

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه چندین روش رگرسیون ريج در محیط فازی

نگارنده: معصومه فرخی

استادان راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی
دکتر محمد آرشی

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی
به پاس عاطفه و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است
به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید
و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

سپاس‌گزاری...

پروردگارا ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی کرائت توان شکر نیست. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای متعالی ساختن زندگی خود و دیگران. اکنون که موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته ام لازم می دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده اند، تشکر کنم. از پدر و مادر عزیزم، که هر چه امروز دارم از دعای خیر ایشان است و همواره قوت قلبی برای ادامه راهم بوده‌اند، تشکری ویژه و صمیمانه دارم.

برخود واجب می دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت اساتید فرزانه و گران قدرم دکتر محمدرضا ربیعی و دکتر محمد آرشی که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان بهره مند گشته ام، ابراز نمایم.

همچنین از اساتید بزرگوار و دلسوز دکتر داود شاهسونی و دکتر احمد نزاکتی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم و از اساتید محترم جناب آقای دکتر حسین باغیشنی و سرکارخانم دکتر نگار اقبال، که در زمان تحصیل از محضرشان سود برده و از تجربیات ایشان استفاده کرده‌ام، سپاس گزارم.

در انتها جا دارد از همه دوستان و عزیزانی که در این مدت مرا یاری و راهنمایی نمودند، قدردانی کنم.

معصومه فرخی

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **معصومه فرخی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **مطالعه چندین روش رگرسیون ریج در محیط فازی**، تحت راهنمایی **محمدرضا ربیعی و محمد آرشی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

معصومه فرخی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در مسائل کاربردی که مؤلفه های نادقیق جزء لاینفک آن ها هستند، استفاده از مجموعه های فازی برای بررسی ویژگی ها و اندازه گیری میزان کارایی آن ها، برخی از محدودیت های فعلی را برطرف می سازد. تحلیل آماری نادقیق با داده های فازی، در بسیاری از شاخه های علوم آماری مانند کنترل کیفیت، رگرسیون، قابلیت رو به توسعه است. رگرسیون به عنوان روشی برای تعیین و تحلیل روابط بین متغیرهای آماری تعریف می شود. در رگرسیون کلاسیک فرض هایی همچون دقت بودن متغیرها و مشاهدات مربوط به آن ها و فرض هایی دیگر در تعیین روابط بین متغیرها از جمله اینکه بین متغیرهای پیش بین رابطه هم خطی وجود ندارد، در نظر گرفته می شود. اما ممکن است یک یا چندتا از فرضیه های مربوط به رگرسیون کلاسیک برقرار نباشد. مثلاً مشاهدات مربوط به متغیرها نادقیق باشند یا نادقیق گزارش شده باشند، یا متغیرهای تحت مطالعه دارای ارتباطی نادقیق باشند. در چنین شرایطی ابزارهای کلاسیک نمی توانند معیار مناسبی را برای مدل سازی داده ها ارائه دهند. یکی از راه های ممکن استفاده از مفهوم مجموعه های فازی است. در رگرسیون کلاسیک اگر متغیرهای پیش بین دارای مشکل هم خطی چندگانه باشند در این صورت نتایج بدست آمده از رگرسیون کمترین توان دوم قابل اعتماد نیست. روش های زیادی برای مقابله با این مشکل ارائه شده است که از جمله آن ها می توان به رگرسیون ریج، رگرسیون لاسو، رگرسیون مولفه های اصلی و ... اشاره کرد. در تحلیل رگرسیون در محیط فازی زمانی که هم خطی چندگانه بین متغیرهای پیش بین وجود دارد از اعتبار مدل کاسته می شود. مطالعات اندکی در این زمینه صورت گرفته که در این پایان نامه ضمن تشریح بعضی از آن ها به ارزیابی این روش ها پرداخته می شود. در پایان با تعمیم این روش ها، برای حالتی که متغیرهای پیش بین و متغیر پاسخ فازی فرض شوند و همچنین هم خطی بین متغیرهای پیش بین وجود داشته باشد مدل رگرسیون ریج فازی را پیشنهاد داده ایم. برای بررسی وجود هم خطی چندگانه در بین متغیرهای پیش بین فازی، عامل تورم واریانس تعمیم یافته را معرفی کرده ایم. همچنین نیکویی برازش مدل با شاخص های میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MPE) و ضرب تعیین تعمیم یافته در مثال های شبیه سازی و داده های واقعی مورد بررسی قرار گرفته است

کلمات کلیدی: رگرسیون کمترین توان های دوم فازی، رگرسیون امکانی، رگرسیون ریج فازی، نیکویی برازش، ضریب تعیین تعمیم یافته، عامل تورم واریانس تعمیم یافته

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. فرخی م.، ربیعی م. و آرشی م.، (۱۳۹۵)، ”تحلیل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده دو پارامتری با ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی“، ششمین کارگاه کشوری آمار و احتمال فازی، شاهرود، ایران.
۲. ربیعی م.، آرشی م. و فرخی م.، (۱۳۹۵)، ”تحلیل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده با ورودی و خروجی فازی مثلثی متقارن“، ششمین کارگاه کشوری آمار و احتمال فازی، شاهرود، ایران.
۳. فرخی م.، ربیعی م. و آرشی م.، (۱۳۹۵)، ” رگرسیون ریج فازی دو پارامتری با ورودی دقیق و خروجی فازی“، مجله اندیشه آماری، (تحت داوری).
4. Farrokhi , M., Rabiei , M. , Arashi , M. , (1395), ”Fuzzy ridge regression with fuzzy input and output” , Soft Computing , (Submitted)

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

ف

فهرست جداول

ق

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

۱

۱.۱ مجموعه‌ها و حساب اعداد فازی

۱

۱.۱.۱ مجموعه‌های فازی و روابط بین آن‌ها

۲

۲.۱.۱ اعداد فازی

۹

۳.۱.۱ حساب اعداد فازی

۱۲

۴.۱.۱ فاصله بین دو عدد فازی

۱۴

۲.۱ مروری بر مدل‌های رگرسیون خطی و رگرسیون ریج

۱۹

۱.۲.۱ مدل رگرسیون خطی

۱۹

۲.۲.۱ رگرسیون خطی چندگانه

۲۰

۳.۲.۱ همخطی در رگرسیون چندگانه

۲۳

۴.۲.۱ روش‌هایی برای برخورد با همخطی چندگانه

۲۵

۵.۲.۱ رگرسیون ریج

۲۶

۲ مروری بر رگرسیون در محیط فازی

۳۱

۱.۲ مقدمه

۳۱

۲.۲ انواع رگرسیون فازی

۳۲

۱.۲.۲ رگرسیون کمترین توان‌های دوم خطای فازی

۳۲

۲.۲.۲ رگرسیون امکانی

۳۶

۳.۲ نیکویی برازش

۳۹

۱.۳.۲ ضریب تعیین تعمیم یافته

۴۰

۲.۳.۲ میانگین توان دوم خطای پیشگویی

۴۱

۳.۳.۲ معیار خطا

۴۱

۴.۳.۲ اعتبار سنجی متقابل

۴۲

۴۵	۳ رگرسیون ریج فازی وزن دار شده
۴۵	۱.۳ مقدمه
۴۶	۲.۳ مدل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده
۵۰	۱.۲.۳ مثال شبیه سازی
۵۵	۳.۳ مثال های کاربردی
۵۵	۱.۳.۳ داده های سیمان پرتلند
۵۷	۲.۳.۳ داده های تولید ناخالص ملی
۶۱	۴.۳ رگرسیون ریج فازی وزن دار شده دو پارامتری
۶۵	۱.۴.۳ داده های سیمان پرتلند
۶۸	۲.۴.۳ داده های تولید ناخالص ملی
۷۳	۴ مدل رگرسیون ریج فازی با استفاده از برنامه ریزی درجه دوم
۷۳	۱.۴ مقدمه
۷۳	۲.۴ مدل رگرسیون ریج فازی پیشنهادی
۷۴	۳.۴ مطالعات عددی
۷۴	۱.۳.۴ مثال شبیه سازی شده
۷۷	۲.۳.۴ داده های سیمان پرتلند
۷۹	۳.۳.۴ داده های تولید ناخالص ملی
۸۱	۴.۳.۴ مقایسه سه مدل رگرسیون ریج فازی
۸۵	۵ مدل رگرسیون ریج فازی بر پایه فاصله ی حسن پور و همکاران
۸۵	۱.۵ مقدمه
۸۶	۲.۵ مدل رگرسیون فازی حسن پور
۸۸	۳.۵ مدل رگرسیون ریج فازی پیشنهادی
۸۸	۱.۳.۵ مثال شبیه سازی شده
۹۲	۲.۳.۵ داده های سیمان پرتلند
۹۷	آ برنامه های نوشته شده در ممتیکا
۱۱۱	مراجع
۱۱۷	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۱۱۹	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۱۲۱	نمایه

فهرست تصاویر

۵	۱.۱	نمودار تابع عضویت اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی
۶	۲.۱	h - برش مجموعه فازی A
۸	۳.۱	نگاشتی روی مجموعه A با استفاده از تابع f
۹	۴.۱	نگاشتی روی مجموعه فازی A با استفاده از تابع f
۱۰	۵.۱	نمایش عدد فازی LR
۱۱	۶.۱	نمودار تابع عضویت عدد فازی سهموی
۱۲	۷.۱	نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی متقارن و نامتقارن
۱۲	۸.۱	نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن تقریباً صفر
۱۵	۹.۱	h - برش‌های دو عدد فازی
۱۹	۱۰.۱	تفاوت فاصله دونسو و حسن پور
۳۸	۱.۲	متغیر پاسخ و پیش‌بین فازی مثلثی در مدل تاناکا
۳۹	۲.۲	متغیر پاسخ و پیش‌بین فازی مثلثی در مدل تعمیم یافته تاناکا
۴۰	۳.۲	متغیر پاسخ و پیش‌بین فازی مثلثی در مدل امکانی درجه دوم
۵۴	۱.۳	نمودار پراکنش x ها
۵۵	۲.۳	نمودار MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای داده‌های شبیه سازی
۵۶	۳.۳	نمودار پراکنش x ها در مقابل هم در داده‌های سیمان پرتلند
۵۷	۴.۳	نمودار MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای داده‌های سیمان پرتلند
۵۸	۵.۳	نمودار پراکنش x ها در مقابل هم در داده‌های تولید ناخالص ملی
۶۰	۶.۳	نمودار MPE برای مقادیر مختلف λ در داده‌های تولید ناخالص ملی
۶۶	۷.۳	نمودار MPE سیمان پرتلند در برابر مقادیر مختلف λ_2 به ازای مقدار ثابت $\lambda_1 = 0.8$
۶۹	۸.۳	نمودار MPE داده‌های تولید ناخالص ملی در برابر مقادیر مختلف λ_1 به ازای مقدار ثابت $\lambda_2 = 0.8$
۷۵	۱.۴	تغییرات مراکز ضرایب با افزایش پارامتر ريج
۷۸	۲.۴	تغییرات مراکز ضرایب با افزایش پارامتر ريج
۸۰	۳.۴	تغییرات مراکز ضرایب با افزایش پارامتر ريج

۱.۵ تابع عضویت مقادیر مشاهده شده (Y_i) ، برآورد شده $(\hat{Y}_i)$ و تقریب $(\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-))$

۸۷

فهرست جداول

۱.۲	داده‌های مربوط به مثال ۱.۲	۳۵
۲.۲	داده‌های مربوط به مثال ۲.۲	۴۳
۳.۲	معیارهای نیکویی برازش برای مثال ۲.۲	۴۳
۴.۲	معیار اعتبار سنجی متقابل برای مثال ۲.۲	۴۴
۱.۳	شاخص MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای مثال شبیه سازی شده	۵۱
۲.۳	داده‌های شبیه سازی شده	۵۲
۳.۳	برآورد با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های شبیه سازی شده	۵۳
۴.۳	داده‌های سیمان پرتلند	۵۶
۵.۳	شاخص MPE به ازای مقادیر مختلف λ	۵۷
۶.۳	مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلی برای داده‌های سیمان پرتلند	۵۸
۷.۳	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های سیمان پرتلند	۵۹
۸.۳	داده‌های تولید ناخالص ملی	۵۹
۹.۳	شاخص MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۶۰
۱۰.۳	مقایسه رگرسیون فازی و رگرسیون ریج فازی در داده‌های تولید ناخالص ملی	۶۱
۱۱.۳	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبارسنجی متقابل برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۶۱
۱۲.۳	محاسبه MPE به ازای λ_1 و λ_2 های مختلف در داده‌های سیمان پرتلند	۶۶
۱۳.۳	مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلی برای داده‌های سیمان پرتلند	۶۷
۱۴.۳	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های سیمان پرتلند	۶۷
۱۵.۳	مقایسه MPE رگرسیون ریج فازی و رگرسیون فازی در داده‌های سیمان پرتلند	۶۸
۱۶.۳	محاسبه MPE به ازای λ_1 و λ_2 ی مختلف در داده‌های تولید ناخالص ملی	۶۹
۱۷.۳	مقادیر مشاهده شده فازی و برآورد شده فازی برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۷۰
۱۸.۳	مقایسه رگرسیون فازی و رگرسیون ریج فازی در داده‌های تولید ناخالص ملی	۷۰
۱۹.۳	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبارسنجی متقابل برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۷۱
۱.۴	مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلی	۷۵
۲.۴	برآورد با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های شبیه سازی شده	۷۶

۷۸	مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلثی برای داده‌های سیمان پرتلند . . .	۳.۴
۷۹	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های سیمان پرتلند .	۴.۴
۸۰	مقادیر مشاهده شده فازی و برآورد شده فازی برای داده‌های تولید ناخالص ملی . .	۵.۴
۸۱	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبارسنجی متقابل برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۶.۴
۸۱	مدل‌های رگرسیون برای داده‌های شبیه سازی شده	۷.۴
۸۲	ارزیابی مدل‌های رگرسیونی برای داده‌های شبیه سازی شده	۸.۴
۸۲	مدل‌های رگرسیون برای داده‌های سیمان پرتلند	۹.۴
۸۲	ارزیابی مدل‌های رگرسیونی برای داده‌های سیمان پرتلند	۱۰.۴
۸۳	مدل‌های رگرسیون برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۱۱.۴
۸۳	ارزیابی مدل‌های رگرسیونی برای داده‌های تولید ناخالص ملی	۱۲.۴
۸۹	دو معیار نیکویی برازش برای داده‌های شبیه سازی شده	۱.۵
۹۰	داده‌های شبیه سازی شده	۲.۵
۹۱	مقادیر برآورد شده و فاصله d_1 و d_2	۳.۵
۹۲	مقادیر ورودی فازی برای داده‌های سیمان پرتلند	۴.۵
۹۳	مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلثی برای داده‌های سیمان پرتلند . . .	۵.۵
۹۳	معیارهای نیکویی برازش برای داده‌های سیمان پرتلند	۶.۵
۹۴	مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های سیمان پرتلند .	۷.۵

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل، به بیان برخی مفاهیم اساسی که در فصل‌های آینده به آن نیاز داریم می‌پردازیم. ابتدا مفاهیم مربوط به مجموعه‌های فازی و فواصل بین اعداد، و سپس مفاهیمی مربوط به رگرسیون و مشکل همخطی که از آن در رگرسیون ريج استفاده می‌شود را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مجموعه‌ها و حساب اعداد فازی

مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی، توسط پروفسور لطفعلی عسگرزاده [۵۶] دانشمند ایرانی و استاد دانشگاه برکلی آمریکا، ارائه شد. این نظریه از آن زمان تا کنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. منطق فازی کاربردهای بسیار زیاد و متنوعی در صنعت و هوش مصنوعی دارد. اگرچه آمار فازی از لحاظ کاربردی همانند منطق فازی تا کنون خیلی مورد استفاده قرار نگرفته، بی‌شک گسترش مرزهای دانش و بسط و توسعه مطالب آمار نظری به آمار فازی باعث خواهد شد که کاربردها و قابلیت‌های نظری فازی شناخته‌تر شده و بتوان از آن در آینده در همه‌ی مسائل نادقیق استفاده کرد.

مجموعه‌های فازی تعمیمی از مجموعه‌های معمولی هستند. در هر بحث و موضوع، مجموعه‌ی شامل تمام عناصر مورد بحث را مجموعه‌ی مرجع نامیده و با علامت X یا U نشان می‌دهیم. در نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی، مجموعه‌ها به‌صورت گردآیه‌ای معین از اشیاء تعریف می‌شود. به عبارت

دیگر، یک مجموعه معمولی، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود. اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را دارا باشد، عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد عضو آن مجموعه نیست؛ یعنی اگر P یک ویژگی خوش تعریف در مورد عناصر X باشد که مجموعه‌ی A توسط آن مشخص می‌شود، می‌توان نوشت

$$A = \{x \in X | P(x)\}$$

در نظریه مجموعه‌ها بر لفظ ”معین“ در تعریف مجموعه تأکید می‌شود. این تأکید به دلیل مفهوم عضویت است؛ به این معنی که به یک گردایه وقتی و فقط وقتی لفظ مجموعه اطلاق می‌گردد که اعضای آن دقیقاً مشخص باشند. مثلاً اگر X مجموعه‌ی انسان‌ها و P ویژگی «قد بلندتر از ۱۸۰ سانتی متر» باشد، آنگاه P یک ویژگی دقیق است و A مجموعه تمام انسان‌هایی است که دارای این ویژگی هستند و می‌توان یک تابع نشانگر تعریف کرد که برای هر عضو متعلق به A مقدار یک و برای هر عضو غیر متعلق به A مقدار صفر را بگیرد، به عبارتی

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

اما انسان‌هایی که «بلند قد» هستند، تشکیل یک مجموعه نمی‌دهند. زیرا ویژگی بلندقد یک مفهوم معین و دقیق و خوش تعریف نیست؛ در نتیجه نمی‌توانیم راجع به عضویت یا عدم عضویت یک انسان مثلاً با طول قد ۱۸۵ سانتی متر در گردایه‌ی انسان‌های «بلند قد» اتفاق نظر داشته باشیم لذا نظریه‌ی معمولی مجموعه‌ها برای مفاهیمی از این دست مناسب نیستند و این نظریه نسبت به صورت بندی این گونه مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است. از سوی دیگر بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره و واقعی با آن‌ها سروکار داریم و بر اساس آن‌ها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم گیری می‌کنیم، مفاهیم نادقیق هستند و مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. مثلاً زمین‌های وسیع، اجناس گران قیمت، مسافت‌های طولانی و ... همگی از این نوع مفاهیم می‌باشند. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی یک قالب ریاضی جدید برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست.

۱.۱.۱ مجموعه‌های فازی و روابط بین آن‌ها

دیدیم یک روش بسیار مفید در تعریف و نشان دادن یک مجموعه در نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی، استفاده از تابع نشانگر است. حال، اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ توسعه دهیم، یک تابع عضویت خواهیم داشت که به هر x از X ، عددی را از بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را، تابع عضویت مجموعه A می‌نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم (به طور دقیق‌تر یک زیر مجموعه فازی از X) بنابراین یک مجموعه فازی A ، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌تواند به طور پیوسته از $I = [0, 1]$ اختیار شود. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ یا به طور مختصر تر به صورت $A(x)$ نشان می‌دهیم، مشخص می‌شود. تابعی که به هر عضو از X ، یک عدد را از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد تابع عضویت

نامیده می‌شود. نزدیکی مقدار $A(x)$ به عدد یک نشان‌دهنده‌ی تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان‌دهنده‌ی تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $A(x)$ را می‌توان درجه پذیرش در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. تابع عضویت از این جهت که برد آن بازه‌ی $[0, 1]$ می‌باشد، با یک تابع احتمال تشابه دارد ولی از این جهت که انتگرال آن (یا اگر x گسسته باشد، مجموع آن) برابر یک نیست، با تابع احتمال تفاوت دارد.

تعریف ۱.۱. مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F} = \{(x, A(x)) | x \in X\}$$

که در آن $A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت x در A است.

مثال ۱.۱. فرض کنید مجموعه‌ی مرجع به صورت $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ باشد. می‌خواهیم یک مجموعه‌ی فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق «حدوداً چهار» را داشته باشند. برای مدل‌سازی این مجموعه کافی است تابع عضویت مجموعه فازی را مشخص کنیم. تعیین این تابع بستگی به نظر تصمیم‌گیرنده دارد. مثلاً یک تابع عضویت برای مدل‌سازی مفهوم فوق این گونه است

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x = 4 \\ 0.8 & x = 3, 5 \\ 0.5 & x = 2, 6 \\ 0.2 & x = 1, 7 \\ 0 & x = 8, 9, 10 \end{cases}$$

مجموعه فازی A را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند

$$A = \left\{ \frac{0.2}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.8}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{0.5}{6}, \frac{0.2}{7} \right\}$$

برای مثال $A(3) = 0.8$ بدین معنی است که از نظر تصمیم‌گیرنده، عدد ۳ به اندازه ۰.۸ به مجموعه فازی حدوداً چهار، تعلق دارد. به عبارت دیگر، از نظر وی گزاره «۳ حدوداً ۴ است» به اندازه ۰.۸ درست است.

تعریف ۲.۱. درجه‌ی عدم عضویت x در A به وسیله‌ی تابع $1 - A(x)$ تعریف می‌شود. اگر x کاملاً عضو A باشد، $A(x) = 1$ و اگر عضو A نباشد $A(x) = 0$.

تعریف ۳.۱. اگر به ازای هر x از مجموعه مرجع X ، $A(x) = 0$ ، آن‌گاه مجموعه فازی A را تهی گوئیم.

تعریف ۴.۱. مجموعه فازی A^c ، متمم مجموعه فازی A ، را میزان عدم عضویت x در A گویند و توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^c(x) = 1 - A(x), \quad \forall x \in X$$

تعریف ۵.۱. گوییم مجموعه فازی A ، زیرمجموعه‌ی مجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، اگر برای هر $x \in X$ ، $A(x) \leq B(x)$.

دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$ ، اگر برای هر $x \in X$ ، $A(x) = B(x)$.

تعریف ۶.۱. اجتماع و اشتراک دو مجموعه‌ی فازی A و B به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود (شکل ۱.۱)

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

مثال ۲.۱. فرض کنید $(0, \infty)$ مجموعه مقادیر ممکن طول عمر یک نوع لامپ برحسب ساعت باشد. تابع عضویت مجموعه فازی A بیانگر طول عمر کم و مجموعه فازی B بیانگر طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ به صورت زیر است

$$A(x) = \begin{cases} \frac{1500-x}{1500} & x < 1500 \\ 0 & x \geq 1500 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-800}{200} & 800 \leq x < 1000 \\ \frac{1200-x}{200} & 1000 \leq x < 1200 \\ 0 & x \geq 1200 \end{cases}$$

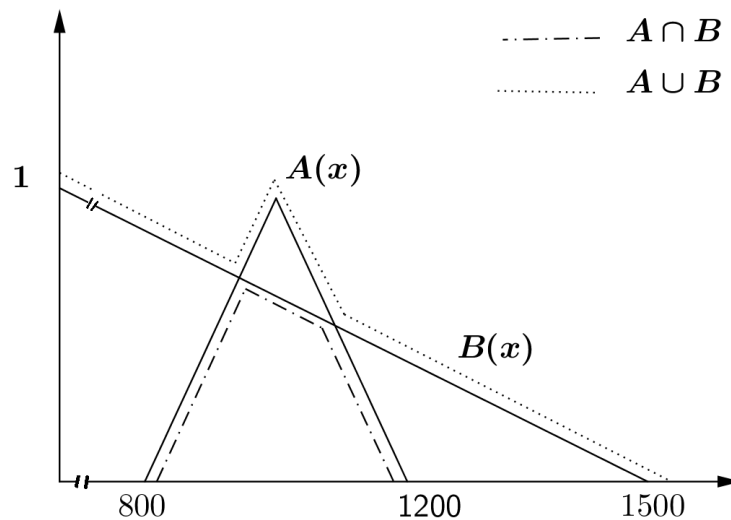
آنگاه اشتراک و اجتماع دو مجموعه به صورت زیر بدست می‌آید

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = \begin{cases} 0 & x < 800 \\ \frac{x-800}{200} & 800 \leq x < 882.4 \\ \frac{1500-x}{1500} & 882.4 \leq x < 1153.8 \\ \frac{1200-x}{200} & 1153.8 \leq x < 1200 \\ 0 & 1200 \leq x \end{cases}$$

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = \begin{cases} \frac{1500-x}{1500} & 0 \leq x < 882.4 \\ \frac{x-800}{200} & 882.4 \leq x < 1000 \\ \frac{1200-x}{200} & 1000 \leq x < 1153.8 \\ \frac{1500-x}{1500} & 1153.8 \leq x < 1500 \\ 0 & 1500 \leq x \end{cases}$$

نمودار تابع عضویت A ، B ، $A \cap B$ (یعنی طول عمر کم و حدوداً ۱۰۰۰ ساعت) و $A \cup B$ (یعنی طول عمر کم یا حدوداً ۱۰۰۰ ساعت) در شکل ۱.۱ رسم شده‌اند.

تعریف ۷.۱. اگر A یک مجموعه فازی باشد، آنگاه hA که در آن $h \in [0, 1]$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $(hA)(x) = hA(x)$ تعریف می‌شود.



شکل ۱.۱: نمودار تابع عضویت اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی

h - برش^۱

تعریف ۸.۱. مجموعه (معمولی) عناصری را از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A دست کم به بزرگی h ($0 < h \leq 1$) باشد، h -برش A (مجموعه تراز h وابسته به A) گوییم و با A_h نشان می‌دهیم (شکل ۲.۱)، یعنی

$$A_h = \{x \in X \mid A(x) \geq h\}$$

قضیه ۱.۱. [۲۳]. خانواده $\{A_h \mid h \in [0, 1]\}$ یکنواست، یعنی

$$0 < h \leq g \leq 1 \Rightarrow A_g \subseteq A_h$$

$$A \subseteq B \iff (A_h \subseteq B_h, \forall h \in I) \quad (۲)$$

$$(A \cap B)_h = A_h \cap B_h, (A \cup B)_h = A_h \cup B_h \quad (۳)$$

قضیه ۲.۱. [۲۳] (اتحاد تجزیه) هر مجموعه فازی مانند A را می‌توان به صورت زیر بر حسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد

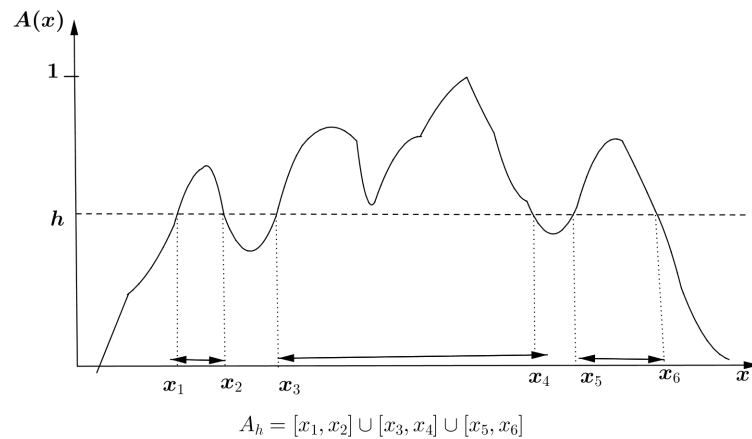
$$A = \bigcup_h h A_h$$

که در آن $h \in [0, 1]$ و $h A_h$ در تعریف ۷.۱ تعریف شده است.

مثال ۳.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات شبانه‌روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$A = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.2}{4} \right\}$$

^۱h-cut



شکل ۲.۱: h - برش مجموعه فازی A

h - برش A را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_h = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4\} & 0 < h \leq 0.2 \\ \{0, 1, 2, 3\} & 0.2 < h \leq 0.4 \\ \{0, 1, 2\} & 0.4 < h \leq 0.6 \\ \{0, 1\} & 0.6 < h \leq 0.8 \\ \{0\} & 0.8 < h \leq 1 \end{cases}$$

در این صورت می‌توان نوشت

$$A = 0.2 \left\{ \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} \cup 0.4 \left\{ \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\} \cup 0.6 \left\{ \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2} \right\} \cup 0.8 \left\{ \frac{1}{0}, \frac{1}{1} \right\} \cup 1 \left\{ \frac{1}{0} \right\}$$

یا به‌طور خلاصه‌تر داریم

$$\begin{aligned} A &= 0.2 \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup 0.4 \{0, 1, 2, 3\} \cup 0.6 \{0, 1, 2\} \cup 0.8 \{0, 1\} \cup 1 \{0\} \\ &= \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.2}{4} \right\} \end{aligned}$$

قضیه ۳.۱ [۲۳] (قضیه نمایش) فرض کنید $\{B_h\}_{h \in [0,1]}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که $B_0 = X$. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه فازی A از X وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $h \in [0, 1]$ ، داشته باشیم $A_h = B_h$ ، آن است که برای هر $h_1, h_2 \in [0, 1]$ که $h_1 < h_2$ ، $B_{h_2} \subseteq B_{h_1}$.

مثال ۴.۱. فرض کنید مجموعه‌های معمولی B_{h_1} تا B_{h_4} و اعداد h_1 تا h_4 متناظر با آن‌ها به‌صورت زیر

داده شده باشند

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, & B_{h_1} &= \{x_3\} \\ h_2 &= 0.75, & B_{h_2} &= \{x_2, x_3\} \\ h_3 &= 0.45, & B_{h_3} &= \{x_2, x_3, x_5\} \\ h_4 &= 0.25, & B_{h_4} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \end{aligned}$$

چون مجموعه‌های فوق به همراه h_1 تا h_4 در شرط قضیه نمایش صدق می‌کنند پس بر پایه‌ی این دنباله از مجموعه‌ها (و با تلقی آن‌ها به عنوان مجموعه‌های تراز) یک مجموعه فازی مانند A (با h -برش‌های $A_h = B_h$) به صورت زیر ساخته می‌شود

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{h \in [0,1]} hA_h = h_1A_{h_1} \cup h_2A_{h_2} \cup h_3A_{h_3} \cup h_4A_{h_4} \\ &= \left\{ \frac{0.25}{x_1}, \frac{0.75}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0.25}{x_4}, \frac{0.45}{x_5} \right\} \end{aligned}$$

اصل توسیع

فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x), \quad x \in X, y \in Y$$

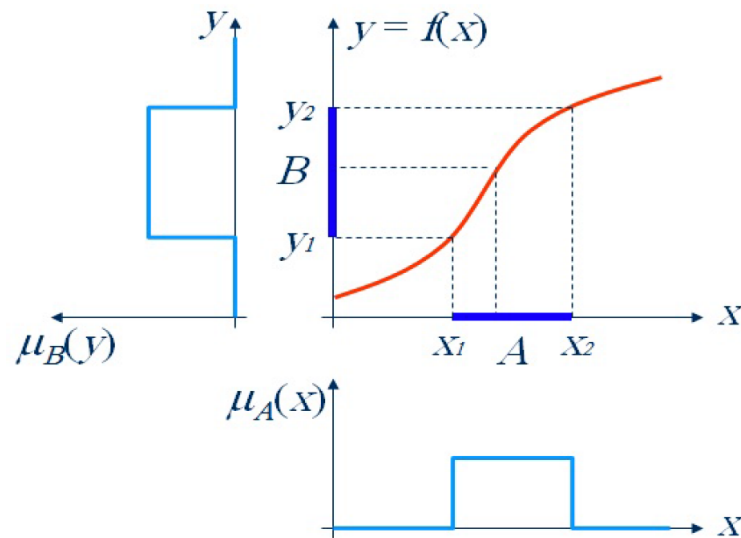
این تابع به هر نقطه از X ، نقطه‌ای از Y را می‌نگارد. حال فرض کنید A زیرمجموعه‌ای معمولی از X باشد. با استفاده از f و A می‌توانیم نگاشت A تحت f ، یعنی $f(A)$ را به صورت زیر به دست آوریم

$$f(A) = \{f(a) \in Y | a \in A\}$$

اکنون می‌خواهیم f را طوری توسیع دهیم که به جای اینکه صرفاً به یک نقطه از X یا یک زیر مجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز عمل کند. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ ، حاصل عمل f بر مجموعه فازی A از X ، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد؛ بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند $B = f(A)$ باشد. در اینجا تعیین تابع عضویت $B(y)$ مهم است. واضح است که اگر f تابع یک به یک باشد، آنگاه $B(y) = A(f^{-1}(y))$. اما در حالت کلی ممکن است $y \in Y$ تصویر چندین نقطه از X باشد. در این حالت اصل توسیع روش تعریف $B = f(A)$ را ارائه می‌دهد (شکل ۳.۱). نخست اصل توسیع را برای توابع یک متغیره بیان و تشریح می‌کنیم و سپس حالت کلی آن را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۹.۱. فرض کنید $f : X \rightarrow Y$ یک تابع و A یک مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $B = f(A)$ به صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x); x \in X} A(x) & f^{-1}(\{y\}) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(\{y\}) = \phi \end{cases}$$



شکل ۳.۱: نگاشتی روی مجموعه A با استفاده از تابع f

که در آن $f^{-1}(\{y\})$ نگاشت معکوس f است که گاهی آن را با $f^{-1}(y)$ نشان می‌دهند (شکل ۴.۱).

تعریف ۱۰.۱. (اصل توسیع^۲) فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ مجموعه مرجع و

$$X = X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین $A_1, \dots, A_n$ ، مجموعه فازی به ترتیب از $X_1, \dots, X_n$ باشند. به علاوه $y = f(x_1, \dots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $A_1, \dots, A_n$ به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} B(y) &= f(A_1, \dots, A_n)(y) \\ &= \{(y, B(y)) | y = f(x_1, \dots, x_n) \in X\} \end{aligned}$$

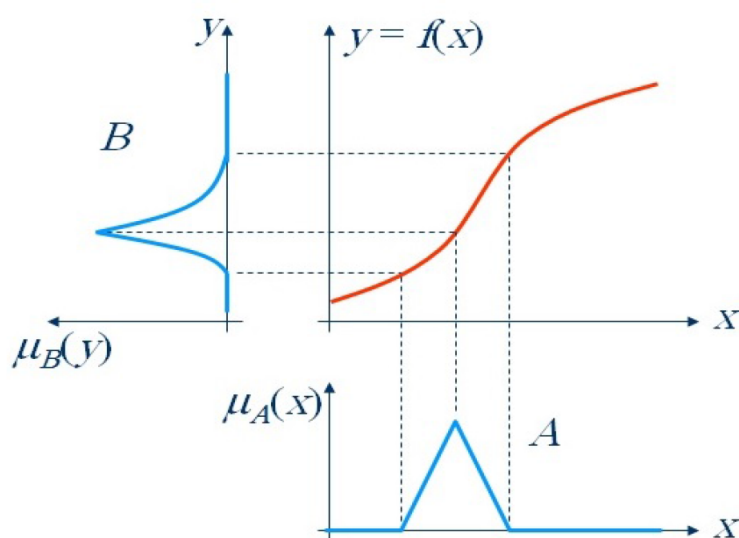
که در آن

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ y = f(x_1, \dots, x_n)}} \min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\} & f^{-1} \neq \phi \\ 0 & f^{-1} = \phi \end{cases}$$

مثال ۵.۱. فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، A_1 مجموعه فازی تقریباً ۵، و A_2 مجموعه فازی تقریباً ۶ به صورت زیر باشند

$$A_1 = \left\{ \frac{0.3}{3}, \frac{0.7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0.7}{6}, \frac{0.3}{7} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{0.6}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0.6}{7} \right\}$$

^۲Extention principle



شکل ۴.۱: نگاشتی روی مجموعه فازی A با استفاده از تابع f

آنگاه براساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فازی تقریباً ۵ و تقریباً ۶ را انجام داد. مثلاً

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(8) &= \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 + x_2 = 8}} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \min\{A_1(3), A_2(5)\} = \min\{0.3, 0.6\} = 0.3\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(9) &= \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 + x_2 = 9}} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \sup\{\min\{A_1(3), A_2(6)\}, \min\{A_1(4), A_2(5)\}\} \\ &= \sup\{0.3, 0.6\} = 0.6\end{aligned}$$

و سرانجام با محاسبه $(A_1 \oplus A_2)(x)$ خواهیم داشت

$$A_1 \oplus A_2 = \left\{ \frac{0.3}{8}, \frac{0.6}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{1}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.3}{14} \right\}$$

ملاحظه می‌کنید که $A_1 \oplus A_2$ را می‌توان تعبیری از یک مجموعه فازی که تقریباً ۱۱ را مدل‌سازی می‌کند تعبیر کرد، و این چیزی است که انتظار داریم.

۲.۱.۱ اعداد فازی

از مهمترین کاربردهای اصل توسیع، تعمیم عملگرهای حسابی مانند جمع، تفریق و ضرب برای اعدادی است که معروف به اعداد فازی می‌باشند و یک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی هستند. در این بخش

ابتدا تعریف اعداد فازی را ارائه می‌کنیم. سپس با استفاده از اصل توسیع، عملگرهای جبری را برای این اعداد تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱. مجموعه فازی A از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوئیم، اگر

(۱) A نرمال و تک‌نمایی باشد، یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $A(x_0) = 1$.

(۲) h -برش‌های A ، به ازای هر $h \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند.

تعریف ۱۲.۱. عدد فازی A را مثبت (منفی) گوئیم اگر برای هر $x \leq 0$ ($x \geq 0$)، $A(x) = 0$. عدد

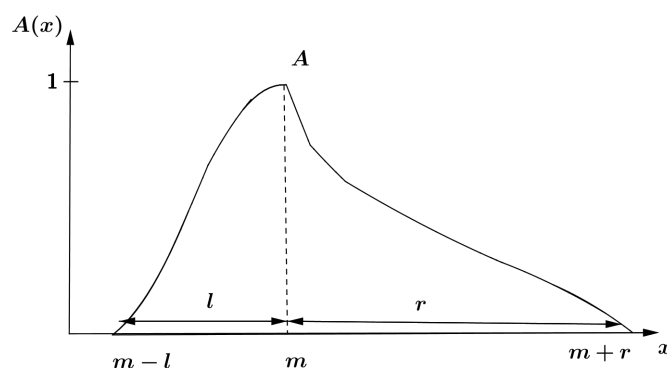
فازی مثبت و منفی A را به ترتیب با نمادهای $A > 0$ و $A < 0$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه همه‌ی اعداد فازی را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. نوع خاصی از اعداد فازی که در ادامه توضیح داده می‌شود، اعداد فازی LR هستند که علاوه بر آن که ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آن‌ها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ویژگی باعث شده است که در کاربرد، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۱۳.۱. اگر عدد فازی A دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{l}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{r}\right) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آنگاه A را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $A = (m, l, r)_{LR}$ نشان می‌دهیم (شکل ۵.۱). عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت l و r را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست A می‌نامیم. L و R توابع مرجع (یا توابع شکل^۳) نامیده می‌شوند.



شکل ۵.۱: نمایش عدد فازی LR

^۳Shape functions

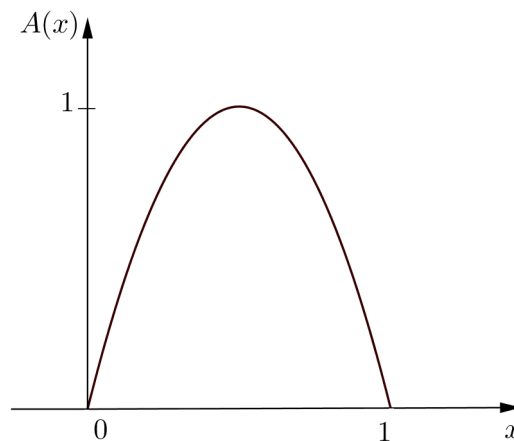
تعریف ۱۴.۱. فرض کنید $A = (m, l, r)_{LR}$.
الف) اگر

$$R(x) = L(x) = \max\{0, 1 - x\} = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

A را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $A = (m, l, r)_T$ نشان می‌دهیم (شکل ۷.۱).
ب) اگر $R(x) = L(x) = e^{-x^2}$ ، A را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $A = (m, l, r)_N$ نشان می‌دهیم.
پ) اگر

$$R(x) = L(x) = \max\{0, 1 - x^2\} = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

A را یک عدد فازی سهموی^۴ نامیده و با $A = (m, l, r)_P$ نشان می‌دهیم. در شکل ۶.۱ یک عدد فازی سهموی نمایش داده شده است.



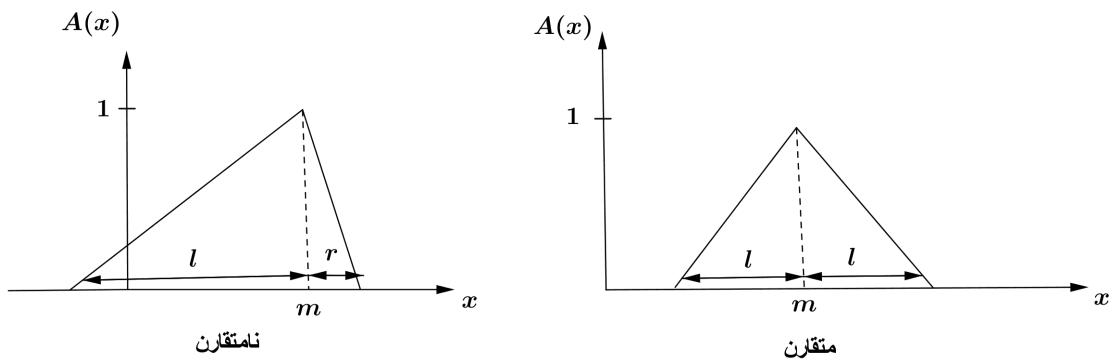
شکل ۶.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی سهموی

تعریف ۱۵.۱. اگر برای عدد فازی A ، $L = R$ و $l = r$ آن‌گاه A را یک عدد فازی متقارن نامیده و با نماد $A = (m, l)_L$ نشان می‌دهیم.

