم .فرض کنید که نقطه $P = (p_۱, p_۲, \cdots, p_d)$،$P \in \mathbb{Z}^d$ همچنین C_p^n یک مستطیل در

$\mathbb{R}^d$ باشد ،که شامل همه نقطه‌هایی مانند $y = (y_1, y_2, \cdots, y_d)$ که دررابطه، $2^{-n}(p_j - 1) < y_j \leq 2^{-n}p_j$ صدق می کنند ، باشد .حال فرض کنید y_p^n یک نقطه از C_p^n باشد. سپس تعریف کنید

$$f_n(x) = \sum_{P\in\mathbb{Z}^d} y_p^n \mathbb{I}_{C_p^n}(f(x)).$$

هم چنین فرض کنید

$$Z_n(\omega) = \int_E f_n(x) N(\mathrm{d}x, \omega).$$

آنگاه

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}\sqrt{d}$$

بنابراین داریم

$$|Z_n(\omega) - Z(\omega)| \leq 2^{-n}\sqrt{d}N(E, \omega)$$

این نشان می دهد که

$$\lim_{n\to\infty} |Z_n(\omega) - Z(\omega)| \longrightarrow 0 \quad (a.s.).$$

حال چون

$Z_n(\omega) = \sum_{P\in\mathbb{Z}^d} y_p^n N(f^{-1}(C_p^n, \omega))$. داریم

$$\begin{aligned}
E[e^{i<u,z_n>}] &= \prod_{P\in\mathbb{Z}^d} E(e^{i<u,y_p^n>N(f^{-1}(C_p^n))}) \\
&= \prod_{P\in\mathbb{Z}^d} exp(\mu(f^{-1}(C_p^n)[e^{i<u,y_p^n>} - 1]) \\
&= exp(\int_E e^{i<u,f_n(x)>} - 1\mu(\mathrm{d}x)).
\end{aligned}$$

با استفاده از تعریف اندازه تصادفی پواسون

$$\begin{aligned}
E[e^{i<u,Z>}] &= \lim_{n\to\infty} E[e^{i<u,Z_n>}] \\
&= exp(\int_E e^{i<u,f_n(x)>} - 1\mu(\mathrm{d}x))
\end{aligned}$$

فرض کنید $f^{(j)}, z^{(j)}, u^{(j)}$ مختصه jام f, u, z باشد.با در نظر گرفتن اینکه

$$\int |f^{(j)}(x)|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$$

می بینیم که

$$\frac{\partial}{\partial u^{(j)}} \int e^{i<u,f(x)>} - 1\mu(\mathrm{d}x) = i \int f^{(j)}(x) e^{i<u,f(x)>}\mu(\mathrm{d}x).$$

از این رو

$$E(z^{(j)}) = i^{-۱}\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}exp(\int e^{i<u,f(x)>} - ۱\mu(\mathrm{d}x|_{u=۰})$$
$$= \int f^{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

وبه همین طریق می توان نشان داد که،

$$\int |f(x)|^{۲}\mu(\mathrm{d}x) \leq \infty.$$

سپس

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial u(j)^{۲}}\int e^{i<u,f(x)>} - ۱\mu(\mathrm{d}x) = i^{۲}\int f^{(j)}(x)^{۲}e^{i<u,f(x)>}\mu(\mathrm{d}x)$$

آنگاه

$$[z^{(j)}]^{۲} = i^{-۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial u^{(j)^{۲}}}exp(\int e^{i<u,f(x)>} - ۱\mu(\mathrm{d}x|_{u=۰})$$
$$= (\int f^{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x))^{۲} + \int f^{(j)}(x)^{۲}\mu(\mathrm{d}x)$$
$$= E(z^{(j)}) + \int f^{(j)}(x)^{۲}\mu(\mathrm{d}x)$$

سرانجام اگر ، $B_۱, B_۲, \cdots, B_m$ مجموعه‌های جدا از هم باشند آنگاه تعریف کنید

$$Z_{k,n} = \int_{B_k} f_n(x)N(\mathrm{d}x,\omega), \qquad k = ۱,۲,\cdots,m$$

بنابراین

$Z_{k,n} = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} y_p^n N(B_k \bigcap c_p^n).$ حال برای $k = ۱,۲,\cdots,m$ نتیجه می شود که $N(B_k \bigcap c_p^n)$ از هم مستقل هستند.و همچنین $p \in \mathbb{Z}^d$ می بینیم که $z_{۱,n}, z_{۲,n},\cdots,z_{m,n}$ برای همه n ها از هم مستقل هستند.حال داریم $\lim_{n\to\infty} z \longrightarrow \int_{B_k} f(x)N(\mathrm{d}x).$ بنابراین $\int_{B_k} f(x)N(\mathrm{d}x)$ هامستقل از هم هستند.

۳.۳ اندازه جهش از یک فرایند لوی

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید Xیک فرایند تصادفی $\mathbb{R}^d$ -مقدار باشد که از راست پیوسته ودارای حد چپ می‌باشد.اندازه جهش از فرایند X ، یک اندازه تصادفی روی، $\beta([\circ,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ می باشد. که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$J_X(A)=\#\{t:\Delta X_t\neq\circ,(t,\Delta X_t)\in A\}.$$

ملاحظه ۲.۳.۳. برای مجموعه‌هایی که به فرم $[s,t]\times A$ باشند.اندازه جهش ،تعداد جهش های Xرا بین دو زمان sوt می شمارد ، که اندازه این جهش های داخل A بیفتد .

ملاحظه ۳.۳.۳. برای فرایندهای شمارشی چون اندازه سایز جهش ها همواره برابر یک است .بنابراین اندازه جهش می تواند یک اندازه تصادفی روی $(\circ,\infty)$ باشد.

