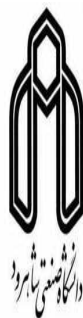


الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدايتنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع یافته

نگارنده: هادی سیدغراوی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور

دکتر حسین باغیشنی

بهمن ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای هادی سیدغراوی به شماره دانشجویی ۹۲۳۶۹۸۴ رشته آمار گرایش آمار ریاضی تحت عنوان مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون های طول عمر تسریع یافته که در تاریخ ۹۵/۱۱/۱۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه بسیار خوب) امتیاز (۱۸/۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☒ عملی ☐

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

اعضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر احمد نزاکتی رضازاده	۱- استاد راهنمای اول
	---	---	۲- استاد راهنمای دوم
	استادیار	دکتر حسین باغیشنی	۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر سیدحیدر جعفری	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر محمدرضا ربیعی	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر مسیب احمدی	۶- استاد ممتحن دوم

رئیس دانشکده: دکتر ابوالهیم هاشمی

تقدیم به:

به پاس از خود گذشتگی، دریادلی و فداکاری‌های بی دریغ‌شان که مهربانی ابدی ره
توشه‌ام ساختند و به من آموختند مردم‌داری و مهرورزی را؛

این مجموعه تقدیم می‌شود به:

مادر مهربان و پدر بزرگوام،

همچنین تقدیم می‌شود به:

همراه زندگی‌ام، به پاس فداکاری‌های ستودنی و صبوری‌اش.

پیشگفتار

پیشرفت‌های صورت‌گرفته در تکنولوژی و آثار آن در زندگی مردم در چند دهه اخیر آنقدر وسیع بوده است که تفاوت چشمگیر در سطح زندگی جوامع بشری را نمی‌توان به راحتی انکار کرد. پیشرفت تکنولوژی از یک طرف و بالا بودن سطح توقع مشتریان از طرف دیگر باعث شده‌اند که رقابت شدیدی بین تولیدکنندگان محصولات در سطح بین‌المللی تبدیل به امری حیاتی برای شرکت‌های تولیدی شود. به همین جهت، شرکت‌های معتبر تولیدی در این رقابت سعی در بالا بردن کیفیت محصولات خود دارند. از آنجایی که در مطالعات طول عمر محصولات با کیفیت آن‌ها سروکار داریم و در مواقعی ممکن است، محصول موردنظر دارای قابلیت بالا باشد، لذا به دست آوردن داده، گاه بسیار وقتگیر است؛ از طرف دیگر اگر از هر طریق دیگری بتوان داده را در زمان کم به دست آورد ممکن است، محصول موردنظر بسیار گران‌قیمت باشد که تعیین حتی یک مشاهده بیشتر مستلزم صرف هزینه زیاد شود. با توجه به ملاحظات فوق در مطالعات طول عمر معمولاً با داده‌های ناکامل روبرو هستیم.

در بسیاری از اوقات در آزمون‌های طول عمر با نمونه‌هایی مواجه هستیم که بنا به هر دلیل، آزمایشگر نمی‌تواند زمان دقیق از کار افتادگی واحدهای تحت آزمایش را مشاهده کند. به این داده‌ها که قبل از مشاهده زمان شکست آن‌ها، از آزمایش حذف می‌شوند، داده‌های سانسور شده می‌گویند. انواع سانسور بر اساس این که آزمایش چه موقع به پایان می‌رسد و چگونه داده‌ها از آزمایش‌های طول عمر جمع‌آوری شوند، پدید می‌آیند. سانسور فزاینده نوع دو یکی از انواع سانسورها می‌باشد که در زمینه‌های آزمون‌های طول عمر و قابلیت اعتماد از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. به عنوان مثال، ویورس و بالاکریشن (۱۹۹۴)، آگاروالا و بالاکریشن (۱۹۹۶)، بالاکریشن و سندهو (۱۹۹۶) و کمپس (۱۹۹۵) سانسور فزاینده را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین کمپس و کرامر (۲۰۰۱) و بالاکریشن (۲۰۰۱) میانگین و واریانس آماره‌های ترتیبی تحت سانسور فزاینده نوع دو را به دست آورده‌اند. این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد که مطالب هر فصل به‌طور خلاصه به شرح ذیل می‌باشند:

- در فصل اول مقدمات، تعاریف و مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز سایر فصل‌ها را بیان می‌کنیم.
- در فصل دوم ابتدا توزیع وایبل را معرفی کرده و سپس مدل فرآیندهندسی وایبل بر اساس داده‌های کامل را شرح داده و برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها را به دست می‌آوریم.
- در فصل سوم برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مدل فرآیند هندسی وایبل را بر اساس داده‌های سانسور نوع یک و نوع دو بدست می‌آوریم.
- در فصل چهارم مطالعات شبیه‌سازی فصل دو و سه را بررسی کرده و نتایج حاصل از آن‌ها را گزارش می‌کنیم.

- ضمیمه این پایان نامه شامل برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده در محیط R برای اجرای مطالعات شبیه‌سازی است.

در پایان برخورد لازم می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی خویش را نسبت به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر نزاکتی رضا زاده که با رهنمودهایشان مرا یاری رساندند ابراز نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر باغیشتی که مشاوره این پایان نامه را برعهده داشتند، کمال تشکر را دارم. در نهایت از دوستان گرانقدرم که کمک‌های بی‌دریغشان را ارزانی‌ام داشتند تا این پایان نامه را به اتمام برسانم، سپاسگزارم.

هادی سیدغراوی

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **هادی سیدغراوی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون های طول عمر تسریع یافته**، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده اند.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده اند.

هادی سیدغراوی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در تحلیل قابلیت اعتماد، آزمون طول عمر تسريع يافته رايج ترين روش براي ارزيابي عمر محصول است. در چنين آزموني، محصولات در شرايط بالاتر از شرايط معمول براي رسيدن به شکست، آزمون مي شوند. هدف از تحليل آزمون هاي طول عمر تسريع يافته، به کارگيري داده هاي آزمون براي به دست آوردن توزيع عمر يک محصول و پارامترهاي وابسته به آن در شرايط نرمال است. در اين پايان نامه، مدل فرآيند هندسي وايبل براي آزمون هاي طول عمر تسريع يافته تحت فشار ثابت، استفاده شده است. با فرض اين که طول عمر تحت سطوح فشار افزايشي، به شکل يک فرآيند هندسي است، برآورد درست نمایی ماکسيمم از پارامترهاي توزيع وايبل تحت سه طرح سانسور مختلف: بدون سانسور، سانسور نوع اول و سانسور نوع دوم به دست آورديم. براي هر نوع سانسور، فاصله اطمينان براي پارامترها، با استفاده از هر دو روش توزيع مجاني و روش خودگردان پارامتری به دست آورديم. همچنين کارآبي پارامترها، را از طريق يک مطالعه شبیه سازی با مقادير از قبل ثابت، مورد بررسی قرار می دهيم.

کلمات کلیدی: آزمون هاي طول عمر، تسريع يافته، فشار ثابت، قابلیت اعتماد، سانسور نوع يک، سانسور نوع دو، توزيع مجاني و خودگردان پارامتری

فهرست مطالب

ه	فهرست تصاویر
ز	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مقدمات
۱	۱.۱ آماره‌های ترتیبی
۲	۱.۱.۱ ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی
۲	۲.۱.۱ کاربرد آماره‌های ترتیبی
۳	۲.۱ توزیع وایبل
۳	۳.۱ آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته
۵	۴.۱ انواع آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته
۶	۱.۴.۱ وابستگی به زمان
۷	۲.۴.۱ انواع توزیع‌های طول عمر و مدل‌های طول عمر- فشار
۸	۳.۴.۱ مدل‌های آزمون طول عمر تسریع‌یافته
۱۰	۴.۴.۱ مفاهیم و کاربرد آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته
۱۱	۵.۱ روش‌های جمع‌آوری داده‌ها
۱۱	۱.۵.۱ داده‌های کامل
۱۱	۲.۵.۱ سانسور
۱۴	۳.۵.۱ تاریخچه مختصری از آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته
۱۵	۶.۱ روش درست‌نمایی ماکسیمم
۱۷	۱.۶.۱ فاصله اطمینان
۱۷	۲.۶.۱ شرایط نظم
۱۸	۳.۶.۱ اطلاع فیشر
۱۸	۷.۱ خودگردان‌سازی
۲۰	۸.۱ توابع قابلیت اعتماد
۲۰	۱.۸.۱ تابع قابلیت اعتماد
۲۱	۲.۸.۱ تابع نرخ خطر

۹.۱	فرآیند هندسی	۲۱
۲	مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع یافته با داده‌های کامل	۲۳
۱.۲	توزیع وایبل	۲۴
۱.۱.۲	گشتاورهای توزیع وایبل	۲۷
۲.۱.۲	تابع قابلیت اعتماد و نرخ شکست توزیع وایبل	۲۷
۳.۱.۲	ارتباط توزیع وایبل با سایر توزیع‌های آماری	۳۰
۲.۲	مدل فرآیند هندسی وایبل	۳۱
۱.۲.۲	تاریخچه مختصری از مدل فرآیند هندسی	۳۱
۲.۲.۲	پذیره‌های مدل هندسی وایبل	۳۱
۳.۲.۲	گشتاورهای مدل هندسی وایبل	۳۲
۴.۲.۲	تابع قابلیت اعتماد و نرخ شکست مدل هندسی وایبل	۳۳
۵.۲.۲	ارتباط مدل هندسی وایبل با سایر توزیع‌های آماری	۳۳
۳.۲	توجیه فرض هندسی در مدل آزمون‌های طول عمر تسریع یافته	۳۳
۱.۳.۲	رابطه بین مشخصه عمر و فشار	۳۴
۲.۳.۲	مدل رابطه عمر - فشار	۳۶
۴.۲	مدل فرآیند هندسی وایبل در آزمون‌های طول عمر تسریع یافته با داده‌های کامل	۳۷
۱.۴.۲	برآورد درست‌نمایی ماکسیمم	۳۷
۲.۴.۲	فاصله اطمینان تقریبی	۳۸
۳.۴.۲	فاصله اطمینان خودگردان در داده‌های کامل	۴۰
۵.۲	روش‌های استنباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد	۴۰
۱.۵.۲	برآورد تابع توزیع با داده‌های کامل	۴۱
۳	مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع یافته با داده‌های سانسور شده	۴۳
۱.۳	داده‌های سانسور نوع یک	۴۴
۱.۱.۳	برآورد درست‌نمایی ماکسیمم	۴۵
۲.۱.۳	فاصله اطمینان تقریبی برای سانسور نوع یک	۴۶
۳.۱.۳	فاصله اطمینان خودگردان در سانسور نوع یک	۴۷
۲.۳	داده‌های سانسور نوع دو	۴۸
۱.۲.۳	برآورد درست‌نمایی ماکسیمم	۴۹
۲.۲.۳	فاصله اطمینان تقریبی برای سانسور نوع دو	۵۰
۳.۲.۳	فاصله اطمینان خودگردان در سانسور نوع دو	۵۱
۴	ارزیابی فرآیند هندسی وایبل در تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع یافته	۵۳
۱.۴	نتایج شبیه سازی برای داده‌های کامل	۵۳
۱.۱.۴	نتایج شبیه سازی	۵۴

۵۸	نتایج شبیه سازی برای داده‌های سانسور نوع یک	۲.۴
۵۸	نتایج شبیه سازی	۱.۲.۴
۶۲	نتایج شبیه سازی برای داده‌های سانسور نوع دو	۳.۴
۶۲	نتایج شبیه سازی	۱.۳.۴

۶۷	مراجع
----	-------

۷۱	آ کدنویسی با R
----	----------------

۸۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
----	----------------------------

۸۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
----	----------------------------

فهرست تصاویر

۶	۱.۱	نمودار اعمال فشار ثابت مستقل از زمان
۷	۲.۱	نمودار اعمال فشار افزایشی وابسته به زمان
۷	۳.۱	نمودار اعمال فشار مرحله‌ای وابسته به زمان
۹	۴.۱	توزیع طول عمر در شرایط معمول و تنش
۱۱	۵.۱	نمایش داده‌های کامل
۱۳	۶.۱	نمایش سانسور نوع اول
۱۴	۷.۱	نمایش سانسور نوع دوم
۲۱	۸.۱	رابطه بین $r(t)$ و $R(t)$ ، $f(t)$
۲۵	۱.۲	نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 0.5$
۲۵	۲.۲	نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 1$
۲۵	۳.۲	نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 2$
۲۸	۴.۲	نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 0.5$
۲۸	۵.۲	نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 1$
۲۸	۶.۲	نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 2$
۲۹	۷.۲	نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 0.5$
۲۹	۸.۲	نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 1$
۲۹	۹.۲	نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 2$

فهرست جداول

۸	مولفه‌های توزیع طول عمر	۱.۱
۹	روابط بین توابع در شرایط معمول و غیرمعمول	۲.۱
۵۵	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های کامل در مدل فرآیند هندسی وایبل	۱.۴
۵۶	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های کامل در مدل فرآیند هندسی وایبل	۲.۴
۵۷	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های کامل در مدل فرآیند هندسی وایبل	۳.۴
۵۹	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع یک در مدل فرآیند هندسی وایبل	۴.۴
۶۰	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع یک در مدل فرآیند هندسی وایبل	۵.۴
۶۱	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع یک در مدل فرآیند هندسی وایبل	۶.۴
۶۳	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع دو در مدل فرآیند هندسی وایبل	۷.۴
۶۴	نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع دو در مدل فرآیند هندسی وایبل	۸.۴

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل، مفاهیم و نمادهایی را که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم. در بخش اول، آماره‌های ترتیبی و کاربردهای آن‌ها توضیح داده شده‌اند. در بخش دوم توزیع وایبل را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم آزمون‌های طول عمر تسریع یافته، توضیح داده شده‌اند. در بخش چهارم، انواع آزمون‌های طول عمر تسریع یافته، مفاهیم پایه و کاربردهای آن توضیح داده شده‌اند. در بخش پنجم داده‌های کامل را معرفی می‌کنیم. در بخش ششم ضمن معرفی مفاهیم سانسورها و انواع آن‌ها، چند نوع خاص را بیشتر بررسی نموده‌ایم. در بخش هفتم برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و برخی ویژگی‌های مهم آن‌ها بیان شده‌اند. در بخش هشتم خودگردان‌سازی معرفی می‌کنیم. در بخش نهم نیز مفاهیم مربوط به توانع قابلیت اعتماد بررسی شده و در بخش دهم به معرفی فرآیندهندسی پرداخته‌ایم.

۱.۱ آماره‌های ترتیبی

فرض کنید $T_1, \dots, T_n$ متغیر تصادفی باشند. اگر آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم و مقادیر مرتب‌شده را به صورت $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$ نشان دهیم، در این صورت $T_{(j)}$ را j امین آماره ترتیبی در نمونه‌ای به حجم n گوییم. کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی، یعنی $T_{(1)}$ و $T_{(n)}$ به مقادیر فرین^۱ معروف هستند و در مطالعات آماری بیشتر مورد توجه می‌باشند.

^۱Extreme value

۱.۱.۱ ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی

آماره‌های ترتیبی تشکیل یک زنجیر مارکف می‌دهند، زیرا هر آماره ترتیبی فقط به آماره ترتیبی ماقبل خود ربط دارد و از دیگر آماره‌ها مستقل است. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته $F(x)$ باشد. در این صورت

۱- تابع چگالی توام آماره‌های ترتیبی عبارت است از

$$f_{X_{1:n}, \dots, X_{n:n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \quad -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty.$$

۲- تابع چگالی کناری یک آماره ترتیبی به شکل

$$f_{X_{i:n}}(x_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1-F(x)]^{n-i} f(x) \quad -\infty < x_i < \infty$$

به دست می‌آید.

۳- تابع چگالی توام دو آماره ترتیبی به صورت زیر است:

$$f_{X_{i:n}, X_{j:n}}(x_i, x_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x_i)]^{i-1} [F(x_i) - F(x_j)]^{j-i-1} \\ \times [1-F(x)]^{n-j} f(x_i) f(x_j) \quad -\infty < x_i < x_j < \infty.$$

۲.۱.۱ کاربرد آماره‌های ترتیبی

آماره‌های ترتیبی در قسمت‌های مختلف توصیفی و استنباطی علم آمار، دارای کاربرد می‌باشند. یکی از کاربردهای این آماره‌ها در آمار توصیفی، کشف مشاهدات پرت (داده‌های خیلی کوچک یا خیلی بزرگ) در یک مجموعه از داده‌ها می‌باشد. همان‌گونه که می‌دانیم یکی از ضعف‌های استفاده از میانگین به عنوان معیاری جهت تمرکز داده‌ها، میزان حساسیت بالای آن نسبت به داده‌های دورافتاده و تغییرات الگو است. در مقابل میانه یا میانگین اصلاح‌شده^۲، که این معیارها نیز جزء معیارهای مرکزی می‌باشند، نسبت به تغییرات الگو از حساسیت کمتری برخوردار هستند و در محاسبه آن‌ها، آماره‌های ترتیبی نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند.

در آمار استنباطی نیز می‌توان به مثال‌های زیر در خصوص کاربرد آماره‌های ترتیبی اشاره نمود:

۱. در محاسبه تابع توزیع تجربی، نیازمند استفاده از آماره‌های ترتیبی هستیم و از آن‌جا که در آزمون‌های نیکویی برازش، اغلب تمرکز روی تغییرات بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع فرضی است، آماره‌های ترتیبی در این آزمون‌ها نقش اساسی دارند.

۲. در موضوعات کنترل کیفیت برای بررسی در کنترل بودن تولیدات، اغلب از نمودار میانگین و دامنه تغییرات یا از نمودار میانه و دامنه تغییرات استفاده می‌شود که برای محاسبه میانه و دامنه تغییرات ناچار به استفاده از آماره‌های ترتیبی می‌باشیم.

^۲ Trimmed mean

۳. آماره‌های ترتیبی، در بسیاری از موارد به‌عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند و برآوردگرهای نارایب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و پرتوان‌ترین آزمون برای پارامترهای نامعلوم را فراهم می‌کنند.

۴. در آزمایشات طول عمر، اغلب به دلایلی از قبیل محدودیت‌های زمانی یا اعتبار مالی، امکان شرکت دادن تمام واحدها در آزمایش وجود ندارد. بنابراین مشاهده طول عمر تمام واحدها امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل از روش‌های سانسور^۳ استفاده می‌کنیم و آماره‌های ترتیبی نقش مهمی در سانسورها دارند.

برای جزئیات بیشتر در مورد ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی و کاربرد آن‌ها، می‌توان به دیوید و ناگراجا^۴ (۲۰۰۳) یا آرنولد^۵ و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه نمود.

۲.۱ توزیع وایبل

توزیع وایبل^۶ در موقعیت‌های کاربردی گوناگون مورد استفاده قرار می‌گیرد، مخصوصاً به‌عنوان یک مدل مناسب برای مدل‌بندی طول عمر محصولات در صنعت شناخته می‌شود. این توزیع همچنین به‌عنوان توزیع فرسودگی، شکنندگی و استحکام مواد مورد استفاده قرار گرفته است. توزیع وایبل یکی از سه توزیع مقدار فرین حدی است. این توزیع نوع سوم از توزیع‌های حدی می‌نیم است. برای مثال استحکام یک زنجیر دراز (یا زمان خرابی یک سیستم به صورت سری^۷) برابر زمان خرابی ضعیف‌ترین حلقه زنجیر یا مولفه است. همچنین نیروی شکنندگی یک سرامیک به وسیله ضعیف‌ترین ترک حاصل اندازه‌گیری می‌شود. اگر یک دستگاه شامل اجزای زیادی باشد که توزیع زمان خرابی آن‌ها یکسان باشد، آن‌گاه اگر با از کار افتادن یک جزء از این دستگاه، کل دستگاه از کار بیافتد، توزیع وایبل می‌تواند یک توزیع مناسب برای چنین دستگاهی باشد. برای مثال، یک خازن را در نظر بگیرید که با از کار افتادن یکی از عایق‌ها (دی الکتریک‌ها^۸) خازن از کار می‌افتد. لذا طول عمر خازن به طول عمر ضعیف‌ترین جزء آن وابسته است. در فصل بعد توزیع وایبل را به‌طور گسترده مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳.۱ آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته

از نقطه نظر آماری یکی از وجوه تمایز مطالعات طول عمر با سایر بخش‌ها، نحوه جمع‌آوری مشاهدات است. امروزه با وجود محصولات با قابلیت اعتماد بالا به دست آوردن تعداد معقولی مشاهده جهت انجام استنباط آماری، معمولاً کار ساده‌ای نیست. این مشکل محققان را به توسعه روش‌های جدید آزمون‌های

^۳ Censoring

^۴ David and Nagaraja

^۵ Arnold

^۶ Weibull distribution

^۷ Series

^۸ Dielectrics

طول عمر و به دست آوردن به موقع اطلاعات برانگیخته است. یکی از این روش‌ها، استفاده از آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته^۹ (ALT) می‌باشد که به‌طور گسترده در صنایع تولیدی استفاده می‌شود. در چنین آزمون‌هایی، محصولات در سطوح بالاتر از حد معمول تنش^{۱۰} (مانند دما، ولتاژ و رطوبت) برای شکست زودرس آزمون می‌شوند. داده‌های به دست آمده از آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته، تحلیل و در شرایط عادی مورد استفاده واقع می‌شوند که در ادامه با جزییات کامل توضیح داده می‌شوند.

یکی از روش‌های متداول در آزمون‌های طول عمر، برای به دست آوردن مشاهدات، به کار بردن آن‌ها در شرایطی سخت‌تر از شرایط معمول است. این روش‌ها را روش‌های آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته می‌گویند. در آزمون‌های AL مشاهدات خیلی سریع‌تر از حالتی که واحدها در شرایط معمول مورد استفاده قرار می‌گیرند، به دست می‌آیند. برای مثال یک اتوی الکتریکی را در نظر بگیرید که در شرایط معمول به‌طور روزانه به مدت نیم ساعت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت ممکن است ماه‌ها و سال‌ها زمان لازم باشد که اتو از کار بیافتد و لذا برای داشتن یک زمان شکست باید مدت‌ها منتظر ماند. در آزمون‌های AL، زمان شکست اتو را به نوعی شبیه‌سازی می‌کنند. بدین معنی که اتو را به دفعات زیاد در طول روز مورد استفاده قرار داده و با شرط اینکه در هر مرحله استفاده شرایط یکسان با قبل باشد باعث از کار افتادن آن در زمانی سریع‌تر از زمان معمول می‌شوند. بدین معنی که اگر برای مثال اتو در شرایط معمولی با ولتاژ ۲۲۰ ولت کار می‌کند، آن را در ولتاژ بالاتر یا پایین‌تر مورد استفاده قرار داده و باعث شکست آن در زمانی زودتر از زمان معمول می‌شوند. آزمایش‌های طول عمر تسریع‌یافته در صنایع تولیدی برای چندین دهه استفاده می‌شوند.

آزمون‌های تسریع‌یافته به دو دلیل مهم هستند:

۱. در طول توسعه محصول، تعداد کمی از نمونه‌ها منجر به شکست در فشار بالا می‌شوند. مهندسان نمونه‌هایی برای شناسایی علل شکست و سپس تعیین چگونگی بهبود محصول برای از بین بردن یا کاهش علل بررسی می‌کنند. برای چندین سال مهندسان قابلیت اعتماد، محصول را با آزمون‌های توسعه مانند فشارهای محیط غربالگری^{۱۱} (ESS) و آزمون عمر تسریع یافته بالا^{۱۲} (HALT) بهبود بخشیدند. چنین آزمایشی بستگی به دانش مهندسی کیفیت از محصول و معمولاً یک مدل فیزیکی آماری را شامل نمی‌شود.

۲. پس از توسعه محصول، یک نمونه آماری از نمونه‌هایی گرفته می‌شوند که در سطح فشار بالا برای اندازه‌گیری قابلیت اعتماد و تخمین توزیع طول عمر یا شکست در سطوح فشار پایین طراحی شده، آزمون می‌شوند. چنین برآوردی نیاز به یک مدل مناسب دارد.

^۹ Accelerated life tests

^{۱۰} Stress

^{۱۱} Environmental stress screening

^{۱۲} Highly accelerated life testing

۴.۱ انواع آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته

آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته به دو دسته کیفی و کمی قابل تقسیم بندی هستند که به اختصار آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

آزمون‌های کیفی

این آزمون‌ها اغلب به تعیین شکست و نیز چگونگی شکست و شیوه‌های احتمال دسترسی به شکست، بدون به کارگیری هر گونه پیشگویی در مورد طول عمر محصول (تحت شرایط معمول) می‌پردازند و اغلب برای نمونه‌های کوچک و تحت کنترل کاربرد دارند، که در صورت درست طراحی نشدن، ممکن است باعث شکست محصول به شیوه‌هایی که هرگز در طول عمر حقیقی خود با آن مواجه نشده‌اند، گردد. یک آزمون کیفی مناسب آزمونی است که به سرعت سبب آشکارسازی شیوه‌های شکستی گردد که در طول عمر محصول تحت شرایط معمول اتفاق می‌افتد.

در حالت کلی باید بیان نمود که آزمون‌های کیفی، طول عمر مشخصه‌های محصول را تحت به کارگیری شرایط معمول محدود نمی‌سازد، بلکه این آزمون‌ها اطلاعات ارزشمندی را برای انواع سطوح فشاری که آزمایشگر ممکن است از آن‌ها در طول آزمون کمی متوالی بهره گیرد را فراهم سازد.

آزمون‌های کمی

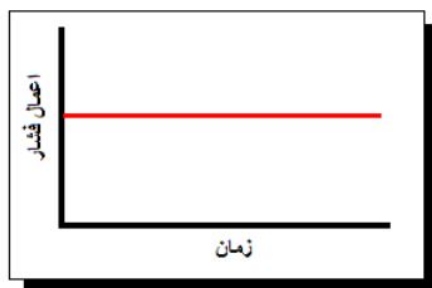
این آزمون‌ها به پیش‌بینی طول عمر (تحت به کارگیری شرایط معمول) محصول می‌پردازند و برخلاف آزمون‌های کیفی، شامل آزمون‌هایی‌اند که باعث محدود نمودن طول عمر مشخصه‌های محصول یا سیستم می‌گردند و به پیش‌بینی طول عمر محصول و به موجب آن دسترسی به اطلاعات معتبر و ارزشمندی از قبیل تعیین احتمال شکست، میانگین طول عمر (تحت شرایط به کارگیری) می‌گردند. این آزمون‌ها هم چنین می‌توانند در مقایسه طرح‌های مختلف و بازگشت هزینه‌های برنامه‌ریزی‌شده به ما کمک نمایند. آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته طوری انتخاب می‌شوند که باعث سرعت بخشیدن به شکست واحدهای آزمایشی گردند، اما این تسریع به این معنی نیست که باعث تولید شکست‌هایی گردیم که هرگز تحت شرایط معمول اتفاق نمی‌افتند. بنابراین در فرآیند طول عمر نحوه انتخاب سطوح فشار و نیز طریقه اعمال آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار هستند. این سطوح فشار خارج از حدود خصوصیات و ویژگی‌های یک محصول می‌باشد و در نهایت به خرابی محصول می‌انجامد. واضح است در صورت افزایش فشار در یک آزمون طول عمر تسریع‌یافته با کاهش زمان مواجه خواهیم شد. در صورتی که سطوح فشار اعمال‌شده دورتر از شرایط معمول باشد، نمی‌توان در مورد ادامه روند به طور حتم اظهار نظر نمود و این امر سبب افزایش خطای تخمین در برآوردیابی می‌گردد.