مثال ۶.۱. فرض کنید A یک عدد فازی LR متقارن باشد و $L(x) = R(x) = e^{-x^2}$ و $m = 0$ و $l = r = 1$. در این صورت

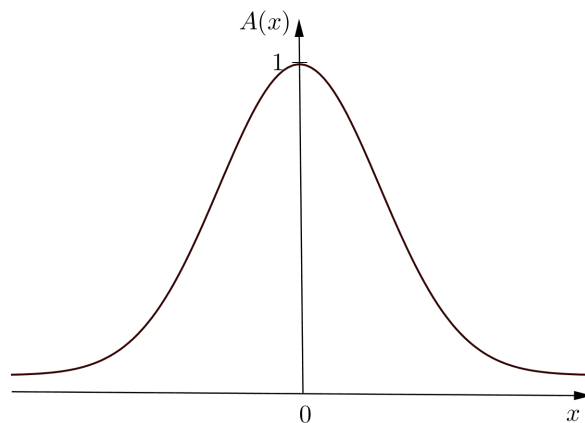
$$A(x) = \begin{cases} L(\frac{0-x}{1}) = e^{-x^2} & x \leq 0 \\ R(\frac{x-0}{1}) = e^{-x^2} & x > 0 \end{cases}$$

^۴Parabolic Fuzzy Number



شکل ۷.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی متقارن و نامتقارن

یعنی $A(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. در شکل ۸.۱ نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن A که می‌توان آن را یک عدد فازی تقریباً صفر تعبیر کرد، نشان داده شده است.



شکل ۸.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی نرمال متقارن تقریباً صفر

۳.۱.۱ حساب اعداد فازی

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید A و B دو عدد فازی و $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $*$ را برای اعداد فازی با $\otimes$ نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $A \otimes B$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \otimes B)(z) = \sup_{z=x \otimes y} \inf[A(x), B(y)] \quad (1.1)$$

در حالت‌های خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف بالا به صورت‌های زیر در می‌آید

$$(A \oplus B)(z) = \sup_{z=x+y} \inf[A(x), B(y)]$$

$$(A \ominus B)(z) = \sup_{z=x-y} \inf[A(x), B(y)]$$

$$(A \otimes B)(z) = \sup_{z=x*y} \inf[A(x), B(y)]$$

$$(A \oslash B)(z) = \sup_{z=x/y} \inf[A(x), B(y)]$$

در این پایان نامه برای سادگی به جای علامت‌های $\oplus, \ominus, \otimes, \odot$ و $\oslash$ از $+, -, \times, /$ استفاده می‌کنیم.

برخی اعمال جبری برای اعداد فازی LR بسیار ساده و دارای الگوهای مشخصی است و برای برخی دیگر از اعمال جبری نیز الگوهای تقریبی وجود دارد. در این قسمت برخی روابط مهم در حساب اعداد فازی LR بیان می‌شوند.

قضیه ۴.۱. [۲۳] اگر $A = (m_A, l_A, r_A)_{LR}$ و $B = (m_B, l_B, r_B)_{LR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آن‌گاه بر اساس اصل گسترش، داریم

$$A + B = (m_A, l_A, r_A)_{LR} + (m_B, l_B, r_B)_{LR} = (m_A + m_B, l_A + l_B, r_A + r_B)_{LR}$$

$$A - B = (m_A, l_A, r_A)_{LR} - (m_B, l_B, r_B)_{LR} = (m_A - m_B, l_A - l_B, r_A - r_B)_{LR}$$

$$\lambda.A = \begin{cases} (\lambda m_A, \lambda l_A, \lambda r_A)_{LR} & \lambda > 0 \\ (\lambda m_A, -\lambda r_A, -\lambda l_A)_{RL} & \lambda < 0 \end{cases}$$

درباره‌ی عمل ضرب، کار به آسانی جمع و تفریق نیست. در حالتی که A و B دو عدد فازی به صورت LR باشند، نتیجه‌ی ضرب آن‌ها یک عدد فازی LR نخواهد بود. اما برای ضرب روابط تقریبی پیشنهاد شده که در ادامه بیان می‌شود.

قضیه ۵.۱. [۲۳] اگر $A = (m_A, l_A, r_A)_{LR}$ و $B = (m_B, l_B, r_B)_{LR}$ آن‌گاه

$$(A \times B) \simeq \begin{cases} (m_A m_B, m_A r_B + m_B l_A, m_A r_B + m_B r_A)_{LR} & A > 0, B > 0 \\ (m_A m_B, m_A l_B - m_B r_A, m_A r_B - m_B l_A)_{RL} & A > 0, B < 0 \\ (m_A m_B, -m_B r_A - m_A r_B, -m_B l_A - m_A l_B)_{RL} & A < 0, B < 0 \end{cases}$$

قضیه ۶.۱. [۲۳] اگر $A = (m_A, l_A, r_A)_{LR}$ و $B = (m_B, l_B, r_B)_{LR}$ دو عدد فازی مثبت باشند، آن‌گاه

$$(A/B) \simeq \left(\frac{m_A}{m_B}, \frac{r_B m_A + l_A m_B}{m_A}, \frac{l_B m_A + r_A m_B}{m_B} \right)_{LR}$$

هر چه پهناهای اعداد فازی A و B نسبت به مقادیر نمای آن‌ها کوچک‌تر باشد، تقریب‌های فوق دقیق‌تر است.

قضیه ۷.۱. [۳۰]. فرض کنید r و s اعداد حقیقی و A عدد فازی باشد. آنگاه

$$(r + s)A \subseteq rA + sA \quad (2.1)$$

برهان. باید نشان دهیم که

$$((r + s)A)(x) \leq (rA + sA)(x) \quad \forall x \in X \quad (3.1)$$

اگر A و B به ترتیب دو عدد فازی با تابع عضویت $A(x)$ و $B(x)$ و اعداد حقیقی r و s را به ترتیب با تابع مشخصه I_r و I_s نشان دهیم، طرف چپ رابطه (۳.۱) با استفاده از (۱.۱) به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} ((r + s)A)(x) &= \sup_{uv=x} \{ \inf \{ (I_r + I_s)(u), A(v) \} \} \\ &= \sup_{uv=x} \{ \inf \{ \sup_{r+s=u} \{ \inf \{ I_r(y), I_s(z) \} \}, A(v) \} \} \\ &= \sup_{uv=x, r+s=u} \{ \inf \{ I_r(r), I_s(s), A(v) \} \} \\ &= \sup_{(r+s)v=x} \{ A(v) \} \\ &= \sup_{(r+s)v=x} \{ \inf \{ A(v), A(v) \} \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

از طرف دیگر طرف راست رابطه ی (۳.۱) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} (rA + sA)(x) &= \sup_{y+z=x} \{ \inf \{ (I_r A)(y), (I_s A)(z) \} \} \\ &= \sup_{y+z=x} \left\{ \inf \left\{ \sup_{tu=y} \{ \inf \{ I_r(t), A(u) \} \}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sup_{wv=z} \{ \inf \{ I_s(w), A(v) \} \} \right\} \right\} \\ &= \sup_{y+z=x, ru=y, sv=z} \{ \inf \{ I_r(r), A(u), I_s(s), A(v) \} \} \\ &= \sup_{ru+sv=x} \{ \inf \{ A(u), A(v) \} \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

نامساوی (۳.۱) از رابطه (۴.۱) و (۵.۱) بدست می آید زیرا

$$\{(u, v) | v \in \mathbb{R}\} \subseteq \{(u, v) | u, v \in \mathbb{R}\}$$

□

۴.۱.۱ فاصله بین دو عدد فازی

در بحث رگرسیون فازی علاقه مند به تخمین و برآورد پارامترهای مدل هستیم و لذا لازم است خطا و به عبارت دقیق تر فاصله بین دو مقدار مشاهده شده و برآورد شده فازی محاسبه شود، لذا در این بخش به معرفی برخی از انواع فاصله بین دو عدد فازی می پردازیم.

فاصله وزن دار شده

ژو و لی^۵ [۵۳] فاصله‌ی وزن دار شده‌ی بین دو عدد فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

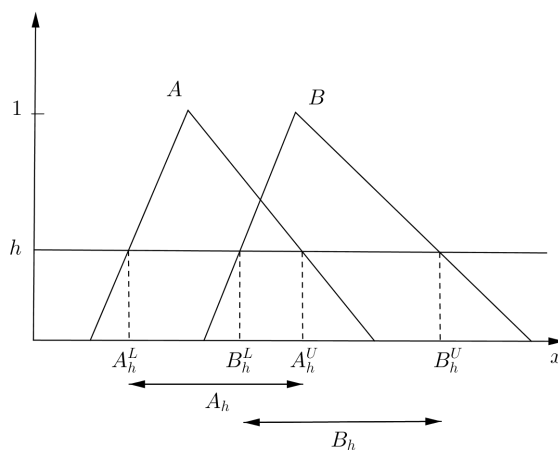
تعریف ۱۷.۱. فرض کنید A و B دو عدد فازی باشند، فاصله وزن دار شده بین این دو عدد فازی به صورت زیر است

$$d(A, B) = \left[\int_0^1 f(h) d^*(A_h, B_h) dh \right]^{\frac{1}{p}} \quad (۶.۱)$$

که در آن A_h و B_h ، h - برش‌های دو عدد فازی هستند (شکل ۹.۱) و

$$d^*(A_h, B_h) = [A_h^L - B_h^L]^2 + [A_h^U - B_h^U]^2 \quad (۷.۱)$$

و $A_h^L, B_h^L, A_h^U, B_h^U$ کران‌های بالا و پایین h - برش A و B هستند. همچنین $f(h)$ یک تابع صعودی روی بازه $[0, 1]$ است و داریم $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(h) dh = \frac{1}{p}$ می‌باشد. تابع $f(h)$ را می‌توان به عنوان وزن $d^*(A_h, B_h)$ تعبیر کرد. ویژگی صعودی بودن $f(h)$ منجر به این می‌شود که درجات عضویت بالاتر، اهمیت بیشتری در تعیین فاصله‌ی بین دو عدد فازی A و B داشته باشند. شرط‌های $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(h) dh = \frac{1}{p}$ نیز این اطمینان را می‌دهد که فاصله‌ی فوق، یک تعمیم معمولی از فاصله‌ی بین دو عدد حقیقی است.



شکل ۹.۱: h - برش‌های دو عدد فازی

قضیه ۸.۱. [۵۳] فرض کنید A و B دو عدد فازی مثلثی باشند آنگاه بر پایه‌ی تابع وزنی $f(h) = h$

داریم:

$$\begin{aligned} d^{\vee}(A, B) &= (m_A - m_B)^{\vee} \\ &+ \frac{1}{3} (m_A - m_B) [(r_A - r_B) - (l_A - l_B)] \\ &+ \frac{1}{12} [(l_A - l_B)^{\vee} + (r_A - r_B)^{\vee}] \end{aligned} \quad (8.1)$$

برهان. فرض کنید $A = (m_A, l_A, r_A)_T, B = (m_B, l_B, r_B)_T$ دو عدد فازی مثلثی و $f(h) = h$ باشد. h -برش عدد فازی A به صورت فاصله بسته زیر بدست می‌آید

$$[A_h^L, A_h^U] = [m_A - (1 - h)l_A, m_A + (1 - h)r_A] \quad (9.1)$$

حال با استفاده از رابطه‌های (۶.۱) و (۷.۱) و (۹.۱) داریم

$$\begin{aligned} d^{\vee}(A, B) &= \int_0^1 [A_h^L - B_h^L]^{\vee} h dh + \int_0^1 [A_h^U - B_h^U]^{\vee} h dh \\ &= \int_0^1 \left([(m_A - (1 - h)l_A) - (m_B - (1 - h)l_B)]^{\vee} \right. \\ &\quad \left. + [(m_A + (1 - h)r_A) - (m_B + (1 - h)r_B)]^{\vee} \right) h dh \\ &= (m_A - m_B)^{\vee} + \frac{1}{3} (m_A - m_B) [(r_A - r_B) - (l_A - l_B)] \\ &\quad + \frac{1}{12} [(l_A - l_B)^{\vee} + (r_A - r_B)^{\vee}] \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۱. اگر $A = (m_A, l_A)_T, B = (m_B, l_B)_T$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند، آنگاه رابطه (۸.۱) به صورت زیر به دست می‌آید

$$d^{\vee}(A, B) = (m_A - m_B)^{\vee} + \frac{1}{6} (l_A - l_B)^{\vee} \quad (10.1)$$

□

برهان. با قرار دادن $l_B = r_B$ و $l_A = r_A$ در رابطه‌ی (۸.۱) به سادگی به دست می‌آید.

نتیجه ۲.۱. در رابطه فوق فاصله‌ی هر عدد فازی مثلثی مانند A از مبدأ (یعنی $(\circ, \circ, \circ) = \circ$) به صورت

$$\begin{aligned} d^{\vee}(A, \circ) &= \|A\|^{\vee} \\ &= m_A^{\vee} + \frac{1}{3} m_A (r_A - l_A) + \frac{1}{12} (l_A^{\vee} + r_A^{\vee}) \end{aligned} \quad (11.1)$$

محاسبه می‌شود.

□

برهان. با قرار دادن $B = (m_B, l_B, r_B) = (\circ, \circ, \circ)$ در رابطه (۸.۱) به سادگی به دست می‌آید.

تعریف ۱۸.۱. [۱۴] اگر $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)^T$ یک بردار فازی باشد به طوری که به ازای $W_i, i = 1, \dots, n$ ها عدد فازی باشند آنگاه نرم بردار فازی $\mathbf{W}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|W_i\|^2 \quad (12.1)$$

قضیه ۹.۱. [۲]. فرض کنید $A = (m_A, l_A)_N, B = (m_B, l_B)_N$ دو عدد فازی نرمال متقارن باشند، آنگاه بر پایه‌ی تابع وزنی $f(h) = h$ داریم:

$$d^2(A, B) = (m_A - m_B)^2 + \frac{1}{4} (l_A - l_B)^2 \quad (13.1)$$

برهان. در این حالت h -برش‌های اعداد فازی نرمال A و B عبارتند از

$$A_h = [m_A - l_A \sqrt{-\ln(h)}, m_A + l_A \sqrt{-\ln(h)}]$$

$$B_h = [m_B - l_B \sqrt{-\ln(h)}, m_B + l_B \sqrt{-\ln(h)}]$$

طبق رابطه (۷.۱)،

$$\begin{aligned} d^2(A_h, B_h) &= \left(m_A - l_A \sqrt{-\ln(h)} - (m_B - l_B \sqrt{-\ln(h)}) \right)^2 \\ &\quad + \left(m_A + l_A \sqrt{-\ln(h)} - (m_B + l_B \sqrt{-\ln(h)}) \right)^2 \\ &= 2(m_A - m_B)^2 - 2(l_A - l_B)^2 \ln(h) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d^2(A, B) &= \int_0^1 f(h) d^2(A_h, B_h) dh \\ &= (m_A - m_B)^2 - 2(l_A - l_B)^2 \int_0^1 f(h) \ln(h) dh \\ &= (m_A - m_B)^2 + \frac{1}{4} (l_A - l_B)^2 \end{aligned}$$

که در آن

$$\int_0^1 f(h) \ln(h) dh = \int_0^1 h \ln(h) dh = -\frac{1}{4}$$

□

فاصله گیلده و گین

صادقپور گیلده و گین [۲۸] را یک فاصله بین دو عدد فازی A و B با پارامترهای $1 \leq p \leq \infty$ و $0 \leq q \leq 1$ به صورت زیر تعریف می کنند

$$D_{pq} = \begin{cases} \left[(1-q) \int_0^1 |A_h^L - B_h^L|^p dh + q \int_0^1 |A_h^U - B_h^U|^p dh \right]^{\frac{1}{p}} & p < \infty \\ (1-q) \sup_{0 < h \leq 1} (|A_h^L - B_h^L|) + q \inf_{0 < h \leq 1} (|A_h^U - B_h^U|) & p = \infty \end{cases} \quad (14.1)$$

که در آن A_h^U و A_h^L به ترتیب حدود پایین و بالای h -برش عدد فازی A هستند. در این معیار به طور معمول مقدار p و q را به ترتیب ۲ و $\frac{1}{2}$ انتخاب می کنند. توجه کنید که حالت خاص این فرمول، رابطه (۶.۱) می شود.

فاصله دونسو

دونسو^۶ و همکاران [۲۴] فاصله ی بین دو عدد فازی را به صورت زیر تعریف می کنند.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید $A = (m_A, l_A, r_A)_T, B = (m_B, l_B, r_B)_T$ دو عدد فازی باشند. فاصله بین دو عدد فازی به صورت زیر است

$$(۱۵.۱)$$

$$d^*(A, B) = k_1(m_A - m_B)^2 + k_2 \left((m_A - l_A - (m_B - l_B))^2 + (m_A + r_A - (m_B + r_B))^2 \right)$$

که در آن k_1 و k_2 اعداد حقیقی بین صفر و یک هستند که توسط محقق تعیین می شوند. در صورتی که $k_1 > k_2$ اهمیت مرکز بیشتر از پهنای پاسخ ها در نظر گرفته می شود و اگر $k_1 < k_2$ پهنای پاسخ ها از اهمیت بیشتری برخوردار می گردد. همچنین در صورتی که $k_1 = k_2$ ، اهمیت مرکز و پهنای یکسان فرض شده است (شکل ۱۰.۱).

فاصله حسن پور

حسن پور و همکاران [۳۰] فاصله بین دو عدد فازی را به صورت زیر بیان کردند.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید $A = (m_A, l_A, r_A)_T, B = (m_B, l_B, r_B)_T$ دو عدد فازی در $T(\mathbb{R})$ باشند. $d : T(\mathbb{R}) \times T(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$d(A, B) = |m_A - m_B| + |l_A - l_B| + |r_A - r_B| \quad (۱۶.۱)$$

که در شکل ۱۰.۱ تفاوت این فاصله با فاصله دونسو نمایش داده شده است.

گزاره ۱.۱. [۳۰] تابع d که در تعریف بالا بیان شد یک متر روی $T(\mathbb{R}) \times T(\mathbb{R})$ است. یعنی برای A, B, C داریم:

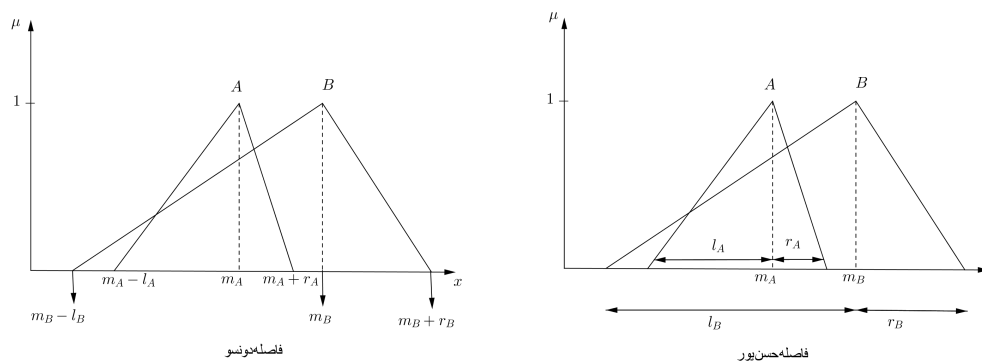
$$۱. d(A, B) \geq ۰, d(A, A) = ۰$$

$$۲. d(A, B) = d(B, A)$$

$$۳. d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

ملاحظه ۱.۱. برای دو عدد دقیق (غیر فازی) فاصله (۱۶.۱) به قدر مطلق تفاوت بین آن ها محدود می شود.

^۶Donoso



شکل ۱۰.۱: تفاوت فاصله دونسو و حسن پور

۲.۱ مروری بر مدل‌های رگرسیون خطی و رگرسیون ريج

۱.۲.۱ مدل رگرسیون خطی

در کتب آماری رگرسیون به عنوان روش تعیین و تحلیل روابط نادقیق بین متغیرهای آماری تعریف می‌شود. بنابراین در رگرسیون، تعیین روابط بین متغیرها و تحلیل روابط بدست آمده مورد توجه قرار می‌گیرد. کلمه رگرسیون در لغت به معنی «برگشت» است. دلیل این نام گذاری به مطالعات گالتون^۷ [۲۷] در مورد رابطه بین قد پدر و قد پسر مربوط می‌شود. گالتون با رسم نمودار قد پسر در مقابل قد پدر (نمودار پراکنش) بر اساس حجم بزرگی از داده‌ها به این نتیجه رسید که اغلب افراد بلند قد، پسرانی کوتاه قدتر و اکثر افراد کوتاه قد، پسرانی بلندتر از خود دارند و این پدیده را «برگشت به میانگین»^۸ نامید و از آن پس نام رگرسیون بر روش‌های بررسی روابط بین متغیرهای آماری باقی ماند. تعیین روابط بین متغیرهای آماری را رگرسیون توصیفی^۹ و تحلیل این روابط را رگرسیون استنباطی^{۱۰} می‌نامند. به عنوان مثالی از رگرسیون، فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که آیا مصرف سرانه سیگار با متغیرهایی نظیر درآمد سرانه، سطح تحصیلات، سهم دستمزد از درآمد کل و متوسط قیمت سیگار رابطه دارد یا خیر. یا ممکن است بخواهیم چگونگی اثر تغییرات یک متغیر بر متغیر دیگر را بررسی کنیم. رابطه بین مصرف سیگار با متغیرهای ذکر شده به شکل یک معادله یا الگویی است که متغیر وابسته (مصرف سیگار) را به یک یا چند متغیر مستقل یا پیش‌بین مربوط می‌کند. در رگرسیون خطی متغیر پاسخ پیوسته است ولی متغیرهای پیش‌بین می‌توانند پیوسته، گسسته و یا رسته ای باشند. در مثال مصرف سیگار، متغیر وابسته بر حسب تعداد بسته‌های سیگار فروخته شده در یک استان بر مبنای سرانه در طول یک سال محاسبه می‌شود و متغیرهای پیش‌بین، متغیرهای اقتصادی- اجتماعی ذکر شده در بالا می‌باشند.

در یک معادله رگرسیونی، متغیر پاسخ را با Y و متغیرهای پیش‌بین را با $X_1, X_2, \dots, X_p$ نشان

^۷Francis Galton

^۸Regression to the Mean

^۹Descriptive Regression

^{۱۰}Inferential Regression

می‌دهند. متغیرهای پیش بین را «متغیرهای مستقل» نیز می‌نامند، اما به کار بردن این اصطلاح ممکن است تا حدی گمراه کننده باشد، زیرا همیشه $X_1, X_2, \dots, X_p$ ، مستقل از یکدیگر نیستند و معمولاً از Y مستقل نمی‌باشند. متغیر پاسخ نیز گاهی «متغیر وابسته» نامیده می‌شود. برای اطلاعات بیشتر، به نیرومند [۱۰] مراجعه شود.

۲.۲.۱ رگرسیون خطی چندگانه

مدل رگرسیون خطی چندگانه عموماً به صورت زیر است

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

که در آن Y_i متغیر پاسخ و $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ ضرایب رگرسیونی و ϵ_i ها خطاهای تصادفی هستند. همچنین فرض می‌کنیم $E(\epsilon_i) = 0$ ، $Var(\epsilon_i) = \sigma^2$ و $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ ، $i \neq j$. برای برآورد ضرایب رگرسیون، معمولاً روش کمترین توان‌های دوم را به کار می‌گیرند. باید توجه داشت که برای پیدا کردن برآورد کمترین توان‌های دوم ضرایب رگرسیون، لازم نیست که فرض شود بردار خطای رگرسیون از توزیع نرمال پیروی می‌کند.

مدل رگرسیون خطی چندگانه را می‌توان به صورت ماتریسی بیان نمود

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (۱۷.۱)$$

که در آن $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ یک بردار $n \times 1$ از پاسخ‌ها، $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ یک ماتریس $n \times (p+1)$ غیرتصادفی (ماتریس طرح) و معلوم از n بردار $p+1$ -بعدی، $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)^T$ بردار ضرایب رگرسیون مجهول (پارامترهای مدل) و $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T$ بردار خطای تصادفی هستند. به عبارتی دیگر داریم

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

مدل رگرسیون چندگانه به صورت ماتریسی به ما امکان بحث و بیان بسیاری از خصوصیات مدل رگرسیون را می‌دهد. برآورد کمترین توان‌های دوم β را از طریق مینیمم کردن مجموع توان‌های دوم خطا به صورت زیر بدست می‌آورند

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \left[(Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \right]$$

بنابراین برآورد مدل رگرسیون (۱۷.۱) به صورت $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ به دست می‌آید. اختلاف بین Y و $\hat{Y}$ را مانده مدل رگرسیون تعریف کرده و به صورت $e = Y - \hat{Y}$ نمایش می‌دهیم.

برآورد کمترین توان‌های دوم β برای مدل رگرسیون چندگانه $Y = X\beta + \epsilon$ به صورت $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ است، که در آن $X^T X$ یک ماتریس نامنفرد^{۱۱} (ستون‌های ماتریس X مستقل از هم اند) فرض شده است. در ادامه خواص برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم را در قالب چند قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۱. برآورد کمترین توان‌های دوم β نااریب بوده و واریانس آن $(X^T X)^{-1} \sigma^2$ است.

برهان. واضح است که

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= (X^T X)^{-1} X^T E(Y) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta \end{aligned} \quad (18.1)$$

و لذا برآوردگر کمترین توان‌های دوم β نااریب است. همچنین

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) &= (X^T X)^{-1} X^T Var(Y) X (X^T X)^{-1} \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned} \quad (19.1)$$

□

قضیه ۱۱.۱. قضیه گوس مارکف^{۱۲}: [۵۵] در مدل خطی (۱۷.۱) برآوردگر کمترین توان‌های دوم، بهترین برآوردگر خطی نااریب^{۱۳} ($BLUE$) برای ضرایب مدل می‌باشد.

پارامتر دیگر در رگرسیون خطی، σ^2 است که غیر قابل مشاهده است. استنباط درباره ضرایب رگرسیون و تشخیص مدل تا حد زیادی به برآورد واریانس خطای σ^2 وابسته است. مجموع توان‌های دوم مانده‌ها را در نظر بگیرید

$$e^T e = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) = Y^T [I_n - X(X^T X)^{-1} X^T] Y = Y^T P Y \quad (20.1)$$

که در آن

$$P = [I_n - X(X^T X)^{-1} X^T]$$

را ماتریس تصویر^{۱۴} نامند. عبارت (۲۰.۱) در واقع یک اندازه تفاوت میان Y مشاهده شده و مقدار رگرسیون برازش شده $\hat{Y}$ است. همچنین ماتریس P خودتوان^{۱۵} است زیرا

$$\begin{aligned} P^2 &= [I_n - X(X^T X)^{-1} X^T] [I_n - X(X^T X)^{-1} X^T] \\ &= [I_n - X(X^T X)^{-1} X^T] = P \end{aligned}$$

^{۱۱}Nonsingular Matrix

^{۱۲}Gauss- Markov

^{۱۳}Best Linear unbiased Estimator

^{۱۴}Projection Matrix

^{۱۵}Idempotent

بنابراین مقدار ویژه P ، $\circ$ یا $\mathbf{1}$ است. توجه کنید که ماتریس $\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ نیز خودتوان است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \text{rank} [\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] &= \text{tr} [\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \\ &= \text{tr} [\mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] \\ &= \text{tr} [\mathbf{I}_p] = p \end{aligned}$$

از آن جا که $\text{tr}(A - B) = \text{tr}(A) - \text{tr}(B)$ بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) &= \text{tr}(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \\ &= \text{tr}(\mathbf{I}_n) - \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) \\ &= n - p \end{aligned}$$

با گرفتن امید ریاضی از مجموع توان‌های دوم مانده‌ها داریم

$$\begin{aligned} E(\mathbf{e}^T \mathbf{e}) &= E[\mathbf{Y}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \mathbf{Y}] \\ &= (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \sigma^2(n - p) \end{aligned}$$

بحث بالا را می‌توان به صورت قضیه زیر خلاصه کرد.

قضیه ۱۲.۱. برآوردگر نااریب واریانس در رگرسیون خطی چندگانه به صورت زیر به دست می‌آید

$$s^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n - p} = \frac{1}{n - p} \mathbf{Y}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \mathbf{Y} = \frac{1}{n - p} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

اکنون اگر فرض کنیم که ϵ خطای تصادفی با فرض $E(\epsilon) = \mathbf{0}$ و $\text{Var}(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{V}$ باشد. به عبارت دیگر ماتریس همبستگی خطاها دارای واریانس $\mathbf{V}$ باشد، که $\mathbf{V}$ ماتریس معین مثبت^{۱۶} معلوم است، برآورد کمترین توان‌های دوم تعمیم یافته $\boldsymbol{\beta}$ می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} [(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})]$$

بنابراین برآورد کمترین توان‌های دوم تعمیم یافته $\boldsymbol{\beta}$ برای مدل رگرسیون (۱۷.۱) با مشتق گیری از مجموع توان‌های دوم خطا و مساوی قرار دادن آن برابر با صفر بدست می‌آید.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}$$

رگرسیون خطی چندگانه تعمیمی از رگرسیون خطی ساده است. این روش پارامتری هنگامی مناسب است که فرض خطی بودن رابطه‌ی میان متغیر پاسخ و متغیر پیش‌بین دست کم به صورت تقریبی برقرار باشد. اما هنگامی که رابطه میان متغیر پاسخ و متغیرهای پیش‌بین نامعلوم است، استفاده از رگرسیون خطی ممکن است منجر به نتایج گمراه کننده‌ای شود.

^{۱۶} Positive Definit Matrix

۳.۲.۱ همخطی در رگرسیون چندگانه

تعبیر و تفسیر معادله رگرسیون چندگانه به‌طور ضمنی به‌این فرض وابسته است که متغیرهای پیش‌بین، وابستگی با یکدیگر نداشته و به‌عبارتی مستقل خطی هستند. زیرا تعبیر یک ضریب رگرسیون به‌صورت اندازه‌گیری تغییر در متغیر پاسخ وقتی متغیر پیش‌بین متناظر، یک واحد افزایش یافته و سایر متغیرهای پیش‌بین ثابت نگاه‌داشته شوند امری متداول است؛ اما این تعبیر در صورتی که روابط خطی قوی بین متغیرهای پیش‌بین وجود داشته‌باشد معتبر نخواهد بود.

غالباً تفسیر و استفاده از الگوی رگرسیون چندگانه به برآورد تک تک ضرایب رگرسیون بستگی دارد. وقتی هیچ ارتباط خطی میان متغیرهای پیش‌بین وجود نداشته باشد، این متغیرها را متعامد^{۱۷} گویند. هنگامی که متغیرهای پیش‌بین متعامد باشند، استنباط‌هایی مانند آنچه در بالا مطرح شد به سادگی می‌توانند اتخاذ شوند. اما در اکثر کاربردهای رگرسیون متغیرهای پیش‌بین متعامد نیستند. اگر در یک الگوی رگرسیون متغیرهای پیش‌بین به طور کامل یا تقریباً کامل، وابسته خطی باشند، در این حالت ممکن است استنباط برای این الگوی رگرسیون گمراه‌کننده باشد. در این صورت می‌گوییم بین متغیرها در الگوی رگرسیون، همخطی^{۱۸} وجود دارد.

اگر یکی از متغیرهای پیش‌بین یک تابع دقیق خطی از یک یا چند متغیر پیش‌بین دیگر باشد گوییم رگرسیون دارای همخطی کامل^{۱۹} است. همخطی ناقص^{۲۰} وقتی اتفاق می‌افتد که یکی از متغیرهای پیش‌بین بطور تقریبی یک تابع خطی از یک یا چند متغیر پیش‌بین دیگر باشد. به‌عبارت دیگر همخطی کامل زمانی رخ می‌دهد که دست کم به ازای یک i ($i = 1, \dots, p$) داشته باشیم $R_i^2 = 1$ و همخطی ناقص زمانی پیش می‌آید که دست کم به ازای یک i داشته باشیم $R_i^2 \cong 1$ که در آن R_i^2 ضریب تعیین^{۲۱} رگرسیون خطی متغیر X_i بر سایر متغیرهای پیش‌بین است. باید دقت داشته باشیم که ضریب تعیین (R^2) حاصل تقسیم پراکندگی بیان شده به پراکندگی کل است. لذا در مدل رگرسیون (۱۷.۱) ضریب تعیین Y روی X برابر است با

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (21.1)$$

به عبارتی دیگر

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

برای اطلاع بیشتر در مورد همخطی چندگانه به میسون، گونست و وبستر^{۲۲} [۴۱] مراجعه کنید.

^{۱۷}Orthogonal

^{۱۸}Collinearity

^{۱۹}Exact collinearity

^{۲۰}Partial collinearity

^{۲۱}Coefficient of determination

^{۲۲}Mason, Gunst and Webster

اثرات همخطی بر برآورد پارامترها

همخطی ناقص باعث می‌شود که دترمینان ماتریس $X^T X$ بسیار کوچک شود و در نتیجه ماتریس $(X^T X)^{-1}$ ، دارای اعضایی باشند که از لحاظ قدرمطلق بسیار بزرگ هستند و به بینهایت میل می‌کنند. به عبارت دیگر، واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم β یعنی $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ بسیار بزرگ می‌شود. در این صورت، $\hat{\beta}$ برآورد دقیقی از β نخواهد بود. به عبارت دیگر دقت برآورد ضرایب رگرسیون بسیار کم می‌شود. علاوه بر این، $\hat{\beta}$ ناپایدار است. یعنی با تغییر کوچکی در مقادیر متغیرهای پیش‌بین، مقادیر موجود در $\hat{\beta}$ تغییرات زیادی پیدا می‌کنند و در نتیجه محاسبه $\hat{\beta}$ توسط دو رایانه متفاوت (با دو روش متفاوت) ممکن است جواب‌های کاملاً متفاوتی به دست دهد. از طرفی چون $Cov(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1}$ ، همخطی باعث بدست آمدن فواصل اطمینان عریض برای پارامتر β می‌شود. همچنین در صورت وجود همخطی کامل ماتریس $X^T X$ وارون پذیر نبوده (زیرا این ماتریس تمام رتبه ^{۲۳} نمی‌شود) و در نتیجه برای برآورد ضرایب، جواب یکتا وجود نخواهد داشت. بنابراین مهم است که بدانیم چه وقت همخطی وجود دارد تا مواظب پیامدهای ممکن آن باشیم. برای مطالعات بیشتر در مورد آثار همخطی به داگلاس مونتگمری و الیزابت پک ^{۲۴} [۴۴] رجوع کنید.

شاخص‌های همخطی

در این قسمت بعضی از روش‌هایی که برای تشخیص همخطی بکار می‌روند، ارائه می‌شود.

عامل تورم واریانس

یکی از شیوه‌های تشخیص وجود همخطی که کاربرد زیادی دارد، عامل تورم واریانس ^{۲۵} است که توسط مارکارت ^{۲۶} [۴۵] نام گذاری شده است. این عامل نشان می‌دهد که واریانس ضرایب برآورد شده تا چه حد نسبت به حالتی که متغیرهای پیش بین همبستگی خطی ندارند، متورم شده است. عامل تورم واریانس از رابطه زیر بدست می‌آید

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad j = 1, \dots, p \quad (22.1)$$

که در آن R_j^2 ضریب تعیین مدلی است که در آن متغیر مستقل X_j روی سایر متغیرهای مستقل برازش داده شده است. در حالتی که $R_j^2 = 0$ یا به عبارت دیگر X_j با سایر متغیرهای مستقل در مدل رگرسیونی رابطه خطی نداشته باشد، $VIF_j = 1$ و هنگامی که $R_j^2 \neq 0$ ، $VIF_j > 1$ خواهد بود که نشان می‌دهد، واریانس X_j به دلیل وجود همبستگی بین متغیرهای مستقل چقدر متورم شده است و مقدار آن افزایش پیدا کرده است. هنگامی که یک متغیر مستقل، وابستگی خطی کامل با سایر متغیرهای مستقل مدل داشته باشد، ضریب تعیین مرتبط با آن برابر با یک خواهد بود. در نتیجه

^{۲۳} Full rank

^{۲۴} Montgomery, Douglas, C. and Peck, Elizabeth, A

^{۲۵} Variance inflation factor

^{۲۶} Marquart

عامل تورم واریانس به سمت بینهایت میل خواهد کرد و از آن می‌توان نتیجه گرفت که واریانس X_j نیز بینهایت خواهد شد. مقدار عامل تورم واریانس برای متغیرهای مستقل، اغلب به عنوان شاخصی برای اندازه‌گیری شدت همخطی در مدل استفاده می‌شود. اگر بیشترین مقدار عامل تورم واریانس در مدل بزرگتر از ۱ باشد، نشان دهنده این است که وجود همخطی در مدل، اثر نامطلوبی بر برآوردهای روش کمترین توان‌های دوم گذاشته است. تجربیات عملی حاکی از اینست که اگر هر یک از VIF ها از ۱۰ تجاوز کنند، خطاری مبنی بر این است که ضرایب رگرسیونی ذیربط به علت همخطی چندگانه بصورت ضعیفی برآورد شده‌اند.

عدد شرطی

یک راه دیگر برای پی بردن به وجود همخطی بدست آوردن عدد شرطی^{۲۷} ماتریس $X^T X$ است. برای محاسبه عددشرطی ابتدا باید مقادیر ویژه ماتریس $X^T X$ را بدست آوریم. سپس، مقدار عددشرطی از نسبت بزرگترین مقدار ویژه به کوچکترین مقدار ویژه حاصل می‌شود

$$CN = \frac{\lambda_{Max}}{\lambda_{Min}} \quad (23.1)$$

در حالت کلی اگر عدد شرطی کمتر از ۱۰۰ باشد مشکل جدی در مورد همخطی چندگانه وجود ندارد. چنان چه این مقدار بزرگتر از ۱۰۰ باشد همخطی شدید و از ۱۰۰۰ تجاوز کند همخطی خیلی جدی است. لازم به ذکر است که در بعضی مقالات جذر رابطه بالا مد نظر است و گفته می‌شود که اگر جذر عدد شرطی $X^T X$ بزرگتر از ۱۰ باشد، آنگاه در ماتریس طرح همخطی وجود دارد. اگر جذر عدد شرطی بین ۳۰ تا ۱۰۰ باشد همخطی شدید و بالاتر از ۱۰۰ همخطی کاملاً جدی و مشکل ساز است (بلسی^{۲۸} و همکاران [۱۵]).

محک ماتریس همبستگی

فرض کنید X یک ماتریس $n \times p$ باشد. یک اندازه بسیار ساده همخطی چندگانه بررسی اعضای غیر قطر $r_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, p$ در ماتریس $X^T X$ است. اگر متغیرهای رگرسیونی X_i و X_j تقریباً وابسته خطی باشند، در این صورت $|r_{ij}|$ نزدیک واحد خواهد بود.

۴.۲.۱ روش‌هایی برای برخورد با همخطی چندگانه

روش‌های متعددی برای برخورد با مشکلات ناشی از همخطی چندگانه پیشنهاد شده‌است. روش‌های کلی شامل جمع‌آوری داده‌های اضافی، تخصیص مدل مجدد و بکارگیری روش‌های برآورد غیر از کمترین توان‌های دوم که به‌طور ویژه طراحی شده‌اند برای از بین بردن مشکلات ایجاد شده به لحاظ همخطی چندگانه است.

^{۲۷}Condition number

^{۲۸}Belsley

وقتی که روش کمترین توان‌های دوم در مورد داده‌های غیرمتعامد به کار گرفته می‌شود، معمولاً برای ضرایب رگرسیون برآوردهای خیلی ضعیف به دست می‌آید. گفته می‌شود که واریانس برآوردهای کمترین توان‌های دوم ضرایب رگرسیون ممکن است در حد قابل توجهی افزایش یابد و طول بردار برآورد کمترین توان‌های دوم پارامتر به طور متوسط خیلی زیاد است. این بدین معنی است که قدرمطلق برآوردهای کمترین توان‌های دوم خیلی بزرگ می‌باشد و لذا بسیار ناپایدارند، بدین معنی که با ارائه نمونه‌های متفاوت، اندازه‌ها و علامت‌ها در حد قابل توجهی تغییر خواهند کرد.

برآوردگر کمترین توان‌های دوم در کلاس برآوردگرهای خطی نارایب دارای مینیمم واریانس است، اما تضمینی وجود ندارد که این واریانس کوچک‌ترین باشد. اگر واریانس $\hat{\beta}$ بزرگ باشد در نتیجه فاصله اطمینان برای β عریض می‌شود که در این صورت برآورد نقطه‌ای $\hat{\beta}$ بسیار ناپایدار است. یک راه کوچک جلوه دادن این مسئله، کنار گذاشتن این ضرورت است که بایستی برآوردگر β نارایب باشد. فرض کنیم که بتوان یک برآوردگر اریب $\hat{\beta}^*$ برای β پیدا کرد که دارای واریانس کمتر از واریانس برآوردگر نارایب $\hat{\beta}$ باشد. مقدار اسکالر میانگین توان‌های دوم خطای (MSE) ^{۲۹}، برآوردگر $\hat{\beta}^*$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}^*)^T &= E(\hat{\beta}^* - \beta)^T (\hat{\beta}^* - \beta) \\ &= Var(\hat{\beta}^*) + (Bias(\hat{\beta}^*))^T (Bias(\hat{\beta}^*)) \end{aligned} \quad (24.1)$$

یا

$$MSE(\hat{\beta}^*) = tr(Cov(\hat{\beta}^*)) + (Bias(\hat{\beta}^*))^T (Bias(\hat{\beta}^*)) \quad (25.1)$$

که در آن به $Bias(\hat{\beta}^*) = E(\hat{\beta}^*) - \beta$ میزان اریبی برآوردگر $\hat{\beta}^*$ گویند.

ملاحظه ۲.۱. توجه داریم که MSE برابر با امیدریاضی توان دوم فاصله $\hat{\beta}^*$ تا β می‌باشد. با پذیرفتن مقدار کمی اریبی برای $\hat{\beta}^*$ ، واریانس $\hat{\beta}^*$ می‌تواند طوری کوچک شود که MSE برای $\hat{\beta}^*$ از واریانس برآوردگر نارایب $\hat{\beta}$ کمتر باشد. باید توجه داشت که نمی‌توان همزمان هم‌اریبی و هم واریانس را کاهش داد. با کاستن یکی، دیگری افزایش می‌یابد. به این خاصیت مبادله پایایی اریبی و واریانس می‌گویند که در این موارد معمولاً مقدار MSE را کمینه می‌کنند.