اگر X فرایند لوی باشد،آنگاه اندازه جهش در رابطه با فرایند لوی را بصورت زیر تعریف کرد. فرض کنید، $H=(\circ,\infty)\times\mathbb{R}^d\backslash\{\circ\}$ متناسب با هر فرآیند لوی X ،اندازه تصادفی پواسون J_X روی $(H,\beta(H))$ بصورت زیر تعریف می‌شود

برای هر $A\in\beta(H)$ و $\omega\in\Omega$

$$J_X(A,\omega)=\#\{t:(t,\Delta X_t)\in A\}$$

. این فقط یک اندازه شمارشی است .بنابراین یک اندازه خواهد بود . مخصوصا اگر $A=(\circ,t]\times B$ که $B\in\beta(\mathbb{R}^d)$ یک مجموعه کراندار دور از صفر است . آنگاه $J_X((\circ,t]\times B)$ نشان دهنده تعداد پرش های X در B در زمان t خواهد بود .بنابراین

$$J_X((\circ,t]\times B),\omega)=\#\{t:(t,\Delta X_t)\in A\}=N_t^{(B)}.$$

تعریف ۴.۳.۳. فرض کنید X یک فرآیند لوی $\mathbb{R}^d$ -مقدار باشد آنگاه برای هر $A\in\beta(\mathbb{R}^d)$ اندازه ν را که بصورت

$$\nu(A)=E[\#\{t\in[\circ,\text{۱}]:\Delta X_t\neq\circ\quad \Delta X_t\in A\}]$$

تعریف می شود ، اندازه لوی نامیده می شود .

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنید X یک فرایند لوی با اندازه لوی ν باشد .آنگاه J_X یک اندازه تصادفی پواسون روی $(H,\beta(H))$ با اندازه شدت $\lambda\times\nu$ خواهد بود.

برهان. قرار دهید، $\mu=\lambda\times\nu$. ومستطیل $A=(s,t]\times B$ که در آن $\circ\leq s<t$و$B\in\beta(\mathbb{R}^d)$ مجموعه کرانداردور از صفر است ،رادر نظر بگیرید.نشان می دهیم $J_X(A)=N_t(B)-N_s(B)$. زیرا طبق تعریف خواهیم داشت

$$J_X(A,\omega)=\#\{u:(u,\Delta X_u)\in(s,t]\times B\}$$

در واقع $J_X(A)$ تعداد u هایی را می شمارد که اولا u در داخل بازه زمانی $[s,t)$ قرارگیرد. ثانیا . ΔX_u در داخل B قرار گیرد.

از طرفی دیگر داریم

$$\begin{aligned} N_t(B) - N_s(B) &= \sum_{s \leq t} \mathbb{I}_B(\Delta X_s) - \sum_{v \leq s} \mathbb{I}_B(\Delta X_v) \\ &= \sum_{s<u \leq t} \mathbb{I}_B(\Delta X_u) \\ &= \#\{u | u \in (s,t], \Delta X_u \in B\} \\ &= N_u(B) \quad s.t \quad u \in (s,t] \end{aligned}$$

ولی طبق قضیه (۴.۱.۳)، $(N_t(B))_{t \geq ۰}$ یک فرایند پواسون با پارامتر $\nu(B)$ است .از طرفی بنابر خاصیت رشد ثابت در فرآیند های پواسون خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_X(A) = k) &= \mathbb{P}(N_t(B) - N_s(B) = k) \\ &= \mathbb{P}(N^B_{t-s} = k) \\ &= e^{-\nu(B)(t-s)} \frac{[\nu(B)(t-s)]^k}{k!} \\ &= e^{-\mu(A)} \frac{[\mu(A)]^k}{k!}. \end{aligned}$$

بنابراین J_X یک اندازه تصادفی با رشد مستقل است با این خاصیت که $J_X(A)$ دارای توزیع پواسون با اندازه شدت $\mu(A)$ برهر مستطیل $A \subseteq H$ می باشد.

حال نشان می‌دهیم اگر مستطیل‌های $A_۱, A_۲, \cdots, A_m$ دو به دو از هم مجزا باشندآنگاه $J_X(A_۱), J_X(A_۲), \cdots, J_X(A_m)$ ازهم مستقل خواهند شد. .با پردازش کردن این مجموعه ها ، برای اثبات کافی است دو حالت زیر را در نظر بگیریم

حالت اول:قرار دهید، $A_j = (s,t] \times B_j$ بطوری که $B_۱, B_۲, \cdots, B_m$ دو به دو از هم مجزا باشند .در این حالت

$$J_X(A_j) = N_t(B_j) - N_s(B_j)$$

با توجه به قسمت دوم قضیه ، (۴.۱.۳) از هم مستقل هستند.

حالت دوم:قرار دهید $A_j = (s_j, t_j] \times B_j$ بطوری که بازه‌های $(s_۱, t_۱], (s_۲, t_۲] \cdots, (s_m, t_m]$ دو به دو از هم مجزا هستند .در این حالت $J_X(A_۱), J_X(A_۲), \cdots, J_X(A_m)$ با استفاده از قسمت اول قضیه، (۴.۱.۳) از هم مستقل هستند. برای اینکه $N_t(B_j)$ رشد مستقل دارد . حال بنابر قضیه ، (۶.۲.۳) $J_X(A)$ یک اندازه تصادفی پواسون با نرخ μ می باشد.

۴.۳ تجزیه لوی -ایتو

قضیه ۱.۴.۳. تجزیه ایتو -لوی

فرض کنید X یک فرایند لوی $\mathbb{R}^d$ -مقدار باشد .آنگاه X دارای تجزیه زیر است.

$$X_t = \gamma t + B_t + \int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)] + \int_{|x|>۱} xN_t(\mathrm{d}x).$$

که در این تجزیه

۱. $\gamma = E[X_t - \int_{|x|>۱} xN_t(\mathrm{d}x)] \in \mathbb{R}^d$

۲. B_t یک حرکت براونی مرکز دار با کواریانس ماتریکس A است.

۳. $\int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)]$ یک فرآیند مارتینگل مستقل از B_t است.

۴. برای هر مجموعه کراندار دور از صفر $B \in \beta(\mathbb{R}^d)$ وهمچنین برای هر $f.\mathbb{I}_B \in L^۲(\nu)$ آنگاه B_t مستقل از $\int_B f(x)N_t(\mathrm{d}x)$ خواهد بود .

