

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
أن هدانا الله



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

برآورد خطای پسین روش گالرکین ناپیوسته به کار برده شده برای قوانین بقا اسکالر غیرخطی یک بعدی

نگارنده: محمد اسماعیلی

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

بهمن ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد اسماعیلی به شماره دانشجویی ۹۳۰۲۵۱۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان برآورد خطای پسین روش گالرکین ناپیوسته به کار برده شده بری قوانین بقاء اسکالر غیرخطی یک بعدی که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۱۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : <u>خوب</u> امتیاز <u>۱۷/۸</u>)	☐ دفاع مجدد	☐ مردود
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی		

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علی مس فروش	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تقدیم به پدر و مادر مهربانم که هر لحظه
وجودم را از چشمه سار پر از عشق چشمانشان
سیراب می کنند و در سختی ها و دشواری های
زندگی همواره یآوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی
محکم و مطمئن برایم بوده اند.

سپاس‌گزاری...

با سپاس از سه وجود مقدس:
آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...
موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...
و عاشقانه سوختند تا گرما بخش وجود ما و روشن‌گر راهمان باشند...
پدرانمان
مادرانمان
استادانمان

محمد اسماعیلی
بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب محمد اسماعیلی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **برآورد خطای پسین روش گالرکین ناپیوسته به کار برده شده برای قوانین بقا اسکالر غیر خطی یک بعدی**، تحت راهنمایی دکتر علی مس فروش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمد اسماعیلی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه می‌خواهیم برای روش گالرکین ناپیوسته به کار برده شده برای قوانین بقا اسکالر غیرخطی در یک بعد، یک برآورد خطای پسین ارائه دهیم و آن را تجزیه و تحلیل کنیم. این برآورد خطا محاسباتی ساده دارد و با حل مسأله محلی بدون شرایط مرزی روی هر عضو از مش بندی به دست می‌آید. ما ابتدا نشان می‌دهیم که عبارت خطای پیشرو، روی هر عضو از مش بندی با حل چندجمله‌ای رادو درجه $p+1$ متناسب است، به شرطی که از چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار درجه p که $p \geq 1$ است، استفاده کنیم. با توجه به این نتایج ثابت می‌کنیم که برای راه حل‌های هموار، این برآورد خطا در زمان ثابت، به خطاهای مکانی حقیقی در نرم L_2 تحت مش بندی ایجاد شده همگراست و ثابت می‌کنیم مرتبه همگرایی آن $p + \frac{1}{2}$ است. در پایان ثابت می‌کنیم که شاخص کارآمد جهانی در نرم L_2 با نرخ $O(h^{\frac{1}{2}})$ همگرا به یک است. برای معتبر کردن نتایج چند مثال می‌آوریم و مشخص می‌کنیم که نرخ همگرایی برای نتایج عددی محاسبه شده، از نرخ نظری به دست آمده بهتر است.

کلمات کلیدی:

برآورد خطای پسین، روش گالرکین ناپیوسته، طرح نیمه گسسته، عناصر متناهی، ابرهمگرایی، قوانین بقا

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه
۱	۱.۱ کوتاه درباره آنالیز عددی
۲	۲.۱ مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۲	۱.۲.۱ انواع شرایط مرزی
۴	۳.۱ معادلات اصل بقا (قوانین بقا)
۵	۴.۱ تاریخچه روش گالرکین ناپیوسته
۷	۵.۱ نمادها، تعاریف و قضیه‌ها
۱۳	۱.۵.۱ نامساوی گرونوال
۱۷	۲ تجزیه و تحلیل خطای روش گالرکین ناپیوسته
۱۷	۱.۲ طرح نیمه گسسته گالرکین ناپیوسته
۲۱	۲.۲ تجزیه و تحلیل خطای روش گالرکین ناپیوسته
۴۵	۳ برآورد خطای پسین
۴۶	۱.۰.۳ تابع شار خاص
۵۴	۲.۰.۳ تابع شار عمومی
۵۷	۴ مثال‌های عددی
۶۶	۱.۴ نتایج ملاحظات
۶۹	مراجع

فهرست تصاویر

۵۸	۱.۴	نمودار $\log - \log$ برای $\ e(\cdot, 1)\ $ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۱.۰.۴ .
۵۹	۲.۴	نمودار $\log - \log$ برای $\ e\ ^*$ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۱.۰.۴ . .
۶۰	۳.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۱.۰.۴
۶۰	۴.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta \theta$ و برای مثال ۱.۰.۴
۶۱	۵.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۲.۰.۴
۶۲	۶.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta \theta$ و برای مثال ۲.۰.۴
۶۳	۷.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۳.۰.۴
۶۳	۸.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta \theta$ و برای مثال ۳.۰.۴
۶۴	۹.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۴.۰.۴
۶۵	۱۰.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta \theta$ و برای مثال ۴.۰.۴
۶۵	۱۱.۴	نمودار $\log - \log$ برای $\ e(\cdot, 1)\ $ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۵.۰.۴ .
	۱۲.۴	نمودار $\log - \log$ برای $\ e\ ^*$ در $t = 1$ در مقابل طول مش h ، برای مثال
۶۶	۵.۰.۴	
۶۶	۱۳.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۵.۰.۴
۶۶	۱۴.۴	نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta \theta$ و برای مثال ۵.۰.۴

فهرست جداول

۵۹		خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۱.۰.۴).	۱.۴
۶۱		خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۲.۰.۴).	۲.۴
۶۲		خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۳.۰.۴).	۳.۴
۶۳		خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۴.۰.۴).	۴.۴
۶۴		خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۵.۰.۴).	۵.۴

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ کوتاه درباره آنالیز عددی

آنالیز عددی یکی از زیباترین مباحث در ریاضیات کاربردی است، که از یک طرف با ریاضیات محض و از طرف دیگر با محاسبات مهندسی سر و کار دارد. اگر چه این مبحث قرن‌ها پیش از اختراع کامپیوتر ابداع شده است، ولی به جرأت می‌توان گفت که کامپیوتر با توجه به سرعت زیاد در عملیات به پیشرفت آن کمک فراوانی کرده است. در محاسبات عددی «آنالیز عددی کاربردی» باید سعی شود زمان اجرای برنامه کاهش یابد. همچنین باید همواره به دقت در محاسبات نیز توجه کرد تا هرچه بیشتر جواب نهایی به جواب اصلی نزدیک شود. الگوریتم‌های آنالیز عددی در حل بسیاری از مسائل علوم مهندسی نظیر طرح ساختارهایی چون پل‌ها، هواپیماها، پیش‌بینی هوا، تحلیل و طراحی ساختار ملکول‌ها و یافتن منابع نفت به کار می‌روند. یک متخصص آنالیز عددی اغلب علاقه‌مند است که تعداد گام‌ها کمتر، زمان اجرا سریعتر، حافظه مورد نیاز کوچکتر و دقت بالاتر باشد. فایده اصلی آنالیز عددی این است که حتی زمانی که مسأله دارای جواب دقیق نیست، پاسخی به صورت عددی برای ما دارد. نتیجه یک روش تحلیلی، در حالت معمول یک تابع ریاضی است، در حالی که نتیجه بررسی عددی صرفاً عدد است که می‌توان با رسم آن، رفتار جانبی پاسخ را درک کرد. فرق مهم دیگر این است که نتیجه محاسبات عددی یک مقدار تقریبی است، اما با مقداری هزینه بیشتر در طراحی الگوریتم، می‌توان دقت را افزایش داد.

۲.۱ مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در مدل سازی بعضی از مسائل ساده فیزیکی و یا علوم مهندسی به یک معادله دیفرانسیل معمولی «ODE^۱» برخورد می کنیم. در واقع این مسائل ساده در حالت کلی وابسته به یک متغیر، مانند متغیر زمان (t) و یا متغیر مکان (x) هستند. اما بسیاری از مسائل متنوع و مهم فیزیکی و مهندسی به دو یا چند متغیر بستگی دارند. مسائلی در زمینه دینامیک سیالات، ژئوفیزیک (انتشار موج زلزله ای)، انتقال حرارت، آیرودینامیک، علوم نور، مهندسی نفت، مکانیک کوانتوم و نظریه های الکترومغناطیسی، نمونه هایی از این مسائل هستند که در تجزیه و تحلیل آن ها به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی «PDE^۲» برخورد می کنیم. معادله موج، معادله انتقال حرارت، معادله لاپلاس، معادله پواسن و معادله شرودینگر از معروف ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. در واقع یک معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه m عبارت است از معادله ای که مجهول آن یک تابع دو متغیره یا بیشتر «مانند $u(x, t)$ » است و حداقل مشتق جزئی نسبت به دوتا از متغیرهای مستقل، در معادله ظاهر شده باشد و یکی از این مشتقات از مرتبه m باشد و مشتق بالاتر از m در آن ظاهر نشده باشد. برای مثال معادله زیر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می شود:

$$u_t + (f(u))_x = g(x, t).$$

یک معادله دیفرانسیل جزئی که یک مدل فیزیکی را بیان می کند، معمولاً بی نهایت جواب دارد. برای انتخاب جوابی که نمایش دهنده جواب فیزیکی مسأله باشد، باید شرایط دیگر جواب را از مسأله فیزیکی استخراج و همراه با معادله منظور کنیم. این نوع شرایط را شرایط تکمیلی گویند که بر دو نوع است.

نوع اول: تابع مجهول باید برای $t \geq 0$ تعریف شود. در این صورت از روی شرایط فیزیکی، تابع مجهول و مشتقات آن تا مرتبه $m-1$ در $t = 0$ داده شده است. این گونه شرایط را **شرایط اولیه^۳** می گویند.

نوع دوم: تابع مجهول باید روی میدانی مانند Ω ، از فضا تعریف شود. در این صورت مقدار این تابع یا مشتق جهت دار آن و یا ترکیب خطی از این دو در روی مرز Ω قابل تعیین است و همراه با معادله داده می شود. اینگونه شرایط را **شرایط مرزی** می گویند.

۱.۲.۱ انواع شرایط مرزی

محدودیت ها یا همان شرایط مرزی در مسائل، در حالت های مختلفی داده می شود که مهم ترین آن ها در ریاضیات مهندسی به صورت زیر دسته بندی می شود:

^۱ordinary differential equations

^۲partial differential equations

^۳initial conditions

۱. **شرط مرزی دیریکله:** در صورتی که شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار تابع مجهول بر روی مرز میدان مکان داده شده باشد، آن را شرط مرزی دیریکله^۴ گویند. برای مثال شرط زیر نمونه‌ای از یک شرط مرزی دیریکله است.

$$u(-1, t) = h(t), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

شرط مرزی دیریکله بیان می‌کند که مقدار تابع در برخی از مرزها، ثابت است. برای نمونه در مسأله انتقال حرارت، اگر ابتدای میله را در محلول آب و یخ قرار دهیم، دما در آن نقطه همواره صفر است، یعنی شرط به صورت $u(0, t) = 0$ نوشته می‌شود.

۲. **شرط مرزی نیومن:** اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار مشتق تابع مجهول «در جهت بردار نرمال بر روی مرز میدان مکان» داده شده باشد، آن را شرط مرزی نیومن^۵ گویند. برای مثال شرط مرزی زیر نیومن است.

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

به عنوان مثال، از نظر فیزیکی عایق بودن مرزها در مسأله انتقال حرارت شرط مرزی نیومن را ایجاد می‌کند.

۳. **شرط مرزی روبین (مخلوط):** اگر شرایط مرزی در قسمت‌هایی از مرز بر حسب مقدار تابع و در قسمت‌های دیگر بر حسب مقدار مشتق تابع در جهت بردار نرمال داده شده باشد، آن را شرط مرزی روبین^۶ گویند. برای مثال شرط زیر نمونه‌ای از شرط مرزی روبین است.

$$u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

۴. **شرط مرزی تناوبی:** اگر تفاضل مقدار تابع در دو سر بازه «بازه‌ای متناهی» و همچنین تفاضل مقدار مشتق تابع در دو سر بازه «بازه‌ای متناهی» داده شده باشد، شرط مرزی را متناوب گویند. به عنوان مثال دو شرط مرزی زیر تناوبی هستند.

$$u(-L, t) - u(L, t) = 0, \quad u_x(-L, t) - u_x(L, t) = 0, \quad -L \leq x \leq L.$$

یا برای بازه $0 \leq x \leq L$ شرایط زیر نمونه‌ای از شرط تناوبی محسوب می‌شوند:

$$u(0, t) - u_x(L, t) = 0, \quad u_x(0, t) - u(L, t) = 0.$$

برای نمونه میله‌ای به طول L را در نظر بگیرید که منبع حرارتی مانند شمع، به طور دقیق وسط آن قرار داده شود. ابتدا و انتهای میله فاصله‌ای یکسان از منبع حرارتی

^۴ dirichlet

^۵ neumann

^۶ robin

دارند. بنابراین در هر لحظه t ، مقدار دما u و تغییرات دمایی (u_x) در این دو نقطه یکسان است. یعنی داریم:

$$u(\circ, t) = u(L, t), \quad u_x(\circ, t) = u_x(L, t)$$

۳.۱ معادلات اصل بقا (قوانین بقا)

یکی از معروفترین معادلات مرتبه‌ی اول، معادلات مربوط به قوانین بقاست^۷. اینگونه معادلات در حالت کلی دارای جواب پیوسته نیستند. تطبیق پدیده‌های فیزیکی مربوط به آن با مدل ریاضی آن از جمله مباحث جذاب این دسته از معادلات است. اگر مسیر جریانی از یک ماده را در راستای یک خط راست در نظر بگیریم، مانند حرکت گاز یا جریان آب در یک لوله، چگالی مقدار ماده در زمان t در نقطه x را با $u(x, t)$ نشان می‌دهیم. دو نقطه x_1 و x_2 را از این مسیر در نظر بگیرید، مقدار ماده‌ای که در فاصله بین این دو نقطه در زمان t قرار دارد، عبارت است از:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx.$$

بنابراین میزان تغییر این ماده در بین زمان‌های t و $t + \Delta t$ برابر خواهد بود با:

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) dx.$$

از طرف دیگر اگر $\omega(x, t)$ را سرعت جریان در نقطه x در لحظه t در نظر بگیریم، در فاصله زمانی $(t, t + \Delta t)$ مقدار $\omega(x_1, t) \Delta t$ ماده از نقطه x_1 وارد محدوده مورد نظر شده و مقدار $\omega(x_2, t) \Delta t$ از نقطه x_2 خارج شده است. در این صورت باید:

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) dx = (\omega(x_1, t) - \omega(x_2, t)) \Delta t.$$

بنابراین وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود:

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) dx + \omega(x_2, t) - \omega(x_1, t) = 0.$$

معادله بالا، صورت انتگرالی معادله اصل بقا نامیده می‌شود. اگر x_1 را ثابت بگیریم و $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ آنگاه:

$$u_t(x, t) + \omega_x(x, t) = 0.$$

معادله فوق صورت دیفرانسیلی معادله اصل بقاست. ارتباط بین جریان ω با چگالی u از مدل‌های فیزیکی مسأله نتیجه می‌شود. در بسیاری از مدل‌ها جریان را تابعی از چگالی در

^۷conservation laws

نظر می‌گیرند، به‌طور مثال $\omega = f(u)$. در این صورت معادله اصل بقا به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$u_t + (f(u))_x = 0.$$

در این معادله u باید تابعی مشتق‌پذیر باشد، در صورتی که در فرم انتگرالی حتی لازم نیست که جواب پیوسته باشد. به همین دلیل در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی جواب‌های ناپیوسته از معادلات اصل بقا موجودند.

۴.۱ تاریخچه روش گالرکین ناپیوسته

در دنیای مهندسی امروز با مسائل، مشکلات و پدیده‌هایی مواجه هستیم که در آن‌ها جابجایی نقش بسیار مهمی بازی می‌کند. دامنه این مسائل بسیار متنوع است: هواشناسی، پیش‌بینی‌های جوی، دینامیک گازها، آکوستیک، جریان‌های توربولانس، شبیه‌سازی جریان‌های نفتی، مدل‌سازی آب‌های کم عمق، انتقال مواد آلوده کننده زیرزمینی، محیط‌های متخلخل، الکترومغناطیس و غیره. حل این مسائل بسیار مهم بوده و به همین جهت علاقه پژوهش‌گران و دانشمندان زیادی را به خود جلب کرده است. در واقع این مسائل که جزء دسته معادلات هذلولوی قرار می‌گیرند، دارای مشکلات مشترکی هستند. این نوع مسائل مقدار مرزی باعث جواب‌هایی می‌شود که این جواب‌ها دارای پرش^۸ «شوک» هستند و در نتیجه این‌گونه جواب‌ها را نمی‌توان توسط روش‌های معمولی عناصر متناهی و یا تفاضلات متناهی به‌دست آورد. در روش عناصر متناهی همیشه با این سوال مواجه هستیم که آیا عناصر متناهی پیوسته به عناصر متناهی ناپیوسته برتری دارند یا خیر؟ در جواب باید گفت، عناصر متناهی پیوسته برای مسائلی با جواب‌های پیوسته مناسبند. در مسائل قوانین بقا با مسائلی مواجه هستیم که جواب دارای ناپیوستگی است و از این دیدگاه استفاده از عناصر متناهی پیوسته مناسب این‌گونه مسائل نیست. روش گالرکین ناپیوسته بر این پایه بنا شده که یک مسأله مقدار مرزی می‌تواند توسط توابع چندجمله‌ای تکه‌ای روی یک مش‌بندی بدون هیچ‌گونه شرطی از پیوستگی حل شود.

روش گالرکین ناپیوسته «DG» برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط رید و هیل به عنوان تکنیکی برای حل مسأله انتقال نوترون مطرح شد [۳۱]. البته به‌علت پایین بودن توان محاسباتی و نرم‌افزاری در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ روش‌های گالرکین ناپیوسته از سوی جامعه‌ی مهندسی مورد استقبال قرار نگرفت. با بالا رفتن توان محاسباتی کامپیوترها، روش‌های گالرکین ناپیوسته از اوایل دهه ۹۰ تا کنون به‌علت خواص جالب آن‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. علاوه بر روش‌های اولیه گالرکین ناپیوسته، روش‌های گالرکین ناپیوسته موضعی «LDG» نیز در سال‌های اخیر توسعه یافته و مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در سال ۱۹۷۴ لِساینت و راویارت در [۲۹]، اولین تحلیل عددی از روش را برای یک معادله فرارفت خطی

^۸jump

ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از این روش و با به‌کارگیری چندجمله‌های تکه‌ای خطی از درجه p ، خطایی از مرتبه $2p+1$ برای حل این معادلات به‌دست آوردند. بعد از آن روش DG برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی در [۲۹، ۲۸، ۱۸، ۷] و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هایپربولیک^۹ در [۲۷، ۲۶، ۲۲، ۲۳، ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴]، انتشار^{۱۰} و همرفت انتشار^{۱۱} در [۳۲، ۱۳، ۱۲] مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۸۲ چاونت و سالزانو روش رانگ کوتا گالرکین ناپیوسته را برای مسائل قوانین بقاء ابداع کرده و توسعه دادند. در روش رانگ کوتا گالرکین ناپیوسته، برای گسسته‌سازی فضا از روش گالرکین ناپیوسته و برای پیشروی در زمان از روش رانگ کوتا استفاده می‌شود. بحث مفصلی از تاریخچه روش DG و کاربردهای آن را می‌توان در [۲۴] و مراجع ذکر شده در آن دنبال کرد.

در سال‌های اخیر مطالعه ابرهمگرایی^{۱۲} و برآورد خطای پسین^{۱۳} روش DG یک میدان تحقیقاتی فعال در آنالیز عددی بوده است. شناخت خواص ابرهمگرایی می‌تواند استفاده شود برای:

۱. ایجاد یک برآورد پسین ساده و مجانبی^{۱۴} دقیق برای خطاهای ناشی از گسسته‌سازی.
۲. کمک به تشخیص ناپیوستگی برای پیدا کردن عناصری که نیاز به محدود کننده، پایدارسازی و یا مش‌بندی دارند.

خواص ابرهمگرایی روش DG در [۲۹، ۲۵، ۶، ۷] برای معادلات دیفرانسیل معمولی، در [۹، ۷، ۵، ۳] برای مسائل هایپربولیک و در [۲۱، ۲۰، ۱۹، ۱۱، ۵، ۴، ۲، ۱] برای مسائل انتشار و همرفت انتشار مورد مطالعه قرار گرفته است. برآوردگر خطای پسین، راه‌حل عددی شناخته شده‌ای را برای به‌دست آوردن تقریبی از خطا، نسبت به جواب دقیق به‌کار می‌گیرد. اولین نتیجه ابرهمگرایی روش DG، برای معادلات دیفرانسیل معمولی در مقاله آدجرید و همکاران در [۷] ارائه شد. آن‌ها ثابت کردند که راه‌حل DG درجه p ، برای معادله $u' + au = 0$ در ریشه‌های چندجمله‌ای رادو راست درجه $p+1$ ، دارای ابرهمگرایی $O(h^{p+2})$ است. محاسبات عددی نشان می‌دهد که این نتایج ابرهمگرایی، برای راه‌حل DG مسائل همرفت گذرا «ناپایدار» قابل تعمیم است. چنگ و شو در [۲۱] خواص ابرهمگرایی روش‌های DG و LDG را برای حل معادلات خطی یک بعدی قوانین بقاء و معادلات همرفت انتشار مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها ثابت کردند، زمانی که از شار خلاف جهت باد^{۱۵} برای قوانین بقاء و شار متناوب^{۱۶} برای معادله همرفت انتشار

^۹hyperbolic

^{۱۰}diffusion

^{۱۱}convection-diffusion

^{۱۲}superconvergence

^{۱۳}a posteriori error

^{۱۴}asymptotically

^{۱۵}flux upwind

^{۱۶}alternating flux

استفاده شود، ابرهمگرایی به سمت تصویر خاصی از جواب دقیق می‌رود. مرتبه ابرهمگرایی برای هر دو حالت ثابت شد که، برابر $p+3$ است، زمانی که از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای درجه p با $p \leq 1$ استفاده شود. منگ و همکاران در [۳۰] خواص ابرهمگرایی روش DG را برای قوانین بقاء غیرخطی یک بعدی مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نتایج ارائه شده در این پایان‌نامه بسیار زیاد به نتایج این مرجع وابسته است.

موفقیت روش DG از جمله پایداری و دقت آن، به طراحی شار عددی بستگی حیاتی دارد. شار عددی را می‌توانیم از تحقیقات گسترده‌ای که در طرح‌های حجم محدود و تفاضلات متناهی صورت گرفته‌اند، انتخاب کنیم. روش گالرکین ناپیوسته رده‌ای از روش عناصر متناهی است که در آن از توابع پایه‌ای به‌طور کامل ناپیوسته استفاده می‌شود. در این روش اغلب از توابع چندجمله‌ای تکه‌ای به عنوان توابع پایه‌ای استفاده می‌شود. روش عناصر متناهی گالرکین ناپیوسته روش مناسبی برای معادلات دیفرانسیل جزئی است، به این دلیل که کارایی و انعطاف‌پذیری و مرتبه همگرایی بالا بدون تکرارهای بالا به دست می‌آید. یک بهبود روش گالرکین ناپیوسته، روش گالرکین ناپیوسته موضعی «LDG» است. ایده روش گالرکین ناپیوسته موضعی، بازنویسی مناسب معادله با مشتقات جزئی مرتبه بالا به یک دستگاه مرتبه اول و پس از آن اعمال روش گالرکین ناپیوسته به روی دستگاه معادله است.

۵.۱ نمادها، تعاریف و قضیه‌ها

در این بخش نمادها، تعاریف و قضیه‌هایی که در این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده شده است، بیان کرده‌ایم.

تعریف ۱.۵.۱. تبدیل آفین یا نگاشت آفین^{۱۷} بین دو زیر فضا برداری عبارت است از یک تبدیل خطی به شکل $x \rightarrow Ax + b$ است، که A ماتریسی معکوس‌پذیر و b یک بردار است. نگاشت آفین در فضای اقلیدسی دارای شرایط زیر می‌باشد:

۱. خاصیت هم خطی نقاط را حفظ می‌کند؛ یعنی، سه نقطه بر یک خط راست را بر سه نقطه واقع بر یک خط دیگر می‌نگارد و برعکس.

۲. نسبت فاصله نقاط واقع بر یک خط را حفظ می‌کند؛ یعنی، اگر p_1, p_2 و p_3 سه نقطه واقع بر یک خط باشند، نسبت $\frac{|p_2 - p_1|}{|p_3 - p_1|}$ را حفظ می‌کند.

$\tilde{L}_p(\xi)$ ، نشان دهنده چندجمله‌ای لژاندر^{۱۸} درجه p ، روی $[-1, 1]$ است.