۱.۴.۱ وابستگی به زمان

آزمون‌های AL در حالت کلی بر اساس مستقل یا وابسته بودن اعمال فشار نسبت به زمان و نیز بر اساس نحوه اعمال آن به دو گروه قابل تقسیم هستند:

اعمال فشار مستقل از زمان (فشار ثابت)

در صورتی که اعمال فشار مستقل از زمان باشد، این فشار در یک سطح ثابت بر واحدهای آزمایشی در زمان‌های مختلف اعمال می‌گردد. به عنوان مثال اگر دما، فشار حرارتی مورد استفاده‌ای باشد که روی هر واحد تحت آزمایش اعمال می‌شود (برای مثال ۱۰۰ درجه سانتیگراد)، مشاهدات مورد نظر تحت همان درجه حرارت تا زمان خاتمه آزمایش ثبت می‌گردند، که در شکل ۱.۱ می‌توان این استقلال را مشاهده نمود.



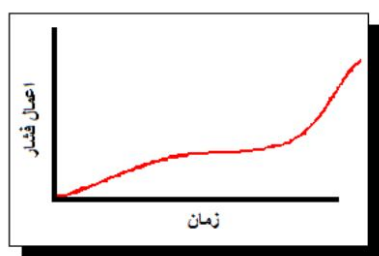
شکل ۱.۱: نمودار اعمال فشار ثابت مستقل از زمان

اعمال فشار وابسته به زمان (فشار افزایشی و فشار مرحله‌ای)

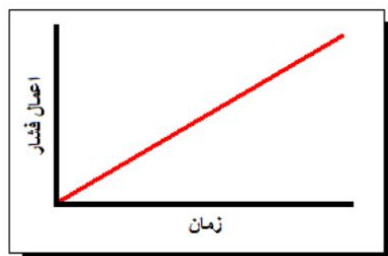
زمانی که اعمال فشار وابسته به زمان است، محصول مورد نظر تحت تاثیر آن سطوح فشاری قرار می‌گیرد که نسبت به زمان متغیر است. این گروه از اعمال فشار به دو دسته فشار افزایشی و فشار مرحله‌ای قابل تقسیم می‌باشند:

الف) در اعمال فشار به روش افزایشی می‌توان بیان نمود که فشار روی محصولات تحت آزمایش به طور پیوسته در طول واحد زمان افزایش می‌یابد و در نتیجه به دلیل متغیر بودن و افزایشی بودن فشار نسبت به زمان می‌توان بیان نمود که شکست سریع‌تر از زمان انتظار اتفاق می‌افتد. شکل‌های ۲.۱ بیانگر این وابستگی می‌باشد.

ب) در اعمال فشار به روش مرحله‌ای می‌توان بیان نمود که فشار به صورت پله‌ای تغییر می‌کند، یعنی فشار ابتدا برای یک دوره از زمان ثابت می‌ماند و سپس به صورت پله‌ای به سطح دیگری از فشار تبدیل می‌گردد و دوباره برای یک بازه زمانی دیگر همچنان ثابت مانده و سپس به صورت پله‌ای تغییر می‌کند. این روند همچنان ادامه پیدا می‌کند تا این که بسته به شرایط آزمون، آزمایش در یک زمان از پیش تعیین شده یا با رخداد تعداد ثابتی از خرابی‌ها متوقف گردد. شکل ۳.۱ نشان دهنده این اعمال فشار می‌باشند.

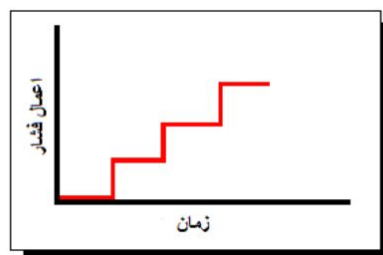
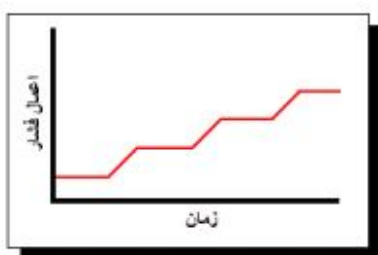


(ب) وابستگی غیرخطی



(آ) وابستگی خطی

شکل ۲.۱: نمودار اعمال فشار افزایشی وابسته به زمان



شکل ۳.۱: نمودار اعمال فشار مرحله‌ای وابسته به زمان

در این تحقیق به استنباط آماری در آزمون‌های طول عمر تسريع يافته با استفاده از مدل فرآیند هندسی وایبل تحت فشار ثابت خواهیم پرداخت.

۲.۴.۱ انواع توزیع‌های طول عمر و مدل‌های طول عمر- فشار

تحلیل داده‌های آزمون طول عمر تسريع يافته شامل یک توزیع طول عمر است که به توصیف محصول در سطوح مختلف فشار و ارائه یک مدل طول عمر- فشار می‌پردازد. همچنین این تحلیل به بیان شیوه‌ای می‌پردازد که مشخص می‌کند توزیع طول عمر چگونه در سطوح مختلف فشار تغییر می‌کند. توزیع‌های طول عمر، هر نوع توزیعی می‌توانند باشند. اغلب از توزیع‌های وایبل، نمایی و لگ نرمال به‌عنوان توزیع‌های طول عمر استفاده می‌گردد. متناسب با هر توزیع طول عمر، یک رابطه طول عمر - فشار بر اساس مشاهده و تجربه به داده‌ها نسبت داده می‌شود.

اولین گام در انجام تحلیل برای داده‌های آزمون طول عمر تسريع يافته، انتخاب یک توزیع طول عمر مناسب می‌باشد. دومین گام انتخاب مدلی است که به توصیف یک مولفه توزیع طول عمر از یک سطح فشار به سطح دیگر می‌پردازد. این مولفه‌های طول عمر می‌توانند هر مشخصه‌ای از طول عمر از قبیل میانگین، میانه، تابع توزیع یا تابع قابلیت اعتماد^{۱۳} باشند. این مولفه‌ها به‌عنوان تابعی از فشار در نظر گرفته می‌شوند. جدول ۱.۱ بیانگر این مدل می‌باشد. به‌عنوان مثال، زمانی که توزیع وایبل توزیع طول عمر در نظر گرفته می‌شود، می‌توان مولفه طول عمر را پارامتر مقیاس انتخاب کرد که مستقل از

^{۱۳}Survival function

سطح فشار اعمال شده می باشد؛ در حالی که در سطوح مختلف فشار پارامتر شکل ثابت فرض می شود. در نتیجه یک رابطه فشار - طول عمر به پارامتر مقیاس اختصاص داده می شود. بعد از انتخاب یک توزیع طول عمر مناسب و نیز مدلی که ارتباط بین طول عمر - فشار را به داده های آزمون تسریع یافته نسبت دهد، سومین گام در تحلیل داده ها انتخاب یک روش مناسب جهت برآورد پارامترهای موجود در مدل می باشد. از جمله روش های ممکن برآورد کمترین توان های دوم و برآورد درست نمایی ماکسیمم^{۱۴} می باشد. پس از برآورد پارامترهای مدل، اطلاعات پایایی مختلفی از محصول در اختیار ما قرار می گیرد که می توان این اطلاعات را به شکل زیر دسته بندی نمود:

- زمان مورد نیاز برای انجام آزمایش.
- نرخ شکست لحظه ای که نشان دهنده رخداد تعداد شکست ها در واحد زمان است.
- میانگین طول عمر که اندازه ای از متوسط زمان عملیات تا رسیدن به شکست می باشد.

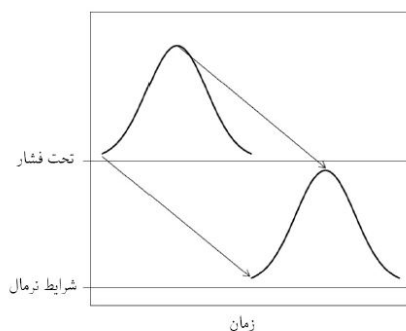
جدول ۱.۱: مولفه های توزیع طول عمر

توزیع های طول عمر	پارامترها	مولفه طول عمر
وایبل	(α, β)	پارامتر مقیاس
نمایی	λ	میانگین
لگ نرمال	(μ, σ^2)	میان یا مد

۳.۴.۱ مدل های آزمون طول عمر تسریع یافته

مفهوم آزمون های AL به طور شهودی یک مفهوم ساده است و آن به دست آوردن مشاهدات سریع تر از حالت استفاده در شرایط معمول است. اما باید تأکید کنیم مکانیزم شکست واحدها در شرایط غیرمعمول باید کاملاً مشابه با مکانیزم شکست در شرایط معمول باشد. تنها تفاوت این است که آزمایش طول عمر سریع تر انجام می شود. این امر که زمان شکست سریع تر اتفاق می افتد، در واقع نوعی انتقال مقیاس زمان است. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم زمان شکست واحد مورد آزمایش در شرایط نرمال t_N است و زمان شکست آن در شرایط با فشار بیشتر t_S است، آن گاه تابع تبدیلی وجود دارد که t_S را به t_N تبدیل می کند (شکل ۴.۱). بنابراین اگر توزیع طول عمر را در شرایط با فشار بالا بدانیم، با استفاده از تبدیل موجود می توانیم توزیع طول عمر را در شرایط معمول به دست آوریم. این امر باعث می شود اگر برآورد پارامترهای توزیع را در شرایط با فشار بالا داشته باشیم، بتوانیم با تبدیل مربوطه برآورد پارامترها را در شرایط معمول به دست آوریم. در این بخش ساده ترین نوع تبدیل که تبدیل خطی است را مورد نظر قرار داده و بررسی می کنیم که برای توزیع های مختلف رابطه بین کمیت های مختلف و برآورد پارامترها در شرایط معمول و شرایط با فشار غیرمعمول چگونه است. قبل از آن تعریف دقیق تر تبدیل خطی را بیان

^{۱۴}Maximum likelihood estimate



شکل ۴.۱: توزیع طول عمر در شرایط معمول و تنش

می‌کنیم. اگر زمان شکست واحد در هر لحظه از زمان در شرایط معمول ضریبی (ثابت) از زمان شکست واحد در شرایط غیرمعمول باشد، گوییم تبدیل خطی است. به عبارت دیگر در تبدیل خطی داریم

$$t_N = a \times t_S$$

که در آن a یک ضریب ثابت است و به آن عامل تسریع^{۱۵} می‌گویند. فرض کنید F_N و f_N به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی احتمال T_N (زمان شکست در شرایط معمولی) و F_S و f_S به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی احتمال T_S (زمان شکست در شرایط فشار) باشند. با توجه به رابطه خطی، $T_N = a \times T_S$ ، می‌توان رابطه بین این کمیت‌ها را تعیین کرد. برای مثال

$$\begin{aligned} F_N(t) &= P(T_N < t) \\ &= P(a \times T_S < t) \\ &= P(T_S < \frac{t}{a}) \\ &= F_S(\frac{t}{a}). \end{aligned}$$

جدول ۲.۱ به‌طور خلاصه روابط بین توابع فوق را ارائه می‌کند.

جدول ۲.۱: روابط بین توابع در شرایط معمول و غیرمعمول

$T_N = a \times T_S$	۱- زمان شکست
$F_N(t) = F_S(\frac{t}{a})$	۲- تابع توزیع
$f_N(t) = \frac{1}{a} f_S(\frac{t}{a})$	۳- تابع چگالی احتمال

جدول ۲.۱ بیان می‌کند که رابطه ساختاری بین توابع توزیع و توابع چگالی در شرایط معمول و غیرمعمول واحدهای مورد آزمایش روابط کاملاً کلی هستند و به نوع توزیع مورد بررسی بستگی ندارند.

^{۱۵}Accelerating factor

در ادامه، حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که توزیع مورد استفاده در شرایط با فشار بالا دارای توزیع وایبل باشد. فرض کنید طول عمر واحدهای آزمایشی در شرایط فشار دارای تابع توزیع احتمال زیر باشد:

$$F_S(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{\beta_S}} \quad t > 0.$$

آن گاه

$$\begin{aligned} F_N(t) &= F_S\left(\frac{t}{a}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha_S a}\right)^{\beta_S}} \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha_N}\right)^{\beta}} \end{aligned}$$

که در آن $\beta = \beta_S = \beta_N$ و $\alpha_N = a\alpha_S$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر توزیع طول عمر در شرایط طول عمر تسریع‌یافته وایبل باشد، آن گاه توزیع طول عمر در شرایط معمول نیز وایبل است. به راحتی می‌توان ملاحظه کرد که اگر واحد تحت بررسی با توزیع وایبل در فشارهای متفاوت قرار گیرد و تبدیل تسریع‌کننده خطی باشد، آن گاه در هر لحظه از فشار توزیع طول عمر وایبل باقی می‌ماند و تنها تغییراتی که ممکن است رخ دهد پارامتر توزیع است. اما چه تغییراتی در پارامترهای توزیع اتفاق می‌افتند؟ با توجه به نتایج ملاحظه می‌کنیم که پارامتر مقیاس در محیط غیرمعمول برابر است با پارامتر مقیاس در شرایط معمول تقسیم بر عامل تسریع. اما نکته جالب این است که پارامتر شکل توزیع در هر شرایطی یکسان است و دچار تغییر نمی‌شود. این نتیجه می‌تواند اهمیت زیادی در بحث آزمون‌های تسریع‌یافته داشته باشد. در غیر این صورت، امکان وقوع دو حالت وجود دارد: اول این که رابطه خطی درست انتخاب نشده است و احتمالاً رابطه غیرخطی بین زمان‌های شکست تحت شرایط تسریع‌یافته و شرایط معمول وجود دارد و دیگر این که ممکن است مدل وایبل انتخاب مناسبی برای داده‌ها نباشد.

۴.۴.۱ مفاهیم و کاربرد آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته

همگام با پیشرفت تکنولوژی در نیم قرن گذشته، روزانه محصولات با کیفیت‌تری نسبت به گذشته روانه بازار می‌شوند. در بیشتر موارد انجام تحلیل بقاء موجب صرف وقت و هزینه فراوان می‌شود. در مواردی، حتی دستیابی به متوسط طول عمر یک محصول تحت شرایط عادی غیرممکن است. برای مثال، فرض کنید می‌خواهیم متوسط طول عمر نوعی بتن که در سدها و پل‌های معلق به کار می‌رود را به دست آوریم. واضح است در این شرایط محقق باید حداقل ۱۰۰ سال زمان صرف کند که عملاً غیرممکن است. لذا آزمون‌های طول عمر در قابلیت اعتماد و تحلیل بقاء از اهمیت خاصی برخوردار هستند.

آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته این اجازه را به محقق می‌دهد که نتایج مطلوب خود را بسیار سریع‌تر از شرایط عادی به دست آورد. در یک آزمون شتاب داده‌شده، واحدهای آزمایشی تحت فشار یک یا چند عامل فشار قرار می‌گیرند. به‌طور کلی می‌توان هر عاملی را که هم بر طول عمر واحد آزمایشی اثر داشته و هم تحت کنترل محقق باشد، به‌عنوان یک عامل فشار در نظر گرفت. از جمله عوامل فشاری که ممکن است در یک آزمون طول عمر تسریع‌یافته استفاده شوند، می‌توان به دما، بار، ولتاژ و لرزش اشاره نمود. از جمله کاربردهای مهم آزمون‌های تسریع‌یافته طول عمر، تعیین بهترین دوره ضمانت محصولات تولیدی می‌باشد که از دو دیدگاه حائز اهمیت می‌باشد:

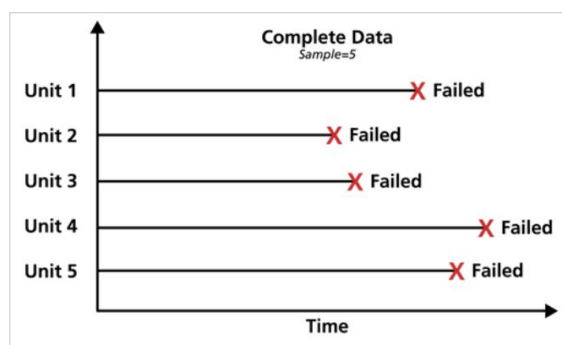
۱. حداکثرسازی رضایت مشتری

۲. حداقل‌سازی هزینه‌های سرسام‌آور ضمانت

۵.۱ روش‌های جمع‌آوری داده‌ها

۱.۵.۱ داده‌های کامل

داده‌های کامل^{۱۶} بدان معناست که ارزش هر واحد نمونه، مشاهده یا شناخته‌شده باشد. برای مثال اگر بخواهیم میانگین نمره آزمونی برای یک نمونه ده تایی از دانش‌آموزان را محاسبه کنیم، به اطلاعات کاملی شامل دانستن نمره هر یک از دانش‌آموزان احتیاج خواهیم داشت. به همین ترتیب، در مورد تحلیل داده‌های عمر، داده‌های کامل مجموعه‌ای از زمان شکست همه واحدهای نمونه تشکیل خواهد شد. برای مثال اگر پنج واحد آزمون‌شده و همه آن‌ها شکست خورده باشند (زمان شکست هریک ثبت شده باشد)، پس اطلاعات کامل، به عنوان زمان هر شکست در نمونه مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. شکل ۵.۱ نمونه‌ای از داده‌های کامل است.



شکل ۵.۱: نمایش داده‌های کامل

۲.۵.۱ سانسور

تحلیل بقاء از نظر علم آمار شامل فنون مختلف آماری در تحلیل متغیرهای نوعاً نامنفی، زمان خرابی یک مؤلفه فیزیکی (مکانیکی یا الکتریکی) یا زمان مرگ یک واحد زنده (سلول، بیمار) می‌باشد. ممکن است این متغیر زمان یادگیری یک مهارت باشد، یا حتی امکان دارد به زمان هیچ ارتباطی نداشته باشد. برای مثال، این متغیر می‌تواند مبلغ پرداختی یک شرکت بیمه در وضعیتی خاص باشد. در برخی موارد بیمار بهبود یافته و مبلغ کل پرداختی بیمه او معین است. در موارد دیگر، ممکن است بیماری همچنان ادامه داشته باشد و تنها مبلغ پرداختی تا آن زمان معلوم باشد. آنچه تحلیل بقاء را از دیگر مباحث آماری جدا می‌کند، عمل سانسور کردن است، به طور کلی یک مشاهده سانسور شده فقط شامل قسمتی

^{۱۶} Complete data

از اطلاعات مربوط به متغیر تصادفی مورد نظر است. در آزمون‌های طول عمر، آزمایش‌های کلینیکی، تحقیقات زیست‌شناسی، تحلیل بقاء و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار، با نمونه‌هایی مواجه هستیم که در قسمت‌هایی از مقادیر ممکن متغیر تصادفی مورد مطالعه، محدود شده یا همه مشاهدات نمونه ثبت نشده‌اند، یا همه واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند. این محدودیت ممکن است به صورت اختیاری توسط آمارگر اعمال شود یا ماهیت آزمایش طوری باشد که خود به خود محدودیتی را در مشاهدات به وجود آورد. بعضی از محدودیت‌ها عبارتند از:

۱. هزینه بر بودن آزمایش.
 ۲. عدم دسترسی به همه واحدها یا مایوس شدن از نتیجه دادن همه واحدها.
 ۳. اشکالات فنی.
 ۴. طولانی شدن مدت آزمایش.
 ۵. فرصت کم برای اعلام نتایج.
- این محدودیت‌های به وجود آمده در نمونه را سانسور گویند. هر چند با سانسور کردن مشاهدات، مقداری از اطلاعات موجود را از دست می‌دهیم، با این وجود گاهی اوقات به دلایلی که بیان شد مایل یا مجبور به سانسور کردن مشاهدات هستیم. برخی از انواع سانسورها عبارتند از

۱. سانسور نوع یک
 ۲. سانسور نوع دو
 ۳. سانسور ترکیبی^{۱۷}
 ۴. سانسور فزاینده نوع یک^{۱۸}
 ۵. سانسور فزاینده نوع دو^{۱۹}
- در این بخش، سانسور نوع یک و سانسور نوع دو که در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند را به تفصیل توضیح می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد انواع سانسورها و کاربرد آن‌ها به کوهن^{۲۰} (۱۹۹۱)، بالاکریشان و کوهن (۱۹۹۱)، لاولس^{۲۱} (۱۹۸۲) و همچنین نلسن^{۲۲} (۲۰۰۴) مراجعه نمایید.

^{۱۷}Hybrid censored

^{۱۸}progressively Type-I censored

^{۱۹}progressively Type-II censored

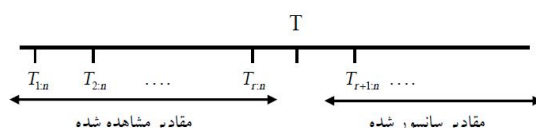
^{۲۰}CHohen

^{۲۱}Lawless

^{۲۲}Nelson

سانسور نوع اول

فرض کنید n آزمودنی را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می‌کنیم. تا زمان ثابت T منتظر می‌مانیم و سپس آزمایش را خاتمه می‌دهیم. در این صورت نتیجه آزمایش این است که r محصول $r = 0, 1, \dots, n$ قبل از زمان T از کار افتاده‌اند و زمان دقیق شکست آن‌ها معلوم است و تنها اطلاعاتی که در مورد $n - r$ محصول باقیمانده داریم، آن است که طول عمرشان از T بیشتر است و اصطلاحاً سانسور شده‌اند (در اینجا T ثابت و r متغیر تصادفی است). شکل ۶.۱ این نوع سانسور را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۱: نمایش سانسور نوع اول

اگر مشاهدات به دست آمده از آزمایش انجام‌شده بر اساس سانسور نوع اول را با $t_{1:n}, t_{2:n}, \dots, t_{n:n}$ نشان دهیم و طول عمر واحدها دارای تابع چگالی احتمال $f(t; \theta)$ و تابع توزیع تجمعی $F(t; \theta)$ باشند، آن گاه تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد شد:

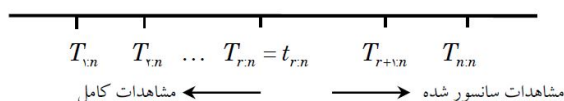
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}; \theta) [1 - F(t; \theta)]^{n-r}.$$

توجه داریم که متغیر تصادفی r در سانسور نوع اول دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(n, F(t; \theta))$ است.

مثال ۱.۵.۱. یک مجموعه شامل n قطعه الکترونیکی، زمانی که در حالت روشن قرار دارند را در نظر بگیرید. آزمایش تا ۲۰ روز ادامه پیدا می‌کند. در طی آزمایش مدت زمان تا خرابی هر قطعه یادداشت می‌شود. بعد از ۲۰ روز (زمان اتمام آزمایش) برای قطعاتی که تا این زمان سالم هستند، فقط می‌دانیم که زمان لازم تا خرابی آن‌ها بیشتر از ۲۰ روز است. این مثال، نمونه‌ای از داده‌های سانسور نوع یک است که نقطه سانسور آن ۲۰ روز است.

سانسور نوع دوم

اگر در آزمایشی با n واحد بخواهیم دقیقاً m ($m < n$) شکست را مشاهده کنیم و بعد از مشاهده m امین شکست آزمایش را متوقف کنیم، در این صورت طول عمر $(n - m)$ واحد باقیمانده سانسور می‌شوند. به این روش از سانسور، سانسور نوع دو یک مرحله‌ای از راست گویند. در این روش از سانسور در حقیقت زمان لازم برای رسیدن به m امین شکست، متغیر تصادفی مورد مطالعه است. این روش از سانسور می‌تواند به سانسور نوع دوی دو مرحله‌ای (راست و چپ) تعمیم داده شود. این حالت زمانی رخ می‌دهد که زمان‌های r شکست اول ثبت نشده باشند و مشاهدات از زمان $(r + 1)$ امین شکست شروع شوند و در زمان مشاهده m امین شکست، آزمایش به اتمام می‌رسد (در این جا r ثابت و $t_{r:n}$ مقدار یک متغیر تصادفی است). شکل ۷.۱ این نوع سانسور را نشان می‌دهد.



شکل ۷.۱: نمایش سانسور نوع دوم

با این فرض که طول عمر واحدها دارای تابع چگالی احتمال $f(t; \theta)$ و تابع توزیع تجمعی $F(t; \theta)$ باشند، آن گاه تابع درستنمایی در این حالت به صورت زیر خواهد شد:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}; \theta) [1 - F(t; \theta)]^{n-r}.$$

مثال ۲.۵.۱. فرض کنید هدف برآورد میانگین طول عمر یک قطعه تولیدشده باشد. آزمایش استفاده از قطعه‌های تولیدشده را تا زمان خرابی قطعه ۵۰ام ادامه می‌دهیم. بعد از این که ۵۰ قطعه خراب شد، آزمایش را متوقف می‌کنیم. در این جا زمان خرابی سایر قطعات مشخص نیست. در این سانسور تعداد واحدهایی که خراب می‌شوند از قبل مشخص و برابر مقدار ثابتی است که توسط محقق تعیین می‌شود، ولی زمان اتمام آزمایش یک متغیر تصادفی است. برای جزئیات بیشتر در مورد سانسور نوع دو، می‌توان به کوهن^{۲۳} (۱۹۹۱)، بالاکریشن^{۲۴} و کوهن (۱۹۹۱)، بین و انگلهارت^{۲۵} (۱۹۹۱) و همچنین هارتر^{۲۶} و بالاکریشن (۱۹۹۶) مراجعه نمود.

۳.۵.۱ تاریخچه مختصری از آزمون‌های طول عمر تسریع یافته

آزمون‌های طول عمر تسریع یافته توسط نویسندگان زیادی مطالعه شده‌اند. نلسون (۱۹۸۰) برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم را تحت قانون توان معکوس با استفاده از داده‌های زمان شکست عایق‌بندی الکتریکی برای پارامترهای توزیع وایبل در آزمون فشار-مرحله‌ای برآورد نموده است. میلر^{۲۷} و نلسون (۱۹۸۳) طرح آزمون بهینه فشار-مرحله‌ای ساده را بر اساس می نیم‌سازی واریانس مجانی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم مورد مطالعه قرار داده‌اند. شیکد و سینگپوروالا^{۲۸} (۱۹۸۳) مدلی بر اساس مدل‌های ضربه‌ای و فرایند فرسایش ارائه دادند و برای توزیع طول عمر در شرایط نرمال برآوردهای ناپارامتری را به دست آورده‌اند. بای^{۲۹} و همکاران (۱۹۸۹) آزمون‌های تسریع یافته طول عمر فشار-مرحله‌ای ساده را در زمان سانسور از پیش تعیین شده‌ای بهینه‌سازی نموده‌اند. نلسون (۱۹۹۰) منبع جامعی از قضایا و مثال‌ها برای آزمون AL فراهم نموده است. بای و کیم^{۳۰} (۱۹۹۳) طرح فشار-مرحله‌ای برای توزیع

^{۲۳}CHohen

^{۲۴}Balakrishnan

^{۲۵}Bain and Enghardt

^{۲۶}Harter

^{۲۷}Miller

^{۲۸}Sheked and Singpurwalla

^{۲۹}Bai

^{۳۰}Bai and Kim

وایبل مورد بررسی قرار دادند. زیانگ^{۳۱} (۱۹۹۸) مدل فشار - مرحله‌ای را تحت سانسور نوع دو در توزیع نمایی مورد مطالعه قرار داد. بالاکریشان و همکاران (۲۰۰۷) مدل فشار-مرحله‌ای ساده را تحت سانسور نوع دو برای داده‌های طول عمر نمایی با مدل لگ-خطی بررسی کردند. بالاکریشان^{۳۲} و همکاران (۲۰۰۹) مسئله مشابهی را تحت سانسور نوع یک بررسی نمودند. کاتری^{۳۳} و بالاکریشان (۲۰۰۸) طرح فشار-مرحله‌ای ساده را برای توزیع وایبل مطالعه نمودند. آن‌ها چون نتوانستند صورت بسته‌ای برای برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم به دست آورند، با استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون در یک مثال مقدار عددی آن‌ها را محاسبه کردند. گوانا^{۳۴} و همکاران (۲۰۰۴) مسئله تعیین نقطه بهینه در آزمون‌های فشار - مرحله‌ای را تحت سانسور نوع یک بررسی نمودند. فرد و لی^{۳۵} (۲۰۰۹) طرح بهینه در آزمون‌های فشار - مرحله‌ای ساده با زمان‌های خرابی که از توزیع وایبل تحت سانسور نوع یک به دست آمده‌اند، مورد مطالعه قرار دادند. بالاکریشان و هان^{۳۶} (۲۰۰۹) مسئله بهینگی را در آزمون‌های فشار - مرحله‌ای با k سطح فشار برای داده‌هایی از توزیع نمایی تحت سانسور فزاینده نوع یک بررسی نمودند. برزویی (۱۳۸۷) استنباط آماری تحت آزمون‌های فشار - مرحله‌ای و کاربرد آن در مباحث قابلیت اعتماد و عارفی (۱۳۹۱) آزمون‌های فشار - مرحله‌ای را بر اساس داده‌های طول عمر گسسته مورد مطالعه قرار دادند. وانگ و یوو^{۳۷} (۲۰۰۹) طرحی را در آزمون‌های فشار - مرحله‌ای ساده تحت سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نمایی بررسی کردند. لینگ^{۳۸} و همکاران (۲۰۱۱) نقطه بهینه تغییر سطح فشار در آزمون‌های فشار - مرحله‌ای ساده را تحت سانسور ترکیبی نوع یک به دست آوردند. کاتری و همکاران (۲۰۱۱) این مسئله را برای سانسور نوع دو تحقیق نمودند.