۵. اگر $B_۱$و$B_۲$ مجموعه های بورل جدا از هم وکراندار دور ازصفر باشند.و

$f_۱.\mathbb{I}_{B_۱}, f_۲.\mathbb{I}_{B_۲} \in L^۲(\nu)$. آنگاه، $\int_{B_۱} f_۱(x)N_t(\mathrm{d}x)$ و $\int_{B_۲} f_۲(x)N_t(\mathrm{d}x)$ از هم مستقل خواهند بود.

۶. ν یک اندازه لوی است، که درشرایط زیرصدق می کند

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^۲ \bigwedge ۱)\nu(\mathrm{d}x) < \infty, \quad \nu\{۰\} = ۰$$

.

برهان . به فصل ۲از[۱۲]یا به فصل ۴از[۱۸] رجوع شود.

۱.۴.۳ فرایندهای لوی دریفت دار

اگر X یک فرایند لوی باشد .آنگاه با استفاده از تجزیه لوی-ایتو خواهیم داشت.

$$X_t = \gamma t + t + \int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)] + \int_{|x|>۱} xN_t(\mathrm{d}x) \tag{۲.۳}$$

باید در نظر داشته باشیم که در حالت کلی در مورد کراندار بودن $\int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x)]$ نمی‌توان اظهار نظر کرد. ولی با توجه به قضیه (۵.۲.۳)، N_t یک اندازه تصادفی پواسون با نرخ اندازه $t\nu$ خواهد بود . همچنین

$$E[\int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x)]] = t\int_{|x|\leq ۱} x\nu(\mathrm{d}x)$$

این نشان می دهد که اگر ، $\int_{|x|\leq ۱} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$. آنگاه $(a.s.) \quad \int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x)] < \infty$ خواهد بود.

حال فرایند لوی X را در نظر بگیرید که درآن $\int_{|x|\leq ۱} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$. آنگاه قرار دهید،

$$\gamma_۰ = \gamma - \int_{|x|\leq ۱} x\nu(\mathrm{d}x)$$

با جاگذاری آن در رابطه (۲.۳) خواهیم داشت،

$$X_t = \gamma_۰ t + t + \int_{\mathbb{R}^d} x[N_t(\mathrm{d}x)]$$

به بردار ، $\gamma_۰$ یک **دریفت** برای فرایند لوی گفته می شود.

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید X یک فرایند لوی $\mathbb{R}^d$ مقدار باشد .در اینصورت ،

$$E[e^{i<u,X_t>}] = exp[t(i < u, \gamma > -\frac{۱}{۲} < u, Au > + \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<u,X>} - ۱ - i < u, X > I_{|x|\leq ۱}\nu(\mathrm{d}x))].$$

برهان.با توجه به مستقل بودن سه فرایند

۱. $\gamma t + B_t$،

۲. $\int_{|x|>۱} xN_t(\mathrm{d}x)$،

۳. $\int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)]$

آنگاه تابع مشخصه X_t از حاصل ضرب توابع مشخصه آنها بدست می‌آید. در مورد قسمت (۱) داریم

$$E[e^{i<u,\gamma_t+B_t>}] = exp[t(i < u, \gamma > -\frac{۱}{۲} < u, Au >)].$$

برای قسمت (۲)، با توجه به قضیه (۱.۲.۳) آنگاه، $\int_{|x|>۱} xN_t(\mathrm{dx})$ یک فرآیند پواسون مرکب با تابع مشخصه

$$exp(t \int_{|x|>۱} e^{i<u,x>} - ۱\nu(\mathrm{d}x))$$

خواهد بود.

سرانجام در مورد قسمت (۳) روشن است که،

$$\int_{|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)]$$

حد فرآیندهای پواسون مرکب بصورت

$$\int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱} x[N_t(\mathrm{d}x) - t\nu(\mathrm{d}x)]$$

می باشد. که هریک از آنها تابع مشخصه ای بصورت

$$exp(t \int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱} e^{i<u,x>} - ۱\nu(\mathrm{d}x))exp(i < u, t \int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱} x\nu(\mathrm{d}x) >)$$

دارند .باحد گیری ازاین دنباله توابع مشخصه خواهیم داشت،

$$exp(t\int_{|x|\leq ۱} e^{i<u,x>}-۱-i<u,x>\nu(\mathrm{d}x)).$$

حال باضرب توابع مشخصه بدست آمده از سه قسمت بالا ،نتیجه مورد نظر حاصل خواهد شد.

قضیه ۳.۴.۳. اگر X دارای دریفت باشد آنگاه تابع مشخصه آن بصورت ،

$$E[e^{i<u,X_t>}]=exp[t(i<u,\gamma_\circ>)-\frac{۱}{۲}<u,Au>+\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i<u,X>}-۱)\nu(\mathrm{d}x)]$$

خواهد بود.

برهان.اگر در تابع مشخصه بدست آمده برای لوی قرار دهیم

$$\gamma=\gamma_\circ+\int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱}x\nu(\mathrm{d}x)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$E[e^{i<u,X_t>}]=exp[t(i<u,\gamma_\circ>+i<u,\textstyle\int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱}x\nu(\mathrm{d}x)>-\frac{۱}{۲}<u,Au>$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d}e^{i<u,X>}-۱-i<u,X>I_{|x|\leq ۱}\nu(\mathrm{d}x))]$$

$$=exp[t(i<u,\gamma_\circ>+i<u,\textstyle\int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱}x\nu(\mathrm{d}x)>-\frac{۱}{۲}<u,Au>$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i<u,X>}-۱)-\int_{\mathbb{R}^d}i<u,X>I_{|x|\leq ۱}\nu(\mathrm{d}x))]$$

$$=exp[t(i<u,\gamma_\circ>+i<u,\textstyle\int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱}x\nu(\mathrm{d}x)>-\frac{۱}{۲}<u,Au>$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i<u,X>}-۱)-\int_{\int_{\frac{۱}{n}<|x|\leq ۱}}i<u,X>I_{|x|\leq ۱}\nu(\mathrm{d}x))]$$

$$=exp[t(i<u,\gamma_\circ>)-\frac{۱}{۲}<u,Au>+\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i<u,X>}-۱)\nu(\mathrm{d}x)]$$