تعریف ۲.۵.۱. چندجمله‌ای رادو راست^{۱۹} درجه $p+1$ به صورت (۱.۱) تعریف می‌شود،

$$\tilde{R}_{p+1}^+(\xi) = \tilde{L}_{p+1}(\xi) - \tilde{L}_p(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (1.1)$$

^{۱۷}affine mapping

^{۱۸}legendre polynomial

^{۱۹}right Radau polynomial

که $p+1$ ریشه متمایز حقیقی به صورت، $\xi_p^+ = 1 < \dots < \xi_0^+ < -1$ دارد. همچنین چندجمله‌ای رادو چپ درجه $p+1$ را به صورت (۲.۱) تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{R}_{p+1}^-(\xi) = \tilde{L}_{p+1}(\xi) + \tilde{L}_p(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (2.1)$$

تعریف می‌کنیم، که $p+1$ ریشه حقیقی متمایز به صورت، $-1 = \xi_0^- < \dots < \xi_p^- < 1$ دارد.

تعریف ۳.۵.۱. برای چندجمله‌ای لژاندر درجه p که $-1 \leq \xi \leq 1$ ، رابطه تعامد^{۲۰} (۳.۱) برقرار است،

$$\int_{-1}^1 \tilde{L}_p(\xi) \tilde{L}_q(\xi) d\xi = \frac{2}{\sqrt{p+1}} \delta_{pq}, \quad p, q \geq 0, \quad (3.1)$$

که δ_{pq} نماد دلتای کرونکر^{۲۱} می‌باشد، و به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

تعریف ۴.۵.۱. چندجمله‌ای لژاندر درجه $p+1$ را روی $[-1, 1]$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\tilde{L}_{p+1}(\xi) = \frac{(2p+2)!}{2^{p+1}[(p+1)!]^2} \xi^{p+1} + \tilde{q}_p(\xi), \quad \tilde{q}_p \in P^p([-1, 1]).$$

تعریف ۵.۵.۱. با استفاده از نگاشت آفین استاندارد (۴.۱)، هر عنصر I_i را به بازه $[-1, 1]$ ، انتقال می‌دهیم،

$$x(\xi, h_i) = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \frac{h_i}{2} \xi. \quad (4.1)$$

تعریف ۶.۵.۱. چندجمله‌ای انتقال رادو روی I_i به صورت زیر به دست می‌آید.

$$R_{p+1,i}^\pm(x) = \tilde{R}_{p+1}^\pm\left(\frac{2x - x_i - x_{i-1}}{h_i}\right) = \frac{(2p+2)!}{h_i^{p+1}[(p+1)!]^2} x^{p+1} + r_p^\pm(x), \quad r_p^\pm \in P^p([-1, 1]).$$

تعریف ۷.۵.۱. ضرایب چندجمله‌ای رادو را روی I_i ، با نماد $\psi_{p+1,i}^\pm(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت (۵.۱) تعریف می‌کنیم،

$$\psi_{p+1,i}^\pm(x) = c_p h_i^{p+1} R_{p+1,i}^\pm(x), \quad c_p = \frac{[(p+1)!]^2}{(2p+2)!}. \quad (5.1)$$

ریشه‌های $R_{p+1,i}^\pm(x)$ را روی I_i ، با $x_{i,j}^\pm = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \frac{h_i}{2} \xi_j^\pm$ ، $j = 0, 1, \dots, p$ نمایش می‌دهیم.

^{۲۰} orthogonality

^{۲۱} kronecker

تعریف ۸.۵.۱. ضرب داخلی L^2 دو تابع انتگرال‌پذیر $u = u(x, t)$ و $v = v(x, t)$ که به x و t روی بازه I_i و بازه $I = [-1, 1]$ وابسته‌اند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$(u(\cdot, t), v(\cdot, t))_i = \int_{I_i} u(x, t) v(x, t) dx, \quad (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \int_I u(\xi, t) v(\xi, t) d\xi.$$

نرم‌های متناظر با این ضرب داخلی عبارتند از:

$$\|u(\cdot, t)\|_i^2 = (u(\cdot, t), u(\cdot, t))_i, \quad \|u(\cdot, t)\|^2 = (u(\cdot, t), u(\cdot, t)).$$

تعریف ۹.۵.۱. فضای سوبولوف استاندارد توابع مربعی انتگرال‌پذیر روی I_i که همه مشتقات آن‌ها یعنی، $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ برای $k = 1, 2, \dots, s$ ، توابع مربعی انتگرال‌پذیر هستند را با $H^s(I_i)$ نمایش می‌دهیم، که s یک عدد صحیح نامنفی است. این فضا با نرم زیر مجهز می‌شود:

$$\|u(\cdot, t)\|_{s,i}^2 = \sum_{k=0}^s \left\| \frac{\partial^k u(\cdot, t)}{\partial x^k} \right\|_i^2.$$

نرم شکسته سوبولوف تابع $u(x, t)$ روی I برابر است با:

$$\|u(\cdot, t)\|_{s,\beta}^2 = \sum_{i=1}^N \|u(\cdot, t)\|_{s,i}^2.$$

توجه کنید که اگر $u \in H^s(I)$ ، $s = 1, 2, \dots$ ، نرم شکسته سوبولوف همان نرم سوبولوف استاندارد است، یعنی:

$$\|u(\cdot, t)\|_s^2 = \sum_{k=0}^s \left\| \frac{\partial^k u(\cdot, t)}{\partial x^k} \right\|^2.$$

در این پایان‌نامه از $\|u\|$ بجای $\|u(\cdot, t)\|$ ، به جزء در موارد خاصی استفاده می‌کنیم.

برای $p \geq 1$ دو عملگر تصویری خاص $P_h^\pm$ را در نظر می‌گیریم، که در زیر تعریف شده‌اند.

تعریف ۱۰.۵.۱. برای هر تابع هموار u ، تحدید P_h^- روی I_i ، چندجمله‌ای منحصر به فردی در $P^p(I_i)$ است که:

$$\int_{I_i} (P_h^- u - u) v dx = 0, \quad \forall v \in P^{p-1}(I_i), \quad P_h^- u(x_i^-) = u(x_i^-). \quad (6.1)$$

به‌طور مشابه تصویر P_h^+ به صورت (۷.۱) تعریف می‌کنیم،

$$\int_{I_i} (P_h^+ u - u) v dx = 0, \quad \forall v \in P^{p-1}(I_i), \quad P_h^+ u(x_{i+1}^+) = u(x_{i+1}^+). \quad (7.1)$$

این تصاویر خاص در برآورد خطای روش‌های DG^{۲۲} و LDG^{۲۳}، برای یافتن خطای مرزی L^2 بهینه، در مقالاتی مانند [۲۱] استفاده می‌شود. اگر $f'(u) \geq 0$ قرار می‌دهیم $P_h^* = P_h^-$ ، در غیر

^{۲۲}Discontinuous Galerkin

^{۲۳}Local Discontinuous Galerkin

این صورت از $P_h^* = P_h^+$ استفاده می‌کنیم. خطای بین جواب دقیق (۱.۲) و حل عددی تعریف شده در (۵.۲) را با $e = u - u_h$ نمایش می‌دهیم. خطای تصویری را به صورت $\epsilon = u - P_h^* u$ تعریف می‌کنیم و خطای بین حل عددی و تصویری از جواب دقیق را به صورت $\bar{e} = P_h^* u - u_h$ تعریف می‌کنیم. در حالتی که $f'(u) > 0$ ، $\epsilon = u - P_h^- u$ و $\bar{e} = P_h^- u - u_h$. به‌طور مشابه، در حالتی که $f'(u) < 0$ ، $\epsilon = u - P_h^+ u$ و $\bar{e} = P_h^+ u - u_h$.

از این به بعد از نمادهای C, C_1, C_2, C, C_* برای نشان دادن ثابت‌های مثبتی استفاده خواهد شد که از پارامترهای گسسته مستقل هستند، اما ممکن است به جواب دقیق هموار معادلات دیفرانسیل جزئی (۱.۲) و مشتقات آن‌ها وابسته باشند. همچنین همه ثابت‌ها عمومی هستند یعنی، آن‌ها ممکن است مقدار ثابت متمایزی را در رویدادهای مختلف نشان دهند.

تعریف ۱۱.۵.۱. عملگر درونیابی π^+ هر تابع u را در ریشه‌های R_{p+1}^+ ، یعنی $x_{i,j}^+$ ، $j = 0, 1, \dots, p$ ، درونیابی می‌کند و برای هر تابع u ، $\pi^+ u|_{I_i} \in P^p(I_i)$ است.

تعریف ۱۲.۵.۱. عملگر درونیابی $\hat{\pi}^+$ هر تابع u را در ریشه‌های R_{p+1}^+ ، یعنی $x_{i,j}^+$ ، $j = 0, 1, \dots, p$ ، و نقطه اضافی $\bar{x}$ در I_i که $\bar{x} \neq x_{i,j}^+$ درونیابی می‌کند.

ویژگی‌های زیر برای عملگرهای فوق برقرار هستند.

$$\forall v \in P_p, \pi^+ v = \hat{\pi}^+ v = P_h^- v = v. \quad ۱.$$

$$\pi^+ \hat{\pi}^+ = \pi^+. \quad ۲.$$

تعریف ۱۳.۵.۱. تابع $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ هموار «یا C^∞ » است، اگر همه‌ی مشتقات جزئی آن موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۱۴.۵.۱. نماد $v|_i$ مقدار تابع $v = v(x, t)$ را در نقطه $x = x_i$ مشخص می‌کند. همچنین $v^-|_i$ و $v^+|_i$ را به ترتیب حد چپ و حد راست تابع v ، در نقطه ناپیوستگی x_i تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$v^-|_i = v^-(x_i, t) = \lim_{s \rightarrow 0^-} v(x_i + s, t), \quad v^+|_i = v^+(x_i, t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} v(x_i + s, t).$$

پرش در یک نقطه را با $\llbracket v \rrbracket_i$ نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$\llbracket v \rrbracket_i = v^+|_i - v^-|_i.$$

همچنین نماد $[v]$ برابر است با:

$$[v] = \frac{v^+ + v^-}{2}.$$

تعریف ۱۵.۵.۱. فرض کنید که V و W دو فضای برداری باشند. در این صورت جمع مستقیم این دو فضا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V \oplus W = \{(v, w) | v \in V, w \in W\}.$$

در این فضا جمع دو بردار و ضرب یک بردار در یک عدد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$

$$\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w).$$

قضیه ۱.۵.۱. نامساوی (۸.۱) برای ϵ برقرار است،

$$\|\epsilon\| + h\|\epsilon_x\| + h^{\frac{1}{p}}\|\epsilon\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{p+1}. \quad (8.1)$$

که در آن $\epsilon = u - P_h^- u$ و C یک ثابت مثبت وابسته به u و p است و از h مستقل است. در نامساوی بالا $C = C'\|u\|_{p+1}$ که C' مستقل از u است. $\|\cdot\|_{\Gamma_h}$ نرم L_2 را روی مرز هر I_i مشخص می‌کند، یعنی:

$$\|\epsilon\|_{\Gamma_h}^2 = \sum_{i=1}^N ((\epsilon_i^+)^2 + (\epsilon_i^-)^2).$$

برهان. می‌توانید اثبات را در [۳۴] مشاهده کنید. □

قضیه ۲.۵.۱. نامساوی (۹.۱) برای ϵ برقرار است،

$$\|\epsilon\|_{\infty} \leq Ch^{p+1} \quad (9.1)$$

که در آن $\epsilon = u - P_h^- u$ و C مستقل از h است.

برهان. می‌توانید اثبات را در [۳۴] مشاهده کنید. □

قضیه ۳.۵.۱. بسط دو جمله‌ای به صورت (۱۰.۱) به دست می‌آید،

$$(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots, \quad (10.1)$$

که در آن ضرایب به صورت زیر می‌باشند.

$$\binom{a}{s} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-s+1)}{s!}.$$

اگر $a = n$ یک عدد صحیح باشد آنگاه، به ازای $s > n$ همه ضرایب در (۱۰.۱) صفر هستند، و بنابراین فقط فرمول متناهی قضیه دو جمله‌ای معمولی باقی می‌ماند. اگر a یک عدد صحیح نباشد، سمت راست (۱۰.۱) یک سری نامتناهی به دست می‌آید که به ازای $-1 < x < 1$ همگراست.

اگر مقدار خاص $a = \frac{1}{2}$ در نظر بگیریم، بسط دو جمله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \times 2!}x^2 + \frac{1 \times 3}{2^3 \times 3!}x^3 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^4 \times 4!}x^4 + \dots$$

قضیه ۴.۵.۱. هرگاه f تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a, b]$ باشد، آنگاه نقطه‌ای چون $c \in (a, b)$ موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

این قضیه، به قضیه مقدار میانگین معروف است.

قضیه ۵.۵.۱. نابرابری کوشی شوارتز بیان می‌کند که برای هر دو بردار x و y در فضای ضرب داخلی داریم:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, y) \cdot (y, y),$$

که در آن $(\cdot, \cdot)$ ضرب داخلی است. همچنین با گرفتن ریشه دوم از طرفین و با توجه به نرم بردارها، نامساوی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

حالت تساوی رخ می‌دهد اگر و فقط اگر x و y وابسته خطی باشند.

قضیه ۶.۵.۱. نامساوی مثلثی برای نرم $\|x\|^2 = (x, x)$ به صورت زیر است:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

قضیه ۷.۵.۱. زمانی که درونیایی تابع f ، در نقاط گره‌ای $x_0, \dots, x_n$ توسط یک چندجمله‌ای درجه n داده شده باشد، خطا به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

که $f[x_0, \dots, x_n, x]$ نماد تفاضلات تقسیم شده است.

اگر روی بازه بسته $f \in C^{n+1}$ و $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n باشد که f را در $n+1$ نقطه متمایز $x_0, \dots, x_n$ روی بازه درونیایی می‌کند، آنگاه برای هر x عضو بازه، ξ عضو بازه موجود است، به‌طوری‌که:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

لم ۱.۵.۱. اگر $a, b > 0$ و p و q اعداد حقیقی مثبت باشند، به نحوی که مجموع معکوس‌های p و q برابر یک باشد، آنگاه:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

این نامساوی به نامساوی یانگ معروف است.

۱.۵.۱ نامساوی گرونوال

نامساوی گرونوال به شکل دیفرانسیلی و شکل انتگرالی موجود است.

لم ۲.۵.۱. فرض کنید I بازه‌ای حقیقی به شکل $[a, b]$ یا $[a, b)$ یا $[a, \infty)$ باشد که $a < b$ است، همچنین فرض کنید u و β توابع حقیقی مقدار پیوسته باشند که روی I تعریف شده‌اند. اگر u در I° «درون I » مشتق‌پذیر باشد و برای $t \in I^\circ$ در نامساوی $u'(t) \leq \beta(t)u(t)$ صدق کند، آنگاه u کراندار است و جواب معادله $y'(t) = \beta(t)y(t)$ است، یعنی برای هر $t \in I$ نامساوی زیر برقرار است.

$$u(t) \leq u(a) \exp \left(\int_a^t \beta(s) ds \right). \quad (11.1)$$

معادله (۱۱.۱) شکل دیفرانسیلی نامساوی گرونوال است.

لم ۳.۵.۱. فرض کنید I بازه‌ای روی اعداد حقیقی به شکل $[a, b]$ یا $[a, b)$ یا $[a, \infty)$ باشد که $a < b$ است. α ، β و u را توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی I در نظر می‌گیریم که β و u پیوسته نیز هستند و قسمت منفی تابع α روی هر زیر بازه‌ی بسته و کران‌دار از I انتگرال‌پذیر باشد.

۱. اگر β نامنفی باشد و u برای هر $t \in I$ در نامساوی زیر صدق کند،

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds,$$

آنگاه برای هر $t \in I$ داریم:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \left(\int_s^t \beta(r)dr \right) ds. \quad (12.1)$$

۲. اگر تابع α نanzولی باشد آنگاه برای هر $t \in I$ نامساوی زیر برقرار است،

$$u(t) \leq \alpha(t) \left(e^{\int_a^t \beta(s)ds} \right). \quad (13.1)$$

معادله (۱۲.۱) و (۱۳.۱) را شکل انتگرالی نامساوی گرونوال می‌گویند.

قضیه ۸.۵.۱. برای هر $p_h \in V_h$ ، ثابت مثبت C که از h و p_h مستقل است وجود دارد، به‌طوری‌که:

$$\|\partial_x p_h\| \leq Ch^{-1} \|p_h\|, \quad (14.1)$$

$$\|p_h\|_{\Gamma_h} \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|p_h\|, \quad (15.1)$$

$$\|p_h\|_\infty \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|p_h\|. \quad (16.1)$$

□

برهان. می‌توانید اثبات را در [۳۴] مشاهده کنید.

طرح خلاف جهت باد

برای توضیح روش، معادله‌ی فرارفت خطی یک بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

که انتشار موج را در محور x با سرعت a توصیف می‌کند. نقطه i از دامنه را در نظر بگیرید. در دامنه‌ی یک بعدی تنها دو جهت در نقطه‌ی i وجود دارد، سمت چپ i «سمت منفی بی‌نهایت» و سمت راست i «سمت مثبت بی‌نهایت». اگر a مثبت باشد جواب موج سیار معادله فوق در سمت راست انتشار می‌یابد، سمت چپ i ، سمت خلاف جهت باد و سمت راست i ، سمت در جهت باد ^{۲۴} نامیده می‌شود. به‌طور مشابه اگر a منفی باشد، جواب موج سیار در سمت چپ انتشار می‌یابد، سمت چپ را، سمت در جهت باد و سمت راست را، سمت خلاف جهت باد می‌نامیم. اگر طرح تفاضلات متناهی برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ شامل نقاط بیشتری در سمت خلاف جهت باد باشد، آن طرح، طرح خلاف جهت باد نامیده می‌شود.

ساده‌ترین طرح خلاف جهت باد طرح جهت باد مرتبه اول است که به صورت زیر

است:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} &= 0 & a > 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} &= 0 & a < 0, \end{aligned}$$

شارهای عددی خلاف جهت باد

این شارهای عددی با استفاده از طرح‌های تفاضلات متناهی به‌دست آمده است.

۱. شار گودونف ^{۲۵}

$$\hat{f} = \begin{cases} \min_{u_j \leq u \leq u_{j+1}} f(u), & u_j < u_{j+1}, \\ \max_{u_j \leq u \leq u_{j+1}} f(u), & u_j \geq u_{j+1}. \end{cases}$$

۲. شار انکوایست ^{۲۶}

$$\hat{f} = \int_0^{u_{j+1}} \min(f'(u), 0) du + \int_0^{u_j} \max(f'(u), 0) du + f(0).$$

۳. شار لکس فردریچ ^{۲۷}

$$\hat{f} = \frac{1}{\gamma} [f(u_j) + f(u_{j+1}) - \alpha(u_{j+1} - u_j)], \quad \alpha = \max_u |f'(u)|.$$

^{۲۴} downwind

^{۲۵} Godunov

^{۲۶} Engquist-Osher

^{۲۷} Lax-Friedrichs

۴. شار لکس فردریچ موضعی^{۲۸}

$$\hat{f} = \frac{1}{\tau} [f(u_j) + f(u_{j+1}) - \alpha(u_{j+1} - u_j)], \quad \alpha = \max_{(u_j, u_{j+1})} |f'(u)|.$$

۵. شار رو^{۲۹}

$$\hat{f} = \begin{cases} f(u_j), & f'(u) \geq 0, \\ f(u_{j+1}), & f'(u) \leq 0. \end{cases}$$

^{۲۸}local Lax-Friedrichs

^{۲۹}Roe

فصل ۲

تجزیه و تحلیل خطای روش گالرکین ناپیوسته

۱.۲ طرح نیمه گسسته گالرکین ناپیوسته

قوانین بقاء غیرخطی را در یک فضا متغیر، به صورت (۱.۲) در نظر می‌گیریم:

$$u_t + (f(u))_x = g(x, t), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

که دارای شرط اولیه و شرط مرزی متناوب^۱ زیر است:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2.2)$$

$$u(-1, t) = u(1, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

شرط مرزی متناوب ضروری نیست و بیشتر برای سادگی کار در نظر گرفته می‌شود و می‌توان بجای آن شرط مرزی دیریکله را نیز در نظر گرفت. نتایجی که به دست می‌آوریم برای شرط مرزی دیریکله، $u(-1, t) = h(t)$ صادق است.

^۱periodic

در اینجا فرض می‌کنیم تابع شار غیرخطی $f(u)$ ، تابعی هموار نسبت به متغیر u است. همچنین فرض می‌کنیم که $|f'(u)|$ داری کران پایین مثبت یکنواخت^۲ است، یعنی برای هر $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ داریم:

$$0 < \delta \leq f'((x, t)), \quad \text{یا} \quad f'(u(x, t)) \leq -\delta < 0.$$

که δ یک ثابت مثبت و $[0, T]$ یک بازه زمانی معین است. در تجزیه و تحلیل، شرط اولیه $u_0(x)$ و منبع $g(x, t)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که جواب دقیق $u(x, t)$ یک تابع هموار با مشتقات کران‌دار روی $[-1, 1] \times [0, T]$ باشد. حال طرح نیمه گسسته^۳ DG را برای مسأله (۱.۲) توضیح می‌دهیم [۲۲، ۳۰]. بازه $I = [-1, 1]$ را به N زیر بازه به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, N,$$

که در آن،

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1.$$

طول و مرکز هر زیر بازه I_i را به ترتیب با $h_i = x_i - x_{i-1}$ و $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ نشان می‌دهیم. بزرگترین طول زیر بازه را با $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ و کوچکترین طول زیر بازه را با $h_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} h_i$ نمایش می‌دهیم. در این جا مش‌های منتظم را با طول ثابت $\frac{h}{h_{\min}} \leq K$ ، که $K \geq 1$ بررسی می‌کنیم. با ضرب معادله (۱.۲) در تابع تست v و با انتگرال‌گیری روی I_i و استفاده از انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\int_{I_i} u_t v \, dx - \int_{I_i} f(u) v_x \, dx + f(u) v^-|_i - f(u) v^+|_{i-1} = \int_{I_i} g v \, dx. \quad (4.2)$$

فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای V_h^p را فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه p ، روی I_i تعریف می‌کنیم:

$$V_h^p = \left\{ v : v|_{I_i} \in P^p(I_i), \quad i = 1, \dots, N \right\},$$

در اینجا $P^p(I_i)$ فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه p روی I_i می‌باشد. چندجمله‌ای‌های فضای V_h^p مجازند تا در سراسر عناصر مرزی، ناپیوسته باشند.