با به کارگیری برآوردگر اریب برای β بایستی فاصله اطمینان β باریک‌تر شود. واریانس کوچک برای برآوردگر اریب نیز نتیجه می‌دهد که $\hat{\beta}^*$ برآوردگری پایدارتر از برآوردگر نارایب $\hat{\beta}$ برای β می‌باشد.

۵.۲.۱ رگرسیون ریج

در بخش قبل گفتیم که وقوع همخطی چندگانه بین متغیرهای پیش‌بین در تحلیل رگرسیون خطی ممکن است باعث ناپایداری شدید در برآوردهای کمترین توان‌های دوم پارامترهای رگرسیونی شود، به این معنی که بزرگی و علامت بردار پارامترها در نمونه‌های مختلف به طور قابل ملاحظه‌ای بی‌ثبات خواهد بود که در نتیجه‌ی آن، برآورد کمترین توان‌های دوم به دست آمده، قابل اعتماد نخواهد بود.

^{۲۹}Mean square error

اگر توان دوم تفاضل $\hat{\beta}$ از مقدار واقعی آن را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$L_1^* = (\hat{\beta} - \beta)^T (\hat{\beta} - \beta) \quad (26.1)$$

که در آن $\hat{\beta}$ برآوردگر کمترین توان‌های دوم β است در این صورت با توجه به رابطه (۱۸.۱) و (۱۹.۱) داریم

$$\begin{aligned} E(L_1^*) &= E[(\hat{\beta} - \beta)^T (\hat{\beta} - \beta)] = \sum_{j=1}^p E(\hat{\beta}_j - \beta_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^p \text{Var}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 \text{tr}[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} \end{aligned}$$

که در آن λ_j ها مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ می‌باشند. در صورت وجود همخطی، حداقل یکی از مقادیر ویژه بسیار کوچک خواهد بود. در این صورت امید ریاضی توان دوم فاصله خیلی بزرگ می‌شود. بنابراین به طور متوسط برآورد کمترین توان‌های دوم از مقدار واقعی آن خیلی دور خواهد بود. با توجه به رابطه زیر

$$\begin{aligned} E(L_1^*) &= E(\hat{\beta}^T \hat{\beta}) - \beta^T \beta \\ \Rightarrow E(\hat{\beta}^T \hat{\beta}) &= \beta^T \beta + \sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد در صورت وجود همخطی برآورد کمترین توان‌های دوم برای β به طور متوسط دارای طولی بزرگ‌تر از مقدار واقعی است. یک روش برای رفع این مشکل یافتن برآوردگری اریب است که میانگین توان دوم خطایی کمتری نسبت به برآوردگر نارایب $\hat{\beta}$ داشته باشد. این برآوردگر را $\hat{\beta}^*$ می‌نامیم. با کوچک در نظر گرفتن میزان اریبی $\hat{\beta}^*$ ، واریانس $\hat{\beta}^*$ را می‌توان کوچک کرد به طوری که $MSE(\hat{\beta}^*)$ کمتر از واریانس برآوردگر نارایب $\hat{\beta}$ شود. با توجه به ملاحظه‌ی (۲.۱)، هدف پیدا کردن برآوردگر اریب $\hat{\beta}^*$ است که $MSE(\hat{\beta}^*)$ کمتر از واریانس برآوردگر نارایب $\hat{\beta}$ شود.

روش‌های مختلفی برای غلبه بر مشکل همخطی در مدل‌های خطی ارائه شده است. برخی از روش‌ها عبارتند از: برآوردیابی انقباضی^{۳۰}، مؤلفه‌های اصلی^{۳۱}، رویکرد ریدج^{۳۲}، کمترین توان‌های دوم جزئی^{۳۳}، برآوردگر نوع ليو^{۳۴} و برآوردگر تقریباً نارایب^{۳۵}. برای اطلاع از این تکنیک‌ها می‌توانید به آکدنیز و کاجیرانلار^{۳۶} [۱۱]، راثو و توتنبرگ^{۳۷} [۴۶]، سوئیندل^{۳۸} [۴۸] و ليو^{۳۹} [۳۹] مراجعه کنید.

^{۳۰} Shrinkage Estimation

^{۳۱} Principal Components

^{۳۲} Ridge Approach

^{۳۳} Partial Least Squares

^{۳۴} Liu type estimator

^{۳۵} Almost unbiased estimator

^{۳۶} Akdeniz and Kaciranlar

^{۳۷} Rau and Toutenberg

^{۳۸} Swindel

^{۳۹} Liu

یکی از موثرترین روش‌ها رگرسیون ريج است که توسط هورل و کنارد^{۴۰} [۳۱] در سال ۱۹۷۰ پیشنهاد شد.

مدل رگرسیون خطی چندگانه (۱۷.۱) را در نظر بگیرید. برآوردگر ريج به پارامتر ريج k بستگی دارد که با افزودن این پارامتر به ماتریس $X^T X$ به صورت زیر باعث بهبود وضعیت آن می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(k) &= (X^T X + kI_p)^{-1} (X^T Y) \\ &= (X^T X + kI_p)^{-1} (X^T X) \hat{\beta} \\ &= T(k) \hat{\beta}\end{aligned}$$

که در آن $T(k) = (k(X^T X)^{-1} + I_p)^{-1}$. در واقع برآوردگر ريج یک تبدیل خطی از برآوردگر کمترین توان‌های دوم است. امید ریاضی $\hat{\beta}$ عبارت است از

$$E(\hat{\beta}(k)) = E(T(k)\hat{\beta}) = T(k)E(\hat{\beta}) = T(k)\beta$$

بنابراین، $\hat{\beta}(k)$ برآوردگر اریب β است. همچنین ماتریس واریانس-کواریانس آن به صورت زیر می‌باشد:

$$Cov(\hat{\beta}(k)) = \sigma^2 (X^T X + kI_p)^{-1} X^T X (X^T X + kI_p)^{-1}$$

میانگین توان‌های دوم خطای برآوردگر ريج با استفاده از رابطه‌ی (۲۵.۱) عبارت است از

$$\begin{aligned}MSE(\hat{\beta}(k)) &= Var(\hat{\beta}(k)) + (Bias(\hat{\beta}(k)))^2 \\ &= \sigma^2 tr[(X^T X + kI_p)^{-1} X^T X (X^T X + kI_p)^{-1}] \\ &\quad + k^2 \beta^T (X^T X + kI_p)^{-2} \beta\end{aligned}\quad (27.1)$$

اولین جمله سمت راست عبارت (۲۷.۱) مجموع واریانس‌های مؤلفه‌های پارامتر $\hat{\beta}(k)$ و دومین عبارت، توان دوم اریبی (ترانهاد اریبی در خودش) است. بنابراین، اریبی $\hat{\beta}(k)$ با افزایش k ، افزایش و واریانس آن با افزایش k کاهش می‌یابد و برعکس. ماتریس $X^T X + kI_p$ را می‌توان به صورت $\Gamma(\Lambda + kI_p)\Gamma^T$ تجزیه کرد که در آن، Γ یک ماتریس متعامد و $\Lambda = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ مقادیر ویژه ماتریس $X^T X$ است و $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p \geq 0$ می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned}MSE(\hat{\beta}(k)) &= \sigma^2 tr[\Gamma(\Lambda + kI_p)^{-1} \Gamma^T \Gamma \Lambda \Gamma^T \Gamma(\Lambda + kI_p)^{-1} \Gamma^T] + k^2 \beta^T \Gamma(\Lambda + kI_p)^{-2} \Gamma^T \beta \\ &= \sigma^2 tr[(\Lambda + kI_p)^{-1} \Lambda (\Lambda + kI_p)^{-1}] + k^2 \alpha^T (\Lambda + kI_p)^{-2} \alpha \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + k^2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i + k)^2}\end{aligned}$$

که در آن $\alpha = \Gamma^T \beta$ است.

در رگرسیون ريج، پارامتر k طوری انتخاب می‌شود که کاهش در واریانس بیشتر از افزایش توان دوم

^{۴۰}Horel and Kenard

اریبی باشد. در این صورت میانگین توان دوم خطای برآوردگر ریدج $\hat{\beta}(k)$ کمتر از واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم $\hat{\beta}$ خواهد بود. هورل و کنارد [۳۱] ثابت کردند که اگر $\beta^T \beta$ کراندار باشند، مقدار غیر صفری از k وجود دارد به طوری که مخاطره $\hat{\beta}(k)$ از مخاطره برآوردگر کمترین توان‌های $\hat{\beta}$ کمتر می‌شود.

فصل ۲

مروری بر رگرسیون در محیط فازی

در این فصل در مورد رگرسیون در محیط فازی و دو نوع آن، رگرسیون توان‌های دوم خطای فازی و رگرسیون امکانی و تلفیقی از این دو صحبت می‌کنیم. سپس برای ارزیابی مدل‌های رگرسیون فازی، چندین معیار نیکویی برازش را پیشنهاد می‌دهیم. در آخر با ارائه مثال عددی، مدل رگرسیونی به روش کمترین توان‌های دوم فازی را برآورد می‌کنیم و با محاسبه معیارهای نیکویی برازش، مدل را ارزیابی می‌کنیم. مطالب این فصل عمده‌تاً برگرفته از طاهری [۶]، اسداللهی [۲] است.

۱.۲ مقدمه

در رگرسیون کلاسیک فرض می‌شود که متغیرها و مشاهدات مربوط به آنها دقیق هستند. همچنین اختلاف بین مقدار مشاهده شده برای متغیر وابسته و مقداری که از طریق مدل حاصل می‌شود، و کلاً خطای مدل، به خطای تصادفی مربوط به مشاهدات و اندازه‌گیری‌ها، عدم حضور برخی از متغیرها و ... نسبت داده می‌شود. درباره‌ی این جملات خطای تصادفی و توزیع احتمالی آن، مفروضاتی مانند نرمال بودن، ناهمبسته بودن، ثبات واریانس و ... در نظر گرفته می‌شود. به گونه‌ای که بتوان بر پایه این مفروضات، تجزیه و تحلیل‌های آماری مانند برآورد پارامترها، پیش‌بینی مقدار متغیر وابسته و آزمون‌های فرض مرتبط با مدل را انجام داد. اما در بسیاری از اوقات ممکن است یک یا چند فرض از فرض‌های بالا برقرار نباشد، یا اینکه مثلاً به دلیل حجم نمونه اندک نتوان از درستی برخی فرض‌ها اطمینان حاصل کرد. برای مثال ممکن است در یک بررسی، مشاهدات مربوط به متغیرها نادقیق باشند یا نادقیق گزارش شده باشند؛ یا ممکن است متغیرهای تحت مطالعه دارای ارتباطی نادقیق باشند. همچنین ممکن است

مفروضاتی مانند نرمال بودن و ناهمبسته بودن جملات خطای تصادفی برقرار نباشد. در چنین شرایطی ابزارهای کلاسیک نمی‌توانند معیارهای مناسبی را برای مدلسازی داده‌ها ارائه دهند. یکی از راه‌های ممکن، استفاده از مفهوم مجموعه‌های فازی، برای مدل‌سازی داده‌ها در چنین شرایطی است.

۲.۲ انواع رگرسیون فازی

در یک تقسیم‌بندی کلی، انواع رگرسیون فازی را می‌توان به سه حالت زیر تقسیم کرد:

- (۱) رگرسیون فازی در حالتی که ارتباط بین متغیرها فازی فرض می‌شود. به عبارت دیگر ضرایب معادله رگرسیونی، فازی در نظر گرفته می‌شوند.
- (۲) رگرسیون فازی در حالتی که متغیرها (اعم از پیش‌بین یا پاسخ) نادقیق و فازی هستند.
- (۳) رگرسیون فازی در حالتی که هم متغیرها و هم ضرایب مدل، فازی در نظر گرفته می‌شوند.

لازم به ذکر است که تنوع در رگرسیون فازی، محدود به حالت‌های فوق نیست. بلکه شیوه‌هایی که برای هر حالت پیشنهاد شده است، تنوع بسیاری را در روش‌های رگرسیون فازی ایجاد کرده است. مانند رگرسیون کلاسیک که برحسب اصل یا اصولی که براساس آن‌ها برآورد پارامترهای مدل انجام می‌پذیرد، رگرسیون فازی را هم می‌توان تقسیم بندی کرد که می‌توان به روش‌های رگرسیون امکانی، رگرسیون کمترین توان‌های دوم خطای فازی و رگرسیون کمترین قدرمطلق خطای فازی اشاره کرد. در ادامه علاوه بر معرفی این روش‌ها، به برخی از محققینی که بر پایه‌ی یکی از روش‌های فوق، مساله‌ی رگرسیون را مورد بررسی قرار داده‌اند می‌پردازیم.

۱.۲.۲ رگرسیون کمترین توان‌های دوم خطای فازی

روش کمترین توان‌های دوم فازی^۱، نخستین بار توسط دیاموند^۲ [۲۰] و کلمینس^۳ [۱۷] ارائه شد. این روش تعمیمی از رگرسیون کمترین توان‌های دوم فازی در حالت کلاسیک است، که بر پایه‌ی تعریف‌هایی برای فاصله‌ی بین اعداد فازی می‌باشد. رگرسیون کمترین توان‌های دوم، مبتنی بر فاصله بین متغیر پاسخ و متغیر پیش‌بین است. دیاموند [۲۰] با تعریف فاصله‌ی بر اعداد فازی، مدل‌هایی را برای برازش کمترین توان‌های دوم برای مدل با متغیر مستقل دقیق و متغیر وابسته فازی و همچنین برای مدل با متغیر مستقل و وابسته فازی، پیشنهاد نمود. دیاموند و کورنر^۴ [۲۱] رگرسیون فازی را بر اساس متغیرهای تصادفی فازی ارائه کردند. همچنین، ژو و لی^۵ [۵۴] روش کمترین توان‌های دوم را برای برآورد ضرایب فازی مدل با استفاده از متری بر اساس سطوح تراز ارائه کردند و با یک معیار نیکویی برازش^۶، خوبی مدل رگرسیونی را اندازه گرفتند. در روش کمترین توان‌های دوم فازی، پارامترها به گونه‌ای برآورد می‌شوند که به ازای هر مقدار، فاصله‌ی بین متغیر وابسته‌ی مشاهده شده و متغیر وابسته برآورد شده بر

^۱Fuzzy least squares

^۲Diamond

^۳Celmins

^۴Korner

^۵Xu and Li

^۶Goodness of fit

اساس فاصله d مینیمم گردد. به عبارتی مانند روش کلاسیک به دنبال مینیمم کردن مجموع توان‌های دوم خطا هستیم. برای مثال، اگر مشاهدات متغیر وابسته، فازی باشند، می‌خواهیم مجموع توان‌های دوم $\sum_{i=1}^n d^2(Y_i, \hat{Y}_i)$ را مینیمم نمائیم، که $d(.,.)$ می‌تواند یک فاصله بین اعداد فازی باشد.

قرارداد ۱. برای سادگی در نوشتار در مباحث مربوط به رگرسیون فازی در این پایان نامه، حروف بزرگ انگلیسی را به عنوان اعداد فازی و حروف کوچک را به عنوان اعداد غیر فازی نمایش می‌دهیم. همچنین حروف پررنگ به معنای ماتریس یا بردار و در غیر اینصورت اسکالرند. X را ماتریس طرح گویند که ستون‌های آن شامل مقادیر متغیرهای پیش‌بین هستند.

در اینجا می‌خواهیم یک مدل خطی با ضرایب فازی A_j که $j = 0, \dots, p$ به صورت

$$\hat{Y}_i = A_0 + A_1 x_{i1} + \dots + A_p x_{ip}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

را بر پایه‌ی مشاهداتی به صورت

$$(Y_i, x_{i1}, \dots, x_{ip}), \quad i = 1, \dots, n$$

که در آن x_{ij} ها اعداد حقیقی و Y_i ها اعداد فازی هستند، برازش دهیم. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $x_{ij} > 0$. (در صورتی که x_{ij} ها اعدادی منفی باشند می‌توان با یک انتقال آن‌ها را به اعدادی مثبت تبدیل کرد). با استفاده از روش کمترین توان‌های دوم خطا و با توجه به فاصله (۱۰.۱) مدل (۱.۲) را به داده‌ها برازش می‌دهیم. یعنی ضرایب فازی را به گونه‌ای می‌یابیم که مجموع توان‌های دوم خطا (عبارت زیر) مینیمم شود

$$SSE(A_0, A_1, \dots, A_p) = \sum_{i=1}^n d^2(Y_i, A_0 + A_1 x_{i1} + \dots + A_p x_{ip}) \quad (2.2)$$

بحث را به حالتی که $Y_i = (m_{Y_i}, l_{Y_i})_T$ و $A_j = (m_{A_j}, l_{A_j})_T$ اعداد فازی مثلثی متقارن باشند، محدود می‌کنیم. بر اساس عملگرهای بین اعداد فازی داریم

$$A_0 + A_1 x_{i1} + \dots + A_p x_{ip} = (m_{A_0} + m_{A_1} x_{i1} + \dots + m_{A_p} x_{ip}, l_{A_0} + l_{A_1} x_{i1} + \dots + l_{A_p} x_{ip})_T$$

با توجه به آنچه گفته شد مجموع توان‌های دوم خطا به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} SSE(A_0, A_1, \dots, A_p) &= \sum_{i=1}^n (m_{A_0} + m_{A_1} x_{i1} + \dots + m_{A_p} x_{ip} - m_{Y_i})^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (l_{A_0} + l_{A_1} x_{i1} + \dots + l_{A_p} x_{ip} - l_{Y_i})^2 \end{aligned}$$

برای مینیمم سازی تابع $SSE(A_0, A_1, \dots, A_p)$ نسبت به m_{A_j} و l_{A_j} مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم، آنگاه معادلات نرمال زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (m_{A_0} + m_{A_1} x_{i1} + \dots + m_{A_p} x_{ip} - m_{Y_i}) x_{ij} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (l_{A_0} + l_{A_1} x_{i1} + \dots + l_{A_p} x_{ip} - l_{Y_i}) x_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

که در آن $j = 1, \dots, p$ و به ازای $i = 1, \dots, n$ ، $x_{i0} = 1$ منظور شده است. حال از معادلات بالا به ازای $j = 0, 1, \dots, p$ روابط زیر بدست می‌آیند

$$m_{A_0} \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{ij} + m_{A_1} \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ij} + \dots + m_{A_p} \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{ij} = \sum_{i=1}^n m_{Y_i} x_{ij} \quad (3.2)$$

$$l_{A_0} \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{ij} + l_{A_1} \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ij} + \dots + l_{A_p} \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{ij} = \sum_{i=1}^n l_{Y_i} x_{ij} \quad (4.2)$$

فرض کنید

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{i0} & \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i0} x_{ip} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i0} & \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{i0} & \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{ip} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m}_A = (m_{A_0}, \dots, m_{A_p})^T, \quad \mathbf{m}_Y = \left(\sum_{i=1}^n m_{Y_i} x_{i0}, \dots, \sum_{i=1}^n m_{Y_i} x_{ip} \right)^T$$

$$\mathbf{l}_A = (l_{A_0}, \dots, l_{A_p})^T, \quad \mathbf{l}_Y = \left(\sum_{i=1}^n l_{Y_i} x_{i0}, \dots, \sum_{i=1}^n l_{Y_i} x_{ip} \right)^T$$

در این صورت معادلات (۳.۲) و (۴.۲) را می‌توان با استفاده از نماد ماتریسی به صورت زیر نمایش داد

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{m}_A = \mathbf{m}_Y, \quad (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{l}_A = \mathbf{l}_Y \quad (5.2)$$

اکنون نتایج را درباره‌ی وجود و یکتایی جواب دستگاه (۵.۲) بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. [۵۴] اگر $Rank(\mathbf{X}) = p + 1$ ، آنگاه $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ یک ماتریس همیشه مثبت است.

بر پایه‌ی قضیه ۱.۲، و با توجه به اینکه اگر $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ همیشه مثبت باشد دارای معکوس $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ است، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱.۲. اگر $Rank(\mathbf{X}) = p + 1$ ، آنگاه دستگاه (۵.۲) دارای جواب یکتا به صورت زیر است

$$\hat{\mathbf{m}}_A = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{m}_Y, \quad \hat{\mathbf{l}}_A = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{l}_Y \quad (6.2)$$

بر اساس نتیجه‌ی ۱.۲، می‌توان قضیه زیر را در مورد مینیمم‌سازی عبارت (۲.۲) اثبات کرد.

جدول ۱.۲: داده‌های مربوط به مثال ۱.۲

ردیف	x_i	$y_i = (m_{y_i}, l_{y_i})_T$	ردیف	x_i	$y_i = (m_{y_i}, l_{y_i})_T$
۱	۰/۷۸	(۳/۰۸, ۰/۳۱)	۱۳	۰/۷۱	(۵/۲۳, ۰/۵۲)
۲	۰/۶۴	(۲/۸۶, ۰/۲۹)	۱۴	۰/۵	(۵/۱۶, ۰/۵۲)
۳	۰/۶۲	(۶/۲۵, ۰/۶۳)	۱۵	۰/۷۷	(۱۱/۱۰, ۱/۱۱)
۴	۰/۴۹	(۴/۱۱, ۰/۴۱)	۱۶	۰/۹۹	(۴/۴۷, ۰/۴۵)
۵	۱/۱۰	(۱/۰۴, ۰/۱۰)	۱۷	۳/۵۶	(۲۸/۸۴, ۲/۸۸)
۶	۰/۶۱	(۲/۷۱, ۰/۲۷)	۱۸	۰/۸۶	(۹/۴۳, ۰/۹۴)
۷	۰/۷۴	(۴/۴۵, ۰/۴۵)	۱۹	۰/۶۱	(۴/۵, ۰/۴۵)
۸	۱/۱۵	(۶/۹۲, ۰/۶۹)	۲۰	۰/۶۴	(۹/۳۰, ۰/۹۴)
۹	۱/۰۸	(۷/۴۱, ۰/۷۴)	۲۱	۰/۷۱	(۹/۴۸, ۰/۹۵)
۱۰	۰/۳۸	(۹/۰۸, ۰/۹۱)	۲۲	۰/۶۱	(۳/۶۵, ۰/۳۷)
۱۱	۰/۶۱	(۶/۵۶, ۰/۶۶)	۲۳	۰/۶۳	(۱۰/۱۴, ۱/۰۱)
۱۲	۰/۹۸	(۵/۰۵, ۰/۵۱)	۲۴	۱/۱۳	(۳, ۰/۳)

قضیه ۲.۲. [۵۴] اگر $Rank(X) = p + ۱$ و $(X^T X)^{-1} l_Y \geq ۰$ ، آنگاه مسئله مینیمم سازی عبارت (۲.۲) دارای جواب یکتاست که از رابطه (۶.۲) به دست می‌آید.

ملاحظه ۱.۲. شرط $(X^T X)^{-1} l_Y \geq ۰$ در قضیه ۲.۲ تضمین می‌کند که مقادیر l_{A_j} ها، یعنی پهناهای ضرایب فازی مدل، نامنفی باشند.

مثال ۱.۲. داده‌های جدول ۱.۲ مربوط به یک بررسی خاک شناسی هستند که درباره‌ی تأثیر $x: SAR -$ نسبت جذب سدیم) بر $y: ESP -$ درصد تبادل سدیم) در ناحیه‌ی سیلاخور لرستان در سال ۱۳۸۰ انجام شده است [۴۳]. به دلیل عدم نتیجه‌گیری با دقت کافی در اندازه‌گیری‌های ESP ، مشاهدات مربوط به متغیر y مبهم هستند. در واقع، همانطور که در جدول ۱.۲ درج شده است، این مشاهدات اعداد فازی مثلثی متقارن هستند که ابهام هر عدد نیز برابر $۰/۱۰$ مقدار نمای آن است. می‌خواهیم یک مدل بهینه برای رابطه ESP برحسب SAR بیابیم.

برای یافتن مدل بهینه لازم است ماتریس‌های X و $X^T X$ و بردارهای l_Y و m_Y را به دست آوریم. با انجام یک سری عملیات جبری ماتریسی داریم

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ۰/۷۸ \\ 1 & ۰/۶۴ \\ \vdots & \vdots \\ 1 & ۱/۱۳ \end{pmatrix}_{24 \times 2}$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 20.9 \\ 20.9 & 26.81 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m}_Y = \left(\sum_{i=1}^{24} m_{y_i} x_{i0}, \sum_{i=1}^{24} m_{y_i} x_{i1} \right)^T = (164/0.9, 202/32)^T$$

$$\mathbf{l}_Y = \left(\sum_{i=1}^{24} l_{y_i} x_{i0}, \sum_{i=1}^{24} l_{y_i} x_{i1} \right)^T = (16/41, 20/23)^T$$

چون $|\mathbf{X}^T \mathbf{X}| \neq 0$ ، ماتریس $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ معکوس پذیر است و لذا دستگاه (۵.۲) یعنی

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{m}_A = \mathbf{m}_Y, \quad (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{l}_A = \mathbf{l}_Y$$

دارای جواب یکتاست. طبق محاسبات بالا این جواب‌ها عبارتند از

$$\hat{\mathbf{m}}_A = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{m}_Y = (0.8265, 6/50.21)^T$$

$$\hat{\mathbf{l}}_A = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{l}_Y = (0.0826, 0.6902)^T$$

بنابراین مدل بهینه برای داده‌های جدول ۱.۲ عبارت است از

$$\begin{aligned} Y &= A_0 + A_1 x \\ &= (0.8265, 0.0826)_T + (6/50.21, 0.6902)_T x \end{aligned}$$

مدل بالا علاوه بر اینکه یک الگو برای رابطه‌ی بین دو متغیر x و y را ارائه می‌دهد، برای پیش‌بینی مقدار y بر پایه‌ی x نیز قابل استفاده است. برای مثال فرض کنید مقدار x برابر 0.75 مشاهده شود، آنگاه پیشگویی می‌کنیم که مقدار y یعنی ESP برابر با

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= (0.8265, 0.0826)_T + (6/50.21, 0.6902)_T \times 0.75 \\ &= (5/70, 0.60)_T \end{aligned}$$

باشد. به سخن دیگر مقدار y را حدوداً $5/70$ (با ابهام 0.6) پیشگویی می‌کنیم.

۲.۲.۲ رگرسیون امکانی

به مدل‌های رگرسیون با ضرایب فازی، گاهی مدل‌های رگرسیون امکانی^۷ هم گفته می‌شود. بدین دلیل که در این مدل‌ها، خطای مدل در قالب توزیع‌های امکانی ضرایب مدل منظور می‌شود. همچنین در این مدل‌ها، خطای پیش‌بینی متغیر وابسته، تعبیر امکانی دارد. به سخن دیگر، هنگامی که بر پایه‌ی مدل رگرسیون و به ازای مقادیری از متغیرهای توضیحی، مقدار متغیر پاسخ (وابسته) را پیش‌بینی می‌کنیم، فاصله‌ی پیش‌بینی تعبیر امکانی دارد نه تعبیر احتمالی.

^۷Possibilistic regression

مدل تاناکا و همکاران

تاناکا^۸ و همکاران [۴۹] نخستین بار در سال ۱۹۸۲ مساله رگرسیون امکانی را مطرح نمودند. در این روش پارامترهای فازی مدل به گونه‌ای برآورد می‌شوند که مدل، براساس برخی معیارهای نیکویی برازش، بهترین برازش را به داده‌ها داشته باشد.

در این بخش مدل رگرسیونی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در آن متغیرها و مشاهدات مربوط به آن دقیق هستند، اما ضرایب مدل، فازی فرض می‌شوند. صورت کلی مدلی که مورد بحث قرار می‌گیرد عبارت است از

$$Y = A_0 + A_1x_1 + \dots + A_px_p \quad (۷.۲)$$

که در آن Y متغیر وابسته یا اصطلاحاً خروجی فازی است، $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$ بردار متغیرهای مستقل یا اصطلاحاً بردار ورودی (با مقادیر حقیقی) و $A = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ یک مجموعه از اعداد فازی است. مسئله‌ای که در صدد حل آن هستیم به این صورت مطرح می‌شود

مجموعه‌ای از داده‌های معمولی به صورت $(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_n, x_n)$ در اختیار داریم. می‌خواهیم پارامترهای فازی $A_0, A_1, \dots, A_p$ را به گونه‌ای تعیین کنیم که مدل (۷.۲) براساس برخی از معیارهای نیکویی برازش، بهترین برازش را به داده‌های مذکور داشته باشد.

بر اساس روش تاناکا و همکاران [۴۹] برای این که بتوانیم بر پایه‌ی مجموعه‌ای از مشاهدات، پارامترهای مدل رگرسیون فازی (۷.۲)، یعنی ضرایب فازی مدل، را برآورد کنیم، دو معیار را در نظر می‌گیریم. نخست اینکه متغیر وابسته برآورد شده به ازای تمام مقادیر متغیر وابسته، دارای درجه عضویتی، حداقل به بزرگی h باشد به طوری که $h \geq H$. یعنی

$$\hat{Y}(y_i) \geq h, \quad i = 1, \dots, n \quad (۸.۲)$$

مقدار $H \in [0, 1]$ را مقدار آستانه گویند و توسط تصمیم گیرنده انتخاب می‌شود. هر چه مقدار H بیشتر باشد پهنای فاصله‌ی برآورد شده بیشتر می‌شود.

دومین معیار این است که ابهام در پیش بینی بر اساس مدل، حداقل شود، بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید $A_j = (m_{A_j}, l_{A_j}, r_{A_j})_T$ ($j = 0, 1, \dots, p$) باشد. برای رسیدن به این معیار، ضرایب فازی مدل را به گونه‌ای می‌یابیم که ابهام خروجی فازی مینیمم گردد. با توجه به اینکه هر چه پهنای یک عدد فازی بیشتر باشد، ابهام آن نیز بیشتر است. بنابراین برای رسیدن به هدف فوق، مجموع پهنای متغیرهای وابسته فازی برآورد شده را مینیمم می‌کنیم. یعنی برای مدل (۷.۲) داریم

$$\hat{Y}_i = \left(\sum_{j=0}^p m_{A_j} x_{ij}, \sum_{j=0}^p l_{A_j} x_{ij}, \sum_{j=0}^p r_{A_j} x_{ij} \right)_T$$

که در آن $x_{i0} = 1, i = 1, \dots, n$. در نتیجه عبارت (تابع هدف) زیر باید مینیمم گردد

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^p (l_{A_j} + r_{A_j}) x_{ij} \quad (۹.۲)$$

^۸Tanaka

حال برای مدل رگرسیون خطی امکانی با پاسخ‌های مشاهده شده فازی، تاناکا و همکاران [۴۹] محدودیت زیر را به شرط‌های رگرسیون امکانی اضافه کردند (شکل ۱.۲)

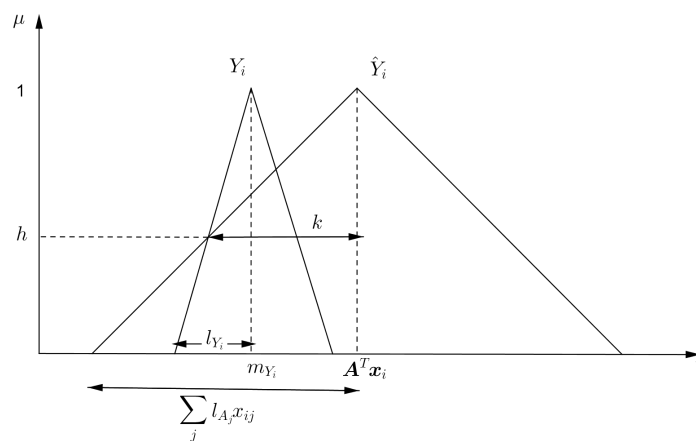
$$Y_i[h] \subseteq \hat{Y}_i[h], \quad h \geq H, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.2)$$

که در آن $Y_i[h]$ و $\hat{Y}_i[h]$ به ترتیب h -برش Y_i و $\hat{Y}_i$ هستند. پس به ازای $i = 1, \dots, n$ داریم

$$\sum_{j=0}^p m_{A_j} x_{ij} - (1-h) \sum_{j=0}^p l_{A_j} x_{ij} \leq m_{Y_i} - (1-h) l_{Y_i} \quad (11.2)$$

$$\sum_{j=0}^p m_{A_j} x_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^p r_{A_j} x_{ij} \geq m_{Y_i} + (1-h) r_{Y_i} \quad (12.2)$$

$$l_{A_j}, r_{A_j} \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, p \quad (13.2)$$



شکل ۱.۲: متغیر پاسخ و پیش‌بین فازی مثلثی در مدل تاناکا

تاناکا و لی^۹ [۵۰] اولین بار برای تحلیل مدل‌های رگرسیونی بازه‌ای از روش برنامه ریزی درجه دوم^{۱۰} استفاده کردند. دونسو^{۱۱} و همکاران [۲۴] با تعمیم این روش برای اعداد فازی مثلثی نامتقارن و با توجه به گرایش مرکزی^{۱۲}، تابع هدف زیر را معرفی کردند

$$J = k_1 \sum_{i=1}^n (m_{Y_i} - \mathbf{m}_A^T \mathbf{x}_i)^2 + k_2 (\mathbf{l}_A^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{l}_A + \mathbf{r}_A^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{r}_A) \quad (14.2)$$

که در آن $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{r}_A = (r_{A_0}, \dots, r_{A_p})^T$, $\mathbf{l}_A = (l_{A_0}, \dots, l_{A_p})^T$, $\mathbf{m}_A = (m_{A_0}, \dots, m_{A_p})^T$ هستند. این ضرایب نقش مهمی در اینکه اهمیت گرایش مرکزی بیشتر باشد یا ابهام مدل ایفا

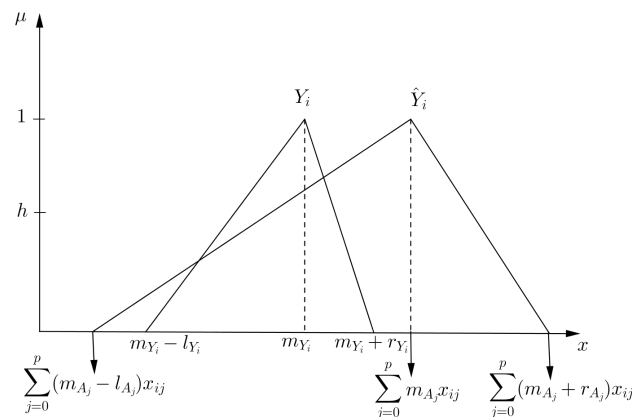
^۹Tanaka and Lee

^{۱۰}Quadratic programming

^{۱۱}Donoso

^{۱۲}Central tendency

می‌کنند. اگر $k_1 > k_2$ یعنی اهمیت مرکز بیشتر از پهنای پاسخ‌ها در نظر گرفته شده است و اگر $k_1 < k_2$ یعنی نزدیک بودن پهنای پاسخ‌ها اهمیت بیشتری نسبت به مراکز دارد. به مدل (۱۴.۲) و با شرایط (۱۱.۲) تا (۱۳.۲) مدل تعمیم یافته تاناکا با پارامترهای k_1 و k_2 می‌گویند (شکل). دونسو و همکاران [۲۴] در مدل (۱۴.۲)، توان دوم انحرافات پهنایها را جایگزین ابهام مدل



شکل ۲.۲: متغیر پاسخ و پیش‌بین فازی مثلی در مدل تعمیم یافته تاناکا

کردند و پهنای برآوردها را با پهنای خروجی مقایسه کردند.

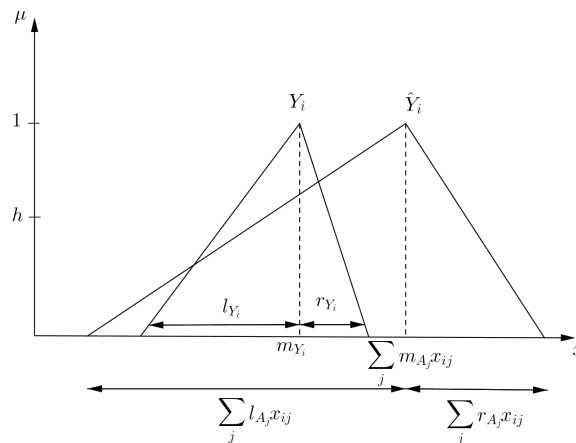
$$k_1 \sum_{i=1}^n (m_{Y_i} - \mathbf{m}_A^T \mathbf{x}_i)^2 + k_2 \left(\sum_{i=1}^n (m_{Y_i} - l_{Y_i} - (\mathbf{m}_A^T - \mathbf{l}_A^T) \mathbf{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (m_{Y_i} + r_{Y_i} - (\mathbf{m}_A^T + \mathbf{r}_A^T) \mathbf{x}_i)^2 \right) \quad (15.2)$$

به مدل با تابع هدف (۱۵.۲) و با شرایط (۱۱.۲) تا (۱۳.۲) مدل امکانی درجه دوم با پارامترهای k_1 و k_2 می‌گویند. یکی از انتقادهایی که به رگرسیون امکانی وارد است این است که با افزایش تعداد داده‌ها، طول پهنای برآورد نیز افزایش می‌یابد و این باعث می‌شود که ابهام مدل زیاد شود و در نتیجه برآوردهای نادقیقی بدست آید. بنابراین دونسو و همکاران [۲۴] برای رفع این مشکل مدل جدید غیرامکانی^{۱۳} درجه دوم را پیشنهاد دادند که این مدل تابع هدف (۱۵.۲) فقط با وارد کردن شرط (۱۳.۲) است.

۳.۲ نیکویی برازش

در رگرسیون فازی یک موضوع مهم، توان تشریح مدل می‌باشد. در این بخش، تعدادی معیار نیکویی برازش برای اندازه‌گیری برازش یک مدل رگرسیونی معرفی می‌کنیم.

^{۱۳} Quadratic non-possibilistic



شکل ۳.۲: متغیر پاسخ و پیش‌بین فازی مثلی در مدل امکانی درجه دوم

۱.۳.۲ ضریب تعیین تعمیم یافته

یکی از شاخص‌های ارزیابی نیکویی برازش مدل رگرسیون آماری، محاسبه ضریب تعیین می‌باشد که در فصل ۱ در رابطه (۲۱.۱) نشان داده شد. با الهام از این تعریف در آمار کلاسیک، برای مدل‌های رگرسیونی فازی، ضریب تعیین تعمیم یافته را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۲. در مدل رگرسیون خطی فازی اگر Y_i و $\hat{Y}_i$ به ترتیب متغیر وابسته و مقدار پیش‌بینی آن توسط مدل رگرسیون فازی باشد، ضریب تعیین تعمیم یافته برای مدل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R_G^Y = \frac{\sum_{i=1}^n d^Y(\hat{Y}_i, \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n d^Y(Y_i, \bar{Y})} \quad (۱۶.۲)$$

قضیه ۳.۲. ضریب تعیین تعمیم یافته مدل رگرسیونی فازی با ورودی غیرفازی و خروجی فازی مثلی بر اساس فاصله ژو و لی [۵۴] به صورت زیر است

$$\begin{aligned} R_G^Y = & \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(m_{\hat{Y}_i} - m_{\bar{Y}})^2 + \frac{1}{3} (m_{\hat{Y}_i} - m_{\bar{Y}}) [(r_{\hat{Y}_i} - r_{\bar{Y}}) - (l_{\hat{Y}_i} - l_{\bar{Y}})] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{12} [(l_{\hat{Y}_i} - l_{\bar{Y}})^2 + (r_{\hat{Y}_i} - r_{\bar{Y}})^2] \right] \right\} \\ & \div \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(m_{Y_i} - m_{\bar{Y}})^2 + \frac{1}{3} (m_{Y_i} - m_{\bar{Y}}) [(r_{Y_i} - r_{\bar{Y}}) - (l_{Y_i} - l_{\bar{Y}})] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{12} [(l_{Y_i} - l_{\bar{Y}})^2 + (r_{Y_i} - r_{\bar{Y}})^2] \right] \right\} \end{aligned} \quad (۱۷.۲)$$

برهان. با توجه به تعریف ۱.۲ و فاصله تعریف شده در رابطه (۸.۱) نتیجه به سادگی بدست می‌آید. $\square$

۲.۳.۲ میانگین توان دوم خطای پیشگویی

میانگین توان دوم خطای پیشگویی^{۱۴} (MPE) به عنوان معیار دیگری برای ارزیابی نیکویی برازش استفاده کرد. در زیر مشابه قضیه ۱.۳.۳، معیار MPE را در قالب یک تعریف می آوریم.

تعریف ۲.۲. تحت مفروضات مدل رگرسیونی فازی (۱.۲) اگر $\hat{Y}_i$ مقدار پیشگویی Y_i باشد آنگاه میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MPE) برابر است با

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(Y_i, \hat{Y}_i) \quad (۱۸.۲)$$

۳.۳.۲ معیار خطا

برای ارزیابی اعتبار یک مدل رگرسیون فازی، کیم و بیشو^{۱۵} [۳۴] از تفاضل بین مقادیر عضویت بین پاسخ های فازی مشاهده و برآورد شده، به عنوان یک معیار استفاده کرده اند که در زیر آن را معرفی می کنیم.

۱- خطای نسبی برآورد

فرض کنید Y_i و $\hat{Y}_i$ به ترتیب متغیر پاسخ مشاهده شده و برآورد شده از یک مدل رگرسیونی فازی باشند. تفاضل نسبی بین توابع عضویت بین این دو عدد به صورت زیر تعریف می شود

$$E_1(Y_i, \hat{Y}_i) = \frac{\int_{S_{Y_i} \cup S_{\hat{Y}_i}} |Y_i(x) - \hat{Y}_i(x)| dx}{\int_{S_{Y_i}} Y_i(x) dx} \quad (۱۹.۲)$$

که در آن S_{Y_i} و $S_{\hat{Y}_i}$ به ترتیب تکیه گاه Y_i و $\hat{Y}_i$ است. این معیار در واقع مساحت غیرمشترک زیر نمودار تابع عضویت پاسخ مشاهده شده و برآورد متناظر آن است. هرچه مقدار $E_1(Y_i, \hat{Y}_i)$ کوچکتر باشد، مدل رگرسیون برازش داده شده به داده ها از کارایی بیشتری برخوردار است. از این معیار چن و دانگ^{۱۶} [۱۹] و لیو و وانگ^{۱۷} [۳۸] نیز برای نیکویی برازش مدل رگرسیونی فازی خود استفاده کرده اند.