۶.۱ روش درست‌نمایی ماکسیمم

در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد روش درست‌نمایی ماکسیمم (ML) و استنباط آماری بر مبنای روش ML نقش محوری ایفا می‌کند. فرض کنید توزیع یک متغیر طول عمر T دارای تابع چگای احتمال $f(t; \theta)$ باشد که در آن θ یک بردار k مجهولی است. فرض کنید یک نمونه تصادفی از $f(t; \theta)$ استخراج کنیم و نمونه منتج به مشاهدات مستقل $t_1, t_2, \dots, t_n$ شود (t_i ها زمان دقیق شکست را نشان می‌دهند). طبق تعریف، تابع درست‌نمایی که با $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\theta; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta). \quad (1.1)$$

لازم به ذکر است که

^{۳۱}Xiong

^{۳۲}Balarishnan

^{۳۳}Kateri

^{۳۴}Gouno

^{۳۵}Fard and Li

^{۳۶}Han

^{۳۷}Wang and Yu

^{۳۸}Ling

(الف) تابع درستنمایی $L(\theta)$ لزوماً نسبت به θ مشتق پذیر نیست.

(ب) تابع درستنمایی $L(\theta)$ لزوماً یک تابع چگالی احتمال نیست.

توجه داشته باشید که پس از مشاهده مقادیر t_i ، تابع درستنمایی تنها تابعی از پارامتر θ است. از نقطه نظر محاسباتی، معمولاً بهتر است از لگاریتم تابع درستنمایی استفاده کنیم. در این صورت تساوی (۱.۱) به تساوی زیر تبدیل می‌شود،

$$\ell(\theta; t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \log f(t_i; \theta)$$

که در آن $\ell(\theta) = \log L(\theta)$ لگ تابع درستنمایی است. بنا به تعریف، برآوردگر درستنمایی ماکسیم (MLE) پارامتر θ از حل معادلات زیر به دست می‌آید که به آن معادله درستنمایی می‌گویند:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ell(\theta) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

در اغلب موارد به‌ویژه در آزمون‌های طول عمر، برآورد $\hat{\theta}$ به صورت تحلیلی قابل حصول نیست و باید آن‌ها را با استفاده از روش‌های عددی محاسبه کرد. بسیاری از نرم‌افزارهای موجود توانایی حل معادلات درستنمایی به روش عددی را دارند. برآوردگر ML نه تنها از پشتوانه شهودی بسیار قوی برخوردار است، بلکه ویژگی‌های منحصر به فرد دیگری نیز دارد که آن‌ها را از دیگر برآوردگرها متمایز می‌کند. از جمله ویژگی‌های برجسته MLE عبارتست از

۱. روش درستنمایی ماکسیم پایاست. بدین معنی که اگر علاقه‌مند باشیم MLE تابعی مانند $\psi(\theta)$ را بیابیم، آن گاه $\hat{\psi} = \psi(\hat{\theta})$ MLE $\psi(\theta)$ است که در آن $\hat{\theta}$ برآورد درستنمایی ماکسیم θ است.

۲. تحت بعضی شرایط نظم، برای حجم نمونه‌های بزرگ، توزیع برآوردگرهای ML نرمال است.

۳. تحت شرایط نظم، برآوردگرهای MLE به‌طور مجانی سازگار هستند، بدین معنی که برای حجم نمونه‌های بزرگ MLE تقریباً نااریب و دارای کمترین واریانس می‌باشند.

۴. روش درستنمایی را می‌توان برای شیوه‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها، مانند انواع روش‌های سانسور به کار برد. لذا برآورد MLE را می‌توان براساس مکانیزم‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها به‌دست آورد.

ساختار تابع درستنمایی داده‌های سانسور شده در کتاب‌ها و مقالات زیادی مورد بحث قرار گرفته‌اند. در سانسور نوع یک و نوع دو، n واحد آزمودنی را در لحظه $t = 0$ وارد آزمون می‌کنیم و آزمون را تا لحظه t ادامه می‌دهیم و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. فرض کنید $f(x)$ و $F(x)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی طول عمر انتخاب شده با پارامتر θ و تعداد $(n - r)$ واحد بدون شکست در آزمایش باقی‌مانده باشند. آن گاه تابع درستنمایی آن‌ها را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\prod_{i=1}^r f(x_{(i)}) \right) (1 - F(x_T))^{n-r}. \quad (2.1)$$

توجه کنید که در سانسور نوع یک $x_T = t$ و در سانسور نوع دو $x_T = x(r)$ است.

۱.۶.۱ فاصله اطمینان

اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی $f(\cdot; \theta)$ باشد و T_1 و T_2 دو آماره باشند به‌طوری‌که $T_1 \leq T_2$ و $P_\theta [T_1 < \theta < T_2] = \gamma$ که γ به θ بستگی نداشته و برابر با $(1 - \alpha)$ باشد، در این صورت بازه تصادفی $[T_1, T_2]$ را یک فاصله اطمینان γ درصدی برای θ و γ را ضریب اطمینان می‌نامیم که به‌صورت دلخواه توسط پژوهشگر انتخاب می‌شود. اغلب مقادیر ۵٪ و ۱٪ که متناظر با سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ درصد می‌باشند، برای α در نظر گرفته می‌شود.

لازم به ذکر است که تعداد کمی فاصله اطمینان دقیق شناخته شده است. بنابراین، در اکثر مواقع، نیازمند جستجوی راهی برای دستیابی به فواصل اطمینان تقریبی با دقتی در سطح قابل قبول هستیم. یک راه برای رسیدن به فواصل اطمینان تقریبی، فاصله اطمینان مجانی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۶.۱. فاصله اطمینان مجانی: بازه $[T_1, T_2]$ را فاصله اطمینان مجانی گویند، هرگاه گزاره

$$P [T_1 < \theta < T_2] = \gamma$$

به صورت حدی، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، درست باشد.

۲.۶.۱ شرایط نظم

فرض کنید X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار باشد که مطلقاً پیوسته و دارای تابع توزیع تجمعی

$$F_\theta \in \Omega_\theta = F(x; \theta) : \theta \in \Theta$$

باشد. در این پایان‌نامه خانواده توزیع‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دارای شرایط نظم به شرح زیر باشند (احمد پارسیان، ۱۳۸۶):

(۱) Θ یک زیربازه از مجموعه اعداد حقیقی است ($\Theta \subseteq R$) و دامنه تغییرات X به θ بستگی ندارد.

(۲) مشتق تابع چگالی نسبت به θ وجود دارد. به عبارت دیگر $\frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta)$ معنی‌دار است. در نتیجه $\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta)$ برای هر $\theta \in \Theta$ وجود دارد.

(۳) اگر $A \subset \chi$ یک مجموعه اندازه‌پذیر نسبت به m باشد، آن گاه

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_A f(x; \theta) dx = \int_A \frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta) dx.$$

(۴) مشتق دوم $F_\theta \in \Omega_\theta$ نسبت به x وجود داشته باشد و رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} F(x; \theta) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} F(x; \theta).$$

(۵) برای هر برآوردگر T پارامتر θ ، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int t(x) f(x; \theta) dx = \int \frac{\partial}{\partial \theta} t(x) f(x; \theta) dx.$$

۳.۶.۱ اطلاع فیشر

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x; \theta)$ باشد. در این صورت تحت شرایط نظم، میزان تغییر نسبی چگالی، زمانی که θ به $\theta + \Delta\theta$ تغییر می‌کند، عبارتست از:

$$\frac{f(x; \theta + \Delta\theta) - f(x; \theta)}{\Delta\theta f(x; \theta)}.$$

حد کسر فوق وقتی که $\Delta\theta$ به سمت صفر میل می‌کند را با $S(x; \theta)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\begin{aligned} S(x; \theta) &= \frac{\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}}{f(x; \theta)} = \frac{f'_\theta(x; \theta)}{f(x; \theta)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

که در آن $f'_\theta(x; \theta)$ مشتق تابع $f(x; \theta)$ نسبت به θ را نشان می‌دهد. با تبدیل x به X ، متغیر تصادفی

$$S(X; \theta) = \frac{f'_\theta(X; \theta)}{f(X; \theta)}$$

به دست می‌آید که به متغیر نمره^{۳۹} (یا امتیاز) معروف است. به سادگی ثابت می‌شود که تحت شرایط نظم $E[S(X; \theta)] = 0$ و در نتیجه

$$Var[S(X; \theta)] = E^2[S(X; \theta)] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta)\right)^2\right] > 0.$$

هر اندازه $Var[S(X; \theta)]$ بیشتر باشد، متوسط توان دوم تغییر نسبی چگالی X در θ بیشتر می‌باشد. از این رو $Var[S(X; \theta)]$ را مقدار اطلاع درباره پارامتر θ در متغیر تصادفی X می‌نامند و آن را با $I_X(\theta)$ نشان می‌دهند. این نوع اطلاع که به اطلاع فیشر^{۴۰} مشهور است، برای اولین بار توسط فیشر^{۴۱} (۱۹۲۵) آماردان انگلیسی، معرفی گردید. اینک اطلاع فیشر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x; \theta)$ باشد. تحت شرایط نظم، میزان اطلاع فیشر نهفته در متغیر تصادفی X در خصوص پارامتر θ را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$I_X(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X; \theta)\right].$$

۷.۱ خودگردان سازی

در آمار، خودگردان سازی^{۴۲} یک روش محاسباتی برای نسبت دادن معیار دقت به برآوردگرهای حاصل از نمونه است. در روش خیلی ساده، می‌توان تقریباً توزیع هر آماره‌ای از داده‌های نمونه را تقریب زد.

^{۳۹}Score

^{۴۰}Fisher information

^{۴۱}Fisher

^{۴۲}Bootstrapping

به‌طور عمومی این روش از روش‌های بازنمونه‌گیری^{۴۳} به حساب می‌آید. خودگردان‌سازی در واقع تخمین ویژگی‌های (مثل واریانس) یک برآوردگر با استفاده از اندازه‌گیری همین ویژگی‌ها در یک توزیع تقریبی از کل داده‌های نمونه است. یک انتخاب استاندارد برای توزیع تقریبی، توزیع تجربی داده‌های مشاهده‌شده است. در حالتی که بتوان فرض کرد مجموعه‌ای از مشاهده‌ها از جمعیتی مستقل و به‌طور مساوی توزیع شده می‌باشد، خودگردان‌سازی می‌تواند با ساخت تعدادی بازنمونه پیاده‌سازی شود، که هر کدام از این بازنمونه‌ها در واقع نمونه‌های تصادفی با جایگذاری از مجموعه داده‌های اصلی هستند. به این روش خودگردان‌سازی ناپارامتری نیز می‌گویند.

کاربردهای روش خودگردان‌سازی

ادر^{۴۴} و همکارانش در سال (۲۰۰۸) روش خودگردان‌سازی را برای به کارگیری در موارد زیر توصیه کردند:

- وقتی که توزیع آماره مورد نظر ناشناخته یا پیچیده باشد.
- وقتی که اندازه نمونه برای یک استنباط آماری سراسر است، ناکافی است.

محاسبه فاصله‌های اطمینان به روش خودگردان‌سازی

راه‌های زیادی برای استفاده از توزیع خودگردان‌سازی در محاسبه فاصله اطمینان برای آماره‌های شبیه‌سازی شده وجود دارند و هیچ روشی وجود ندارد که برای تمام مسائل بهترین جواب را بدهد. این روش‌ها شامل موارد زیر می‌باشند:

- فاصله اطمینان خودگردان‌سازی چندکی^{۴۵}
- فاصله اطمینان خودگردان‌سازی پایه^{۴۶}
- فاصله اطمینان خودگردان‌سازی استودنت‌شده^{۴۷}
- فاصله اطمینان خودگردان‌سازی BC_a

برای اطلاع از جزئیات نحوه محاسبه این فواصل اطمینان به کتاب افرون و تیب‌شیرانی^{۴۸} (۱۹۹۳) مراجعه کنید.

^{۴۳} Resampling

^{۴۴} Ader

^{۴۵} Quantile bootstrap

^{۴۶} Basic bootstrap

^{۴۷} Studentized

^{۴۸} Efron and Tibshirani

۸.۱ توابع قابلیت اعتماد

توابع متفاوتی در قابلیت اعتماد^{۴۹} مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این بخش با تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر^{۵۰}، فقط در حالت پیوسته، آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۸.۱. تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ که $0 \leq a \leq b \leq \infty$ ، مطلقاً پیوسته می‌باشد هرگاه برای هر مقدار مثبت ϵ ، $\delta > 0$ ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای زیر دنباله‌های مجزای

$$[x_k, y_k] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

که در شرط

$$\sum_{k=1}^n |y_k - x_k| < \delta$$

صدق می‌کنند، داشته باشیم

$$\sum_{k=1}^n |g(y_k) - g(x_k)| < \epsilon.$$

۱.۸.۱ تابع قابلیت اعتماد

اولین تعریفی که در قابلیت اعتماد با آن مواجه می‌شویم، تابع قابلیت اعتماد است. بسیاری از توابعی که در ادامه معرفی می‌گردند را می‌توان بر اساس این تابع بیان نمود. فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته نامنفی X طول عمر قطعه‌ای باشد که دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ و تابع چگالی $f(\cdot)$ باشد که در این صورت می‌توان نوشت

$$F(x) = \begin{cases} P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt & \text{اگر } x \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

تعریف ۲.۸.۱. برای متغیر تصادفی پیوسته نامنفی X تابع نامنفی S را که در آن

$$R(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(t)dt \quad (4.1)$$

تابع قابلیت اعتماد (بقاء) گوئیم. اگر تابع $F_X(\cdot)$ مطلقاً پیوسته باشد، آن گاه تابع چگالی متغیر تصادفی X وجود دارد و $f_X(x) = -S'_X(x)$. در واقع $S(x)$ احتمال عدم وقوع خرابی در بازه $(0, x]$ را نشان می‌دهد. همانند تابع توزیع می‌توان خواص چهارگانه تابع قابلیت اعتماد متغیر تصادفی X را به صورت زیر بیان نمود:

$$0 \leq R(x) \leq 1; \quad \forall x \geq 0 \quad 1-$$

$$R(0) = 1, R(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0 \quad 2-$$

$$R(x) \text{ تابعی یکنوا و غیر صعودی است.} \quad 3-$$

$$R(x) \text{ تابعی از چپ پیوسته است.} \quad 4-$$

^{۴۹}Reliability

^{۵۰}Failure rate

۲.۸.۱ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر به دلیل تعبیر احتمالی که در تعریف آن نهفته است و در ادامه آن را بیان می‌کنیم، از اهمیت بالایی در قابلیت اعتماد برخوردار است. به عنوان مثال، استیفنسون^{۵۱} (۱۹۳۰) در علم بیمه از این تابع تحت عنوان شدت میرایی نام برده است. فاصله زمانی $(x, x + \Delta x]$ را در نظر می‌گیریم. احتمال خرابی قطعه در این فاصله به شرط این که در بازه $[0, x]$ خرابی اتفاق نیفتاده باشد، عبارتست از

$$\begin{aligned} P(x < X < x + \Delta x | X > x) &= \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{P(X > x)} \\ &= \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{S(x)}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

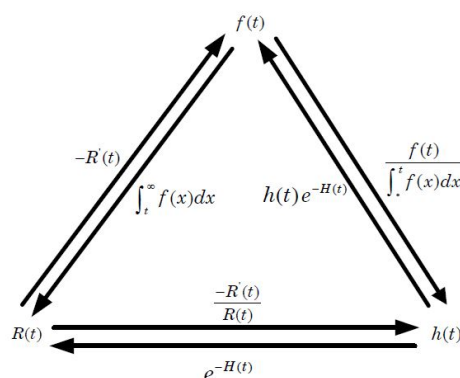
تعریف ۳.۸.۱. با تقسیم رابطه (۵.۱) بر فاصله زمانی به طول $\Delta x > 0$ وقتی که $\Delta x \rightarrow 0$ ، تابع نرخ خطر حاصل می‌شود و آن را با $h(x)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)}. \quad (6.1)$$

تابع مخاطره تجمعی با انتگرال گیری از رابطه (۶.۱) حاصل می‌شود. یعنی

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt = -\log S(x). \quad (7.1)$$

شکل ۸.۱ رابطه بین $f(t)$ ، $h(t)$ و $S(t)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۱: رابطه بین $f(t)$ ، $R(t)$ و $r(t)$

۹.۱ فرآیند هندسی

فرآیند هندسی^{۵۲} GP به عنوان یک فرآیند یکنواخت ساده توسط لام^{۵۳} در سال ۱۹۸۸ معرفی شد، که یک حالت کلی از فرآیند تجدید^{۵۴} می‌باشد.

^{۵۱} Stevenson

^{۵۲} Geometric Process

^{۵۳} Lam

^{۵۴} Renewal Process

تعریف ۱.۹.۱. X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و دارای تابع توزیع مشترک $F(\cdot)$. X_n زمان پیشامد n ام و $(n+1)$ ام می‌باشد. قرار می‌دهیم $S_0 = 0$ و $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. S_n زمان n امین پیشامد است. چرا که تعداد پیشامدها تا زمان t برابر بزرگترین مقدار n است که به ازای آن پیشامد n ام قبل از زمان t روی داده است. $N(t)$ تعداد پیشامدها تا لحظه t می‌باشد. فرآیند شمارشی $N(t)$ را در نظر بگیرید که در آن زمان‌های بین دو ورود، مستقل و هم توزیع و با توزیع دلخواه باشند، چنین فرآیند شمارشی را فرآیند تجدید گوییم.

تعریف ۲.۹.۱. یک دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ را یک فرآیند هندسی گوییم، اگر X_n ها از هم مستقل باشند و تابع توزیع آن‌ها برابر $F(\lambda^{n-1}x)$ برای $n = 1, 2, \dots$ باشد. از آن جایی که $\lambda > 0$ ، آن را نسبت فرآیند هندسی گویند.

اگر $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ یک فرآیند هندسی و $f(\cdot)$ یک تابع چگالی از X_1 باشد، آن گاه با استفاده از تعریف (۲.۹.۱) تابع چگالی احتمال X_n برابر است با

$$\lambda^{n-1} f(\lambda^{n-1}x). \quad (۸.۱)$$

تعریف ۳.۹.۱. یک فرآیند تصادفی $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ را یک فرآیند هندسی گویند، اگر مقدار حقیقی $\lambda > 0$ وجود داشته باشد طوری که $\{\lambda^{n-1}X_n\}$ تشکیل یک فرآیند تجدید بدهد.

تعریف (۲.۹.۱) و رابطه (۸.۱) مفهوم یکسانی دارند. علاوه بر این یک فرآیند هندسی، در صورتی که $0 < \lambda \leq 1$ باشد، به طور تصادفی افزایشی است و اگر $\lambda \geq 1$ باشد به طور تصادفی کاهشی است و زمانی که $\lambda = 1$ باشد یک فرآیند تجدید است. بنابراین GP یک فرآیند یکنواخت ساده است و یک تعمیمی از فرآیند تجدید است.

همچنین فرض کنید که $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ یک فرآیند هندسی با نسبت λ که $f(\cdot)$ و $F(\cdot)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع X_1 با $E(X_1) = \mu$ و $Var(X_1) = \sigma^2$ باشد، آن گاه

$$E(X_n) = \frac{\mu}{\lambda^{n-1}}$$

و

$$Var(X_n) = \frac{\sigma^2}{\lambda^{2(n-1)}}.$$

بنابراین λ ، μ و σ^2 سه پارامتر مهم در یک فرآیند هندسی است (برای جزئیات بیشتر به کتاب فرایند هندسی و کاربردهای آن نوشته لام (۱۹۸۸) مراجعه شود).

فصل ۲

مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با داده‌های کامل

در این فصل، مدل فرآیند هندسی را برای تحلیل آزمون طول عمر تسریع‌یافته، با داده‌های کامل و توزیع عمر وایبل تحت فشار ثابت، معرفی می‌کنیم. فرآیند هندسی یک فرایند یکنواخت ساده معرفی شده توسط لام^۱ (۱۹۸۸) است و برای گستره‌ای از مشکلات تعمیر و نگهداری در مهندسی استفاده می‌شود. ابتدا در بخش اول به معرفی توزیع وایبل و خواص آن خواهیم پرداخت. در بخش دوم مدل فرآیند هندسی تحت توزیع وایبل و خواص آن توضیح داده شده‌اند. در بخش سوم توجیه فرض هندسی در آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته بررسی نموده‌ایم. بخش چهارم، مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با استفاده از داده‌های کامل پرداخته و در بخش پنجم، روش‌های استنباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد پرداخته‌ایم.

^۱Lam

۱.۲ توزیع وایبل

توزیع وایبل از نام یک فیزیکدان اهل سوئد به نام والدی وایبل^۲ گرفته شده است که در سال ۱۹۳۹ از این توزیع برای مدل‌بندی توزیع استحکام شکست مواد استفاده کرد. همچنین او در سال‌های ۱۹۵۱ و ۱۹۶۷ از توزیع وایبل برای مدل‌بندی زمینه‌های متنوعی از کاربردها از جمله فرسودگی، شکنندگی و استحکام مواد استفاده کرد. یکی از مهم‌ترین دلایل شهرت این توزیع برای برازش داده‌ها این است که توزیع وایبل دارای اشکال گوناگونی است و این خاصیت موجب شده که از این توزیع برای برازش بسیاری از مجموعه داده‌ها استفاده شود. تابع چگالی و تابع توزیع وایبل به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و β است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} \exp \left\{ -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \right\} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

که $\alpha > 0$ پارامتر مقیاس و $\beta > 0$ پارامتر شکل است. تابع چگالی وایبل را با نماد $W(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهند. با استفاده از انتگرال زیر می‌توان تابع توزیع تجمعی $W(\alpha, \beta)$ را محاسبه کرد:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\alpha^\beta} y^{\beta-1} \exp \left\{ -\left(\frac{y}{\alpha}\right)^\beta \right\} dy.$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{x^\beta} \frac{1}{\alpha^\beta} \exp \left\{ -\left(\frac{u}{\alpha^\beta}\right) \right\} dy \\ &= 1 - \exp \left\{ -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

دو شکل ممکن است برای تابع چگالی اتفاق بیافتد که عبارتند از:

(الف) به‌طور یکنواخت نزولی باشد.

(ب) تک‌مدی باشد.

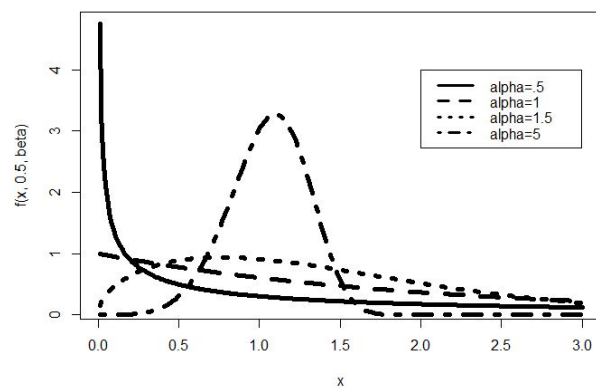
شکل تابع چگالی فقط به پارامتر شکل β وابسته است و مستقل از پارامتر مقیاس α است. نتایج عبارتند از

(الف) برای $\beta \leq 1$ شکل تابع چگالی به‌طور یکنواخت نزولی است.

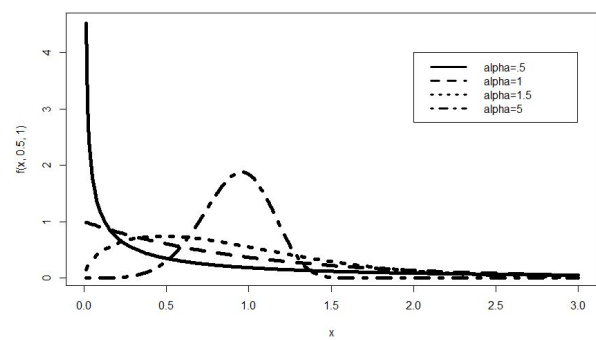
(ب) برای $\beta > 1$ چگالی این توزیع تک‌مدی در $t_{Mode} = \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ می‌باشد.

نمودار تابع چگالی وایبل با مقادیر مختلف α و β در شکل‌های ۱.۲، ۲.۲ و ۳.۲ رسم شده است. نمودار

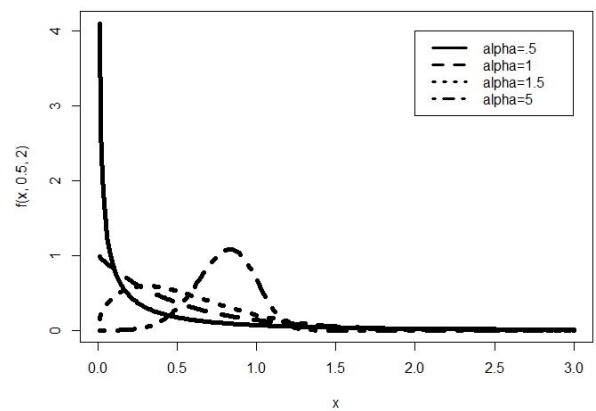
^۲Waloddi Weibull



شکل ۱.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 0.5$



شکل ۲.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 1$



شکل ۳.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 2$

تابع چگالی توزیع وایبل به ازای $\alpha = 0.5$ ، نزولی با شیب تند و به ازای $\alpha = 1$ نزولی با شیب کند می‌باشد. با در نظر گرفتن $\alpha = 1.5$ ، منحنی صعودی و سپس نزولی با شیب کندی است. با مقدار بزرگ $\alpha = 5$ نمودار وایبل دارای صعود و نزول زیاد است. در ضمن با افزایش β با مقدار $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1$ دارای شیب تندی می‌باشد در صورتی که به ازای α های بزرگتر از یک، میزان صعود و نزول کاهش می‌یابد.

در قابلیت اعتماد و آزمایش‌های طول عمر، توزیع‌هایی که دارای توزیع نرخ خطر با انعطاف‌پذیری بالا باشند، بیشتر مورد توجه محققین هستند. به همین دلیل، توزیع وایبل با تابع نرخ خطر صعودی، نزولی و ثابت دارای کاربردهای فراوانی به عنوان توزیع طول عمر در آزمایش‌های طول عمر می‌باشد. همان طور که بیان شد، تابع نرخ خطر این توزیع برای $\beta < 1$ نزولی، برای $\beta = 1$ ثابت و برای $\beta > 1$ صعودی است. کاربردهای این توزیع در قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت توسط مولفین زیادی از جمله وایبل (۱۹۵۱)، کا^۳ (۱۹۵۸) و (۱۹۵۹) و برتون^۴ (۱۹۶۴) مورد تایید قرار گرفته است.