در مرحله بعد، جواب دقیق $u(\cdot, t)$ را با استفاده از چندجمله‌ای تکه‌ای $u_h(\cdot, t) \in V_h^p$ تقریب می‌زنیم. طرح نیمه گسسته DG عبارت است از پیدا کردن $u_h \in V_h^p$ ، به طوری که برای هر $v \in V_h^p$ و برای هر $i = 1, \dots, N$ ، رابطه (۵.۲) برقرار باشد.

$$\int_{I_i} (u_h)_t v \, dx - \int_{I_i} f(u_h) v_x \, dx + \hat{f} v^-|_i - \hat{f} v^+|_{i-1} = \int_{I_i} g v \, dx, \quad (5.2)$$

^۲ uniform

^۳ semi-discrete

که شار عددی $\hat{f}|_i$ ، یک تابع تک مقداری در گره، تعریف شده است و به مقدار u_h از هر دو سمت وابسته است، یعنی:

$$\hat{f}|_i = \hat{f}(u_h^-, u_h^+)|_i.$$

فرض کنیم V_h^p فضای عناصر متناهی با پایه‌های $\Phi = \{\phi_j\}_j^p$ باشد. پس می‌توانیم $u_h \in V_h^p$ را روی بازه‌ی I_i به صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای با ضرایب $c_{ij}(t)$ به صورت (۶.۲) نوشت:

$$u_h|_{I_i} = u_{h_i} = \sum_{j=\circ}^p c_{ij}(t) \phi_j(x). \quad (6.2)$$

تقریب سراسری u به صورت جمع مستقیم^۴ روی تقریب موضعی u_{h_i} ها به دست می‌آید، یعنی:

$$u_h = \bigoplus_{i=1}^N u_{h_i}.$$

توجه کنید که هر $V_h^p(I_i)$ می‌تواند بعد متفاوتی داشته باشد. در اینجا برای سادگی کار فرض می‌کنیم که تمام V_h^p ها دارای بعد مساوی هستند. یک پایه ساده برای فضای V_h^p را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\Phi = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^p\}.$$

چون Φ پایه‌ای برای $V_h^p(I_i)$ است، می‌توانیم $v = \phi_k(x)$ ، $k = \circ, \dots, p$ انتخاب کنیم و با قرار دادن در معادله (۵.۲) و قرار دادن u_h به صورت (۶.۲) داریم:

$$\int_{I_i} \left(\sum_{j=\circ}^p c_{ij} \phi_j \right)_t \phi_k \, dx - \int_{I_i} f \left(\sum_{j=\circ}^p c_{ij} \phi_j \right) (\phi_k)_x \, dx + \hat{f} \phi_k^-|_i - \hat{f} \phi_k^+|_{i-1} = \int_{I_i} g \phi_k \, dx.$$

برای تقریب u روی I_i ، توابع پایه‌ای لژاندر را در نظر می‌گیریم و $\phi_k(x) = \tilde{L}_k(x)$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} & \int_{I_i} \left(\sum_{j=\circ}^p c_{ij} \tilde{L}_j(x) \right)_t \tilde{L}_k(x) \, dx - \int_{I_i} f \left(\sum_{j=\circ}^p c_{ij} \tilde{L}_j(x) \right) (\tilde{L}_k(x))_x \, dx \\ & + \hat{f} \tilde{L}_k^-(x)|_i - \hat{f} \tilde{L}_k^+(x)|_{i-1} = \int_{I_i} g \tilde{L}_k(x) \, dx. \end{aligned}$$

حال هر بازه I_i را با نگاشت آفین زیر، به بازه $[-1, 1]$ انتقال می‌دهیم،

$$x = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \frac{h_i}{2} \xi, \quad \xi \in [-1, 1].$$

و $\tilde{L}_k(\xi) = \tilde{L}_k \left(\frac{2x - x_i - x_{i-1}}{h_i} \right)$ تعریف می‌کنیم، داریم:

$$\frac{d\tilde{L}_k(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{d}{dx} \tilde{L}_k \left(\frac{2x - x_i - x_{i-1}}{h_i} \right) dx.$$

^۴ direct sum

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{h_i}{\Upsilon} \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=0}^p \frac{d}{dt} c_{ij} \tilde{L}_j(\xi) \right) \tilde{L}_k(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 f(u_{h_i}) \frac{d}{d\xi} \tilde{L}_k(\xi) d\xi + \hat{f} \tilde{L}_k(\xi)|_1 \\ & - \hat{f} \tilde{L}_k(\xi)|_{-1} = \frac{h_i}{\Upsilon} \int_{-1}^1 g \tilde{L}_k(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

و بنا بر خاصیت توابع لژاندر داریم:

$$\frac{h_i}{\Upsilon k + 1} \frac{d}{dt} c_{ik} = \int_{-1}^1 f(u_{h_i}) \frac{d}{d\xi} \tilde{L}_k(\xi) d\xi - \hat{f} \tilde{L}_k(\xi)|_1 + \hat{f} \tilde{L}_k(\xi)|_{-1} + \frac{h_i}{\Upsilon} \int_{-1}^1 g \tilde{L}_k(\xi) d\xi.$$

پس نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} c_{ik} = \frac{\Upsilon k + 1}{h_i} \left[\int_{-1}^1 f(u_{h_i}) \frac{d}{d\xi} \tilde{L}_k d\xi - \hat{f} \tilde{L}_k|_1 + \hat{f} \tilde{L}_k|_{-1} + \frac{h_i}{\Upsilon} \int_{-1}^1 g \tilde{L}_k d\xi \right]. \quad (7.2)$$

اگر توابع پایه‌ای را به صورت $\tilde{L}_k \left(\frac{\Upsilon x - x_i - x_{i-1}}{h_i} \right)$ یا برای ساده‌نویسی P_k در نظر بگیریم که روی I_i متعامد هستند، داریم:

$$\frac{d}{dt} c_{ik} = \frac{\Upsilon k + 1}{\Upsilon} \left[\int_{I_i} f(u_h) P'_k dx - \hat{f} P_k^-|_i + \hat{f} P_k^+|_{i-1} + \int_{I_i} g P_k dx \right]. \quad (8.2)$$

که معادله‌های (7.2) و (8.2)، معادله دیفرانسیل معمولی هستند که در آن $k = 0, \dots, p$ است. معادله‌های (7.2) و (8.2) را می‌توانیم به فرم برداری زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt} C = L.$$

که در آن $C = (c_{i1}, \dots, c_{i,k})$ بردار ضرایب و L بردار توابع سمت راست معادله‌های (7.2) یا (8.2) است. این معادله را با روش رانگ کوتای کلاسیک مرتبه چهار حل می‌کنیم.

شرط اولیه $u_h(x, 0) \in V_h^p$ ، با استفاده از تصویر^۵ خاصی از شرط اولیه دقیق $u(x, 0)$ به‌دست می‌آید. برای کامل کردن تعریف روش، نیاز داریم $\hat{f}$ را روی مرزهای I_i انتخاب کنیم. برای شرایط مرزی متناوب (3.2) شار خلاف جهت باد را که به $f'(u)$ وابسته است، انتخاب می‌کنیم. برای $f'(u) > 0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}|_i = \begin{cases} f(u_h^-)|_N, & i = 0, \\ f(u_h^-)|_i, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (9.2)$$

و برای $f'(u) < 0$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}|_i = \begin{cases} f(u_h^+)|_i, & i = 0, \dots, N-1, \\ f(u_h^+)|_0, & i = N. \end{cases} \quad (10.2)$$

^۵projection

ملاحظه ۱.۱.۲. با این که نتایج برای شار عددی (۹.۲) اثبات می‌شوند، همان نتایج را می‌توان با استفاده از شار عددی (۱۰.۲) تنها با تغییراتی جزئی اثبات کرد.

ملاحظه ۲.۱.۲. در اینجا شرایط مرزی متناوب را در نظر می‌گیریم. این شرایط تنها برای سادگی است و ضروری نیست. اگر شرایط مرزی دیگری را انتخاب کنیم، به آسانی می‌توان شار عددی $\hat{f}$ را به دست آورد. برای نمونه در حالتی که $f'(u) > 0$ شار عددی مربوط به شرایط مرزی دیریکله $u(-1, t) = h(t)$ ، به صورت (۱۱.۲) به دست می‌آید.

$$\hat{f}|_i = \begin{cases} f(h(t))|_i, & i = 0, \\ f(u_h^-)|_i, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (11.2)$$

در ادامه فرض می‌کنیم که معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۵.۲) با شرط $u_h(x, 0)$ ، انتگرال دقیق دارند.

۲.۲ تجزیه و تحلیل خطای روش گالرکین ناپیوسته

در این بخش تنها حالت $\forall (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ ، $0 < \delta \leq f'(u(x, t))$ را بررسی می‌کنیم که δ یک ثابت مثبت است. در این حالت $\epsilon = u - P_h^- u$ و $\bar{\epsilon} = P_h^- - u_h$. توجه کنید که نتایج برای حالت $0 < -\delta \leq f'(u(x, t))$ نیز می‌تواند به شکلی مشابه به دست بیاید، بنابراین این حالت را حذف می‌کنیم.

منگ و هم‌کاران در [۳۰] روش DG را برای حل قوانین بقاء غیرخطی تجزیه و تحلیل کرده‌اند. آن‌ها با انتخاب شرط اولیه به صورت $u_h(x, 0) = P_h^-(x, 0)$ ، ابرهمگرایی را به سمت تصویر خاصی از جواب دقیق، $P_h^- u$ اثبات کردند. نتایج به دست آمده در ادامه اثبات شده است.

تعریف ۱.۲.۲. برای این که خاصیت ابرهمگرایی روش را به دست بیاوریم، به دو تابع مربوط به نرم L_2 تابع $F(x)$ روی I_i نیاز داریم، که به صورت (۱۲.۲) و (۱۳.۲) تعریف شده‌اند.

$$B_i^-(F) = \int_{I_i} F(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{x - \bar{x}_i}{h_i} \right) dx, \quad (12.2)$$

$$B_i^+(F) = \int_{I_i} F(x) \frac{x - x_i}{h_i} \frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{x - \bar{x}_i}{h_i} \right) dx. \quad (13.2)$$

تابع‌های تعریف شده در (۱۲.۲) و (۱۳.۲) داری ویژگی زیر هستند، که برای اثبات ابرهمگرایی به آن‌ها نیاز داریم.

لم ۱.۲.۲. برای هر تابع $F(x) \in C^1$ روی I_i داریم:

$$B_i^-(F) = \frac{1}{4h_i} \int_{I_i} F^2(x) dx + \frac{F^2(x_i)}{4}, \quad (14.2)$$

$$B_i^+(F) = -\frac{1}{4h_i} \int_{I_i} F^2(x) dx - \frac{F^2(x_{i-1})}{4}. \quad (15.2)$$

برهان. اثبات از مقاله [۲۱] برگرفته شده است. ما تنها رابطه‌ی (۱۴.۲) را اثبات می‌کنیم. اثبات (۱۵.۲) به‌طور مشابه انجام می‌شود.

$$\begin{aligned}
 B_i^-(F) &= \int_{I_i} F(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{x - \bar{x}_i}{h_i} \right) dx \\
 &= \int_{I_i} F(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \left(F'(x) \frac{x - \bar{x}_i}{h_i} + F(x) \frac{1}{h_i} \right) dx \\
 &= \int_{I_i} F(x) F'(x) \frac{(x - \bar{x}_i)(x - x_{i-1})}{h_i^2} dx + \int_{I_i} F^2(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i^2} dx \\
 &= \frac{F^2(x)}{2} \frac{(x - \bar{x}_i)(x - x_{i-1})}{h_i^2} \Big|_{I_i} - \int_{I_i} \frac{F^2(x)}{2} \frac{(\bar{x}_i - x - x_{i-1})}{h_i^2} dx \\
 &\quad + \int_{I_i} F^2(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i^2} dx \\
 &= \frac{F^2(x_i)}{2} - \int_{I_i} \frac{F^2(x)}{2} \frac{(\bar{x}_i - x - x_{i-1})}{h_i^2} dx + \int_{I_i} F^2(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i^2} dx \\
 &= \frac{1}{2h_i} \int_{I_i} F^2(x) dx + \frac{F^2(x_i)}{2}
 \end{aligned}$$

□ که برای اثبات از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کرده‌ایم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید u جواب دقیق (۱.۲) باشد که به اندازه کافی هموار و دارای مشتقات کراندار است. همچنین فرض کنید $f \in C^3$ و برای هر $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ ، $0 < \delta \leq$ ، $f'(u(x, t))$ که در آن δ یک ثابت مثبت است. u_h را جوابی از (۵.۲) با شار عددی (۹.۲) برای $p \geq 1$ قرار می‌دهیم. با توجه به تقریب شرط اولیه $u_h(x, 0) = P_h^-(u(x, 0))$ ، پس ثابت مثبت C که به جواب دقیق u ، زمان معین T و $\max_{m=1}^3 |f^{(m)}|$ وابسته است و از h مستقل است، وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $t \in [0, T]$ نامساوی‌های (۱۶.۲)، (۱۷.۲) و (۱۸.۲) برقرارند.

$$\|\bar{e}\| \leq Ch^{p+\frac{3}{2}}, \quad (۱۶.۲)$$

$$\|e\| \leq Ch^{p+1}, \quad (۱۷.۲)$$

$$\|e_t\| \leq Ch^{p+1}. \quad (۱۸.۲)$$

برهان. اثبات از مقاله [۳۰] برگرفته شده است. روی مرزهای هر عضو از مش‌بندی، شار عددی را به صورت $\hat{f} = f(u_h^-)$ در نظر می‌گیریم. طرح DG (۵.۲) را برای هر $v \in V_h^p$ به صورت (۱۹.۲) می‌نویسیم:

$$\int_{I_i} (u_h)_t v dx - \int_{I_i} f(u_h) v_x dx + f(u_h^-) v^-|_i - f(u_h^-) v^+|_{i-1} = \int_{I_i} g v dx. \quad (۱۹.۲)$$

چون فرم ضعیف فوق برای جواب دقیق u برقرار است، پس می‌توان نوشت:

$$\int_{I_i} u_t v dx - \int_{I_i} f(u) v_x dx + f(u) v^-|_i - f(u) v^+|_{i-1} = \int_{I_i} g v dx. \quad (۲۰.۲)$$

با کم کردن (۱۹.۲) از (۲۰.۲)، برای هر $v \in V_h^p$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} e_t v \, dx &= \int_{I_i} (f(u) - f(u_h)) v_x \, dx - (f(u) - f(u_h^-)) v^-|_i \\ &\quad + (f(u) - f(u_h^-)) v^+|_{i-1}, \end{aligned} \quad (21.2)$$

با جمع زدن روی I_i و استفاده از شرط (۳.۲) برای هر $v \in V_h^p$ داریم:

$$\int_I e_t v \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f(u) - f(u_h)) v_x \, dx + \sum_{i=1}^N \left((f(u) - f(u_h^-)) \llbracket v \rrbracket \right)_i. \quad (22.2)$$

با قرار دادن $v = \bar{e}$ تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_I e_t \bar{e} \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f(u) - f(u_h)) v_x \, dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left((f(u) - f(u_h^-)) \llbracket \bar{e} \rrbracket \right)_i = \text{RHS}. \end{aligned} \quad (23.2)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \int_I e_t \bar{e} \, dx &= \int_I (\epsilon + \bar{e})_t \bar{e} \, dx = \int_I \bar{e}_t \bar{e} \, dx + \int_I \epsilon_t \bar{e} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_I \bar{e}^2 \, dx + \int_I \epsilon_t \bar{e} \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{e}\|_2^2 + \int_I \epsilon_t \bar{e} \, dx. \end{aligned} \quad (24.2)$$

برای برآورد RHS در (۲۳.۲) $\bar{e}$ را روی هر I_i به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{e} = r_i + \frac{S_i(x)(x - \bar{x}_i)}{h_i},$$

که $r_i = \bar{e}(\bar{x}_i)$ یک ثابت است و $S_i(x) \in P^{p-1}(I_i)$. برآوردی از RHS در لم زیر داده شده است. در ادامه C_* ثابت نامنفی وابسته به ماکسیمم $|f''|$ و یا $|f'''|$ است.

لم ۲.۲.۲. فرض کنیم خاصیت درونیابی (۸.۱) برقرار باشد آنگاه نامساوی (۲۵.۲) برقرار است.

$$\text{RHS} \leq (\zeta(e) + C_* h^{-3} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|_2^2 + C_* h^{p+1} \|S\| + C h^{p+3} \quad (25.2)$$

که $\zeta(e) = C_* + C_* h^{-1} \|e\|_\infty$ و ثابت‌های مثبت C و C_* مستقل از h و جواب تقریبی u_h هستند.

برهان. ابتدا بسط تیلور مرتبه دوم را نسبت به u ، برای عبارات غیرخطی $f(u) - f(u_h)$ و $f(u) - f(u_h^-)$ به صورت (۲۶.۲) و (۲۷.۲) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_h) &= f(u) - f(u) - (u_h - u) f'(u) - \frac{1}{2} (u_h - u)^2 f''(\tau) \\ &= f'(u) \bar{e} + f'(u) \epsilon - \frac{1}{2} \tilde{f}_u''(\epsilon + \bar{e})^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned} \quad (26.2)$$

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_h^-) &= f(u) - f(u) - (u_h^- - u)f'(u) - \frac{1}{\tau}(u_h^- - u)^2 f''(\tau) \\ &= f'(u)\bar{\epsilon}^- + f'(u)\epsilon^- - \frac{1}{\tau}\tilde{f}_u''(\epsilon^- + \bar{\epsilon}^-)^2 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \end{aligned} \quad (27.2)$$

که $\tilde{f}_u''$ و $\tilde{f}_u''$ مقادیر میانی هستند که توسط $\tilde{f}_u'' = f''(\alpha_1 u + (1 - \alpha_1)u_h^-)$ و $\tilde{f}_u'' = f''(\alpha_2 u + (1 - \alpha_2)u_h^-)$ که $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ داده شده‌اند. توجه کنید که از اندیس i در (27.2) برای نمادگذاری ساده صرف نظر کرده‌ایم. بنابراین می‌توانیم RHS در (23.2) را به صورت (28.2) بازنویسی کنیم،

$$\text{RHS} = \sum_{j=1}^3 (\Lambda_j + \Theta_j), \quad (28.2)$$

که Λ_j و Θ_j به صورت (29.2) داده شده‌اند،

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \lambda_j \bar{\epsilon}_x dx, \quad \Theta_j = \sum_{i=1}^N (\theta_j[\bar{\epsilon}])_i \quad j = 1, 2, 3. \quad (29.2)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء برآورد زیر را برای $\Lambda_1 + \Theta_1$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 + \Theta_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \lambda_1 \bar{\epsilon}_x dx + \sum_{i=1}^N (\theta_1[\bar{\epsilon}])_i \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f'(u) \bar{\epsilon} \bar{\epsilon}_x dx + \sum_{i=1}^N (f'(u) \bar{\epsilon}^- [\bar{\epsilon}])_i \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \left(f'(u) (\bar{\epsilon}^-)^2 \Big|_i - f'(u) (\bar{\epsilon}^+)^2 \Big|_{i-1} - \int_{I_i} \partial_x f'(u) \bar{\epsilon}^2 dx \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (f'(u) \bar{\epsilon}^- [\bar{\epsilon}])_i \\ &= -\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_x f'(u) \bar{\epsilon}^2 dx + \sum_{i=1}^N f'(u_i) (\bar{\epsilon}^- - [\bar{\epsilon}])_i [\bar{\epsilon}]_i \\ &\leq C_* \|\bar{\epsilon}\|^2 - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N f'(u_i) [\bar{\epsilon}]_i^2 \leq C_* \|\bar{\epsilon}\|^2, \end{aligned} \quad (30.2)$$

که از فرض مثبت بودن $f'(u)$ در نامساوی فوق استفاده کرده‌ایم. با توجه به این که بنا بر خاصیت P_h^- در (6.1)، $\epsilon_i^- = 0$ است، داریم:

$$\Theta_2 = \sum_{i=1}^N (f'(u) \epsilon^- [\bar{\epsilon}])_i = 0. \quad (31.2)$$

برای برآورد Λ_2 ، $f'(u)$ را به صورت (32.2) بازنویسی می‌کنیم،

$$f'(u) = f'(u_i) + (f'(u) - f'(u_i)), \quad (32.2)$$

که u_i مقدار جواب دقیق u را در x_i مشخص می‌کند. توجه کنید که ϵ نسبت به هر چندجمله‌ای حداکثر از درجه $p-1$ بنا به (۶.۱) متعامد است. بنابراین می‌توانیم Λ_2 را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} [f'(u_i) + (f'(u) - f'(u_i))] \epsilon \bar{e}_x dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f'(u) - f'(u_i)) \epsilon \bar{e}_x dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f'(u) - f'(u_i)) \epsilon \left(S'_i(x) \frac{x - x_i}{h_i} + \frac{S_i(x)}{h_i} \right) dx.\end{aligned}$$

چندجمله‌ای قطعه‌وار $\phi(x)$ را به صورت $\phi(x) = \frac{x - \bar{x}_i}{h_i}$ روی هر I_i تعریف می‌کنیم. واضح است که $\|\phi(x)\|_\infty = \frac{1}{p}$ پس با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز همراه با ویژگی معکوس (۱۴.۱) داریم:

$$\Lambda_2 \leq C_* h \|\epsilon\| (Ch^{-1} \|S\| + h^{-1} \|S\|) \leq C_* \|\epsilon\| \|S\| \leq C_* h^{p+1} \|S\|.$$

که همچنین از خاصیت درونیابی (۸.۱) و این حقیقت که روی هر بازه‌ی I_i ، $|f'(u) - f'(u_i)| \leq C_* h$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین به کران بالا (۳۳.۲) برای $\Lambda_2 + \Theta_2$ می‌رسیم،

$$\Lambda_2 + \Theta_2 \leq C_* h^{p+1} \|S\|. \quad (33.2)$$

برآوردی برای $\Lambda_3 + \Theta_3$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\Lambda_3 + \Theta_3 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} -\frac{1}{\tau} \tilde{f}_u''(\epsilon + \bar{e})^\tau \bar{e}_x dx + \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{\tau} \tilde{f}_u''(\epsilon^- + \bar{e}^-)^\tau \llbracket \bar{e} \rrbracket_i \right) \\ &\leq C_* \|\epsilon\|^\tau \|\bar{e}_x\| + C_* \sum_{i=1}^N (e^-)_i^\tau \llbracket \bar{e} \rrbracket_i \\ &\leq C_* \|\epsilon\|^\tau \|\bar{e}_x\| + C_* \|e\|_{\Gamma_h}^\tau \|\bar{e}\|_{\Gamma_h} \\ &\leq C_* \|e\|_\infty \|\epsilon\| \|\bar{e}_x\| + C_* \|e\|_\infty \|e\|_{\Gamma_h} \|\bar{e}\|_{\Gamma_h} \\ &\leq C_* h^{-1} \|e\|_\infty (\|e\| \|\bar{e}\| + h^{\frac{1}{\tau}} \|\epsilon\|_{\Gamma_h} \|\bar{e}\| + \|\bar{e}\|^\tau) \\ &\leq C_* h^p \|e\|_\infty \|\bar{e}\| + C_* h^{-1} \|e\|_\infty \|\bar{e}\|^\tau \\ &\leq (C_* h^{-1} \|e\|_\infty + C_* h^{-\tau} \|e\|_\infty^\tau) \|\bar{e}\|^\tau + Ch^{\tau p + \tau}.\end{aligned} \quad (34.2)$$

که در نامساوی اول و دوم از نامساوی کوشی شوارتز، در نامساوی سوم از $\|e\| \leq \|e\|_\infty$ و $\|e\|_{\Gamma_h} \leq \|e\|_\infty$ در نامساوی چهارم از (۱۴.۱) و (۱۵.۱) در نامساوی پنجم از خاصیت درونیابی (۸.۱) و در آخرین گام، از نامساوی یانگ به‌طور مستقیم استفاده کرده‌ایم. با ترکیب (۳۰.۲)، (۳۳.۲) و (۳۴.۲) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\text{RHS} &\leq C_* \|\bar{e}\|^\tau + C_* h^{p+1} \|S\| + (C_* h^{-1} \|e\|_\infty + C_* h^{-\tau} \|e\|_\infty^\tau) \|\bar{e}\|^\tau + Ch^{\tau p + \tau} \\ &\leq (\zeta(e) + C_* h^{-\tau} \|e\|_\infty^\tau) \|\bar{e}\|^\tau + C_* h^{p+1} \|S\| + Ch^{\tau p + \tau}.\end{aligned}$$

□

با جایگذاری (۲۴.۲) و (۲۵.۲) در (۲۳.۲) داریم:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{e}\|^2 \leq \left| \int_I \epsilon_t \bar{e} dx \right| + (\zeta(e) + C_* h^{-3} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{p+1} \|S\| + Ch^{2p+3}. \quad (۳۵.۲)$$

با استفاده از خاصیت تعامد تصویر P_h^- در (۶.۱) و نامساوی کوشی شوارتز و خاصیت درونیایی (۸.۱) کرانی برای $\left| \int_I \epsilon_t \bar{e} dx \right|$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \left| \int_I \epsilon_t \bar{e} dx \right| &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\epsilon_t| \left(|r_i| + \left| \frac{S_i(x)(x - \bar{x}_i)}{h_i} \right| \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\epsilon_t| |r_i| dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\epsilon_t| \left| \frac{S_i(x)(x - \bar{x}_i)}{h_i} \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\epsilon_t| |S_i(x)| \left| \frac{x - \bar{x}_i}{h_i} \right| dx \\ &\leq \|\epsilon_t\| \|S\| \|\phi\|_\infty \leq Ch^{p+1} \|S\|. \end{aligned} \quad (۳۶.۲)$$

با ترکیب (۳۵.۲) و (۳۶.۲) نتیجه می شود:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{e}\|^2 \leq (\zeta(e) + C_* h^{-3} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{p+1} \|S\| + Ch^{2p+3}. \quad (۳۷.۲)$$

بنا بر غیرخطی بودن شار $f(u)$ ، ما پیش فرض (۳۸.۲) را برای h به اندازه کافی کوچک در نظر می گیریم:

$$\|P_h^\pm u - u_h\| \leq h^2. \quad (۳۸.۲)$$

بعداً این پیش فرض را برای چند جمله ای های قطعه وار درجه ۱ $p \geq 1$ توجیه خواهیم کرد.

نتیجه ۱.۲.۲. فرض کنید خاصیت درونیایی (۹.۱) برقرار باشد. آنگاه از پیش فرض (۳۸.۲) نتیجه می شود که:

$$\|e\|_\infty \leq Ch^{\frac{3}{2}}, \quad \|\bar{e}\|_\infty \leq Ch^{\frac{3}{2}}. \quad (۳۹.۲)$$

برهان. با استفاده از ویژگی معکوس (۱۶.۱) و خاصیت درونیایی (۹.۱) و استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$\begin{aligned} \|\bar{e}\|_\infty &\leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|\bar{e}\| \leq Ch^{\frac{3}{2}}, \\ \|e\|_\infty &\leq \|e\|_\infty + \|\bar{e}\|_\infty \leq Ch^{p+\frac{1}{2}} + Ch^{\frac{3}{2}} \leq Ch^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۲.۲. تحت همان شرایط لم ۲.۲.۲ اگر پیش فرض (۳۸.۲) برقرار باشد، آنگاه برآوردهای خطای زیر برقرار هستند.

$$\|e\| \leq Ch^{p+1}, \quad \|\bar{e}\| \leq Ch^{p+1}. \quad (۴۰.۲)$$

برهان. اثبات در ادامه لم ۲.۲.۲ است با این تفاوت که، از $\|\bar{e}\|$ بجای $\|S\|$ در (۳۳.۲) و (۳۶.۲) استفاده می‌کنیم. پس از (۳۷.۲) داریم که:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \|\bar{e}\|^2 &\leq (\zeta(e) + C_* h^{-3} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{p+1} \|\bar{e}\| + Ch^{2p+3} \\ &\leq ((C_* + C_* h^{\frac{1}{\gamma}}) + C_*) \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{p+1} \|\bar{e}\| + Ch^{2p+3} \\ &\leq C_1 \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{2p+2}, \end{aligned} \quad (۴۱.۲)$$

که در آن از (۳۹.۲) و پیش فرض (۳۸.۲) و نامساوی یانگ استفاده کرده‌ایم. با استفاده از نامساوی گرونوال و این حقیقت که $\bar{e}(\cdot, 0) = 0$ داریم:

$$\|\bar{e}\| \leq Ch^{p+1}.$$

در نتیجه با توجه به (۸.۱) می‌توان نوشت:

$$\|e\| \leq \|\bar{e}\| + \|\epsilon\| \leq Ch^{p+1} + Ch^{p+1} \leq Ch^{p+1}.$$

□

در لم بعد کرانی برای S ارائه می‌دهیم، که به آن برای به دست آوردن خاصیت ابرهمگرایی نیاز داریم.