۲- خطای برآورد: در تعریف خطای نسبی برآورد اگر فقط تفاضل بین توابع عضویت Y_i و $\hat{Y}_i$ را در نظر بگیریم و مجموع تابع عضویت عدد فازی مشاهده شده را یک در نظر بگیریم، معیار دیگری به نام خطای برآورد بدست می آید که در زیر آن را مشاهده می کنید

$$E_2(Y_i, \hat{Y}_i) = \int_{S_{Y_i} \cup S_{\hat{Y}_i}} |Y_i(x) - \hat{Y}_i(x)| dx \quad (۲۰.۲)$$

انتظار داریم عدد فازی برآورد شده تابع عضویتی نزدیک به تابع عضویت عدد فازی مشاهده شده داشته باشد از این رو خطای برآورد، تفاضل بین این دو تابع عضویت را محاسبه می کند و هر چه مقدار

^{۱۴} Mean squares of prediction error

^{۱۵} Kim and Bishu

^{۱۶} Chen and Dang

^{۱۷} Lu and Wang

$E_2(Y_i, \hat{Y}_i)$ کوچکتر باشد نشان از نزدیکی دو تابع عضویت دارد. چن و دانگ [۱۹] لیو و وانگ [۳۸] و کائو و چیو^{۱۸} [۳۶]، [۳۵] از این معیار برای نیکویی برازش مدل رگرسیونی استفاده کرده‌اند.

۴.۳.۲ اعتبار سنجی متقابل

یکی از شاخص‌های دیگر برای بررسی کارایی مدل، روش اعتبار سنجی متقابل^{۱۹} است. روش اعتبار سنجی متقابل برای سنجش قابلیت پیش بینی مدل به کار می‌بریم (برای نمونه، صفحه ۶۹ از کتاب واسرمن^{۲۰} [۵۲] را ببینید). برای این منظور هر دفعه، i امین مشاهده از مجموعه داده‌ها خارج می‌شود، در حالی که مابقی مشاهدات به منظور ایجاد مدل رگرسیون فازی استفاده می‌شود. آنگاه مدل بدست آمده برای پیش‌بینی مقدار پاسخ i امین مشاهده $(Y_{(-i)}(x_i))$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. سرانجام برای مقایسه i امین مقدار مشاهدات Y_i و مقدار پیش‌بینی $Y_{(-i)}(x_i)$ ، فاصله (۸.۱) بین Y_i و $Y_{(-i)}(x_i)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$MPE_{cv} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(Y_i, \hat{Y}_{(-i)}(x_i)) \quad (21.2)$$

مثال ۲.۲. داده‌های جدول ۲.۲ مربوط به یک بررسی درباره‌ی رابطه‌ی بین x_1 : مقدار تری کلسیم آلومینات، x_2 : مقدار تری کلسیم سیلیکات، و x_3 مقدار تری کلسیم آلومونوفری به‌عنوان متغیرهای توضیحی، و y : حرارت حاصله (کالری در گرم) در سیمان، مربوط به ۱۳ آزمایش است که به منظور بررسی اثر ترکیبات سیمان پرتلند بر روی حرارت حاصله طی سفت شدن سیمان انجام شده است [۵۴]. طبق روش رگرسیون کمترین توان‌های دوم خطای فازی که در بخش ۱.۲.۲ تشریح شد، رگرسیون فازی Y بر x_1 و x_2 و x_3 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{Y} = (47.905, 3.796)_T + (1.711, 0.170)_T x_1 + (0.655, 0.066)_T x_2 + (0.266, 0.023)_T x_3$$

حال برای بررسی نیکویی برازش مدل، معیارهایی که در بخش ۳.۲ بیان کردیم را برای همه‌ی داده‌ها محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول ۳.۲ و ۴.۲ درج شده‌اند (d_1 ، d_2 و d_3 به ترتیب معیارهای خطا با توجه به (۸.۱)، (۱۴.۱) و (۲۰.۲) است). اگرچه MPE های محاسبه شده برای مقایسه مدل‌های پیشنهادی به کار می‌رود ولی مقدار کوچک آن دلیل بر مناسب بودن مدل است. همچنین ضریب تعیین تعمیم یافته مدل برابر با ۰.۹۹۸ است.

^{۱۸}Kao and Chyu

^{۱۹}Cross-Validation

^{۲۰}Wasserman

جدول ۲.۲: داده‌های مربوط به مثال ۲.۲

شماره مشاهده	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	Y_i
۱	۷	۲۶	۶	(۷۸/۵, ۶/۹)
۲	۱	۲۹	۱۵	(۷۴/۳, ۶/۴)
۳	۱۱	۵۶	۸	(۱۰۴/۳, ۹/۴)
۴	۱۱	۳۱	۸	(۸۷/۶, ۷/۸)
۵	۷	۵۲	۶	(۹۵/۹, ۸/۶)
۶	۱۱	۵۵	۹	(۱۰۹/۲, ۹/۹)
۷	۳	۷۱	۱۷	(۱۰۲/۷, ۹/۳)
۸	۱	۳۱	۲۲	(۷۲/۵, ۶/۲)
۹	۲	۵۴	۱۸	(۹۳/۱, ۸/۳)
۱۰	۲۱	۴۷	۴	(۱۱۵/۹, ۱۰/۶)
۱۱	۱	۴۰	۲۳	(۸۳/۳, ۷/۴)
۱۲	۱۱	۶۶	۹	(۱۱۳/۳, ۱۰/۶)
۱۳	۱۰	۶۸	۸	(۱۰۹/۴, ۹/۹)

جدول ۳.۲: معیارهای نیکویی برازش برای مثال ۲.۲

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2	d_3
۱	(۷۸/۵, ۶/۹)	(۷۸/۵۳, ۶/۸۶)	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۶	۰/۰۷۰۶
۲	(۷۴/۳, ۶/۴)	(۷۲/۶۲, ۶/۲۵)	۲/۷۹۲۶	۲/۷۹۶۱	۳/۱۱۹۷
۳	(۱۰۴/۳, ۹/۴)	(۱۰۵/۵۹, ۹/۶۰)	۱/۶۷۵۲	۱/۶۸۱۹	۲/۴۹۵۶
۴	(۸۷/۶, ۷/۸)	(۸۹/۱۹, ۷/۹۳)	۲/۵۳۸۴	۲/۵۴۱۳	۳/۰۲۳۵
۵	(۹۵/۹, ۸/۶)	(۹۵/۵۹, ۸/۶۰)	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۸۲	۰/۱۸۰۸
۶	(۱۰۹/۲, ۹/۹)	(۱۰۵/۲۰, ۹/۵۵)	۱۶/۰۰۵۳	۱۶/۰۲۴۹	۷/۱۷۴۸
۷	(۱۰۲/۷, ۹/۳)	(۱۰۴/۱۳, ۹/۴۵)	۲/۰۶۴۲	۲/۰۶۷۹	۲/۷۶۰۹
۸	(۷۲/۵, ۶/۲)	(۷۵/۸۰, ۶/۵۵)	۱۰/۹۳۷۶	۱۰/۹۵۸۴	۵/۷۵۲۱
۹	(۹۳/۱, ۸/۳)	(۹۱/۵۳, ۸/۱۶)	۲/۴۴۰۸	۲/۴۴۳۷	۲/۹۷۴۷
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۰/۶)	(۱۱۵/۷۳, ۱۰/۶۱)	۰/۰۲۶۷	۰/۰۲۶۷	۰/۳۲۵۶
۱۱	(۸۳/۳, ۷/۴)	(۸۱/۹۷, ۷/۱۷)	۳/۳۴۳	۳/۳۵۱۲	۳/۴۲۳۵
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۰/۶)	(۱۱۲/۴۱, ۱۰/۲۹)	۰/۷۹۴۵	۰/۸۱۰۳	۱/۷۲۷۷
۱۳	(۱۰۹/۴, ۹/۹)	(۱۱۱/۷۵, ۱۰/۲۳)	۵/۵۵۰۹	۵/۵۶۹۳	۴/۴۲۹۴
MPE			۳/۷۰۶۱	۳/۷۱۴	۲/۸۸۱۵

جدول ۴.۲: معیار اعتبار سنجی متقابل برای مثال ۲.۲

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d
۱	(۷۸/۵, ۶/۹)	(۷۸/۵۶, ۶/۸۴)	۰/۰۰۴۸
۲	(۷۴/۳, ۶/۴)	(۷۱/۹۳, ۶/۱۶)	۵/۶۰۲۴
۳	(۱۰۴/۳, ۹/۴)	(۱۰۵/۷۷, ۹/۶۲)	۲/۱۷۴۰
۴	(۸۷/۶, ۷/۸)	(۸۹/۷۰, ۷/۹۷)	۴/۴۲۳۴
۵	(۹۵/۹, ۸/۶)	(۹۵/۶۳, ۸/۶۰)	۰/۰۱۸۵
۶	(۱۰۹/۲, ۹/۹)	(۱۰۴/۶۸, ۹/۵۱)	۲۰/۴۶۸۳
۷	(۱۰۲/۷, ۹/۳)	(۱۰۴/۹۶, ۹/۵۳)	۵/۱۱۵۴
۸	(۷۲/۵, ۶/۲)	(۷۷/۸۵, ۶/۷۷)	۲۸/۷۳۹۳
۹	(۹۳/۱, ۸/۳)	(۹۱/۱۷, ۸/۱۳)	۳/۶۹۶۱
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۰/۶)	(۱۱۵/۳۸, ۱۰/۶۳)	۰/۲۶۷۴
۱۱	(۸۳/۳, ۷/۴)	(۸۰/۸۶, ۷/۰۴)	۸/۶۶۰۵
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۰/۶)	(۱۱۲/۲۰, ۱۰/۲۱)	۱/۲۳۱۳
۱۳	(۱۰۹/۴, ۹/۹)	(۱۱۲/۴۸, ۱۰/۳۳)	۹/۵۳۰۱
MPE_{cv}			۶/۱۱۷۲

فصل ۳

رگرسیون ریج فازی وزن دار شده

در این فصل ابتدا مدل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده^۱، برای مجموعه‌ای از ورودی‌های دقیق و خروجی فازی مثلثی که توسط بلاسوندارام و کاپیل^۲ [۱۴] پیشنهاد شده است را بررسی می‌کنیم و با ارائه چندین مثال و محاسبه معیارهای نیکویی برازش این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش بعد روش رگرسیون ریج فازی دوپارامتری را برای مجموعه‌ای از ورودی‌های دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد می‌دهیم [۷]. سپس با ارائه چندین مثال به کارایی این روش می‌پردازیم.

۱.۳ مقدمه

در فصل اول هم خطی چندگانه و آثار آن در رگرسیون معمولی به طور کامل شرح داده شد. همانطور که گفته شد یکی از راه‌های برطرف کردن مشکل هم‌خطی در رگرسیون چندگانه، رگرسیون ریج است. در رگرسیون فازی نیز زمانی که بین متغیرهای ورودی مشکل هم‌خطی وجود داشته باشد، یکی از راه‌های برطرف کردن این مشکل، رگرسیون ریج فازی است. لازم به ذکر است که مشکل هم‌خطی چندگانه در رگرسیون فازی نیز وجود دارد ولی کمتر مورد توجه و بررسی قرار گرفته است. مسأله‌ی هم‌خطی چندگانه در رگرسیون فازی به دلیل همبستگی شدید بین متغیرهای ورودی می‌باشد. همانطور که می‌دانیم مشکل هم‌خطی چندگانه ممکن است ضرایب رگرسیون نادرستی را نتیجه دهد و سبب شود که تفسیر نادرستی برای مدل رگرسیونی بدست آید.

^۱Weighted fuzzy ridge regression

^۲Balasundaram and Kapil

۲.۳ مدل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده

در این بخش مدل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده^۳ [۱۴] را که برای مجموعه‌ای از ورودی‌های دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد شده است، بررسی می‌کنیم. مدل رگرسیون خطی فازی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$Y = A_{\circ} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} = \left(\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_j + m_{A_{\circ}}, \sum_{j=1}^p l_{A_j} x_j + l_{A_{\circ}}, \sum_{j=1}^p r_{A_j} x_j + r_{A_{\circ}} \right)_T \quad (1.3)$$

که در آن $\mathbf{A} = (A_{\circ}, A_1, \dots, A_p)^T$ و $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ بردار ضرایب فازی است که $Y = (m_Y, l_Y, r_Y)_T$ و $A_{\circ} = (m_{A_{\circ}}, l_{A_{\circ}}, r_{A_{\circ}})_T$ و $A_j = (m_{A_j}, l_{A_j}, r_{A_j})_T$ روی $\mathbb{R}$ هستند. فرض کنید مجموعه‌هایی از نمونه‌های ورودی دقیق و مقادیر مشاهده شده فازی مثلثی متناظر با آن $\{(x_i, Y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ داده شده باشد که برای بردار $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T \in \mathbb{R}^p$ و مقادیر مشاهده شده $Y_i = (m_{Y_i}, l_{Y_i}, r_{Y_i})_T \in T(\mathbb{R})$ که m_{Y_i} و l_{Y_i} و r_{Y_i} به ترتیب مرکز، پهنای چپ و راست عدد فازی Y_i است. ماتریس $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ را چنین تعریف می‌کنیم که i امین سطر این ماتریس را بردار $\mathbf{x}_i^T$ تشکیل می‌دهد. همچنین e بردار ستونی از یک‌ها با بعد n و ماتریس همانی $\mathbf{I}$ با بعد مناسب است.

با توجه به روش فانگ و مانگاسارین^۴ [۲۶]، هانگ^۵ و همکاران [۳۳] و ساندرز^۶ و همکاران [۴۷] مسئله رگرسیون ریج را می‌توان به عنوان یک مسئله بهینه سازی به صورت زیر تعریف کرد

$$\min_{\mathbf{A}_{\circ}, \mathbf{A}} \sum_{i=1}^n d^{\vee} (A_{\circ} + \mathbf{x}_i^T \mathbf{A}, Y_i) + \lambda (\|\mathbf{A}\|^{\vee} + \|\mathbf{A}_{\circ}\|^{\vee}) \quad (2.3)$$

که در آن $\lambda > 0$ پارامتر ریج است. حال با استفاده از روابط (۸.۱) و (۱۱.۱) و (۱۲.۱) داریم

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|^{\vee} + \|\mathbf{A}_{\circ}\|^{\vee} &= \sum_{j=1}^p \|(m_{A_j}, l_{A_j}, r_{A_j})\|^{\vee} + \|(m_{A_{\circ}}, l_{A_{\circ}}, r_{A_{\circ}})\|^{\vee} \\ &= \sum_{j=1}^p [m_{A_j}^{\vee} + \frac{1}{3} m_{A_j} (r_{A_j} - l_{A_j}) + \frac{1}{12} (l_{A_j}^{\vee} + r_{A_j}^{\vee})] \\ &\quad + m_{A_{\circ}}^{\vee} + \frac{1}{3} m_{A_{\circ}} (r_{A_{\circ}} - l_{A_{\circ}}) + \frac{1}{12} (l_{A_{\circ}}^{\vee} + r_{A_{\circ}}^{\vee}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

^۳Weighted fuzzy ridge regression

^۴Fung and Mangasarin

^۵Hong

^۶Saunders

و برای $i = 1, \dots, n$ می توان نوشت

$$\begin{aligned}
 d^{\vee} (A_{\circ} + \mathbf{x}_i^T \mathbf{A}, Y_i) &= || (A_{\circ} + \mathbf{x}_i^T \mathbf{A}) - Y_i ||^{\vee} \\
 &= \left[\left(\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_{\circ}} - m_{Y_i} \right)^{\vee} + \frac{1}{\varpi} \left(\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_{\circ}} - m_{Y_i} \right) \right. \\
 &\quad \times \left[\left(\sum_{j=1}^p r_{A_j} x_{ij} + r_{A_{\circ}} - r_{Y_i} \right) - \left(\sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij} + l_{A_{\circ}} - l_{Y_i} \right) \right] \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\varpi^2} \left[\left(\sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij} + l_{A_{\circ}} - l_{Y_i} \right)^{\vee} + \left(\sum_{j=1}^p r_{A_j} x_{ij} + r_{A_{\circ}} - r_{Y_i} \right)^{\vee} \right] \right] \quad (۴.۳)
 \end{aligned}$$

حال مسئله مینیمم سازی (۲.۳) را با توجه به (۳.۳) و (۴.۳) به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\begin{aligned}
 \min_{\substack{m_{\mathbf{A}}, l_{\mathbf{A}}, r_{\mathbf{A}}, \\ m_{A_{\circ}}, l_{A_{\circ}}, r_{A_{\circ}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3}} \lambda &\left(\sum_{j=1}^p \left[m_{A_j}^{\vee} + \frac{1}{\varpi} m_{A_j} (r_{A_j} - l_{A_j}) + \frac{1}{\varpi^2} (l_{A_j}^{\vee} + r_{A_j}^{\vee}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + m_{A_{\circ}}^{\vee} + \frac{1}{\varpi} m_{A_{\circ}} (r_{A_{\circ}} - l_{A_{\circ}}) + \frac{1}{\varpi^2} (l_{A_{\circ}}^{\vee} + r_{A_{\circ}}^{\vee}) \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\xi_{1i}^{\vee} + \frac{1}{\varpi} \xi_{1i} (\xi_{3i} - \xi_{2i}) + \frac{1}{\varpi^2} (\xi_{2i}^{\vee} - \xi_{3i}^{\vee}) \right] \quad (۵.۳)
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_{\mathbf{A}}^T \mathbf{x}_i + m_{A_{\circ}} - m_{Y_i} &= \xi_{1i} \\
 \mathbf{l}_{\mathbf{A}}^T \mathbf{x}_i + l_{A_{\circ}} - l_{Y_i} &= \xi_{2i} \\
 \mathbf{r}_{\mathbf{A}}^T \mathbf{x}_i + r_{A_{\circ}} - r_{Y_i} &= \xi_{3i}
 \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

بوده و همچنین

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_{\mathbf{A}} &= (m_{A_1}, \dots, m_{A_p})^T \\
 \mathbf{l}_{\mathbf{A}} &= (l_{A_1}, \dots, l_{A_p})^T \\
 \mathbf{r}_{\mathbf{A}} &= (r_{A_1}, \dots, r_{A_p})^T \\
 \xi_1 &= (\xi_{11}, \dots, \xi_{1n})^T \\
 \xi_2 &= (\xi_{21}, \dots, \xi_{2n})^T \\
 \xi_3 &= (\xi_{31}, \dots, \xi_{3n})^T
 \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

مسئله بهینه سازی (۵.۳) را می توان از روش کمینه سازی لاگرانژ حل کرد. اگر

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})^T$$

$$\alpha_2 = (\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n})^T$$

$$\alpha_3 = (\alpha_{31}, \dots, \alpha_{3n})^T$$

ضرایب لاگرانژ^۷ در $\mathbb{R}^n$ باشند در این صورت تابع هدف عبارتست از

$$\begin{aligned} L(m_A, l_A, r_A, m_{A_*}, l_{A_*}, r_{A_*}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ = \lambda \left(\sum_{j=1}^p \left[m_{A_j}^* + \frac{1}{\beta} m_{A_j} (r_{A_j} - l_{A_j}) + \frac{1}{\beta} (l_{A_j}^* + r_{A_j}^*) \right] \right. \\ \left. + (m_{A_*}^* + \frac{1}{\beta} m_{A_*} (r_{A_*} - l_{A_*}) + \frac{1}{\beta} (l_{A_*}^* + r_{A_*}^*)) \right) \\ + \sum_{i=1}^n [\xi_{1i}^* + \frac{1}{\beta} \xi_{1i} (\xi_{3i} - \xi_{2i}) + \frac{1}{\beta} (\xi_{2i}^* - \xi_{3i}^*)] \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} [\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_*} - m_{Y_i} - \xi_{1i}] \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} [\sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij} + l_{A_*} - l_{Y_i} - \xi_{2i}] \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} [\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_*} - m_{Y_i} - \xi_{3i}] \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

با مشتقگیری از L نسبت به هر یک از پارامترها و برابر صفر قراردادن آن، دستگاه معادلات نرمال زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m_A} &= \circ \Rightarrow \lambda \left(\beta m_A + \frac{1}{\beta} (r_A - l_A) \right) = -X^T \alpha_1 \\ \frac{\partial L}{\partial l_A} &= \circ \Rightarrow \lambda \left(-\frac{1}{\beta} m_A + \frac{1}{\beta} l_A \right) = -X^T \alpha_2 \\ \frac{\partial L}{\partial r_A} &= \circ \Rightarrow \lambda \left(\frac{1}{\beta} m_A + \frac{1}{\beta} r_A \right) = -X^T \alpha_3 \\ \frac{\partial L}{\partial m_{A_*}} &= \circ \Rightarrow \lambda \left(\beta m_{A_*} + \frac{1}{\beta} (r_{A_*} - l_{A_*}) \right) = -e^T \alpha_1 \\ \frac{\partial L}{\partial l_{A_*}} &= \circ \Rightarrow \lambda \left(-\frac{1}{\beta} m_{A_*} + \frac{1}{\beta} l_{A_*} \right) = -e^T \alpha_2 \\ \frac{\partial L}{\partial r_{A_*}} &= \circ \Rightarrow \lambda \left(\frac{1}{\beta} m_{A_*} + \frac{1}{\beta} r_{A_*} \right) = -e^T \alpha_3 \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_1} &= \circ \Rightarrow \beta \xi_1 + \frac{1}{\beta} (\xi_3 - \xi_2) = \alpha_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_2} &= \circ \Rightarrow -\frac{1}{\beta} \xi_2 + \frac{1}{\beta} \xi_3 = \alpha_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_3} &= \circ \Rightarrow \frac{1}{\beta} \xi_1 + \frac{1}{\beta} \xi_3 = \alpha_3 \end{aligned}$$

^۷Lagrange Multipliers

با حل همزمان معادلات بالا داریم

$$\begin{aligned}
 m_A &= -\frac{X^T}{\lambda} \left(\frac{3}{4}\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) \\
 l_A &= -\frac{X^T}{\lambda} (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) \\
 r_A &= -\frac{X^T}{\lambda} (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3) \\
 m_{A_s} &= -\frac{e^T}{\lambda} \left(\frac{3}{4}\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) \\
 l_{A_s} &= -\frac{e^T}{\lambda} (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) \\
 r_{A_s} &= -\frac{e^T}{\lambda} (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3) \\
 \xi_1 &= \left(\frac{3}{4}\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) \\
 \xi_2 &= (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) \\
 \xi_3 &= (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3)
 \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

با جایگذاری شرایط (۹.۳) در (۸.۳) می‌توان مسئله مینیمم سازی را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 \min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^n} L &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{4}\alpha_1^T (XX^T + ee^T) \alpha_1 + 3\alpha_1^T (XX^T + ee^T) \alpha_2 \right. \\
 &\quad - 3\alpha_1^T (XX^T + ee^T) \alpha_3 + 6\alpha_2^T (XX^T + ee^T) \alpha_2 \\
 &\quad - 6\alpha_2^T (XX^T + ee^T) \alpha_3 + 6\alpha_3^T (XX^T + ee^T) \alpha_3) \\
 &\quad + \left(\frac{3}{4}\alpha_1^T \alpha_1 + 3\alpha_1^T \alpha_2 - 3\alpha_1^T \alpha_3 + 6\alpha_2^T \alpha_2 - 6\alpha_2^T \alpha_3 + 6\alpha_3^T \alpha_3 \right) \\
 &\quad + \alpha_1^T m_y + \alpha_2^T l_y + \alpha_3^T r_y
 \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

که در آن $\mathbf{r} = (r_{Y_1}, \dots, r_{Y_p})^T$ و $\mathbf{l} = (l_{Y_1}, \dots, l_{Y_p})^T$ ، $\mathbf{m} = (m_{Y_1}, \dots, m_{Y_p})^T$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ هستند.

سپس با مشتق گیری از L نسبت به ضرایب لاگرانژ و مساوی صفر قرار دادن آنها داریم

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} &= \left(I + \frac{1}{\lambda} (XX^T + ee^T) \right) \left(\frac{3}{4}\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) + \mathbf{m} = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} &= \left(I + \frac{1}{\lambda} (XX^T + ee^T) \right) (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) + \mathbf{l} = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial \alpha_3} &= \left(I + \frac{1}{\lambda} (XX^T + ee^T) \right) (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3) + \mathbf{r} = 0
 \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

با استفاده از (۱۱.۳) و (۹.۳) جواب نهایی مسئله مینیمم سازی (۵.۳) عبارتست از

$$\begin{aligned} m_A &= X^T \left(\frac{I}{\lambda} + GG^T \right)^{-1} m \\ l_A &= X^T \left(\frac{I}{\lambda} + GG^T \right)^{-1} l \\ r_A &= X^T \left(\frac{I}{\lambda} + GG^T \right)^{-1} r \\ m_{A.} &= e^T \left(\frac{I}{\lambda} + GG^T \right)^{-1} m \\ l_{A.} &= e^T \left(\frac{I}{\lambda} + GG^T \right)^{-1} l \\ r_{A.} &= e^T \left(\frac{I}{\lambda} + GG^T \right)^{-1} r \end{aligned}$$

که در آن $G = [X \ e]$ یک ماتریس الحاقی است.

برای هر بردار ورودی دقیق $x \in \mathbb{R}^n$ و با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی (۱.۳) و خروجی فازی $Y = (m_Y, l_Y, r_Y)_T$ ، برآورد Y به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} G^T (\lambda I + GG^T)^{-1} (m, l, r)_T \quad (۱۲.۳)$$

رابطه (۱۲.۳) پیشگویی خطی فازی Y است. در ادامه در قالب یک مثال شبیه سازی خطای پیشگویی Y را به ازای مقادیر مختلف λ مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۱.۲.۳ مثال شبیه سازی

همخطی در ماتریس‌های طرح، متفاوت است. برای داشتن داده‌هایی با میزان همخطی مختلف مک و دونالد و گالارنیو^۸ [۴۲] و گیبونز^۹ [۲۹] پیشنهاد دادند که داده‌ها را به روش زیر تولید کنیم

$$x_{ij} = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} z_{ij} + \gamma z_{ip}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p$$

که در آن z_{ij} اعداد تصادفی مستقل از توزیع نرمال با میانگین ۵ و انحراف معیار یک است و γ^2 همبستگی بین هردو متغیر توضیحی است. این متغیرها استاندارد شده‌اند، به‌طوری که $X^T X$ و $X^T Y$ همبسته هستند. حال با استفاده از رابطه زیر، n مشاهده برای متغیر وابسته تعیین می‌شود

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + e_i \quad i = 1, \dots, n$$

^۸Mc Donald and Galarneau

^۹Gibbons

که در آن $\beta_0 = 0$ و e_i اعداد تصادفی مستقل از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. (نیوهوس و اومن^{۱۰} [۴۵]) در صورتی که میانگین توان دوم خطا، تابعی از β ، σ^2 و k باشد و متغیرهای توضیحی ثابت باشند، اگر β بردار ویژه نرمال شده متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $X^T X$ تحت قید $\beta^T \beta = 1$ باشد، آنگاه MSE مینیمم می‌شود. بنابراین از بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $X^T X$ برای برآورد ضرایب $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ در شبیه‌سازی مقادیر متغیر پاسخ استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که استفاده از بردار ویژه متناظر با کوچکترین مقدار ویژه، نتایج آنچنان متفاوتی نسبت به حالت قبل ارائه نمی‌دهد. برای انجام شبیه‌سازی، مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌ازای همبستگی $\gamma = 0.99$ تولید می‌کنیم. حجم نمونه را $n = 50$ و تعداد متغیرهای توضیحی را ۳ در نظر گرفته‌ایم. مقادیر ویژه عبارتند از

$$v_1 = 4631.5811, v_2 = 0.8240, v_3 = 0.6380$$

و بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه عبارتست از

$$(0.5761, 0.5768, 0.5790)^T$$

داده‌های شبیه‌سازی با استفاده از نرم افزار R در جدول ۲.۳ آمده است. نمودار پراکنش x ها در برابر هم (نمودار ۱.۳) حاکی از همبستگی بین x ها و یا به عبارتی دیگر وابستگی خطی متغیرهای پیشگو است. پس از تولید داده‌ها، عملیات فازی کردن داده‌ها (در این مثال فقط داده‌های مربوط به متغیر پاسخ) را انجام می‌دهیم. با استفاده از یک عدد فازی مثلی با پهنای چپ و راست متناسب با متغیر پاسخ (y) فازی سازی کرده‌ایم. چون مقادیر ورودی دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان دادن میزان همخطی در داده‌ها استفاده می‌کنیم. مقادیر VIF عبارتند از

$$VIF_1 = 48, VIF_2 = 71, VIF_3 = 120$$

با توجه به مقادیر بالا که نشان‌دهنده همخطی در میان داده‌های ورودی است، استفاده از رگرسیون ريج محرز است. برای برآورد مقادیر Y با استفاده از فرمول (۱۲.۳) باید پارامتر ريج بهینه را انتخاب کنیم برای این کار شاخص MPE (۱۸.۲) را به ازای مقادیر مختلف λ محاسبه کرده‌ایم.

جدول ۱.۳: شاخص MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای مثال شبیه سازی شده

λ	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
MPE	۰/۵۴۲۵۴	۰/۵۴۲۵۶	۰/۵۴۳۶۱	۰/۵۴۵۸۸	۰/۵۴۸۶۰	۰/۵۵۱۴۵
λ	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
MPE	۰/۵۵۴۲۶	۰/۵۵۶۹۶	۰/۵۵۹۵۱	۰/۵۶۱۹۱	۰/۵۶۴۱۵	۰/۵۶۶۲۵
λ	...	۵	...	۱۰		
MPE	...	۰/۵۹۸۹۵	...	۰/۶۰۸۴۹		

^{۱۰}Newhouse and Oman

جدول ۲.۳: داده‌های شبیه سازی شده

ردیف	x_1	x_2	x_3	Y	$\hat{Y}$	d
۱	۵۳۰۳	۵۲۸۷	۵۳۵۸	(۸۸۰۴, ۱۳۲۱, ۱۸۴۹)	(۹۳۶۸, ۱۴۰۵, ۱۹۶۷)	۰.۳۲۶
۲	۲۴۳۵	۳۶۵۵	۳۳۰۷	(۴۴۴۳, ۰۶۶۶, ۰۹۳۳)	(۶۰۰۲, ۰۹۰۰, ۱۲۶۰)	۲.۴۹۵
۳	۴۸۸۳	۵۱۵۲	۴۸۰۵	(۸۶۸۱, ۱۳۰۲, ۱۸۲۳)	(۸۳۷۶, ۱۲۵۶, ۱۷۵۹)	۰.۰۹۵
۴	۵۳۶۶	۵۳۹۱	۵۳۵۶	(۱۰۶۱۱, ۱۵۹۲, ۲۲۲۸)	(۹۴۱۲, ۱۴۱۱, ۱۹۷۶)	۱.۴۷۴
۵	۶۸۴۷	۶۷۱۳	۶۹۵۶	(۱۲۳۴۶, ۱۸۵۲, ۲۵۹۳)	(۱۲۰۴۷, ۱۸۰۷, ۲۵۳۰)	۰.۰۹۱
۶	۵۲۴۵	۵۳۴۷	۵۲۸۶	(۹۱۶۷, ۱۳۷۵, ۱۹۲۵)	(۹۱۶۳, ۱۳۷۴, ۱۹۲۴)	۰.۰۰۰
۷	۴۸۵۱	۴۸۴۷	۴۹۴۳	(۹۷۸۶, ۱۴۶۸, ۲۰۵۵)	(۸۶۲۲, ۱۲۹۳, ۱۸۱۰)	۱.۳۸۸
۸	۵۲۵۳	۵۵۰۳	۵۴۴۹	(۸۹۹۹, ۱۳۵۰, ۱۸۹۰)	(۹۱۰۵, ۱۳۶۵, ۱۹۱۲)	۰.۰۱۱
۹	۶۱۷۹	۶۳۸۴	۶۴۱۱	(۱۰۰۵۳, ۱۵۰۸, ۲۱۱۱)	(۱۰۶۹۲, ۱۶۰۳, ۲۲۴۵)	۰.۴۱۹
۱۰	۸۱۷۲	۸۲۰۱	۸۵۶۷	(۱۳۹۴۶, ۲۰۹۲, ۲۹۲۹)	(۱۴۲۰۳, ۲۱۳۰, ۲۹۸۲)	۰.۰۶۷
۱۱	۴۷۲۴	۴۷۰۴	۴۶۵۴	(۸۷۷۰, ۱۳۱۵, ۱۸۴۲)	(۸۳۶۵, ۱۲۵۴, ۱۷۵۶)	۰.۱۶۷
۱۲	۵۰۷۴	۴۸۹۴	۴۷۶۷	(۸۴۷۶, ۱۲۷۱, ۱۷۸۰)	(۸۹۶۷, ۱۳۴۵, ۱۸۸۳)	۰.۲۸۰
۱۳	۵۱۷۱	۵۲۵۱	۵۲۴۹	(۱۰۵۶۱, ۱۵۸۴, ۲۲۱۸)	(۹۰۸۳, ۱۳۶۲, ۱۹۰۷)	۲.۲۶۵
۱۴	۴۵۷۲	۴۵۶۸	۴۴۲۸	(۷۴۷۳, ۱۲۲۱, ۱۵۶۹)	(۸۰۶۷, ۱۲۱۰, ۱۶۹۴)	۰.۳۶۹
۱۵	۵۳۹۳	۵۳۱۸	۵۶۱۴	(۸۵۶۳, ۱۲۸۵, ۱۷۹۸)	(۹۵۹۸, ۱۴۴۰, ۲۰۱۶)	۱.۱۶۰
۱۶	۶۱۲۵	۵۹۲۴	۶۰۹۴	(۱۱۲۳۴, ۱۶۸۵, ۲۳۵۹)	(۱۰۸۲۲, ۱۶۲۳, ۲۲۷۳)	۰.۱۴۳
۱۷	۵۵۱۲	۵۳۶۷	۵۴۹۴	(۹۸۵۶, ۱۴۷۸, ۲۰۷۰)	(۹۷۶۶, ۱۴۶۵, ۲۰۵۱)	۰.۰۰۳
۱۸	۴۱۳۲	۴۱۵۴	۳۹۷۰	(۷۸۴۲, ۱۱۷۶, ۱۶۴۷)	(۷۳۱۱, ۱۰۹۷, ۱۵۳۵)	۰.۲۸۳
۱۹	۴۹۳۰	۵۱۶۵	۵۰۴۴	(۸۶۲۹, ۱۲۹۴, ۱۸۱۲)	(۸۵۹۲, ۱۲۸۹, ۱۸۰۴)	۰.۰۰۵
۲۰	۶۲۶۴	۶۲۰۴	۶۳۲۷	(۱۱۷۷۲, ۱۷۶۶, ۲۴۷۲)	(۱۰۹۹۱, ۱۶۴۹, ۲۳۰۸)	۰.۶۱۱
۲۱	۴۲۰۹	۴۲۸۰	۴۰۵۴	(۷۵۵۹, ۱۱۳۴, ۱۵۸۷)	(۷۴۱۰, ۱۱۱۲, ۱۵۵۶)	۰.۰۰۲۴
۲۲	۵۷۵۶	۵۵۸۲	۵۴۷۰	(۹۸۴۴, ۱۴۷۷, ۲۰۶۷)	(۱۰۱۰۸, ۱۵۱۶, ۲۱۲۳)	۰.۰۸۴
۲۳	۳۲۷۱	۲۹۷۶	۲۷۵۱	(۵۷۹۶, ۰۸۶۹, ۱۲۱۷)	(۵۹۶۷, ۰۸۹۵, ۱۲۵۳)	۰.۰۵۸
۲۴	۵۷۲۶	۶۰۶۹	۵۸۵۶	(۹۳۸۰, ۱۴۰۷, ۱۹۷۰)	(۹۸۵۵, ۱۴۷۸, ۲۰۷۰)	۰.۱۶۷
۲۵	۶۴۸۳	۶۳۴۰	۶۵۳۱	(۱۱۲۲۸, ۱۶۸۴, ۲۳۵۸)	(۱۱۴۰۵, ۱۷۱۱, ۲۳۹۵)	۰.۰۴۱
۲۶	۵۲۷۸	۵۰۷۹	۴۹۷۴	(۹۹۹۴, ۱۴۹۹, ۲۰۹۹)	(۹۳۲۰, ۱۳۹۸, ۱۹۵۷)	۰.۴۲۰
۲۷	۵۱۱۶	۵۱۳۰	۴۹۲۳	(۹۷۶۰, ۱۴۶۴, ۲۰۵۰)	(۸۹۴۸, ۱۳۴۲, ۱۸۷۹)	۰.۶۸۵
۲۸	۶۱۸۶	۶۳۴۹	۶۴۰۱	(۱۰۸۸۴, ۱۶۶۳, ۲۳۲۸)	(۱۰۷۶۵, ۱۶۱۵, ۲۲۶۱)	۰.۱۲۶
۲۹	۵۸۵۷	۶۲۳۴	۶۱۴۹	(۹۷۳۴, ۱۴۶۰, ۲۰۴۴)	(۱۰۱۰۳, ۱۵۱۶, ۲۱۲۲)	۰.۰۹۰
۳۰	۶۵۰۶	۶۶۰۴	۶۷۹۳	(۹۷۰۶, ۱۴۵۶, ۲۰۳۸)	(۱۱۳۶۴, ۱۷۰۵, ۲۳۸۶)	۲.۷۵۶
۳۱	۵۲۹۴	۵۱۷۲	۵۱۶۱	(۸۵۸۳, ۱۲۸۷, ۱۸۰۲)	(۹۳۵۲, ۱۴۰۳, ۱۹۶۴)	۰.۶۴۶
۳۲	۵۲۳۳	۵۴۴۹	۵۳۶۰	(۸۳۳۸, ۱۲۵۱, ۱۷۵۱)	(۹۱۲۱, ۱۳۶۸, ۱۹۱۵)	۰.۵۷۴
۳۳	۵۷۰۴	۵۴۹۴	۵۷۰۰	(۹۳۹۶, ۱۴۰۹, ۱۹۷۳)	(۱۰۱۳۳, ۱۵۲۰, ۲۱۲۸)	۰.۶۲۸
۳۴	۵۴۷۸	۵۳۸۷	۵۴۴۹	(۱۰۱۷۹, ۱۵۲۷, ۲۱۳۸)	(۹۶۷۱, ۱۴۵۱, ۲۰۳۱)	۰.۲۴۲
۳۵	۶۲۰۰	۶۳۶۳	۶۴۹۰	(۱۰۹۵۷, ۱۶۴۳, ۲۳۰۱)	(۱۰۸۱۲, ۱۶۲۲, ۲۲۷۱)	۰.۰۳۰
۳۶	۴۹۴۶	۴۹۱۶	۴۶۹۱	(۸۵۰۳, ۱۲۷۵, ۱۷۸۶)	(۸۶۷۳, ۱۳۰۱, ۱۸۲۱)	۰.۰۳۰
۳۷	۷۰۴۳	۶۸۵۴	۷۰۵۳	(۱۲۹۴۱, ۱۹۴۱, ۲۷۱۸)	(۱۲۳۵۷, ۱۸۵۴, ۲۵۹۵)	۰.۳۱۸
۳۸	۵۹۷۷	۶۰۷۷	۶۱۳۹	(۱۰۱۹۹, ۱۵۳۰, ۲۱۴۲)	(۱۰۴۴۰, ۱۵۶۶, ۲۱۹۲)	۰.۰۵۰
۳۹	۴۱۹۰	۴۳۹۱	۴۱۶۸	(۸۵۴۴, ۱۲۸۲, ۱۷۹۴)	(۷۳۳۷, ۱۱۰۱, ۱۵۴۱)	۱.۵۶۸
۴۰	۵۶۶۳	۵۷۵۳	۵۸۶۴	(۱۱۳۳۷, ۱۷۰۱, ۲۳۸۱)	(۹۹۳۶, ۱۴۹۰, ۲۰۸۷)	۲.۰۴۵
۴۱	۶۳۵۱	۶۲۱۱	۶۳۴۵	(۱۱۶۷۶, ۱۷۵۱, ۲۴۵۲)	(۱۱۱۶۶, ۱۶۷۵, ۲۳۴۵)	۰.۲۴۳
۴۲	۵۲۶۹	۵۵۱۴	۵۳۸۲	(۸۹۵۴, ۱۳۴۳, ۱۸۸۰)	(۹۱۵۰, ۱۳۷۳, ۱۹۲۲)	۰.۰۲۳
۴۳	۵۹۵۴	۵۹۱۵	۵۹۵۹	(۱۱۳۸۱, ۱۷۰۷, ۲۳۹۰)	(۱۰۴۴۲, ۱۵۶۶, ۲۱۹۳)	۰.۸۹۲
۴۴	۵۴۸۷	۵۲۰۷	۵۴۴۵	(۹۴۳۷, ۱۴۱۶, ۱۹۸۲)	(۹۸۰۳, ۱۴۷۱, ۲۰۵۹)	۰.۱۸۸
۴۵	۵۴۴۰	۵۳۸۵	۵۵۰۹	(۱۰۵۷۰, ۱۵۸۶, ۲۲۲۰)	(۹۶۱۵, ۱۴۴۲, ۲۰۱۹)	۰.۹۰۰
۴۶	۴۸۹۹	۴۶۴۸	۴۶۱۵	(۸۵۲۳, ۱۲۷۸, ۱۷۹۰)	(۸۷۲۸, ۱۳۰۹, ۱۸۳۳)	۰.۰۶۶
۴۷	۵۱۹۰	۵۰۹۲	۵۰۵۸	(۸۳۰۲, ۱۲۴۵, ۱۷۴۳)	(۹۱۶۲, ۱۳۷۴, ۱۹۲۴)	۰.۷۹۶
۴۸	۴۴۹۰	۴۵۳۶	۴۴۳۹	(۷۲۷۴, ۱۰۹۱, ۱۵۲۸)	(۷۹۲۸, ۱۱۸۹, ۱۶۶۵)	۰.۴۳۹
۴۹	۶۷۰۷	۶۷۵۸	۶۹۲۷	(۱۱۴۱۷, ۱۷۱۳, ۲۳۹۸)	(۱۱۷۰۸, ۱۷۵۶, ۲۴۵۹)	۰.۰۷۹
۵۰	۶۴۴۱	۶۲۸۳	۶۳۴۸	(۱۰۲۲۲, ۱۵۲۳, ۲۱۴۷)	(۱۱۳۲۲, ۱۶۹۸, ۲۳۷۷)	۱.۲۴۲
MPE						۰.۵۴۲۵