قضیه ۴.۴.۳. قضیه لوی خنچین

۱. اگر μ یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر روی $(\mathbb{R}^d,\beta(\mathbb{R}^d))$ باشد آنگاه تابع مشخصه آن به فرم زیر خواهد بود

$$\hat{\mu}(u)=exp[(i<u,\gamma>)-\frac{۱}{۲}<u,Au>+\int_{\mathrm{R}^d}e^{i<u,x>}-۱-i<u,x>\mathbb{I}_{|x|\leq ۱}\nu(\mathrm{d}x)]$$

که در آن A یک ماتریس مشخص ،متقارن ونامنفی $d\times d$ است . هم چنین، $\gamma\in\mathbb{R}^d$ و ν یک اندازه لوی روی $\mathbb{R}^d$ است. که در شرط زیر صدق می کند،

$$\int_{\mathbb{R}^d}(|x|^۲\bigwedge ۱)\nu(\mathrm{d}x)<\infty \qquad ,\nu(\circ)=\circ$$

۲. برعکس: برای ماتریس متقارن ونامنفی $d \times d$ اندازه لوی ν روی $\mathbb{R}^d$ وهمچنین $\gamma \in \mathbb{R}^d$ داده شده، آنگاه وجود دارد یک توزیع بی نهایت تقسیم پذیر μ روی $\mathbb{R}^d$ بطوری که تابع مشخصه آن بصورت

$$\hat{\mu}(u) = exp[(i < u, \gamma >) - \frac{۱}{۲} < u, Au > + \int_{\mathrm{R}^d} e^{i<u,x>} - ۱ - i < u, x > \mathbb{I}_{|x| \leq ۱} \nu(\mathrm{d}x)]$$

می باشد.

۳. نمایش $\hat{\mu}$ بوسیله A, ν, γ یکتاست .

برهان. به[۱۹] رجوع شود.

۵.۳ خواص مسیرهای نمونه ای درفرایندهای لوی

فرض کنید X فرایند لوی $\mathbb{R}^d$ مقدار باشد،که به سه تایی (A, ν, γ) مجهز شده است .برای هر $۰ < a \leq b$ تعریف کنید

$$D(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d : \quad a < |x| < b\}.$$

همچنین فرض کنید J یک اندازه جهش روی X باشد.یعنی برای هر $A \in \beta((۰, t] \times \mathbb{R}^d \backslash \{۰\}$

$$J(A, \omega) = \#\{t : (t, \Delta X_t) \in A\}.$$

همچنین درنظر بگیرید، $N_t(B) = J((۰, t] \times B).$ وبرای هر، $\epsilon > ۰$ تعریف کنید،

$$J_\epsilon(t, \omega) = J((۰, t] \times D(\epsilon, \infty)) = N_t(|x| > \epsilon).$$

همچنین،

$$J(t, \omega) = J((۰, t] \times D(۰, \infty)) = \lim_{\epsilon \to ۰} J_\epsilon(t, \omega)$$

و

$$X_\epsilon(t, \omega) = \int_{(۰,t] \times D(۰,\infty)} x J(\mathrm{d}((s, x), \omega) = \int_{D(۰,\infty)} x N_t(\mathrm{d}x).$$

قضیه ۱.۵.۳. مسیرهای نمونه‌ای از X پیوسته هستند اگروفقط اگر $\nu = ۰$.

برهان.چون J یک اندازه تصادفی بااندازه شدت $\lambda \times \nu$ است.بنابراین $J_\epsilon(t)$ ،نشان دهنده تعداد جهش های X در زمان t است، که دامنه این جهش ها از هر ϵ داده شده بزرگتر می‌باشد.و میانگین آن از ،

$$E[J_\epsilon(t)] = E[\int_{(۰,t] \times D(\epsilon,\infty)} J(\mathrm{d}((s, x), \omega)] = t\nu(\{|x| > \epsilon\})$$

بدست می‌آید. بنابراین هیچ جهشی به اندازه صفر نیست اگر وفقط اگر $\nu = ۰$

زیرا می دانیم که اگر $\mathcal{F} \geq ۰$ باشد .آنگاه $\mathcal{F} = ۰$ اگروفقط اگر $E[\mathcal{F}] = ۰$. $\quad (a.s)$

قضیه ۲.۵.۳. الف اگر، $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ آنگاه زمان‌های جهش شمارش پذیر و چگال در $[0, \infty]$ خواهند بود. $(a.s.)$

ب اگر، $0 < \nu(\mathbb{R}^d) < \infty$ آنگاه زمان‌های جهش ،شمارش پذیر نامتناهی باترتیب صعودی خواهند داشت.وبیشتر آنکه توزیع پریودهای بین زمان‌های جهش ، توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\nu(\mathbb{R}^d)}$ خواهد بود. $(a.s.)$

برهان .به قضیه ۲۱.۹از [۱۸] رجوع شود.

۱.۵.۳ دسته بندی فرآیندهای لوی

حال با توجه به مطالب گفته شده می توان فرآیندهای لوی را به سه کلاس زیر می توان تقسیم کرد.
فرض کنید
X فرایند لوی $\mathbb{R}^d$ مقدار باشد،که به سه تایی (A, ν, γ) مجهز شده است .آنگاه

۱. نوع اول)اگر $A = 0$ و،$\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$

۲. نوع دوم)اگر $A = 0$،$\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ و $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$

۳. نوع سوم اگر $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) = \infty$ یا $A \neq 0$

این سه حالت همه حالت ها ی ممکنه را می پوشاند. توجه کنید نوع Bو A فرایندهای لوی بادریفت هستند .ونوع BوC دارای زمان‌های جهش فشرده (چگال) می باشند.

قضیه ۳.۵.۳. فرایند لوی یک بعدی X، صعودی است اگر وتنها اگر $A = 0$،$\nu(-\infty, 0) = 0$ و $\int_{(0,1]} x\nu(\mathrm{d}x) < \infty.$ ودارای یک دریفت $\gamma_0 \geq 0$ باشد.

برهان . به[۱۸] رجوع شود.

قضیه ۴.۵.۳. اگر X فرایند لوی نوع AیاB باشد. آنگاه تغییرات مسیر های نمونه ای X روی بازه $[0, t)$ متناهی خواهندبود.$(a.s)$.
و اگر X از نوع C باشد آنگاه تغییرات مسیر های نمونه ای X روی بازه $[0, t)$ کراندار نخواهد بود.$(a.s)$.