لم ۳.۲.۲. فرض کنید u جواب دقیق (۱.۲) باشد که به اندازه کافی هموار و دارای مشتقات کراندار است. همچنین فرض کنید $f \in C^3$ و برای هر $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ ، $\delta < f'(u(x, t))$ ، که در آن δ یک ثابت مثبت است. u_h را جوابی از (۵.۲) با شار عددی (۹.۲) برای $p \geq 1$ قرار می‌دهیم. با توجه به تقریب شرط اولیه $u_h(x, 0) = P_h^- u(x, 0)$ ، اگر پیش فرض (۳۸.۲) نیز برقرار باشد، آنگاه برای هر $t \in [0, T]$ نامساوی (۴۲.۲) برقرار است،

$$\|S\| \leq Ch \|e_t\| + Ch^{p+2}, \quad (۴۲.۲)$$

که ثابت مثبت C از h و جواب تقریبی u_h مستقل است.

برهان. با انتگرال گیری جزء به جزء از (۲۱.۲) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} e_t v \, dx &= - \int_{I_i} (f(u) - f(u_h))_x v \, dx + (f(u) - f(u_h^-)) v^-|_i \\ &\quad - (f(u) - f(u_h^+)) v^+|_{i-1} - (f(u) - f(u_h^-)) v^-|_i + (f(u) - f(u_h^-)) v^+|_{i-1}, \end{aligned}$$

پس برای هر $v \in V_h$ داریم،

$$\int_{I_i} e_t v \, dx + \int_{I_i} (f(u) - f(u_h))_x v \, dx + \llbracket f(u) - f(u_h) \rrbracket v^+|_{i-1} = 0. \quad (43.2)$$

یادآوری می‌کنیم که $u - u_h = \epsilon + \bar{e}$ و $\bar{e} = r_i + \frac{S_i(x)(x - \bar{x}_i)}{h_i}$ که ثابت است و $S_i(x) \in P^{p-1}(I_i)$. اگر $v = \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i}$ قرار دهیم، برای هر $v \in V_h$ داریم،

$$\int_{I_i} e_t \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx + \int_{I_i} (f(u) - f(u_h))_x \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx = 0. \quad (44.2)$$

چون $v^+(x_{i-1}) = 0$ با نوشتن بسط تیلور مرتبه دوم برای عبارت غیرخطی $f(u) - f(u_h)$ نسبت به u و نوشتن $f'(u)$ به صورت $f'(u) = f'(u_i) + (f'(u) - f'(u_i))$ به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_h) &= f'(u)\bar{e} + f'(u)\epsilon - \frac{1}{2}f''_u \epsilon^2 \\ &= f'(u_i)\bar{e} + (f'(u) - f'(u_i))\bar{e} + f'(u_i)\epsilon + (f'(u) - f'(u_i))\epsilon - \frac{1}{2}f''_u \epsilon^2 \\ &= \pi_{1,i} + \pi_{2,i} + \pi_{3,i} + \pi_{4,i} + \pi_{5,i}, \end{aligned}$$

که یک مقدار میانی است. بنابراین عبارت (44.2) را می‌توان به صورت (45.2) نوشت،

$$\int_{I_i} e_t \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx + \sum_{j=1}^5 \Pi_{ji} = 0, \quad (45.2)$$

که در آن،

$$\Pi_{ji} = \int_{I_i} (\pi_{ji})_x \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx, \quad (j = 1, \dots, 5). \quad (46.2)$$

هر عبارت (45.2) را به‌طور جداگانه برآورد می‌کنیم.

در ابتدا با استفاده از ویژگی B_i^- در لم ۱.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{1,i} &= \int_{I_i} f'(u_i) \left(r_i + \frac{S_i(x)(x - \bar{x}_i)}{h_i} \right)_x \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx \\ &= f'(u_i) B_i^-(S_i) = f'(u_i) \left[\frac{1}{2h_i} \int_{I_i} S_i''(x) \, dx + \frac{S_i''(x_i)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (47.2)$$

با قرار دادن (47.2) در (45.2) و استفاده از اینکه $f'(u(x, t)) \geq \delta > 0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} e_t \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx &= -f'(u_i) \left[\frac{1}{2h_i} \int_{I_i} S_i''(x) \, dx + \frac{S_i''(x_i)}{2} \right] - \sum_{j=2}^5 \Pi_{ji} \\ &\leq -\frac{\delta}{2h_i} \int_{I_i} S_i''(x) \, dx - \frac{\delta}{2} S_i''(x_i) - \sum_{j=2}^5 \Pi_{ji}. \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\frac{\delta}{2h_i} \int_{I_i} S_i''(x) \, dx + \frac{\delta}{2} S_i''(x_i) \leq - \int_{I_i} e_t \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} \, dx - \sum_{j=2}^5 \Pi_{ji},$$

که می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\delta}{4} \int_{I_i} S_i^\gamma(x) dx \leq h_i \left(- \int_{I_i} e_t \frac{S_i(x)(x - x_{i-1})}{h_i} dx - \sum_{j=2}^5 \Pi_{ji} \right). \quad (48.2)$$

چند جمله‌ای $\phi_1(x)$ را روی هر I_i ، به صورت $\phi_1(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\|\phi_1(x)\|_\infty = 1$. با جمع زدن طرفین رابطه (48.2) روی I_i داریم:

$$\frac{\delta}{4} \|S(x)\|^2 \leq -h \int_I e_t S(x) \phi_1(x) dx - \sum_{j=2}^5 \Pi_j, \quad \Pi_j = h \sum_i \Pi_{ji}. \quad (49.2)$$

حال عبارات سمت راست (49.2) را یک به یک برآورد می‌کنیم.

ابتدا کرانی برای عبارت انتگرال با استفاده از نامساوی کوشی شواتز به دست می‌آوریم:

$$h \left| \int_I e_t S(x) \phi_1(x) dx \right| \leq h \|e_t\| \|S\| \|\phi_1\|_\infty \leq h \|e_t\| \|S\|. \quad (50.2)$$

برای برآورد Π_2 ، ابتدا کرانی برای $\Pi_{2,i}$ ، با استفاده از نامساوی کوشی شواتز، رابطه (14.1) و $|f'(u) - f'(u_i)| \leq C_* h$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{2,i} &= \int_{I_i} [(f'(u) - f'(u_i))_x \bar{e} + (f'(u) - f'(u_i)) \bar{e}_x] S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx \\ &\leq C_* (\|\bar{e}\|_i + h \|\bar{e}_x\|_i) \|S\|_i \|\phi_1\|_i \leq C_* \|\bar{e}\|_i \|S\|_i. \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی کوشی شواتز داریم:

$$\Pi_2 \leq C_* h \|\bar{e}\| \|S\|. \quad (51.2)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء و استفاده از خاصیت P_h^- در (6.1) داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{3,i} &= \int_{I_i} f'(u_i) \epsilon_x S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx \\ &= f'(u_i) \epsilon^- S_i^-(x) \frac{x^- - x_{i-1}}{h_i} \Big|_i - f'(u_i) \epsilon^+ S_i^+(x) \frac{x^+ - x_{i-1}}{h_i} \Big|_{i-1} \\ &\quad - f'(u_i) \int_{I_i} \epsilon \frac{d}{dx} \left(S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) dx \\ &= -f'(u_i) \int_{I_i} \epsilon \frac{d}{dx} \left(S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

بنابراین

$$|\Pi_3| = 0. \quad (52.2)$$

برای برآورد Π_4 ، ابتدا با استفاده از نامساوی کوشی شواتز، رابطه (14.1) و همچنین استفاده از $|f'(u) - f'(u_i)| \leq C_* h$ ، کرانی برای $\Pi_{4,i}$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{4,i} &= \int_{I_i} [(f'(u) - f'(u_i))_x \epsilon + (f'(u) - f'(u_i)) \epsilon_x] S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx \\ &\leq C_* (\|\epsilon\|_i + h \|\epsilon_x\|_i) \|S\|_i. \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز و خاصیت درونیایی (۸.۱) کران زیر را برای Π_4 به دست می آوریم:

$$|\Pi_4| \leq C_* h (\|\epsilon\| + h \|\epsilon_x\|) \|S\| \leq C_* h^{p+2} \|S\|. \quad (53.2)$$

و در نهایت به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta i} &= \int_{I_i} \frac{1}{\tau} (f_u'' e^2)_x S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx = \int_{I_i} f_u'' e e_x S_i(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx \\ &\leq C_* \|e\|_i \|e_x\|_i \|S\|_i \|\phi_1\|_i \leq C_* \|e\|_i \|e_x\|_i \|S\|_i. \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} |\Pi_{\Delta}| &\leq h (C_* h^{-1} \|e\|^2 \|S\|) \leq C_* \|e\| (\|\bar{e}\| + \|\epsilon\|) \|S\| \\ &\leq C_* \|e\|_{\infty} (\|\bar{e}\| + \|\epsilon\|) \|S\| \leq C_* \|e\|_{\infty} (\|\bar{e}\| + Ch^{p+1}) \|S\|. \end{aligned} \quad (54.2)$$

در نهایت برآورد خطای (۴۲.۲)، با قرار دادن (۵۴.۲) – (۵۰.۲) در (۴۹.۲) و استفاده از (۳۹.۲) و (۴۰.۲) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \delta \|S(x)\|^2 &\leq -h \int_I e_t S(x) \phi_1(x) dx - \sum_{j=2}^{\Delta} \Pi_j \\ &\leq h \|e_t\| \|S\| + C_* h \|\bar{e}\| \|S\| + C_* h^{p+2} \|S\| + C_* \|e\|_{\infty} (\|\bar{e}\| + Ch^{p+1}) \|S\| \\ &\leq [h \|e_t\| + C_* h^{p+2} + C_* h^{p+2} + C_* h^{\frac{3}{2}} (Ch^{p+1} + Ch^{p+1})] \|S\| \\ &\leq (h \|e_t\| + C_* h^{p+2}) \|S\|. \end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت،

$$\|S\| \leq Ch \|e_t\| + Ch^{p+2}.$$

□

لم ۴.۲.۲. فرض کنید u جواب دقیق (۱.۲) باشد که به اندازه کافی هموار و دارای مشتقات کراندار است. همچنین فرض کنید $f \in C^3$ و برای هر $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ ، $\delta \leq f'(u(x, t))$ ، که در آن δ یک ثابت مثبت است. u_h را جوابی از (۵.۲) با شار عددی (۹.۲) برای $p \geq 1$ قرار می دهیم. با توجه به تقریب شرط اولیه $u_h(x, 0) = P_h^- u(x, 0)$ ، اگر پیش فرض (۳۸.۲) نیز برقرار باشد برای هر $t \in [0, T]$ نامساوی (۵۵.۲) برقرار است.

$$\|e_t\| \leq Ch^{p+1} + C_* h^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds}. \quad (55.2)$$

برای هر $t \in [0, T]$ که ثابت های C و C_* مستقل از h و جواب تقریبی u_h هستند.

برهان. از خاصیت درونیایی (۸.۱) می‌دانیم که $\|\epsilon_t(\cdot, t)\| \leq Ch^{p+1}$. بنابراین تنها لازم است ثابت کنیم:

$$\|\bar{e}_t(\cdot, t)\| \leq Ch^{p+1} + C_* h^{-\frac{1}{r}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds}.$$

به این منظور، ابتدا کرانی برای خطای اولیه $\|\bar{e}(\cdot, 0)\|$ به دست می‌آوریم. می‌دانیم که معادله خطای (۲۲.۲) در $t = 0$ نیز برای هر $v \in V_h$ برقرار است. با نوشتن بسط تیلور مرتبه دوم نسبت به u در $t = 0$ برای $f(u) - f(u_h)$ و $f(u) - f(u_h^-)$ و با توجه به اینکه $\bar{e}(\cdot, 0) = 0$ داریم:

$$f(u) - f(u_h) = f'(u)\epsilon - \frac{1}{r} \tilde{f}_u'' \epsilon^2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$f(u) - f(u_h^-) = f'(u)\epsilon^- - \frac{1}{r} \tilde{f}_u''(\epsilon^-)^2 = \Theta_1 + \Theta_2$$

سمت راست رابطه (۲۲.۲) را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^2 \Lambda_j + \Theta_j$$

که در آن،

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \lambda_j v_x dx \quad \Theta_j = \sum_{i=1}^N (\theta_j[v])_i$$

حال عبارات فوق را تک تک به صورت زیر برآورد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 + \Theta_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f'(u)\epsilon v_x dx + \sum_{i=1}^N (f'(u)\epsilon^- [v])_i \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f'(u_i)\epsilon v_x dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f'(u) - f'(u_i))\epsilon v_x dx \\ &\leq C_* h \|\epsilon\| \|v_x\| \leq C_* \|\epsilon\| \|v\| \end{aligned} \quad (56.2)$$

که در رابطه‌ی بالا از نامساوی کوش شوارتز، ویژگی تصویر P_h^- ، ویژگی معکوس (۱۴.۱) و این که $|f'(u) - f'(u_i)| \leq C_* h$ استفاده کرده‌ایم. حال $\Lambda_2 + \Theta_2$ را به صورت زیر برآورد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 + \Theta_2 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} -\frac{1}{r} \tilde{f}_u'' \epsilon^2 v_x dx + \sum_{i=1}^N (-\frac{1}{r} \tilde{f}_u''(\epsilon^-)^2 [v])_i \\ &\leq C_* \|\epsilon\|^2 \|v_x\| + C_* \|\epsilon\|_{\Gamma_h}^2 \|v\|_{\Gamma_h} \\ &\leq C_* h^{-1} \|\epsilon\|_{\infty} \|\epsilon\| \|v\| + C_* \|\epsilon\|_{\infty} \|\epsilon\|_{\Gamma_h} \|v\|_{\Gamma_h} \\ &\leq C_* h^{-1} \|\epsilon\|_{\infty} (\|\epsilon\| \|v\| + \|\epsilon\| \|v\|) \\ &\leq C_* h^p \|\epsilon\|_{\infty} \|v\| \end{aligned} \quad (57.2)$$

که در آن از نامساوی کوشی شواتز و ویژگی معکوس (۱۴.۱) و (۱۵.۱) استفاده کرده‌ایم. با ترکیب (۵۶.۲) و (۵۷.۲) داریم:

$$\mathbf{rhs} \leq C_*(h^{p+1} + h^p \|\epsilon(\cdot, \circ)\|_\infty) \|v\| \quad (58.2)$$

اگر $v = \bar{e}_t$ قرار دهیم، سمت چپ عبارت (۲۲.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{lhs} &= \int_I e_t(\cdot, \circ) \bar{e}_t(\cdot, \circ) dx = \int_I (\epsilon + \bar{e})_t \bar{e}_t dx = \int_I \bar{e}_t^\vee dx + \int_I \epsilon_t \bar{e}_t dx \\ &= \|\bar{e}_t(\cdot, \circ)\|^\vee + \int_I \epsilon_t(\cdot, \circ) \bar{e}_t(\circ, t) dx. \end{aligned}$$

اگر در (۲۲.۲) و همچنین در (۵۸.۲)، $v = \bar{e}_t(\cdot, \circ)$ قرار دهیم، داریم:

$$\|\bar{e}_t(\cdot, \circ)\|^\vee \leq (\|\epsilon_t(\circ, t)\| + C_*(h^{p+1} + h^p \|\epsilon(\cdot, \circ)\|_\infty)) \|\bar{e}_t(\cdot, \circ)\|,$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\|\bar{e}_t(\cdot, \circ)\| \leq \|\epsilon_t(\cdot, \circ)\| + C_*(h^{p+1} + h^p \|\epsilon(\cdot, \circ)\|_\infty) \leq Ch^{p+1}, \quad (59.2)$$

که از خاصیت درونیابی (۸.۱) و (۹.۱)، استفاده کرده‌ایم. حال برآوردی از $\|\bar{e}_t(\cdot, t)\|$ را برای $t > \circ$ به دست می‌آوریم. برای این کار روند زیر را انجام می‌دهیم. با مشتق گرفتن از معادله (۲۲.۲) نسبت به t داریم:

$$\int_I e_{tt} v dx = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f(u) - f(u_h))_t v_x dx + \sum_{i=1}^N \left((f(u) - f(u_h^-))_t \llbracket v \rrbracket \right)_i.$$

با قرار دادن $v = \bar{e}_t$ ، رابطه (۶۰.۲) حاصل می‌شود.

$$\int_I e_{tt} \bar{e}_t dx = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f(u) - f(u_h))_t (\bar{e}_t)_x dx + \sum_{i=1}^N \left((f(u) - f(u_h^-))_t \llbracket \bar{e}_t \rrbracket \right)_i. \quad (60.2)$$

بسط تیلور مرتبه دوم را نسبت به u برای عبارات غیرخطی $(f(u) - f(u_h^-))_t$ و $(f(u) - f(u_h))_t$ به صورت (۶۱.۲) و (۶۲.۲) می‌نویسیم،

$$\begin{aligned} (f(u) - f(u_h))_t &= (f'(u) \bar{e})_t + (f'(u) \epsilon)_t - (R_1 e^\vee)_t \\ &= \partial_t f'(u) \bar{e} + f'(u) \bar{e}_t + \partial_t f'(u) \epsilon \\ &\quad + f'(u) \epsilon_t - \partial_t R_1 e^\vee - \vee R_1 e e_t \\ &= \sigma_1 + \dots + \sigma_6, \end{aligned} \quad (61.2)$$

$$\begin{aligned} (f(u) - f(u_h^-))_t &= (f'(u) \bar{e}^-)_t + (f'(u) \epsilon^-)_t - (R_2 (e^-)^\vee)_t \\ &= \partial_t f'(u) \bar{e}^- + f'(u) \bar{e}_t^- + \partial_t f'(u) \epsilon^- \\ &\quad + f'(u) \epsilon_t^- - \partial_t R_2 (e^-)^\vee - \vee R_2 e^- e_t^- \\ &= \gamma_1 + \dots + \gamma_6, \end{aligned} \quad (62.2)$$

که در روابط (۶۱.۲) و (۶۲.۲) R_1 و R_2 به صورت (۶۳.۲) تعریف می‌شوند.

$$R_1 = \int_0^1 (1 - \mu) f''(u + \mu(u_h - u)) d\mu, \quad R_2 = \int_0^1 (1 - \nu) f''(u + \nu(u_h^- - u)) d\nu. \quad (63.2)$$

سمت راست (۶۰.۲) را با Υ نشان می‌دهیم و به صورت (۶۳.۲) فرمول‌بندی می‌کنیم.

$$\Upsilon = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_6, \quad (64.2)$$

که در آن برای $j = 1, \dots, 6$,

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \sigma_j(\bar{e}_t)_x dx + \sum_{i=1}^N (\gamma_j \llbracket \bar{e}_t \rrbracket)_i, \quad (65.2)$$

که آن‌ها را تک تک برآورد خواهیم کرد. در نتیجه می‌توان (۶۰.۲) را به صورت (۶۶.۲) نشان داد:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{e}_t\|^2 \leq \Upsilon + \|\epsilon_{tt}\| \|\bar{e}_t\| \leq \Upsilon + Ch^{p+1} \|\bar{e}_t\|, \quad (66.2)$$

که در نامساوی فوق از (۸.۱) استفاده کرده‌ایم.

ابتدا Λ_1 را برآورد می‌کنیم. با استفاده از نامساوی یانگ و رابطه (۱۵.۱) برآورد (۶۷.۲) را برای Λ_1 به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e}(\bar{e}_t)_x dx + \sum_{i=1}^N \partial_t f'(u_i) \bar{e}_i^- \llbracket \bar{e}_t \rrbracket_i \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e}(\bar{e}_t)_x dx + C_* \sum_{i=1}^N (\bar{e}_i^-)^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^N \llbracket \bar{e}_t \rrbracket_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e}(\bar{e}_t)_x dx + C_* \|\bar{e}\|_{\Gamma_h}^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^N \llbracket \bar{e}_t \rrbracket_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e}(\bar{e}_t)_x dx + \varepsilon \sum_{i=1}^N \llbracket \bar{e}_t \rrbracket_i^2 + C_* h^{-1} \|\bar{e}\|^2. \end{aligned} \quad (67.2)$$

که ε یک ثابت مثبت کوچک است. توجه کنید که اولین عبارت انتگرالی سمت راست (۶۷.۲) برای به‌دست آوردن کرانی برای $\|\bar{e}_t\|$ پیچیده است، چون ترکیب $\bar{e}$ و $(\bar{e}_t)_x$ در آن وجود دارد و بعداً آن را همراه با عبارات دیگر برآورد می‌کنیم. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و

اینکه $\delta > 0$ ، کرانی برای Λ_2 به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f'(u) \bar{e}_t (\bar{e}_t)_x dx + \sum_{i=1}^N f'(u_i) (\bar{e}_t^-)_i [\bar{e}_t]_i \\ &\leq \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^N f'(u) (\bar{e}_t^-)_i^2 \Big|_i - f'(u) (\bar{e}_t^+)_i^2 \Big|_{i-1} \right) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_x f'(u) (\bar{e}_t)_i^2 dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^N f'(u_i) (\bar{e}_t^-)_i [\bar{e}_t]_i \\ &\leq -\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_x f'(u) (\bar{e}_t)_i^2 dx - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N f'(u_i) [\bar{e}_t]_i^2 \\ &\leq C_* \|\bar{e}_t\|^2 - \frac{\delta}{\tau} \sum_{i=1}^N [\bar{e}_t]_i^2. \end{aligned} \quad (68.2)$$

با ترکیب برآوردهای بالا که برای Λ_1 و Λ_2 به دست آورده ایم، داریم:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 + \Lambda_2 &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e} (\bar{e}_t)_x dx + C_* h^{-1} \|\bar{e}\|^2 + C_* \|\bar{e}_t\|^2 - \left(\frac{\delta}{\tau} - \varepsilon \right) \sum_{i=1}^N [\bar{e}_t]_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e} (\bar{e}_t)_x dx + C_* h^{-1} \|\bar{e}\|^2 + C_* \|\bar{e}_t\|^2, \end{aligned} \quad (69.2)$$

در نامساوی (۶۹.۲)، ε را کوچک انتخاب می کنیم، به عنوان مثال $\varepsilon = \frac{\delta}{\tau}$. با توجه به اینکه روی هر عنصر I_i ،

$$\partial_t f'(u) = \partial_t f'(u_i) + (\partial_t f'(u) - \partial_t f'(u_i)), \quad |\partial_t f'(u) - \partial_t f'(u_i)| \leq C_* h.$$

و با استفاده از خاصیت تصویر P_h^- داریم:

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \epsilon (\bar{e}_t)_x dx + \sum_{i=1}^N \partial_t f'(u_i) (\epsilon^-)_i [\bar{e}_t]_i \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\partial_t f'(u) - \partial_t f'(u_i)) \epsilon (\bar{e}_t)_x dx \\ &\leq C_* h \|\epsilon\| \|(\bar{e}_t)_x\| \leq C_* \|\epsilon\| \|\bar{e}_t\| \leq C_* h^{p+1} \|\bar{e}_t\|. \end{aligned} \quad (70.2)$$

که در (۷۰.۲) از نامساوی کوشی شواتز، رابطه (۱۴.۱) و خاصیت درونیابی (۸.۱) استفاده کرده ایم. به طور مشابه با استفاده از ویژگی تصویر P_h^- و رابطه (۱۴.۱) داریم:

$$\begin{aligned} \Lambda_4 &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f'(u) \epsilon_t (\bar{e}_t)_x dx + \sum_{i=1}^N f'(u_i) (\epsilon_t^-)_i [\bar{e}_t]_i \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (f'(u) - f'(u_i)) \epsilon_t (\bar{e}_t)_x dx \\ &\leq C_* h \|\epsilon_t\| \|(\bar{e}_t)_x\| \leq C_* \|\epsilon_t\| \|\bar{e}_t\| \leq C_* h^{p+1} \|\bar{e}_t\| \end{aligned} \quad (71.2)$$