جدول ۳.۳: برآورد با روش اعتبار سنجي متقابل برای داده‌های شبیه سازی شده

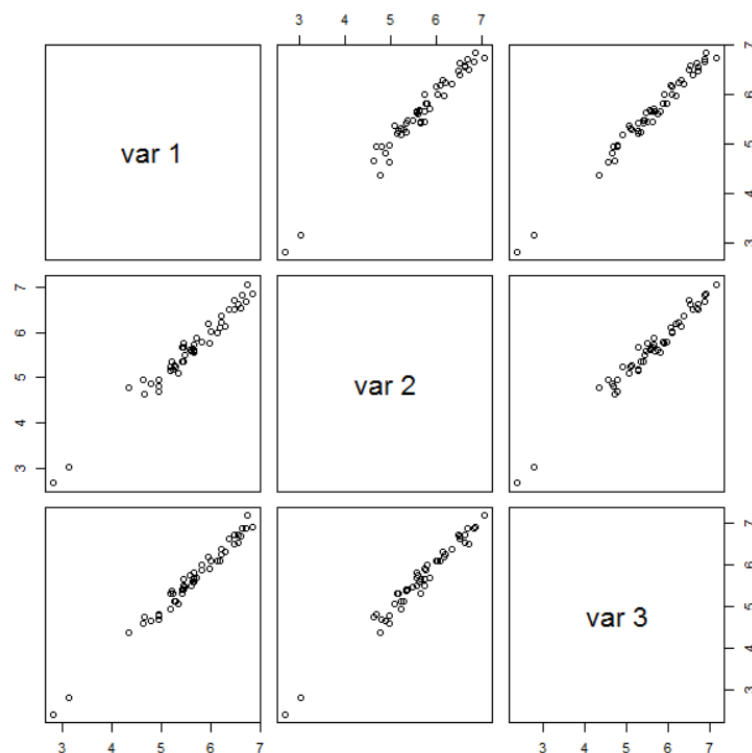
ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d
۱	(۸۸۰۴, ۱۳۲۱, ۱۸۴۹)	(۹۳۹۲, ۱۴۰۰, ۱۹۶۰)	۰/۳۵۳
۲	(۴۴۴۳, ۰/۶۶۶, ۰/۹۳۳)	(۶/۲۷۶, ۰/۹۵۴, ۱/۳۳۴)	۳/۴۵۲
۳	(۸/۶۸۱, ۱/۳۰۲, ۱/۸۲۳)	(۸/۳۱۹, ۱/۲۹۰, ۱/۸۰۵)	۰/۱۳۲
۴	(۱۰/۶۱۱, ۱/۵۹۲, ۲/۲۲۸)	(۹/۳۸۶, ۱/۴۱۱, ۱/۹۷۵)	۱/۵۳۹
۵	(۱۲/۳۴۶, ۱/۸۵۲, ۲/۵۹۳)	(۱۲/۰۲۳, ۱/۷۹۱, ۲/۵۰۹)	۰/۱۰۸
۶	(۹/۱۶۷, ۱/۳۷۵, ۱/۹۲۵)	(۹/۱۶۳, ۱/۳۸۳, ۱/۹۳۷)	۰/۰۰۰
۷	(۹/۷۸۶, ۱/۴۶۸, ۲/۰۵۵)	(۸/۴۸۵, ۱/۲۷۶, ۱/۷۸۶)	۱/۷۳۴
۸	(۸/۹۹۹, ۱/۳۵۰, ۱/۸۹۰)	(۹/۱۱۳, ۱/۳۸۶, ۱/۹۴۰)	۰/۰۱۴
۹	(۱۰/۰۵۳, ۱/۵۰۸, ۲/۱۱۱)	(۱۰/۷۳۵, ۱/۶۲۷, ۲/۲۷۹)	۰/۴۸۰
۱۰	(۱۳/۹۴۶, ۲/۰۹۲, ۲/۹۲۹)	(۱۴/۲۷۰, ۲/۱۴۷, ۳/۰۰۹)	۰/۱۰۸
۱۱	(۸/۷۷۰, ۱/۳۱۵, ۱/۸۴۲)	(۸/۳۴۹, ۱/۲۴۷, ۱/۷۴۵)	۰/۱۸۲
۱۲	(۸/۴۷۶, ۱/۲۷۱, ۱/۷۸۰)	(۹/۰۵۴, ۱/۳۴۱, ۱/۸۷۷)	۰/۳۴۰
۱۳	(۱۰/۵۶۱, ۱/۵۸۴, ۲/۲۱۸)	(۹/۰۲۰, ۱/۳۵۹, ۱/۹۰۳)	۲/۴۳۳
۱۴	(۷/۴۷۳, ۱/۱۲۱, ۱/۵۶۹)	(۸/۱۰۰, ۱/۲۱۴, ۱/۶۹۹)	۰/۴۰۳
۱۵	(۸/۵۶۳, ۱/۲۸۵, ۱/۷۹۸)	(۹/۹۱۶, ۱/۴۲۴, ۱/۹۹۴)	۱/۸۶۰
۱۶	(۱۱/۲۳۴, ۱/۶۸۵, ۲/۳۵۹)	(۱۰/۸۳۷, ۱/۶۰۷, ۲/۲۵۱)	۰/۱۶۳
۱۷	(۹/۸۵۶, ۱/۴۷۸, ۲/۰۷۰)	(۹/۷۹۷, ۱/۴۵۱, ۲/۰۳۲)	۰/۰۰۴
۱۸	(۷/۸۴۲, ۱/۱۷۶, ۱/۶۴۷)	(۷/۲۷۹, ۱/۰۹۱, ۱/۵۲۷)	۰/۳۲۵
۱۹	(۸/۶۲۹, ۱/۲۹۴, ۱/۸۱۲)	(۸/۵۴۷, ۱/۳۰۲, ۱/۸۲۳)	۰/۰۰۷
۲۰	(۱۱/۷۷۲, ۱/۷۶۶, ۲/۴۷۲)	(۱۰/۹۷۰, ۱/۶۴۱, ۲/۲۹۸)	۰/۶۶۱
۲۱	(۷/۵۵۹, ۱/۱۳۴, ۱/۵۸۷)	(۷/۳۹۳, ۱/۱۱۶, ۱/۵۶۱)	۰/۰۲۸
۲۲	(۹/۸۴۴, ۱/۴۷۷, ۲/۰۶۷)	(۱۰/۱۸۲, ۱/۵۱۶, ۲/۱۲۲)	۰/۱۱۶
۲۳	(۵/۷۹۶, ۰/۸۶۹, ۱/۲۱۷)	(۶/۱۰۸, ۰/۸۷۷, ۱/۲۲۵)	۰/۰۹۸
۲۴	(۹/۳۸۰, ۱/۴۰۷, ۱/۹۷۰)	(۹/۸۵۴, ۱/۵۰۹, ۲/۱۱۳)	۰/۲۳۴
۲۵	(۱۱/۲۲۸, ۱/۶۸۴, ۲/۳۵۸)	(۱۱/۴۴۳, ۱/۷۰۲, ۲/۳۸۴)	۰/۰۴۷
۲۶	(۹/۹۹۴, ۱/۴۹۹, ۲/۰۹۹)	(۹/۲۸۲, ۱/۳۸۹, ۱/۹۴۵)	۰/۵۲۱
۲۷	(۹/۷۶۰, ۱/۴۶۴, ۲/۰۵۰)	(۸/۸۶۹, ۱/۳۴۷, ۱/۸۸۶)	۰/۸۱۰
۲۸	(۱۱/۰۸۴, ۱/۶۶۳, ۲/۳۲۸)	(۱۰/۷۱۱, ۱/۶۲۴, ۲/۲۷۴)	۰/۱۴۱
۲۹	(۹/۷۳۴, ۱/۴۶۰, ۲/۰۴۴)	(۱۰/۰۷۳, ۱/۵۴۳, ۲/۱۶۰)	۰/۱۲۰
۳۰	(۹/۷۰۶, ۱/۴۵۶, ۲/۰۳۸)	(۱۱/۴۶۸, ۱/۷۲۰, ۲/۴۰۸)	۳/۱۸۴
۳۱	(۸/۵۸۳, ۱/۲۸۷, ۱/۸۰۲)	(۹/۴۰۶, ۱/۳۹۸, ۱/۹۵۷)	۰/۶۹۴
۳۲	(۸/۳۳۸, ۱/۲۵۱, ۱/۷۵۱)	(۹/۱۲۵, ۱/۳۸۳, ۱/۹۳۶)	۰/۶۳۷
۳۳	(۹/۳۹۶, ۱/۴۰۹, ۱/۹۷۳)	(۱۰/۲۴۹, ۱/۵۰۳, ۲/۱۰۵)	۰/۷۴۱
۳۴	(۱۰/۱۷۹, ۱/۵۲۷, ۲/۱۳۸)	(۹/۶۷۸, ۱/۴۴۱, ۲/۰۱۸)	۰/۲۵۸
۳۵	(۱۰/۹۵۷, ۱/۶۴۳, ۲/۳۰۱)	(۱۰/۷۷۰, ۱/۶۲۸, ۲/۲۸۰)	۰/۰۳۵
۳۶	(۸/۵۰۳, ۱/۲۷۵, ۱/۷۸۶)	(۸/۶۹۳, ۱/۳۰۷, ۱/۸۳۰)	۰/۰۳۷
۳۷	(۱۲/۹۴۱, ۱/۹۴۱, ۲/۷۱۸)	(۱۲/۳۰۹, ۱/۸۳۷, ۲/۵۷۳)	۰/۴۱۱
۳۸	(۱۰/۱۹۹, ۱/۵۳۰, ۲/۱۴۲)	(۱۰/۴۲۹, ۱/۵۷۲, ۲/۲۰۲)	۰/۰۵۵
۳۹	(۸/۵۴۴, ۱/۲۸۲, ۱/۷۹۴)	(۷/۱۹۲, ۱/۱۰۰, ۱/۵۴۲)	۱/۸۶۹
۴۰	(۱۱/۳۳۷, ۱/۷۰۱, ۲/۳۸۱)	(۹/۸۴۱, ۱/۴۸۶, ۲/۰۸۱)	۲/۲۹۲
۴۱	(۱۱/۶۷۶, ۱/۷۵۱, ۲/۴۵۲)	(۱۱/۱۶۱, ۱/۶۶۴, ۲/۳۳۱)	۰/۲۷۳
۴۲	(۸/۹۵۴, ۱/۳۴۳, ۱/۸۸۰)	(۹/۱۱۴, ۱/۳۹۰, ۱/۹۴۶)	۰/۰۲۷
۴۳	(۱۱/۳۸۱, ۱/۷۰۷, ۲/۳۹۰)	(۱۰/۴۱۹, ۱/۵۶۲, ۲/۱۸۷)	۰/۹۴۹
۴۴	(۹/۴۳۷, ۱/۴۱۶, ۱/۹۸۲)	(۹/۹۳۱, ۱/۴۴۶, ۲/۰۲۴)	۰/۲۴۷
۴۵	(۱۰/۵۷۰, ۱/۵۸۶, ۲/۲۲۰)	(۹/۵۸۳, ۱/۴۳۰, ۲/۰۰۲)	۱/۰۰۱
۴۶	(۸/۵۲۳, ۱/۲۷۸, ۱/۷۹۰)	(۸/۸۰۳, ۱/۲۹۵, ۱/۸۱۲)	۰/۰۷۹
۴۷	(۸/۳۰۲, ۱/۲۴۵, ۱/۷۴۳)	(۹/۲۱۳, ۱/۳۷۲, ۱/۹۲۰)	۰/۸۵۰
۴۸	(۷/۲۷۴, ۱/۰۹۱, ۱/۵۲۸)	(۷/۹۶۴, ۱/۱۹۴, ۱/۶۷۰)	۰/۴۸۸
۴۹	(۱۱/۴۱۷, ۱/۷۱۳, ۲/۳۹۸)	(۱۱/۷۱۳, ۱/۷۶۲, ۲/۴۶۸)	۰/۰۹۰

ادامه در صفحه بعد

برآورد با روش اعتبار سنجى متقابل براى داده‌هاى شبیه‌سازى شده

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d
۵۰	(۱۰/۲۲۲, ۱/۵۳۳, ۲/۱۴۷)	(۱۱/۴۳۸, ۱/۶۹۸, ۲/۳۷۸)	۱/۵۱۲
MPE_{cv}			۰/۶۴۲۸

با توجه به جدول ۱.۳ می‌بینیم که با افزایش پارامتر λ مقدار MPE بیشتر می‌شود. از این رو $\lambda = ۰/۰۰۱$ را به‌عنوان پارامتر ريج انتخاب می‌کنیم چون به ازای مقادير مختلف λ کمترین MPE را دارد (نمودار ۲.۳).

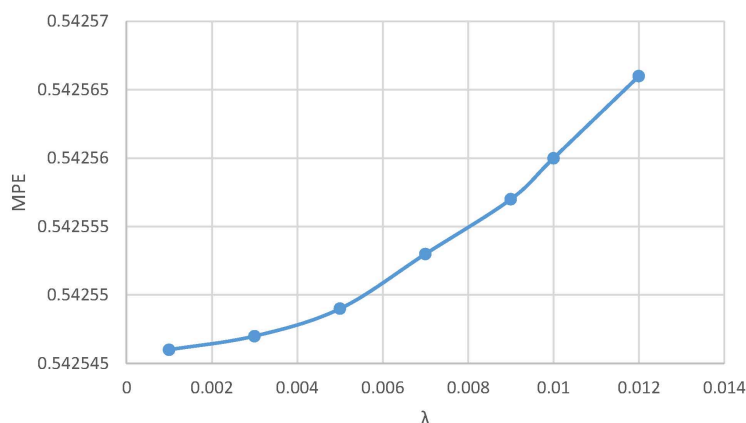


شکل ۱.۳: نمودار پراکنش x ها

اکنون با استفاده از فرمول (۱۲.۳) مقادير Y را برآورد کرده سپس با استفاده از فرمول (۸.۱) فاصله بین Y و $\hat{Y}$ را محاسبه می‌کنیم (جدول ۲.۳). پیشگویی خطی فازى مدل به ازای $\lambda = ۰/۰۰۱$ به صورت زیر است

$$\hat{Y} = + (۲/۳۹۵, ۰/۲۶۳, ۰/۳۶۸)_T x_1 + (-۰/۵۴۱, ۰, ۰)_T x_2 + (-۰/۰۹۷, ۰, ۰)_T x_3$$

شاخص MPE_{cv} در جدول ۳.۳ محاسبه شده است و تقریباً برابر MPE محاسبه شده از مدل است که مناسب بودن مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۳: نمودار MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای داده‌های شبیه سازی

۳.۳ مثال‌های کاربردی

در این بخش رفتار پیشگویی خطی فازی را در قالب دو مثال واقعی مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۱.۳.۳ داده‌های سیمان پرتلند

در این مثال داده‌های وود^{۱۱} و همکاران [۵۱] را مورد استفاده قرار می‌دهیم (جدول ۴.۳). این داده‌ها از مطالعه تأثیر ترکیبات مختلف روی حرارت ساطع شده در طول سخت شدن سیمان پرتلند بدست آمده است. در اینجا داده‌هایی که از چهار ترکیب



و میزان گرمای ساطع شده بعد از ۸۰ روز (y) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به برخی ابهامات در اندازه‌گیری‌های مربوط به مشاهدات متغیر پاسخ، با مشورت یک فرد متخصص با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهنای راست و چپ متناسب با y فازی سازی شده‌اند.

چون ورودی‌ها دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان دادن میزان همخطی میان متغیرهای مستقل استفاده می‌کنیم که

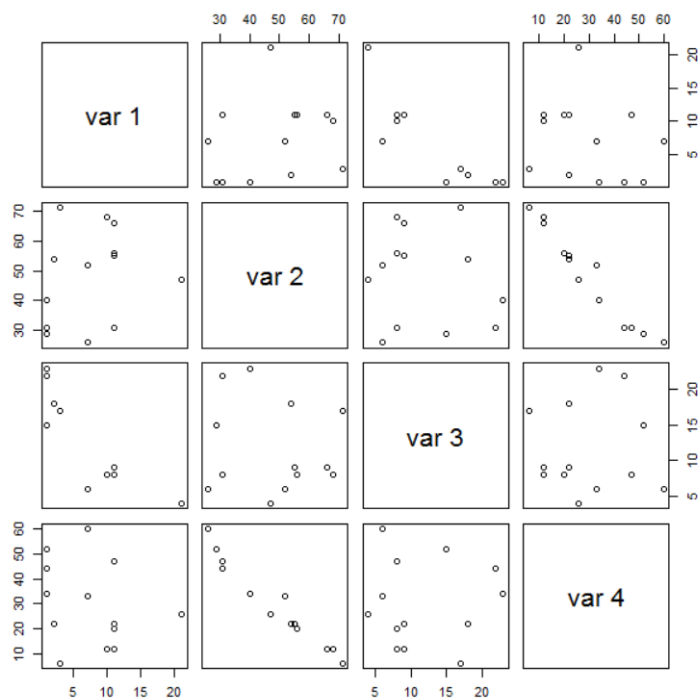
$$VIF_1 = 38, VIF_2 = 254, VIF_3 = 46, VIF_4 = 250$$

با توجه به بزرگتر از ۱۰ بودن همه مقادیر VIF ، وجود همخطی میان متغیرهای مستقل تایید می‌شود و بنابراین لزوم استفاده از رگرسیون ريج فازی محرز است. (نمودار پراکنش x ها در مقابل هم در نمودار ۳.۳ آمده است) برای برآورد مقادیر پاسخ طبق فرمول (۱۲.۳) نیاز به انتخاب پارامتر ريج λ داریم. با توجه به جدول ۵.۳ با افزایش مقدار λ شاخص MPE (که در فصل اول بیان شد) افزایش می‌یابد. در اینجا $\lambda = 0.01$ به عنوان پارامتر ريج انتخاب می‌کنیم زیرا کمترین مقدار MPE را دارد (شکل ۴.۳). به ازای $\lambda = 0.01$ با توجه به فرمول ضریب تعیین تعمیم یافته (۱۶.۲) مدل برابر ۰/۹۷۳۲ می‌شود.

^{۱۱}Wood

جدول ۴.۳: داده‌های سیمان پرتلند

ردیف	x_1	x_2	x_3	x_4	y
۱	۷	۲۶	۶	۶۰	۷۸/۵
۲	۱	۲۹	۱۵	۵۲	۷۴/۳
۳	۱۱	۵۶	۸	۲۰	۱۰۴/۳
۴	۱۱	۳۱	۸	۴۷	۸۷/۶
۵	۷	۵۲	۶	۳۳	۹۵/۹
۶	۱۱	۵۵	۹	۲۲	۱۰۹/۲
۷	۳	۷۱	۱۷	۶	۱۰۲/۷
۸	۱	۳۱	۲۲	۴۴	۷۲/۵
۹	۲	۵۴	۱۸	۲۲	۹۳/۱
۱۰	۲۱	۴۷	۴	۲۶	۱۱۵/۹
۱۱	۱	۴۰	۲۳	۳۴	۸۳/۳
۱۲	۱۱	۶۶	۹	۱۲	۱۱۳/۳
۱۳	۱۰	۶۸	۸	۱۲	۱۰۹/۴

شکل ۳.۳: نمودار پراکنش x ها در مقابل هم در داده‌های سیمان پرتلند

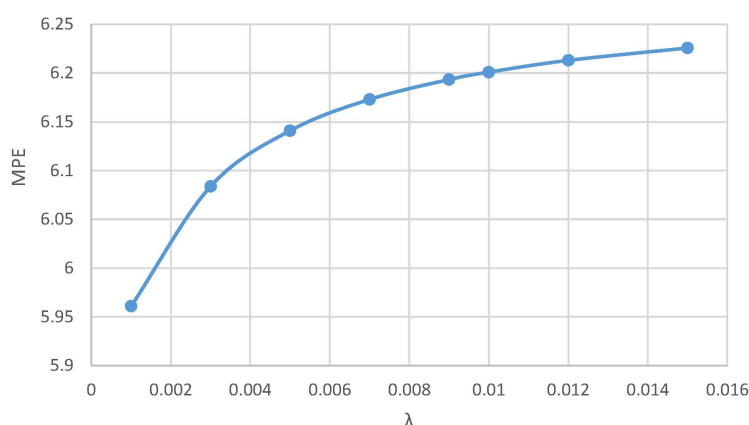
با توجه به مقادیر برآورد شده و مشاهده شده در جدول ۶.۳ نیز به خوبی مدل می‌توان پی‌برد. همچنین در جدول ۶.۳ با توجه به فاصله‌های تعریف شده در رابطه (۸.۱) (d_1) و (۱۴.۱) (d_2) شاخص MPE

جدول ۵.۳: شاخص MPE به ازای مقادیر مختلف λ

λ	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
MPE	۵/۹۶۰۸	۶/۲۰۱۰	۶/۲۷۴۸	۶/۲۷۹۷	۶/۲۸۱۴	۶/۲۸۲۴	۶/۲۸۳۱
λ	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱	...	۱۰
MPE	۶/۲۸۳۸	۶/۲۸۴۳	۶/۲۸۴۹	۶/۲۸۵۵	۶/۲۸۶۱	...	۶/۵۰۶۱

محاسبه شده است که فاصله d_1 خطای پیشگویی مدل را کمتر می‌کند. برآورد مدل رگرسیون ریج فازی به صورت زیر است

$$\hat{Y} = (32/454, 5/795, 10/762)_T + (1/859, 0/101, 0/346)_{Tx_1} + (0/819, 0/122, 0)_{Tx_2} \\ + (0/406, 0/117, 0/0006)_{Tx_3} + (0/159, 0, 0/009)_{Tx_4}$$



شکل ۴.۳: نمودار MPE به ازای مقادیر مختلف λ برای داده‌های سیمان پرتلند

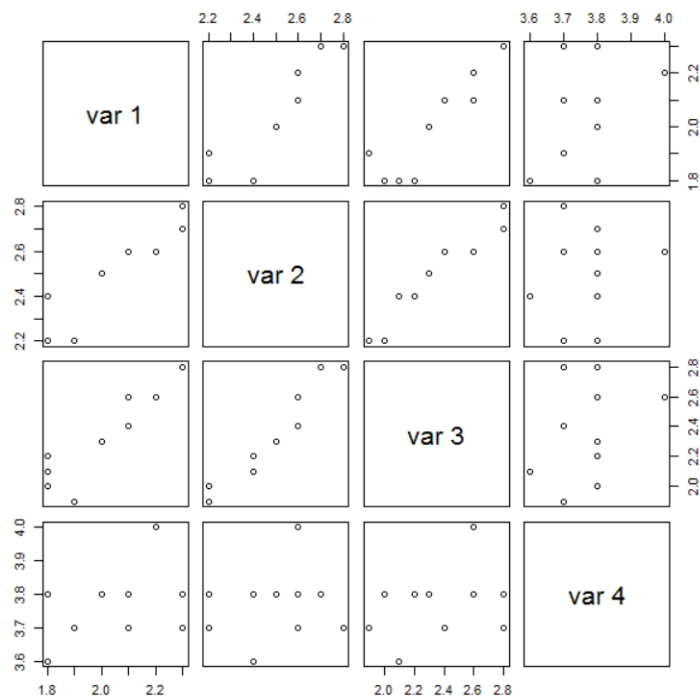
همچنین نتایج حاصل از معیار اعتبارسنجی متقابل که از رابطه (۲۱.۲) بدست آمده، در جدول ۷.۳ آمده است. شاخص MPE_{cv} در این جدول نشان می‌دهد که این مدل تا حدودی نسبت به داده‌های پرت حساس است.

۲.۳.۳ داده‌های تولید ناخالص ملی

در این مثال، داده‌های هزینه‌های تحقیق و تولید ملی خام به عنوان درصدی از تولید ناخالص ملی کشور آمریکا را در سال ۱۹۷۲-۱۹۸۶ بررسی می‌کنیم. (آکدنیز و ارول [۱۲]) این داده‌ها رابطه بین (متغیر وابسته Y) درصد مخارج کشور ایالت متحده آمریکا و درصد مخارج ۴ کشور دیگر (متغیر مستقل X_1, X_2, X_3, X_4) به ترتیب فرانسه، آلمان، ژاپن و شوروی سابق را نشان می‌دهد (جدول ۸.۳). همچنین نمودار پراکنش x ها در مقابل هم در نمودار ۵.۳ آمده است.

جدول ۶.۳: مقادير مشاهده شده و برآورد شده فازى مثلثى براى داده‌هاى سيمان پرتلند

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۷۸/۷۷۶, ۱۰/۰۴۳, ۱۳/۵۱۸)	۱/۳۳۲	۲/۵۰۰
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۲/۵۲۰, ۱۱/۵۲۵, ۱۱/۶۸۷)	۸/۰۰۴	۱۱/۱۲۶
۳	(۱۰۴/۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷)	(۱۰۵/۳۵۵, ۱۵/۶۷۷, ۱۵/۰۹۸)	۶/۳۶۳	۱۰/۲۵۱
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۸۹/۰۸۰, ۱۱/۹۴۰, ۱۵/۲۱۸)	۳/۰۷۲	۳/۵۷۷
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۵/۸۳۴, ۱۳/۴۹۲, ۱۳/۲۲۲)	۱/۱۰۷	۲/۱۹۷
۶	(۱۰۹/۲, ۱۲/۰۲, ۱۶/۳۸)	(۱۰۵/۱۸۱, ۱۴/۸۳۸, ۱۴/۸۰۹)	۲۲/۹۱۹	۲۶/۷۳۶
۷	(۱۰۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰۴/۱۳۹, ۱۶/۷۸۰, ۱۱/۶۹۹)	۱/۷۹۵	۲/۴۹۱
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰۵, ۱۰/۱۵)	(۷۵/۶۴۴, ۱۱/۹۷۸, ۱۱/۵۶۰)	۱۲/۷۵۱	۱۴/۳۱۴
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۹۱/۳۲۹, ۱۵/۲۰۵, ۱۱/۸۰۰)	۵/۹۵۱	۷/۷۶۲
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۵/۷۳۵, ۱۳/۸۵۶, ۱۸/۳۷۶)	۱/۲۳۰	۲/۳۰۴
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۱/۸۳۲, ۱۳/۱۲۰, ۱۱/۴۱۲)	۰/۹۱۴	۰/۶۸۳
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۵۷۳, ۱۵/۷۲۰, ۱۴/۴۵۹)	۰/۳۴۸	۰/۲۹۰
۱۳	(۱۰۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰۳۴)	(۱۱۱/۹۶۳, ۱۵/۷۸۴, ۱۴/۰۵۲)	۱۱/۶۹۸	۱۴/۷۶۲
MPE			۵/۹۶۰۸	۷/۶۱۵



شکل ۵.۳: نمودار پراكنش x ها در مقابل هم در داده‌هاى توليد ناخالص مى

با توجه به برخى ابهامات در اندازه‌گيرى‌هاى مربوط به مشاهدات متغير پاسخ، با مشورت يك فرد

جدول ۷.۳: مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های سیمان پرتلند

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d_1
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۷۸/۸۳۴, ۱۱/۹۹۷, ۱۶/۶۸۸)	۴۹۰۱
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۱/۷۸۴, ۱۲/۲۲۶, ۱۰/۲۶۷)	۱۵/۶۲۵
۳	(۱۰۴/۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷)	(۱۰۸/۸۷۳, ۱۳/۱۲۸, ۱۵/۲۱۱)	۴۱/۷۰۶
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۸۹/۹۶۳, ۱۱/۱۹۸, ۱۵/۰۴۸)	۷/۵۵۴
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۵/۶۳۹, ۱۲/۸۵۹, ۱۱/۹۴۲)	۲/۳۲۹
۶	(۱۰۹/۲, ۱۲/۰۲, ۱۶/۳۸)	(۱۰۴/۶۶۵, ۱۵/۰۴۸, ۱۴/۵۶۲)	۲۸/۹۳۹
۷	(۱۰۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰۴/۸۶, ۱۹/۳۳۲, ۱۲/۱۳۵)	۴/۳۷۶
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰۵, ۱۰/۱۵)	(۷۷/۶۶۹, ۱۱/۷۲۳, ۱۲/۴۸۰)	۳۳/۶۲۸
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۹۰/۸۱۸, ۱۴/۶۹۵, ۱۰/۸۵۶)	۹/۴۸۶
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۴/۵۱۵, ۱۸/۵۳۷, ۱۴/۷۶۳)	۱۵/۰۵۸
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۰/۶۶۰, ۱۲/۲۱۶, ۱۲/۲۷۵)	۳/۳۰۴
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۰۸۳, ۱۶/۰۸۷, ۱۴/۹۱۸)	۱/۱۸۵
۱۳	(۱۰۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰۳۴)	(۱۱۲/۹۱۹, ۱۵/۴۱۳, ۱۴/۸۰۱)	۲۰/۸۵۵
MPE_{cv}			۱۴/۵۳۴

جدول ۸.۳: داده‌های تولید ناخالص ملی

ردیف	x_1	x_2	x_3	x_4	y
۱	۱/۹	۲/۲	۱/۹	۳/۷	۲/۳
۲	۱/۸	۲/۲	۲	۳/۸	۲/۲
۳	۱/۸	۲/۴	۲/۱	۳/۶	۲/۲
۴	۱/۸	۲/۴	۲/۲	۳/۸	۲/۳
۵	۲	۲/۵	۲/۳	۳/۸	۲/۴
۶	۲/۱	۲/۶	۲/۴	۳/۷	۲/۵
۷	۲/۱	۲/۶	۲/۶	۳/۸	۲/۶
۸	۲/۲	۲/۶	۲/۶	۴	۲/۶
۹	۲/۳	۲/۸	۲/۸	۳/۷	۲/۷
۱۰	۲/۳	۲/۷	۲/۸	۳/۸	۲/۷

متخصص با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهنای راست و چپ متناسب با y فازی سازی شده‌اند (مقادیر فازی Y در جدول ۱۰.۳ آمده است). چون ورودی‌ها دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان

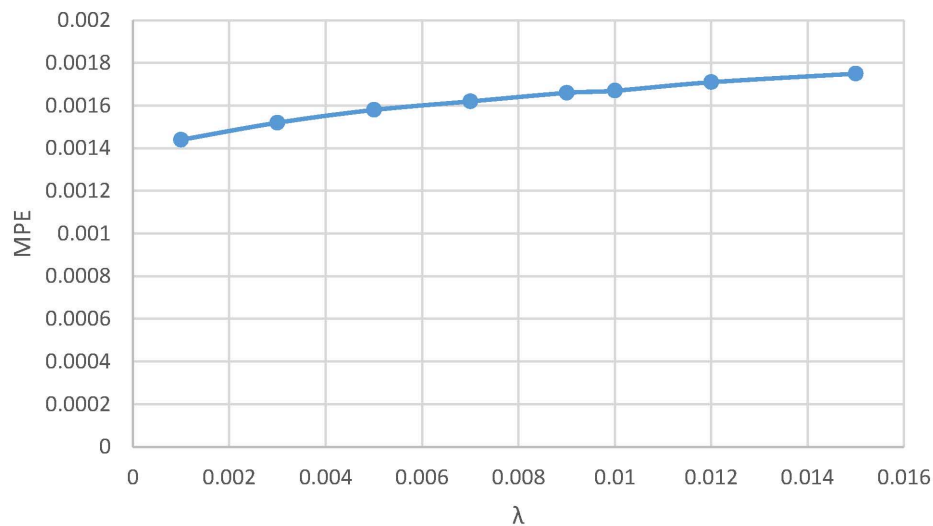
دادن ميزان همبستگى ميان متغيرهاى مستقل استفاده مى كنيم. كه

$$VIF_1 = 6, VIF_2 = 24, VIF_3 = 29, VIF_4 = 1$$

با توجه به مقادير VIF وجود همخطى ميان متغيرهاى مستقل تايد مى شود و بنا بر اين استفاده از رگرسيون ريج محرز است. در اين مثال با توجه به جدول ۹.۳ و نمودار ۶.۳، $\lambda = 0.001$ را به عنوان پارامتر ريج انتخاب مى كنيم زيرا كمترين مقدار MPE را دارد.

جدول ۹.۳: شاخص MPE به ازاي مقادير مختلف λ براى داده هاى توليد ناخالص ملى

λ	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
MPE	۰/۰۰۱۴۴	۰/۰۰۱۶۷	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۰۲۸۸	۰/۰۰۳۱۲	۰/۰۰۳۳۳۱	۰/۰۰۳۴۸
λ	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱	...	۱۰
MPE	۰/۰۰۳۶۲	۰/۰۰۳۷۶	۰/۰۰۳۸۸	۰/۰۰۳۹۹	۰/۰۰۴۰۹	...	۰/۰۱۱۶۵



شكل ۶.۳: نمودار MPE براى مقادير مختلف λ در داده هاى توليد ناخالص ملى

همچنين در جدول ۱۰.۳ با توجه به فاصله هاى تعريف شده در رابطه (۸.۱) (d_1) و (۱۴.۱) (d_2) شاخص MPE محاسبه شده است كه فاصله d_1 خطاى پيشگويى مدل را كمتر مى كند. با توجه به فرمول ضريب تعيين تعميم يافته (۱۶.۲) مدل برابر ۰/۹۶۴ مى شود. و پيشگويى خطى فازى به ازاي $\lambda = 0.001$ به صورت زير است

$$\hat{Y} = (0.72, 0, 0) + (0.689, 0, 0.19)x_1 + (-0.186, 0.121, 0)x_2 \\ + (0.294, 0, 0.129)x_3 + (0.026, 0.010, 0.072)x_4$$

همچنين نتايج حاصل از اعتبار سنجى متقابل در جدول ۱۱.۳ آمده است. ميزان كوچك بودن MPE_{cv} حاصله در اين جدول، مناسب بودن مدل را تاكيد مى كند.

جدول ۱۰.۳: مقایسه رگرسیون فازى و رگرسیون ريج فازى در داده‌هاى توليد ناخالص مى

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2
۱	(۲/۳, ۰/۲۵۳, ۰/۵۲۹)	(۲/۲۶۳, ۰/۲۵۰, ۰/۵۷۰)	۰/۰۰۰۹۳	۰/۰۰۰۸۰
۲	(۲/۲, ۰/۲۶۴, ۰/۶۶۰)	(۲/۲۳۲, ۰/۲۸۱, ۰/۵۸۵)	۰/۰۰۰۵۳	۰/۰۰۰۵۳
۳	(۲/۲, ۰/۴۱۸, ۰/۴۶۲)	(۲/۲۳۴, ۰/۳۴۵, ۰/۵۳۳)	۰/۰۰۰۳۶۸	۰/۰۰۵۳۶
۴	(۲/۳, ۰/۳۴۵, ۰/۶۲۱)	(۲/۲۷۱, ۰/۳۷۸, ۰/۵۷۳)	۰/۰۰۱۸۲	۰/۰۰۲۴۹
۵	(۲/۴, ۰/۳۸۴, ۰/۶۴۸)	(۲/۴۱۶, ۰/۳۷۴, ۰/۵۹۹)	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۳۵
۶	(۲/۵, ۰/۲۷۵, ۰/۶۲۵)	(۲/۴۹۱, ۰/۳۶۹, ۰/۶۰۱)	۰/۰۰۱۱۷	۰/۰۰۲۱۱
۷	(۲/۶, ۰/۳۱۲, ۰/۵۴۶)	(۲/۵۴۶, ۰/۳۵۰, ۰/۶۵۳)	۰/۰۰۲۷۰	۰/۰۰۳۱۸
۸	(۲/۶, ۰/۴۶۸, ۰/۶۲۴)	(۲/۶۲۲, ۰/۳۸۰, ۰/۶۸۸)	۰/۰۰۲۶۳	۰/۰۰۴۱۸
۹	(۲/۷, ۰/۴۳۲, ۰/۷۰۲)	(۲/۷۰۴, ۰/۳۶۷, ۰/۶۶۵)	۰/۰۰۰۵۱	۰/۰۰۰۹۹
۱۰	(۲/۷, ۰/۲۷, ۰/۷۵۶)	(۲/۷۱۵, ۰/۳۲۴, ۰/۷۰۱)	۰/۰۰۰۱۶	۰/۰۰۰۳۷
MPE			۰/۰۰۱۴۴	۰/۰۰۲۰۴

جدول ۱۱.۳: مقادير برآورد شده فازى با روش اعتبارسنجى متقابل براى داده‌هاى توليد ناخالص مى

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d_1
۱	(۲/۳, ۰/۲۵۳, ۰/۵۲۹)	(۲/۱۹۹, ۰/۳۰۸, ۰/۵۹۴)	۰/۰۱۰۴
۲	(۲/۲, ۰/۲۶۴, ۰/۶۶)	(۲/۲۷۴, ۰/۳۲۱, ۰/۵۲۶)	۰/۰۰۲۵
۳	(۲/۲, ۰/۴۱۸, ۰/۴۶۲)	(۲/۲۶۸, ۰/۲۳۳, ۰/۶۱۰)	۰/۰۱۶۸
۴	(۲/۳, ۰/۳۴۵, ۰/۶۲۱)	(۲/۲۱۵, ۰/۳۳۰, ۰/۵۶۶)	۰/۰۰۸۴
۵	(۲/۴, ۰/۳۸۴, ۰/۶۴۸)	(۲/۴۰۴, ۰/۳۴۲, ۰/۶۰۶)	۰/۰۰۰۳
۶	(۲/۵, ۰/۲۷۵, ۰/۶۲۵)	(۲/۴۶۰, ۰/۳۵۹, ۰/۶۱۹)	۰/۰۰۳۳
۷	(۲/۶, ۰/۳۱۲, ۰/۵۴۶)	(۲/۵۳۴, ۰/۳۶۹, ۰/۶۶۸)	۰/۰۰۴۴
۸	(۲/۶, ۰/۴۶۸, ۰/۶۲۴)	(۲/۶۹۸, ۰/۳۴۲, ۰/۶۷۲)	۰/۰۱۷۰
۹	(۲/۷, ۰/۴۳۲, ۰/۷۰۲)	(۲/۷۱۱, ۰/۳۲۵, ۰/۶۴۶)	۰/۰۰۱۵
۱۰	(۲/۷, ۰/۲۷, ۰/۷۵۶)	(۲/۷۴۹, ۰/۴۰۷, ۰/۶۴۴)	۰/۰۰۰۹
MPE_{cv}			۰/۰۰۶۵

۴.۳ رگرسیون ريج فازى وزن دار شده دو پارامترى

در اين بخش رگرسیون ريج فازى وزن دار شده دو پارامترى را براى مجموعه‌اى از ورودى‌هاى دقيق و خروجى فازى مثلثى به‌عنوان مدل جديدى پيشنهاده مى‌کنيم ([۷]). به‌طور دقيق‌تر، در اين روش براى هر کدام از پارامترهاى عرض از مبدأ و شیب مدل جریمه‌هاى متفاوتى را درنظر مى‌گیريم. با اين کار

می‌توان میزان تاثیر هر کدام از این پارامترها را به‌طور جداگانه کنترل کرد. مدل (۱۳.۳) را در نظر بگیرید. مسئله رگرسیون ريج دو پارامتری فازى با پارامترهای λ_1 و λ_2 را می‌توان به‌عنوان یک مسئله بهینه‌سازی به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\min_{A_0, A} \sum_{i=1}^n d^2(A_0 + x_i^T A, Y_i) + \lambda_1 \|A\|^2 + \lambda_2 \|A_0\|^2 \quad (13.3)$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. بدیهی است که با فرض $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ مدل (۲.۳) حاصل می‌شود. با استفاده از رابطه‌های (۸.۱) و (۱۱.۱) و (۱۲.۱) داریم

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \|A\|^2 + \lambda_2 \|A_0\|^2 + \sum_{i=1}^n d^2(A_0 + x_i^T A, Y_i) \\ &= \lambda_1 \sum_{j=1}^p \|(m_{A_j}, l_{A_j}, r_{A_j})\|^2 + \lambda_2 \|(m_{A_0}, l_{A_0}, r_{A_0})\|^2 + \sum_{i=1}^n \|Y_i - A_0 - x_i^T A\|^2 \\ &= \lambda_1 \sum_{j=1}^p \left[m_{A_j}^2 + \frac{1}{3} m_{A_j} (r_{A_j} - l_{A_j}) + \frac{1}{12} (l_{A_j}^2 + r_{A_j}^2) \right] \\ & \quad + \lambda_2 (m_{A_0}^2 + \frac{1}{3} m_{A_0} (r_{A_0} - l_{A_0}) + \frac{1}{12} (l_{A_0}^2 + r_{A_0}^2)) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_0} - m_{Y_i} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_0} - m_{Y_i} \right) \right. \\ & \quad \times \left[\left(\sum_{j=1}^p r_{A_j} x_{ij} + r_{A_0} - r_{Y_i} \right) - \left(\sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij} + l_{A_0} - l_{Y_i} \right) \right] \\ & \quad \left. + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij} + l_{A_0} - l_{Y_i} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^p r_{A_j} x_{ij} + r_{A_0} - r_{Y_i} \right)^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (14.3)$$