برهان به[۱۸] رجوع شود.

فصل ۴

نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم فرایند لوی

۱.۴ مقدمه

نمایش مارتینگلی در مورد یک فرایند براونی بیان می کند که هر تابع براونی مربع انتگرال پذیر برابر با یک انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی می باشد.ودر ریاضیات مالی موقعی که در بهینه سازی زمان بطور طبیعی نمایان می شود نقش خیلی مهمی بازی می کند.وهمچنین می توان بیان کرد که قضیه نمایش مارتینگل در محاسبات تصادفی لوی بسیار مهم خواهد بود.در مورد حرکت براونی می توان بیان کرد که فرمول کلارک که اساس آن برحساب دیفرانسیل مالوین بنا شده ،وسیله وابزار قدرتمندی برای بیان نمایش مارتینگلی یک حرکت براونی از مسیر نمونه ای وابسته به توابع براونی خواهد بود.حال چون اخیرا هنگام تعمیم حساب دیفرانسیل مالوین برای فرایند های لوی تعداد زیادی از فرمول های کلارک برای انواع گوناگونی از زیر کلاس های لوی ظاهر شدند .بنابراین سعی می کنیم در این پایان نامه با استفاده از یک فرمول کلارک برای ماکسیمم فرایند لوی بطور صریح یک نمایش مارتینگلی بدست آوریم.

۲.۴ تعاریف ومفاهیم اولیه

فرض کنید T یک عدد حقیقی مثبت و $X = \{X_t\}_{t\in[\circ,T]}$ یک فرایند لوی که روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ تعریف شده باشد. چون X یک فرایند لوی است .پس دارای خاصیت های رشد مستقل ،رشد ثابت ،همچنین پیوسته در فضای احتمال می‌باشد.وهمچنین X یک متغیر تصادفی از راست پیوسته ودارای حد چپ می‌باشد ،که به فیلتر $\mathcal{F}$ که توسط X تولید شده، مجهز باشد.در نظر بگیرید σ -جبر، $\mathcal{F}$ که با $\mathcal{F}_T$ مساوی در نظر گرفته شده است .واین

فیلتر در شرایط معمولی صدق می کند .هم چنین برای هر زمان ثابت t داریم، $\mathcal{F}_{t^-} = \mathcal{F}_t.$ که در آن

$$\mathcal{F}_{t^-} = \vee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t).$$

اگر X یک فرایند لوی مربع انتگرال پذیر باشد آنگاه X را می توان بصورت زیر نمایش داد

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(\mathrm{ds}, \mathrm{dz}).$$

که در این نمایش، μ یک عدد حقیقی ، σ یک عدد حقیقی اکیدا مثبت ، W_t یک حرکت براونی استاندارد، $\tilde{N}$ یک اندازه تصادفی پواسون مرکب ،متناظر با اندازه تصادفی پواسون Nاز X است .همچنین اندازه تصادفی پواسون N مستقل از حرکت براونی W_t است.

اندازه تصادفی پواسون مرکب متناظر باآن بصورت $\lambda \times \nu.$ تعریف می‌شود ، که در آن λ یک اندازه لبگ روی $[0, T]$ است. همچنین ν یک اندازه لوی روی X است.یعنی ν یک اندازه σ-متناهی روی $\mathbb{R}$ است.که دارای ویژگی های زیر می‌باشد.

$$\nu\{0\} = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge z^2) \nu(\mathrm{d}z) < \infty.$$

اندازه تصادفی پواسون مرکب $\tilde{N}$ بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$\tilde{N}([0, t] \times A) = N([0, t] \times A) - t\nu(A).$$

فرض کنید ، $\mathcal{P}$ یک σ -میدان قابل پیش بینی روی $[0, T] \times \Omega$ باشد. همچنین، $\beta(\mathrm{R})$ یک σ -میدان بورل روی $\mathbb{R}$ باشد.

به فرایند، $\psi(t, z, \omega)$ یک فرایند **بورل قابل پیش بینی** گفته می شود ،اگر ψ یک $(\mathcal{P} \times \beta(\mathbb{R}))$ -اندازه پذیر باشد.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ آنگاه وجود دارد یک فرایند بورل قابل پیش بینی یکتا $\psi \in L^2(\lambda, \nu, \mathbb{P})$ و یک فرایند قابل پیش بینی یکتا $\phi \in L^2(\lambda \times \mathbb{P})$
بطوری که،

$$F = E[F] + \int_0^T \phi(t) \mathrm{dW_t} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z) \tilde{N}(\mathrm{dt}, \mathrm{dz}).$$

برهان . به[۱۴] رجوع شود.

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنید، $\{X_t\}$ یک فرایند تصادفی و $[0, T]$ یک بازه زمانی باشد. برای هر، s و t بطوری که، $0 \leq s < t \leq T.$ تعریف کنید

الف- $M_{s,t} = sup_{s \leq r \leq t} X_r$

ب- $M_t = M_{0,t}$

آنگاه به، $M_{0,T} = M_T$ **ماکسیمم** فرایند X_t گفته می‌شود.

حال اگر $\{X_t\}$ یک فرایند لوی باشد آنگاه به M_T ماکسیمم فرایند لوی گفته می‌شود.در این پایان نامه سعی شده است برای M_T یک نمایش مارتینگلی ارائه شود.

۳.۴ نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم فرایند لوی

در این بخش از پایان نامه با استفاده از مشتق مالوین وفرمول کلارک -اکون نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم فرایند لوی محاسبه خواهد شد.

به عنوان نمونه در قضیه زیر نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم فرایند براونی آورده شده است.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید W_t یک حرکت براونی استاندارد باشد آنگاه نمایش مارتینگلی ماکسیمم این فرآیند بصورت زیر خواهد بود.

$$M_T = \sqrt{\frac{۲T}{\pi}} + \int_{\circ}^{T} ۲[۱ - \phi(\frac{M_t - W_t}{\sqrt{T-t}})]\mathrm{dW_t}$$

که در آن

$$\phi(x) = \mathbb{P}\{N(\circ, ۱) \leq x\}.$$

برهان . به[۱] رجوع شود.