حال با استفاده از روابط (۱۴.۱) و (۱۵.۱) و استفاده از (۴۰.۲)، Λ_5 را برآورد می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\Lambda_5 &= - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t R_1 e^\gamma (\bar{e}_t)_x dx - \sum_{i=1}^N (\partial_t R_\gamma (e^-)^\gamma [\bar{e}_t])_i \\ &\leq C_* \|e\|^\gamma \|(\bar{e}_t)_x\| + C_* \|e\|_{\Gamma_h}^\gamma \|\bar{e}_t\|_{\Gamma_h} \\ &\leq C_* h^{-1} \|e\|_\infty \|e\| \|\bar{e}_t\| + C_* \|e\|_\infty \|e\|_{\Gamma_h} \|\bar{e}_t\|_{\Gamma_h} \\ &\leq C_* h^{-1} \|e\|_\infty (\|e\| \|\bar{e}_t\| + \|e\|_{\Gamma_h} \|\bar{e}_t\|) \leq C_* h^{-1} \|e\|_\infty \|e\| \|\bar{e}_t\| \\ &\leq C_* h^p \|e\|_\infty \|\bar{e}_t\|.\end{aligned}\tag{۷۲.۲}$$

به‌طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned}\Lambda_6 &= - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \gamma R_1 e e_t (\bar{e}_t)_x dx - \sum_{i=1}^N (\gamma R_\gamma e^- e_t^- [\bar{e}_t])_i \\ &\leq C_* \|e\| \|e_t\| \|(\bar{e}_t)_x\| + C_* \|e\|_{\Gamma_h} \|\bar{e}_t\|_{\Gamma_h}^\gamma \\ &\leq C_* h^{-1} \|e\|_\infty \|e_t\| \|\bar{e}_t\| + C_* h^{-1} \|e\|_\infty \|\bar{e}_t\|^\gamma \\ &\leq C_* h^p \|e\|_\infty \|\bar{e}_t\| + C_* h^{-1} \|e\|_\infty \|\bar{e}_t\|^\gamma.\end{aligned}\tag{۷۳.۲}$$

با جمع کردن (۷۳.۲)–(۶۹.۲) و (۶۴.۲) در (۶۶.۲) و استفاده از نامساوی یانگ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \|\bar{e}_t\|^\gamma &\leq \Upsilon + C h^{p+1} \|\bar{e}_t\| = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_6 + C h^{p+1} \|\bar{e}_t\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e} (\bar{e}_t)_x dx + C_* h^{-1} \|\bar{e}\|^\gamma + \gamma C_* h^{p+1} \|\bar{e}_t\| \\ &\quad + C h^{p+1} \|\bar{e}_t\| + \gamma C_* h^p \|e\|_\infty \|\bar{e}_t\| + (C + C_* h^{-1} \|e\|_\infty) \|\bar{e}_t\|^\gamma \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e} (\bar{e}_t)_x dx + C_* h^{-1} \|\bar{e}\|^\gamma + C h^{\gamma p + \gamma} + C \|\bar{e}_t\|^\gamma \\ &\quad + C_*^\gamma h^{\gamma p + \gamma} + C_*^\gamma h^{-\gamma} \|e\|_\infty^\gamma \|\bar{e}_t\|^\gamma + (C + C_* h^{-1} \|e\|_\infty) \|\bar{e}_t\|^\gamma \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e} (\bar{e}_t)_x dx + C_* h^{-1} \|\bar{e}\|^\gamma + C h^{\gamma p + \gamma} + \zeta(e)^\gamma \|\bar{e}_t\|^\gamma,\end{aligned}\tag{۷۴.۲}$$

که در آن $\zeta(e) = (C + C_* h^{-1} \|e\|_\infty)$ است. با انتگرال‌گیری از عبارت فوق روی بازه‌ی 0 تا t و با استفاده از (۵۹.۲) داریم:

$$\frac{1}{\gamma} \|\bar{e}_t\|^\gamma \leq E + C_* h^{-1} \int_0^t \|\bar{e}\|^\gamma dt + C h^{\gamma p + \gamma} + \zeta(e)^\gamma \int_0^t \|\bar{e}_t\|^\gamma dt,\tag{۷۵.۲}$$

که در آن $E = \int_0^t \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \partial_t f'(u) \bar{e} (\bar{e}_t)_x dx dt$ است. برای برآورد E از آن نسبت به t انتگرال

جزء به جزء می گیریم:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \int_0^t \partial_t f'(u) \bar{e}(\bar{e}_t)_x dt dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \left\{ - \int_0^t \partial_t (\partial_t f'(u) \bar{e}) \bar{e}_x dt + \partial_t f'(u) \bar{e} \bar{e}_x \Big|_0^t \right\} dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \left\{ - \int_0^t \partial_t (\partial_t f'(u) \bar{e}) \bar{e}_x dt + (\partial_t f'(u) \bar{e} \bar{e}_x)(t) \right\} dx. \end{aligned}$$

چون $\bar{e}(\cdot, \cdot) = \cdot$ با تجزیه و تحلیلی مانند اثبات (۳۳.۲) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} E &= - \int_0^t \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\partial_t^2 f'(u) \bar{e} + \partial_t f'(u) \bar{e}_t) \bar{e}_x dx dt + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\partial_t f'(u) \bar{e}_x)(t) dx \\ &= - \int_0^t \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\partial_t^2 f'(u) \bar{e} + \partial_t f'(u) \bar{e}_t) (r_i + S_i(x) \frac{(x - \bar{x})}{h_i})_x dx dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \left(\partial_t f'(u) \bar{e} (r_i + S_i(x) \frac{(x - \bar{x})}{h_i})_x \right) (t) dx \\ &\leq C_* \int_0^t (\|\bar{e}\| + \|\bar{e}_t\|) (Ch^{-1} \|S\| + h^{-1} \|S\|) dt + C_* \|\bar{e}\| (Ch^{-1} \|S\| + h^{-1} \|S\|) \\ &\leq C_* h^{-1} \int_0^t (\|\bar{e}\| + \|\bar{e}_t\|) \|S\| dt + C_* h^{-1} \|\bar{e}\| \|S\|. \end{aligned}$$

پس نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} E &\leq C_* h^{-1} \int_0^t \|S\| (\|\bar{e}\| + \|\bar{e}_t\|) dt + C_* h^{-1} \|S\| \|\bar{e}\| \\ &\leq C_* h^{-1} \int_0^t (Ch \|\bar{e}_t\| + Ch^{p+2}) (\|\bar{e}\| + \|\bar{e}_t\|) dt \\ &\quad + C_* h^{-1} (Ch \|\bar{e}_t\| + Ch^{p+2}) \|\bar{e}\| \\ &\leq C_* h^{-1} \int_0^t (Ch \|\bar{e}_t\| \|\bar{e}\| + Ch \|\bar{e}_t\|^2 + Ch^{p+2} \|\bar{e}\| + Ch^{p+2} \|\bar{e}_t\|) dt \quad (۷۶.۲) \\ &\quad + C_* \|\bar{e}_t\| \|\bar{e}\| + C_* h^{p+1} \|\bar{e}\| \\ &\leq C_* \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + C_* h^{p+1} \|\bar{e}_t\| + Ch^{p+2} \\ &\leq C_* \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + \frac{1}{4} \|\bar{e}_t\|^2 + Ch^{p+2}. \end{aligned}$$

که در آن از نامساوی یانگ، خاصیت درونیایی (۸.۱)، نامساوی (۴۰.۲) و نامساوی $\|S\| \leq Ch \|\bar{e}_t\| + Ch^{p+2}$ استفاده کرده ایم.

با قرار دادن (۷۶.۲) در (۷۵.۲) و در نظر گرفتن (۳۹.۲) برای h به اندازه کافی کوچک

به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|\bar{e}_t\|^2 &\leq C_* \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + Ch^{p+2} + C_* h^{-1} \int_0^t \|\bar{e}\|^2 dt + Ch^{p+2} \\ &\quad + \zeta(e)^2 \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt. \end{aligned} \quad (77.2)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^t \zeta(e)^2 \|\bar{e}_t\|^2 dt &= \int_0^t (C + C_* h^{-1} \|e\|_\infty)^2 \|\bar{e}_t\|^2 dt \\ &= C \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + C_* h^{-2} \int_0^t \|e\|_\infty^2 \|\bar{e}_t\|^2 dt + C_* h^{-1} \int_0^t \|e\|_\infty \|\bar{e}_t\|^2 dt \\ &\leq C \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + C_* h \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + C_* h^{\frac{1}{2}} \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt \\ &\leq C \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

با قرار دادن نامساوی فوق در (77.2) نتیجه می شود که:

$$\frac{1}{4} \|\bar{e}_t\|^2 \leq \tilde{C} \int_0^t \|\bar{e}_t\|^2 dt + C_* h^{-1} \int_0^t \|\bar{e}\|^2 dt + Ch^{p+2},$$

که C, C_* و $\tilde{C}$ ثابت های مثبت مستقل از h هستند. در نهایت با استفاده از نامساوی گرونوال به دست می آوریم:

$$\|\bar{e}_t\| \leq Ch^{p+1} + C_* h^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\| ds}. \quad (78.2)$$

پس با استفاده از نامساوی فوق و اینکه $\|\epsilon_t\| \leq Ch^{p+1}$ داریم:

$$\begin{aligned} \|e_t\| &\leq \|\epsilon_t\| + \|\bar{e}_t\| \leq Ch^{p+1} + Ch^{p+1} + C_* h^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\| ds} \\ &\leq Ch^{p+1} + C_* h^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\| ds}. \end{aligned}$$

□

حالا با قرار دادن (42.2) و (55.2) در (37.2)، استفاده از (39.2)، پیش فرض (38.2)، استفاده از (40.2) و به کار بردن نامساوی یانگ، نامساوی مهم بعد را که شامل $\bar{e}$ است، به دست

می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \|\bar{e}\|^2 &\leq (\zeta(e) + C_* h^{-\gamma} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{p+1} \|S\| + Ch^{\gamma p+3} \\
 &\leq (\zeta(e) + C_* h^{-\gamma} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|^2 + C_* h^{p+1} (Ch \|e_t\| + Ch^{p+2}) + Ch^{\gamma p+3} \\
 &\leq (\zeta(e) + C_* h^{-\gamma} \|e\|_\infty^2) \|\bar{e}\|^2 \\
 &\quad + C_* h^{p+1} \left(Ch (Ch^{p+1} + C_* h^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds}) + Ch^{p+2} \right) + Ch^{\gamma p+3} \\
 &\leq ((C_* + C_* h^{-1} \|e\|_\infty) + C_* C^\gamma) \|\bar{e}\|^2 + C_* C^\gamma h^{\gamma p+3} \\
 &\quad + C_*^\gamma Ch^{p+\frac{\gamma}{\gamma}} \sqrt{\int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds} + C_* Ch^{\gamma p+3} + Ch^{\gamma p+3} \\
 &\leq (C_* + C_* Ch^{\frac{1}{\gamma}} + C_* C^\gamma) \|\bar{e}\|^2 + C_*^\gamma C \left(\frac{h^{\gamma p+3}}{\gamma} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds}{\gamma} \right) + (C_* C^\gamma + C_* C + C) h^{\gamma p+3} \\
 &\leq (C_* + C_* C + C_* C^\gamma) \|\bar{e}\|^2 + \left(\frac{C_*^\gamma C}{\gamma} \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds \right) \\
 &\quad + (C_* C^\gamma + C_* C + C + \frac{C_*^\gamma C}{\gamma}) h^{\gamma p+3} \\
 &\leq C_1 \|\bar{e}\|^2 + C_\gamma \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds + (C_* C^\gamma + C_* C + C + \frac{C_*^\gamma C}{\gamma}) h^{\gamma p+3} \\
 &\leq C_1 \|\bar{e}\|^2 + C_\gamma \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds + C_\gamma h^{\gamma p+3}.
 \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \|\bar{e}\|^2 \leq C_1 \|\bar{e}\|^2 + C_\gamma \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds + C_\gamma h^{\gamma p+3}, \quad (79.2)$$

که C_1 ، C_γ و C_γ ثابت‌های مثبت مستقل از h هستند. توجه کنید که رابطه (۸۰.۲) برقرار است.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds = \|\bar{e}(t)\|^2. \quad (80.2)$$

با جمع کردن دو برابر (۷۹.۲) با (۸۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\|\bar{e}\|^2 + \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds \right) &\leq (\gamma C_1 + 1) \|\bar{e}\|^2 + \gamma C_\gamma \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds + \gamma C_\gamma h^{\gamma p+3} \\
 &\leq C_\circ \left(\|\bar{e}\|^2 + \int_0^t \|\bar{e}(s)\|^2 ds \right) + Ch^{\gamma p+3},
 \end{aligned} \quad (81.2)$$

که $C = \gamma C_\gamma$ و $C_\circ = \max(\gamma C_1 + 1, \gamma C_\gamma)$ ثابت‌های مثبت مستقل از h هستند. با به‌کاربردن نامساوی گرونوال همراه با این حقیقت که $\bar{e}(\cdot, \circ) = \circ$ نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید، یعنی برای هر $t \in [0, T]$ ، رابطه (۸۲.۲) برقرار است.

$$\|\bar{e}(\cdot, t)\| \leq Ch^{p+\frac{\gamma}{\gamma}}. \quad (82.2)$$

در نهایت اثبات قضیه با بررسی کردن پیش فرض (۳۸.۲) کامل می شود. اول از همه پیش فرض برای $t = 0$ صدق می کند، چون $\bar{e}(\cdot, 0) = 0$. برای چند جمله ای های تکه وار درجه p ($p \geq 1$) می توان h را به اندازه ای کوچک انتخاب کرد که $\frac{1}{4}h^2 < Ch^{p+\frac{3}{2}}$ ، که در آن C ثابت تعیین شده توسط زمان نهایی T در (۸۲.۲) است. t^* را به صورت (۸۳.۲) تعریف می کنیم.

$$t^* = \sup \{s \leq T : \|P_h^* u(t) - u_h(t)\| \leq h^2, \forall t \in [0, s]\}, \quad (۸۳.۲)$$

پس به طور پیوسته اگر $t^* < T$ داریم:

$$\|P_h^* u(t^*) - u_h(t^*)\| = h^2.$$

اما از (۸۲.۲) نتیجه می شود که:

$$\|P^* u(t^*) - u_h(t^*)\| \leq Ch^{p+\frac{3}{2}} < \frac{1}{4}h^2,$$

که تناقض است. بنابراین همیشه $t^* = T$ برقرار است. پس پیش فرض (۳۸.۲) موجه است. $\square$

در لم بعد برخی از خواص پارامترهای P_h^- و π^+ را که در تجزیه و تحلیل به آن ها نیاز داریم، بررسی می کنیم. به خصوص نشان می دهیم که خطای درونیابی $u - \pi^+ u$ ، به یک بخش معنی دار و یک بخش بی معنی تقسیم می شود.

لم ۵.۲.۲. فرض کنید $u \in H^{p+2}$ و $t \in [0, T]$ ثابت باشد. آنگاه روی I_i رابطه (۸۴.۲) برقرار است.

$$u - \pi^+ u = \phi_i^+ + \gamma_i^+, \quad (۸۴.۲)$$

که در آن،

$$\phi_i^+(x, t) = \alpha_i(t) \psi_{p+1,i}^+(x), \quad \psi_{p+1,i}^+(x) = \prod_{j=0}^p (x - x_{i,j}^+). \quad (۸۵.۲)$$

$$\|\phi_i^+\|_{k,i}^2 \leq C h_i^{2(p+1-k)} \|u\|_{p+1,i}^2, \quad 0 \leq k \leq p \quad (۸۶.۲)$$

$$\|\gamma_i^+\|_{k,i}^2 \leq C h_i^{2(p+2-k)} \|u\|_{p+2,i}^2, \quad 0 \leq k \leq p+1 \quad (۸۷.۲)$$

و همچنین،

$$\|\pi^+ u - P_h^- u\|_i \leq C h_i^{p+2} \|u\|_{p+2,i}. \quad (۸۸.۲)$$

برهان. ابتدا توجه کنید که برای هر $v \in P^{p+1}$ ، تساوی $\pi^+ v = P_h^- v$ برقرار است. برای دیدن اثبات می‌توانید به [۳] مراجعه کنید. با اضافه و کم کردن $V = \hat{\pi}^+ u = \sum_{k=0}^p c_k x^k + \alpha_i x^{p+1} \in P^{p+1}$ خطای درونیابی را به صورت (۸۹.۲) تجزیه می‌کنیم:

$$u - \pi^+ u = V - \pi^+ u + u - V = \phi_i^+ + \gamma_i^+, \quad (۸۹.۲)$$

که در آن،

$$\phi_i^+ = V - \pi^+ u, \quad \gamma_i^+ = u - V. \quad (۹۰.۲)$$

با توجه به اینکه $\pi^+ u = \pi^+ \hat{\pi}^+ u = \pi^+ V$ می‌توان نوشت:

$$\phi_i^+ = V - \pi^+ V = \alpha_i (x^{p+1} - \pi^+(x^{p+1})) = \alpha_i \psi_{p+1,i}^+, \quad (۹۱.۲)$$

که در آن،

$$\psi_{p+1,i}^+(x) = x^{p+1} - \pi^+(x^{p+1}).$$

با برآورد خطای درونیاب استاندارد داریم:

$$\|\gamma_i^+\|_{k,i} \leq C_1 h_i^{p+2-k} \|u\|_{p+2,i}, \quad \|\phi_i^+\|_{k,i} \leq C_2 h_i^{p+1-k} \|V\|_{p+1,i}. \quad (۹۲.۲)$$

حال کرانی برای $\|V\|_{p+1,i}$ با کم و اضافه کردن u و استفاده از نامساوی مثلثی پیدا می‌کنیم.

$$\|V\|_{p+1,i} \leq \|V - u\|_{p+1,i} + \|u\|_{p+1,i} \leq (ch_i + 1) \|u\|_{p+1,i} \leq C \|u\|_{p+1,i}. \quad (۹۳.۲)$$

پس (۸۴.۲) تا (۸۷.۲) را ثابت کردیم.

برای اثبات (۸۸.۲) باید توجه کنیم که $\hat{\pi}^+ u \in P^{p+1}$ بنابراین:

$$P_h^- \hat{\pi}^+ u = \pi^+ \hat{\pi}^+ u = \pi^+ u.$$

با استفاده از خطای درونیاب استاندارد داریم:

$$\|u - \hat{\pi}^+ u\|_i \leq C_1 h_i^{p+2} \|u\|_{p+2,i}. \quad (۹۴.۲)$$

با به کار بردن P_h^- برای $u = u - \hat{\pi}^+ u + \hat{\pi}^+ u$ و استفاده از $P_h^- \hat{\pi}^+ u = \pi^+ u$ داریم:

$$P_h^- u = P_h^-(u - \hat{\pi}^+ u) + P_h^-(\hat{\pi}^+ u) = P_h^-(u - \hat{\pi}^+ u) + \pi^+ u,$$

در نتیجه:

$$P_h^- u - \pi^+ u = P_h^-(u - \hat{\pi}^+ u). \quad (۹۵.۲)$$

حال نشان می‌دهیم که $\|P_h^- v\|_i \leq C_2 \|v\|_i$ و می‌نویسیم:

$$\|P_h^- v\|_i = \|P_h^- v - v + v\|_i \leq \|P_h^- v - v\|_i + \|v\|_i \leq ch_i^{p+1} \|v\|_i + \|v\|_i \leq C_2 \|v\|_i. \quad (96.2)$$

با گرفتن نرم L^2 از (95.2) و استفاده از برآورد (96.2) داریم:

$$\|P_h^- u - \pi^+ u\|_i = \|P_h^- (u - \hat{\pi}^+ u)\|_i \leq C_2 \|u - \hat{\pi}^+ u\|_i. \quad (97.2)$$

با ترکیب (97.2) با برآورد درونیابی استاندارد (94.2) به دست می‌آوریم:

$$\|P_h^- u - \pi^+ u\|_i \leq C_2 h_i^{p+2} \|u\|_{p+2,i}.$$

□

قضیه 2.2.2. فرض کنید u جواب دقیق (1.2) باشد که به اندازه کافی هموار و دارای مشتقات کراندار است. همچنین فرض کنید $f \in C^3$ و برای هر $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ ، $\delta \leq f'(u(x, t))$ ، که در آن δ یک ثابت مثبت است. u_h را جوابی از (5.2) با شار عددی (9.2) برای $p \geq 1$ قرار می‌دهیم. با توجه به تقریب شرط اولیه $u_h(x, 0) = P_h^- u(x, 0)$ ، ثابت C وجود دارد به طوری که برای هر $t \in [0, T]$ ، نامساوی (2.2.2) برقرار است.

$$\|u_h - \pi^+ u\| \leq Ch^{p+\frac{3}{2}}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (98.2)$$

علاوه بر این، خطای حقیقی می‌تواند به صورت (99.2) تجزیه شود.

$$e(x, t) = \alpha_i(t) \psi_{p+1,i}^+(x) + \omega_i^+(x, t), \quad (99.2)$$

که در آن،

$$\omega_i^+ = \gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h, \quad (100.2)$$

و

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial^k \omega_i^+}{\partial x^k} \right\|_i \leq Ch^{\gamma(p-k)+3}, \quad k = 0, 1, \quad (101.2)$$

و در نهایت،

$$\|e\|_{\gamma,B} \leq Ch^{\gamma p}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (102.2)$$

برهان. با کم و اضافه کردن $P_h^- u$ به $u_h - \pi^+ u$ ، داریم:

$$u_h - \pi^+ u = u_h - P_h^- u + P_h^- u - \pi^+ u = -\bar{e} + P_h^- u - \pi^+ u.$$

با گرفتن نرم L^2 از طرفین تساوی فوق و استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$\|u_h - \pi^+ u\| = \|-\bar{e} + P_h^- u - \pi^+ u\| \leq \|\bar{e}\| + \|P_h^- u - \pi^+ u\|.$$

با استفاده از برآوردهای (۱۶.۲) و (۸۸.۲) داریم:

$$\|u_h - \pi^+ u\| \leq Ch^{p+\frac{r}{2}} + C_{\frac{r}{2}} h^{p+\frac{r}{2}} \|u\|_{p+\frac{r}{2}},$$

چون u و مشتقات u کراندار هستند و $\|u\|_{p+\frac{r}{2}}^2 = \sum_{k=0}^{p+\frac{r}{2}} \|\frac{\partial^k u(\cdot, t)}{\partial x^k}\|^2$ داریم:

$$\|u_h - \pi^+ u\| \leq Ch^{p+\frac{r}{2}} + C_{\frac{r}{2}} h^{p+\frac{r}{2}} \leq Ch^{p+\frac{r}{2}}.$$

با اضافه و کم کردن $\pi^+ u$ به e و همچنین با جدا کردن خطای درونیابی $u - \pi^+ u$ روی I_i به صورت (۸۴.۲) داریم:

$$e = u - \pi^+ u + \pi^+ u - u_h = \phi_i^+ + \gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h = \phi_i^+ + \omega_i^+, \quad (103.2)$$

که در آن،

$$\omega_i^+ = \gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h.$$

با به کار بردن نامساوی کوشی و نامساوی $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \|\omega_i^+\|_i^2 &= (\gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h, \gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h)_i \\ &= \|\gamma_i^+\|_i^2 + 2(\gamma_i^+, \pi^+ u - u_h)_i + \|\pi^+ u - u_h\|_i^2 \\ &\leq 2 \left(\|\gamma_i^+\|_i^2 + \|\pi^+ u - u_h\|_i^2 \right). \end{aligned} \quad (104.2)$$

با جمع زدن طرفین (۱۰۴.۲) روی همه عناصر و استفاده از (۸۷.۲) و (۹۸.۲) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\sum_{i=1}^N \|\omega_i^+\|_i^2 \leq C_1 h^{2(p+\frac{r}{2})} + C_{\frac{r}{2}} h^{2p+3} \leq Ch^{2p+3}.$$

برآورد (۱۰۱.۲) برای $k=0$ اثبات شد.

حال برآورد (۱۰۱.۲) را برای $k=1$ ثابت می کنیم. با استفاده از نامساوی کوشی و نامساوی $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \omega_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 &= \left(\frac{\partial(\gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h)}{\partial x}, \frac{\partial(\gamma_i^+ + \pi^+ u - u_h)}{\partial x} \right)_i \\ &\leq 2 \left(\left\| \frac{\partial \gamma_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 + \left\| \frac{\partial(\pi^+ u - u_h)}{\partial x} \right\|_i^2 \right). \end{aligned} \quad (105.2)$$

با استفاده از نامساوی معکوس (۱۴.۱) برآورد زیر را به دست می آوریم:

$$\left\| \frac{\partial \omega_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 \leq C \left(\left\| \frac{\partial \gamma_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 + h^{-2} \|\pi^+ u - u_h\|_i^2 \right). \quad (106.2)$$

با جمع زدن طرفین (۱۰۶.۲) روی همه عناصر و با استفاده از (۹۸.۲) و (۸۷.۲) داریم:

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \omega_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 \leq C \left(h^{2p+2} + h^{-2} h^{2p+3} \right) \leq Ch^{2p+1}.$$

برای نشان دادن (۱۰۲.۲) باید توجه داشته باشیم که:

$$\|e\|_{\beta}^2 = \sum_{i=1}^N \|e\|_{\beta,i}^2 = \|e\|^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial e}{\partial x} \right\|_i^2. \quad (107.2)$$

با مشتق گرفتن از (۱۰۳.۲) نسبت به x و گرفتن نرم L^2 و استفاده از نامساوی کوشی و نامساوی $|ab| \leq \frac{1}{\epsilon}(a^2 + b^2)$ رابطه (۱۰۸.۲) به دست می آید:

$$\left\| \frac{\partial e}{\partial x} \right\|_i^2 = \left(\frac{\partial \phi_i^+}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i^+}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i^+}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i^+}{\partial x} \right) \leq 2 \left(\left\| \frac{\partial \phi_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 + \left\| \frac{\partial \omega_i^+}{\partial x} \right\|_i^2 \right). \quad (108.2)$$

با جمع زدن طرفین رابطه (۱۰۸.۲) روی همه عناصر و استفاده از (۸۶.۲) و (۱۰۱.۲) داریم:

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial e}{\partial x} \right\|_i^2 \leq C_3 h^{2p} + C_4 h^{2p+1}. \quad (109.2)$$

در پایان با جایگذاری (۱۷.۲) و (۱۰۹.۲) در (۱۰۷.۲) داریم:

$$\|e\|_{\beta}^2 = \|e\|^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial e}{\partial x} \right\|_i^2 = C_1 h^{2p+2} + C_3 h^{2p} + C_4 h^{2p+1} \leq C h^{2p}.$$

□

ملاحظه ۱.۲.۲. نتایج لم (۵.۲.۲) و قضیه (۲.۲.۲) صادق است، زمانی که اندیس های + و - را به ترتیب با - و + جایگزین کنیم. اثبات مشابه است، بنابراین آن را حذف می کنیم. در این حالت عملگر درونیایی π^- هر تابع u را در ریشه های $R_{p+1,i}^-(x)$ ، یعنی $x_{i,j}^-$ ، $j = 0, 1, \dots, p$ ، درونیایی می کند و $\pi^- u|_{I_i} \in P^p(I_i)$ است.