معلوم بودن نرخ خرابی یافتن دلیل خرابی‌ها را در قابلیت اعتماد فراهم می‌کند؛ اگر در طول زمان نرخ خرابی‌ها کاهش یابد (تابع نرخ خطر نزولی)، نشان می‌دهد که احتمال خرابی واحدها در فاصله زمانی بعدی کمتر از خرابی آن‌ها در فاصله زمانی قبل با همین طول زمان است. یعنی واحدها با گذشت زمان رو به بهبود و کارآیی آن‌ها افزایش می‌یابد. برای مثال، می‌توان مرگ و میر کودکان را اسم برد که با گذشت زمان، مرگ و میر کاهش می‌یابد.

اگر در طول زمان نرخ خرابی‌ها افزایش یابد (تابع نرخ خطر صعودی)، نشان می‌دهد که احتمال خرابی واحدها در فاصله زمانی بعدی بیشتر از خرابی آن‌ها در فاصله زمانی قبل با همین طول زمان است. یعنی واحدها با گذشت زمان فرسوده یا خراب می‌شوند و کارآیی آن‌ها کاهش می‌یابد. مثلاً در قطعات دستگاه‌های مکانیکی، این قطعات با گذشت زمان مستهلک شده و کارآیی خود را از دست می‌دهند.

تابع نرخ خطر ثابت برای توزیع نمایی اتفاق می‌افتد که ویژگی بدون حافظه بودن این توزیع را منعکس می‌نماید و توزیع نمایی حالت خاص توزیع وایبل می‌باشد. این حالت برای قطعه‌های الکتریکی می‌تواند صادق باشد.

چند کاربرد توزیع وایبل

توزیع وایبل دارای کاربردهای زیادی است. از جمله می‌توان به زمینه‌های زیر اشاره کرد:

- تحلیل بقاء (دیوید و کلاین، ۲۰۰۵)^۵
- محاسبه انرژی باد (فاطمه رحیم زاده و افسانه استوار، ۱۳۷۷)
- زمان تحویل کالا در صنعت (میشرا و تریپ ثی، ۲۰۱۰)
- مهندسی قابلیت اعتماد و تحلیل شکست (مجید اسدی، ۱۳۸۷)

^۳Kao

^۴Berrettoni

^۵Survival analysis

- مدل‌بندی مطالبه مجدد بیمه در صنعت بیمه (ایچانگ، ۲۰۱۰)

۱.۱.۲ گشتاورهای توزیع وایبل

توزیع وایبل دارای تابع مولد گشتاور زیر است:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \Gamma(\frac{n}{\beta} + 1) \alpha^n}{n!}$$

که در آن $\Gamma(\beta)$ تابع گاما است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx.$$

امید ریاضی و واریانس توزیع وایبل

با مشتق‌گیری از تابع مولد گشتاور نسبت به t و قرار دادن $t = 0$ ، امید ریاضی و واریانس توزیع وایبل $W(\alpha, \beta)$ را می‌توان محاسبه نمود. به سادگی می‌توان نشان داد

$$E(X) = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

و

$$Var(X) = \alpha^2 \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left(\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right)^2.$$

۲.۱.۲ تابع قابلیت اعتماد و نرخ شکست توزیع وایبل

فرض کنید متغیر تصادفی $X > 0$ با توزیع وایبل دارای تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد. تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل طبق (۴.۱) به صورت زیر است:

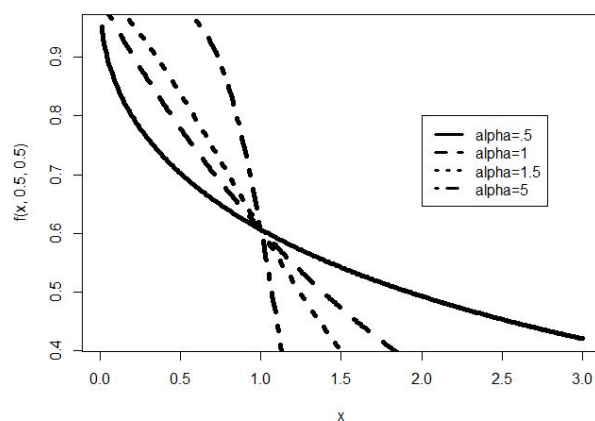
$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} \quad x \geq 0$$

و تابع نرخ شکست توزیع وایبل نیز طبق (۶.۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

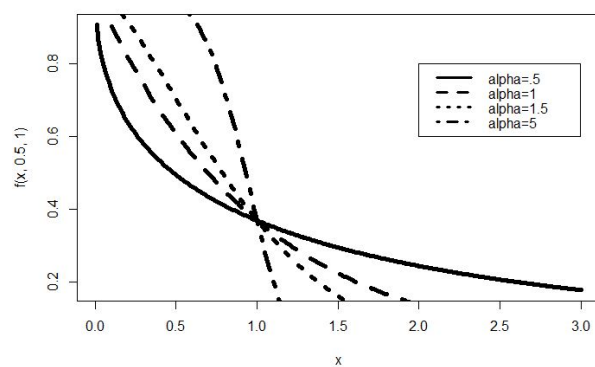
$$h(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}.$$

نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و β در شکل‌های ۴.۲ تا ۶.۲ رسم شده است.

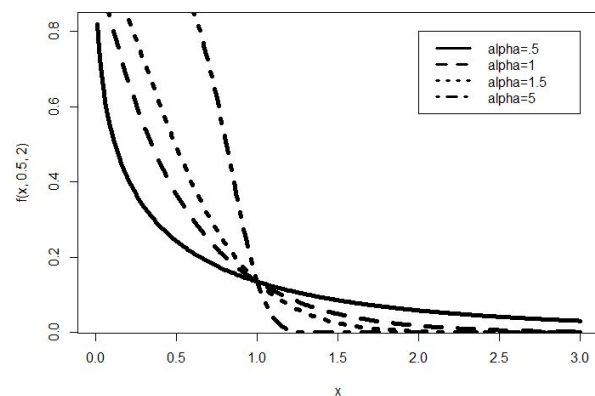
در نمودارهای تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل، منحنی با مقدار $\alpha = 0.5$ ، نزولی با شیب کند می‌باشد. هرچه مقدار α بیشتر می‌شود، این شیب افزایش می‌یابد. در ضمن با افزایش β با مقادیر $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1$ میزان شیب افزایش می‌یابد. اما در α های بزرگتر از یک، میزان شیب کاهش می‌یابد. نمودارهای تابع نرخ شکست نیز به ازای مقادیر مختلف α و β در شکل‌های ۷.۲ تا ۹.۲ نمایش داده شده است.



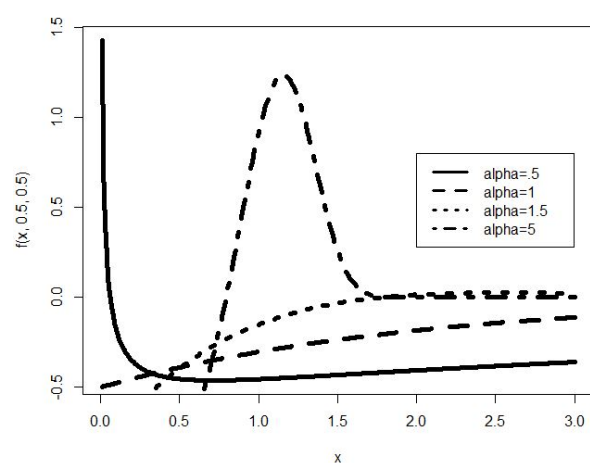
شکل ۴.۲: نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 0.5$



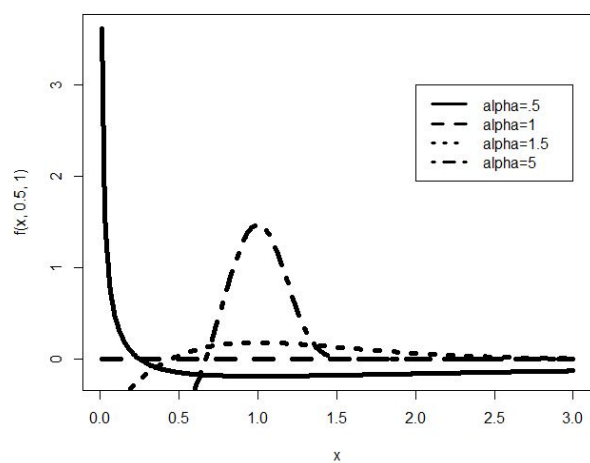
شکل ۵.۲: نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 1$



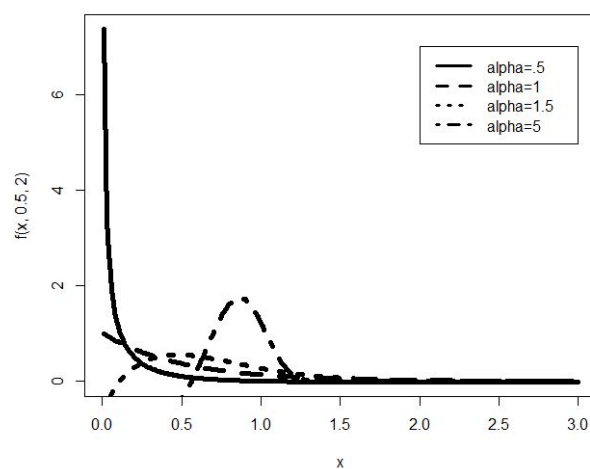
شکل ۶.۲: نمودار تابع قابلیت اعتماد توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 2$



شکل ۷.۲: نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 0.5$



شکل ۸.۲: نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 1$



شکل ۹.۲: نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف α و $\beta = 2$

۳.۱.۲ ارتباط توزیع وایبل با سایر توزیع‌های آماری

گزاره ۲.۱.۲. توزیع وایبل تعمیمی از توزیع نمایی است. اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و β باشد، یعنی (α, β) ، آن گاه

۱- حالت خاص $\beta = 2$ یعنی $W(\alpha, 2)$ به توزیع رای لی^۶ معروف است و معمولاً آن را با $R(\alpha)$ نمایش می‌دهند.

۲- حالت خاص $\beta = 1$ یعنی $W(\alpha, 1)$ ، همان توزیع نمایی با پارامتر α است.

۳- اگر X یک متغیر تصادفی از توزیع وایبل $W(\alpha, \beta)$ باشد، آن گاه $U = 2\alpha X^\beta$ دارای توزیع کای دو با دو درجه آزادی است.

۴- برای یک نمونه n تایی از توزیع وایبل $W(\alpha, \beta)$ ، کوچکترین آماره ترتیبی نمونه یعنی $V = X_{(1)}$ دارای توزیع وایبل با پارامتر β و $\frac{\alpha}{n}$ است.

برهان. با توجه به مشابهت، اثبات بند ۳ در این قسمت توضیح داده می‌شود. ابتدا توزیع $Y = X^\beta$ را به دست می‌آوریم. با این تبدیل می‌توان نوشت

$$x = y^{\frac{1}{\beta}}$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با

$$\frac{dx}{dy} = \beta^{-1} y^{\beta^{-1}-1}$$

پس

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \beta^{-1} y^{\beta^{-1}-1} \frac{\beta}{\alpha^\beta} \left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha}\right)^\beta\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha^\beta} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\alpha^\beta} y\right)\right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

از مقایسه تساوی آخر (۲.۲) نتیجه می‌شود

$$X \sim E\left(\frac{1}{\alpha^\beta}\right) = \Gamma\left(1, \frac{1}{\alpha^\beta}\right)$$

بنابراین

$$U = 2\left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta \sim \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{(2)}$$

منظور از $\chi^2_{(2)}$ توزیع کای دو با دو درجه آزادی است و برهان کامل است. □

^۶Rayleigh distribution

۲.۲ مدل فرآیند هندسی وایبل

فرآیند هندسی یک فرآیند یکنواخت ساده است. این فرآیند یک کلیت از فرآیند تجدید است. بسیاری از برآوردهای به دست آمده از مدل فرآیند هندسی زمانی که حجم نمونه و تعداد سطوح فشار کم باشد، میانگین توان‌های دوم خطای کمتری دارند و برخی از این برآوردها دارای میانگین توان‌های دوم خطای بیشتری می‌باشند؛ اما اختلاف نسبتاً ناچیزی دارند. به‌طور خلاصه، مدل فرآیند هندسی پیشنهادی مناسب برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته می‌باشد و روند کاهش طول عمر، بیش از افزایش سطح فشار، یک راه مستقیم و ساده برای به دست آوردن پارامترها در سطح فشار نرمال فراهم می‌کند. بنابراین منطقی است که می‌گویند مدل ارائه‌شده به خوبی کار می‌کند. همچنین توزیع وایبل یکی از معمول‌ترین مدل‌های طول عمر است که به دلیل انعطاف‌پذیری بالای آن کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر دارد. در بخش‌های بعدی، مدل فرآیند هندسی را برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با توزیع وایبل، تحت فشار ثابت، با داده‌های کامل و در فصل سه، با استفاده از داده‌های سانسور نوع یک و نوع دو مطالعه کرده و استنباط آماری پارامترها را به‌دست می‌آوریم.

۱.۲.۲ تاریخچه مختصری از مدل فرآیند هندسی

فرآیند هندسی اولین بار توسط لام (۱۹۸۸) زمانی که مسئله جایگزینی تعمیر را مطالعه می‌کرد، معرفی شد. لام و چان^۷ (۱۹۹۸) برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای یک فرآیند هندسی را با توزیع لگ‌نرمال به‌دست آوردند. زانگ^۸ (۲۰۰۸) مدل فرآیند هندسی را در تحلیل یک سیستم سری دوجزئی با یک تعمیر انسانی مورد بررسی قرار داد. لام (۲۰۰۵) مدل فرآیند هندسی را برای یک سیستم چندحالتی مورد مطالعه قرار داده و یک سیاست جایگزینی بهینه برای به حداقل رساندن متوسط هزینه‌ها در واحد زمان تعیین کرد. چن^۹ (۲۰۱۰) با رویکردی بیزی برای برآورد پارامترها در مدل فرآیند هندسی با چندین توزیع محبوب طول عمر، از جمله نمایی و لگ‌نرمال، مورد مطالعه قرار داد. هوانگ^{۱۰} (۲۰۱۱) تحلیل آزمون‌های تسریع‌یافته با نمونه نمایی کامل و سانسور شده تحت فشار ثابت را با بهره‌گیری از فرآیند هندسی مورد مطالعه قرار داد.

۲.۲.۲ پذیره‌های مدل هندسی وایبل

مدل فرآیند هندسی وایبل در آزمون‌های طول عمر بر اساس پذیره‌های زیر شکل می‌گیرد:

پذیره ۱.۲.۲.۱. طول عمر محصولات در سطح فشار طراحی شده، از توزیع خاص پیروی می‌کند که در این جا فرض می‌کنیم دارای توزیع وایبل دو پارامتری، یعنی $W(\alpha, \beta)$ است.

^۷Chan

^۸Zhang

^۹Chen

^{۱۰}Huang

پذیره ۲.۲.۲. فرض کنید یک آزمون طول عمر تسریع‌یافته تحت $Z_k, k = 1, 2, \dots, s$ ، افزایشی حساسی در همه سطوح تنش باشد. یک نمونه تصادفی N_i تایی، $i = 1, 2, \dots, n$ ، از موارد یکسان را تحت هر سطح فشار قرار داده و به طور همزمان شروع به کار می‌کنند. زمانی که یک مورد شکست می‌خورد آن را از آزمون حذف کرده و زمان شکست آن را با x_{ki} ثبت می‌کنیم.

پذیره ۳.۲.۲. فرض می‌کنیم $X_0, X_1, \dots, X_s$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی تحت هر سطح فشار و X طول عمر موارد، تحت فشار طراحی شده باشد. همچنین فرض می‌کنیم $\{X_k; k = 1, 2, \dots, s\}$ یک فرآیند هندسی با نرخ $\lambda > 0$ است.

بر اساس تعریف فرآیند هندسی و پذیره‌های بالا، اگر $f(x)$ تابع چگالی X_0 باشد در این صورت تابع چگالی احتمال X_k به صورت زیر خواهد شد:

$$\lambda^k f(\lambda^k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, s$$

بنابراین تابع چگالی احتمال طول عمر یک محصول در k امین سطح فشار برابر است با:

$$f_{X_k}(x|\alpha, \beta, \lambda) = \left(\frac{\lambda^k}{\alpha}\right)^\beta \beta x^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x}{\alpha}\right)^\beta \right\} \quad (3.2)$$

تابع چگالی (۳.۲) نشان می‌دهد اگر طول عمر تحت یک دنباله از سطح فشار افزایشی به شکل یک فرآیند هندسی با نسبت λ و توزیع طول عمر در سطح فشار طراحی شده وایبل با مشخصه عمر α باشد، آن‌گاه توزیع طول عمر در k امین سطح فشار نیز وایبل با مشخصه عمر $\frac{\alpha}{\lambda^k}$ خواهد بود. اگر طول عمر یک محصول در k امین سطح فشار دارای توزیع $W(\frac{\alpha}{\lambda^k}, \beta)$ باشد، تابع توزیع تجمعی هندسی وایبل برابر است با

$$F_{X_k}(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x}{\alpha}\right)^\beta \right\}.$$

تذکر ۴.۲.۲. در این فرآیند می‌توان برای طول عمر از توزیع‌های دیگری به جز وایبل نیز استفاده کرد که رده فرآیندهای هندسی را مشخص می‌کند.

۳.۲.۲ گشتاورهای مدل هندسی وایبل

مدل هندسی وایبل دارای تابع مولد گشتاور زیر است:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \times \frac{\Gamma(\frac{n}{\beta} + 1) \alpha^n}{\lambda^{nk}}$$

امید ریاضی و واریانس مدل هندسی وایبل

با مشتق‌گیری از تابع مولد گشتاور نسبت به t و قرار دادن $t = 0$ ، امید ریاضی و واریانس توزیع هندسی وایبل $W(\frac{\alpha}{\lambda^k}, \beta)$ را می‌توان محاسبه نمود. به سادگی می‌توان نشان داد

$$E(X) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1) \alpha}{\lambda^k}$$

$$Var(X) = \left(\frac{\alpha}{\lambda^k}\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right).$$

۴.۲.۲ تابع قابلیت اعتماد و نرخ شکست مدل هندسی وایبل

فرض کنید متغیر تصادفی $X > 0$ با توزیع هندسی وایبل دارای تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد. تابع قابلیت اعتماد برای مدل هندسی وایبل طبق (۴.۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{F}(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x}{\alpha} \right)^\beta \right\} \quad x \geq 0$$

و تابع نرخ شکست توزیع هندسی وایبل نیز طبق (۵.۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h(x) = \left(\frac{\beta \lambda^k}{\alpha} \right)^\beta x^{\beta-1}.$$

۵.۲.۲ ارتباط مدل هندسی وایبل با سایر توزیع‌های آماری

اگر متغیر تصادفی X دارای مدل هندسی وایبل در k امین سطح فشار با پارامترهای $\frac{\alpha}{\lambda^k}$ و β باشد، یعنی $W(\frac{\alpha}{\lambda^k}, \beta)$ ، آن گاه

۱- حالت خاص $\lambda = 1$ ، یعنی $W(\alpha, \beta)$ ، همان توزیع وایبل است.

۲- حالت خاص $\beta = 1$ و $\lambda = 1$ ، یعنی $W(\alpha, 1)$ ، همان توزیع نمایی با پارامتر α است.

۳- اگر X یک متغیر تصادفی از توزیع وایبل $W(\frac{\alpha}{\lambda^k}, \beta)$ باشد، آن گاه بنا بر (۲.۲)، $U = 2 \left(\frac{\lambda^k X}{\alpha} \right)^\beta$ دارای توزیع کای دو با دو درجه آزادی است.

۳.۲ توجیه فرض هندسی در مدل آزمون‌های طول عمر تسریع یافته

در این بخش درباره چگونگی به کار بردن مدل فرآیند هندسی برای برونمایی توزیع طول عمر، از داده‌های به دست آمده با استفاده از آزمون‌های طول عمر تسریع یافته، بحث می‌کنیم. بحث در این باره را مبنی بر فرض زیر مطالعه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم X_0 ، طول عمر تحت فشار پایه و $X_1, X_2, \dots, X_s$ ، طول عمر تحت سطوح فشار آزمون مربوط هستند. همچنین فرض می‌کنیم $\{X_k; k = 1, 2, \dots, s\}$ یک فرآیند هندسی با نسبت λ و X_0 یک تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد:

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\}$$

یک سوال ضروری که در این زمینه به وجود می‌آید، این است که آیا آزمون طول عمر تسریع یافته با سطح فشار از پیش ثابت شده انجام می‌شود؟ در این بخش ما می‌خواهیم جواب این سوال را به طور کلی در رابطه طول عمر و فشار بررسی کنیم. بدین منظور در مطالعه حاضر فقط فشار ثابت را در نظر گرفته‌ایم. بسیاری از مدل‌های ALT شامل دو جزء هستند:

۱. توزیع طول عمر برای رفتار یک واحد در سطح فشار ثابت

۲. رابطه مفروض بین ویژگی‌های عمر و عوامل فشار

رابطه بین توزیع عمر (یا مشخصه‌ی توزیع عمر مورد بررسی) و سطوح فشار، یک جزء ضروری در مدل‌های ALT است که تاثیر تغییر عواملی مانند دما، ولتاژ و رطوبت در زمان شکست محصولات را بیان می‌کند. بیشترین ارتباط با یک رابطه کلی لگ - خطی بین مشخصه‌ی عمر و عوامل تسریع‌کننده بیان شده‌اند. انتخاب مشخصه عمر همیشه به توزیع عمر مفروض بستگی دارد. به‌عنوان مثال زمانی که توزیع طول عمر را نمایی در نظر می‌گیریم، میانگین عمر انتخاب‌شده که وابسته به فشار می‌باشد به‌عنوان مشخصه طول عمر انتخاب می‌شود. در ادامه به بررسی رابطه بین مشخصه عمر و فشار می‌پردازیم.

۱.۳.۲ رابطه بین مشخصه عمر و فشار

رابطه فشار - عمر چگونگی تغییر یک مشخصه عمر خاص با استفاده از فشار را توضیح می‌دهد. مشخصه زندگی معمولاً به‌عنوان ”میانگین، میانه، یا صدک توزیعی از توزیع زندگی” نامیده می‌شود (نلسن^{۱۱} ۱۹۹۰). برای توصیف این مسیر، معمولاً از یک تبدیل لگاریتمی مشخصه زندگی استفاده می‌شود. نلسن (۱۹۹۰) یک رابطه کلی لگ - خطی ساده را برای مشخصه عمر α به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\log(\alpha) = \gamma_0 + \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_j z_j \quad (۴.۲)$$

رابطه‌های پارامترهای مدل می‌باشد که معمولاً از داده‌ها برآورد می‌شود. و z_j ممکن است یک تابع از هر تعداد از متغیرها باشد. از آن جایی که در این فصل فقط فشار را در نظر گرفتیم، بنابراین معادله (۴.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\log(\alpha) = \gamma_0 + \gamma_1 z \quad (۵.۲)$$

که z می‌تواند یک تابع از هر نوع فشاری بر محصولات در آزمون طول عمر تسریع‌یافته قرار گرفته‌اند، باشد. معادله (۵.۲) رابطه کلی عمر - فشار را با استفاده از یک روش ساده و به طور گسترده در تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته توصیف می‌کند. با استفاده از این رابطه، در صدد بررسی این می‌باشیم که آیا عمر می‌تواند تحت سطوح مختلف، یک فرآیند هندسی باشد؟ در این جا توزیع طول عمر را وایبل در نظر می‌گیریم. بر اساس رابطه (۵.۲)، فرض می‌کنیم در هر سطح فشار ثابت z_k ، میانگین عمر α_k یک تابع لگاریتمی از فشار است. به عبارتی

$$\log(\alpha_k) = \gamma_0 + \gamma_1 z_k$$

که γ_0, γ_1 پارامترهای نامعلوم می‌باشند که بستگی به ماهیت محصولات دارند. در حالتی که $k = 0$ باشد، معادله بالا رابطه میانگین عمر و سطح فشار طراحی شده را شرح می‌دهد. می‌توان به راحتی نشان داد

$$\log\left(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right) = \gamma_1 (z_{k+1} - z_k) \quad (۶.۲)$$

^{۱۱}Nelson

معادله (۶.۲) بیان‌کننده حالتی است که افزایش سطح فشار به شکل دنباله حسابی، با یک مقدار ثابت Δz باشد. بنابراین میانگین عمر تحت هر سطح فشار به شکل یک دنباله هندسی با نسبت $\exp\{\gamma \cdot \Delta z\}$ است. به این معنا که

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \exp\{\gamma \Delta z\} = \frac{1}{\lambda}$$

یا به عبارتی

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda} \alpha_{k-1} = \frac{1}{\lambda^2} \alpha_{k-2} = \dots = \frac{1}{\lambda^k} \alpha_0$$

به تبع آن، تابع چگالی احتمال طول عمر تحت k امین سطح فشار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f_{X_k}(x) &= \frac{\beta}{\alpha_k^\beta} x^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha_k} \right)^\beta \right\} \\ &= \frac{\lambda \beta}{\alpha_{k-1}^\beta} x^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda x}{\alpha_{k-1}} \right)^\beta \right\} \\ &\vdots \\ &= \frac{\lambda^k \beta}{\alpha_0^\beta} x^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x}{\alpha_0} \right)^\beta \right\} \\ &= \lambda^k f_{X_0}(\lambda^k x) \end{aligned}$$

بنابر تعریف فرآیند هندسی، دنباله $\{X_0, X_1, \dots\}$ ، یک فرآیند هندسی با نرخ λ است. بنابراین می‌توان نتیجه زیر را مطرح کرد:

نتیجه ۱.۳.۲. هنگامی که توزیع عمر وایبل در نظر گرفته شود، طول عمر تحت یک دنباله حسابی از سطوح فشار افزایشی به شکل یک فرآیند هندسی است. این نتیجه را تحت عنوان یک قضیه بیان نموده و می‌توان در برخی از مدل‌های شناخته‌شده و معمول که در ALT استفاده می‌شوند، به کار برد.

قضیه ۲.۳.۲. اگر سطح فشار در یک آزمون طول عمر تسریع‌یافته فشار ثابت، افزایشی با یک مقدار ثابت باشد، آن گاه طول عمر تحت هر سطح فشار به شکل یک فرآیند هندسی است. به عبارتی اگر $S_{k+1} - S_k$ یک مقدار ثابت به ازای $k = 1, 2, \dots, s-1$ باشد، آن گاه $\{X_k; k = 1, 2, \dots, s\}$ به شکل یک فرآیند هندسی است. رابطه لگ خطی با فرآیند هندسی معادل هم هستند، زمانی که فشار افزایشی حسابی در آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته، فشار ثابت باشد.

برهان. پارامتر مقیاس تابع لگ خطی تابعی از فشار است که آن را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\log(\alpha_k) = a + b S_k. \quad (7.2)$$

از معادله (۷.۲) داریم

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = e^{b \Delta S} = \frac{1}{\lambda} \quad (8.2)$$

رابطه (۸.۲) نشان می‌دهد که سطوح فشار، افزایشی حسابی با یک مقدار ثابت ΔS هستند. به‌طور واضح‌تر داریم

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda} \alpha_{k-1} = \frac{1}{\lambda^2} \alpha_{k-2} = \dots = \frac{1}{\lambda^k} \alpha_0$$

بنابراین اگر $f_{X_0}(x)$ تابع چگالی X_0 باشد، آن گاه تابع چگالی احتمال طول عمر محصولات در k امین سطح فشار برابر است با

$$f_{X_k}(x) = \lambda^k f_{X_0}(\lambda^k x) \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (9.2)$$

با توجه به تعریف فرآیند هندسی و رابطه (۹.۲)، طول عمر تحت یک دنباله افزایشی حساسی از سطوح فشار به شکل یک فرآیند هندسی است. □

۲.۳.۲ مدل رابطه عمر - فشار

باید به این نکته اشاره کرد که در آزمون‌های طول عمر، زمان شکست واحد در محیط معمول را نداریم و تنها ممکن است زمان شکست برای یک یا چند حالت تسریع‌شده از آزمون‌های AL در دسترس باشد. برای عامل تسریع، مدل‌های متنوعی در متون قابلیت اعتماد ارائه شده‌اند که در این بخش به معرفی دو مدل آرینوس و قانون توانی به عنوان رابطه عمر - فشار می‌پردازیم. هم‌چنین چگونگی به‌کار بردن فرض فرآیند هندسی بر اساس این مدل‌ها را بررسی می‌کنیم.