و در نتیجه مسئله مینیمم‌سازی (۱۳.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \min_{\substack{m_A, l_A, r_A, \\ m_{A_0}, l_{A_0}, r_{A_0}, \xi_1, \xi_2, \xi_3}} \sum_{j=1}^p & \left[\lambda_1 m_{A_j}^2 + \frac{\lambda_1}{3} m_{A_j} (r_{A_j} - l_{A_j}) + \frac{\lambda_1}{12} (l_{A_j}^2 + r_{A_j}^2) \right] \\ & + \lambda_2 m_{A_0}^2 + \frac{\lambda_2}{3} m_{A_0} (r_{A_0} - l_{A_0}) + \frac{\lambda_2}{12} (l_{A_0}^2 + r_{A_0}^2) \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\xi_{1i}^2 + \frac{1}{3} \xi_{1i} (\xi_{3i} - \xi_{2i}) + \frac{1}{12} (\xi_{2i}^2 - \xi_{3i}^2) \right] \end{aligned} \quad (15.3)$$

که در آن ξ_{ki} به ازای $k = 1, 2, 3$ و $i = 1, \dots, n$ در رابطه‌ی (۶.۳) و (۷.۳) آمده است. برای اینکه راه حل مسئله (۱۵.۳) را بدست آوریم با معرفی ضرایب لاگرانژ $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})^T$ و $\alpha_2 =$

$\alpha_3 = (\alpha_{31}, \dots, \alpha_{3n})^T$ و $(\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n})^T$ در $\mathbb{R}^n$ تابع هدف L^* را به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{aligned}
 L^*(m_A, l_A, r_A, m_{A_0}, l_{A_0}, r_{A_0}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
 = \lambda_1 \sum_{j=1}^p \left[m_{A_j}^2 + \frac{1}{3} m_{A_j} (r_{A_j} - l_{A_j}) + \frac{1}{12} (l_{A_j}^2 + r_{A_j}^2) \right] \\
 + \lambda_2 (m_{A_0}^2 + \frac{1}{3} m_{A_0} (r_{A_0} - l_{A_0}) + \frac{1}{12} (l_{A_0}^2 + r_{A_0}^2)) \\
 + \sum_{i=1}^n [\xi_{1i}^2 + \frac{1}{3} \xi_{1i} (\xi_{3i} - \xi_{2i}) + \frac{1}{12} (\xi_{2i}^2 - \xi_{3i}^2)] \\
 + \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} [\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_0} - m_{Y_i} - \xi_{1i}] \\
 + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} [\sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij} + l_{A_0} - l_{Y_i} - \xi_{2i}] \\
 + \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} [\sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij} + m_{A_0} - m_{Y_i} - \xi_{3i}]
 \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

با توجه به مفروضات مدل (۱.۳) با مشتقگیری از جمله L^* نسبت به هر یک از پارامترها و برابر صفر قراردادن آن، دستگاه معادلات زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned}
 2\lambda_1 m_A + \frac{\lambda_1}{3} (r_A - l_A) &= -X^T \alpha_1 \\
 -\frac{\lambda_1}{3} m_A + \frac{\lambda_1}{6} l_A &= -X^T \alpha_2 \\
 \frac{\lambda_1}{3} m_A + \frac{\lambda_1}{6} r_A &= -X^T \alpha_3 \\
 2\lambda_2 m_{A_0} + \frac{\lambda_2}{3} (r_{A_0} - l_{A_0}) &= -e^T \alpha_1 \\
 -\frac{\lambda_2}{3} m_{A_0} + \frac{\lambda_2}{6} l_{A_0} &= -e^T \alpha_2 \\
 \frac{\lambda_2}{3} m_{A_0} + \frac{\lambda_2}{6} r_{A_0} &= -e^T \alpha_3 \\
 2\xi_1 + \frac{1}{3} (\xi_3 - \xi_2) &= \alpha_1 \\
 -\frac{1}{3} \xi_1 + \frac{1}{6} \xi_2 &= \alpha_2 \\
 \frac{1}{3} \xi_1 + \frac{1}{6} \xi_3 &= \alpha_3
 \end{aligned}$$

با حل همزمان معادلات نرمال فوق داریم

$$\begin{aligned}
 m_A &= -\frac{X^T}{\lambda_1} \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) \\
 l_A &= -\frac{X^T}{\lambda_1} (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) \\
 r_A &= -\frac{X^T}{\lambda_1} (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3) \\
 m_{A^*} &= -\frac{e^T}{\lambda_2} \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) \\
 l_{A^*} &= -\frac{e^T}{\lambda_2} (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) \\
 r_{A^*} &= -\frac{e^T}{\lambda_2} (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3) \\
 \xi_1 &= \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) \\
 \xi_2 &= (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) \\
 \xi_3 &= (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3)
 \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

حال با جایگذاری شرایط (۱۷.۳) در (۱۶.۳) مسئله مینیمم سازی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}
 \min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} L^* &= -\frac{3}{2} \alpha_1^T \left(\frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \alpha_1 \\
 &\quad - 3\alpha_1^T \left(\frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \alpha_2 + 3\alpha_1^T \left(\frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \alpha_3 \\
 &\quad - 6\alpha_2^T \left(\frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \alpha_2 + 6\alpha_2^T \left(\frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \alpha_3 \\
 &\quad - 6\alpha_3^T \left(\frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \alpha_3 - \frac{3}{2} \alpha_1^T \alpha_1 - 3\alpha_1^T \alpha_2 + 3\alpha_1^T \alpha_3 \\
 &\quad - 6\alpha_2^T \alpha_2 + 6\alpha_2^T \alpha_3 - 6\alpha_3^T \alpha_3 - \alpha_1^T m_Y - \alpha_2^T l_Y - \alpha_3^T r_Y
 \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

با مشتقگیری از ضرایب لاگرانژ، معادلات زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L^*}{\partial \alpha_1} &= \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 \right) + m = 0 \\
 \frac{\partial L^*}{\partial \alpha_2} &= \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) (3\alpha_1 + 12\alpha_2 - 6\alpha_3) + l = 0 \\
 \frac{\partial L^*}{\partial \alpha_3} &= \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right) (-3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3) + r = 0
 \end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

سپس با استفاده از معادلات (۱۷.۳) و (۱۹.۳) مسئله مینیمم سازی (۱۵.۳) دارای جواب زیر است

$$\begin{aligned} m_A &= \frac{X^T}{\lambda_1} \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} m \\ l_A &= \frac{X^T}{\lambda_1} \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} l \\ r_A &= \frac{A^T}{\lambda_1} \left(I + \frac{AA^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} r \\ m_{A_s} &= \frac{e^T}{\lambda_2} \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} m \\ l_{A_s} &= \frac{e^T}{\lambda_2} \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} l \\ r_{A_s} &= \frac{e^T}{\lambda_2} \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} r \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر بردار ورودی دقیق $x \in \mathbb{R}^n$ با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی (۱.۳) و خروجی فازی $\hat{Y}, Y = (m_Y, l_Y, r_Y)_T$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X^T}{\lambda_1} \\ \frac{e^T}{\lambda_2} \end{bmatrix} \left(I + \frac{XX^T}{\lambda_1} + \frac{ee^T}{\lambda_2} \right)^{-1} (m, l, r) \quad (20.3)$$

۱.۴.۳ داده های سیمان پرتلند

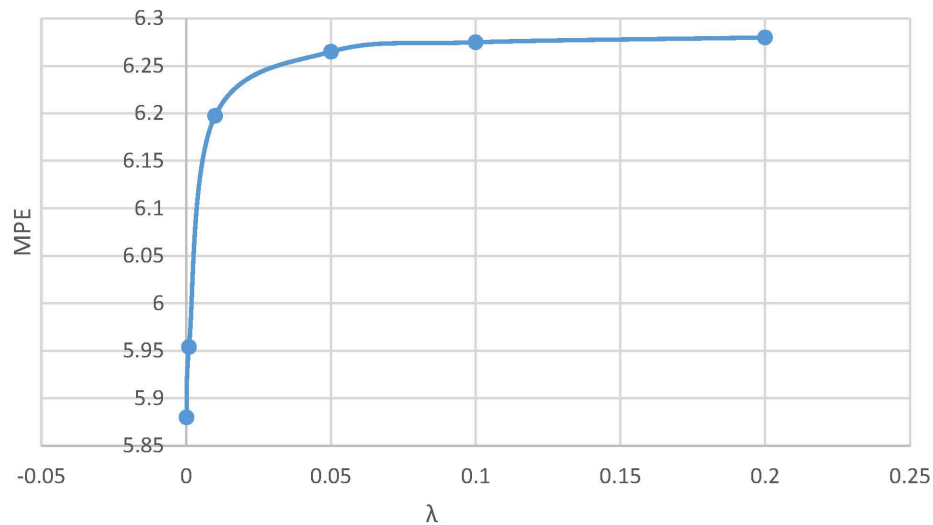
مثال ۱.۳.۳ مربوط به داده های سیمان پرتلند را در نظر بگیرید. در اینجا با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی (۲۰.۳)، مقادیر مختلفی به ضرایب λ_1, λ_2 داده ایم و سپس MPE را محاسبه کرده ایم که در مثال زیر کمترین مقدار MPE مربوط به $\lambda_1 = 0.1$ و $\lambda_2 = 0.001$ برابر ۵/۸۷۹۶ است (جدول ۱۲.۳ و نمودار ۷.۳).

بنابراین پیشگویی خطی فازی دو پارامتری به ازای $\lambda_1 = 0.1$ و $\lambda_2 = 0.001$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= (56/209, 6/296, 10/272)_T + (1/604, 0/075, 0/371)_T x_1 + (0/573, 0/122, 0)_T x_2 \\ &+ (0/147, 0/093, 0/022)_T x_3 + (0/081, 0, 0/010)_T x_4 \end{aligned}$$

همچنین ضریب تعیین تعمیم یافته این مدل برابر با ۰/۹۶۵ است. در این مثال که داده ها دارای همخطی می باشند، اگر مسئله بهینه سازی را برای مدل رگرسیون فازی معمولی به کار ببریم مدل به صورت زیر پیش بینی می شود

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= (59/209, 6/258, 10/329)_T + (1/578, 0/079, 0/367)_T x_1 + (0/545, 0/121, 0/367)_T x_2 \\ &+ (0/120, 0/096, 0/019)_T x_3 + (0/109, 0, 0/010)_T x_4 \end{aligned}$$



شکل ۷.۳: نمودار MPE سیمان پرتلند در برابر مقادير مختلف λ_2 به ازای مقدار ثابت $\lambda_1 = 0.1$

جدول ۱۲.۳: محاسبه MPE به ازای λ_1 و λ_2 های مختلف در داده های سیمان پرتلند

ردیف	λ_1	λ_2	MPE
۱	۰/۱	۰/۰۰۰۱	۵/۸۷۹۶
۲	۰/۱	۰/۱	۶/۲۷۴۸
۳	۰/۱	۰/۵	۶/۲۸۳۰
۴	۰/۱	۱	۶/۲۸۴۰
۵	۰/۱	۵	۶/۲۸۴۸
۶	۰/۱	۱۰	۶/۲۸۴۹
۷	۰/۰۰۰۱	۰/۱	۶/۲۷۵۳
۸	۰/۵	۰/۱	۶/۲۷۳۳
۹	۱	۰/۱	۶/۲۷۲۶
۱۰	۵	۰/۱	۶/۳۰۸۶
۱۱	۱۰	۰/۱	۶/۴۳۷۱

و مقدار MPE برابر با ۵/۹۳۳۴ می شود که به توضوح مشخص است که استفاده از رگرسیون ريج دو پارامتری فازى به جای رگرسیون فازى، خطای مدل کاهش می یابد (جدول ۱۵.۳). همچنین در جدول ۱۳.۳ با توجه به فاصله های تعريف شده در رابطه (۸.۱) (d_1) و (۱۴.۱) (d_2) شاخص MPE محاسبه شده است که فاصله d_1 خطای پیشگویی مدل را کمتر می کند. در جدول ۱۴.۳ نیز نتایج مقادير برآورد شده از روش اعتبارسنجی متقابل و MPE_{cv} آمده است. شاخص MPE_{cv} در این جدول همانند مدل تک پارامتری نشان می دهد که این مدل نیز تا حدودی نسبت به داده های پرت حساس است.

جدول ۱۳.۳: مقادير مشاهده شده و برآورد شده فازى مثلثى براى داده‌هاى سيمان پرتلند

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۷۸/۵۳۹, ۹/۷۷۱, ۱۳/۳۵۶)	۰/۹۶۳۱	۱/۹۱۱۵
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۲/۷۲۵, ۱۱/۷۵۲, ۱۱/۸۲۳)	۶/۹۹۹۴	۹/۹۷۹۲
۳	(۱۰/۴۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷)	(۱۰/۵۹۶۹, ۱۶/۳۷۰, ۱۵/۵۱۲)	۹/۲۹۹۵	۱۳/۷۳۱۶
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۸۹/۲۹۸, ۱۲/۱۹۰, ۱۵/۳۶۷)	۳/۷۸۵۳	۴/۲۸۲۸
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۵/۷۲۴, ۱۳/۳۵۹, ۱۳/۱۴۴)	۱/۲۵۸۹	۲/۴۵۲۶
۶	(۱۰/۹/۲, ۱۲/۰/۲, ۱۶/۳۸)	(۱۰/۵۲۶, ۱۴/۹۳۰, ۱۴/۸۶۳)	۲۲/۲۴۹۴	۲۶/۰۶۲۵
۷	(۱۰/۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰/۴۰۸۷, ۱۶/۷۱۸, ۱۱/۶۶۳)	۱/۶۸۲۰	۲/۳۷۱۲
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰/۵, ۱۰/۱۵)	(۷۵/۴۹۳, ۱۱/۸۱۲, ۱۱/۴۶۰)	۱۱/۷۷۲۵	۱۳/۳۱۴۴
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۹۱/۶۲۵, ۱۵/۵۳۷, ۱۱/۹۹۹)	۴/۶۴۵۲	۶/۲۴۸۰
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۵/۵۹۳, ۱۳/۷۰۹, ۱۸/۲۸۶)	۱/۵۰۲۶	۲/۶۷۰۲
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۱/۶۲۱, ۱۲/۸۸۸, ۱۱/۲۷۲)	۱/۳۱۴۴	۰/۹۹۰۶
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۳۳, ۱۵/۴۴۷, ۱۴/۲۹۶)	۰/۶۳۵۲	۰/۵۱۰۲
۱۳	(۱۰/۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰/۳۴)	(۱۱۱/۷۲۷, ۱۵/۵۱۶, ۱۳/۸۹۲)	۱۰/۳۲۷۱	۱۳/۳۲۲۲
MPE			۵/۸۷۹۶	۷/۵۲۶۷

جدول ۱۴.۳: مقادير برآورد شده فازى با روش اعتبار سنجى متقابل براى داده‌هاى سيمان پرتلند

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۷۸/۸۰۱۹, ۱۱/۹۷۸۷, ۱۶/۶۸۸)	۴/۸۴۱
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۱/۸۲۱, ۱۲/۲۲۵, ۱۰/۲۴۶)	۱۵/۳۷۸
۳	(۱۰/۴۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷)	(۱۰/۸۷۸۴, ۱۳/۰/۵۸, ۱۵/۲۱۵)	۴۰/۷۶۹
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۸۹/۹۷۰/۴, ۱۱/۱۸۴۶, ۱۵/۰/۶۳)	۷/۶۱۹
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۵/۶۵۵, ۱۲/۹۲۴, ۱۱/۸۸۹)	۲/۳۳۳
۶	(۱۰/۹/۲, ۱۲/۰/۲, ۱۶/۳۸)	(۱۰/۴/۶۶۸, ۱۵/۰/۳۶, ۱۴/۵۷۲)	۲۸/۸۷۴
۷	(۱۰/۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰/۴/۸۶, ۱۹/۳۳۳۱, ۱۲/۱۲۳۵)	۴/۳۶۶
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰/۵, ۱۰/۱۵)	(۷۷/۶۲۲, ۱۱/۶۷۷, ۱۲/۵۲۷)	۳۳/۲۷۳
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۹۰/۸۶۳, ۱۴/۷۰۶, ۱۰/۸۴۳)	۹/۲۵۰
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۴/۴۳۲, ۱۸/۳۹۳, ۱۴/۸۵۵)	۱۵/۲۸۸
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۰/۶۳۹, ۱۲/۲۳۲, ۱۲/۲۷۸)	۳/۳۷۶
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۰/۶۲, ۱۶/۰/۸۰, ۱۴/۹۲۳)	۱/۲۲۶
۱۳	(۱۰/۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰/۳۴)	(۱۱۲/۸۸۷, ۱۵/۴۱۶, ۱۴/۸۱۰)	۲۰/۵۶۹
MPE_{cv}			۱۴/۳۹۷

جدول ۱۵.۳: مقایسه MPE رگرسیون ريج فازى و رگرسیون فازى در داده‌های سیمان پرتلند

ردیف	رگرسیون فازى $\hat{Y}_1$	رگرسیون ريج فازى $\hat{Y}_2$	$d^2(Y, \hat{Y}_1)$	$d^2(Y, \hat{Y}_2)$
۱	(۷۸/۵۹۵, ۱۰/۵۵۸, ۱۳/۶۳۳)	(۷۸/۵۳۹, ۹/۷۷۱, ۱۳/۳۵۶)	۱/۳۴۴	۰/۹۶۳
۲	(۷۲/۷۲۰, ۱۱/۳۱۱, ۱۱/۵۲۶)	(۷۲/۷۲۵, ۱۱/۷۵۲, ۱۱/۸۲۳)	۶/۹۱۷	۶/۹۹۹
۳	(۱۰۵/۸۹, ۱۴/۷۲۱, ۱۴/۷۳۳)	(۱۰۵/۹۶۹, ۱۶/۳۷۰, ۱۵/۵۱۲)	۱۰/۰۰۶	۹/۲۹۹
۴	(۸۹/۲۹۸, ۱۱/۶۷۷, ۱۵/۰۰۹)	(۸۹/۲۹۸, ۱۲/۱۹۰, ۱۵/۳۶۷)	۳/۹۵۸	۳/۷۸۵
۵	(۹۵/۷۳۲, ۱۳/۷۲۳, ۱۳/۳۵۷)	(۹۵/۷۲۴, ۱۳/۳۵۹, ۱۳/۱۴۴)	۱/۰۴۴	۱/۲۵۸
۶	(۱۰۵/۲۴۶, ۱۴/۶۹۵, ۱۴/۷۷۴)	(۱۰۵/۲۶, ۱۴/۹۳۰, ۱۴/۸۶۳)	۲۲/۱۰۴	۲۲/۲۴۹
۷	(۱۰۴/۰۶۱, ۱۶/۷۷۶, ۱۱/۸۳۰)	(۱۰۴/۰۸۷, ۱۶/۷۱۸, ۱۱/۶۶۳)	۱/۷۵۰	۱/۶۸۲
۸	(۷۵/۵۲۸, ۱۲/۲۲۸, ۱۱/۵۸۳)	(۷۵/۴۹۳, ۱۱/۸۱۲, ۱۱/۴۶۰)	۱۱/۶۷۵	۱۱/۷۷۲
۹	(۹۱/۵۷۹, ۱۴/۷۲۳, ۱۱/۶۴۶)	(۹۱/۶۲۵, ۱۵/۵۳۷, ۱۱/۹۹۹)	۴/۷۵۵	۴/۶۴۵
۱۰	(۱۱۵/۶۲۵, ۱۴/۰۳۶, ۱۸/۳۸۹)	(۱۱۵/۵۹۳, ۱۳/۷۰۹, ۱۸/۲۸۶)	۱/۵۳۵	۱/۵۰۲
۱۱	(۸۱/۶۵۲, ۱۳/۴۲۰, ۱۱/۵۰۱)	(۸۱/۶۲۱, ۱۲/۸۸۸, ۱۱/۲۷۲)	۱/۲۳۷	۱/۳۱۴
۱۲	(۱۱۲/۳۴, ۱۶/۰۳۴, ۱۴/۶۷۱)	(۱۱۲/۳۳, ۱۵/۴۴۷, ۱۴/۲۹۶)	۰/۷۳۰	۰/۶۳۵
۱۳	(۱۱۱/۷۳۳, ۱۶/۱۰۲, ۱۴/۲۸۴)	(۱۱۱/۷۲۷, ۱۵/۵۱۶, ۱۳/۸۹۲)	۱۰/۰۷۴	۱۰/۳۲۷
MPE			۵/۹۳۳	۵/۸۷۹

۲.۴.۳ داده‌های تولید ناخالص ملی

مثال ۲.۳.۳ مربوط به داده‌های تولید ناخالص ملی را در نظر بگیرید. در این مثال نیز مانند مثال قبل به ازای مقادیر مختلف پارامترهای ريج λ_1, λ_2 و مقدار MPE را محاسبه کرده‌ایم که به ازای $\lambda_1 = ۰/۰۰۱$ و $\lambda_2 = ۰/۱$ مقدار MPE برابر $۰/۰۰۱۷$ است که کمترین مقدار خود را از بین مقادیر پیشنهادی می‌گیرد (جدول ۱۶.۳ و نمودار ۸.۳). از مقایسه رگرسیون فازى با رگرسیون ريج فازى در جدول ۱۸.۳، برتری رگرسیون ريج فازى را پی می‌بریم.

همچنین در جدول ۱۷.۳ با توجه به فاصله‌های تعریف شده در رابطه (۸.۱) (d_1) و (۱۴.۱) (d_2) شاخص MPE محاسبه شده است که فاصله d_1 خطای پیشگویی مدل را کمتر می‌کند. ضریب تعیین تعمیم یافته مدل به ازای مقادیر بهینه پارامترهای λ_1, λ_2 برابر $۰/۹۸۱$ می‌شود.

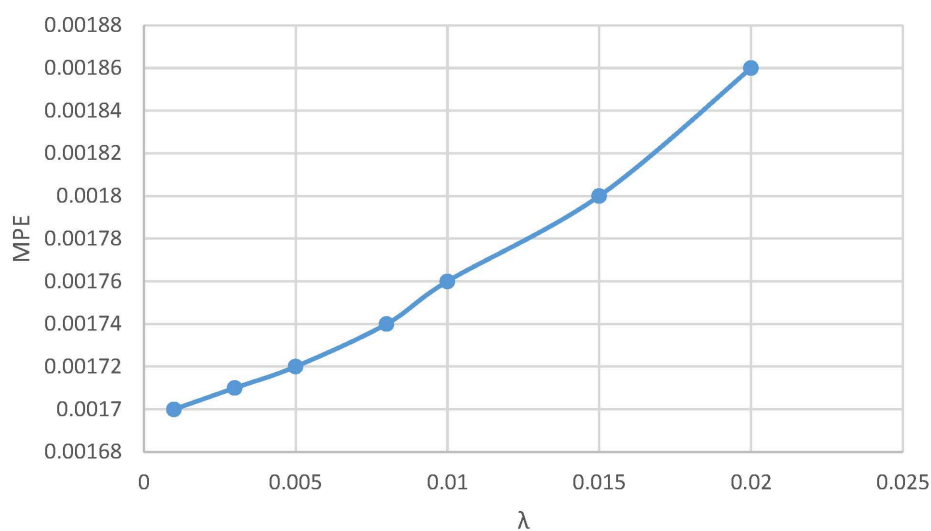
مدل رگرسیون ريج دو پارامتری فازى به ازای $\lambda_1 = ۰/۰۰۱$ و $\lambda_2 = ۰/۱$ به صورت زیر است

$$\hat{Y} = (۰/۰۲۳, ۰, ۰/۰۱۶)_T + (۰/۷۰۹, ۰, ۰/۰۲۰)_T x_1 + (۰/۰۱۳, ۰/۱۲۲, ۰)_T x_2 + (۰/۱۵۴, ۰, ۰/۱۲۷)_T x_3 + (۰/۱۵۵, ۰/۰۰۹, ۰/۰۶۸)_T x_4$$

همچنین نتایج حاصل از روش اعتبارسنجی متقابل در جدول ۱۹.۳ آمده است. کوچک بودن MPE_{cv} و نزدیک بودن آن به MPE مدل، تأکیدی بر مناسب بودن مدل است.

جدول ۱۶.۳: محاسبه MPE به ازای λ_1 و λ_2 ی مختلف در داده‌های تولید ناخالص ملی

ردیف	λ_1	λ_2	MPE
۱	۰/۰۰۱	۰/۱	۰/۰۰۱۷۰
۲	۰/۱	۰/۱	۰/۰۰۲۴۹
۳	۰/۵	۰/۱	۰/۰۰۳۶۴
۴	۱	۰/۱	۰/۰۰۴۹۳
۵	۵	۰/۱	۰/۰۱۴۶۸
۶	۱۰	۰/۱	۰/۰۲۱۵۷
۷	۰/۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲۴۹
۸	۰/۱	۰/۵	۰/۰۰۲۵۰
۹	۰/۱	۱	۰/۰۰۲۵۰
۱۰	۰/۱	۵	۰/۰۰۲۵۰
۱۱	۰/۱	۱۰	۰/۰۰۲۵۰



شکل ۸.۳: نمودار MPE داده‌های تولید ناخالص ملی در برابر مقادیر مختلف λ_1 به‌ازای مقدار ثابت $\lambda_2 = 0.1$

جدول ۱۷.۳: مقادير مشاهده شده فازي و برآورد شده فازي براي داده‌هاي توليد ناخالص ملي

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2
۱	(۲/۳, ۰/۲۵۳, ۰/۵۲۹)	(۲/۲۴۲, ۰/۳۰۵, ۰/۵۸۲)	۰/۰۰۱۳۵	۰/۰۰۱۲۸
۲	(۲/۲, ۰/۲۶۴, ۰/۶۶)	(۲/۲۳۴, ۰/۳۰۶, ۰/۵۵۷)	۰/۰۰۰۳۰	۰/۰۰۰۴۰
۳	(۲/۲, ۰/۴۱۸, ۰/۴۶۲)	(۲/۲۳۵, ۰/۳۲۸, ۰/۵۵۳)	۰/۰۰۲۶۸	۰/۰۰۳۹۴
۴	(۲/۳, ۰/۳۴۵, ۰/۶۲۱)	(۲/۲۹۳, ۰/۳۳۰, ۰/۵۵۷)	۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۲۱۵
۵	(۲/۴, ۰/۳۸۴, ۰/۶۴۸)	(۲/۴۲۲, ۰/۳۴۲, ۰/۶۱۰)	۰/۰۰۰۸۰	۰/۰۰۱۰۳
۶	(۲/۵, ۰/۲۷۵, ۰/۶۲۵)	(۲/۴۸۴, ۰/۳۵۳, ۰/۶۳۵)	۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۰۱۲۵
۷	(۲/۶, ۰/۳۱۲, ۰/۵۴۶)	(۲/۵۵۰, ۰/۳۵۴, ۰/۶۳۷)	۰/۰۰۳۴۸	۰/۰۰۴۱۵
۸	(۲/۶, ۰/۴۶۸, ۰/۶۲۴)	(۲/۶۳۵, ۰/۶۵۸, ۰/۹۲۲)	۰/۰۰۵۳۸	۰/۰۰۸۳۰
۹	(۲/۷, ۰/۴۳۲, ۰/۷۰۲)	(۲/۶۹۱, ۰/۳۷۷, ۰/۶۸۸)	۰/۰۰۰۳۹	۰/۰۰۰۷۸
۱۰	(۲/۷, ۰/۲۷, ۰/۷۵۶)	(۲/۷۰۸, ۰/۳۶۶, ۰/۶۹۰)	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۱۰۱
MPE			۰/۰۰۱۷۰	۰/۰۰۲۴۳

جدول ۱۸.۳: مقایسه رگرسیون فازي و رگرسیون ريج فازي در داده‌هاي توليد ناخالص ملي

ردیف	$\hat{Y}_1$ رگرسیون فازي	$\hat{Y}_2$ رگرسیون ريج فازي	$d^2(Y, \hat{Y}_1)$	$d^2(Y, \hat{Y}_2)$
۱	(۲/۲۲۹, ۰/۳۱۰, ۰/۵۶۲)	(۲/۲۵۹, ۰/۲۶۲, ۰/۵۶۹)	۰/۰۰۵۸۳۱	۰/۰۰۱۳۵
۲	(۲/۲۵۷, ۰/۳۱۶, ۰/۵۷۰)	(۲/۲۲۶, ۰/۲۹۹, ۰/۵۸۳)	۰/۰۰۱۴۸۱	۰/۰۰۰۳۰
۳	(۲/۲۷۳, ۰/۳۲۰, ۰/۵۷۲)	(۲/۲۲۸, ۰/۳۶۲, ۰/۵۳۲)	۰/۰۱۲۳۰	۰/۰۰۲۶۸
۴	(۲/۳۴۵, ۰/۳۳۰, ۰/۵۹۱)	(۲/۲۷۳, ۰/۳۷۲, ۰/۵۷۳)	۰/۰۰۱۸۹	۰/۰۰۱۵۷
۵	(۲/۴۲۸, ۰/۳۳۹, ۰/۶۱۲)	(۲/۴۲۴, ۰/۳۴۸, ۰/۶۰۲)	۰/۰۰۱۱۶	۰/۰۰۰۸۰
۶	(۲/۴۶۸, ۰/۳۴۴, ۰/۶۲۰)	(۲/۴۹۷, ۰/۳۵۳, ۰/۶۰۲)	۰/۰۰۲۲۰	۰/۰۰۰۶۵
۷	(۲/۵۳۸, ۰/۳۵۴, ۰/۶۳۹)	(۲/۵۴۲, ۰/۳۶۵, ۰/۶۵۲)	۰/۰۰۳۵۸	۰/۰۰۳۴۸
۸	(۲/۶۰۶, ۰/۳۶۲, ۰/۶۵۸)	(۲/۶۳۵, ۰/۳۳۹, ۰/۶۹۱)	۰/۰۰۱۳۹	۰/۰۰۵۳۸
۹	(۲/۶۴۱, ۰/۳۶۷, ۰/۶۶۴)	(۲/۷۰۱, ۰/۳۷۵, ۰/۶۶۴)	۰/۰۰۳۳۱	۰/۰۰۰۳۹
۱۰	(۲/۶۴۵, ۰/۳۶۶, ۰/۶۶۶)	(۲/۷۰۸, ۰/۳۴۶, ۰/۷۰۰)	۰/۰۰۷۷۹	۰/۰۰۰۴۵
MPE			۰/۰۰۴۰۹	۰/۰۰۱۷۰۹

جدول ۱۹.۳: مقادير برآورد شده فازى با روش اعتبارسنجى متقابل براى داده‌هاى توليد ناخالص ملى

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d_1
۱	(۲/۳, ۰/۲۵۳, ۰/۵۲۹)	(۲/۱۸۱۲, ۰/۳۲۵۱, ۰/۵۹۳۹)	۰/۰ ۱۵۱۵
۲	(۲/۲, ۰/۲۶۴, ۰/۶۶)	(۲/۲۴۴, ۰/۳۲۳, ۰/۵۳۱)	۰/۰ ۰۰۸۷
۳	(۲/۲, ۰/۴۱۸, ۰/۴۶۲)	(۲/۲۴۷, ۰/۲۹۷, ۰/۵۹۱)	۰/۰ ۰۸۸۶
۴	(۲/۳, ۰/۳۴۵, ۰/۶۲۱)	(۲/۲۳۰, ۰/۳۲۸, ۰/۵۵۸)	۰/۰ ۰۶۱۸
۵	(۲/۴, ۰/۳۸۴, ۰/۶۴۸)	(۲/۴۲۵, ۰/۳۳۸, ۰/۶۰۵)	۰/۰ ۰ ۱۰۲
۶	(۲/۵, ۰/۲۷۵, ۰/۶۲۵)	(۲/۴۸۶, ۰/۳۶۸, ۰/۶۱۹)	۰/۰ ۰ ۱۳۷
۷	(۲/۶, ۰/۳۱۲, ۰/۵۴۶)	(۲/۵۲۲, ۰/۳۶۵, ۰/۶۷۱)	۰/۰ ۰۵۶۳
۸	(۲/۶, ۰/۴۶۸, ۰/۶۲۴)	(۲/۶۷۳, ۰/۳۴۲, ۰/۶۷۲)	۰/۰ ۱۱۱۴
۹	(۲/۷, ۰/۴۳۲, ۰/۷۰۲)	(۲/۷۰۰, ۰/۳۳۴, ۰/۶۵۶)	۰/۰ ۰۰۹۶
۱۰	(۲/۷, ۰/۲۷, ۰/۷۵۶)	(۲/۷۱۸, ۰/۴۱۳, ۰/۶۴۸)	۰/۰ ۰ ۱۴۵
MPE_{cv}			۰/۰ ۰۵۲۶

فصل ۴

مدل رگرسیون ریج فازی با استفاده از برنامه ریزی درجه دوم

۱.۴ مقدمه

از روش تحلیل برنامه ریزی درجه دوم که در بخش ۲.۲.۲ شرح داده شد می‌توان برای استفاده از مدل‌های رگرسیونی فازی که مشکل هم‌خطی میان متغیرهای ورودی دارند، استفاده کرد. در این فصل مدل رگرسیون ریج فازی براساس تحلیل برنامه ریزی درجه دوم برای ورودی دقیق و خروجی فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم (برای اطلاعات بیشتر به دونسو و همکاران [۲۵] مراجعه کنید). سپس با ارائه مثال‌های شبیه سازی و عددی مدل رگرسیون ریج فازی پیشنهادی را بررسی می‌کنیم.

۲.۴ مدل رگرسیون ریج فازی پیشنهادی

مدل رگرسیون خطی فازی زیر را در نظر بگیرید

$$Y = A_0 + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \quad (1.4)$$

که در آن $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ و $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_p)^T$ بردار ضرایب فازی است و $A_j = (m_{A_j}, l_{A_j}, r_{A_j})_T$ و $A_0 = (m_{A_0}, l_{A_0}, r_{A_0})_T$ به ازای $j = 1, \dots, p$ و $Y = (m_Y, l_Y, r_Y)_T$ اعداد فازی مثلثی روی $\mathbb{R}$ هستند. اگر به تابع هدف (۱۵.۲) جمله جریمه‌ای که بر پایه‌ی مراکز ضرایب مدل

به صورت $\lambda \sum_{j=0}^p m_{A_j}^2$ است را اضافه كنيم، تابع هدف زير بدست مي آيد

$$\begin{aligned} & k_1 \sum_{i=1}^n (m_{Y_i} - (m_{A_0} + \sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij}))^2 + k_2 \left(\sum_{i=1}^n ((m_{Y_i} - l_{Y_i}) - ((m_{A_0} + \sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij}) \right. \\ & \left. - (l_{A_0} + \sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij})))^2 + \sum_{i=1}^n ((m_{Y_i} + r_{Y_i}) - ((m_{A_0} + \sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij}) \right. \\ & \left. + (r_{A_0} + \sum_{j=1}^p r_{A_j} x_{ij})))^2 \right) + \lambda (m_{A_0}^2 + \sum_{j=1}^p m_{A_j}^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

که در آن k_1 و k_2 اعداد حقيقي بين صفر و يك هستند که توسط محقق تعيين مي شوند. در صورتی که $k_1 > k_2$ اهميت مرکز بيشتر از پهنای پاسخها در نظر گرفته می شود و اگر $k_1 < k_2$ پهنای پاسخها از اهميت بيشتری برخوردار می گردد. همچنين در صورتی که $k_1 = k_2$ ، اهميت مرکز و پهنای يكسان فرض شده است. پارامتر λ نیز همان پارامتر ريج است که اين پارامتر فقط روی برداری از مقادير مرکزی عمل می کند. اگر در تابع هدف (۲.۴)، پارامتر ريج علاوه بر مقادير مرکزی روی پهنای اثر گذارد، تابع هدف به شکل زير تعميم می يابد

$$\begin{aligned} & k_1 \sum_{i=1}^n (m_{Y_i} - (m_{A_0} + \sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij}))^2 + k_2 \left(\sum_{i=1}^n ((m_{Y_i} - l_{Y_i}) - ((m_{A_0} + \sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij}) \right. \\ & \left. - (l_{A_0} + \sum_{j=1}^p l_{A_j} x_{ij})))^2 + \sum_{i=1}^n ((m_{Y_i} + r_{Y_i}) - ((m_{A_0} + \sum_{j=1}^p m_{A_j} x_{ij}) \right. \\ & \left. + (r_{A_0} + \sum_{j=1}^p r_{A_j} x_{ij})))^2 \right) + \lambda \left(\sum_{j=0}^p (k_3 m_{A_j}^2 + k_4 ((m_{A_j} - l_{A_j})^2 + (m_{A_j} + r_{A_j})^2)) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

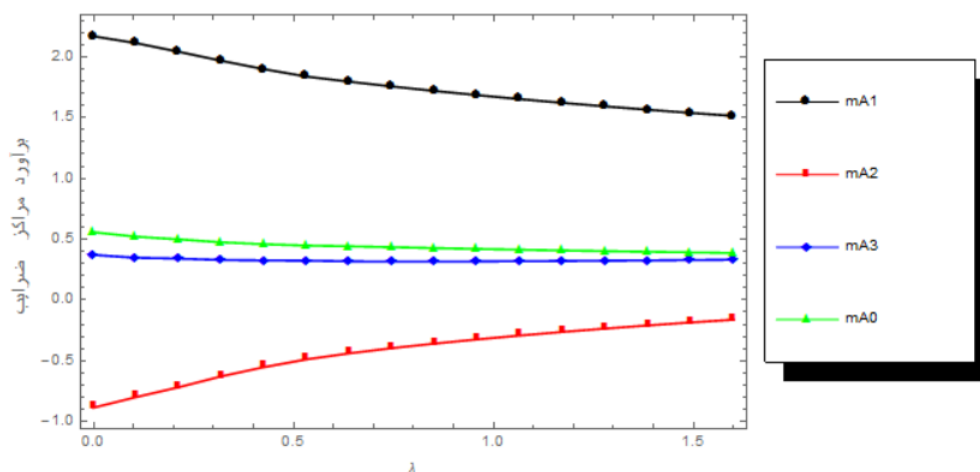
که در آن k_3, k_4 مقادير ثابتی هستند که به ترتيب اثر مرکز و پهنای را در پارامتر ريج نشان می دهند و توسط متخصص تعيين می گردند.

یکی از راههای انتخاب پارامتر ريج انتخاب λ برحسب تغييرات برآورد ضرايب است. زمانی که برآوردها به مقدار ثابتی می گرايد آن پارامتر را به عنوان پارامتر ريج انتخاب می كنيم. در اين فصل انتخاب λ بر اين اساس است.

۳.۴ مطالعات عددي

۱.۳.۴ مثال شبیه سازی شده

مثال شبیه سازی در بخش ۱.۲.۳ را در نظر بگيريد. حال در اين مثال می خواهيم با استفاده از تابع هدف (۲.۴) مدل رگرسيونی (۱.۴) را برای مقادير ورودی دقيق و خروجی فازي برآورد كنيم. با توجه به شکل ۱.۴ برآورد ضرايب رگرسيونی به ازای مقادير $\lambda \geq 1/1$ به يك ثبات نسبی می رسد. بنابراین پارامتر ريج را $\lambda = 1/1$ انتخاب می كنيم.



شکل ۱.۴: تغییرات مراکز ضرایب با افزایش پارامتر رنج

به ازای $\lambda = 1/1$ برآورد پیشگویی خطی فازی به صورت زیر محاسبه می شود

$$\hat{Y} = (0.407, 0, 0.100)_T + (1.621, 0, 0.351)_T x_1 + (-0.262, 0.262, 0)_T x_2 + (0.321, 0, 0)_T x_3$$

به ازای $\lambda = 1/1$ نتایج برآورد مقادیر پاسخ و همچنین شاخص MPE بر اساس فاصله (۸.۱) (d_1) و فاصله (۱۴.۱) (d_2) و فاصله (۱۵.۱) (d_3) در جدول ۱.۴ آمده است.

با استفاده از رابطه (۱۸.۲) مقدار MPE برابر 0.550 است. همچنین ضریب تعیین تعمیم یافته مدل با توجه به فرمول (۱۶.۲) برابر با 0.816 بدست می آید. مقدار کم MPE و مقدار نسبتاً خوب ضریب تعیین تعمیم یافته حاکی از آن است که مدل از برازش خوبی به داده ها برخوردار است. همچنین از روش اعتبار سنجی متقابل مقدار MPE_{cv} مدل برابر با 0.6349 بدست آمده است، که مقداری کوچک و بسیار نزدیک به مقدار MPE مدل است.