تعریف ۲.۳.۴. قبل از بیان نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم فرایند لوی ،ابتدا دو عملگر مشتق جهت دار یکی در **جهت حرکت براونی** ودیگری را در جهت **اندازه تصادفی پواسون** تعریف می کنیم. این عملگر های مشتق جهت دار را به ترتیب

$$D^{(۱)} = \mathbb{D}^{(۱)} \longrightarrow L^۲([\circ, T] \times \Omega)$$

$$D^{(۲)} = \mathbb{D}^{(۲)} \longrightarrow L^۲([\circ, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$$

نشان می‌دهیم.

می گوییم F که یک مالوین مشتق پذیر است هرگاه، $F \in \mathbb{D}^{۱,۲} = \mathbb{D}^{(۱)} \cap \mathbb{D}^{(۲)}$

همچنین از نرم زیر برای مشتق مالوین استفاده می کنیم

$$DF := (D^{(۱)}F, D^{(۲)}F)$$

$$\|DF\|^۲ = \|D^{(۱)}F\|^۲_{L^۲(\lambda\times\mathbb{P})} + \|D^{(۲)}F\|^۲_{L^۲(\lambda\times\nu\times\mathbb{P})}$$

لم ۳.۳.۴. اگر $F \in L^۲(\Omega)$ و $\{F_k\}_{k\geq ۱}$ یک دنباله از عناصر $\mathbb{D}^{۱,۲}$ که همگرا F به در نرم $L^۲(\Omega)$ باشند و همچنین اگر $\sup_{k\geq ۱} \| DF_k \| < \infty$ آنگاه F متعلق است به $\mathbb{D}^{۱,۲}$ وهمچنین $\{DF_k\}_{k\geq ۱}$ در $L^۲(\lambda\times\mathbb{P}) \times L^۲(\lambda\times\nu\times\mathbb{P})$ به DF طور ضعیف همگراست.

برهان به[۱۴] رجوع شود.

اگر $F \in \mathbb{D}^{(1)}$ آنگاه همه نتایج در باره مشتق مالوین براونی کلاسیک وهمچنین قانون چاین برای توابع لیپ شیتس در مورد $D^{(1)}$ قابل اجراست .اما این قانون در مورد مشتق مالوین اندازه تصادفی پواسون نیز درست است.

برای مثال فرض کنید ، اگر $F = g(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) \in \mathbb{D}^{(2)}$

$$(t,z) \longmapsto g(X_{t_1} + zI_{[0,t_1]}(t) \cdots + X_{t_n} + zI_{[0,t_n]}(t)) - g(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$$

متعلق به $L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$ باشد.آنگاه

$$D^{(2)}_{t,z} = g(X_{t_1} + zI_{[0,t_1]}(t) \cdots + X_{t_n} + zI_{[0,t_n]}(t)) - g(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$$

قضیه ۴.۳.۴. اگر $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ آنگاه

$$F = E[F] + \int_0^T E[D^{(1)}_t F|\mathcal{F}_t]\mathrm{dW_t} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} E[D^{(2)}_{t,z} F|\mathcal{F}_t]\tilde{N}(\mathrm{dt}, \mathrm{dz})$$

برهان به[۱۴] رجوع شود.

قضیه ۵.۳.۴. اگر X_t یک فرایند لوی مربع انتگرال پذیر باشد آنگاه نمایش مارتینگلی برای ماکسیمم این فرایند در بازه $[0, T]$ بصورت زیر خواهد بود.

$$M_T = E[M_T] + \int_0^T \phi(t, M_t - X_t)\mathrm{dW_t} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z, M_t - X_t)\tilde{N}(\mathrm{dt}, \mathrm{dz})$$

که در آن

$$\phi(t, y) = \sigma \tilde{F}_T(y)$$

و

$$\psi(t, z, y) = (z - y)^+ + \mathbb{I}_{z>y} \int_0^y \tilde{F}_{T-t}(x)(\mathrm{d}x) + \mathbb{I}_{z \le y} \int_{y-z}^y \tilde{F}_{T-t}(x)(\mathrm{d}x)$$

برهان . چون X یک مارتینگل مربع انتگرال پذیر با دریفت است .پس با استفاده ازنامساوی قوی دوب میر M_T نیز یک متغیر تصادفی مربع انتگرال پذیر خواهد بود.

همچنین اگر ، $E|M_T| < \infty$ آنگاه خواهیم داشت

$$E[M_T|\mathcal{F}_t] = M_t + \int_{M_t - X_t}^{\infty} \tilde{F}_{T-t}(z)\mathrm{dz}. \tag{۱.۴}$$

حال فرض کنید، $\{t_k\}_{k\ge 1}$ یک زیر مجموعه چگال از $[0, T]$ باشد .وهمچنین فرض کنید $F = M_T.$ وبرای هر $n \ge 1$ تعریف کنید

$$F_n = \max\{X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}\}.$$

چون $\{F_n\}_{n\ge 1}$ یک دنباله صعودی و کراندار بوسیله F است .پس F_n همگرا به F درنرم $L^2(\Omega)$ می باشد .بنابراین $\lim_{n\to\infty} F_n \longrightarrow F$.

نشان می دهیم که F_n یک مشتق پذیر مالوین است. پس باید نشان دهیم،

$$F_n \in \mathbb{D}^{1,2} = \mathbb{D}^{(1)} \bigcap \mathbb{D}^{(2)}$$

واین از دو مطلب زیر بدست می آید .

۱. عبارت

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

یک فرمول لیپ شیتس از $\mathbb{R}^n$ می باشد.