ملاحظه ۲.۲.۲. نتایج قضیه قبل نشان می دهد که جواب DG درجه p در ریشه های چندجمله ای رادو راست درجه $p+1$ ، دارای ابرهمگرایی $O(h^{p+\frac{1}{2}})$ است، که در آن $0 < \delta \leq f'(u(x,t))$ ، $\forall (x,t) \in [-1,1] \times [0,T]$ در حالت $f'(u(x,t)) \leq -\delta < 0$ ، حل DG درجه p ، نسبت به چندجمله ای درونیاب $\pi^- u$ ، دارای ابرهمگرایی $O(h^{p+\frac{1}{2}})$ است.

فصل ۳

برآورد خطای پسین

در این بخش برآورد خطای پسین ساده، کارآمد و مجانبی درست، برای قوانین بقاء غیرخطی (۱.۲) با تابع شار عمومی به دست می آوریم. همچنین با استفاده از نتایجی از فصل قبل، ثابت می کنیم که برآورد خطای پسین DG در زمان ثابت t ، به خطاهای مکانی حقیقی در نرم L^2 ، وقتی که $h \rightarrow 0$ همگراست. ابتدا نتایج زیر را که در تجزیه و تحلیل خطای پسین به آنها نیاز داریم، اثبات می کنیم.

لم ۱.۰.۳. روابط زیر برای ضرایب چندجمله‌ای رادو درجه $p+1$ روی I_i برقرار است:

$$\int_{I_i} \frac{d\psi_{p+1,i}^+}{dx} \psi_{p+1,i}^+ dx = -k_1 h_i^{p+2}, \quad (1.3)$$

$$\int_{I_i} (\psi_{p+1,i}^+)^2 dx = \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 = (2p+2)k_2 h_i^{p+3}, \quad (2.3)$$

که در (۱.۳) و (۲.۳)،

$$k_1 = 2c_p^2, \quad k_2 = \frac{k_1}{(2p+1)(2p+3)}, \quad c_p = \frac{((p+1)!)^2}{(2p+2)!}. \quad (3.3)$$

برهان. بنا به تعریف چندجمله‌ای لژاندر می دانیم که، $\tilde{L}_p(-1) = (-1)^p$ و $\tilde{L}_p(1) = 1$ ، همچنین می دانیم که، $\tilde{R}_{p+1}^+(1) = 0$ و $\tilde{R}_{p+1}^+(-1) = 2(-1)^{p+1}$. بنابراین برای چندجمله‌ای انتقال رادو

روی I_i ، روابط $R_{p+1,i}^+(x_i) = \psi_{p+1,i}^+(x_i) = 0$ و $R_{p+1,i}^+(x_{i-1}) = (-1)^{p+1}$ برقرار است. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \frac{d\psi_{p+1,i}^+}{dx} \psi_{p+1,i}^+ dx &= \frac{1}{p+1} (\psi_{p+1,i}^+)^{p+1}(x_i) - \frac{1}{p+1} (\psi_{p+1,i}^+)^{p+1}(x_{i-1}) = -\frac{1}{p+1} (\psi_{p+1,i}^+)^{p+1}(x_{i-1}) \\ &= -\frac{1}{p+1} [c_p h_i^{p+1} R_{p+1,i}^+(x_{i-1})]^{p+1} = -\frac{1}{p+1} [c_p h_i^{p+1} \tilde{R}_{p+1}^+(-1)]^{p+1} \\ &= -\frac{1}{p+1} c_p^{p+1} h_i^{p+1} = -k_1 h_i^{p+1}. \end{aligned}$$

که در آن، $k_1 = \frac{1}{p+1} c_p^{p+1}$ است.

با به کارگیری رابطه تعامد (۳.۱) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \psi_{p+1,i}^+(x) \psi_{p+1,i}^+(x) dx &= c_p^{p+1} h_i^{p+1} \int_{I_i} R_{p+1,i}^+(x) R_{p+1,i}^+(x) dx \\ &= c_p^{p+1} h_i^{p+1} \frac{h_i}{p+1} \int_I \tilde{R}_{p+1}^+(\xi) \tilde{R}_{p+1}^+(\xi) d\xi \\ &= \frac{c_p^{p+1} h_i^{p+1}}{p+1} \int_I [\tilde{L}_{p+1}(\xi) - \tilde{L}_p(\xi)] [\tilde{L}_{p+1}(\xi) - \tilde{L}_p(\xi)] d\xi \\ &= \frac{c_p^{p+1} h_i^{p+1}}{p+1} \int_I (\tilde{L}_{p+1}^2(\xi) - 2\tilde{L}_{p+1}(\xi)\tilde{L}_p(\xi) + \tilde{L}_p^2(\xi)) d\xi \\ &= \frac{c_p^{p+1} h_i^{p+1}}{p+1} \int_I (\tilde{L}_{p+1}^2(\xi) + \tilde{L}_p^2(\xi)) d\xi \\ &= \frac{c_p^{p+1} h_i^{p+1}}{p+1} \left(\frac{2}{p+3} + \frac{2}{p+1} \right) = (2p+2) k_2 h_i^{p+1}, \end{aligned}$$

□

که $k_2 = \frac{k_1}{(p+1)(p+3)}$ و اثبات کامل است.

۱.۰.۳ تابع شار خاص

فرض می‌کنیم $|f'(u)|$ کران پایین مثبت یکنواختی مانند δ دارد یعنی،

$$0 < \delta \leq f'(u(x, t)), \quad \forall (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T].$$

حالتی از تابع شار عمومی در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد. همچنین فرض می‌کنیم که f'' کراندار است یعنی، $|f''(u)| \leq M_2$ که M_2 یک ثابت مثبت است.

حال فرمول عناصر متناهی ضعیف را برای محاسبه برآورد خطای پسین قوانین بقاء غیرخطی ارائه می‌دهیم. ابتدا معادله (۱.۲) را به صورت (۴.۳) بازنویسی می‌کنیم،

$$u_t + f'(u)u_x = g(x, t), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

معادله (۴.۳) را بر $f'(u)$ تقسیم می‌کنیم و معادله به دست آمده را در تابع تست هموار دلخواه ضرب می‌کنیم و با انتگرال گیری روی همه عناصر I_i داریم:

$$\int_{I_i} u_x v dx = \int_{I_i} \left(\frac{g - u_t}{f'(u)} \right) v dx. \quad (5.3)$$

با قرار دادن $u_h + e$ بجای u و با انتخاب $v = \psi_{p+1,i}^+(x)$ رابطه‌ی (۶.۳) به دست می‌آید.

$$\int_{I_i} e_x \psi_{p+1,i}^+ dx = \int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t - e_t}{f'(u_h + e)} - (u_h)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx. \quad (۶.۳)$$

با جایگذاری $e = \alpha_i(t) \psi_{p+1,i}^+(x) + \omega_i^+$ در سمت چپ (۶.۳)، داریم:

$$\alpha_i \int_{I_i} \frac{d\psi_{p+1,i}^+}{dx} \psi_{p+1,i}^+ dx = \int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t - e_t}{f'(u_h + e)} - (u_h)_x - (\omega_i^+)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx. \quad (۷.۳)$$

با توجه به اینکه $\int_{I_i} \frac{d\psi_{p+1,i}^+}{dx} \psi_{p+1,i}^+ dx = -k_1 h_i^{p+2} \neq 0$ ، که در آن k_1 ثابت مثبت تعریف شده در (۳.۳) است و حل (۷.۳) بر حسب α_i به دست می‌آوریم،

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_1 h_i^{p+2}} \int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t - e_t}{f'(u_h + e)} - (u_h)_x - (\omega_i^+)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx. \quad (۸.۳)$$

نتایج قضیه (۲.۲.۲) نشان می‌دهد که خطای حقیقی e ، روی هر عنصر I_i می‌تواند برای هر $x \in I_i$ ، با جمله‌ی پیشرو E به صورت (۹.۳) تقریب زده شود.

$$e(x, t) \approx E(x, t) = a_i(t) \psi_{p+1,i}^+(x). \quad (۹.۳)$$

در ادامه a_i ها را به دست می‌آوریم.

با قرار دادن $e(x, t) = a_i(t) \psi_{p+1,i}^+(x)$ در سمت چپ (۶.۳) به دست می‌آوریم:

$$a_i \int_{I_i} (\psi_{p+1,i}^+)_x \psi_{p+1,i}^+ dx = \int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t - e_t}{f'(u_h + e)} - (u_h)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx.$$

حال با صرف نظر کردن از تغییر زمانی e_t و تقریب زدن $f'(u_h + E)$ با $f'(u_h)$ روی I_i داریم:

$$a_i = -\frac{1}{k_1 h_i^{p+2}} \int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t}{f'(u_h)} - (u_h)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx. \quad (۱۰.۳)$$

ثابت‌های a_i ، $i = 1, \dots, N$ ، از رابطه (۱۰.۳) به دست می‌آیند.

به طور خلاصه روند برآورد خطا عبارت است از تقریب زدن خطای حقیقی $e(x, t)$ روی هر عنصر I_i با جمله پیشرو $E(x, t) = a_i(t) \psi_{p+1,i}^+(x)$ ، که در (۱۰.۳) داده شده است. توجه کنید که برآورد خطا با حل مسأله‌های پایا و موضعی بدون شرایط مرزی به دست می‌آید. اندازه مؤثر قابل پذیرش از برآورد خطای پسین، یک شاخص کارآمد است. در اینجا از شاخص کارآمد جهانی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\theta(t) = \frac{\|E\|}{\|e\|}.$$

در حالت ایدآل، شاخص کارآمد جهانی باید نزدیک به یک باشد و تحت مش بندی به یک همگرا باشد.

نشان می‌دهیم که برآورد خطای E ، وقتی $h \rightarrow 0$ به خطای دقیق e تحت نرم L^2 همگراست. همچنین ثابت می‌کنیم که شاخص کارآمد جهانی $\theta(t)$ ، تحت مش بندی همگرا به یک است. قبل از توضیح نتایج اصلی، نتایج اولیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید که مفروضات قضیه (۱.۲.۲) برقرار باشند. اگر α_i و a_i به ترتیب با (۸.۳) و (۱۰.۳) داده شده باشند، آنگاه ثابت مثبت C ، مستقل از h وجود دارد که برای هر t ثابت نامساوی‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) برقرار می‌باشند.

$$\sum_{i=1}^N (a_i - \alpha_i)^2 \left\| \psi_{p+1,i}^+ \right\|_i^2 \leq Ch^{2p+3}. \quad (11.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \left((a_i)^2 + (\alpha_i)^2 \right) \left\| \psi_{p+1,i}^+ \right\|_i^2 \leq Ch^{2p+2}. \quad (12.3)$$

برهان. با کم کردن (۸.۳) از (۱۰.۳) داریم:

$$a_i - \alpha_i = -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t}{f'(u_h)} - \frac{g - (u_h)_t - e_t}{f'(u_h + e)} + (w_i^+)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx \right]. \quad (13.3)$$

با جایگذاری $u_t = e_t + (u_h)_t$ در (۱.۲) داریم:

$$g - (u_h)_t = e_t + f'(u)u_x, \quad g - (u_h)_t - e_t = f'(u)u_x. \quad (14.3)$$

با ترکیب کردن (۱۳.۳) با (۱۴.۳) و استفاده از $u = e + u_h$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_i - \alpha_i &= -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left(\frac{e_t + f'(u)u_x}{f'(u_h)} - u_x + (\omega_i^+)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx \right] \\ &= -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left(\frac{e_t}{f'(u_h)} + u_x \frac{f'(u) - f'(u_h)}{f'(u_h)} + (\omega_i^+)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx \right]. \end{aligned} \quad (15.3)$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$f'(u) - f'(u_h) = f'(u_h + e) - f'(u_h) = f''(z)e, \quad (16.3)$$

که z بین u و u_h است. با جایگذاری (۱۶.۳) در (۱۵.۳) به دست می‌آوریم:

$$a_i - \alpha_i = -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left(\frac{e_t}{f'(u_h)} + \frac{u_x f''(z)}{f'(u_h)} e + (\omega_i^+)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx \right].$$

با قدرمطلق گرفتن از طرفین داریم:

$$\begin{aligned} |a_i - \alpha_i| &\leq \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left| \frac{e_t}{f'(u_h)} \right| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \int_{I_i} \left| \frac{u_x f''(z)}{f'(u_h)} e \right| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} |(\omega_i^+)_x| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right]. \end{aligned}$$

با توجه به هموار بودن جواب دقیق u و f و این که $\delta \leq f'(u) < \infty$ ، و با استفاده از $\frac{1}{\delta} \leq \frac{1}{f'(u_h)} < \infty$ و اینکه M کران بالای تابع هموار $|u_x f''(u)|$ و $C = \max(1, \frac{1}{\delta}, \frac{M}{\delta})$ است، داریم:

$$\begin{aligned} |a_i - \alpha_i| &\leq \frac{1}{k_\gamma h_i^{p+2}} \left[\frac{1}{\delta} \int_{I_i} |e_t| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \frac{M}{\delta} \int_{I_i} |e| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{k_\gamma h_i^{p+2}} \left[\int_{I_i} |(\omega_i^+)_x| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\leq \frac{C}{k_\gamma h_i^{p+2}} \left[\int_{I_i} |e_t| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \int_{I_i} |e| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\quad + \frac{C}{k_\gamma h_i^{p+2}} \left[\int_{I_i} |(\omega_i^+)_x| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right]. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی رابطه‌ی (۱۷.۳) به دست می‌آید:

$$|a_i - \alpha_i| \leq \frac{C \|\psi_{p+1,i}^+\|_i}{k_\gamma h_i^{p+2}} [\|e_t\|_i + \|e\|_i + \|(\omega_i^+)_x\|_i]. \quad (17.3)$$

با به کار بردن نامساوی $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ داریم:

$$\begin{aligned} (a_i - \alpha_i)^2 &\leq \frac{C^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2}{k_\gamma^2 h_i^{2p+4}} [\|e_t\|_i + \|e\|_i + \|(\omega_i^+)_x\|_i]^2 \\ &\leq \frac{3C^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2}{k_\gamma^2 h_i^{2p+4}} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|(\omega_i^+)_x\|_i^2]. \end{aligned} \quad (18.3)$$

با ضرب (۱۸.۳) در $\|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2$ و با استفاده از $\|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 = (2p+2)k_\gamma h_i^{p+2}$ داریم:

$$\begin{aligned} (a_i - \alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 &\leq \frac{3C^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^4}{k_\gamma^2 h_i^{2p+4}} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|(\omega_i^+)_x\|_i^2] \\ &= \frac{3C^2 (2p+2)^2 k_\gamma^2 h_i^2}{k_\gamma^2} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|(\omega_i^+)_x\|_i^2] \\ &= Kh_i^2 [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|(\omega_i^+)_x\|_i^2], \end{aligned} \quad (19.3)$$

که ثابت K مستقل از طول مش بوده و به شکل (۲۰.۳) می‌باشد.

$$K = \frac{3C^2 (2p+2)^2 k_\gamma^2}{k_\gamma^2}. \quad (20.3)$$

با جمع زدن طرفین (۱۹.۳) روی همه عناصر و با توجه به این که $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ ، داریم:

$$\sum_{i=1}^N (a_i - \alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \leq Kh^2 \left[\|e_t\|_h^2 + \|e\|_h^2 + \sum_{i=1}^N \|(\omega_i^+)_x\|_i^2 \right]. \quad (21.3)$$

با ترکیب این برآورد با (۱۸.۲) ، (۱۷.۲) و (۱۰۱.۲) داریم:

$$\sum_{i=1}^N (a_i - \alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \leq Kh^2 [C_1 h^{2p+2} + C_2 h^{2p+2} + C_3 h^{2p+1}] \leq Ch^{2p+3}.$$

حال (۱۲.۳) را اثبات می‌کنیم. با ترکیب (۱۰.۳) با (۱۴.۳) و استفاده از $u_h = u - e$ و به کار بردن (۱۶.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left(\frac{g - (u_h)_t}{f'(u_h)_x} - (u_h)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx \right] \\ &= -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left(\frac{e_t + f'(u)u_x}{f'(u_h)} - (u)_x + e_x \right) \psi_{p+1,i}^+ dx \right] \\ &= -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \frac{e_t}{f'(u_h)} \psi_{p+1,i}^+ dx + \int_{I_i} u_x \frac{f'(u) - f'(u_h)}{f'(u_h)} \psi_{p+1,i}^+ dx \right] \\ &\quad - \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} e_x \psi_{p+1,i}^+ dx \right] \\ &= -\frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \frac{e_t}{f'(u_h)} \psi_{p+1,i}^+ dx + \int_{I_i} \frac{u_x f''(z)}{f'(u_h)} e \psi_{p+1,i}^+ dx + \int_{I_i} e_x \psi_{p+1,i}^+ dx \right]. \end{aligned} \quad (22.3)$$

چون $|f'(u)|$ یک کران پایین مثبت یکنواخت دارد و جواب دقیق u و تابع f ، توابع هموار هستند، داریم که،

$$\frac{1}{f'(u_h)} \leq \frac{1}{\delta}, \quad \frac{|u_x f''(z)|}{f'(u_h)} \leq \frac{\delta}{M}, \quad \forall (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T].$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} |a_i| &\leq \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} \left| \frac{e_t}{f'(u_h)} \right| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \int_{I_i} \left| \frac{u_x f''(z)}{f'(u_h)} \right| |e| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} |e_x| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\leq \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\frac{1}{\delta} \int_{I_i} |e_t| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \frac{M}{\delta} \int_{I_i} |e| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} |e_x| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right] \\ &\leq \frac{C}{k_\gamma h_i^{2p+2}} \left[\int_{I_i} |e_t| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \int_{I_i} |e| |\psi_{p+1,i}^+| dx + \int_{I_i} |e_x| |\psi_{p+1,i}^+| dx \right], \end{aligned} \quad (23.3)$$

که $C = \max(1, \frac{1}{\delta}, \frac{M}{\delta})$. با استفاده از نامساوی کوشی داریم:

$$|a_i| \leq \frac{C \|\psi_{p+1,i}^+\|_i}{k_\gamma h_i^{2p+2}} [\|e_t\|_i + \|e\|_i + \|e_x\|_i]. \quad (24.3)$$

با استفاده از نامساوی $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} (a_i)^2 &\leq \frac{C^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2}{k_i^2 h_i^{2p+2}} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|e_x\|_i^2] \\ &\leq \frac{3C^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2}{k_i^2 h_i^{2p+2}} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|e_x\|_i^2]. \end{aligned} \quad (25.3)$$

با ضرب (25.3) در $(2p+2)k_i^2 h_i^{2p+2}$ ، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 &\leq \frac{3C^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^4}{k_i^2 h_i^{2p+2}} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|e_x\|_i^2] \\ &\leq \frac{3C^2 (2p+2)^2 k_i^2 h_i^2}{k_i^2} [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|e_x\|_i^2] \\ &\leq Kh_i^2 [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|e_x\|_i^2] \\ &\leq Kh^2 [\|e_t\|_i^2 + \|e\|_i^2 + \|e_x\|_i^2], \end{aligned} \quad (26.3)$$

که K در (26.3) تعریف شده است و $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$.
با جمع زدن طرفین (26.3) روی همه عناصر داریم:

$$\sum_{i=1}^N (a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \leq Kh^2 [\|e_t\|^2 + \|e\|^2 + \|e\|_{\beta}^2], \quad (27.3)$$

با استفاده از برآوردهای (18.2)، (17.2) و (10.2.2) به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^N (a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \leq Kh^2 [C_1 h^{2p+2} + C_2 h^{2p+2} + C_3 h^{2p}] \leq c_1 h^{2p+2}. \quad (28.3)$$

از طرفی از $\phi_i^+ = \alpha_i \psi_{p+1,i}^+$ ، داریم:

$$(\alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 = \|\phi_i^+\|_i^2.$$

با سیگما گرفتن روی همه عناصر و با استفاده از (86.2) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^N (\alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 = \sum_{i=1}^N \|\phi_i^+\|_i^2 \leq c_2 h^{2p+2}. \quad (29.3)$$

با اضافه کردن (28.3) به (29.3) داریم:

$$\sum_{i=1}^N ((a_i^2) + (\alpha_i^2)) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \leq c_1 h^{2p+2} + c_2 h^{2p+2} \leq Ch^{2p+2}.$$

□

نتایج اصلی این بخش در قضیه زیر توضیح داده شده‌اند. به خصوص ما نتایجی که از برآورد خطای پسین (۹.۳) نتیجه می‌شود، اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲.۰.۳. فرض می‌کنیم که مفروضات قضیه ۱.۲.۲ برقرار باشند. اگر a_i ها، $i = 1, \dots, N$ با (۱۰.۳) داده شده باشند، پس ثابت $C = C(u, t)$ ، مستقل از h وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^N (a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 + \hat{\epsilon}, \quad |\hat{\epsilon}| \leq Ch^{2p+\frac{5}{2}}, \quad (30.3)$$

همچنین اگر $x \in I_i$ ، $E(x, t) = a_i(t)\psi_{p+1,i}^+(x)$ که t ثابت است. زمانی که $h \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{\|E\|}{\|e\|} = 1 + O(h^{\frac{1}{2}}). \quad (31.3)$$

برهان. از (۹۹.۲) داریم که خطای DG روی I_i به صورت $e = \phi_i^+ + \omega_i^+$ مجزا می‌شود. با گرفتن نرم L^2 از e و استفاده از (۸۵.۲) داریم:

$$\|e\|_i^2 = \|\phi_i^+\|_i^2 + 2(\phi_i^+, \omega_i^+)_i + \|\omega_i^+\|_i^2 = (\alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 + \epsilon_i. \quad (32.3)$$

که $\epsilon_i = 2(\phi_i^+, \omega_i^+)_i + \|\omega_i^+\|_i^2$ است.