مدل آرینوس (رابطه دما)

مدل آرینوس هنگامی به کار می‌رود که طول عمر محصولات عمدتاً متأثر از دما هستند. بدین معنی که با تغییر دمای محیط می‌توان زمان شکست محصولات را تسریع بخشید. در چنین حالتی، مدل آرینوس را می‌توان جهت تعیین وابستگی طول عمر به دما به عنوان یک مدل مناسب استفاده کرد. رابطه آرینوس عمر - فشار عبارت است از

$$\alpha = Ae^{\frac{E}{kT}} \quad (10.2)$$

که در آن α مشخصه عمر مانند میانگین و میانه می‌باشد. E و A مقادیر ثابتی هستند که به ویژگی‌های مواد، مکانیزم شکست، طراحی محصول و عوامل دیگر بستگی دارند. k ضریب بلزمن نامیده می‌شود و برابر است با $k = 1/11605$. T نیز دمای مطلق (دمای سلسیوس به اضافه ۲۷۳.۱۵) است. معمولاً برای تحلیل‌های ساده‌تر در عمل یک شکل خطی از رابطه (۱۰.۲) را مد نظر قرار می‌دهند. یعنی با لگاریتم گرفتن از طرفین رابطه (۱۰.۲)، مدل زیر نتیجه می‌شود

$$\log \alpha = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{T} \quad (11.2)$$

که در آن $\gamma_0 = \log(A)$ و $\gamma_1 = \frac{E}{k}$. با توجه به معادله (۱۰.۲) مشاهده می‌شود که لگاریتم α تابعی خطی از معکوس دما است.

نتیجه‌ای که می‌توانیم از این مدل بیان کنیم این است که، طول عمر - فشار رابطه آرینوس - وایبل دارند، زمانی که معکوس قدر مطلق افزایش دما حساسی باشد. بنابراین طول عمر بیان‌شده در چنین دمایی یک فرآیند هندسی است. برای مثال در بازه تغییرات دمایی $25^\circ C$ تا $65^\circ C$ ، زمانی که دما را به اندازه $10^\circ C$ افزایش دهیم، قدر مطلق معکوس دما به‌طور حساسی با یک مقدار ثابت تقریبی 0.0001 کاهش می‌یابد. در این نمونه تحت دماهای $25^\circ, 35^\circ, 45^\circ, 55^\circ, 65^\circ$ سانتیگراد، طول عمر به شکل یک فرآیند هندسی است.

مدل قانون توانی (رابطه ولتاژ)

در بحث آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته، ولتاژ می‌تواند یک عامل مهم در تسریع کردن طول عمر باشد. به‌ویژه در قطعات الکتریکی مانند خازن‌ها و ترانسفرمرها. به عبارت دقیق‌تر رابطه قانون توانی اغلب برای توصیف اثر فشار مانند ولتاژ و فشار بر طول عمر استفاده می‌شود. اثر فشار روی طول عمر قطعات، معمولاً به صورت معکوس تابع توانی مدل‌سازی می‌شود. اگر α مشخصه عمر و V نشان‌دهنده متغیر فشار باشد که تحت آن محصول را مورد آزمایش قرار می‌دهیم، آن گاه رابطه τ و V به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{A}{V^{\gamma_1}} \quad (12.2)$$

که در آن A و γ_1 مقادیر ثابتی هستند که به ویژگی‌های مواد مورد استفاده در محصول، طراحی محصول، مکانیزم شکست و عوامل دیگر بستگی دارند. اگر از طرفین (12.2) لگاریتم بگیریم، آن گاه داریم

$$\ln(\tau) = \gamma_0 + \gamma_1 (-\ln(V)). \quad (13.2)$$

که در آن $\gamma_0 = \ln A$. فرض کنید منبع فشار ولتاژ، α نشان‌دهنده میانگین عمر و V_k نشان‌دهنده ولتاژ در k امین سطح فشار باشد. بنابر (13.2) داریم

$$\ln(\tau_k) = \gamma_0 + \gamma_1 (-\ln(V_k)).$$

به راحتی می‌توان نشان داد

$$\ln\left(\frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\right) = \gamma_1 \left(\ln \frac{V_k}{V_{k+1}}\right)$$

فرض کنید توزیع طول عمر دارای توزیع وایبل با پارامتر مقیاس α و پارامتر شکل β باشد، بنابراین داریم

$$\ln\left(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right) = \gamma_1 \left(\ln \frac{V_k}{V_{k+1}}\right).$$

واضح است که اگر ولتاژ را به‌طور هندسی با یک نسبت ثابت افزایش دهیم، طول عمر تحت هر ولتاژ یک فرایند هندسی با نسبت $\lambda = \left(\frac{V_k}{V_{k+1}}\right)^{-\gamma_1}$ است.

۴.۲ مدل فرایندهندسی وایبل در آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با داده‌های کامل

وقتی داده‌های کامل در اختیار هستند، مدل فرایند هندسی وایبل همان مدل (۳.۲) است.

۱.۴.۲ برآورد درست‌نمایی ماکسیمم

در آزمون طول عمر تسریع یافته، طول عمر تحت سطح استرس طراحی شده را نمی‌توان مشاهده کرد. بنابراین بر اساس داده‌های مشاهده شده در کل سطوح استرس، تابع درست‌نمایی را برای مدل فرایند هندسی وایبل را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$L(\lambda, \alpha, \beta) = \prod_{k=1}^s \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^k}{\alpha}\right)^{\beta} \beta x^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^k x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} \quad (14.2)$$

لگاریتم تابع درستنمایی از رابطه (۱۴.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\ell(\lambda, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \beta k \ln \lambda - \beta \ln \alpha + \ln \beta + (\beta - 1) \ln x_{ki} - \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \quad (15.2)$$

مشتق‌های اول تابع لگاریتم درستنمایی (۱۵.۲) نسبت به پارامترهای α ، λ و β را محاسبه می‌کنیم که به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\beta k}{\lambda} - \frac{\beta k}{\lambda} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \quad (17.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ k \ln \lambda - \ln \alpha + \frac{1}{\beta} \right. \\ \left. + \ln x_{ki} - \ln \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right) \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \end{aligned} \quad (18.2)$$

برآوردهای درستنمایی ماکسیمم α ، λ و β را می‌توان از حل معادله‌های $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0$ ، $\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0$ و $\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0$ به دست آورد. برآوردهای درستنمایی ماکسیمم λ ، α و β وجود دارند اما نمی‌توان آن‌ها را به شکل بسته پیدا کرد. بنابراین با استفاده از روش عددی نیوتون - رافسون برآوردهای آن‌ها را به صورت تقریبی به دست می‌آوریم. الگوریتم زیر روش تکرار نیوتون - رافسون را بیان می‌کند:

۱- با مقدار اولیه $\begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(0)}$ شروع کن.

۲- برای تکرار $(t+1)$ امین و $t \geq 0$ ، معادله زیر را حل کن:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(t+1)} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(t)} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} & \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ell}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}^{(-1)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \beta} \end{pmatrix} \bigg|_{(\lambda, \alpha, \beta)^t}$$

۳- مرحله ۲ را تا زمانی که جواب‌ها همگرا شوند، ادامه بده.

۲.۴.۲ فاصله اطمینان تقریبی

فرض کنید $I(\lambda, \alpha, \beta)$ نشان‌دهنده ماتریس اطلاع فیشر λ ، α و β باشد، آن گاه ماتریس اطلاع مشاهدات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{I}(\lambda, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} & \hat{I}_{13} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} & \hat{I}_{23} \\ \hat{I}_{31} & \hat{I}_{32} & \hat{I}_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\hat{I}_{11} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} \right) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\beta k}{\lambda^2} + \frac{\beta k(\beta k - 1)}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \\ \hat{I}_{22} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} \right) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\beta(\beta + 1)}{\alpha^2} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \\ \hat{I}_{33} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \right) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \ln^2 \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right) \right\} \\ \hat{I}_{12} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \alpha} \right) = \hat{I}_{21} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \alpha} \right) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\beta k}{\alpha \lambda} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \\ \hat{I}_{13} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \beta} \right) = \hat{I}_{31} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \beta} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{k}{\lambda} + \frac{k}{\lambda} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta + \frac{k\beta}{\lambda} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right) \right\} \\ \hat{I}_{23} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \right) = \hat{I}_{32} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{\lambda^k x_{ki}}{\alpha} \right) \right\}.\end{aligned}$$

می‌توان ماتریس کواریانس را برای $\hat{\lambda}$ ، $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به صورت زیر به دست آورد:

$$V = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} & \hat{I}_{13} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} & \hat{I}_{23} \\ \hat{I}_{31} & \hat{I}_{32} & \hat{I}_{33} \end{bmatrix}^{-1}.$$

همچنین از ماتریس اطلاع مشاهده‌شده می‌توان برآورد واریانس λ ، α و β را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\lambda}) \\ Var(\hat{\alpha}) \\ Var(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} \\ \hat{I}_{22} \\ \hat{I}_{33} \end{bmatrix}^{-1}.$$

در اینجا منظور از $[-1]$ معکوس مقادیر می‌باشد.

حال یک فاصله اطمینان $(1 - \theta) \times 100\%$ برای λ ، α و β به ترتیب برابر هستند با:

$$\left(\hat{\lambda} \mp Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\lambda})} \right)$$

$$\left(\hat{\alpha} \mp Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right)$$

$$\left(\hat{\beta} \mp Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right).$$

۳.۴.۲ فاصله اطمینان خودگردان در داده‌های کامل

خودگردان‌سازی یک تکنیک ساده برای تقریب توزیع نمونه‌ای برآوردها در یک الگوی آماری می‌باشد. برحسب این که توزیع جامعه معلوم یا نامعلوم باشد، دو نسخه پارامتری و ناپارامتری برای توصیف روش خودگردان‌سازی معرفی شده‌اند (افرون و تیب شیرانی، ۱۹۹۳). بیشترین کاربرد خودگردان‌سازی مربوط به موارد زیر می‌باشد:

۱. پیدا کردن انحراف معیار برآوردها

۲. پیدا کردن فاصله اطمینان برای پارامتر نامعلوم

۳. پیدا کردن p -مقدار برای آزمون آماری

در این جا با توجه به معلوم بودن توزیع جامعه، فواصل اطمینان برای α ، β و λ را از روش فاصله اطمینان خودگردان‌سازی پارامتری صدکی به دست می‌آوریم. در این روش نمونه‌های خودگردان‌سازی به وسیله تابع توزیع داده‌های اصلی تولید می‌شوند. یعنی با روش‌های شبیه‌سازی، داده‌ها از توزیع مفروض تولید خواهند شد. الگوریتم زیر نحوه به دست آوردن فواصل اطمینان خودگردان‌سازی صدکی را نشان می‌دهد:

۱- برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم α ، β و λ از رابطه‌های (۱۶.۲)، (۱۷.۲) و (۱۸.۲) بر اساس نمونه اصلی x_{ki} توسط روش تکراری نیوتون - رافسون به دست می‌آیند.

۲- برای $q = 1, 2, \dots, Q$ ، یک نمونه خودگردان‌سازی از X_{ki}^* ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $k = 1, 2, \dots, s$ شبیه‌سازی می‌شوند به طوری که $X_{ki}^* \sim W(x; \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}^k}, \hat{\beta})$.

۳- $\hat{\alpha}^{(q)}$ ، $\hat{\lambda}^{(q)}$ و $\hat{\beta}^{(q)}$ برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم از رابطه‌های (۱۶.۲)، (۱۷.۲) و (۱۸.۲) بر اساس نمونه خودگردان تولیدشده توسط روش تکراری نیوتون - رافسون محاسبه می‌شوند.

۴- $\hat{\lambda}^{(1)}$ ، $\hat{\alpha}^{(1)}$ ، $\hat{\beta}^{(1)}$ ، $\hat{\lambda}^{(2)}$ ، $\hat{\alpha}^{(2)}$ ، $\hat{\beta}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\lambda}^{(Q)}$ ، $\hat{\alpha}^{(Q)}$ ، $\hat{\beta}^{(Q)}$ را توسط مرحله‌های ۲ و ۳ برای Q تکرار خودگردان به دست می‌آوریم.

۵- کران‌های پایین و بالای فاصله اطمینان خودگردان صدکی برای α ، β و λ به ترتیب چندک‌های $(\frac{\theta}{4})$ و $(\frac{1-\theta}{4})$ از $\hat{\lambda}^{(1)}$ ، $\hat{\lambda}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\lambda}^{(Q)}$ ، $\hat{\beta}^{(1)}$ ، $\hat{\beta}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\beta}^{(Q)}$ و $\hat{\alpha}^{(1)}$ ، $\hat{\alpha}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\alpha}^{(Q)}$ هستند.

۵.۲ روش‌های استنباط ناپارامتری در قابلیت اعتماد

در این بخش روش‌های استنباط آماری ناپارامتری را برای داده‌های کامل مورد بحث قرار می‌دهیم. در روش‌های پارامتری فرض بر این بود که متغیر طول عمر مورد بررسی دارای یک توزیع احتمال شناخته‌شده است که به پارامترهای مجهول بستگی دارد. هدف در آن جا برآورد پارامترهای مجهول مدل با استفاده از داده‌هایی است که بر اساس یک شیوه نمونه‌گیری به دست آید. اما

باید توجه داشت که فرض این که داده‌ها از یک مدل پیروی می‌کنند، فرض قوی است و ممکن است به هر دلیل درست انتخاب نشده باشد. در این صورت استنباط آماری انجام شده می‌تواند نتایج غیرواقعی در مورد ویژگی‌های تصادفی متغیر طول عمر ارائه کند. در این بخش، روش‌هایی برای استنباط آماری در مورد ویژگی‌های طول عمر ارائه می‌کنیم که در آن‌ها هیچ فرضی در مورد نوع توزیع مورد بررسی، مطرح نمی‌کنیم. این روش‌ها که به آمار ناپارامتری شناخته می‌شوند، به دلیل پذیره‌های ضعیفی که در آن‌ها وجود دارد، اغلب استفاده‌های فراوانی در تحلیل داده‌های طول عمر دارند.

۱.۵.۲ برآورد تابع توزیع با داده‌های کامل

ساده‌ترین حالتی که در مطالعات ناپارامتری وجود دارد، برآورد تابع توزیع است هنگامی که داده‌ها کامل هستند. در اینجا فرض می‌کنیم که n واحد در زمان $t = 0$ وارد آزمایش شده و طول عمر آن‌ها $t_1, t_2, \dots, t_n$ به توزیع مجهول واحدها وابسته می‌باشد. بنابراین برآورد $\hat{F}(t)$ که به آن برآوردگر تجربی گویند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{F}(t) = \frac{\text{تعداد مشاهداتی که در نمونه کمتر یا مساوی } t \text{ هستند}}{n}.$$

نمایش دیگر برای $\hat{F}(t)$ از این واقعیت که $t_1, t_2, \dots, t_n$ زمان‌های مرتب شده هستند، به دست می‌آید.

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{1}{n} & t_1 \leq t < t_2 \\ \frac{2}{n} & t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \leq t < t \end{cases}$$

توجه کنید که این تابع توزیع پله‌ای غیر نزولی است که در زمان‌های t_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ اتفاق می‌افتد. این برآوردگر را برآوردگر ناپارامتری تابع توزیع F می‌گویند. زیرا که در آن هیچ فرضی در مورد نوع مدل F گذاشته نمی‌شود. اگر $R(t)$ تابع قابلیت اعتماد واحدهای مورد آزمایش باشد، آن گاه برآوردگر تجربی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{R}(t) = 1 - \hat{F}(t).$$

توجه کنید که $\hat{R}(t)$ را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد

$$\hat{R}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(t, \infty)}(T_i)$$

که در آن T_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، طول عمر واحد i ام است. با توجه به این نمایش، نتیجه می‌گیریم که برای مقدار مفروض t ، $\hat{R}(t)$ متوسط n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع مانند

یعنی $Z_i = I_{(t, \infty)}(T_i)$ است.

$$n\hat{R}(t) = \sum_{i=1}^n Z_i$$

که در آن متغیرهای تصادفی Z_i دارای توزیع برنولی با تابع احتمال زیر هستند:

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} R(t) & z = 1 \\ 1 - R(t) & z = 0 \end{cases}$$

بنابراین $n\hat{R}(t)$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(n, R(t))$ می‌باشد. در نتیجه

$$E(\hat{R}(t)) = R(t)$$

یعنی $\hat{R}(t)$ یک برآوردگر نااریب $R(t)$ است. توجه کنید که $\hat{R}(t)$ برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم

$$R(t) \text{ نیز می‌باشد. واریانس } \hat{R}(t) \text{ برابر است با}$$

$$V(\hat{R}(t)) = \frac{R(t)(1 - R(t))}{n}.$$

با توجه به این نتایج، می‌توان یک فاصله اطمینان تقریبی $(1 - \theta) \times 100\%$ برای $R(t)$ ارائه کرد. فرض کنید t^* یک مقدار مفروض باشد. در این صورت، از تقریب نرمال، فاصله اطمینان تقریبی $(1 - \theta) \times 100\%$ برای $R(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\hat{R}(t) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{R}(t)(1 - \hat{R}(t))}{n}} \right).$$

فصل ۳

مدل فرآیند هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با داده‌های سانسور شده

در این فصل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته را با داده‌های سانسور شده نوع یک و دو بررسی می‌کنیم. آزمون‌ها قبل از شکست تمامی موارد به منظور کاهش هزینه و زمان متوقف می‌شوند. در سانسور نوع یک همه موارد به‌طور همزمان در هر سطح فشار وارد آزمایش شده و در لحظه از پیش تعیین‌شده t با یک مقدار تصادفی از شکست‌ها خاتمه می‌یابد. همچنین در سانسور نوع دو همه موارد به‌طور همزمان وارد آزمایش شده و بعد از مشاهده r امین شکست (r از پیش تعیین‌شده) در لحظه تصادفی $t_{(r)}$ خاتمه می‌یابد. هر دو طرح سانسور، به‌طور گسترده و کاربردی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش اول به بررسی مدل فرآیند هندسی وایبل در آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با داده‌های سانسور شده نوع یک پرداخته و در بخش دوم نیز مدل فرآیند هندسی وایبل در آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته با داده‌های سانسور شده نوع دو را بررسی می‌کنیم. (مطالب این فصل جدید بوده و توسط نویسنده بیان و اثبات گردیده است.)

۱.۳ داده‌های سانسور نوع یک

فرض کنید که آزمون طول عمر تسریع‌یافته با $\{Z_k, k = 1, 2, \dots, s\}$ سطح تنش افزایشی را داشته باشیم. یک نمونه تصادفی از $\{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ تحت هر سطح تنش قرار گرفته و همزمان شروع به کار می‌کند. در طرح سانسور نوع یک، آزمون در هر سطح تنش در لحظه t خاتمه می‌یابد. زمان شکست محصولات فقط زمانی که طول عمر آن‌ها کمتر از t ، یعنی $x_{ki} < t$ ، باشند، مشاهده می‌شوند. فرض کنید در k امین سطح تنش، r_k شکست قبل از اتمام آزمایش مشاهده کنیم. بنابراین $0 \leq r_k \leq n$ و از محصولات بعد از اتمام آزمایش بدون شکست باقی می‌مانند. زمان شکست مرتب‌شده مشاهدات در k امین سطح تنش را می‌توان به صورت $x_{k(1)}, x_{k(2)}, \dots, x_{k(r_k)}$ نوشت. توجه داشته باشید در سانسور نوع یک، t مقدار ثابت و r یک متغیر تصادفی است، چرا که قبل از زمان ثابت مشخص نیست چه تعداد شکست خواهیم داشت. این مقدار می‌تواند $1, 2, \dots, n$ باشد. زمان شکست موارد مشاهده‌شده را می‌توانیم به صورت x_{ki} بنویسیم.

بر اساس پذیره‌های (۳.۲) و تعریف فرآیند هندسی، اگر $f(x)$ تابع چگالی X باشد پس تابع چگالی احتمال X_k به صورت زیر خواهد شد:

$$f_{X_k}(x) = \lambda^k f(\lambda^k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, s.$$

بنابراین تابع چگالی احتمال طول عمر یک محصول در k امین سطح تنش برابر است با

$$f_{X_k}(x|\alpha, \beta, \lambda) = \left(\frac{\lambda^k}{\alpha}\right)^\beta \beta x^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^k x}{\alpha}\right)^\beta\right\}. \quad (1.3)$$

همچنین تابع توزیع تجمعی برای k امین سطح تنش برابر است با

$$F_{X_k}(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^k x}{\alpha}\right)^\beta\right\}. \quad (2.3)$$

و احتمال این که یک مورد در لحظه t سانسور شود، برابر است با

$$R_{X_k}(t) = 1 - F_{X_k}(t) = \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^k t}{\alpha}\right)^\beta\right\}. \quad (3.3)$$

برای r_k که تعداد شکست‌ها تا لحظه t باشند، می‌توانیم آماره‌های مرتب آن‌ها را به صورت $X_{k(i)}$ با تابع چگالی احتمال زیر بنویسیم:

$$f_{X_{k(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f_{X_k}(x) (F_{X_k}(x))^{i-1} (1 - F_{X_k}(x))^{n-i} \quad (4.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, r_k.$$

با توجه به رابطه‌های (۲.۱)، (۳.۳) و (۴.۳)، می‌توان تابع درستنمایی داده‌های مشاهده شده در k امین سطح تنش را به صورت زیر نوشت:

$$L_k = \frac{n!}{(n-r_k)!} f_X(x_{k(1)}) f_X(x_{k(2)}) \dots f_X(x_{k(r_k)}) (R_{X_k}(t))^{n-r_k}. \quad (5.3)$$

۱.۱.۳ برآورد درست‌نمایی ماکسیمم

تابع درست‌نمایی برای مدل فرآیند هندسی وایبل برای داده‌های مشاهده‌شده در آمین k سطح تنش آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته، را بر اساس رابطه (۵.۳) می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{n!}{(n-r_k)!} \prod_{i=1}^{r_k} \left(\left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \beta x_{k(i)}^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x_{k(i)}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right) \\ &\quad \times \left(\exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k t}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right)^{n-r_k} \\ &= \frac{n!}{(n-r_k)!} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta r_k} \beta^{r_k} \left(\prod_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^{\beta-1} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n-r_k)t^\beta \right) \right\} \\ &\quad \circ \leq x_{k(1)} \leq x_{k(2)} \leq \dots \leq x_{k(r_k)} \leq t. \end{aligned}$$

حال تابع درست‌نمایی داده‌های مشاهده‌شده در کل سطوح تنش را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, \beta) &= L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s = \prod_{k=1}^s \{ L_k(\lambda, \alpha, \beta) \}; \\ &= \prod_{k=1}^s \left\{ \frac{n!}{(n-r_k)!} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta r_k} \beta^{r_k} \left(\prod_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^{\beta-1} \right) \right. \\ &\quad \times \exp \left(- \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n-r_k)t^\beta \right) \right) \left. \right\}; \\ &\quad \circ \leq x_{k(1)} \leq x_{k(2)} \leq \dots \leq x_{k(r_k)} \leq t; \quad 1 \leq k \leq s. \end{aligned}$$

و همچنین لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \alpha, \beta) &= \sum_{k=1}^s \left\{ \ln \left(\frac{n!}{(n-r_k)!} \right) + r_k \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta + r_k \ln \beta \right. \\ &\quad \left. + (\beta-1) \sum_{i=1}^{r_k} \ln(x_{k(i)}) - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n-r_k)t^\beta \right) \right\}. \end{aligned}$$

مشتق‌های اول $\ell(\lambda, \alpha, \beta)$ نسبت به λ ، α و β برابر هستند با

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^s \left\{ -\frac{\beta r_k}{\alpha} + \frac{\beta \lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta+1}} \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n-r_k)t^\beta \right) \right\} \quad (۶.۳)$$

۹

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{k \beta r_k}{\lambda} - \frac{\beta k \lambda^{k\beta-1}}{\alpha^\beta} \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n-r_k)t^\beta \right) \right\} \quad (۷.۳)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \sum_{k=1}^s \left\{ r_k \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) + \frac{r_k}{\beta} - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta \left(\ln x_{k(i)} - \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \right. \quad (۸.۳)$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r_k} \ln (x_{k(i)}) - (n - r_k) t^\beta \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \ln t \right) \right\}. \quad (۹.۳)$$

برای حل معادلات $\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0$ ، $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0$ و $\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0$ ، از روش تقریب عددی نیوتون - رافسون استفاده می‌کنیم.

۲.۱.۳ فاصله اطمینان تقریبی برای سانسور نوع یک

فرض کنید $I(\lambda, \alpha, \beta)$ نشان‌دهنده ماتریس اطلاع فیشر λ ، α و β باشد، آن گاه ماتریس اطلاع مشاهدات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{I}(\lambda, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} & \hat{I}_{13} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} & \hat{I}_{23} \\ \hat{I}_{31} & \hat{I}_{32} & \hat{I}_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\hat{I}_{11} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} \right) = \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{\beta r_k k}{\lambda^2} + \frac{\beta k (k\beta - 1) \lambda^{k\beta-2}}{\alpha^\beta} \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n - r_k) t^\beta \right) \right\}$$

$$\hat{I}_{22} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} \right) = \sum_{k=1}^s \left\{ -\frac{\beta r_k}{\alpha^2} + \frac{\beta(\beta + 1) (\lambda^k \alpha)^\beta}{(\alpha^{\beta+1})^2} \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n - r_k) t^\beta \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{33} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \right) &= \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{r_k}{\beta^2} + \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta \left(\ln x_{k(i)} - \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \right. \\ &\quad + (n - r_k) t^\beta \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \ln t \right) \left(\ln t + \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta \left(\ln x_{k(i)} - \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{12} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \alpha} \right) &= \hat{I}_{21} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \lambda} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left\{ -\frac{k\beta \lambda^{k\beta-1}}{\alpha^{\beta+1}} \left(\sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)}^\beta + (n - r_k) t^\beta \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{13} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \beta} \right) = \hat{I}_{31} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \lambda} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{k r_k}{\lambda} - \frac{k}{\lambda} \sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\beta \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \beta \ln x_{k(i)} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(n - r_k) x_t^\beta}{\lambda} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\beta \ln x_t - \beta \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - 1 \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{23} &= - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \right) = \hat{I}_{32} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \alpha} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{r_k}{\alpha} - \frac{\lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^{r_k} x_{k(i)} \left(\beta \ln x_{k(i)} - \beta \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - (n - r_k) x_t^\beta \frac{\lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta+1}} \left(\ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \ln x_t + 1 \right) \right\}.\end{aligned}$$

می‌توان ماتریس واریانس برای $\hat{\lambda}$ ، $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$V = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} & \hat{I}_{13} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} & \hat{I}_{23} \\ \hat{I}_{31} & \hat{I}_{32} & \hat{I}_{33} \end{bmatrix}^{-1}.$$

همچنین از ماتریس اطلاع مشاهده‌شده می‌توان برآورد واریانس λ ، α و β را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\lambda}) \\ Var(\hat{\alpha}) \\ Var(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} \\ \hat{I}_{22} \\ \hat{I}_{33} \end{bmatrix}^{-1}.$$

حال یک فاصله اطمینان $100(1 - \theta)\%$ برای λ ، α و β به ترتیب برابر هستند با

$$\left(\hat{\lambda} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\lambda})} \right)$$

$$\left(\hat{\alpha} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right)$$

$$\left(\hat{\beta} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right).$$

9

۳.۱.۳ فاصله اطمینان خودگردان در سانسور نوع یک

در این جا فواصل اطمینان خودگردان سازی برای α ، λ و β را بر اساس خودگردان سازی پارامتری صدکی به دست می‌آوریم. که در زیر الگوریتم نحوه به دست آوردن آن را می‌بینیم:

۱- نمونه اصلی X_{ki} ، را به صورت صعودی مرتب کرده و r_k ، را پیدا می‌کنیم به طوری که $x_{k(r_k)} \leq t$ و $x_{k(r_k+1)} > t$. همچنین برآوردگرهای درستنمایی ماکسیم λ ، α و β هستند را از رابطه (۶.۳)، (۷.۳) و (۸.۳) و روش تکراری نیوتون - رافسون بدست می‌آیند.