۲. مشتق مالوین عملگر $D^{(1)}$ در جهت حرکت براونی روی F_n بصورت زیر خواهد بود

$$0 \leq |D_t^{(1)} F_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma I_{\{t \leq t_k\}} I_{A_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sigma I_{A_k} = \sigma.$$

که برای هر، $2 \leq k \leq n$

$$A_1 = \{F_n = X_{t_1}\} \qquad , A_2 = \{F_n \neq X_{t_1}, F_n = X_{t_2}\}$$

$$, \cdots, A_k = \{F_n \neq X_{t_1}, F_n \neq X_{t_2}, \cdots, F_n \neq X_{t_{k-1}}, F_n = X_{t_n}\}$$

واین نشان می دهد که

$$\sup_{n \geq 1} \|D^{(1)} F_n\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} \leq \sigma^2 T.$$

همچنین مشتق مالوین عملگر $D^{(2)}$ در جهت اندازه تصادفی پواسون روی F_n بصورت زیر خواهد بود

$$0 \leq |D_{t,z}^{(2)} F_n| = |\max\{X_{t_1} + zI_{\{t<t_1\}} \cdots + X_{t_n} + zI_{\{t<t_n\}} - F_n| \leq |z|.$$

که این تساوی با توجه به نامساوی زیر حاصل شده است.

$$\|\max\{X_{t_1} + zI_{\{t<t_1\}} \cdots + X_{t_n} + zI_{\{t<t_n\}} - F_n\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega)} \leq T \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(\mathrm{dz}).$$

چون اگر، $z \geq 0$ آنگاه

$$0 \leq \max\{X_{t_1} + zI_{\{t<t_1\}} \cdots + X_{t_n} + zI_{\{t<t_n\}}\} - F_n \leq z.$$

واگر، $z < 0$ آنگاه

$$\begin{aligned}
0 \leq & F_n - \max\{X_{t_1} + zI_{\{t<t_1\}} \cdots + X_{t_n} + |z| I_{\{t<t_n\}}\} \\
&= F_n + \min\{-X_{t_1} + zI_{\{t<t_1\}} \cdots - X_{t_n} + |z| I_{\{t<t_n\}}\} \\
&= \min\{F_n - X_{t_1} + |z| I_{\{t<t_1\}} \cdots - X_{t_n} + |z| I_{\{t<t_n\}}\} \\
&\leq |z|.
\end{aligned}$$

این نشان می دهد که

$$\sup_{n\geq 1}\|D^{(2)}F_n\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega)}\leq T\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(\mathrm{dz}).$$

بنابراین

$$\sup_{n\geq 1}\|DF_n\|^2\leq T(\sigma^2+\int_{\mathbb{R}} z^2\nu(\mathrm{dz}).$$

و این نشان دهنده آنست که F یک مالوین مشتق پذیر است .

از قضیه یکتایی حد نتیجه می‌شود ،

$$\lim_{n\to\infty} D_t^{(1)}F=\sigma I_{[0,\tau]}(t).$$

که در آن

$$\tau=\inf\{t\in[0,T]:X_t=M_T\}$$

با قرارداد . $\inf\emptyset=$

بنابراین τ اولین زمانی است که فرایند لوی X به مقدار سوپریمومش روی بازه $[0,T]$ دسترسی پیدامی کند.

و

$$D_{t,z}^{(2)}F=\sup_{0\leq s\leq T}\{X_s+zI_{t<s}\}-M_T$$

بنابراین

$$E[D_{t,z}^{(1)}F|\mathcal{F}_t]=\sigma\mathbb{P}\{M_t<M_{t,T}|\mathcal{F}_t\}=\sigma\mathbb{P}\{M_{T-t}>a\}.$$

که

$$a=M_t-X_t$$

چون $M_{t,T}-X_t$ مستقل از $\mathcal{F}_t$ وتوزیع یکسان با M_{T-t} دار.دبا توجه به معادله (۱.۴) داریم ،

$$\begin{aligned}
E[D_{t,z}^{(2)}F|\mathcal{F}_t]&=E[\sup_{0\leq s\leq T}\{X_s+zI_{t<s}\}-M_T|\mathcal{F}_t]\\
&=E[\max\{M_t,M_{t,T}+z\}|\mathcal{F}_t]-E[M_T|\mathcal{F}_t]\\
&=M_t+E[(M_{t,T}+z-M_t)^+|\mathcal{F}_t]-E[M_T|\mathcal{F}_t]\\
&=E[(M_{T-t}+z-a)^+]-\int_a^\infty \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

که

$$a=M_t-X_t$$

چون

$$E[(M_{T-t}+z-a)^+]=\int_{a-z}^\infty \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx}.$$

خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\psi(t,z,a) &= \int_{a-z}^{\infty} \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx} - \int_{a}^{\infty} \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx}\\ &= \mathbb{I}_{\{z\geq a\}}(z-a) + \mathbb{I}_{\{z\geq a\}} \int_{\circ}^{a} \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx}\\ &+ \mathbb{I}_{\{a>z\geq \circ\}} \int_{a-z}^{a} \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx} - \mathbb{I}_{\{z<\circ\}} \int_{a}^{a-z} \bar{F}_{T-t}(x)\mathrm{dx}.\end{aligned}$$

سرانجام نمایش مارتینگل برای ماکسیمم فرایند لوی از فرمول کلارک -اکون بوسیله قضیه (۴.۳.۴) بصورت ،

$$M_T = E[M_T] + \int_{\circ}^{T} \phi(t, M_t - X_t)\mathrm{dW_t} + \int_{\circ}^{T} \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z, M_t - X_t)\tilde{N}(\mathrm{dt}, \mathrm{dz})$$

بدست خواهد آمد.

مراجع

[1] Clark, J. M. C.(1970) .**The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, Ann.** Math. Statist. 41 (1970), 1282–1295.

[2] Davis, M. H. A.(2005)**Martingale representation and all that, in Advances in control, communi- cation networks, and transportation systems**, Systems Control Found. Appl. (2005) 57–68, Birkh¨auser Boston.

[3] Embrechts, P., Goldie, C. M., Veraverbeke, N. (1979). **”Subexponentiality and infinite divisibility”**, Probability Theory and Related Fields, 49(3), 335-347.

[4] J.-F. and R´emillard, B.(2007).**Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging, Stochastic Anal.** Appl., 25 (2007), 801–820.

[5] Løkka, A.(2004).**Martingale representation of functionals of L´evy processes, Stochastic Anal**. Appl. 22 (2004), 867–892.

[6] Billingsley,P.(1986).**Probability and Measure** .wiley new york.