با جمع زدن طرفین رابطه (۳۲.۳) روی همه عناصر به‌دست می‌آوریم:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^N (\alpha_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 + \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon} = \sum_{i=1}^N \epsilon_i.$$

با اضافه و کم کردن $(a_i)^2$ به $(\alpha_i)^2$ خطای DG را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^N (a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 + \hat{\epsilon}, \quad \hat{\epsilon} = \sum_{i=1}^N ((\alpha_i)^2 - (a_i)^2) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 + \tilde{\epsilon}. \quad (33.3)$$

با استفاده از نامساوی مثلثی و نامساوی کوشی داریم:

$$|\epsilon_i| = |2(\phi_i^+, \omega_i^+)_i + \|\omega_i^+\|_i^2| \leq 2\|\phi_i^+\|_i \|\omega_i^+\|_i + \|\omega_i^+\|_i^2. \quad (34.3)$$

با جمع زدن طرفین (۳۴.۳) روی همه عناصر و استفاده از نامساوی کوشی و برآوردهای (۸۶.۲) و (۱۰۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} |\tilde{\epsilon}| &= \sum_{i=1}^N |\epsilon_i| \leq 2 \sum_{i=1}^N \|\phi_i^+\|_i \|\omega_i^+\|_i + \sum_{i=1}^N \|\omega_i^+\|_i^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^N \|\phi_i^+\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \|\omega_i^+\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N \|\omega_i^+\|_i^2 \\ &\leq 2 \left(C_1 h^{2p+2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(C_2 h^{2p+2} \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 h^{2p+2} = C_4 h^{2p+2} = O(h^{2p+\frac{5}{2}}). \end{aligned} \quad (35.3)$$

اولین جمله $\hat{e}$ را با استفاده از نامساوی کوشی و نامساوی $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ به صورت زیر کراندار می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N ((\alpha_i)^2 - (a_i)^2) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 &= \sum_{i=1}^N ((\alpha_i - a_i) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i) ((\alpha_i + a_i) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i - a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i + a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i - a_i)^2 \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N ((\alpha_i)^2 + (a_i)^2) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

با استفاده از برآوردهای (۱۱.۳) و (۱۲.۳) داریم:

$$\sum_{i=1}^N ((\alpha_i)^2 + (a_i)^2) \|\psi_{p+1,i}^+\|_i^2 \leq \sqrt{2} C_1 h^{p+\frac{5}{4}} C_2 h^{p+1} \leq C_4 h^{2p+\frac{5}{2}}. \quad (۳۶.۳)$$

در پایان با ترکیب (۳۳.۳)، (۳۵.۳) و (۳۶.۳) داریم:

$$|\hat{e}| \leq C_4 h^{2p+\frac{5}{2}} + C_3 h^{2p+\frac{5}{2}} \leq C h^{2p+\frac{5}{2}}.$$

برای اثبات (۳۱.۳) از (۳۰.۳) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $\|e\|^2 = \|E\|^2 + \hat{e}$ با تقسیم طرفین بر $\|e\|^2$ به دست می‌آوریم $\frac{\|E\|^2}{\|e\|^2} = 1 - \frac{\hat{e}}{\|e\|^2}$ و با قدرمطلق گرفتن داریم:

$$\left| \frac{\|E\|^2}{\|e\|^2} - 1 \right| = \frac{|\hat{e}|}{\|e\|^2}. \quad (۳۷.۳)$$

از طرفی چون $|\hat{e}| = O(h^{2p+\frac{5}{2}})$ و $\|e\|^2 = O(h^{2p+2})$ ، پس ثابت‌های مثبت C_1 و C_2 وجود دارد به‌طوری‌که $|\hat{e}| \leq C_1 h^{2p+\frac{5}{2}}$ و $\|e\|^2 \leq C_2 h^{2p+2}$. از طرف دیگر برای همی $\delta > 0$ داریم:

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|e\|^2}{h^{2p+2-\delta}} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_2 h^{2p+2}}{h^{2p+2-\delta}} = C_2 \lim_{h \rightarrow 0} h^\delta = 0.$$

بنابراین ثابت C_3 وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|e\|^2 \geq C_3 h^{2p+2-\delta},$$

یا به‌طور معادل داریم:

$$\frac{1}{\|e\|^2} \leq \frac{1}{C_3 h^{2p+2-\delta}}.$$

نامساوی فوق را در $|\hat{e}|$ ضرب می‌کنیم و با استفاده از $|\hat{e}| \leq C_1 h^{2p+\frac{5}{2}}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{|\hat{e}|}{\|e\|^2} \leq \frac{|\hat{e}|}{C_3 h^{2p+2-\delta}} \leq \frac{C_1 h^{2p+\frac{5}{2}}}{C_3 h^{2p+2-\delta}} \leq C h^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

چون رابطه بالا برای هر $\delta > 0$ درست است، با گرفتن حد وقتی $\delta \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{|\hat{e}|}{\|e\|} \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (38.3)$$

با ترکیب (37.3) و (38.3) داریم:

$$\left| \frac{\|E\|^2}{\|e\|^2} - 1 \right| \leq Ch^{\frac{1}{2}}. \quad (39.3)$$

$$\frac{\|E\|^2}{\|e\|^2} = 1 + O(h^{\frac{1}{2}}).$$

با توجه به رابطه‌ی (39.3) رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{\|E\|^2}{\|e\|^2} \leq 1 + Ch^{\frac{1}{2}}.$$

با جذر گرفتن و نوشتن سری دو جمله‌ای یعنی:

$$(1 + Ch^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{C}{2}h^{\frac{1}{2}} - \frac{C^2}{8}h + \frac{C^3}{16}h^{\frac{3}{2}} - \dots = 1 + O(h^{\frac{1}{2}}).$$

داریم:

$$\frac{\|E\|}{\|e\|} = 1 + O(h^{\frac{1}{2}}).$$

□

در قضیه قبل ثابت کردیم که E به e ، در نرم L^2 همگراست وقتی که $h \rightarrow 0$. منظور از همگرایی $p + \frac{1}{2}$ است. همچنین ثابت کردیم که شاخص کارآمد جهانی $\theta(t)$ ، با نرخ $O(\sqrt{h})$ ، همگرا به یک است.

۲.۰.۳ تابع شار عمومی

با توجه به اینکه در اثبات‌هایمان فرض کردیم که تابع شار $|f'(u)|$ به‌طور یکنواخت از پایین کراندار مثبت است، فرمول عناصر متناهی ضعیف را برای محاسبه برآورد خطا پسین معادلات غیرخطی با تابع شار عمومی را ارائه می‌دهیم.

با ضرب (4.3) در تابع تست هموار v ، و انتگرال گرفتن روی عنصر I_i به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{I_i} u_t v \, dx + \int_{I_i} f'(u) u_x v \, dx = \int_{I_i} g v \, dx. \quad (40.3)$$

با جایگزین کردن u با $u_h + e$ و انتخاب $v = \psi_{p+1,i}^+(x)$ ، داریم:

$$\int_{I_i} e_t \psi_{p+1,i}^+ \, dx = \int_{I_i} \left(g - (u_h)_t - f'(u_h + e)(u_h + e)_x \right) \psi_{p+1,i}^+ \, dx. \quad (41.3)$$

همچنین با جایگزین کردن $e(x, t) = \alpha_i(t)\psi_{p+1,i}^+(x) + \omega_i^+(x, t)$ با $E(x, t) = a_i\psi_{p+1,i}^+(x)$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر برای a_i ها به دست می آید:

(۴۲.۳)

$$\left(\int_{I_i} (\psi_{p+1,i}^+)^2 dx \right) \frac{da_i}{dt} = \int_{I_i} \left(g - (u_h)_t - f'(u_h + a_i\psi_{p+1,i}^+)(u_h + a_i\psi_{p+1,i}^+) \right) \psi_{p+1,i}^+ dx.$$

مقدار اولیه $a_i(\circ)$ برای هر عنصر I_i با استفاده از تصویر موضعی L^2 به صورت زیر به دست می آید:

$$a_i(\circ) = \frac{\int_{I_i} (u(x, \circ) - P_h^* u(x, \circ)) \psi_{p+1,i}^+(x) dx}{\int_{I_i} (\psi_{p+1,i}^+)^2(x) dx}. \quad (۴۳.۳)$$

که P_h^* به صورت زیر انتخاب می شود.

• اگر $f'(u(\bar{x}_i, \circ))$ مثبت باشد آنگاه $P_h^* = P_h^-$.

• در غیر این صورت استفاده می کنیم از $P_h^* = P_h^+$.

توجه داریم که ثابت های a_i ، $i = 1, \dots, N$ ، از حل مسأله مقدار اولیه (۴۲.۳) با شرط (۴۳.۳) با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه چهار کلاسیک به دست می آید.

ملاحظه ۱.۰.۳. آزمایش عددی نشان می دهد که روند برآورد خطا (۴۲.۳) به خطاهای مکانی حقیقی در نرم L^2 ، تحت مش بندی برای تابع شار عمومی همگراست. اما وقتی که تابع شار $|f'(u)|$ از پایین کراندار یکنواخت مثبت است، توصیه می شود از روند برآورد خطا (۹.۳) استفاده شود، چون دارای محاسباتی ساده تر است و از حل مسأله پایا روی هر عضو از مش به دست می آید. در محاسبه مثال ها از (۹.۳) استفاده می کنیم هنگامی که $|f'(u)|$ از پایین کراندار یکنواخت مثبت است، و از (۴۲.۳) استفاده می کنیم هنگامی که $f'(u)$ در دامنه محاسباتی خود تغییر علامت می دهد. توجه کنید که هر دو برآورد خطا با حل مسائل موضعی بدون شرایط مرزی به دست می آیند. درست بودن نتایج ابرهمگرایی (۱۶.۲) مورد بحث قرار می گیرد در [۳۰] و اشاره می کنیم که محدودیت روی $f(u)$ ساختگی است.

فصل ۴

مثال‌های عددی

در این بخش مثال‌های عددی را برای اعتبار بخشیدن به نتایج ابرهمگرایی و همگرایی عمومی برآورد خطای پسین ارائه می‌دهیم. ماکسیمم خطای DG یعنی $\|e\|^*$ را در ریشه‌های انتقال چندجمله‌ای رادو درجه $P+1$ ، روی هر عنصر I_i محاسبه می‌کنیم و روی همه عناصر I_i ، $i = 1, \dots, N$ ماکسیمم می‌گیریم، یعنی:

$$\|e\|^* = \max_{1 \leq i \leq N} \left(\max_{1 \leq k \leq p+1} |e(x_{k,i}^*, t)| \right).$$

که در آن $x_{k,i}^*$ ها، ریشه‌های انتقال $R_{p+1,i}^*$ روی I_i هستند و $R_{p+1,i}^*$ به صورت زیر انتخاب می‌شود:

• اگر $f'(u(\bar{x}_i, t))$ که در آن $\bar{x}_i = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$ ، مثبت باشد، قرار می‌دهیم $R_{p+1,i}^* = R_{p+1,i}^+$.

• در غیر این صورت از $R_{p+1,i}^* = R_{p+1,i}^-$ استفاده می‌کنیم:

شرط اولیه، با $u_h(x, \circ) = P_h^* u(x, \circ)$ مشخص شده است، که تصویر P_h^* روی هر I_i به صورت زیر تعریف شده است.

• اگر $u(\bar{x}_i, \circ)$ مثبت باشد، پس روی زیر بازه I_i ، $P_h^* = P_h^-$ انتخاب می‌کنیم.

• در غیر این صورت $P_h^* = P_h^+$ انتخاب می‌کنیم.

انتگرال‌گیری زمانی را با روش رانگ کوتا مرتبه چهار کلاسیک صریح، انجام می‌دهیم. گام

زمانی Δt را طوری انتخاب می‌کنیم که، خطاهای زمانی نسبت به خطاهای مکانی کوچکتر شوند.

δe و $\delta \theta$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

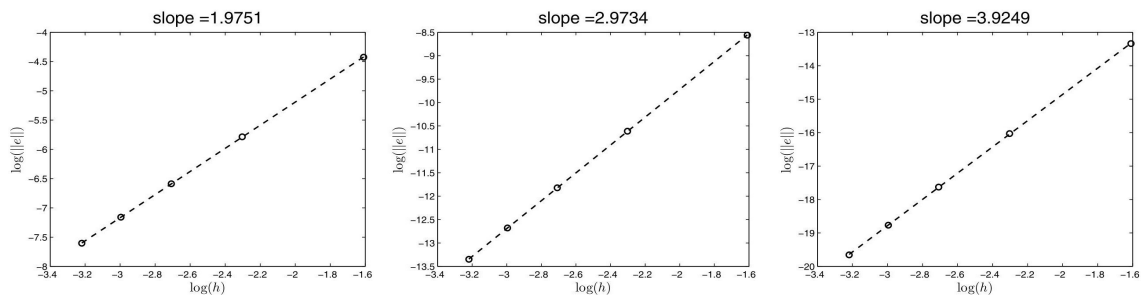
$$\delta e(t) = \left| \|e\| - \|E\| \right|, \quad \delta \theta(t) = |\theta(t) - 1|.$$

مثال ۱.۰.۴. در این مثال نشان می‌دهیم که نتایج اثبات شده درست است، زمانی که از شرط مرزی دیریکله بجای شرط (۳.۲) استفاده می‌کنیم. قوانین بقاء غیرخطی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} u_t + (u^3 + u)_x = -3e^{3(t-x)}, & x \in [-1, 1], \quad t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = e^{-x}, & x \in [-1, 1], \\ u(-1, t) = e^{t+1}, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

جواب دقیق با $u(x, t) = e^{t-x}$ داده شده است. توجه کنید که، $f'(u) = 3u^2 + 1 \geq 1 \geq \delta > 0$.

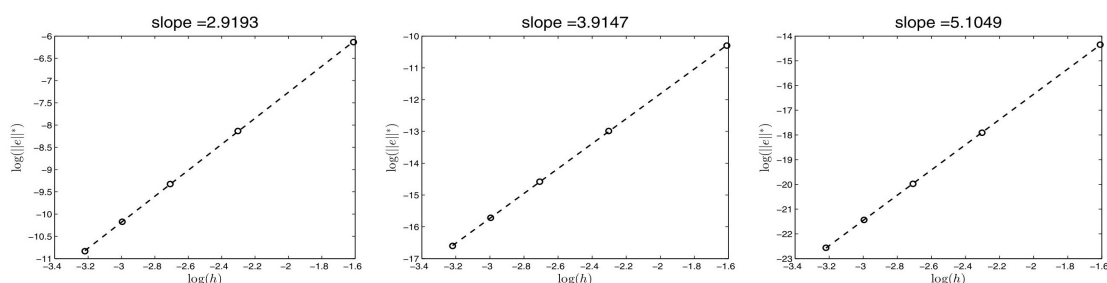
حل. برای شرط مرزی دیریکله به صورت $u(-1, t) = h(t)$ شار خلاف جهت باد را انتخاب می‌کنیم، که به $f'(u)$ بستگی دارد. چون $f'(u) = 3u^2 + 1 > 0$ ، شار عددی (۱۱.۲) را در نظر می‌گیریم. این مسأله را با استفاده از روش DG ، روی مش‌های یکنواخت برای $N = 10, 20, 30, 40, 50$ ، در فضای P^p که $p = 1, 2, 3$ حل می‌کنیم.



شکل ۱.۴: نمودار $\log - \log$ برای $\|e(\cdot, 1)\|$ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۱.۰.۴.

جدول ۱.۴: خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۱.۰.۴).

N	p=۱		p=۲		p=۳	
	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ
۱۰	$1/1981e - 2$	۱/۱۷۳۵	$1/9156e - 4$	۱/۱۳۳۳	$1/6145e - 6$	۱/۱۷۸۱
۲۰	$3/0695e - 3$	۱/۰۸۷۶	$2/4589e - 5$	۱/۰۶۷۱	$1/0942e - 7$	۱/۰۷۷۴
۳۰	$1/3759e - 3$	۱/۰۵۸۶	$7/3510e - 6$	۱/۰۴۴۸	$2/2118e - 8$	۱/۰۴۹۰
۴۰	$7/7728e - 4$	۱/۰۴۴۰	$3/1152e - 6$	۱/۰۳۳۶	$7/0735e - 9$	۱/۰۳۵۸
۵۰	$4/9876e - 4$	۱/۰۳۵۲	$1/5993e - 6$	۱/۰۲۶۹	$2/9151e - 9$	۱/۰۲۸۲

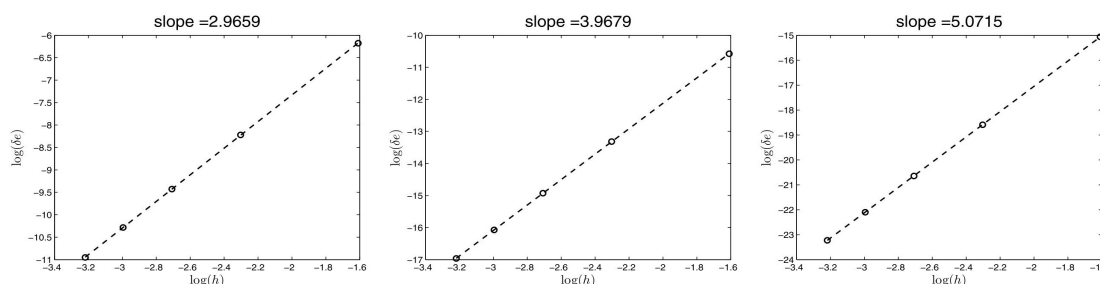


شکل ۲.۴: نمودار $\log - \log$ برای $\|e\|$ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۱.۰.۴.

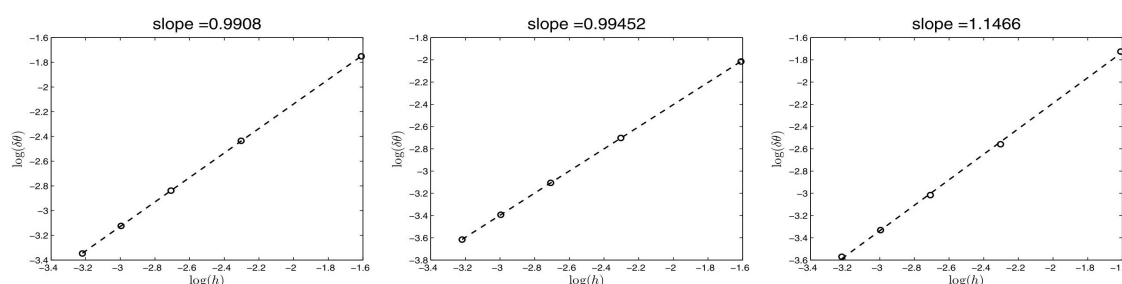
در شکل ۱.۴، $\|e\|$ را در $t = 1$ در مقابل طول مش یعنی h ، در مقیاس $\log - \log$ رسم کرده‌ایم. برای هر فضای P^p ، مجموعه داده‌ها را با روش کمترین مربعات، با یک تابع خطی برازش کرده و سپس شیب خطوط اتصال را برای نتایج برازش شده محاسبه کرده‌ایم. شیب خطوط اتصال را در بالای هر شکل نمایش داده شده است. مشاهده می‌کنیم که $\|e\| = O(h^{p+1})$.

ماکسیم خطاها یعنی $\|e\|$ و مرتبه همگرایی آن‌ها در شکل ۲.۴، نمایش داده شده است و نشان می‌دهد که خطای DG در زمان $t = 1$ و در ریشه‌های چند جمله‌ای رادو راست درجه $p+1$ ، دارای ابرهمگرایی $O(h^{p+1})$ است. این ابرهمگرایی از نرخ نظری به‌دست آمده در قضیه ۲.۲.۲ یعنی $p + \frac{2}{3}$ ، بهتر است.

روی هر عنصر روند برآورد خطا (۹.۳) را به کار می‌بریم، تا برآورد خطا را برای حل DG محاسبه کنیم. خطاهای حقیقی L^2 و شاخص کارآمد جهانی که در جدول ۱.۴ نمایش داده شده است، نشان می‌دهد که برآورد خطای پسین، تحت هر دو تعریف h و p به خطاهای حقیقی همگراست. نتایج نمایش داده شده در شکل ۳.۴ نشان می‌دهد که سرعت همگرایی عددی در $t = 1$ برای δe برابر است با $O(h^{p+2})$. خطاهای $\delta\theta$ و مرتبه همگرایی آن‌ها در شکل ۴.۴ نمایش داده شده است و نشان می‌دهد که سرعت همگرایی در $t = 1$ ، برای $\delta\theta$ برابر است با



شکل ۳.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δ_e و برای مثال ۱.۰.۴.



شکل ۴.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δ_θ و برای مثال ۱.۰.۴.

$O(h)$. مشاهده می‌کنیم که نرخ‌های همگرایی عددی برای δ_e و δ_θ ، از نرخ‌های نظری به‌دست آمده در قضیه ۲.۰.۳ یعنی به ترتیب $O(h^{p+\frac{1}{4}})$ و $O(h)^{\frac{1}{4}}$ ، بهتر است. نتایج عددی همچنین نشان می‌دهد که، شاخص کارآمد برای همه زمان‌ها نزدیک به یک باقی می‌ماند و تحت تظریف h و p همگراست و با کاهش طول مش و افزایش چندجمله‌ای‌های درجه p ، برآورد خطا به خطای حقیقی همگراست. ■

مثال ۲.۰.۴. در این مثال، قوانین بقاء غیرخطی زیر را با شرط مرزی متناوب، بجای شرط مرزی دیریکله بررسی می‌کنیم.

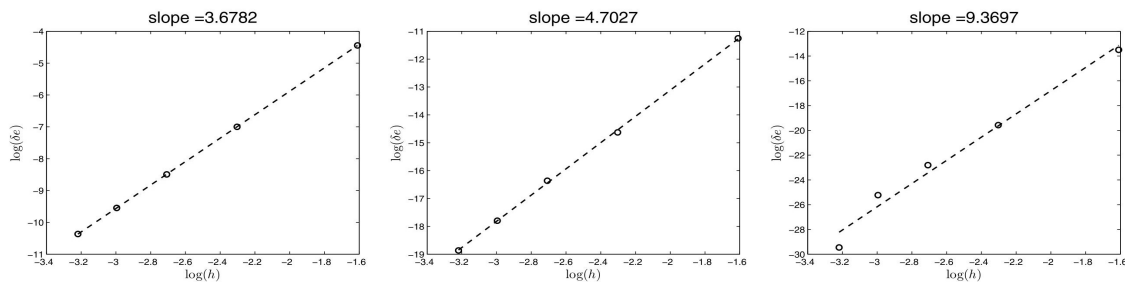
$$\begin{cases} u_t + (u^3 + u)_x = 3\pi \cos(\pi(x-t)) \sin^2(\pi(x-t)), & x \in [-1, 1], t \in [0, t], \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [-1, 1], \\ u(-1, t) = u(1, t), & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

جواب دقیق با $u(x, t) = \sin(\pi(x-t))$ داده شده است. به این نکته توجه کنید که، $f'(u) = 3u^2 + 1 \geq 1 \geq \delta > 0$.

حل. مسأله را با استفاده از روش DG ، روی مش‌های یکنواخت با $N = 10, 20, 30, 40, 50$ در فضاها P^p ، $p = 1, 2, 3$ ، حل می‌کنیم.

جدول ۲.۴: خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۲.۰.۴).

N	p=۱		p=۲		p=۳	
	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ
۱۰	$3/4532e - 2$	$0/6599$	$1/2147e - 3$	$0/9893$	$3/6001e - 5$	$0/9618$
۲۰	$6/8644e - 3$	$0/8671$	$1/5133e - 4$	$1/0029$	$2/1881e - 6$	$0/9986$
۳۰	$2/8616e - 3$	$0/9284$	$4/4842e - 5$	$1/0017$	$2/3243e - 7$	$0/9997$
۴۰	$1/5690e - 3$	$0/9544$	$1/8914e - 5$	$1/0010$	$1/3688e - 7$	$0/9999$
۵۰	$9/9084e - 4$	$0/9682$	$9/6831e - 6$	$1/0007$	$5/6076e - 8$	$1/0000$

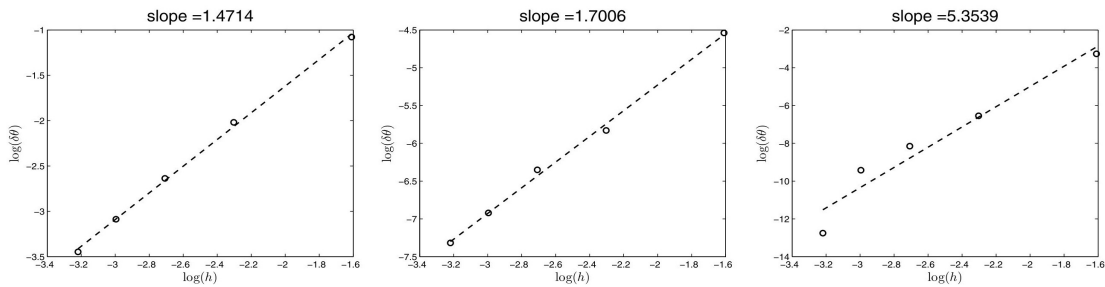


شکل ۵.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال (۲.۰.۴)

نتایج ارائه شده در جدول ۲.۴ نشان می‌دهد که، شاخص کارآمد جهانی به خطاهای حقیقی، تحت مش‌بندی همگراست. نتایج نمایش داده شده در شکل ۵.۴، نشان می‌دهد که نرخ همگرایی عددی در $t = 1$ برای δe از نرخ نظری بهتر است. در نهایت، خطاهای $\delta\theta$ و مرتبه همگرایی آن‌ها در شکل ۶.۴ داده شده است و نشان می‌دهد که شاخص کارآمد جهانی تحت تقریب h همگرا به یک است. ■

مثال ۳.۰.۴. در این مثال ما، همگرایی عمومی از برآورد خطا را برای مش‌های غیر یکنواخت تست می‌کنیم. مثال (۲.۰.۴) را در نظر می‌گیریم که در آن همه پارامترها بدون تغییر هستند، به جزء مش‌ها که غیر یکنواخت در نظر گرفته می‌شوند و به‌طور زیر ساخته می‌شوند: ابتدا کل بازه $[-1, 1]$ را به صورت $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ به $\frac{N}{3}$ زیربازه تقسیم می‌کنیم، که $N = 12, 18, 24, 30, 36, 42$. $h_0 = \frac{2}{N}$ قرار می‌دهیم. هر زیربازه را به سه زیربازه‌ی غیر یکنواخت به ترتیب با طول‌های $\frac{h_0}{3}$ ، $\frac{h_0}{4}$ و $\frac{5h_0}{12}$ تقسیم می‌کنیم.

خطاهای حقیقی L_2 و شاخص‌های کارآمد جهانی در جدول ۲.۴ داده شده‌اند. مشاهده می‌کنیم که برآوردهای خطا تحت هر دو تقریب p و h به خطاهای حقیقی در نرم L_2 همگرا



شکل ۶.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta\theta$ و برای مثال ۲.۰.۴.