۲- برای $q = 1, 2, \dots, Q$ ، یک نمونه خودگردان سازی از X_{ki}^* ، $k = 1, 2, \dots, s$ ؛ $i = 1, 2, \dots, n$ شبیه‌سازی می‌شوند. که $X_{ki}^* \sim W(x; \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}^k}, \hat{\beta})$ بر اساس برآوردهای λ ، α و β می‌باشد.

۳- پیدا کردن r_k ، بطوریکه $x_{k(r_k)}^* \leq t$ و $x_{k(r_k+1)}^* > t$.

۴- $\hat{\alpha}^{(q)}$ ، $\hat{\lambda}^{(q)}$ و $\hat{\beta}^{(q)}$ ، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیم از رابطه‌های (۶.۳)، (۷.۳) و (۸.۳) بر اساس نمونه خودگردان تولیدشده توسط روش تکراری نیوتون - رافسون محاسبه می‌شوند.

۵- $\hat{\lambda}^{(1)}$ ، $\hat{\alpha}^{(1)}$ ، $\hat{\beta}^{(1)}$ ، $\hat{\lambda}^{(2)}$ ، $\hat{\alpha}^{(2)}$ ، $\hat{\beta}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\lambda}^{(Q)}$ ، $\hat{\alpha}^{(Q)}$ ، $\hat{\beta}^{(Q)}$ توسط مرحله‌های ۲ تا ۴ برای Q تکرار خودگردان به دست می‌آوریم.

۶- کران‌های پایین و بالای فاصله اطمینان خودگردان صدکی برای λ ، α و β به ترتیب چندک‌های $(\frac{\theta}{4})$ و $(\frac{1-\theta}{4})$ از $\hat{\lambda}^{(1)}$ ، $\hat{\lambda}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\lambda}^{(Q)}$ ، $\hat{\beta}^{(1)}$ ، $\hat{\beta}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\beta}^{(Q)}$ و $\hat{\alpha}^{(1)}$ ، $\hat{\alpha}^{(2)}$ ، $\dots$ ، $\hat{\alpha}^{(Q)}$ هستند.

۲.۳ داده‌های سانسور نوع دو

فرض کنید که آزمون طول عمر تسریع‌یافته با $\{Z_k, k = 1, 2, \dots, s\}$ سطح تنش افزایشی داشته باشیم. یک نمونه تصادفی از $\{N_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ تحت هر سطح تنش قرار گرفته و همزمان شروع به کار می‌کند. در طرح سانسور نوع دو، آزمون در هر سطح تنش بعد از مشاهده r خاتمه می‌یابد. اگر در سطح تنش k ام، r کوچکتر از نمونه جمع‌آوری شده باشد آن گاه زمان شکست را می‌توانیم به صورت $x_{k(1)} \leq x_{k(2)} \leq \dots \leq x_{k(r)}$ بنویسیم. توجه داشته باشید که r از قبل مشخص می‌باشد. در این نوع سانسور آزمون در r امین شکست با زمان شکست $x_{k(r)}$ به پایان می‌رسد و $(n - r)$ تا در هر سطح تنش سانسور شدند. همانند طرح سانسور نوع یک، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی یک محصول در k امین سطح تنش، برابر با رابطه‌های (۱.۳) و (۲.۳) می‌باشند. در طرح سانسور نوع دو، اطلاعات موجود شامل اولین r آماره ترتیبی در هر سطح تنش می‌باشد. تابع چگالی احتمال برای آماره ترتیبی $X_{k(r)}$ برابر است با

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f_X(x) [F_X(x)]^{i-1} [1 - F_X(x)]^{n-i} \quad (۱۰.۳)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

می‌دانیم که برای آن $(n - r)$ واحدی که در سانسور نوع دو بدون شکست باقی ماندند، این است که طول عمر هر یک از آن‌ها بیشتر از $x_{k(r)}$ می‌باشد. احتمال این که یک واحد در زمان $x_{k(r)}$

سانسور شود برابر است با

$$1 - P(X \leq x_{k(r)}) = \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} x_{k(r)} \right)^\beta \right\} \quad (11.3)$$

که از رابطه های (۲.۱)، (۱۰.۳) و (۱۱.۳) در ساختار تابع درستنمایی استفاده می‌شود. در سانسور نوع دو تابع درستنمایی را بصورت زیر داریم:

$$L(\lambda, \alpha, \beta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\prod_{i=1}^r f(x_{(i)}) \right) (1 - F_{X_k}(x_{(r)}))^{n-r} \quad (12.3)$$

۱.۲.۳ برآورد درستنمایی ماکسیمم

تابع درستنمایی برای مدل فرآیند هندسی وایبل برای داده‌های مشاهده شده در k امین سطح تنش آزمون‌های طول عمر تسریع یافته، را بر اساس رابطه (۱۲.۳) می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \left(\left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \beta x_{k(i)}^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x_{k(i)}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right) \\ &\times \left(\exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k x_{k(r)}}{\alpha} \right)^\beta \right\} \right)^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta r} \beta^r \\ &\times \left(\prod_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta-1} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^\beta + (n-r)x_{k(r)}^\beta \right) \right\} \\ &\circ \leq x_{k(1)} \leq x_{k(2)} \leq \dots \leq x_{k(r)}; \quad 1 \leq k \leq s. \end{aligned}$$

بنابراین تابع درستنمایی داده‌های مشاهده شده در کل سطوح تنش به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, \beta) &= L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s = \prod_{k=1}^s \{ L_k(\lambda, \alpha) \} \\ &= \prod_{k=1}^s \left\{ \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta r} \beta^r \left(\prod_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta-1} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^\beta + (n-r)x_{k(r)}^\beta \right) \right\} \right\} \\ &\circ \leq x_{k(1)} \leq x_{k(2)} \leq \dots \leq x_{k(r)}; \quad 1 \leq k \leq s. \end{aligned} \quad (13.3)$$

همچنین لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \alpha, \beta) &= \sum_{k=1}^s \left\{ \ln \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) + r \ln \left(\left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \right) + r \ln \beta \right. \\ &\quad \left. + (\beta - 1) \sum_{i=1}^r \ln(x_{k(i)}) - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^\beta + (n-r)x_{k(r)}^\beta \right) \right\} \end{aligned} \quad (14.3)$$

با مشتق‌گیری از تابع لگاریتم درستنمایی برحسب پارامترهای موجود و حل معادلات حاصل از آن‌ها برآورد پارامترها را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^s \left\{ -\frac{\beta r}{\alpha} + \frac{\beta \lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta+1}} \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} + (n-r)x_{k(r)}^{\beta} \right) \right\} \quad (۱۵.۳)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{\beta r k}{\lambda} - \frac{\beta k \lambda^{k\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} + (n-r)x_{k(r)}^{\beta} \right) \right\} \quad (۱۶.۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = & \sum_{k=1}^s \left\{ r \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) + \frac{r}{\beta} - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta} \sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} \left(\ln x_{k(i)} - \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^r \ln (x_{k(i)}) - (n-r)x_{k(r)}^{\beta} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta} \left(\ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \ln x_{k(r)} \right) \right\} \quad (۱۷.۳) \end{aligned}$$

برآوردهای درستنمایی ماکسیمم α ، λ و β وجود دارند ولی معادلات درستنمایی وایبل شکل بسته‌ای ندارند. بنابراین برای به دست آوردن برآوردها، از حل معادلات $\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0$ ، $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0$ و $\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0$ ، به روش تقریب عددی نیوتون - رافسون استفاده می‌کنیم.

۲.۲.۳ فاصله اطمینان تقریبی برای سانسور نوع دو

فرض کنید $I(\lambda, \alpha, \beta)$ نشان‌دهنده ماتریس اطلاع فشر λ ، α و β باشد، آن گاه ماتریس اطلاع مشاهدات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{I}(\lambda, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} & \hat{I}_{13} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} & \hat{I}_{23} \\ \hat{I}_{31} & \hat{I}_{32} & \hat{I}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{I}_{11} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} \right) = \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{k\beta r}{\lambda^2} + \frac{((k\beta)^2 - k\beta) \lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta} \lambda^2} \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} + (n-r)x_{k(r)}^{\beta} \right) \right\}$$

$$\hat{I}_{22} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} \right) = \sum_{k=1}^s \left\{ -\frac{\beta r}{\alpha^2} + \frac{\beta(\beta+1) (\lambda^k \alpha)^{\beta}}{(\alpha^{\beta+1})^2} \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} + (n-r)x_{k(r)}^{\beta} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{33} = - \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \right) = & \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{r_k}{\beta^2} - \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta} \sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} \left(\ln x_{k(i)} + \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \right. \\ & (n-r)x_{k(r)}^{\beta} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta} \left(\ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \ln x_{k(r)} \right) \left(\ln x_{k(r)} + \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \\ & \left. - \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^{\beta} \sum_{i=1}^r x_{k(i)}^{\beta} \left(\ln x_{k(i)} - \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{12} &= - \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha} \right) = \hat{I}_{21} = - \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left\{ - \frac{k\beta^\gamma \lambda^{k\beta-1}}{\alpha^{\beta+1}} \left(\sum_{i=1}^r x_{k(i)}^\beta + (n-r)x_{k(r)}^\beta \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{23} &= - \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \right) = \hat{I}_{32} = - \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{r}{\alpha} - \frac{\lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta+1}} \sum_{i=1}^r x_{k(i)} \left(\beta \ln x_{k(i)} - \beta \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - (n-r)x_{k(r)}^\beta \frac{\lambda^{k\beta}}{\alpha^{\beta+1}} \left(\ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \ln x_{k(r)} + 1 \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{13} &= - \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \beta} \right) = \hat{I}_{31} = - \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \lambda} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{kr}{\lambda} - \frac{k}{\lambda} \sum_{i=1}^r x_{k(i)} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\beta \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - \beta \ln x_{k(i)} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(n-r)x_{k(r)}^\beta}{\lambda} \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right)^\beta \left(\beta \ln x_{k(r)} - \beta \ln \left(\frac{\lambda^k}{\alpha} \right) - 1 \right) \right\}.\end{aligned}$$

حال مشابه طرح سانسور نوع یک، فاصله اطمینان $100(1-\theta)\%$ برای λ ، α و β به ترتیب برابر هستند با:

$$\left(\hat{\lambda} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\lambda})} \right)$$

$$\left(\hat{\alpha} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \right)$$

$$\left(\hat{\beta} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}} \sqrt{Var(\hat{\beta})} \right).$$

9

۳.۲.۳ فاصله اطمینان خودگردان در سانسور نوع دو

در این جا فواصل اطمینان خودگردان سازی برای α ، λ و β ، مشابه طرح سانسور نوع یک به دست می‌آوریم. که در زیر الگوریتم نحوه به دست آوردن آن را می‌بینیم:

۱- نمونه اصلی X_{ki} را در هر سطح تنش به صورت صعودی مرتب کرده و $x_{k(1)}, x_{k(2)}, \dots, x_{k(r)}$ را پیدا می‌کنیم. $x_{k(r_k+1)} > t$. همچنین برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم λ ، α و β هستند را از رابطه‌های (۱۵.۳)، (۱۶.۳) و (۱۷.۳) و روش تکراری نیوتون - رافسون بدست می‌آیند.

۲- برای $q = 1, 2, \dots, Q$ ، یک نمونه خودگردان‌سازی از X_{ki}^* ، $i = 1, 2, \dots, s$ ؛ $k = 1, 2, \dots, n$ شبیه‌سازی می‌شوند. که $X_{ki}^* \sim W(x; \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}^k}, \hat{\beta})$ بر اساس برآوردهای α ، λ و β می‌باشد.

۳- آماره‌های x_{ki}^* و $x_{k(1)}^*, x_{k(2)}^*, \dots, x_{k(r)}^*$ را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

۴- $\hat{\alpha}^{(q)}$ ، $\hat{\lambda}^{(q)}$ و $\hat{\beta}^{(q)}$ ، که برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها می‌باشند را از رابطه (۱۵.۳)، (۱۶.۳) و (۱۷.۳) و روش تکراری نیوتون - رافسون محاسبه می‌شوند.

۵- $\hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\alpha}^{(1)}, \hat{\beta}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(2)}, \hat{\alpha}^{(2)}, \hat{\beta}^{(2)}, \dots, \hat{\lambda}^{(Q)}, \hat{\alpha}^{(Q)}, \hat{\beta}^{(Q)}$ توسط مرحله‌های ۲ تا ۴ برای Q تکرار خودگردان به دست می‌آوریم.

۶- کران‌های پایین و بالای فاصله اطمینان خودگردان صدکی برای α ، λ و β به ترتیب چندک‌های $(\frac{\theta}{4})$ و $(\frac{1-\theta}{4})$ از $\hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(2)}, \dots, \hat{\lambda}^{(Q)}$ ، $\hat{\beta}^{(1)}, \hat{\beta}^{(2)}, \dots, \hat{\beta}^{(Q)}$ و $\hat{\alpha}^{(1)}, \hat{\alpha}^{(2)}, \dots, \hat{\alpha}^{(Q)}$ است.

فصل ۴

ارزیابی فرآیند هندسی وایبل در تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته

برای ارزیابی و عملکرد روش‌های استنباطی مطرح‌شده در فصل‌های ۲ و ۳، یک مطالعه شبیه‌سازی را انجام داده‌ایم. اجرای شبیه‌سازی در محیط نرم‌افزار R صورت گرفته است. همه کدهای شبیه‌سازی برای تولید نتایج پایان‌نامه توسط نویسنده نوشته شده است. در بخش اول، مطالعه شبیه‌سازی برای داده‌های کامل انجام داده‌ایم. در بخش‌های دوم و سوم، نیز مطالعه شبیه‌سازی، را به ترتیب برای داده‌های سانسور شده نوع یک و نوع دو بررسی نموده‌ایم.

۱.۴ نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های کامل

برای ارزیابی و عملکرد روش‌های استنباط شده برای داده‌های کامل یک مطالعه شبیه‌سازی انجام داده‌ایم. در این مثال شبیه‌سازی، ابتدا یک نمونه تصادفی n تایی برای هر سطح تنش یعنی $k = 1, 2, \dots, s$

$$\{X_{ki}^*; k = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, n\}$$

که از توزیع وایبل با مشخصات

$$X_{ki}^* \sim W(x; \frac{\hat{\alpha}}{\lambda}, \hat{\beta})$$

تولید کردیم. مقادیر واقعی پارامترها را برابر $\lambda = 1/0.3, 1/0.5$ ، $\alpha = 0.25, 0.5$ و $\beta = 0.85, 1/0.85$ قرار دادیم. مقادیر λ را نزدیک به ۱ انتخاب می‌کنیم زیرا روند کاهشی طول عمر در عمل معمولاً بیان نمی‌شوند. تعداد سطوح تنش $s = 4, 6$ انتخاب شدند و تعداد نمونه‌های آزمون را در هر سطح تنش برابر با $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 10, 20$ تعیین کردیم. برای محاسبه برخی از کمیت‌ها، هر کدام از شبیه‌سازی‌ها را ۷۵۰ بار تکرار کردیم.

برآورد پارامترها و خلاصه نتایج را توسط مدل پیشنهادی و بر اساس روش نیوتون - رافسون به دست آوردیم. برای یک نمونه داده با گزینه‌های مختلف از λ ، α و β ، برآورد پارامترها، انحراف استاندارد برآوردها، خطای استاندارد مجانی و فاصله اطمینان ۹۵٪ برای آن‌ها را محاسبه کردیم. فاصله اطمینان را با استفاده از دو روش توزیع مجانی و خودگردان سازی پارامتری به دست آوردیم. نتایج در جدول‌های ۱.۴ تا ۳.۴ گزارش شده‌اند.

۱.۱.۴ نتایج شبیه‌سازی

جدول‌های ۱.۴، ۲.۴ و ۳.۴، خلاصه‌ای از نتایج برآورد برای λ ، α و β می‌باشند. از نتایج این جدول‌ها مشاهده می‌کنیم که پارامترهای واقعی به خوبی با خطای استاندارد نسبتاً کوچکی برآورد شده‌اند. همچنین خطای استاندارد برآوردشده، برآورد خوبی از انحراف استاندارد نمونه است. برای α ، λ و β ثابت، برآوردهای به دست آمده را در چهار حالت مختلف مقایسه می‌کنیم. از مقایسه حالت‌هایی که فقط سطح تنش متفاوتی دارند، با کاهش سطح تنش میانگین توان دوم خطا بزرگتر می‌شود. برای مثال در جدول ۱.۴، میانگین توان دوم خطا برای برآورد پارامتر λ ، در حالت اول برابر با ۰/۰۲۹ ولی در حالت دوم، ۰/۰۵۸ می‌باشد. همچنین با کاهش اندازه نمونه مشابه سطح تنش، میانگین توان دوم خطا افزایش می‌یابد. زیرا به دلیل اینکه نتایج اندازه نمونه بزرگتر در برآورد نمونه بزرگتر، برای توزیعی با پارامترهای $\hat{\lambda}$ ، $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ، بهتر بوده، بنابراین استنباط پارامترها با دقت بیشتری می‌باشد. پارامترهای برآورد شده در سراسر چهار حالت، در فاصله اطمینان مجانی قرار دارند. همچنین فاصله اطمینان خودگردان به جزء در چند مورد مشابه فاصله اطمینان مجانی می‌باشد.

جدول ۱.۴: نتایج شبیه سازی برای داده های کامل در مدل فرآیند هندسی وایبل

sim = ۷۵° ، α = °/۵ ، β = ۱/۸۵								
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی		
حالت ۱ : n=۲۰ و s=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۲۹	۰/۰۲۹	۰/۹۷۲	۱/۰۸۸	۱/۰۲۱	۱/۱۳۹
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۵۰۲	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۵۸	۰/۰۳۹۲	۰/۰۶۱۳	۰/۰۵۲۱	۰/۰۸۰۲
	$\hat{\beta}$	۱/۸۸۷	۰/۰۱۳۵	۰/۰۱۴۱	۱/۰۶۲۳	۲/۰۱۵۲	۱/۰۶۴۵	۲/۰۲۲۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۳۱	۰/۰۹۹۲	۱/۰۱۰۹	۱/۰۰۴۱	۱/۰۱۶۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۳	۰/۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۵۷	۰/۰۰۳۹۳	۰/۰۰۶۱۴	۰/۰۰۵۱۹	۰/۰۰۸۰۱
	$\hat{\beta}$	۱/۸۸۹	۰/۰۱۳۵	۰/۰۱۴۷	۱/۰۶۲۴	۲/۰۱۵۳	۱/۰۶۴۵	۲/۰۲۲۱
حالت ۲ : n=۲۰ و s=۴								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۴	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۵۸	۰/۰۹۲۵	۱/۰۱۴۲	۰/۰۸۸۱	۱/۰۰۹۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۵	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۳۵۹	۰/۰۰۶۵۱	۰/۰۰۳۷۶	۰/۰۰۶۶۹
	$\hat{\beta}$	۱/۹۰۱	۰/۰۱۶۷	۰/۰۱۷۵	۱/۰۵۷۴	۲/۰۲۲۸	۱/۰۵۴۳	۱/۰۵۴۳
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۵۶	۰/۰۹۴۱	۱/۰۱۶۳	۰/۰۸۹۷	۱/۰۱۱۳
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۲	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۰۳۵۷	۰/۰۰۶۴۶	۰/۰۰۳۷۷	۰/۰۰۶۶۹
	$\hat{\beta}$	۱/۸۹۸	۰/۰۱۶۷	۰/۰۱۸۱	۱/۰۵۷۲	۲/۰۲۲۵	۲/۰۱۹۲	۱/۰۵۴۳
حالت ۳ : n=۱۰ و s=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۵	۰/۰۹۴۹	۱/۰۱۱۳	۰/۰۹۰۷	۱/۰۰۶۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۳	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۸۳	۰/۰۰۳۴۸	۰/۰۰۶۵۷	۰/۰۰۳۲۳	۰/۰۰۵۸۳
	$\hat{\beta}$	۱/۹۲۲	۰/۰۱۹۵	۰/۰۲۲۱	۱/۰۵۳۹	۲/۰۳۰۵	۱/۰۶۸۶	۲/۰۵۵۷
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۲	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۳	۰/۰۹۶۹	۱/۰۱۳۵	۰/۰۹۲۴	۱/۰۰۸۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۶	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۰۳۴۹	۰/۰۰۶۶۲	۰/۰۰۳۲۳	۰/۰۰۵۸۳
	$\hat{\beta}$	۱/۹۱۴	۰/۰۱۹۴	۰/۰۲۱۱	۱/۰۵۳۴	۲/۰۲۹۴	۱/۰۶۸۶	۲/۰۵۵۷
حالت ۴ : n=۱۰ و s=۴								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۰۷۷	۰/۰۰۸۳	۰/۰۸۷۹	۱/۰۱۸۱	۰/۰۹۴۰	۱/۰۲۱۸
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۳	۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۰۹	۰/۰۳۰۱	۰/۰۷۰۵	۰/۰۳۵۹	۰/۰۷۴۲
	$\hat{\beta}$	۱/۹۵۵	۰/۰۲۴۴	۰/۰۲۷۳	۱/۰۴۷۷	۲/۰۴۳۳	۱/۰۷۲۸	۲/۰۸۷۸
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۴	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۸۱	۰/۰۸۹۹	۱/۰۲۰۸	۰/۰۹۵۸	۱/۰۲۴۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۰۵۰۶	۰/۰۱۰۴	۰/۰۱۰۸	۰/۰۳۰۲	۰/۰۷۰۹	۰/۰۳۵۹	۰/۰۷۴۲
	$\hat{\beta}$	۱/۹۴۹	۰/۰۲۴۳	۰/۰۲۷۵	۱/۰۴۷۳	۲/۰۴۲۷	۱/۰۷۲۸	۲/۰۸۷۸

جدول ۲.۴: نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های کامل در مدل فرآیند هندسی وایبل

$sim = 75^\circ, \alpha = 0/25, \beta = 1/85$							
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی	
حالت ۱: $n=20$ و $s=6$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۲۹	۰/۰۲۸	۰/۰۲۹	۰/۰۲۹	۰/۰۲۱	۱/۱۳۹
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۴۹	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۱۹۵	۰/۲۵۹	۰/۴۰۱
	$\hat{\beta}$	۱/۸۷۹	۰/۱۳۴	۰/۱۳۶	۱/۶۱۶	۱/۶۴۵	۲/۲۲۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۲۹	۰/۰۵۵	۰/۰۵۶	۰/۹۲۲	۱/۰۴۱	۱/۱۶۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۲	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸	۰/۱۷۹	۰/۳۲۴	۰/۴۰۱
	$\hat{\beta}$	۱/۸۹۹	۰/۱۶۷	۰/۱۷۵	۱/۵۷۳	۱/۶۴۵	۲/۲۲۱
حالت ۲: $n=20$ و $s=4$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۴۱۶	۰/۰۴۱۴	۰/۹۴۹	۱/۱۱۲	۱/۰۹۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۲	۰/۰۳۹۹	۰/۰۴۰۳	۰/۱۷۴	۰/۱۸۸	۰/۳۳۵
	$\hat{\beta}$	۱/۹۰۹	۰/۱۹۳۷	۰/۲۰۷۲	۱/۵۳۱	۱/۵۴۳	۲/۱۹۲
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۴	۰/۰۵۶۶	۰/۰۵۸۲	۰/۹۴۳	۱/۱۶۵	۱/۱۱۳
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۲	۰/۰۳۷۲	۰/۰۳۸۴	۰/۱۷۹	۰/۳۲۵	۰/۳۳۵
	$\hat{\beta}$	۱/۸۹۳	۰/۱۶۶۳	۰/۱۷۵۹	۱/۵۶۷	۱/۵۴۳	۲/۱۹۲
حالت ۳: $n=10$ و $s=6$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۲	۰/۰۴۱۵	۰/۰۴۲۴	۰/۹۴۹	۱/۱۱۳	۱/۰۶۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۲	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۰۵	۰/۱۷۴	۰/۳۲۹	۰/۲۹۱
	$\hat{\beta}$	۱/۹۰۸	۰/۱۹۳۵	۰/۲۰۸۲	۱/۵۲۹	۱/۶۸۶	۲/۵۵۷
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۴۲۳	۰/۰۴۲۹	۰/۹۶۷	۱/۱۳۳	۱/۰۸۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۱	۰/۰۳۹۷	۰/۰۴۰۴	۰/۱۷۴	۰/۳۲۹	۰/۲۹۲
	$\hat{\beta}$	۱/۹۱۵	۰/۱۹۴۵	۰/۲۲۰۱	۱/۵۳۴	۱/۶۸۶	۲/۵۵۷
حالت ۴: $n=10$ و $s=4$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۳	۰/۰۷۷	۰/۰۸۴	۰/۸۸۱	۱/۱۸۵	۱/۲۱۸
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۳	۰/۰۵۲	۰/۰۵۸	۰/۱۵۱	۰/۳۵۶	۰/۳۷۱
	$\hat{\beta}$	۱/۹۴۴	۰/۲۴۳	۰/۲۷۱	۱/۴۶۸	۲/۴۱۹	۲/۸۷۷
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۸	۰/۰۷۹	۰/۰۸۴	۰/۹۰۳	۱/۲۱۳	۱/۲۴۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۲۵۷	۰/۰۵۳	۰/۰۵۴	۰/۱۵۳	۰/۳۶۱	۰/۳۷۱
	$\hat{\beta}$	۱/۹۴۷	۰/۲۴۳	۰/۲۸۳	۱/۴۷۱	۲/۴۲۴	۲/۸۷۸