جدول ۱.۴: مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلی

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2	d_3
۱	(۸۸۰۴, ۱۳۲۱, ۱۸۴۹)	(۹۳۴۲, ۱۳۸۷, ۱۹۶۶)	۰.۳۰۰	۰.۳۰۶	۰.۹۴۰
۲	(۴۴۴۳, ۰.۶۶۶, ۰.۹۳۳)	(۶۰۸۱, ۰.۹۵۹, ۱.۳۰۹)	۲.۷۴۹	۲.۷۹۱	۸.۵۵۴
۳	(۸۶۸۱, ۱.۳۰۲, ۱.۸۲۳)	(۸۵۱۸, ۱.۳۵۲, ۱.۸۱۸)	۰.۰۳۰	۰.۰۳۱	۰.۱۰۰
۴	(۱۰۶۱۱, ۱.۵۹۲, ۲.۲۲۸)	(۹۴۱۵, ۱.۴۱۴, ۱.۹۸۸)	۱.۴۶۳	۱.۴۸۳	۴.۵۳۳
۵	(۱۲۳۴۶, ۱.۸۵۲, ۲.۵۹۳)	(۱۱۹۸۵, ۱.۷۶۱, ۲.۵۰۹)	۰.۱۳۱	۰.۱۳۲	۰.۴۰۱
۶	(۹۱۶۷, ۱.۳۷۵, ۱.۹۲۵)	(۹۲۰۸, ۱.۴۰۳, ۱.۹۴۵)	۰.۰۰۲	۰.۰۰۲	۰.۰۰۶
۷	(۹۷۸۶, ۱.۴۶۸, ۲.۰۵۵)	(۸۵۹۱, ۱.۲۷۲, ۱.۸۰۷)	۱.۴۵۷	۱.۴۷۶	۴.۵۱۰
۸	(۸۹۹۹, ۱.۳۵۰, ۱.۸۹۰)	(۹۲۳۳, ۱.۴۴۴, ۱.۹۴۸)	۰.۰۵۳	۰.۰۵۳	۰.۱۶۰
۹	(۱۰۰۵۳, ۱.۵۰۸, ۲.۱۱۱)	(۱۰۸۱۳, ۱.۶۷۵, ۲.۲۷۴)	۰.۵۸۱	۰.۵۸۵	۱.۷۸۱
۱۰	(۱۳۹۴۶, ۲.۰۹۲, ۲.۹۲۹)	(۱۴۲۶۰, ۲.۱۵۲, ۲.۹۷۴)	۰.۰۹۷	۰.۰۹۷	۰.۲۹۲
۱۱	(۸۷۷۰, ۱.۳۱۵, ۱.۸۴۲)	(۸۳۲۹, ۱.۲۳۴, ۱.۷۶۲)	۰.۱۹۵	۰.۱۹۶	۰.۵۹۵
۱۲	(۸۴۷۶, ۱.۲۷۱, ۱.۷۸۰)	(۸۸۸۴, ۱.۲۸۴, ۱.۸۸۵)	۰.۱۸۰	۰.۱۸۷	۰.۵۸۵

ادامه در صفحه بعد

مقادير مشاهده شده و برآورد شده فازي مثلثي

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2	d_3
۱۳	(۱۰۵۶۱, ۱۵۸۴, ۲۲۱۸)	(۹۱۰۲, ۱۳۷۸, ۱۹۱۹)	۲/۱۸۳	۲/۲۱۶	۶/۷۸۲
۱۴	(۷۴۷۳, ۱/۱۲۱, ۱۵۶۹)	(۸۰۴۶, ۱/۱۹۹, ۱/۷۰۸)	۰/۳۴۱	۰/۳۴۹	۱/۰۷۸
۱۵	(۸۵۶۳, ۱/۲۸۵, ۱/۷۹۸)	(۹۵۶۱, ۱/۳۹۵, ۱/۹۹۷)	۱/۰۲۹	۱/۰۴۸	۳/۲۱۳
۱۶	(۱۱/۲۳۴, ۱/۶۸۵, ۲/۳۵۹)	(۱۰/۷۴۵, ۱/۵۵۴, ۲/۲۵۵)	۰/۲۳۷	۰/۲۳۷	۰/۷۱۹
۱۷	(۹۸۵۶, ۱/۴۷۸, ۲/۰۷۰)	(۹/۷۰۳, ۱/۴۰۸, ۲/۰۳۹)	۰/۰۲۲	۰/۰۲۱	۰/۰۶۴
۱۸	(۷۸۴۲, ۱/۱۷۶, ۱/۶۴۷)	(۷/۲۹۴, ۱/۰۹۰, ۱/۵۵۴)	۰/۳۰۳	۰/۳۰۵	۰/۹۲۶
۱۹	(۸۶۲۹, ۱/۲۹۴, ۱/۸۱۲)	(۸/۶۶۷, ۱/۳۵۵, ۱/۸۳۴)	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۶
۲۰	(۱۱/۷۷۲, ۱/۷۶۶, ۲/۴۷۲)	(۱۰/۹۷۱, ۱/۶۲۸, ۲/۳۰۳)	۰/۶۵۵	۰/۶۶۳	۲/۰۲۵
۲۱	(۷۵۵۹, ۱/۱۳۴, ۱/۵۸۷)	(۷/۴۱۳, ۱/۱۲۳, ۱/۵۸۱)	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۶۳
۲۲	(۹۸۴۴, ۱/۴۷۷, ۲/۰۶۷)	(۱۰/۰۳۵, ۱/۴۶۵, ۲/۱۲۵)	۰/۰۴۱	۰/۰۴۴	۰/۱۳۹
۲۳	(۵/۷۹۶, ۰/۸۶۹, ۱/۲۱۷)	(۵/۸۱۵, ۰/۷۸۱, ۱/۲۵۱)	۰/۰۰۲	۰/۰۰۳	۰/۰۱۵
۲۴	(۹/۳۸۰, ۱/۴۰۷, ۱/۹۷۰)	(۹/۹۸۲, ۱/۵۹۲, ۲/۱۱۴)	۰/۳۵۹	۰/۳۵۹	۱/۰۹۳
۲۵	(۱۱/۲۲۸, ۱/۶۸۴, ۲/۳۵۸)	(۱۱/۳۵۶, ۱/۶۶۳, ۲/۳۸۰)	۰/۰۱۸	۰/۰۱۹	۰/۰۶۰
۲۶	(۹/۹۹۴, ۱/۴۹۹, ۲/۰۹۹)	(۹/۲۳۲, ۱/۳۳۲, ۱/۹۵۷)	۰/۵۷۹	۰/۵۸۰	۱/۷۵۵
۲۷	(۹/۷۶۰, ۱/۴۶۴, ۲/۰۵۰)	(۸/۹۴۰, ۱/۳۴۶, ۱/۹۰۰)	۰/۶۸۴	۰/۶۹۱	۲/۱۰۴
۲۸	(۱۱/۰۸۴, ۱/۶۶۳, ۲/۳۲۸)	(۱۰/۸۲۹, ۱/۶۶۶, ۲/۲۷۶)	۰/۰۷۰	۰/۰۷۲	۰/۲۲۵
۲۹	(۹/۷۳۴, ۱/۴۶۰, ۲/۰۴۴)	(۱۰/۲۴۶, ۱/۶۳۶, ۲/۱۶۰)	۰/۲۵۶	۰/۲۵۵	۰/۷۷۱
۳۰	(۹/۷۰۶, ۱/۴۵۶, ۲/۰۳۸)	(۱۱/۴۰۸, ۱/۷۳۳, ۲/۳۸۹)	۲/۹۵۳	۲/۹۹۰	۹/۱۳۴
۳۱	(۸۵۸۳, ۱/۲۸۷, ۱/۸۰۲)	(۹/۲۹۴, ۱/۳۵۷, ۱/۹۶۲)	۰/۵۳۰	۰/۵۴۳	۱/۶۷۷
۳۲	(۸/۳۳۸, ۱/۲۵۱, ۱/۷۵۱)	(۹/۱۸۹, ۱/۴۲۷, ۱/۹۴۱)	۰/۷۳۴	۰/۷۴۲	۲/۲۶۵
۳۳	(۹/۳۹۶, ۱/۴۰۹, ۱/۹۷۳)	(۱۰/۰۴۸, ۱/۴۴۱, ۲/۱۰۷)	۰/۴۴۸	۰/۴۶۱	۱/۴۲۶
۳۴	(۱۰/۱۷۹, ۱/۵۲۷, ۲/۱۳۸)	(۹/۶۲۹, ۱/۴۱۳, ۲/۰۲۷)	۰/۳۰۴	۰/۳۰۶	۰/۹۳۰
۳۵	(۱۰/۹۵۷, ۱/۶۴۳, ۲/۳۰۱)	(۱۰/۸۷۷, ۱/۶۶۹, ۲/۲۸۱)	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۲۷
۳۶	(۸۵۰۳, ۱/۲۷۵, ۱/۷۸۶)	(۸/۶۴۶, ۱/۲۹۰, ۱/۸۴۰)	۰/۰۲۳	۰/۰۲۴	۰/۰۷۶
۳۷	(۱۲/۹۴۱, ۱/۹۴۱, ۲/۷۱۸)	(۱۲/۲۹۷, ۱/۷۹۸, ۲/۵۷۸)	۰/۴۱۸	۰/۴۲۱	۱/۲۸۲
۳۸	(۱۰/۱۹۹, ۱/۵۳۰, ۲/۱۴۲)	(۱۰/۴۷۸, ۱/۵۹۴, ۲/۲۰۲)	۰/۰۷۸	۰/۰۷۸	۰/۲۳۸
۳۹	(۸۵۴۴, ۱/۲۸۲, ۱/۷۹۴)	(۷/۳۸۹, ۱/۱۵۲, ۱/۵۷۴)	۱/۳۷۵	۱/۳۹۸	۴/۲۷۸
۴۰	(۱۱/۳۳۷, ۱/۷۰۱, ۲/۳۸۱)	(۹/۹۶۶, ۱/۵۰۹, ۲/۰۹۲)	۱/۹۳۶	۱/۹۶۸	۶/۰۳۱
۴۱	(۱۱/۶۷۶, ۱/۷۵۱, ۲/۴۵۲)	(۱۱/۱۱۶, ۱/۶۲۹, ۲/۳۳۴)	۰/۳۱۶	۰/۳۱۸	۰/۹۶۷
۴۲	(۸/۹۵۴, ۱/۳۴۳, ۱/۸۸۰)	(۹/۲۳۴, ۱/۴۴۷, ۱/۹۵۳)	۰/۰۷۷	۰/۰۷۷	۰/۲۳۵
۴۳	(۱۱/۳۸۱, ۱/۷۰۷, ۲/۳۹۰)	(۱۰/۴۲۶, ۱/۵۵۲, ۲/۱۹۵)	۰/۹۳۰	۰/۹۴۲	۲/۸۷۵
۴۴	(۹/۴۳۷, ۱/۴۱۶, ۱/۹۸۲)	(۹/۶۸۸, ۱/۳۶۶, ۲/۰۳۰)	۰/۰۷۲	۰/۰۷۶	۰/۲۴۴
۴۵	(۱۰/۵۷۰, ۱/۵۸۶, ۲/۲۲۰)	(۹/۵۸۶, ۱/۴۱۳, ۲/۰۱۴)	۰/۹۸۶	۰/۹۹۷	۳/۰۴۴
۴۶	(۸۵۲۳, ۱/۲۷۸, ۱/۷۹۰)	(۸/۶۱۵, ۱/۲۱۹, ۱/۸۲۳)	۰/۰۱۲	۰/۰۱۴	۰/۰۴۷
۴۷	(۸۳۰۲, ۱/۲۴۵, ۱/۷۴۳)	(۹/۱۱۳, ۱/۳۳۶, ۱/۹۲۶)	۰/۶۸۵	۰/۷۰۱	۲/۱۶۲
۴۸	(۷/۲۷۴, ۱/۰۹۱, ۱/۵۲۸)	(۷/۹۲۵, ۱/۱۹۰, ۱/۶۸۰)	۰/۴۳۸	۰/۴۴۶	۱/۳۷۲
۴۹	(۱۱/۴۱۷, ۱/۷۱۳, ۲/۳۹۸)	(۱۱/۷۳۶, ۱/۷۷۳, ۲/۴۵۹)	۰/۱۰۳	۰/۱۰۳	۰/۳۱۴
۵۰	(۱۰/۲۲۲, ۱/۵۳۳, ۲/۱۴۷)	(۱۱/۲۴۴, ۱/۶۴۸, ۲/۳۶۶)	۱/۰۸۵	۱/۱۰۸	۳/۴۰۹
MPE			۰/۵۵۰	۰/۵۵۸	۱/۷۱۰

جدول ۲.۴: برآورد با روش اعتبار سنجي متقابل برای داده‌های شبیه سازی شده

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d
۱	(۸۸۰۴, ۱/۳۲۱, ۱/۸۴۹)	(۹/۳۸۵, ۱/۳۹۸, ۱/۹۶۲)	۰/۳۴۶
۲	(۴/۴۴۳, ۰/۶۶۶, ۰/۹۳۳)	(۶/۲۶۳, ۰/۹۲۹, ۱/۳۵۹)	۳/۴۳۳
۳	(۸/۶۸۱, ۱/۳۰۲, ۱/۸۲۳)	(۸/۳۴۴, ۱/۲۸۷, ۱/۸۰۸)	۰/۱۱۴
۴	(۱۰/۶۱۱, ۱/۵۹۲, ۲/۲۲۸)	(۹/۳۸۷, ۱/۴۰۹, ۱/۹۷۶)	۱/۵۳۷
۵	(۱۲/۳۴۶, ۱/۸۵۲, ۲/۵۹۳)	(۱۲/۰۱۸, ۱/۷۹۴, ۲/۵۰۶)	۰/۱۱۲
۶	(۹/۱۶۷, ۱/۳۷۵, ۱/۹۲۵)	(۹/۱۶۸, ۱/۳۸۲, ۱/۹۳۸)	۰/۰۰۰
۷	(۹/۷۸۶, ۱/۴۶۸, ۲/۰۵۵)	(۸/۴۹۹, ۱/۲۷۸, ۱/۷۸۵)	۱/۷۰۱

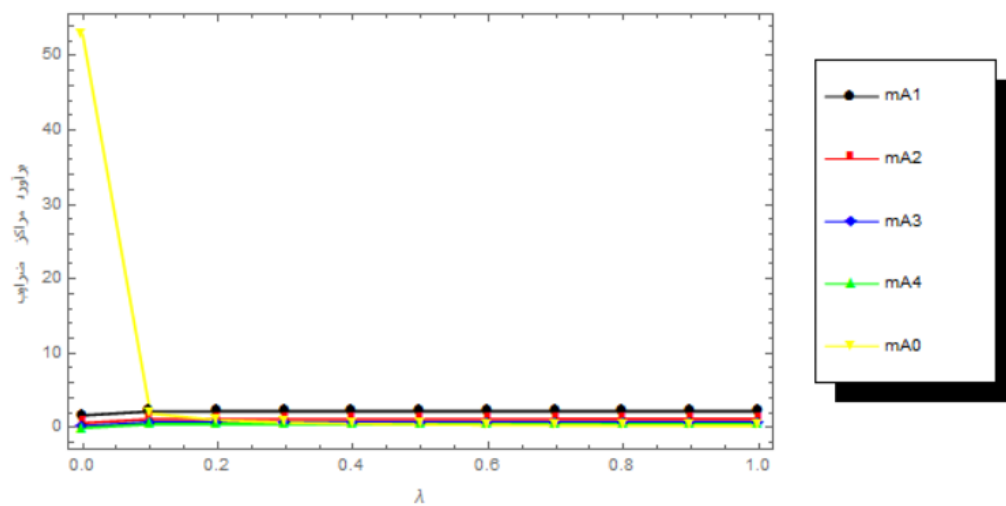
ادامه در صفحه بعد

برآورد با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های شبیه سازی شده

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d
۸	(۸۹۹۹, ۱۳۵۰, ۱۸۹۰)	(۹۱۲۶, ۱۳۸۴, ۱۹۴۲)	۰/۱۷
۹	(۱۰/۵۳, ۱/۵۰۸, ۲/۱۱۱)	(۱۰/۷۴۸, ۱/۶۲۸, ۲/۲۷۹)	۰/۴۹۹
۱۰	(۱۳۹۴۶, ۲/۰۹۲, ۲/۹۲۹)	(۱۴۲۷۶, ۲/۱۴۹, ۳/۰۰۷)	۰/۱۱۲
۱۱	(۸۷۷۰, ۱/۳۱۵, ۱/۸۴۲)	(۸۳۴۴, ۱/۲۴۵, ۱/۷۴۷)	۰/۱۸۵
۱۲	(۸/۴۷۶, ۱/۲۷۱, ۱/۷۸۰)	(۹/۰۳۹, ۱/۳۴۰, ۱/۸۷۸)	۰/۳۲۳
۱۳	(۱۰/۵۶۱, ۱/۵۸۴, ۲/۲۱۸)	(۹/۰۲۵, ۱/۳۵۹, ۱/۹۰۳)	۲/۴۱۶
۱۴	(۷/۴۷۳, ۱/۱۲۱, ۱/۵۶۹)	(۸/۰۹۵, ۱/۲۱۰, ۱/۷۰۳)	۰/۳۹۸
۱۵	(۸۵۶۳, ۱/۲۸۵, ۱/۷۹۸)	(۹/۸۵۵, ۱/۴۲۲, ۱/۹۹۶)	۱/۶۹۹
۱۶	(۱۱/۲۳۴, ۱/۶۸۵, ۲/۳۵۹)	(۱۰/۸۲۵, ۱/۶۰۸, ۲/۲۵۰)	۰/۱۷۳
۱۷	(۹/۸۵۶, ۱/۴۷۸, ۲/۰۷۰)	(۹/۷۸۴, ۱/۴۵۰, ۲/۰۳۳)	۰/۰۰۵
۱۸	(۷/۸۴۲, ۱/۱۷۶, ۱/۶۴۷)	(۷/۲۷۷, ۱/۰۹۰, ۱/۵۲۹)	۰/۳۲۷
۱۹	(۸/۶۲۹, ۱/۲۹۴, ۱/۸۱۲)	(۸/۵۵۹, ۱/۳۰۰, ۱/۸۲۵)	۰/۰۰۵
۲۰	(۱۱/۷۷۲, ۱/۷۶۶, ۲/۴۷۲)	(۱۰/۹۶۸, ۱/۶۴۲, ۲/۲۹۶)	۰/۶۶۴
۲۱	(۷/۵۵۹, ۱/۱۳۴, ۱/۵۸۷)	(۷/۳۹۳, ۱/۱۱۲, ۱/۵۶۵)	۰/۰۲۸
۲۲	(۹/۸۴۴, ۱/۴۷۷, ۲/۰۶۷)	(۱۰/۱۶۸, ۱/۵۱۵, ۲/۱۲۳)	۰/۱۰۷
۲۳	(۵/۷۹۶, ۰/۸۶۹, ۱/۲۱۷)	(۶/۰۷۱, ۰/۸۶۷, ۱/۲۳۵)	۰/۰۷۸
۲۴	(۹/۳۸۰, ۱/۴۰۷, ۱/۹۷۰)	(۹/۸۷۶, ۱/۵۰۸, ۲/۱۱۴)	۰/۲۵۵
۲۵	(۱۱/۲۲۸, ۱/۶۸۴, ۲/۳۵۸)	(۱۱/۴۳۴, ۱/۷۰۳, ۲/۳۸۳)	۰/۰۴۳
۲۶	(۹/۹۹۴, ۱/۴۹۹, ۲/۰۹۹)	(۹/۲۷۴, ۱/۳۸۷, ۱/۹۴۷)	۰/۵۳۲
۲۷	(۹/۷۶۰, ۱/۴۶۴, ۲/۰۵۰)	(۸/۸۷۷, ۱/۳۴۴, ۱/۸۸۹)	۰/۷۹۵
۲۸	(۱۱/۰۸۴, ۱/۶۶۳, ۲/۳۲۸)	(۱۰/۷۲۳, ۱/۶۲۵, ۲/۲۷۳)	۰/۱۳۲
۲۹	(۹/۷۳۴, ۱/۴۶۰, ۲/۰۴۴)	(۱۰/۰۹۸, ۱/۵۴۳, ۲/۱۶۰)	۰/۱۳۹
۳۰	(۹/۷۰۶, ۱/۴۵۶, ۲/۰۳۸)	(۱۱/۴۷۳, ۱/۷۲۴, ۲/۴۰۷)	۳/۱۹۹
۳۱	(۸/۵۸۳, ۱/۲۸۷, ۱/۸۰۲)	(۹/۳۹۷, ۱/۳۹۷, ۱/۹۵۹)	۰/۶۷۸
۳۲	(۸/۳۳۸, ۱/۲۵۱, ۱/۷۵۱)	(۹/۱۳۴, ۱/۳۸۱, ۱/۹۳۸)	۰/۶۵۴
۳۳	(۹/۳۹۶, ۱/۴۰۹, ۱/۹۷۳)	(۱۰/۲۲۷, ۱/۵۰۳, ۲/۱۰۵)	۰/۷۰۴
۳۴	(۱۰/۱۷۹, ۱/۵۲۷, ۲/۱۳۸)	(۹/۶۷۱, ۱/۴۴۰, ۲/۰۱۹)	۰/۲۶۵
۳۵	(۱۰/۹۵۷, ۱/۶۴۳, ۲/۳۰۱)	(۱۰/۷۸۰, ۱/۶۲۹, ۲/۲۸۰)	۰/۰۳۲
۳۶	(۸/۵۰۳, ۱/۲۷۵, ۱/۷۸۶)	(۸/۶۹۰, ۱/۳۰۵, ۱/۸۳۲)	۰/۰۳۶
۳۷	(۱۲/۹۴۱, ۱/۹۴۱, ۲/۷۱۸)	(۱۲/۳۰۸, ۱/۸۴۴, ۲/۵۶۶)	۰/۴۱۵
۳۸	(۱۰/۱۹۹, ۱/۵۳۰, ۲/۱۴۲)	(۱۰/۴۳۵, ۱/۵۷۳, ۲/۲۰۲)	۰/۰۵۷
۳۹	(۸/۵۴۴, ۱/۲۸۲, ۱/۷۹۴)	(۷/۲۰۵, ۱/۱۰۰, ۱/۵۴۲)	۱/۸۳۳
۴۰	(۱۱/۳۳۷, ۱/۷۰۱, ۲/۳۸۱)	(۹/۸۵۰, ۱/۴۸۵, ۲/۰۸۲)	۲/۲۶۶
۴۱	(۱۱/۶۷۶, ۱/۷۵۱, ۲/۴۵۲)	(۱۱/۱۵۶, ۱/۶۶۶, ۲/۳۲۹)	۰/۲۸۰
۴۲	(۸/۹۵۴, ۱/۳۴۳, ۱/۸۸۰)	(۹/۱۲۸, ۱/۳۸۹, ۱/۹۴۸)	۰/۰۳۲
۴۳	(۱۱/۳۸۱, ۱/۷۰۷, ۲/۳۹۰)	(۱۰/۴۱۸, ۱/۵۶۲, ۲/۱۸۶)	۰/۹۵۰
۴۴	(۹/۴۳۷, ۱/۴۱۶, ۱/۹۸۲)	(۹/۹۰۰, ۱/۴۴۵, ۲/۰۲۶)	۰/۲۱۷
۴۵	(۱۰/۵۷۰, ۱/۵۸۶, ۲/۲۲۰)	(۹/۵۸۰, ۱/۴۲۹, ۲/۰۰۳)	۱/۰۰۵
۴۶	(۸/۵۲۳, ۱/۲۷۸, ۱/۷۹۰)	(۸/۷۸۳, ۱/۲۹۲, ۱/۸۱۴)	۰/۰۶۹
۴۷	(۸/۳۰۲, ۱/۲۴۵, ۱/۷۴۳)	(۹/۲۰۵, ۱/۳۷۰, ۱/۹۲۲)	۰/۸۳۶
۴۸	(۷/۲۷۴, ۱/۰۹۱, ۱/۵۲۸)	(۷/۹۵۸, ۱/۱۸۸, ۱/۶۷۶)	۰/۴۸۲
۴۹	(۱۱/۴۱۷, ۱/۷۱۳, ۲/۳۹۸)	(۱۱/۷۱۸, ۱/۷۶۳, ۲/۴۶۷)	۰/۰۹۳
۵۰	(۱۰/۲۲۲, ۱/۵۳۳, ۲/۱۴۷)	(۱۱/۴۱۹, ۱/۶۹۵, ۲/۳۸۱)	۱/۴۷۰
MPE_{cv}			۰/۶۳۴۹

۲.۳.۴ داده‌های سیمان پرتلند

داده‌های سیمان پرتلند در بخش ۱.۳.۳ را در نظر بگیرید. تابع هدف (۲.۴) را برای برآورد ضرایب مدل رگرسیون با ورودی دقیق و ضرایب و خروجی فازی به کار می‌بریم. در شکل ۲.۴ برآورد ضرایب رگرسیونی



شکل ۲.۴: تغییرات مراکز ضرایب با افزایش پارامتر ريج

به ازای مقادیر $\lambda \geq 0.1$ تقریباً به مقداری ثابت می‌گراید. بنابراین $\lambda = 0.1$ را به‌عنوان پارامتر ريج انتخاب می‌کنیم.

جدول ۳.۴: مقادیر مشاهده شده و برآورد شده فازی مثلی برای داده‌های سیمان پرتلند

i	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2	d_3
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۷۹/۰۷۳, ۱۰/۴۱۶, ۱۳/۷۲۵)	۱۹۵۸	۳/۴۲۲	۱۸/۵۵
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۲/۳۳۴, ۱۱/۲۲۳, ۱۱/۵۸۳)	۹/۳۴۰	۱۲/۵۸۴	۵۱/۵۰
۳	(۱۰۴/۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷)	(۱۰۴/۴۸۱, ۱۴/۰۷۰۸, ۱۴/۷۶۲)	۳/۷۶۴	۷/۱۵۹	۴۰/۸۹
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۸۸/۶۹۲, ۱۱/۶۵۳, ۱۴/۹۹۵)	۲۳۷۱	۲/۸۸۴	۱۰/۷۴
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۶/۱۸۳, ۱۳/۵۹۴, ۱۳/۴۹۲)	۰/۹۱۴	۱/۸۲۸	۱۰/۹۶
۶	(۱۰۹/۲, ۱۲/۰۲, ۱۶/۳۸)	(۱۰۵/۰۲۱, ۱۴/۷۰۱, ۱۴/۷۷۹)	۲۳/۸۴۴	۲۷/۶۱۷	۹۶/۶۲
۷	(۱۰۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰۴/۲۸۵, ۱۶/۷۸۴, ۱۱/۸۷۶)	۱/۸۹۱	۲/۶۴۸	۱۵/۲۷
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰۵, ۱۰/۱۵)	(۷۵/۷۵۰, ۱۲/۲۷۲, ۱۱/۵۱۴)	۱۴/۲۳۹	۱۵/۶۶۱	۵۱/۸۶
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۹۰/۹۵۲, ۱۴/۷۲۲, ۱۱/۶۶۹)	۷/۸۵۵	۹/۸۳۶	۳۸/۰۶۱
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۵/۶۱۴, ۱۴/۱۳۷, ۱۸/۲۶۹)	۰/۹۴۷	۱/۹۶۶	۱۲/۲۶۲
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۲/۰۱۴, ۱۳/۴۸۶, ۱۱/۴۲۷)	۰/۴۹۶	۱/۹۶۶	۲/۸۲۲
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۸۹۳, ۱۶/۰۴۵۳, ۱۴/۶۹۲)	۰/۱۷۰	۰/۴۰۵	۱/۰۲۵
۱۳	(۱۰۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰۳۴)	(۱۱۲/۳۴۹, ۱۶/۰۷۶, ۱۴/۰۳۴۷)	۱۳/۳۳۳	۰/۲۰۴	۶۲/۳۲
MPE			۶/۲۴۰	۷/۹۰۶	۳۱/۷۶

پیشگویی خطی فازی به صورت زیر است

$$\hat{Y} = (1/896, 5/858, 10/788)_T + (2/178, 0/098, 0/345)_{Tx_1} + (1/132, 0/122, 0)_{Tx_2} \\ + (0/732, 0/114, 0)_{Tx_3} + (0/467, 0, 0/008)_{Tx_4}$$

به ازای $\lambda = 0/1$ مقدار $MPE = 6/240$ و ضریب تعیین تعمیم یافته مدل برابر با $0/974$ است. به ازای $\lambda = 0/1$ نتایج برآورد مقادیر پاسخ و همچنین شاخص MPE بر اساس فاصله (۸.۱) (d_1) و فاصله (۱۴.۱) (d_2) و فاصله (۱۵.۱) (d_3) در جدول ۳.۴ آمده است.

جدول ۴.۴: مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبار سنجی متقابل برای داده‌های سیمان پرتلند

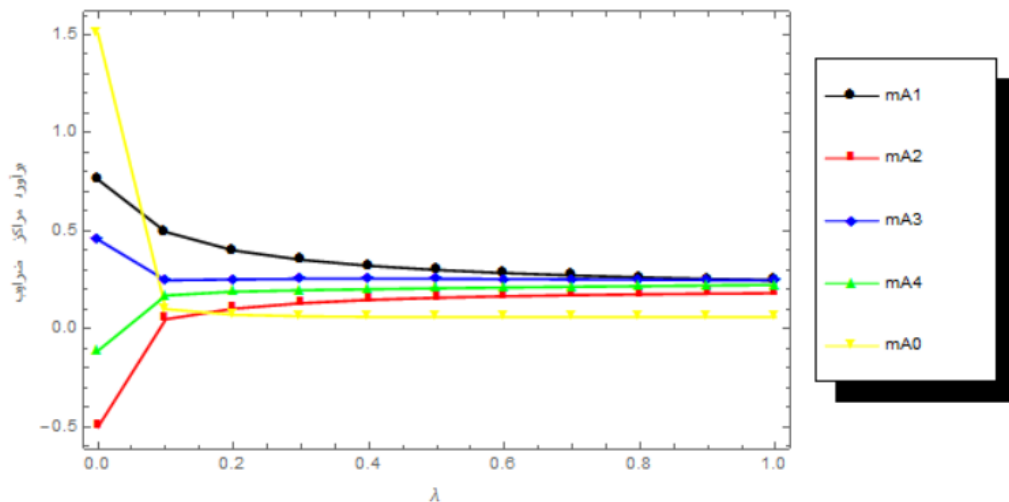
ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d_1
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۸۰/۱۶۱, ۱۲/۸۶۸, ۱۵/۸۸۲)	۲/۷۳۳
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۱/۲۱۶, ۱۱/۹۶۱, ۱۰/۵۴۱)	۱۷/۱۸۲
۳	(۱۰۴/۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷)	(۱۰۸/۸۳۸, ۱۳/۶۹۲, ۱۵/۴۲۹)	۳۶/۰۲۶
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۹۰/۰۰۷, ۱۱/۴۱۲, ۱۴/۸۹۵)	۷/۳۲۵
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۴/۰۹۰, ۱۱/۲۳۳, ۱۳/۵۱۶)	۳/۰۵۰
۶	(۱۰۹/۲, ۱۲/۰۲, ۱۶/۳۸)	(۱۰۴/۴۶۲, ۱۴/۹۴۲, ۱۴/۶۶۲)	۲۹/۶۸۷
۷	(۱۰۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰۳/۹۸۷, ۱۸/۴۶۰, ۱۲/۹۳۵)	۰/۹۲۱
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰۵, ۱۰/۱۵)	(۷۸/۵۳۵, ۱۲/۳۶۹, ۱۱/۸۶۳)	۴۱/۱۵۶
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۸۹/۸۲۹, ۱۴/۰۷۹, ۱۱/۴۹۵)	۱۳/۸۶۶
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۴/۶۴۴, ۱۸/۹۲۶, ۱۳/۵۷۳)	۷/۶۹۶
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۱/۰۰۴, ۱۱/۹۶۵, ۱۲/۴۲۶)	۰/۵۷۵
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۱۶۲, ۱۵/۹۳۱, ۱۵/۰۳۴)	۰/۶۵۰
۱۳	(۱۰۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰۳۴)	(۱۱۳/۲۴۳, ۱۵/۳۴۵, ۱۴/۸۹۹)	۲۲/۶۴۲
MPE_{cv}			۱۳/۹۷۴

۳.۳.۴ داده‌های تولید ناخالص ملی

داده‌های تولید ناخالص ملی در بخش ۲.۳.۳ را در نظر بگیرید. تابع هدف (۲.۴) را برای برآورد ضرایب مدل رگرسیون با ورودی دقیق و ضرایب و خروجی فازی به کار می‌بریم. با توجه به شکل ۳.۴ پارامتر $\lambda = 0/1$ را انتخاب می‌کنیم زیرا به ازای $\lambda \geq 0/1$ برآورد ضرایب به مقدار ثابتی نزدیک می‌شود. بنابراین مدل رگرسیونی به صورت زیر برآورد می‌شود

$$\hat{Y} = (0/010, 0, 0)_T + (0/494, 0, 0/265)_{Tx_1} + (0/0482, 0/120, 0)_{Tx_2} \\ + (0/2471, 0, 0)_{Tx_3} + (0/1697, 0/010, 0/020)_{Tx_4}$$

به ازای $\lambda = 0/1$ مقدار $MPE = 0/00192$ و ضریب تعیین تعمیم یافته مدل برابر با $0/9292$ است.



شکل ۳.۴: تغییرات مراکز ضرایب با افزایش پارامتر ریج

جدول ۵.۴: مقادیر مشاهده شده فازی و برآورد شده فازی برای داده‌های تولید ناخالص ملی

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2	d_3
۱	(۲/۳, ۰/۲۵۳, ۰/۵۲۹)	(۲/۲۴۲, ۰/۳۰۵, ۰/۵۸۲)	۰/۰۰۳۷۳	۰/۰۰۴۱۸	۰/۰۱۵۳
۲	(۲/۲, ۰/۲۶۴, ۰/۶۶)	(۲/۲۳۴, ۰/۳۰۶, ۰/۵۵۷)	۰/۰۰۰۵۵	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۰۵۸
۳	(۲/۲, ۰/۴۱۸, ۰/۴۶۲)	(۲/۲۳۵, ۰/۳۲۸, ۰/۵۵۳)	۰/۰۰۴۷۵	۰/۰۰۷۱۹	۰/۰۳۳۰
۴	(۲/۳, ۰/۳۴۵, ۰/۶۲۱)	(۲/۲۹۳, ۰/۳۳۰, ۰/۵۵۷)	۰/۰۰۰۴۸	۰/۰۰۰۸۸	۰/۰۰۴۹
۵	(۲/۴, ۰/۳۸۴, ۰/۶۴۸)	(۲/۴۲۲, ۰/۳۴۲, ۰/۶۱۰)	۰/۰۰۰۸۵	۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۰۴۸
۶	(۲/۵, ۰/۲۷۵, ۰/۶۲۵)	(۲/۴۸۴, ۰/۳۵۳, ۰/۶۳۵)	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۰۱۸۱	۰/۰۰۹۱
۷	(۲/۶, ۰/۳۱۲, ۰/۵۴۶)	(۲/۵۵۰, ۰/۳۵۴, ۰/۶۳۷)	۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۰۲۹۱	۰/۰۱۲۵
۸	(۲/۶, ۰/۴۶۸, ۰/۶۲۴)	(۲/۶۳۵, ۰/۶۵۸, ۰/۹۲۲)	۰/۰۰۲۴۷	۰/۰۰۶۲۰	۰/۰۲۸۴
۹	(۲/۷, ۰/۴۳۲, ۰/۷۰۲)	(۲/۶۹۱, ۰/۳۷۷, ۰/۶۸۸)	۰/۰۰۴۱۲	۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۰۲۶
۱۰	(۲/۷, ۰/۲۷, ۰/۷۵۶)	(۲/۷۰۸, ۰/۳۶۶, ۰/۶۹۰)	۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۰۱۹۷	۰/۰۱۲۴
MPE			۰/۰۰۱۹۲	۰/۰۰۲۷۴	۰/۰۱۲۹

نتایج برآورد مقادیر پاسخ و همچنین شاخص MPE بر اساس فاصله (۸.۱) (d_1) و فاصله (۱۴.۱) (d_2) و فاصله (۱۵.۱) (d_3) در جدول ۵.۴ آمده است. مقدار MPE از فاصله d_1 کمتر از d_2 , d_3 است بنابراین فاصله d_1 چون خطای مدل را کمتر می‌کند بهتر است. یکی از شاخص‌های نیکویی برازش که در فصل دوم بیان شد، نیکویی برازش مدل است که نتایج حاصل از این روش در جدول ۶.۴ آمده است.

جدول ۶.۴: مقادیر برآورد شده فازی با روش اعتبارسنجی متقابل برای داده‌های تولید ناخالص ملی

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d_1
۱	(۲/۳, ۰/۲۵۳, ۰/۵۲۹)	(۲/۲۴۴, ۰/۳۰۰, ۰/۵۷۸)	۰/۰۰۳۴۵
۲	(۲/۲, ۰/۲۶۴, ۰/۶۶)	(۲/۲۳۵, ۰/۳۰۶, ۰/۵۶۱)	۰/۰۰۰۵۵
۳	(۲/۲, ۰/۴۱۸, ۰/۴۶۲)	(۲/۲۴۳, ۰/۳۲۹, ۰/۵۵۲)	۰/۰۰۵۷۶
۴	(۲/۳, ۰/۳۴۵, ۰/۶۲۱)	(۲/۲۹۸, ۰/۳۳۵, ۰/۵۶۱)	۰/۰۰۳۲
۵	(۲/۴, ۰/۳۸۴, ۰/۶۴۸)	(۲/۴۲۴, ۰/۳۵۰, ۰/۶۰۴)	۰/۰۰۰۷۸
۶	(۲/۵, ۰/۲۷۵, ۰/۶۲۵)	(۲/۴۸۶, ۰/۳۶۴, ۰/۶۲۱)	۰/۰۰۱۲۸
۷	(۲/۶, ۰/۳۱۲, ۰/۵۴۶)	(۲/۵۴۶, ۰/۳۷۸, ۰/۶۲۵)	۰/۰۰۳۵۱
۸	(۲/۶, ۰/۴۶۸, ۰/۶۲۴)	(۲/۶۲۷, ۰/۳۷۸, ۰/۶۵۶)	۰/۰۰۲۶۷
۹	(۲/۷, ۰/۴۳۲, ۰/۷۰۲)	(۲/۶۸۶, ۰/۴۰۷, ۰/۶۶۳)	۰/۰۰۰۴۰
۱۰	(۲/۷, ۰/۲۷, ۰/۷۵۶)	(۲/۶۹۳, ۰/۳۹۹, ۰/۶۶۸)	۰/۰۰۲۵۰
MPE_{cv}			۰/۰۰۲۱۲

۴.۳.۴ مقایسه سه مدل رگرسیون ريج فازی

در این بخش مدل‌های رگرسیون ريج فازی برای ورودی دقیق و خروجی فازی را که در فصل سوم (مدل یک پارامتری و مدل دوپارامتری) و فصل چهارم بیان کردیم را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم

داده‌های شبیه سازی شده

جدول ۷.۴ مدل‌های رگرسیون را نشان می‌دهد. مدل ۱ مدل حاصل از روش رگرسیون ريج فازی یک پارامتری که در بخش ۲.۳ شرح داده شد، مدل ۲ مدل رگرسیون ريج فازی دو پارامتری که در بخش ۴.۳ مورد بررسی قرار گرفت و مدل ۳، مدل مربوط به فصل چهارم است. جدول ۸.۴ شاخص‌های ارزیابی مدل‌ها را نشان می‌دهد که در آن d_1 ، d_2 و d_3 به ترتیب فاصله رابطه‌های (۸.۱)، (۱۴.۱) و (۱۵.۱) است.

جدول ۷.۴: مدل‌های رگرسیون برای داده‌های شبیه سازی شده

مدل	معادله رگرسیون ريج فازی
مدل ۱	$\hat{Y} = (0.553, 0.32, 0.46)_T + (2.163, 0.257, 0.360)_T x_1 + (-0.874, 0, 0)_T x_2 + (0.366, 0, 0)_T x_3$
مدل ۲	$\hat{Y} = (0.590, 0.089, 0)_T + (1.928, 0, 0.369)_T x_1 + (-0.661, 0.244, 0)_T x_2 + (0.381, 0.002, 0)_T x_3$
مدل ۳	$\hat{Y} = (0.407, 0, 0.100)_T + (1.621, 0, 0.351)_T x_1 + (-0.262, 0.262, 0)_T x_2 + (0.321, 0, 0)_T x_3$

با توجه به جدول ۸.۴ از بین سه مدل پیشنهادی با توجه به شاخص MPE مدل ۱ برای این داده‌ها

جدول ۸.۴: آريزايي مدل هاي رگرسيوني براي داده هاي شبیه سازي شده

ردیف	MPE			MPE_{cv}	R_G^2
	d_1	d_2	d_3	d_1	d_1
مدل ۱	۰/۵۴۲۵	۰/۵۵۰۷	۱/۶۸۵۸	۰/۶۴۲۸	۰/۸۱۴
مدل ۲	۰/۵۴۳۵	۰/۵۵۱۸	۱/۶۸۹۰	۰/۶۳۱۴	۰/۸۰۷
مدل ۳	۰/۵۵۰	۰/۵۵۸۰	۱/۷۰۸	۰/۶۳۴۹	۰/۸۱۶

مدل بهتری است زیرا MPE آن کمتر است و از بین سه فاصله مورد بررسی فاصله d_1 همان فاصله وزن دار شده بهتر است زیرا MPE کمتری نسبت به دو فاصله دیگر می دهد.

داده های سیمان پرتلند

جدول ۹.۴ مدل های رگرسیون را نشان می دهد. مدل ۱ مدل حاصل از روش رگرسیون ريج فازي یک پارامتری که در بخش ۲.۳ شرح داده شد، مدل ۲ مدل رگرسیون ريج فازي دو پارامتری که در بخش ۴.۳ مورد بررسی قرار گرفت و مدل ۳، مدل مربوط به فصل چهارم است. جدول ۱۰.۴ شاخص های آريزايي مدل ها را نشان می دهد که در آن d_1 ، d_2 و d_3 به ترتیب فاصله رابطه های (۸.۱)، (۱۴.۱) و (۱۵.۱) است.

جدول ۹.۴: مدل های رگرسیون برای داده های سیمان پرتلند

مدل	معادله رگرسیون ريج فازي
مدل ۱	$\hat{Y} = (32/454, 5/795, 10/762)_T + (1/859, 0/101, 0/346)_{Tx_1} + (0/819, 0/122, 0)_{Tx_2} + (0/406, 0/117, 0/0006)_{Tx_3} + (0/159, 0, 0/0009)_{Tx_4}$
مدل ۲	$\hat{Y} = (56/209, 6/296, 10/272)_T + (1/604, 0/075, 0/371)_{Tx_1} + (0/573, 0/122, 0)_{Tx_2} + (0/147, 0/093, 0/022)_{Tx_3} + (0/081, 0, 0/010)_{Tx_4}$
مدل ۳	$\hat{Y} = (1/896, 5/858, 10/788)_T + (2/178, 0/098, 0/345)_{Tx_1} + (1/132, 0/122, 0)_{Tx_2} + (0/732, 0/114, 0)_{Tx_3} + (0/467, 0, 0/0008)_{Tx_4}$

جدول ۱۰.۴: آريزايي مدل هاي رگرسيوني براي داده هاي سیمان پرتلند

ردیف	MPE			MPE_{cv}	R_G^2
	d_1	d_2	d_3	d_1	d_1
مدل ۱	۵/۹۶۰	۷/۶۱۵	۳۰/۷۱۷	۱۴/۵۳۴	۰/۹۷۳
مدل ۲	۵/۸۷۹	۷/۵۲۶	۳۰/۳۸۷	۱۴/۳۹۷	۰/۹۶۵
مدل ۳	۶/۲۴۰	۷/۹۰۶	۳۱/۷۶	۱۳/۹۷۴	۰/۹۷۴

با توجه به جدول ۱۰.۴ از بین سه مدل پیشنهادی مدل ۲ مدل بهتری برای این داده ها است زیرا MPE آن کمتر است و از بین سه فاصله مورد بررسی فاصله d_1 همان فاصله وزن دار شده، فاصله مناسبتری است زیرا باعث خطای کمتری نسبت به دو فاصله دیگر می شود.