جدول ۳.۴: خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۳.۰.۴).

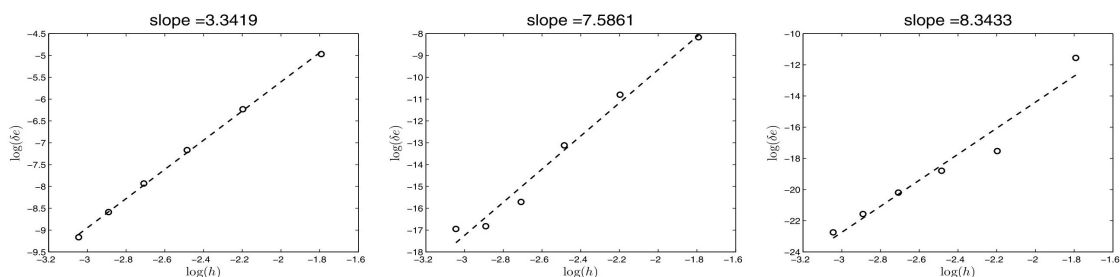
N	p=۱		p=۲		p=۳	
	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ
۱۲	$3/6158e-2$	$0/8075$	$1/8225e-3$	$0/8448$	$5/2696e-5$	$1/1812$
۱۸	$1/4788e-2$	$0/8670$	$5/2763e-4$	$0/9612$	$1/2146e-5$	$1/0020$
۲۴	$7/9443e-3$	$0/9029$	$2/2019e-4$	$0/9909$	$3/8644e-6$	$0/9982$
۳۰	$4/9461e-3$	$0/9274$	$1/1226e-4$	$0/9987$	$1/5838e-6$	$0/9989$
۳۶	$3/3751e-3$	$0/9448$	$6/4860e-5$	$1/0008$	$7/6407e-7$	$0/9994$
۴۲	$2/4512e-3$	$0/9572$	$4/0825e-5$	$1/0011$	$4/1254e-7$	$0/9997$

هستند. نتایج نمایش داده شده در شکل ۷.۴ نشان می‌دهد که نرخ همگرایی عددی در $t = 1$ برای δe ، از $O(h^{p+\frac{5}{4}})$ بهتر است. خطاهای $\delta\theta$ و مرتبه همگرایی آن‌ها که در شکل ۸.۴ نمایش داده شده است، نشان می‌دهد که، شاخص کارآمد جهانی تحت تقریب h به خطاهای حقیقی همگراست. نرخ همگرایی برای $\delta\theta$ در $t = 1$ از نرخ نظری اثبات شده یعنی $O(h^{\frac{1}{2}})$ بهتر است.

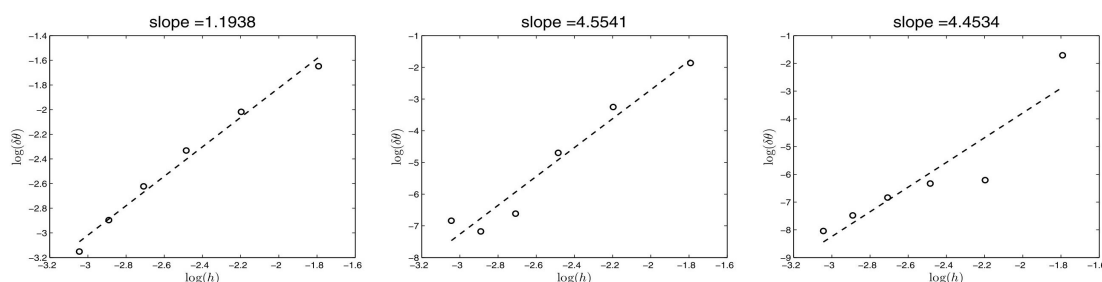
مثال ۴.۰.۴. در این مثال ما برای مسأله زیر، همگرایی عمومی برآورد خطا را تست می‌کنیم.

$$\begin{cases} u_t + (u^3)_x = -\pi \cos(\pi(x-t)) (1 - 3 \sin^2(\pi(x-t))), & x \in [-1, 1], \quad t \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [-1, 1] \\ u(-1, t) = \sin(\pi t), & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

جواب دقیق با $u(x, t) = \sin(\pi(x-t))$ داده شده است.



شکل ۷.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δ_e و برای مثال ۳.۰.۴.



شکل ۸.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δ_θ و برای مثال ۳.۰.۴.

جدول ۴.۴: خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۴.۰.۴).

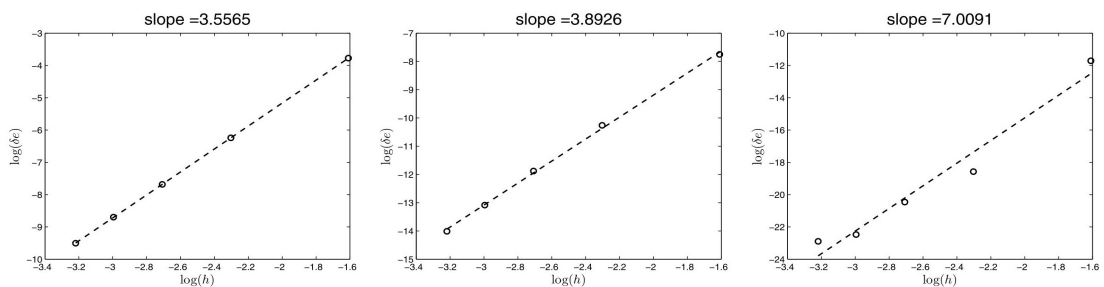
N	p=۱		p=۲		p=۳	
	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ
۱۰	$4/7613e-2$	$0/5177$	$1/2965e-3$	$0/6675$	$4/9499e-5$	$0/8340$
۲۰	$8/3911e-3$	$0/7680$	$1/5916e-4$	$0/7804$	$2/2072e-6$	$1/0039$
۳۰	$3/2730e-3$	$0/8593$	$4/6752e-5$	$0/8516$	$4/3563e-7$	$1/0030$
۴۰	$1/7288e-3$	$0/9032$	$1/9568e-5$	$0/8938$	$1/3772e-7$	$0/9987$
۵۰	$1/0664e-3$	$0/9301$	$9/9635e-6$	$0/9174$	$5/6368e-8$	$0/9980$

حل. چون $f'(u) = 3u^2 \geq 0$ ، از شار خلاف جهت باد (۱۱.۲) استفاده می‌کنیم. ما مسأله را با استفاده از همان پارامترها و مش‌های مثال (۲.۰.۴) حل می‌کنیم. روی هر عنصر، روند برآورد خطا (۴۲.۳) را به کار می‌بریم تا برآورد خطا راه‌حل DG را محاسبه کنیم. خطاهای حقیقی L_2 و شاخص کارآمد جهانی که در جدول ۴.۴ نمایش داده شده‌اند، نشان می‌دهد که برآوردهای خطای پسین، تحت مش‌بندی مجانبی دقیق هستند. نتایج نمایش داده شده در شکل ۹.۴

و ۱۰.۴ نشان می‌دهد که نرخ همگرایی برای δe و $\delta \theta$ در $t = 1$ از نرخ‌های نظری که برای آن‌ها به ترتیب $\frac{5}{4} + p$ و $\frac{1}{4}$ اثبات شد، بهتر است. حتی اگر فرض کنیم که $0 < \delta \leq f'(u(x, t))$ ، همیشه صادق نیست، $\forall x \in [-1, 1] \times [0, t]$ ، نتایج مشابه‌ای مشاهده می‌شود. ■

جدول ۵.۴: خطای‌های L^2 و شاخص کارآمد جهانی برای مثال (۵.۰.۴).

N	p=۱		p=۲		p=۳	
	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ	$\ e\ $	θ
۱۰	$2/7440e-2$	۱/۱۷۲۶	$1/8827e-3$	۱/۱۱۷۵	$5/3096e-5$	۰/۶۱۶۲
۲۰	$6/2338e-3$	۱/۰۶۰۶	$1/9126e-4$	۱/۰۹۱۱	$2/2529e-6$	۰/۹۷۹۵
۳۰	$2/7202e-3$	۱/۰۲۶۴	$5/1968e-5$	۱/۰۷۴۷	$4/4201e-7$	۰/۹۷۹۳
۴۰	$1/5191e-3$	۱/۰۱۴۹	$2/1254e-5$	۱/۰۴۸۶	$1/3814e-7$	۰/۹۹۲۴
۵۰	$9/6861e-4$	۱/۰۱۰۰	$1/0778e-5$	۱/۰۳۹۴	$5/6466e-8$	۰/۹۹۳۶



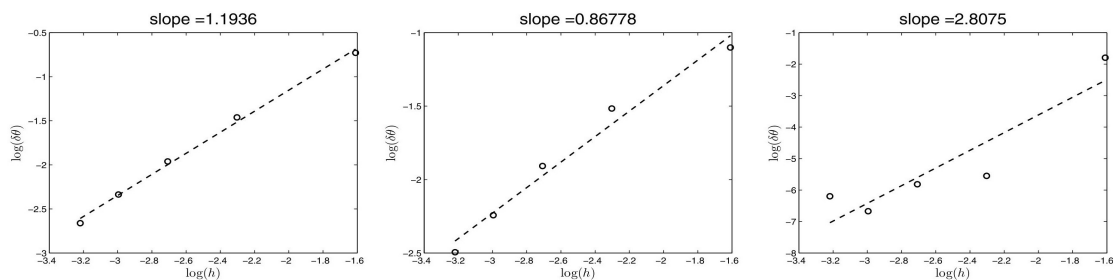
شکل ۹.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۴.۰.۴.

مثال ۵.۰.۴. سرانجام، همگرایی عمومی برآورد خطا را با استفاده از معادله‌ی برگرز، تست می‌کنیم.

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = -\pi \cos(\pi(x-t)) (1 - \sin^2(\pi(x-t))), & x \in [-1, 1], \quad t \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [-1, 1] \\ u(-1, t) = u(1, t), & t \in [0, t]. \end{cases}$$

جواب دقیق با $u(x, t) = \sin(\pi(x-t))$ داده شده است.

حل. در این مثال، $f'(u) = u$ است، که در دامنه‌ی محاسباتی خود تغییر علامت می‌دهد. در این حالت از شار گودونف که یک شار خلاف جهت باد است، استفاده می‌کنیم.

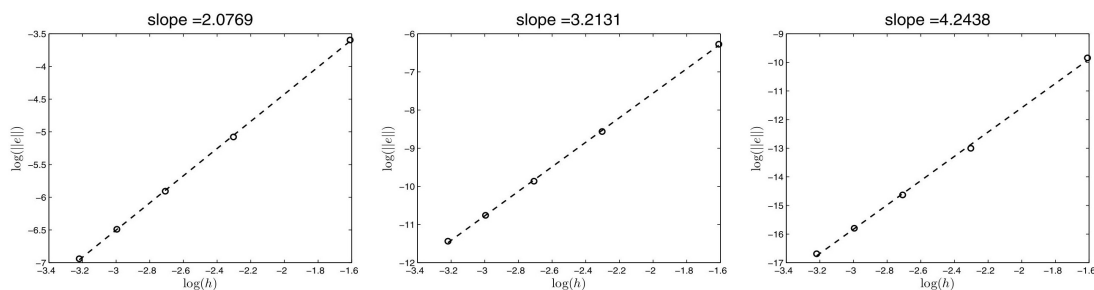


شکل ۱۰.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta\theta$ و برای مثال ۴.۰.۴.

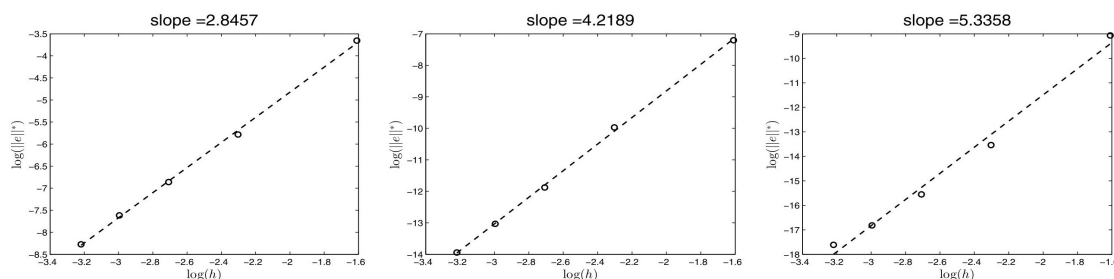
مسئله را با روش DG روی مش‌های یکنواخت برای $N = 10, 20, 30, 40, 50$ و در فضای P^p ، $p = 1, 2, 3$ حل می‌کنیم. خطاهای $\|e\|$ که در زمان $t = 1$ در ۱۱.۴ نمایش داده شده است، نشان می‌دهد که نرخ همگرایی $O(h^{p+1})$ ، برای u بهینه است. ماکسیمم خطاها در نقاط رادو و همچنین مرتبه‌ی همگرایی آن‌ها در $t = 1$ در شکل ۱۲.۴ نمایش داده شده است. نتایج موجود نشان می‌دهد که خطای DG در $t = 1$ و در ریشه‌های چندجمله‌ای رادو درجه $p + 1$ ، دارای ابرهمگرایی $O(h^{p+2})$ است.

روی هر عنصر، روند برآورد خطای (۴۲.۳) را برای محاسبه برآورد خطای روش DG به کار می‌بریم. خطاهای حقیقی L_2 و شاخص کارآمد متناظر که در جدول ۵.۴ نمایش داده شده است، نشان می‌دهد که در $t = 1$ ، برآورد خطای پسین، تحت مش‌بندی مجانبی دقیق است. نتایج نمایش داده شده در شکل ۱۳.۴ و ۱۴.۴ نشان می‌دهد که نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و $\delta\theta$ ، از نرخ نظری به‌دست آمده بهتر است.

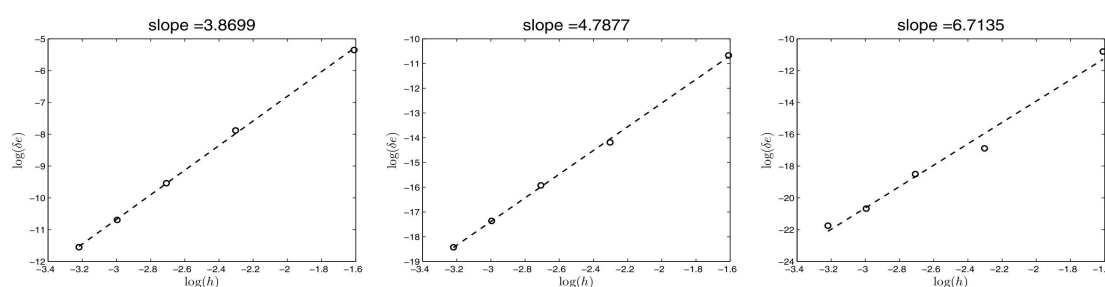
■



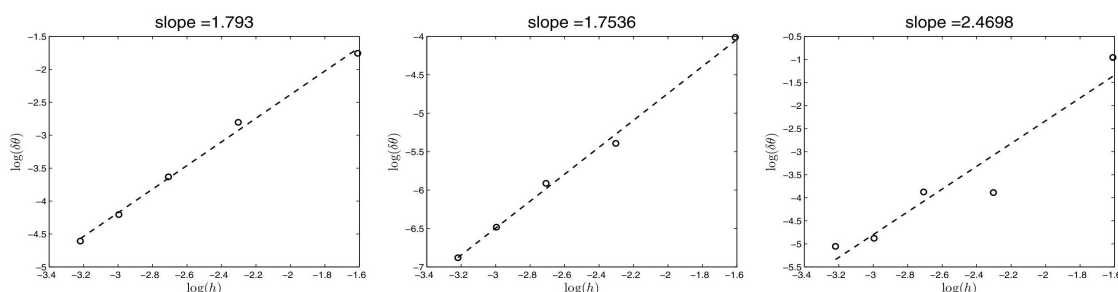
شکل ۱۱.۴: نمودار $\log - \log$ برای $\|e(\cdot, 1)\|$ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۵.۰.۴.



شکل ۱۲.۴: نمودار $\log - \log$ برای $\|e\|_*$ در $t = 1$ در مقابل طول مش h ، برای مثال ۵.۰.۴.



شکل ۱۳.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای δe و برای مثال ۵.۰.۴.



شکل ۱۴.۴: نرخ همگرایی در $t = 1$ برای $\delta \theta$ و برای مثال ۵.۰.۴.

۱.۴ نتایج ملاحظات

در این پایان‌نامه برآورد پسین ساده و مجانبی دقیق، برای روش عناصر متناهی ناپیوسته که برای قوانین بقاء غیرخطی عددی یک بعدی استفاده شده، ساخته‌ایم. برآورد خطای DG که در این پایان‌نامه ارائه شده، با حل مسأله‌ی محلی روی هر عنصر محاسبه می‌شود و نیازی به ارتباط بین عناصر همسایه وجود ندارد. ابتدا استفاده می‌کنیم از نتایج ابرهمگرایی منگ و همکاران [۳۰] که نشان دادند خطای پین روش DG و جواب دقیق، در ریشه‌های چندجمله‌ای رادو درجه $p+1$ دارای ابرهمگرایی $O(h^{p+\frac{1}{4}})$ است. با استفاده از نتیجه این ابرهمگرایی، ما

ثابت کردیم که برآورد خطای روش DG ناپیوسته تحت مش بندی به خطاهای مکانی حقیقی همگراست. به طور دقیق تر ما نشان دادیم که برآورد خطای پسین DG به خطاهای مکانی با نرخ $O(h^{p+\frac{5}{4}})$ همگراست، که نتایج محاسباتی نرخ همگرایی بهتری را نشان می دهد. همچنین ثابت کردیم که شاخص کارآمد جهانی برای راه حل در نرم L_2 با نرخ $O(h^{\frac{1}{4}})$ همگرا به یک است، در حالی که مثال های عددی نرخ بهتری را نشان می دهد. در اثبات هایمان فرض می کنیم که تابع شار $|f'(u)|$ از پایین کراندار یکنواخت مثبت است. ما همچنین یک روند برآورد خطا برای تابع شار عمومی ارائه دادیم. با چند مثال عددی نشان دادیم که برآورد خطای پسین DG برای قوانین بقاء غیرخطی با تابع شار عمومی و در زمان ثابت t ، به خطاهای مکانی در نرم L_2 همگراست، زمانی که $h \rightarrow 0$. ما می توانیم برای ادامه کار، خواص ابرهمگرایی روش های DG و LDG را برای قوانین بقاء دو بعدی با مش های مثلثی و مستطیلی بررسی کنیم.

مراجع

- [1] S. Adjerid, M. Baccouch, The discontinuous Galerkin method for two-dimensional hyperbolic problems. Part I: Superconvergence error analysis, *J. Sci. Comput.* 33 (2007) 75–113.
- [2] S.Adjerid, M. Baccouch, The discontinuous Galerkin method for two-dimensional hyperbolic problems. Part II: A posteriori error estimation, *J. Sci. Comput.* 38 (2009) 15–49.
- [3] S.Adjerid, M. Baccouch, Asymptotically exact a posteriori error estimates for a one-dimensional linear hyperbolic problem, *Appl. Numer. Math.* 60 (2010) 903–914.
- [4] S.Adjerid, A. Klausner, Superconvergence of discontinuous finite element solutions for transient convection–diffusion problems, *J. Sci. Comput.* 22 (2005) 5–24.
- [5] S.Adjerid, T.C. Massey, A posteriori discontinuous finite element error estimation for two-dimensional hyperbolic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191 (2002) 5877–5897.
- [6] S.Adjerid, H. Temimi, A discontinuous Galerkin method for higher-order ordinary differential equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 197 (2007) 202–218.
- [7] S.Adjerid, K.D. Devine, J.E. Flaherty, L. Krivodonova, A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191 (2002) 1097–1112.
- [8] M.Ainsworth, J.T. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley, New York, 2000.
- [9] M.Baccouch, A local discontinuous Galerkin method for the second-order wave equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 209–212 (2012) 129–143.
- [10] M.Baccouch, Global convergence of a posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin method for one-dimensional linear hyperbolic problems, *Int. J. Numer. Anal. Model.* 11 (2014) 172–193.

-
- [11] M.Baccouch, S. Adjrid, Discontinuous Galerkin error estimation for hyperbolic problems on unstructured triangular meshes, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 200 (2010) 162–177.
- [12] F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.* 131 (1997) 267–279.
- [13] C.E.Baumann, J.T. Oden, A discontinuous hp finite element method for convection–diffusion problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 175 (1999) 311–341.
- [14] K.S.Bey, J.T. Oden, hp-version discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 133 (1996) 259–286.
- [15] K.S. Bey, J.T. Oden, A. Patra, hp-version discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws: a parallel strategy, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38 (1995) 3889–3908.
- [16] K.S.Bey, J.T. Oden, A. Patra, A parallel hp-adaptive discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws, *Appl. Numer. Math.* 20 (1996) 321–386.
- [17] R.Biswas, K. Devine, J.E. Flaherty, Parallel adaptive finite element methods for conservation laws, *Appl. Numer. Math.* 14 (1994) 255–284.
- [18] K.Bottcher, R. Rannacher, Adaptive error control in solving ordinary differential equations by the discontinuous Galerkin method, *Tech. report*, University of Heidelberg, 1996.
- [19] P. Castillo, A superconvergence result for discontinuous Galerkin methods applied to elliptic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 4675–4685.
- [20] F. Celiker, B. Cockburn, Superconvergence of the numerical traces for discontinuous Galerkin and hybridized methods for convection–diffusion problems in one space dimension, *Math. Comput.* 76 (2007) 67–96.
- [21] Y. Cheng, C.-W. Shu, Superconvergence of discontinuous Galerkin and local discontinuous Galerkin schemes for linear hyperbolic and convection–diffusion equations in one space dimension, *SIAM J. Numer. Anal.* 47 (2010) 4044–4072.
- [22] B.Cockburn, C.W. Shu, TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin methods for scalar conservation laws II: general framework, *Math. Comput.* 52 (1989) 411–435.

- [23] B.Cockburn, S.Y. Lin, C.W. Shu, TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin methods of scalar conservation laws III: one dimensional systems, *J. Comput. Phys.* 84 (1989) 90–113.
- [24] B.Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Shu, *Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications*, in: *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, vol. 11, Springer, Berlin, 2000.
- [25] M.Delfour, W. Hager, F. Trochu, Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equation, *Math. Comput.* 154 (1981) 455–473.
- [26] K.D.Devine, J.E. Flaherty, Parallel adaptivehp-refinement techniques for conservation laws, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 20 (1996) 367–386.
- [27] J.E. Flaherty, R. Loy, M.S. Shephard, B.K. Szymanski, J.D. Teresco, L.H. Ziantz, Adaptive local refinement with octree load-balancing for the parallel solution of three-dimensional conservation laws, *J. Parallel Distrib. Comput.* 47 (1997) 139–152.
- [28] C.Johnson, Error estimates and adaptive time-step control for a class of one-step methods for stiff ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 25 (1988) 908–926.
- [29] P. Lesaint, P. Raviart, On a finite element method for solving the neutron transport equations, in: C. de Boor (Ed.), *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1974.
- [30] X.Meng, C.-W. Shu, Q. Zhang, B. Wu, Superconvergence of discontinuous Galerkin methods for scalar nonlinear conservation laws in one space dimension, *SIAM J. Numer. Anal.* 50 (5) (2012) 2336–2356.
- [31] W.H. Reed, T.R. Hill, *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Tech. Rep. LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, 1973.
- [32] M.F. Wheeler, An elliptic collocation-finite element method with interior penalties, *SIAM J. Numer. Anal.* 15 (1978) 152–161
- [33] Y. Cheng and C.-W. Shu, Superconvergence of discontinuous Galerkin and local discontinuous Galerkin schemes for linear hyperbolic and convection-diffusion equations in one space dimension, *SIAM J. Numer. Anal.*, 47 (2010), pp. 4044–4072.
- [34] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

- [35] Baccouch, Mahboub. "A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin method applied to one-dimensional nonlinear scalar conservation laws." *Applied Numerical Mathematics* 84 (2014): 1-21.

Aabstract

In this Thesis, new a posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin (DG) formulation applied to nonlinear scalar conservation laws in one space dimension are presented and analyzed. These error estimates are computationally simple and are obtained by solving a local problem with no boundary condition on each element of the mesh. We first show that the leading error term on each element for the solution is proportional to a $(p+1)$ -degree Radau polynomial, when p -degree piecewise polynomials with $p \geq 1$ are used. This result allows us to prove that, for smooth solutions, these error estimates at a fixed time converge to the true spatial errors in the L^2 -norm under mesh refinement. The order of convergence is proved to be $p+5/4$. Finally, we prove that the global effectivity indices in the L^2 -norm converge to unity at $O(h^{1/2})$ rate. Our computational results indicate that the observed numerical convergence rates are higher than the theoretical rates.

key words:

A posteriori error estimates, discontinuous Galerkin method, superconvergence, Finite element, conservation laws, semi-discrete



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Partial Differential equations

**A posteriori error estimates for a
discontinuous Galerkin method applied to
one-dimensional nonlinear scalar
conservation laws**

By: Mohammad Esmaili

Supervisor

Dr.Ali Mesforush

February 2017