جدول ۳.۴: نتایج شبیه سازی برای داده های کامل در مدل فرآیند هندسی وایبل

sim = ۷۵° ، α = °/۵ ، β = °/۸۵								
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی		
حالت ۱ : n=۲۰ و s=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۳	°/۰۶۴	°/۰۶۷	°/۹۰۷	۱/۱۵۹	۱/۰۰۹	۱/۲۸۴
	$\hat{\alpha}$	°/۵۱۶	°/۱۲۶	°/۱۳۱	°/۲۶۹	°/۷۶۲	°/۵۴۴	۱/۳۹۶
	$\hat{\beta}$	°/۸۶۵	°/۰۶۲	°/۰۶۶	°/۷۴۴	°/۹۸۶	°/۷۵۵	۱/۰۲۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۲	°/۰۶۴	°/۰۶۵	°/۹۲۳	۱/۱۷۹	۱/۰۲۹	۱/۳۰۹
	$\hat{\alpha}$	°/۵۱۳	°/۱۲۵	°/۱۳۱	°/۲۶۸	°/۷۵۸	°/۵۴۴	۱/۳۹۶
	$\hat{\beta}$	°/۸۶۷	°/۰۶۲	°/۰۶۴	°/۷۴۶	°/۹۸۸	°/۷۵۵	۱/۰۲۱
حالت ۲ : n=۲۰ و s=۴								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۶	°/۱۲۱	°/۱۲۶	°/۸۰۱	۱/۲۷۲	°/۷۳۲	۱/۱۶۹
	$\hat{\alpha}$	°/۵۲۲	°/۱۶۷	°/۱۷۷	°/۱۹۵	°/۸۴۹	°/۲۶۹	°/۹۴۵
	$\hat{\beta}$	°/۸۷۳	°/۰۷۶	°/۰۸۲	°/۷۲۳	۱/۰۲۳	°/۷۰۷	۱/۰۰۷
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۷	°/۱۲۲	°/۱۲۸	°/۸۱۷	۱/۲۹۶	°/۷۴۵	۱/۱۹۲
	$\hat{\alpha}$	°/۵۲۴	°/۱۶۶	°/۱۷۷	°/۱۹۷	°/۸۵۱	°/۲۶۹	°/۹۴۵
	$\hat{\beta}$	°/۸۷۵	°/۰۷۷	°/۰۷۹	°/۷۲۵	۱/۰۲۶	°/۷۰۸	۱/۰۰۸
حالت ۳ : n=۱۰ و s=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	°/۸۸۱	°/۰۹۱	°/۰۹۲	°/۸۵۸	۱/۲۱۳	°/۷۷۹	۱/۰۹۱
	$\hat{\alpha}$	°/۵۲۵	°/۱۷۹	°/۱۸۹	°/۱۷۴	°/۸۷۷	°/۱۹۲	°/۶۸۴
	$\hat{\beta}$	°/۸۸۱	°/۰۸۹	°/۰۹۷	°/۷۰۶	۱/۰۵۷	°/۷۸۴	۱/۱۷۲
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۶	°/۰۹۳	°/۰۹۸	°/۸۷۴	۱/۲۳۸	°/۷۹۴	۱/۱۱۲
	$\hat{\alpha}$	°/۵۲۶	°/۱۸۲	°/۱۸۷	°/۱۷۲	°/۸۷۹	°/۱۹۲	°/۶۸۳
	$\hat{\beta}$	°/۸۷۹	°/۰۸۹	°/۱۰۲	°/۷۰۵	۱/۰۵۵	°/۷۸۴	۱/۱۷۲
حالت ۴ : n=۱۰ و s=۴								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۹	°/۱۶۸	°/۱۸۴	°/۷۰۸	۱/۳۷۱	°/۸۴۵	۱/۴۹۲
	$\hat{\alpha}$	°/۵۳۶	°/۲۳۸	°/۲۶۲	°/۰۶۸	۱/۰۰۵	°/۲۳۶	۱/۲۰۱
	$\hat{\beta}$	°/۸۹۸	°/۱۱۲	°/۱۲۵	°/۶۷۸	۱/۱۱۷	°/۷۹۲	۱/۲۹۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۶۷	°/۱۷۳	°/۱۸۰	°/۷۲۷	۱/۴۰۶	°/۸۶۱	۱/۵۲۱
	$\hat{\alpha}$	°/۵۴۳	°/۲۴۲	°/۲۶۴	°/۰۶۸	۱/۰۱۸	°/۲۳۵	۱/۲۰۱
	$\hat{\beta}$	°/۸۹۶	°/۱۱۲	°/۱۲۶	°/۶۷۶	۱/۱۱۵	°/۷۹۲	۱/۲۹۱

۲.۴ نتایج شبیه سازی برای داده‌های سانسور نوع یک

برای ارزیابی و عملکرد روش‌های استنباط شده برای داده‌های سانسور شده نوع یک، همانند بخش قبلی مطالعه شبیه‌سازی انجام داده‌ایم. در این مطالعه، مقادیر واقعی پارامترها را برابر $s = 6$ انتخاب شده و تعداد نمونه‌های آزمون را در هر سطح تنش برابر با $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 40, 60$ تعیین کردیم. در سانسور نوع اول، آزمون در لحظه t از قبل تعیین شده پایان می‌پذیرد. $t = 6, 8$ انتخاب شده و بنابراین چهار حالت مختلف از n و t خواهیم داشت که در هر حالت، نمونه تولید شده را با لحظه اتمام t مقایسه کرده و کوچکترین آن را به عنوان زمان شکست مشاهده شده و به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

$$x_{k(1)}^* \leq x_{k(2)}^* \leq \dots \leq x_{k(r_k)}^*$$

برآورد پارامترها و خلاصه نتایج را توسط مدل پیشنهادی و بر اساس روش نیوتون - رافسون به دست آوردیم. برای یک نمونه داده با گزینه‌های مختلف از λ, α و β ، برآورد پارامترها، انحراف استاندارد برآوردها، خطای استاندارد مجانی و فاصله اطمینان ۹۵٪ برای آن‌ها را محاسبه کردیم. فاصله اطمینان را با استفاده از دو روش توزیع مجانی و خودگردان سازی پارامتری به دست آوردیم. نتایج در جدول‌های ۴.۴ تا ۶.۴ گزارش شده‌اند.

۱.۲.۴ نتایج شبیه‌سازی

جدول‌های ۴.۴، ۵.۴ و ۶.۴، خلاصه‌ای از نتایج برآورد برای λ, α و β ، بر اساس ۷۵۰ شبیه سازی و ۷۵۰ تکرار خودگردانی می‌باشند. همانند بخش قبلی، از نتایج این جدول‌ها مشاهده می‌کنیم که پارامترهای واقعی به خوبی با خطای استاندارد نسبتاً کوچکی برآورد شده‌اند. $\hat{\lambda}$ بهتر از $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ عمل می‌کند. زیرا اریبی کمتری می‌باشند. برای α, λ و β ثابت، برآوردهای به دست آمده را در چهار حالت مختلف مقایسه می‌کنیم. با کاهش اندازه نمونه، میانگین توان دوم خطا افزایش می‌یابد. همچنین هنگامی که اندازه نمونه ثابت است، میانگین مربع خطای برآوردها کاهش می‌یابد زمانی که لحظه شکست t بیشتر می‌شود. این انتظار را داشتیم زیرا وقتی t افزایش یابد شکست‌های بیشتری در اتمام آزمون خواهیم داشت و در نتیجه عملکرد برآوردها را افزایش می‌دهد. پارامترهای برآورد شده در سراسر چهار حالت، در فاصله اطمینان مجانی قرار دارند. همچنین فاصله اطمینان خودگردان به جزء در چند مورد مشابه فاصله اطمینان مجانی برآورد پارامترها را پوشش می‌دهد.

جدول ۴.۴: نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع یک در مدل فرآیند هندسی وایبل

sim = ۷۵° ، α = ۱/۲ ، β = ۱/۸۵								
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی		
حالت ۱ : n=۴۰ و s=۶ و t=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۲۹	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۹۸۸	۰/۹۸۵	۱/۰۶۹	
	$\hat{\alpha}$	۱/۱۹۸	۰/۰۹۶	۰/۰۹۵	۱/۰۰۹	۰/۹۹۷	۱/۳۸۱	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۵۷	۰/۰۹۳	۰/۰۹۴	۱/۶۷۳	۱/۷۰۳	۲/۰۸۵	
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۴۹	۰/۰۲۱۳	۰/۰۲۱۴	۱/۰۰۷	۰/۰۹۱	۱/۱۴۱	
	$\hat{\alpha}$	۱/۱۹۷	۰/۰۹۵	۰/۰۹۷	۱/۰۰۹	۱/۱۵۳	۱/۶۱۲	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۶۶	۰/۰۹۳	۰/۰۹۶	۱/۶۸۲	۱/۶۸۱	۲/۰۴۳	
حالت ۲ : n=۴۰ و s=۶ و t=۸								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۲۰	۰/۰۲۱	۰/۹۹۱	۱/۰۷۲	۱/۰۷۸	
	$\hat{\alpha}$	۱/۲۰۷	۰/۰۹۶	۰/۰۹۷	۱/۰۱۸	۱/۳۹۷	۱/۵۰۳	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۶۶	۰/۰۹۵	۰/۰۹۶	۱/۶۸۲	۱/۷۶۵	۲/۱۸۵	
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۴۹	۰/۰۲۱	۰/۰۲۲	۱/۰۰۷	۱/۰۹۱	۱/۰۸۸	
	$\hat{\alpha}$	۱/۱۹۸	۰/۰۹۵	۰/۰۹۸	۱/۰۱۱	۱/۳۸۶	۱/۳۴۲	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۶۴	۰/۰۹۴	۰/۰۹۵	۱/۶۷۹	۱/۶۷۴	۲/۰۱۹	
حالت ۳ : n=۶۰ و s=۶ و t=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۱۶	۰/۰۱۷	۰/۹۹۷	۱/۰۶۴	۱/۰۴۵	
	$\hat{\alpha}$	۱/۲۰۵	۰/۰۷۸	۰/۰۷۹	۱/۰۵۱	۱/۳۵۹	۱/۲۴۷	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۶۶	۰/۰۷۶	۰/۰۷۴	۱/۷۱۵	۱/۶۹۹	۱/۹۹۷	
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۱۷۱	۰/۰۱۷۴	۱/۰۱۵	۱/۰۸۴	۱/۰۹۴	
	$\hat{\alpha}$	۱/۲۰۱	۰/۰۷۸	۰/۰۷۷	۱/۰۴۷	۱/۳۵۵	۱/۳۴۲	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۶۲	۰/۰۷۶	۰/۰۷۸	۱/۷۱۲	۱/۷۲۲	۲/۰۲۳	
حالت ۴ : n=۶۰ و s=۶ و t=۸								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۷۳	۰/۹۹۶	۱/۰۶۳	۱/۰۴۸	
	$\hat{\alpha}$	۱/۲۰۱	۰/۰۷۸۴	۰/۰۷۸۶	۱/۰۴۷	۱/۳۵۶	۱/۳۰۱	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۵۵	۰/۰۷۶	۰/۰۷۵	۱/۷۰۶	۱/۶۷۹	۱/۹۷۴	
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۱۸	۰/۰۱۷۸	۱/۰۱۷	۱/۰۸۴	۱/۰۷۳	
	$\hat{\alpha}$	۱/۲۰۴	۰/۰۷۸	۰/۰۷۷	۱/۰۵۱	۱/۳۵۸	۱/۳۶۴	
	$\hat{\beta}$	۱/۸۶۶	۰/۰۷۶	۰/۰۷۵	۱/۷۱۶	۱/۷۴۱	۲/۰۶۳	

جدول ۵.۴: نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع یک در مدل فرآیند هندسی وایبل

$sim = 75^\circ, \alpha = 0/9, \beta = 1/85$							
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی	
حالت ۱: $n=40$ و $s=6$ و $t=6$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۱۲	۰/۰۹۸۹	۱/۰۷۱	۰/۰۹۷۳
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۹۰۱	۰/۰۷۲	۰/۰۷۳	۰/۰۷۵۹	۱/۰۴۱	۰/۰۷۱۹
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۶۷	۰/۰۹۴۲	۰/۰۹۴۷	۱/۰۶۸۲	۲/۰۵۲	۱/۰۶۸۴
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۴۹	۰/۰۲۱۳	۰/۰۲۱۵	۱/۰۰۰۸	۱/۰۹۲	۰/۰۹۹۶
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۸۹۹	۰/۰۷۱	۰/۰۷۲	۰/۰۷۵۸	۱/۰۴۱	۰/۰۷۱۲
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۶۷	۰/۰۹۴	۰/۰۹۷	۱/۰۶۸۲	۲/۰۵۱	۱/۰۶۱۱
حالت ۲: $n=40$ و $s=6$ و $t=8$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۲۹	۰/۰۱۳۵	۰/۰۱۳۷	۱/۰۰۰۳	۱/۰۵۶	۰/۰۹۷۳
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۸۹۷	۰/۰۶۱	۰/۰۶۲	۰/۰۷۷۹	۱/۰۱۶	۰/۰۷۰۷
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۶۱	۰/۰۸۱	۰/۰۸۳	۱/۰۷۰۱	۲/۰۱۹	۱/۰۷۴۴
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۴۹	۰/۰۱۳۸	۰/۰۱۳۴	۱/۰۰۲۳	۱/۰۷۷	۱/۰۰۲۶
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۹۰۱	۰/۰۶۰۵	۰/۰۶۰۳	۰/۰۷۸۲	۱/۰۱۹	۰/۰۷۷۹
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۵۹	۰/۰۸۱	۰/۰۸۷	۱/۰۷۰۱	۲/۰۱۹	۱/۰۶۴۵
حالت ۳: $n=60$ و $s=6$ و $t=6$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۱۷۱۳	۰/۰۱۷۱۲	۰/۰۹۶	۱/۰۶۴	۱/۰۰۰۹
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۹۰۲	۰/۰۵۸۹	۰/۰۵۸۵	۰/۰۷۸۶	۱/۰۱۷	۰/۰۸۴۵
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۶۲	۰/۰۷۶۶	۰/۰۷۶۴	۱/۰۷۱۱	۲/۰۱۲	۱/۰۷۱۵
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۱۷	۰/۰۱۶۹	۱/۰۰۱۶	۱/۰۸۴	۱/۰۰۱۳
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۹۰۳	۰/۰۵۹	۰/۰۵۷	۰/۰۷۸۷	۱/۰۱۹	۰/۰۷۸۸
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۶۲	۰/۰۷۶	۰/۰۷۵	۱/۰۷۱۲	۲/۰۱۲۱	۱/۰۶۵۶
حالت ۴: $n=60$ و $s=6$ و $t=8$							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۱۷۱	۰/۰۱۷۲	۰/۰۹۹۶	۱/۰۶۱	۰/۰۹۹۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۹۰۲	۰/۰۵۸	۰/۰۵۹	۰/۰۷۸۶	۱/۰۱۷	۰/۰۷۶۱
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۶۲	۰/۰۷۶	۰/۰۸۱	۱/۰۷۱۲	۲/۰۱۳	۱/۰۷۹۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۷۳	۱/۰۰۱۶	۱/۰۸۴	۱/۰۰۳۴
	$\hat{\alpha}$	۰/۰۹۰۲	۰/۰۵۹	۰/۰۵۸	۰/۰۷۸۶	۱/۰۱۸	۰/۰۸۲۸
	$\hat{\beta}$	۱/۰۸۵۸	۰/۰۷۶	۰/۰۷۵	۱/۰۷۰۸	۲/۰۰۸	۱/۰۶۶۴

جدول ۶.۴: نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع یک در مدل فرآیند هندسی وایبل

sim = ۷۵° ، α = °/۹ ، β = °/۸۵								
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی		
حالت ۱ : n=۴۰ و s=۶ و t=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۱	۰/۰۴۵	۰/۰۴۷	۰/۹۴۱	۱/۱۱۹	۰/۹۹۱	۱/۱۶۷
	$\hat{\alpha}$	۰/۸۹۸	۰/۱۵۵	۰/۱۵۸	۰/۵۹۳	۱/۲۰۳	۰/۹۰۶	۱/۶۶۹
	$\hat{\beta}$	۰/۸۵۹	۰/۰۴۳	۰/۰۴۴	۰/۷۷۴	۰/۹۴۴	۰/۷۶۱	۰/۹۱۵
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۴۶	۰/۰۴۷	۰/۹۶۱	۱/۱۴۲	۰/۹۹۱	۱/۱۶۷
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۱۱	۰/۱۵۸	۰/۱۵۷	۰/۶۰۱	۱/۲۲۱	۰/۷۳۱	۱/۳۷۵
	$\hat{\beta}$	۰/۸۵۹	۰/۰۴۳	۰/۰۴۵	۰/۷۷۴	۰/۹۴۵	۰/۷۳۲	۰/۸۷۹
حالت ۲ : n=۴۰ و s=۶ و t=۸								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۲	۰/۰۴۵	۰/۰۴۶	۰/۹۴۲	۱/۱۲۲	۱/۱۰۸	۱/۲۹۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۱۶	۰/۱۵۹	۰/۱۶۱	۰/۶۰۳	۱/۲۲۹	۱/۲۰۶	۲/۱۶۸
	$\hat{\beta}$	۰/۸۵۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۴	۰/۷۷۲	۰/۹۴۲	۰/۸۴۶	۱/۰۲۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۴۶	۰/۰۴۷	۰.۹۵۹	۱/۱۴۲	۰/۹۵۱	۱/۱۲۹
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۰۹	۰/۱۵۸	۰/۱۵۹	۰/۵۹۹	۱/۲۱۹	۰/۵۲۸	۱/۰۴۵
	$\hat{\beta}$	۰/۸۵۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۷۷۳	۰/۹۴۳	۰/۷۱۷	۰/۸۶۳
حالت ۳ : n=۶۰ و s=۶ و t=۶								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۲۷	۰/۰۳۷	۰/۰۳۷	۰/۹۵۲	۱/۱۰۱	۰/۹۴۱	۱/۰۸۵
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۰۷	۰/۱۳۰۸	۰/۱۳۰۶	۰/۶۵۱	۱/۱۶۴	۰/۶۷۴	۱/۱۷۴
	$\hat{\beta}$	۰/۸۴۹	۰/۰۳۵	۰/۰۳۳	۰/۷۸۱	۰/۹۱۸	۰/۷۸۳	۰/۹۰۵
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۴	۰/۰۳۸	۰/۰۳۷	۰/۹۷۸	۱/۱۳۱	۰/۹۶۴	۱/۱۲۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۲۵	۰/۱۳۳	۰/۱۲۸	۰/۶۶۳	۱/۱۸۷	۰/۶۴۵	۱/۱۵۹
	$\hat{\beta}$	۰/۸۴۷	۰/۰۳۵	۰/۰۳۴	۰/۷۷۸	۰/۹۱۵	۰/۷۶۵	۰/۸۸۶
حالت ۴ : n=۶۰ و s=۶ و t=۸								
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۲۸	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸	۰/۹۵۵	۱/۱۰۲	۱/۰۱۷	۱/۱۵۹
	$\hat{\alpha}$	۰/۸۹۹	۰/۱۲۷	۰/۱۳۱	۰/۶۴۹	۱/۱۵۱	۰/۹۲۱	۱/۵۲۹
	$\hat{\beta}$	۰/۸۵۵	۰/۰۳۵	۰/۰۳۷	۰/۷۸۶	۰/۹۲۴	۰/۸۱۲	۰/۹۵۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۱	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۸۲	۰/۹۷۵	۱/۱۲۵	۰/۹۹۶	۱/۱۴۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۰۵	۰/۱۲۹	۰/۱۳۳	۰/۶۵۲	۱/۱۵۹	۰/۷۵۹	۱/۲۹۵
	$\hat{\beta}$	۰/۸۵۵	۰/۰۳۵	۰/۰۳۷	۰/۷۸۶	۰/۹۲۴	۰/۷۹۲	۰/۹۱۹

۳.۴ نتایج شبیه سازی برای داده‌های سانسور نوع دو

برای ارزیابی و عملکرد روش‌های استنباط شده برای داده‌های سانسور شده نوع دو، همانند بخش‌های قبلی مطالعه شبیه‌سازی انجام داده‌ایم. در این مطالعه، مقادیر واقعی پارامترها را $\alpha = 0.9, 1.2, \lambda = 10^3, 10^5$ و $\beta = 0.85, 1.85$ قرار دادیم. تعداد سطوح تنش $s = 4, 6$ انتخاب شده است و تعداد نمونه‌های آزمون را در هر سطح تنش برابر با $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 120, 150$ می‌باشد. در سانسور نوع دوم، آزمون زمانی که r امین شکست اتفاق می‌افتد، پایان می‌پذیرد. از آن جایی که $r \leq n$ می‌باشد ما ۴ ترکیب از (n, r) داریم:

$$(n, r) = (150, 20), (150, 25), (120, 12), (120, 15)$$

برای شبیه‌سازی، زمان شکست X_{ki}^* را تحت هر کدام از سطوح تنش $s, k = 1, 2, \dots$ ، به صورت صعودی مرتب کردیم. زمان شکست واقعی مشاهده شده $x_{k(1)}^*, x_{k(2)}^*, \dots, x_{k(r)}^*$ می‌باشند. در سطح تنش k امین، $(n - r)$ نمونه در زمان $x_{k(r)}^*$ ، سانسور شده‌اند. برای هر انتخاب α, λ و β در چهار حالت از ترکیب‌های مختلف (n, r) ، برآورد پارامترها، انحراف استاندارد برآوردها، خطای استاندارد مجانی و فاصله اطمینان ۹۵٪ برای پارامترها، را بررسی کردیم. فاصله اطمینان را با استفاده از دو روش توزیع مجانی و بوت استرپ پارامتری به دست می‌آوریم.

۱.۳.۴ نتایج شبیه‌سازی

نتایج عددی نشان داده شده در جدول‌های ۷.۴ و ۸.۴ براساس ۷۵۰ شبیه‌سازی و ۷۵۰ تکرار می‌باشند. همان طور که انتظار می‌رفت، برآوردکننده‌های پیشنهادی، با داده‌های کامل و داده‌های سانسور شده نوع یک عملکرد مشابهی دارند. $\hat{\lambda}$ بهتر از $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ عمل می‌کند. زیرا اریبی کمتر بوده و میانگین توان دوم خطای آن نزدیک به انحراف استاندارد برآوردها می‌باشد. زمانی که اندازه نمونه n ، ثابت می‌شود خطای مجذور میانگین پارامترها کاهش می‌یابد، در حالی که r ، بزرگتر می‌شود. زیرا وقتی که تعداد شکست‌ها افزایش می‌یابد، واریانس درستنمایی ماکسیمم پارامترها کاهش خواهد یافت.

جدول ۷.۴: نتایج شبیه سازی برای داده های سانسور نوع دو در مدل فرآیند هندسی وایبل

sim = ۷۵° ، α = °/۹ ، β = ۱/۸۵							
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	برآورد خطای استاندارد	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان بوت استری	
حالت ۱ : r=۲° و s=۴ و n=۱۵°							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۴۴	۰/۰۵۶	۰/۰۶۱	۰/۹۳۲	۱/۱۵۶	۰/۹۶۵
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۹۹	۰/۱۸۶	۰/۱۸۱	۰/۶۳۳	۱/۳۶۴	۰/۴۷۶
	$\hat{\beta}$	۱/۸۲۲	۰/۱۸۷	۰/۱۸۳	۱/۴۵۵	۲/۱۸۸	۱/۷۳۷
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۶۳	۰/۰۵۸	۰/۰۶۴	۰/۹۴۹	۱/۱۷۷	۰/۹۲۵
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۹۷	۰/۱۸۸	۰/۱۹۳	۰/۶۲۷	۱/۳۶۷	۰/۵۰۸
	$\hat{\beta}$	۱/۸۲۳	۰/۱۸۸	۰/۱۹۲	۱/۴۵۴	۲/۱۹۳	۱/۴۹۲
حالت ۲ : r=۲۵° و s=۴ و n=۱۵°							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۷	۰/۰۴۹	۰/۰۵۵	۰/۹۴۱	۱/۱۳۴	۰/۸۷۵
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۳۴	۰/۱۵۱	۰/۱۵۹	۰/۶۸۱	۱/۲۶۹	۰/۶۵۱
	$\hat{\beta}$	۱/۸۲۴	۰/۱۶۵	۰/۱۷۱	۱/۴۹۹	۲/۱۴۸	۱/۲۹۵
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۴	۰/۹۶۱	۱/۱۵۹	۱/۰۷۶
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۷۲	۰/۱۵۲	۰/۱۵۸	۰/۶۷۷	۱/۲۷۵	۰/۷۳۹
	$\hat{\beta}$	۱/۸۳۱	۰/۱۶۷	۰/۱۶۷	۱/۵۰۳	۲/۱۵۹	۱/۵۳۹
حالت ۳ : r=۱۵° و s=۶ و n=۱۲°							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۶	۰/۰۶۳	۰/۰۶۷	۰/۹۱۲	۱/۱۶۱	۰/۹۷۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۱۲	۰/۱۸۶	۰/۱۸۹	۰/۵۴۶	۱/۲۷۸	۰/۶۵۵
	$\hat{\beta}$	۱/۸۵۵	۰/۲۱۳	۰/۲۱۴	۱/۴۳۷	۲/۲۷۳	۱/۴۸۶
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۴	۰/۰۳۴	۰/۰۳۷	۰/۹۸۶	۱/۱۲۲	۰/۹۲۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۱۲	۰/۱۴۸	۰/۱۶۳	۰/۶۲۱	۱/۲۰۴	۰/۴۹۱
	$\hat{\beta}$	۱/۸۵۶	۰/۱۷۵	۰/۱۷۷	۱/۵۱۳	۲/۲۰۱	۱/۳۶۹
حالت ۴ : r=۱۲° و s=۶ و n=۱۲°							
۱/۰۳	$\hat{\lambda}$	۱/۰۳۴	۰/۰۷۱	۰/۰۷۶	۰/۸۹۶	۱/۱۷۲	۰/۹۸۸
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۰۳	۰/۲۱۶	۰/۲۲۳	۰/۴۷۹	۱/۳۲۶	۰/۷۴۷
	$\hat{\beta}$	۱/۸۹۱	۰/۲۴۵	۰/۲۶۴	۱/۴۰۹	۲/۳۷۱	۱/۵۱۱
۱/۰۵	$\hat{\lambda}$	۱/۰۵۹	۰/۰۳۹	۰/۰۴۷	۰/۹۸۱	۱/۱۳۷	۰/۹۵۲
	$\hat{\alpha}$	۰/۹۴۲	۰/۱۸۹	۰/۲۱۴	۰/۵۷۲	۱/۳۱۳	۰/۴۴۷
	$\hat{\beta}$	۱/۸۴۶	۰/۱۹۸	۰/۲۰۶	۱/۴۵۷	۲/۲۳۵	۱/۶۷۱

جدول ۸.۴: نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور نوع دو در مدل فرآیند هندسی وایبل

$sim = 75^\circ, \alpha = 1/2, \beta = 1/85$							
λ	پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	خطای استاندارد مجانی	فاصله اطمینان مجانی	فاصله اطمینان خودگردانی	
حالت ۱: $n=15^\circ$ و $s=4$ و $r=2^\circ$							
$1/0.3$	$\hat{\lambda}$	$1/0.34$	$0/0.55$	$0/0.54$	$0/926$	$1/142$	$0/942$
	$\hat{\alpha}$	$1/199$	$0/211$	$0/169$	$0/784$	$1/613$	$0/760$
	$\hat{\beta}$	$1/854$	$0/189$	$0/168$	$1/483$	$2/225$	$1/523$
$1/0.5$	$\hat{\lambda}$	$1/0.52$	$0/0.55$	$0/0.58$	$0/942$	$1/161$	$0/971$
	$\hat{\alpha}$	$1/196$	$0/211$	$0/178$	$0/781$	$1/611$	$0/764$
	$\hat{\beta}$	$1/854$	$0/189$	$0/168$	$1/482$	$2/225$	$1/688$
حالت ۲: $n=15^\circ$ و $s=4$ و $r=25^\circ$							
$1/0.3$	$\hat{\lambda}$	$1/0.31$	$0/0.48$	$0/0.51$	$0/937$	$1/126$	$0/962$
	$\hat{\alpha}$	$1/181$	$0/172$	$0/154$	$0/842$	$1/519$	$0/861$
	$\hat{\beta}$	$1/853$	$0/166$	$0/149$	$1/526$	$2/181$	$1/608$
$1/0.5$	$\hat{\lambda}$	$1/0.54$	$0/0.49$	$0/0.54$	$0/958$	$1/151$	$1/0.25$
	$\hat{\alpha}$	$1/184$	$0/173$	$0/158$	$0/845$	$1/523$	$0/932$
	$\hat{\beta}$	$1/863$	$0/167$	$0/161$	$1/534$	$2/192$	$1/462$
حالت ۳: $n=12^\circ$ و $s=6$ و $r=15^\circ$							
$1/0.3$	$\hat{\lambda}$	$1/0.32$	$0/0.33$	$0/0.34$	$0/967$	$1/0.98$	$0/966$
	$\hat{\alpha}$	$1/201$	$0/188$	$0/182$	$0/831$	$1/571$	$0/799$
	$\hat{\beta}$	$1/865$	$0/175$	$0/184$	$1/521$	$2/209$	$1/598$
$1/0.5$	$\hat{\lambda}$	$1/0.53$	$0/0.34$	$0/0.35$	$0/986$	$1/121$	$1/0.39$
	$\hat{\alpha}$	$1/203$	$0/195$	$0/202$	$0/818$	$1/586$	$0/921$
	$\hat{\beta}$	$1/875$	$0/181$	$0/195$	$1/522$	$2/229$	$1/634$
حالت ۴: $n=12^\circ$ و $s=6$ و $r=12^\circ$							
$1/0.3$	$\hat{\lambda}$	$1/0.32$	$0/0.37$	$0/0.38$	$0/958$	$1/106$	$0/985$
	$\hat{\alpha}$	$1/202$	$0/231$	$0/233$	$0/751$	$1/653$	$0/938$
	$\hat{\beta}$	$1/883$	$0/202$	$0/207$	$1/486$	$2/281$	$1/473$
$1/0.5$	$\hat{\lambda}$	$1/0.56$	$0/0.38$	$0/0.42$	$0/979$	$1/132$	$0/976$
	$\hat{\alpha}$	$1/224$	$0/241$	$0/234$	$0/752$	$1/695$	$0/644$
	$\hat{\beta}$	$1/871$	$0/204$	$0/194$	$1/471$	$2/271$	$1/567$

نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

در این پایان‌نامه، مدل فرآیند هندسی وایبل را برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته تحت فشار ثابت، با سه طرح داده‌های کامل، سانسور نوع یک و سانسور نوع دو بررسی کرده‌ایم. برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم، فاصله اطمینان‌های مجانی و خودگردانی برای پارامترها را به‌دست آوردیم. همچنین مطالعات شبیه‌سازی را انجام داده و نتایج حاصل از آن را گزارش کردیم. استنباط بر روی یک مدل فشار ثابت با داده‌های سانسور، به طور گسترده در دو دهه گذشته مورد مطالعه قرار گرفته است. روش مدل فرآیند هندسی ارائه‌شده، دارای چند نوآوری و ویژگی‌های منحصر بفرد در مقایسه با روش‌های موجود می‌باشد. اولاً فرآیند هندسی یک رویکرد شهودی و طبیعی نزدیک به مطالعه داده‌های عمر تسریع‌یافته، وقتی که دارای یک روند کاهشی بیش از افزایش سطح تنش است. یعنی در تعمیر و نگهداری سیستم‌هایی که در آن زمان بقاء رو به کاهش است، در حالی که زمان تعمیر آن پس از شکست رو به افزایش است، به کار می‌رود. استنباط‌های گرفته‌شده از مدل فرآیند هندسی به طور مستقیم برای α ، پارامتر مشخصه توزیع طول عمر تحت شرایط معمول، به کار می‌رود. دوماً فرض‌های مدل فرآیند هندسی به راحتی برآورده می‌شوند.