[7] Cont,R.and Tankov,P.(2003).**Financial Modeling with Jump Processes.**Chapman, Hall CRC.

[8] Di Nunno, G. Øksendal, B. and Proske, F.(2009). **Malliavin Calculus for L´evy Processes with Applications to Finance** Universitext - Springer-Verlag, Berlin.

[9] Dudley,R.m.(1989).**Analysis and Probability** Wadsworth,Pacific Grove,california.

[10] Folland, G. B. (1999). **”Real analysis”**.

[11] Krishnamoorthy, K. (2006).**Handbook of Statistical Distributions with Applications**.

[12] Kyprianou,A.E.(2006).Introductory lectures on **Fluctuations of levy Processes with Applications,Springer-Verlag,Berlin.**

[13] Rudin, W. (1991). ”Functional Analysis”. McGraw Hill, New York.

[14] Renaud, J.-F. and R´emillard, B.(2009). Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable L´evy process, GERAD Technical report G-2009.

[15] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. L. (1998). ”Stochastic Processes for Insurance and Finance”.

[16] Ross, S. M. (1983).” Stochastic Processes”. JohnWiley, NewYork.

[17] Samimi.H,Fathi.B.(,2006). Introduction to Stochastic Processes and its Application.

[18] Sato,K.(1999)levy processes and Infinitely Divisible Distribution,Cambridge University Press,Cambridge,UK.

[19] Tankov,p.(2004).Financial Modeling with levy Processes.lecture Notes,Ecole Polytechnique,France.

[20] Varsei, A. ”Red Analysis–Notes”.Lecture Notes, Preprint.

[21] Wilde, I. F. (2009).” Stochastic Analysis–Notes”. Lecture Notes, King’s College, London.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

امید .... Expectation
امید شرطی .... conditional expectation
انتگرال .... Integral
اندازه احتمال .... Probability measure
اندازه تصادفی پواسون .... measure random Poisson
اندازه جهش .... Jump measure
اندازه حاصلضرب .... Product measure
اندازه لوی .... levey measure

ب

بی‌نهایت تقسیم‌پذیر .... Infinite Divisibility

پ

پایه تصادفی .... stochastic basis
پواسون .... poisson
پیچش .... convolution
پیشامد .... Event

ت

تابع ساده .... Simple function
تابع توزیع .... Random function
تابع مشخصه .... Characteristic function
تجزیه لوی-ایتو .... levy-Ito decomposition
تقریبا مطمئن .... Almost surely
تقریبا همه جا .... Almost everywhere
تغییرات محدود .... Bounded Variation
توزیع .... Distribution

توزیع نرمال استاندارد .... Standard normal distribution

ج

جرم نقطه‌ای .... Point mass

چ

چگال .... dense

ز

زمان توقف .... Stopping times

س

سازگار .... Adapted

ف

فرآیند پواسون .... Poisson process

فرآیند پواسون مرکب .... Compound poisson process

فرآیند تصادفی .... Stochastic process

فرآیند جهش .... Jump process

فرآیند شمارشی .... counting process

فرآیند صعودی .... Increasing process

فرآیند لوی .... levy process

فیلتر .... Filtration

ق

قابل پیش بینی .... Predictable

قدم زدن تصادفی .... Random walk

ک

کراندار .... Bounded

م

مارتینگل .... Martingale

متغیر تصادفی .... Random variable

مربع انتگرال‌پذیر .... Square integrable

مستطیل .... Rectangle

مسیر نمونه‌ای .... Sample paths

ن

نقطه به نقطه .... Pointwise

نمو ایستا .... Stationary Increment
نمو مستقل .... Independent Increment

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

سازگار .... Adapted

تقریبا همه جا .... Almost everywhere

تقریبا مطمئن .... Almost surely

B

کراندار .... Bounded

تغییرات محدود .... Bounded Variation

C

تابع مشخصه .... Characteristic function

فرایند پواسون مرکب .... Compound poisson process

امید شرطی .... Conditional expectation

پیچش .... Convolution

فرایند شمارشی .... Counting process

D

چگال .... Dense

توزیع .... Distribution

E

پیشامد .... Event

امید ریاضی .... Expectation

F

فیلتر .... Filtration

I

فرایند صعودی .... Increasing process

رشد مستقل .... Independent Increment

بی‌نهایت تقسیم‌پذیر .... Infinite Divisibility

انتگرال .... Integral

J

Jump measure .... اندازه پرش

Jump process .... فرایند جهش

l

levey measure .... اندازه لوی

levy-Ito decomposition .... تجزیه ایتو-لوی

levy process .... فرایند لوی

M

Martingale .... مارتینگل

Measure random Poisson .... اندازه تصادفی پواسون

P

Point mass .... جرم نقطه

Pointwise .... نقطه به نقطه

Poisson .... پواسون

Poisson process .... فرایند پواسون

Predictable .... قابل پیش بینی

Probability measure .... اندازه احتمال

Probabilistic .... احتمالی

Product measure .... اندازه حاصل ضرب

R

Random function .... تابع تصادفی

Random walk .... قدم زدن تصادفی

Rectangle .... مستطیل

S

Sample paths .... مسیر نمونه‌ای

Simple function .... تابع ساده

Square integrable .... مربع انتگرال‌پذیر

Standard normal distribution .... توزیع نرمال استاندارد

Stationary Increment .... رشد ثابت

Stochastic basis .... پایه تصادفی

Stochastic process .... فرایند تصادفی

Stopping times .... زمان توقف

Aabstract

Levy process is one of the most important and most widely used process is in financial mathematics. This process begins when the stock market pulled down market, a sudden jump in prices will occur. Such markets for stochastic modeling process used Levy So the issues surrounding this procedure to model the stock markets is important. In this essay,at first the process itself had been intruduced and then its relation with poisson, Compound poisson process,Infinitely Divisibility was stated . In the last chapter for A Martingale representation for the maximum of a levy process presented.

latinkeywords:

Compound poisson process;Infinite Divisibility;levy process;Measure random Poisson;Poisson process ;Measure random;Random function;Random Variable;Almost surely

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematics Analysis

A Martingale representation for the Maximum of a levy process

By: Hossein Mohammad Khani

Supervisor

Elham Dastranj

January 2017