به طور خلاصه، مدل فرآیند هندسی در تحلیل آزمون‌های طول عمر که سطح تنش به صورت حسابی افزایش می‌یابد، پیشنهادی بالقوه امیدوارکننده است. این شرح دادن روند کاهشی از طول عمر روی سطوح تنش افزایشی یک راه بصری بوده و یک شکل ساده برای به دست آوردن پارامترها در سطح معمول فراهم می‌کند. بنابراین منطقی است که می‌گویند مدل ارائه‌شده به خوبی عمل می‌کند.

در ادامه تحقیق می‌توانیم در حالتی که مدل تحت فشار ثابت می‌باشد، بررسی‌های انجام شده را بر اساس توزیع‌های دیگر طول عمر و سانسورهای متفاوت بر اساس نیاز صنعت و جامعه گسترش داد. همچنین مدل حاضر را می‌توانیم تحت فشار مرحله‌ای و فشار افزایشی بررسی کرد.

مراجع

- [۱] اسدی م، (۱۳۹۲)، ”مقدمه‌ای بر نظریه قابلیت اعتماد” چاپ اول، انتشارات نشر دانشگاهی، صفحه ۱۵۶-۳۸.
- [۲] بهلولی زفره م، (۱۳۸۸) ”آزمون‌های طول عمر تسريع یافته”، نشریه دانشجویی آمار، شماره ۱، دوره ۷، ص ۳۲.
- [۳] پارسیان ا، (۱۳۸۶)، ”مبانی آمار ریاضی” چاپ اول، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، صفحه ۵۰-۳۸.
- [۴] رحیم زاده ف. و استوار ا. (۱۳۷۷)، چهارمین کنفرانس بین المللی آمار ایران، ”کاربردهای توزیع‌های آماری در محاسبه بادنسنجی با استفاده از داده‌های بادنسنجی”، دانشگاه شهید بهشتی.
- [۵] صادق پور ا، (۱۳۹۱)، پایان‌نامه ارشد: ”پیش بینی در آزمون‌های فشار - مرحله‌ای”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [6] Ader H. J. and Mellenbergh G. J. (2008), ”**Advising on research methods: a consultant's companion**”, Huizen, The Netherlands, Johannes van Kessel Publishing.
- [7] Anwar S. and Kamal M. and Islam A. (2013), ”**Mathematical model of accelerated life testing using geometric process for Marshall-Olkin extended exponential distribution**”, International Journal of Innovative Research in Science , Engineering and Technology, vol.2, no.12, pp. 7382-7390.
- [8] Arnold B. C. and Balakrishnsn N. and Nagaraja H. N. (2008), ”**A first course in order statistics**”, John Wiley and Sons, New York.
- [9] Bain L. J. and Engelhardt M. (1991), ”**Statistical Analysis of Reliability and Life Testing Models**”, Second Edition, Marcel Dekker, New York.
- [10] Balakrishnan. N. and Chohen. A. C. (1991), ”**Order statistics and Inference: Estimation Methods**, Academic Press, San Diego.

-
- [11] Cohen. A. C. (1991), "**Truncated and Censored Samples - Theory and Applications**", Marcel Dekker, New York.
 - [12] David H. A. and Nagaraja H. N. (2003), "**Order statistics**", Third Edition, John Wiley and Sons, Hoboken.
 - [13] Efron B. and Tibshirani R. J. (1993), "**An Introduction to the bootstrap**", Chapman and Hall, London, UK.
 - [14] Huang Sh.,(2011), "**Statistical inference in accelerated life testing with geometric process model**", Master's thesis, Math. Dept. San diego state University.
 - [15] Kalbfleisch J. D. and Prentice R. L. (2002), "**The Statistical Analysis of Failure Time Data**", Second Edition, John Wiley and Sons, Hoboken.
 - [16] Kamal M. (2013), "**Application of geometric process in accelerated life testing analysis with type-I censor weibull failure data**", Reliability: Theory and Applications, vol.8, no.3, pp. 87-96.
 - [17] Klein D. G. and Kleinbaum M. (1993), "**Survival analysis: a self-learning text**", Third Edition, New York, Springer.
 - [18] Lam Y. (1988), " **Geometric process and replacement problem**", Acta Mathematicae Applicatae Sinica, vol.4, pp 366-377.
 - [19] Lam Y. and Chan S. K. (1998), " **Statistical inference for geometric processes with lognormal distribution**", Computational Statistics and Data Analysis, vol.27, pp 99-112.
 - [20] Lam Y. (2007), "**The Geometric Process and Its Applications**", World Scientific.
 - [21] Lawless J. F. (1982), "**Statistical Models and Methods for life time data**", John Wiley and Sons, Hoboken.
 - [22] Lawless J.F. (2002), "**Statistical Models and Methods for Lifetime Data**", Second Edition, John Wiley and Sons.
 - [23] Nelson W. (1990), "**Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis**", John Wiley and Sons, Inc , New York.
 - [24] Nelson. W. (2004), "**Applied Life Data Analysis**", John Wiley and Sons, New York.

- [25] McCOOL I. J. (2012), "**Using the Weibull Distribution Reliability, Modeling, and Inference**", John Wiley and Sons., Hoboken.
- [26] Rinne H. (2009), "**The Weibull Distribution**", Chapman and Hall, A Handbook.
- [27] Shaked M. and Singpurwall, N.D. (1983), "**Inference for Step-Stress Accelerated Life Tests**", Journal of Statistical Planning and Inference, vol.7, pp 295–306.
- [28] Vans R. E. (1969), "**The analysis of accelerated temperature tests**" Proceedings of the 1969 Annual Symposium of Reliability, pp 294–302.
- [29] Watkins A. J. (1994), "**Review: Likelihood method for fitting Weibull log-linear models to accelerated life test data**" IEEE Transactions on Reliability, vol.43, pp 361-366.
- [30] Watkins A. J. and John A. (2008), "**On constant stress accelerated life tests terminated by type-II censoring at one of the stress levels**", Journal of Statistical Planning and Inference, vol.138, pp 768-786.
- [31] Wu Sh. J. (2002), "**Estimation of the parameters of the Weibull distribution with progressive censored data**" Journal Japan Statistics Society, Journal Japan Statistics Society.

پیوست آ

کدنویسی با R

به علت حجم زیاد برنامه‌های استفاده‌شده در این پایان‌نامه و جلوگیری از افزایش حجم آن، در زیر نمونه‌ای از محاسبات عددی آورده شده است و سایر کدهای برنامه نویسی R، نزد گردآورنده محفوظ می‌باشد. لذا در صورت تمایل، خوانندگان گرامی می‌توانند با آدرس زیر تماس حاصل فرمایند:

hadigharravi@gmail.com

۱ - دستور فاصله اطمینان مجانی در مدل فرایندهندسی وایبل با استفاده از داده‌های کامل :

```
library(MASS)
rm(list=ls())
#set.seed(7654)
s = 6
n = 10
lambda = 1.05
alpha = 0.5
beta = 1.85
real.par = c(beta, lambda, alpha)
```

```

simnum = 750
gen.data <- function(n, beta, lambda, alpha, s){
  x <- matrix(rep(1,s*n), nrow=s, ncol=n)
  for (k in 1:s){
    x[k,] <- rweibull(n, beta, alpha/lambda^k)
  }
  return(x)
}

x = gen.data(n=n, beta=beta, lambda=lambda, alpha=alpha, s=s)
loglik = function(theta){
  ll = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
    lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    ll[k] = n*beta*k*log(lambda)-n*beta*log(alpha)+n*log(beta)+
      (beta-1)*sum(log(x[k,]))-(lambda^k/alpha)^beta*sum(x[k,]^beta)
  }
  ll = -sum(ll)
  return(ll)
}

gradi = function(theta){
  c1 = c2 = c3 = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
    lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    c1[k] = n*k*log(lambda)-n*log(alpha)+(n/beta)+sum(log(x[k,]))-
      (lambda^k/alpha)^beta*sum((x[k,]^beta)*(log(x[k,])+
        log(lambda^k/alpha)))
    c2[k] = n*beta*k/lambda-
      (beta*k/lambda)*(lambda^k/alpha)^beta*sum(x[k,]^beta)
    c3[k] = -(n*beta/alpha)+
      (beta/alpha)*(lambda^k/alpha)^beta*sum(x[k,]^beta)
  }
}

```

```

}
c1 = -sum(c1)
c2 = -sum(c2)
c3 = -sum(c3)
return(c(c1,c2,c3))
}
fit = optim(par = c(1,1,1), loglik, gr = gradi,
            method = "BFGS", hessian = TRUE)

fit$par
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
se.par
#### Repeat
eval.fit <- function(rep){
  thetafinal = matrix(c(1,1,1), nrow=3,ncol=simnum)
  setheta = matrix(c(1,1,1), nrow=3, ncol=simnum)
  for (i in 1:rep){
    x = gen.data(n=n, beta=beta, lambda=lambda, alpha=alpha, s=s)
    loglik = function(theta){
      ll = c(rep(NA,s))
      beta = theta[1]
      lambda = theta[2]
      alpha = theta[3]
      for (k in 1:s){
        ll[k] = n*beta*k*log(lambda)-n*beta*log(alpha)+n*log(beta)+
          (beta-1)*sum(log(x[k,]))-(lambda^k/alpha)^beta*sum(x[k,]^beta)
      }
      ll = -sum(ll)
    }
    return(ll)
  }
}
#
gradi = function(theta){
  c1 = c2 = c3 = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
  lambda = theta[2]

```

```

alpha = theta[3]
for (k in 1:s){
  c1[k] = n*k*log(lambda)-n*log(alpha)+(n/beta)+sum(log(x[k,]))-
    (lambda^k/alpha)^beta*sum((x[k,]^beta)*(log(x[k,])+
    log(lambda^k/alpha)))
  c2[k] = n*beta*k/lambda-
    (beta*k/lambda)*(lambda^k/alpha)^beta*sum(x[k,]^beta)
  c3[k] = -(n*beta/alpha)+
    (beta/alpha)*(lambda^k/alpha)^beta*sum(x[k,]^beta)
}
c1 = -sum(c1)
c2 = -sum(c2)
c3 = -sum(c3)
return(c(c1,c2,c3))
}

fit = optim(par = c(1,1,1), loglik, gr = gradi,
method = "BFGS", hessian = TRUE)
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n" )
}

return(list(thetafinal, setheta))
}

res = eval.fit(rep = simnum)
##### Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
SE = apply(res[[2]],1,mean)
#Coverage by asymptotic normal distribution:
#nominal level is 0.95

```

```
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=3, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=3, ncol = simnum) - CIl
cover.beta = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.beta
cover.lambda
cover.alpha
estimate
SE
MSE
CIu = CIl = c(NA,NA,NA)
real.par = c(beta,lambda,alpha)
for(j in 1:3){
CIu[j] = estimate[j]+1.96*SE[j]
CIl[j] = estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl
```

۲- دستور فاصله اطمینان مجانی در مدل فرایندهندسی وایبل با استفاده از داده‌های سانسور
نوع یک

```
library(MASS)
rm(list=ls())
#set.seed(7654)
s = 6
n = 40
beta = 1.85
lambda = 1.03
```

```

alpha = .9
censor = 6
r=1
real.par = c(beta, lambda, alpha)
simnum = 750
gen.data <- function(n, r,censor, beta, lambda, alpha, s){
  x <- matrix(rep(1,s*n), nrow=s, ncol=n)
  xcensor <- matrix(rep(1,s*n), nrow=s, ncol=n)
  xsort <- matrix(rep(1,s*n), nrow=s, ncol=n)
  for (k in 1:s){
    x[k,] <- rweibull(n, beta, alpha/lambda^k)
    xcensor[k,] <- pmin(x[k,],censor)
    r[k] <- sum(as.numeric(x[k,] <= censor))
    xsort[k,] <- sort(xcensor[k,])
  }
  return(list(xsort, r))
}
xsort = gen.data(n=n, r=r,censor=censor, beta=beta, lambda=lambda
, alpha=alpha, s=s)
r = xsort[[2]]
#####
loglik = function(theta){
  ll = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
  lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    ll[k] = log(factorial(n)/factorial(n-r[k])) + r[k]*k*beta*
log(lambda)- r[k]*beta*log(alpha)+ r[k]*log(beta)+(beta-1)*
sum(log(xsort[[1]][k,]))- (lambda^k/alpha)^beta*
(sum(xsort[[1]][k,]^beta)+(n-r[k])*censor^beta)
  }
  ll= -sum(ll)
  return(ll)
}

```



```
}  
gradi = function(theta){  
  c1 = c2 = c3 = c(rep(NA,s))  
  beta = theta[1]  
    lambda = theta[2]  
  alpha = theta[3]  
  for (k in 1:s){  
    c1[k] = r[k]*k*log(lambda)-r[k]*log(alpha)+(r[k]/beta)+  
      sum(log(xsort[[1]][k,]))-(lambda^k/alpha)^beta *  
      sum((xsort[[1]][k,]^beta)*(log(xsort[[1]][k,])+  
        log(lambda^k/alpha)))-(n-r[k])*(lambda^k/alpha)^beta*  
        censor^beta *(log(censor)+log(lambda^k/alpha))  
    c2[k] = r[k]*beta*k/lambda-(beta*k/lambda)*(lambda^k/alpha)^beta *  
      (sum(xsort[[1]][k,]^beta)+(n-r[k])*censor^beta)  
    c3[k] = -r[k]*beta/alpha +(beta/alpha)*(lambda^k/alpha)^beta *  
      (sum(xsort[[1]][k,]^beta)+(n-r[k])*censor^beta)  
  }  
  c1 = -sum(c1)  
  c2 = -sum(c2)  
  c3 = -sum(c3)  
  return(c(c1,c2,c3))  
}  
fit = optim(par = c(1,1,1), loglik, gr = gradi,  
           method = "BFGS", hessian =TRUE)  
  
fit$par  
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))  
se.par  
#### Repeat  
eval.fit <- function(rep){  
  thetafinal = matrix(c(1,1,1), nrow=3,ncol=simnum)  
  setheta = matrix(c(1,1,1), nrow=3, ncol=simnum)  
  for (i in 1:rep){  
    xsort = gen.data(n=n, r=r,censor=censor, beta=beta, lambda=lambda  
      , alpha=alpha, s=s)
```

```

loglik = function(theta){
  ll = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
    lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    ll[k] =log(factorial(n)/factorial(n-r[k])) + r[k]*k*beta*
      log(lambda)- r[k]*beta*log(alpha)+ r[k]*log(beta)+(beta-1)*
        sum(log(xsort[[1]][k,]))- (lambda^k/alpha)^beta*
        (sum(xsort[[1]][k,]^beta)+(n-r[k])*censor^beta)
  }
  ll= -sum(ll)
  return(ll)
}
#
gradi = function(theta){
  c1 = c2 = c3 = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
    lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    c1[k] = r[k]*k*log(lambda)-r[k]*log(alpha)+(r[k]/beta)+
      sum(log(xsort[[1]][k,]))- (lambda^k/alpha)^beta *
      sum((xsort[[1]][k,]^beta)*(log(xsort[[1]][k,])+
        log(lambda^k/alpha)))-(n-r[k])*(lambda^k/alpha)^beta *
      censor^beta *(log(censor)+log(lambda^k/alpha))
    c2[k] = r[k]*beta*k/lambda-(beta*k/lambda)*(lambda^k/alpha)^beta *
      (sum(xsort[[1]][k,]^beta)+(n-r[k])*censor^beta)
    c3[k] = -r[k]*beta/alpha +(beta/alpha)*(lambda^k/alpha)^beta *
      (sum(xsort[[1]][k,]^beta)+(n-r[k])*censor^beta)
  }
  c1 = -sum(c1)
  c2 = -sum(c2)
  c3 = -sum(c3)
}

```

```

return(c(c1,c2,c3))
}
fit = optim(par = c(1,1,1), loglik, gr = gradi,
            method = "BFGS", hessian = TRUE)
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n")
}
return(list(thetafinal, setheta))
}
res = eval.fit(rep = simnum)
## Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
SE = apply(res[[2]],1,mean)
## Coverage by asymptotic normal distribution: nominal level is 0.95
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=3, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=3, ncol = simnum) - CIl
cover.beta = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.beta
cover.lambda
cover.alpha
estimate

```

```

SE
MSE
CIu = CIl = c(NA,NA,NA)
real.par = c(beta,lambda,alpha)
for(j in 1:3){
  CIu[j] = estimate[j]+1.96*SE[j]
  CIl[j] = estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl

```

۳- دستور فاصله اطمینان مجانی در مدل فرایندهندسی وایبل با استفاده از داده‌های سانسور نوع دو

```

library(MASS)
rm(list=ls())
#set.seed(7654)
s = 4
n = 150
beta = 1.85
lambda = 1.03
alpha = .95
r = 20
real.par = c(beta, lambda, alpha)
simnum = 750
gen.data <- function(n, r, beta, lambda, alpha, s){
  x <- matrix(rep(1,s*n), nrow=s, ncol=n)
  xcensor <- matrix(rep(1,s*r), nrow=s, ncol=r)
  for (k in 1:s){
    x[k,] <- rweibull(n, beta, alpha/lambda^k)
    xcensor[k,] <- sort(x[k,])[1:r]
  }
  return(xcensor)
}
xcensor = gen.data(n=n, r=r, beta=beta, lambda=lambda

```

```

, alpha=alpha, s=s)

loglik = function(theta){
  ll = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
    lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    ll[k] = log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*k*beta*
      log(lambda)- r*beta*log(alpha)+ r*log(beta)+(beta-1)*
        sum(log(xcensor[k,]))- (lambda^k/alpha)^beta*
          ((xcensor[k,]^beta)+(n-r)*xcensor[k,r]^beta)
  }
  ll = -sum(ll)
  return(ll)
}

####

gradi = function(theta){
  c1 = c2 = c3 = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
    lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]
  for (k in 1:s){
    c1[k] =r*k*log(lambda)-r*log(alpha)+(r/beta)+sum(log(xcensor[k,]))-
      (lambda^k/alpha)^beta * sum((xcensor[k,]^beta)*(log(xcensor[k,])+
        log(lambda^k/alpha)))-(n-r)*(lambda^k/alpha)^beta *
          xcensor[k,r]^beta *(log(xcensor[k,r])+log(lambda^k/alpha))
    c2[k] = r*beta*k/lambda-(beta*k/lambda)*(lambda^k/alpha)^beta *
      (sum(xcensor[k,]^beta)+(n-r)*xcensor[k,r]^beta)
    c3[k] = -r*beta/alpha +(beta/alpha)*(lambda^k/alpha)^beta *
      (sum(xcensor[k,]^beta)+(n-r)*xcensor[k,r]^beta)
  }
  c1 = -sum(c1)
  c2 = -sum(c2)
  c3 = -sum(c3)

```

```

return(c(c1,c2,c3))
}
fit = optim(par = c(1,1,1), loglik, gr = gradi,
           method = "BFGS", hessian = TRUE)
fit$par
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
se.par
##### Repeat
eval.fit <- function(rep){
  thetafinal = matrix(c(1,1,1), nrow=3,ncol=simnum)
  setheta = matrix(c(1,1,1), nrow=3, ncol=simnum)
  for (i in 1:rep){
    xcensor = gen.data(n=n, r=r, beta=beta, lambda=lambda,
                      alpha=alpha, s=s)
    loglik = function(theta){
      ll = c(rep(NA,s))
      beta = theta[1]
      lambda = theta[2]
      alpha = theta[3]
      for (k in 1:s){
        ll[k] = log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*k*beta*
          log(lambda)- r*beta*log(alpha)+ r*log(beta)+(beta-1)*
            sum(log(xcensor[k,]))- (lambda^k/alpha)^beta*
            ((xcensor[k,]^beta)+(n-r)*xcensor[k,r]^beta)
      }
      ll = -sum(ll)
    }
    return(ll)
  }
}
####
gradi = function(theta){
  c1 = c2 = c3 = c(rep(NA,s))
  beta = theta[1]
  lambda = theta[2]
  alpha = theta[3]

```

```

for (k in 1:s){
c1[k] =r*k*log(lambda)-r*log(alpha)+(r/beta)+sum(log(xcensor[k,]))-
      (lambda^k/alpha)^beta * sum((xcensor[k,]^beta)*(log(xcensor[k,])+
      log(lambda^k/alpha)))-(n-r)*(lambda^k/alpha)^beta *
xcensor[k,r]^beta *(log(xcensor[k,r])+log(lambda^k/alpha))
c2[k] = r*beta*k/lambda-(beta*k/lambda)*(lambda^k/alpha)^beta *
      (sum(xcensor[k,]^beta)+(n-r)*xcensor[k,r]^beta)
c3[k] = -r*beta/alpha +(beta/alpha)*(lambda^k/alpha)^beta *
      (sum(xcensor[k,]^beta)+(n-r)*xcensor[k,r]^beta)
}
c1 = -sum(c1)
c2 = -sum(c2)
c3 = -sum(c3)
return(c(c1,c2,c3))
}
fit = optim(par = c(1,1,1), loglik, gr = gradi,
           method = "BFGS", hessian = TRUE)
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n")
}
return(list(thetafinal, setheta))
}
res = eval.fit(rep = simnum)
## Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
SE = apply(res[[2]], 1, mean)
## Coverage by asymptotic normal distribution: nominal level is 0.95
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]

```

```
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=3, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=3, ncol = simnum) - CIl
cover.beta = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/simnum
cover.beta
cover.lambda
cover.alpha
estimate
SE
MSE
CIu = CIl = c(NA,NA,NA)
real.par = c(beta,lambda,alpha)
for(j in 1:3){
CIu[j] = estimate[j]+1.96*SE[j]
CIl[j] = estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl
```


واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Accelerated life testing	آزمون طول عمر تسريع يافته
Order statistics	آماره‌های مرتب
Standard deviation	انحراف استاندارد
Maximum likelihood estimator	برآورد ماکزيمم درست‌نمایی
Shape parameter	پارامتر شکل
Analysis	تجزیه و تحلیل
Technique	تکنیک
Weibull distribution	توزیع وایبل
Generate	تولید کردن
Linear	خطی
Complete data	داده‌ی کامل
Sequence	دنباله
Method	روش
Markov chain	زنجیره‌ی مارکف
Censor	سانسور
Normal stress level	سطح فشار پایه
Simulation	شبیه سازی
Failure	شکست
Numerical	عددی
Screening	غربالگری
Bootstrap confidence interval	فاصله اطمینان خودگردانی
Asymptotic confidence interval	فاصله اطمینان مجانی
Geometric process	فرایند هندسی
Stress	فشار، استرس
Constant stress	فشار ثابت

Increase pressure	فشار افزایشی
Step stress	فشار مرحله‌ای
Reliability	قابلیت اعتماد
Quantitative	کمی
Qualitative	کیفی
Log linear	لگ خطی
Fisher information matrix	ماتریس اطلاع فیشر
Environment	محیط
Time-independent	مستقل از زمان
Character is tic	مشخصه، مولفه، ویژگی
Mean squared error	میانگین مربع خطا
Rate	نرخ
Newton-Rasphson	نیوتون - رافسون
Time-dependent	وابسته به زمان
Coverage	هم پوشانی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accelerated life testing	آزمون طول عمر تسريع يافته
Analysis	تجزيه و تحليل
Asymptotic confidence interval	فاصله اطمینان مجانی
Bootstrap confidence interval	فاصله اطمینان بوت استری
Censor	سانسور
Character	مشخصه، مولفه، ویژگی
Constant stress	فشار ثابت
Complete data	داده‌ی کامل
Coverage	هم پوشانی
Environment	محیط
Failure	شکست
Fisher information matrix	ماتریس اطلاع فیشر
Generate	تولید کردن
Geometric process	فرایند هندسی
Increase pressure	فشار افزایشی
Markov chain	زنجیره‌ی مارکف
Maximum likelihood estimator	برآورد ماکزیمم درستنمایی
Mean squared error	میانگین مربع خطا
Method	روش
Newton- Rasphson	نیوتون - رافسون
Normal stress level	سطح فشار پایه
Numerical	عددی
Order statistics	آماره‌های مرتب
Qualitative	کیفی
Quantitative	کمی

Rate.....	نرخ
Reliability.....	قابلیت اعتماد
Sequence	دنباله
Screening	غربالگری
Stress.....	فشار، استرس
Shape parameter.....	پارامتر شکل
Simulation	شبیه سازی
Standard deviation.....	انحراف استاندارد
Step stress	فشار مرحله‌ای
Technique	تکنیک
Time- dependent	وابسته به زمان
Time- independent	مستقل از زمان
Weibull distribution	توزیع وایبل

Aabstract

In reliability analysis, accelerated life testing is the most common way to assess a product's life. Under such test settings, products are tested at higher than usual levels of stress to induce early failure. The goal of accelerated life analysis is to utilize the test data to extrapolate a product's life distribution and its associated parameters at a normal stress level.

The current study introduces the geometric process model for the analysis of accelerated life testing with an weibull life distribution under constant stress. By assuming that the lifetime under increasing stress levels forms a geometric process, we derive the maximum likelihood estimators of the weibull parameter under three different censoring schemes: no censoring, Type I and Type II censoring. For each censoring type, we also derive confidence intervals for the parameters using both asymptotic distribution and the parametric bootstrap method. The performance of the estimators is evaluated by a simulation study with different pre-fixed parameters.

keywords: Life testing, accelerated, Constant stress, reliability, Type I censored, Type II censored, Asymptotic distribution, parametric bootstrap.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Statistics

**Weibull geometric process model for the
analysis of accelerated life testing**

By: Hadi Seyed Gharravi

Supervisor

Ahmad Nezakati Rezazadeh

Advisor

Hossein Baghishani

January 2017