داده‌های تولید ناخالص ملی

جدول ۱۱.۴ مدل‌های رگرسیون را نشان می‌دهد. مدل ۱ مدل حاصل از روش رگرسیون ریبج فازی یک پارامتری که در بخش ۲.۳ شرح داده شد، مدل ۲ مدل رگرسیون ریبج فازی دو پارامتری که در بخش ۴.۳ مورد بررسی قرار گرفت و مدل ۳، مدل مربوط به فصل چهارم است. جدول ۱۲.۴ شاخص‌های ارزیابی مدل‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱۱.۴: مدل‌های رگرسیون برای داده‌های تولید ناخالص ملی

مدل	معادله رگرسیون ریبج فازی
مدل ۱	$\hat{Y} = (0.72, 0, 0)_T + (0.689, 0, 0.019)_T x_1 + (-0.186, 0.121, 0)_T x_2 + (0.294, 0, 0.129)_T x_3 + (0.026, 0.010, 0.072)_T x_4$
مدل ۲	$\hat{Y} = (0.23, 0, 0.016)_T + (0.709, 0, 0.020)_T x_1 + (0.13, 0.122, 0)_T x_2 + (0.154, 0, 0.127)_T x_3 + (0.155, 0.009, 0.068)_T x_4$
مدل ۳	$\hat{Y} = (0.10, 0, 0)_T + (0.494, 0, 0.265)_T x_1 + (0.482, 0.120, 0)_T x_2 + (0.2471, 0, 0)_T x_3 + (0.1697, 0.010, 0.020)_T x_4$

جدول ۱۲.۴: ارزیابی مدل‌های رگرسیونی برای داده‌های تولید ناخالص ملی

ردیف	MPE			MPE_{cv}	R_G^Y
	d_1	d_2	d_3	d_1	d_1
مدل ۱	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۶۵	۰/۹۶۴
مدل ۲	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۲۴	۰/۰۱۱۴	۰/۰۰۵۲	۰/۹۸۴
مدل ۳	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۲۷	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۲۱	۰/۹۲۹

در مثال بالا با توجه به شاخص MPE مدل ۱ نسبت به دو مدل دیگر عملکرد بهتری دارد و از بین فاصله‌های بررسی شده فاصله d_1 فاصله مناسب‌تری است زیرا با این فاصله مقدار MPE کمتر می‌شود.

فصل ۵

مدل رگرسیون ریج فازی بر پایه فاصله‌ی حسن‌پور و همکاران

در این فصل با توجه به مدل رگرسیون فازی پیشنهاد شده توسط حسن‌پور و همکاران [۳۰]، یک مدل رگرسیون ریج فازی جدید برای ورودی و خروجی فازی پیشنهاد داده‌ایم. همچنین برای تشخیص هم‌خطی میان متغیرهای ورودی فازی، عامل تورم واریانس تعمیم یافته را معرفی کرده‌ایم. سپس با ارائه یک مثال شبیه‌سازی و عددی روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم.

۱.۵ مقدمه

حسن‌پور و همکاران [۳۰] با استفاده از متر دیاموند^۱ [۲۲]، مدل رگرسیون فازی با ورودی و خروجی فازی را برآورد کرده‌اند. آن‌ها با روش برنامه‌ریزی آرمانی^۲ سعی کردند تا حدامکان برآوردها به مقدار واقعی نزدیک باشد و با مقایسه خطای روش خود با خطای روش‌های دیاموند [۲۲] و چیو^۳ [۳۶] و [۳۷] و عرب‌پور و تاتا [۱۳]، برتری روش خود را نشان دادند. ربیعی و همکاران [۴] با استفاده از روش رگرسیون فازی وزن‌دار شده [۱۴] یک مدل رگرسیون ریج فازی برای مجموعه‌ای از داده‌ها با ورودی و خروجی فازی پیشنهاد کردند.

^۱Diamond

^۲Goal programming

^۳Chyu

۲.۵ مدل رگرسیون فازی حسن‌پور

مدل رگرسیون زیر را با ورودی و خروجی فازی در نظر بگیرید:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{i1} + \dots + \alpha_p X_{ip} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

برای برآورد مدل (۱.۵) با حاصلضرب عددی فازی در عددی حقیقی مواجه ایم که این حاصل ضرب با توجه به قضیه (۴.۱) وابسته به علامت مقادیر اسکالر است. این پارامترها مجهولند و باید برآورد شوند، اما اطلاعاتی درباره‌ی مثبت و منفی بودن این پارامترها نداریم که بسته به مثبت و منفی بودن این پارامترها نتیجه این حاصلضرب متفاوت است. بنابراین ابتدا با استفاده از ملاحظه ۱.۵ این پارامترها را تبدیل به پارامترهایی مثبت و یا منفی می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۵. به ازای $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم

$$\alpha = \alpha^+ - \alpha^- , \quad \alpha^+, \alpha^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

با توجه به ملاحظه ۱.۵ مدل رگرسیون (۱.۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Y_i = \alpha_0 + (\alpha_1^+ - \alpha_1^-)X_{i1} + \dots + (\alpha_p^+ - \alpha_p^-)X_{ip} \quad (2.5)$$

که در آن به ازای $j = 1, 2, \dots, p$ ، $\alpha_j^+, \alpha_j^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ است.

لم ۱.۵. مدل (۲.۵) را در نظر بگیرید. به ازای $X_{ij} = (m_{X_{ij}}, l_{X_{ij}}, r_{X_{ij}})_T \in T(\mathbb{R})$ که در آن $\alpha_j^+, \alpha_j^- \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ و $j = 1, \dots, p$ و $i = 1, \dots, n$ داریم

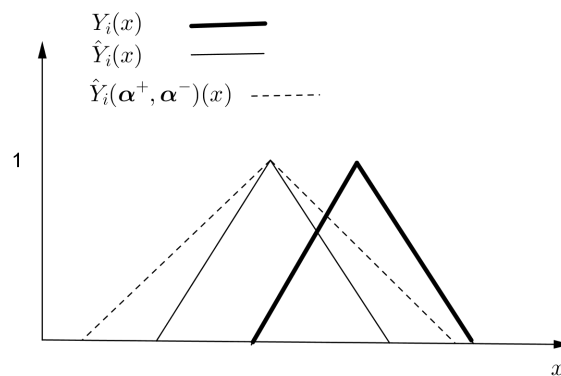
$$\hat{Y}_i \subseteq \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ - \alpha_j^-) m_{X_{ij}}, \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ l_{X_{ij}} + \alpha_j^- r_{X_{ij}}), \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ r_{X_{ij}} + \alpha_j^- l_{X_{ij}}) \right)_T \quad (3.5)$$

برهان. با استفاده از قضیه‌های ۴.۱ و ۷.۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{ij} \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ - \alpha_j^-) X_{ij} \\ &\subseteq \alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ X_{ij} - \alpha_j^- X_{ij}) \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ (m_{X_{ij}}, l_{X_{ij}}, r_{X_{ij}}) - \alpha_j^- (m_{X_{ij}}, l_{X_{ij}}, r_{X_{ij}})) \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p ((\alpha_j^+ m_{X_{ij}}, \alpha_j^+ l_{X_{ij}}, \alpha_j^+ r_{X_{ij}}) + (-\alpha_j^- m_{X_{ij}}, \alpha_j^- r_{X_{ij}}, \alpha_j^- l_{X_{ij}})) \\ &= \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ - \alpha_j^-) m_{X_{ij}}, \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ l_{X_{ij}} + \alpha_j^- r_{X_{ij}}), \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ r_{X_{ij}} + \alpha_j^- l_{X_{ij}}) \right) \end{aligned}$$

□

طرف راست معادله (۳.۵) را با $\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$ نشان می‌دهیم. به ازای انتخاب هر α^+ و α^- با یک بیش برآورد برای $\hat{Y}_i$ روبرو هستیم. شکل ۱.۵ نمایشی از $\hat{Y}_i$ ، Y_i و $\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$ است. با توجه به شکل ۱.۵، $\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$ مقدار Y_i را کمی بیشتر از $\hat{Y}_i$ برآورد می‌کند از آنجایی که دسترسی به مقدار واقعی $\hat{Y}_i$ مقدور نیست به ناچار سعی می‌کنیم تابع هدف را بر مبنای $\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$ تعریف کنیم.



شکل ۱.۵: تابع عضویت مقادیر مشاهده شده (Y_i)، برآورد شده ($\hat{Y}_i$) و تقریب ($\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$)

تابع زیر را با روش‌های عددی به کمک نرم افزار ممتیکا نسخه دهم مینیمم می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^n d(\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-), Y_i) \quad (۴.۵)$$

که در آن $\alpha^+, \alpha^- \geq 0$ (یعنی $\alpha_j^+, \alpha_j^- \geq 0$ ، $j = 1, \dots, p$) در تابع هدف فوق از فاصله تعریف شده در رابطه (۱۶.۱)، استفاده می‌کنیم تا حد امکان مقدار $\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$ به مقدار واقعی $\hat{Y}_i$ نزدیک شود و خطا کاهش یابد. بنابراین داریم

$$\sum_{i=1}^n d(\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-), Y_i) \quad (۵.۵)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n (|m_{Y_i} - m_{\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)}| + |l_{Y_i} - l_{\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)}| + |r_{Y_i} - r_{\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)}|) \\ &= \sum_{i=1}^n (|m_{Y_i} - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ - \alpha_j^-) m_{X_{ij}})| \\ &\quad + |l_{Y_i} - \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ l_{X_{ij}} + \alpha_j^- r_{X_{ij}})| + |r_{Y_i} - \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ r_{X_{ij}} + \alpha_j^- l_{X_{ij}})|) \end{aligned}$$

عامل تورم واریانس تعمیم یافته

برای شناسایی هم‌خطی در بین متغیرهای ورودی فازی، دیگر شاخص VIF که از رابطه (۲۲.۱) بدست می‌آید کارا نیست به همین دلیل از شاخص VIF_G که از رابطه زیر بدست می‌آید استفاده می‌کنیم

$$VIF_{G_j} = \frac{1}{1 - R_{G_j}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (۶.۵)$$

که در آن $R_{G_j}^2$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$R_{G_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d^2(\hat{X}_{ij}, \bar{X}_j)}{\sum_{i=1}^n d^2(X_{ij}, \bar{X}_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (۷.۵)$$

$R_{G_j}^2$ ضریب تعیین تعمیم یافته مدلی است که در آن متغیر پیش‌بین فازی X_j ، $j = 1, \dots, p$ روی سایر متغیرهای پیش‌بین برازش شده است. اگر $X_{ij} = (m_{X_{ij}}, l_{X_{ij}}, r_{X_{ij}})_T$ به‌ازای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, p$ یک عدد فازی مثلثی باشد آنگاه $\bar{X}_j$ از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\bar{X}_j = \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_{X_{ij}}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n l_{X_{ij}}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n r_{X_{ij}}}{n} \right)$$

۳.۵ مدل رگرسیون ریج فازی پیشنهادی

اگر متغیرهای ورودی فازی باشند با توجه به توضیحاتی که در بخش ۲.۵ شرح داده شد، امکان دسترسی به $\hat{Y}$ واقعی مقدور نیست و از $\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)$ به جای $\hat{Y}$ واقعی در تابع هدف استفاده می‌کنیم. حال اگر متغیرهای ورودی دارای مشکل هم‌خطی باشند با استفاده از رابطه (۵.۵)، تابع هدف رگرسیون ریج فازی را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n d(Y_i, \hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)) + \lambda \sum_{j=0}^p \alpha_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (|m_{Y_i} - m_{\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)}| + |l_{Y_i} - l_{\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)}| + |r_{Y_i} - r_{\hat{Y}_i(\alpha^+, \alpha^-)}|) + \lambda \sum_{j=0}^p \alpha_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (|m_{Y_i} - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ - \alpha_j^-) m_{X_{ij}})| + |l_{Y_i} - \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ l_{X_{ij}} + \alpha_j^- r_{X_{ij}})| \\ & \quad + |r_{Y_i} - \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ r_{X_{ij}} + \alpha_j^- l_{X_{ij}})|) + \lambda \sum_{j=0}^p \alpha_j^2 \end{aligned} \quad (۸.۵)$$

۱.۳.۵ مثال شبیه‌سازی شده

مثال شبیه‌سازی شده در بخش ۱.۲.۳ را در نظر بگیرید. پس از تولید داده‌ها، چون داده‌ها دقیق هستند با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهناهای راست و چپ متناسب با x_1, x_2, x_3 و y فازی

سازی شده‌اند (جدول ۲.۵). برای این داده‌ها VIF_G فازي را طبق فرمول (۶.۵) محاسبه کرده و نتایج زیر به‌دست آمده است

$$VIF_{G_1} = 22/0.96, \quad VIF_{G_2} = 1/0.274, \quad VIF_{G_3} = 1/0.439$$

با توجه به مقدار $VIF_1 = 22/0.96$ ، وجود هم‌خطی در داده‌ها نمایان است. با توجه به جدول ۱.۵ به ازای $\lambda = 0.1$ با توجه به رابطه (۱۸.۲) شاخص MPE_1 و MPE_2 به‌ترتیب از فاصله‌های رابطه (۱۴.۱) و (۸.۱) محاسبه شده است) کمترین مقدار خود را می‌گیرد، بنابراین $\lambda = 0.1$ را به عنوان پارامتر ريج انتخاب می‌کنیم. ضريب تعيين تعميم يافته مدل به ازای $\lambda = 0.1$ برابر با ۰/۷۸۸۹ بدست می‌آید. برآورد مدل رگرسیون ريج فازي با استفاده از فرمول (۸.۵)، به ازای $\lambda = 0.1$ به‌صورت زیر است

$$\hat{Y} = 1.721X_1 + 0.019X_2 + 8.2 \times 10^{-10}X_3$$

جدول ۱.۵: دو معيار نيكويي برازش برای داده‌های شبیه سازی شده

λ	MPE_1	MPE_2
۰	۰/۵۷۲۰	۰/۵۶۳۴
۰/۲	۰/۵۷۱۷	۰/۵۶۳۱
۰/۵	۰/۵۷۳۱	۰/۵۶۴۶
۱	۰/۵۹۴۳	۰/۵۸۵۴
۱/۵	۰/۵۹۹۹	۰/۵۹۱۰
۲	۰/۶۰۲۳	۰/۵۹۳۳
۵	۰/۶۱۴۱	۰/۶۰۴۹

همچنین نتایج مقادير برآورد شده از مدل رگرسيونی و خطای بدست آمده با استفاده از رابطه‌های (۱۴.۱) (d_2) و (۸.۱) (d_1) در جدول ۳.۵ آمده است. با توجه به رابطه (۲۱.۲) شاخص $MPE_{cv} = 0.5939$ بدست می‌آید.

جدول ۲.۵: داده‌های شبیه سازی شده

ردیف	X_1	X_2	X_3	Y
۱	(۵۳۰۳, ۰/۷۹۵, ۱/۱۱۴)	(۵۲۸۷, ۰/۷۹۳, ۱/۱۱۰)	(۵۳۵۸, ۰/۸۰۴, ۱/۱۲۵)	(۸۸۰۴, ۱/۳۲۱, ۱/۸۴۹)
۲	(۳۴۳۵, ۰/۵۱۵, ۰/۷۲۱)	(۳۶۵۵, ۰/۵۴۸, ۰/۷۶۸)	(۳۳۰۷, ۰/۴۹۶, ۰/۶۹۴)	(۴۴۴۳, ۰/۶۶۶, ۰/۹۳۳)
۳	(۴۸۸۳, ۰/۷۳۲, ۱/۰۲۵)	(۵۱۵۲, ۰/۷۷۳, ۱/۰۸۲)	(۴۸۰۵, ۰/۷۲۱, ۱/۰۰۹)	(۸۶۸۱, ۱/۳۰۲, ۱/۸۲۳)
۴	(۵۳۶۶, ۰/۸۰۵, ۱/۱۲۷)	(۵۳۹۱, ۰/۸۰۹, ۱/۱۳۲)	(۵۳۵۶, ۰/۸۰۳, ۱/۱۲۵)	(۱۰۶۱۱, ۱/۵۹۲, ۲/۲۲۸)
۵	(۶۸۴۷, ۱/۰۲۷, ۱/۴۳۸)	(۶۷۱۳, ۱/۰۰۷, ۱/۴۱۰)	(۶۹۵۶, ۱/۰۴۳, ۱/۴۶۱)	(۱۲۳۴۶, ۱/۸۵۲, ۲/۵۹۳)
۶	(۵۲۴۵, ۰/۷۸۷, ۱/۱۰۱)	(۵۳۴۷, ۰/۸۰۲, ۱/۱۲۳)	(۵۲۸۶, ۰/۷۹۳, ۱/۱۱۰)	(۹۱۶۷, ۱/۳۷۵, ۱/۹۲۵)
۷	(۴۸۵۱, ۰/۷۲۸, ۱/۰۱۹)	(۴۸۴۷, ۰/۷۲۷, ۱/۰۱۸)	(۴۹۴۳, ۰/۷۴۱, ۱/۰۳۸)	(۹۷۸۶, ۱/۴۶۸, ۲/۰۵۵)
۸	(۵۲۵۳, ۰/۷۸۸, ۱/۱۰۳)	(۵۵۰۳, ۰/۸۲۵, ۱/۱۵۶)	(۵۴۴۹, ۰/۸۱۷, ۱/۱۴۴)	(۸۹۹۹, ۱/۳۵۰, ۱/۸۹۰)
۹	(۶۱۷۹, ۰/۹۲۷, ۱/۲۹۸)	(۶۳۸۴, ۰/۹۵۸, ۱/۳۴۱)	(۶۴۱۱, ۰/۹۶۲, ۱/۳۴۶)	(۱۰۰۵۳, ۱/۵۰۸, ۲/۱۱۱)
۱۰	(۸۱۷۲, ۱/۲۲۶, ۱/۷۱۶)	(۸۲۰۱, ۱/۲۳۰, ۱/۷۲۲)	(۸۵۶۷, ۱/۲۸۵, ۱/۷۹۹)	(۱۳۹۴۶, ۲/۰۹۲, ۲/۹۲۹)
۱۱	(۴۷۲۴, ۰/۷۰۹, ۰/۹۹۲)	(۴۷۰۴, ۰/۷۰۶, ۰/۹۸۸)	(۴۶۵۴, ۰/۶۹۸, ۰/۹۷۷)	(۸۷۷۰, ۱/۳۱۵, ۱/۸۴۲)
۱۲	(۵۰۷۴, ۰/۷۶۱, ۱/۰۶۶)	(۴۸۹۴, ۰/۷۳۴, ۱/۰۲۸)	(۴۷۶۷, ۰/۷۱۵, ۱/۰۰۱)	(۸۴۷۶, ۱/۲۷۱, ۱/۷۸۰)
۱۳	(۵۱۷۱, ۰/۷۷۶, ۱/۰۸۶)	(۵۲۵۱, ۰/۷۸۸, ۱/۱۰۳)	(۵۲۴۹, ۰/۷۸۷, ۱/۱۰۲)	(۱۰۵۶۱, ۱/۵۸۴, ۲/۲۱۸)
۱۴	(۴۵۷۲, ۰/۶۸۶, ۰/۹۶۰)	(۴۵۶۸, ۰/۶۸۵, ۰/۹۵۹)	(۴۴۲۸, ۰/۶۶۴, ۰/۹۳۰)	(۷۴۷۳, ۱/۱۲۱, ۱/۵۶۹)
۱۵	(۵۳۹۳, ۰/۸۰۹, ۱/۱۳۲)	(۵۳۱۸, ۰/۷۹۸, ۱/۱۱۷)	(۵۶۱۴, ۰/۸۴۲, ۱/۱۷۹)	(۸۵۶۳, ۱/۲۸۵, ۱/۷۹۸)
۱۶	(۶۱۲۵, ۰/۹۱۹, ۱/۲۸۶)	(۵۹۲۴, ۰/۸۸۹, ۱/۲۴۴)	(۶۰۹۴, ۰/۹۱۴, ۱/۲۸۰)	(۱۱۲۳۴, ۱/۶۸۵, ۲/۳۵۹)
۱۷	(۵۵۱۲, ۰/۸۲۷, ۱/۱۵۸)	(۵۳۶۷, ۰/۸۰۵, ۱/۱۲۷)	(۵۴۹۴, ۰/۸۲۴, ۱/۱۵۴)	(۹۸۵۶, ۱/۴۷۸, ۲/۰۷۰)
۱۸	(۴۱۳۲, ۰/۶۲۰, ۰/۸۶۸)	(۴۱۵۴, ۰/۶۲۳, ۰/۸۷۲)	(۳۹۷۰, ۰/۵۹۶, ۰/۸۳۴)	(۷۸۴۲, ۱/۱۷۶, ۱/۶۴۷)
۱۹	(۴۹۳۰, ۰/۷۳۹, ۱/۰۳۵)	(۵۱۶۵, ۰/۷۷۵, ۱/۰۸۵)	(۵۰۴۴, ۰/۷۵۷, ۱/۰۵۹)	(۸۶۲۹, ۱/۲۹۴, ۱/۸۱۲)
۲۰	(۶۲۶۴, ۰/۹۴۰, ۱/۳۱۵)	(۶۲۰۴, ۰/۹۳۱, ۱/۳۰۳)	(۶۳۲۷, ۰/۹۴۹, ۱/۳۲۹)	(۱۱۷۷۲, ۱/۷۶۶, ۲/۴۷۲)
۲۱	(۴۲۰۹, ۰/۶۳۱, ۰/۸۸۴)	(۴۲۸۰, ۰/۶۴۲, ۰/۸۹۹)	(۴۰۵۴, ۰/۶۰۸, ۰/۸۵۱)	(۷۵۵۹, ۱/۱۳۴, ۱/۵۸۷)
۲۲	(۵۷۵۶, ۰/۸۶۳, ۱/۲۰۹)	(۵۵۸۲, ۰/۸۳۷, ۱/۱۷۲)	(۵۴۷۰, ۰/۸۲۰, ۱/۱۴۹)	(۹۸۴۴, ۱/۴۷۷, ۲/۰۶۷)
۲۳	(۳۲۷۱, ۰/۴۹۱, ۰/۶۸۷)	(۲۹۷۶, ۰/۴۴۶, ۰/۶۲۵)	(۲۷۵۱, ۰/۴۱۳, ۰/۵۷۸)	(۵۷۹۶, ۰/۸۶۹, ۱/۲۱۷)
۲۴	(۵۷۲۶, ۰/۸۵۹, ۱/۲۰۲)	(۶۰۶۹, ۰/۹۱۰, ۱/۲۷۵)	(۵۸۵۶, ۰/۸۷۸, ۱/۲۳۰)	(۹۳۸۰, ۱/۴۰۷, ۱/۹۷۰)
۲۵	(۶۴۸۳, ۰/۹۷۲, ۱/۳۶۱)	(۶۳۴۰, ۰/۹۵۱, ۱/۳۳۱)	(۶۵۳۱, ۰/۹۸۰, ۱/۳۷۲)	(۱۱۲۲۸, ۱/۶۸۴, ۲/۳۵۸)
۲۶	(۵۲۷۸, ۰/۷۹۲, ۱/۱۰۸)	(۵۰۷۹, ۰/۷۶۲, ۱/۰۶۷)	(۴۹۷۴, ۰/۷۴۶, ۱/۰۴۵)	(۹۹۹۴, ۱/۴۹۹, ۲/۰۹۹)
۲۷	(۵۱۱۶, ۰/۷۶۷, ۱/۰۷۴)	(۵۱۳۰, ۰/۷۷۰, ۱/۰۷۷)	(۴۹۲۳, ۰/۷۳۸, ۱/۰۳۴)	(۹۷۶۰, ۱/۴۶۴, ۲/۰۵۰)
۲۸	(۶۱۸۶, ۰/۹۲۸, ۱/۲۹۹)	(۶۳۴۹, ۰/۹۵۲, ۱/۳۳۳)	(۶۴۰۱, ۰/۹۶۰, ۱/۳۴۴)	(۱۱۰۸۴, ۱/۶۶۳, ۲/۳۲۸)
۲۹	(۵۸۵۷, ۰/۸۷۹, ۱/۲۳۰)	(۶۲۳۴, ۰/۹۳۵, ۱/۳۰۹)	(۶۱۴۹, ۰/۹۲۲, ۱/۲۹۱)	(۹۷۳۴, ۱/۴۶۰, ۲/۰۴۴)
۳۰	(۶۵۰۶, ۰/۹۷۶, ۱/۳۶۶)	(۶۶۰۴, ۰/۹۹۱, ۱/۳۸۷)	(۶۷۹۳, ۱/۰۱۹, ۱/۴۲۶)	(۹۷۰۶, ۱/۴۵۶, ۲/۰۳۸)
۳۱	(۵۲۹۴, ۰/۷۹۴, ۱/۱۱۲)	(۵۱۷۲, ۰/۷۷۶, ۱/۰۸۶)	(۵۱۶۱, ۰/۷۷۴, ۱/۰۸۴)	(۸۵۸۳, ۱/۲۸۷, ۱/۸۰۲)
۳۲	(۵۲۳۳, ۰/۷۸۵, ۱/۰۹۹)	(۵۴۳۹, ۰/۸۱۶, ۱/۱۴۲)	(۵۳۶۰, ۰/۸۰۴, ۱/۱۲۶)	(۸۳۳۸, ۱/۲۵۱, ۱/۷۵۱)
۳۳	(۵۷۰۴, ۰/۸۵۶, ۱/۱۹۸)	(۵۴۹۴, ۰/۸۲۴, ۱/۱۵۴)	(۵۷۰۰, ۰/۸۵۵, ۱/۱۹۷)	(۹۳۹۶, ۱/۴۰۹, ۱/۹۷۳)
۳۴	(۵۴۷۸, ۰/۸۲۲, ۱/۱۵۰)	(۵۳۸۷, ۰/۸۰۸, ۱/۱۳۱)	(۵۴۴۹, ۰/۸۱۷, ۱/۱۴۴)	(۱۰۱۷۹, ۱/۵۲۷, ۲/۱۳۸)
۳۵	(۶۲۰۰, ۰/۹۳۰, ۱/۳۰۲)	(۶۳۶۳, ۰/۹۵۴, ۱/۳۳۶)	(۶۴۹۰, ۰/۹۷۴, ۱/۳۶۳)	(۱۰۹۵۷, ۱/۶۴۳, ۲/۳۰۱)
۳۶	(۴۹۴۶, ۰/۷۴۲, ۱/۰۳۹)	(۴۹۱۶, ۰/۷۳۷, ۱/۰۳۲)	(۴۶۹۱, ۰/۷۰۴, ۰/۹۸۵)	(۸۵۰۳, ۱/۲۷۵, ۱/۷۸۶)
۳۷	(۷۰۴۳, ۱/۰۵۶, ۱/۴۷۹)	(۶۸۵۴, ۱/۰۲۸, ۱/۴۳۹)	(۷۰۵۳, ۱/۰۵۸, ۱/۴۸۱)	(۱۲۹۴۱, ۱/۹۴۱, ۲/۷۱۸)
۳۸	(۵۹۷۷, ۰/۸۹۶, ۱/۲۵۵)	(۶۰۷۷, ۰/۹۱۲, ۱/۲۷۶)	(۶۱۳۹, ۰/۹۲۱, ۱/۲۸۹)	(۱۰/۱۹۹, ۱/۵۳۰, ۲/۱۴۲)
۳۹	(۴۱۹۰, ۰/۶۲۸, ۰/۸۸۰)	(۴۳۹۱, ۰/۶۵۹, ۰/۹۲۲)	(۴۱۶۸, ۰/۶۲۵, ۰/۸۷۵)	(۸۵۴۴, ۱/۲۸۲, ۱/۷۹۴)
۴۰	(۵۶۶۳, ۰/۸۴۹, ۱/۱۸۹)	(۵۷۵۳, ۰/۸۶۳, ۱/۲۰۸)	(۵۸۶۴, ۰/۸۸۰, ۱/۲۳۱)	(۱۱۳۳۷, ۱/۷۰۱, ۲/۳۸۱)
۴۱	(۶۳۵۱, ۰/۹۵۳, ۱/۳۳۴)	(۶۲۱۱, ۰/۹۳۲, ۱/۳۰۴)	(۶۳۴۵, ۰/۹۵۲, ۱/۳۳۲)	(۱۱۶۷۶, ۱/۷۵۱, ۲/۴۵۲)
۴۲	(۵۲۶۹, ۰/۷۹۰, ۱/۱۰۶)	(۵۵۱۴, ۰/۸۲۷, ۱/۱۵۸)	(۵۳۸۲, ۰/۸۰۷, ۱/۱۳۰)	(۸۹۵۴, ۱/۳۴۳, ۱/۸۸۰)
۴۳	(۵۹۵۴, ۰/۸۹۳, ۱/۲۵۰)	(۵۹۱۵, ۰/۸۸۷, ۱/۲۴۲)	(۵۹۵۹, ۰/۸۹۴, ۱/۲۵۱)	(۱۱۳۸۱, ۱/۷۰۷, ۲/۳۹۰)
۴۴	(۵۴۸۷, ۰/۸۲۳, ۱/۱۵۲)	(۵۲۰۷, ۰/۷۸۱, ۱/۰۹۳)	(۵۴۴۵, ۰/۸۱۷, ۱/۱۴۳)	(۹۴۳۷, ۱/۴۱۶, ۱/۹۸۲)
۴۵	(۵۴۴۰, ۰/۸۱۶, ۱/۱۴۲)	(۵۳۸۵, ۰/۸۰۸, ۱/۱۳۱)	(۵۵۰۹, ۰/۸۲۶, ۱/۱۵۷)	(۱۰۵۷۰, ۱/۵۸۶, ۲/۲۲۰)
۴۶	(۴۸۹۹, ۰/۷۳۵, ۱/۰۲۹)	(۴۶۴۸, ۰/۶۹۷, ۰/۹۷۶)	(۴۶۱۵, ۰/۶۹۲, ۰/۹۶۹)	(۸۵۲۳, ۱/۲۷۸, ۱/۷۹۰)
۴۷	(۵۱۹۰, ۰/۷۷۸, ۱/۰۹۰)	(۵۰۹۲, ۰/۷۶۴, ۱/۰۶۹)	(۵۰۵۸, ۰/۷۵۹, ۱/۰۶۲)	(۸۳۰۲, ۱/۲۴۵, ۱/۷۴۳)
۴۸	(۴۴۹۰, ۰/۶۷۴, ۰/۹۴۳)	(۴۵۳۶, ۰/۶۸۰, ۰/۹۵۳)	(۴۴۳۹, ۰/۶۶۶, ۰/۹۳۲)	(۷۲۷۴, ۱/۰۹۱, ۱/۵۲۸)
۴۹	(۶۷۰۷, ۱/۰۰۶, ۱/۴۰۸)	(۶۷۵۸, ۱/۰۱۴, ۱/۴۱۹)	(۶۹۲۷, ۱/۰۳۹, ۱/۴۵۵)	(۱۱۴۱۷, ۱/۷۱۳, ۲/۳۹۸)
۵۰	(۶۴۴۱, ۰/۹۶۶, ۱/۳۵۳)	(۶۲۸۳, ۰/۹۴۲, ۱/۳۱۹)	(۶۳۴۸, ۰/۹۵۲, ۱/۳۳۳)	(۱۰/۲۲۲, ۱/۵۲۳, ۲/۱۴۷)

جدول ۳.۵: مقادير برآورد شده و فاصله d_1 و d_2

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_1	d_2
۱	(۸۸۰۴, ۱۳۲۱, ۱۸۴۹)	(۹۲۳۷, ۱۳۹۲, ۱۹۲۹)	۰/۱۸۹	۰/۱۹۱
۲	(۴۴۴۳, ۰/۶۶۶, ۰/۹۳۳)	(۶۰۸۲, ۰/۹۰۱, ۱/۲۴۹)	۲/۷۴۴	۲/۷۸۰
۳	(۸/۶۸۱, ۱/۳۰۲, ۱/۸۲۳)	(۸/۵۲۷, ۱/۲۸۱, ۱/۷۷۶)	۰/۰۲۵	۰/۰۲۶
۴	(۱۰/۶۱۱, ۱/۵۹۲, ۲/۲۲۸)	(۹/۳۴۲, ۱/۴۰۸, ۱/۹۵۲)	۱/۶۶۰	۱/۶۸۹
۵	(۱۲/۳۴۶, ۱/۸۵۲, ۲/۵۹۳)	(۱۱/۸۴۴, ۱/۷۹۷, ۲/۴۹۱)	۰/۲۶۱	۰/۲۶۶
۶	(۹/۱۶۷, ۱/۳۷۵, ۱/۹۲۵)	(۹/۱۳۸, ۱/۳۷۶, ۱/۹۰۸)	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۷	(۹/۷۸۶, ۱/۴۶۸, ۲/۰۵۵)	(۸/۴۷۳, ۱/۲۷۳, ۱/۷۶۵)	۱/۷۷۵	۱/۸۰۶
۸	(۸/۹۹۹, ۱/۳۵۰, ۱/۸۹۰)	(۹/۱۵۲, ۱/۳۷۹, ۱/۹۱۱)	۰/۰۲۳	۰/۰۲۳
۹	(۱۰/۰۵۳, ۱/۵۰۸, ۲/۱۱۱)	(۱۰/۷۱۶, ۱/۶۲۲, ۲/۲۴۸)	۰/۴۴۷	۰/۴۵۲
۱۰	(۱۳/۹۴۶, ۲/۰۹۲, ۲/۹۲۹)	(۱۴/۰۸۰, ۲/۱۴۴, ۲/۹۷۲)	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸
۱۱	(۸/۷۷۰, ۱/۳۱۵, ۱/۸۴۲)	(۸/۲۵۸, ۱/۲۴۰, ۱/۷۱۸)	۰/۲۷۲	۰/۲۷۸
۱۲	(۸/۴۷۶, ۱/۲۷۱, ۱/۷۸۰)	(۸/۸۵۰, ۱/۳۳۲, ۱/۸۴۶)	۰/۱۴۱	۰/۱۴۲
۱۳	(۱۰/۵۶۱, ۱/۵۸۴, ۲/۲۱۸)	(۹/۰۱۴, ۱/۳۵۷, ۱/۸۸۱)	۲/۴۶۳	۲/۵۰۵
۱۴	(۷/۴۷۳, ۱/۱۲۱, ۱/۵۶۹)	(۸/۰۰۲, ۱/۲۰۰, ۱/۶۶۳)	۰/۲۸۳	۰/۲۸۵
۱۵	(۸/۵۶۳, ۱/۲۸۵, ۱/۷۹۸)	(۹/۳۸۸, ۱/۴۱۵, ۱/۹۶۲)	۰/۶۹۳	۰/۷۰۱
۱۶	(۱۱/۲۳۴, ۱/۶۸۵, ۲/۳۵۹)	(۱۰/۶۲۵, ۱/۶۰۷, ۲/۲۲۸)	۰/۳۸۴	۰/۳۹۱
۱۷	(۹/۸۵۶, ۱/۴۷۸, ۲/۰۷۰)	(۹/۵۸۹, ۱/۴۴۶, ۲/۰۵۵)	۰/۰۷۵	۰/۰۷۶
۱۸	(۷/۸۴۲, ۱/۱۷۶, ۱/۶۴۷)	(۷/۲۵۸, ۱/۰۸۴, ۱/۵۰۳)	۰/۳۵۳	۰/۳۶۱
۱۹	(۸/۶۲۹, ۱/۲۹۴, ۱/۸۱۲)	(۸/۶۰۶, ۱/۲۹۴, ۱/۷۹۳)	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۲۰	(۱۱/۷۷۲, ۱/۷۶۶, ۲/۴۷۲)	(۱۰/۸۵۹, ۱/۶۴۴, ۲/۲۷۸)	۰/۸۶۱	۰/۸۷۶
۲۱	(۷/۵۵۹, ۱/۱۳۴, ۱/۵۸۷)	(۷/۳۸۹, ۱/۱۰۴, ۱/۵۳۱)	۰/۰۳۱	۰/۰۳۲
۲۲	(۹/۸۴۴, ۱/۴۷۷, ۲/۰۶۷)	(۱۰/۰۰۱, ۱/۵۱۱, ۲/۰۹۴)	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴
۲۳	(۵/۷۹۶, ۰/۸۶۹, ۱/۲۱۷)	(۵/۸۰۴, ۰/۸۵۸, ۱/۱۹۰)	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲۴	(۹/۳۸۰, ۱/۴۰۷, ۱/۹۷۰)	(۹/۹۵۱, ۱/۵۰۳, ۲/۰۸۳)	۰/۳۳۰	۰/۳۳۴
۲۵	(۱۱/۲۲۸, ۱/۶۸۴, ۲/۳۵۸)	(۱۱/۲۲۸, ۱/۷۰۱, ۲/۳۵۸)	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲۶	(۹/۹۹۴, ۱/۴۹۹, ۲/۰۹۹)	(۹/۱۹۳, ۱/۳۸۵, ۱/۹۲۰)	۰/۶۶۳	۰/۶۷۶
۲۷	(۹/۷۶۰, ۱/۴۶۴, ۲/۰۵۰)	(۸/۹۲۱, ۱/۳۴۳, ۱/۸۶۱)	۰/۷۲۷	۰/۷۴۱
۲۸	(۱۱/۰۸۴, ۱/۶۶۳, ۲/۳۲۸)	(۱۰/۷۲۷, ۱/۶۲۳, ۲/۲۵۰)	۰/۱۳۳	۰/۱۳۶
۲۹	(۹/۷۳۴, ۱/۴۶۰, ۲/۰۴۴)	(۱۰/۱۷۲, ۱/۵۳۷, ۲/۱۳۱)	۰/۱۹۵	۰/۱۹۷
۳۰	(۹/۷۰۶, ۱/۴۵۶, ۲/۰۳۸)	(۱۱/۲۶۸, ۱/۷۰۷, ۲/۳۶۷)	۲/۴۹۲	۲/۵۲۷
۳۱	(۸/۵۸۳, ۱/۲۸۷, ۱/۸۰۲)	(۹/۲۲۱, ۱/۳۸۹, ۱/۹۲۶)	۰/۴۱۴	۰/۴۱۹
۳۲	(۸/۳۲۸, ۱/۲۵۱, ۱/۷۵۱)	(۹/۱۱۹, ۱/۳۷۳, ۱/۹۰۴)	۰/۶۲۱	۰/۶۲۸
۳۳	(۹/۳۹۶, ۱/۴۰۹, ۱/۹۷۳)	(۹/۹۱۴, ۱/۴۹۷, ۲/۰۷۵)	۰/۲۷۲	۰/۲۷۵
۳۴	(۱۰/۱۷۹, ۱/۵۲۷, ۲/۱۳۸)	(۹/۵۳۲, ۱/۴۳۸, ۱/۹۹۳)	۰/۴۳۳	۰/۴۴۲
۳۵	(۱۰/۹۵۷, ۱/۶۴۳, ۲/۳۰۱)	(۱۰/۷۵۱, ۱/۶۲۷, ۲/۲۵۵)	۰/۰۴۴	۰/۰۴۶
۳۶	(۸/۵۰۳, ۱/۲۷۵, ۱/۷۸۶)	(۸/۶۳۳, ۱/۲۹۸, ۱/۷۹۹)	۰/۰۱۷	۰/۰۱۶
۳۷	(۱۲/۹۴۱, ۱/۹۴۱, ۲/۷۱۸)	(۱۲/۱۷۵, ۱/۸۴۸, ۲/۵۶۲)	۰/۶۰۷	۰/۶۱۸
۳۸	(۱۰/۱۹۹, ۱/۵۳۰, ۲/۱۴۲)	(۱۰/۳۷۴, ۱/۵۶۸, ۲/۱۷۴)	۰/۰۳۰	۰/۰۳۰
۳۹	(۸/۵۴۴, ۱/۲۸۲, ۱/۷۹۴)	(۷/۳۵۶, ۱/۰۹۹, ۱/۵۲۴)	۱/۴۵۵	۱/۴۸۱
۴۰	(۱۱/۳۳۷, ۱/۷۰۱, ۲/۳۸۱)	(۹/۸۴۵, ۱/۴۸۶, ۲/۰۶۰)	۲/۲۹۳	۲/۳۳۲
۴۱	(۱۱/۶۷۶, ۱/۷۵۱, ۲/۴۵۲)	(۱۱/۰۰۶, ۱/۶۶۷, ۲/۳۱۰)	۰/۴۶۴	۰/۴۷۳
۴۲	(۸/۹۵۴, ۱/۳۴۳, ۱/۸۸۰)	(۹/۱۷۹, ۱/۳۸۳, ۱/۹۱۶)	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱
۴۳	(۱۱/۳۸۱, ۱/۷۰۷, ۲/۳۹۰)	(۱۰/۳۳۶, ۱/۵۶۲, ۲/۱۶۶)	۱/۱۲۶	۱/۱۴۶
۴۴	(۹/۴۳۷, ۱/۴۱۶, ۱/۹۸۲)	(۹/۵۴۶, ۱/۴۴۰, ۱/۹۹۶)	۰/۰۱۲	۰/۰۱۲
۴۵	(۱۰/۵۷۰, ۱/۵۸۶, ۲/۲۲۰)	(۹/۴۶۷, ۱/۴۲۷, ۱/۹۷۹)	۱/۲۵۴	۱/۲۷۶
۴۶	(۸/۵۲۳, ۱/۲۷۸, ۱/۷۹۰)	(۸/۵۵۳, ۱/۲۸۵, ۱/۷۸۲)	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۴۷	(۸/۳۰۲, ۱/۲۴۵, ۱/۷۴۳)	(۹/۰۴۵, ۱/۳۶۲, ۱/۸۸۸)	۰/۵۶۱	۰/۵۶۸
۴۸	(۷/۲۷۴, ۱/۰۹۱, ۱/۵۲۸)	(۷/۸۶۴, ۱/۱۷۸, ۱/۶۳۳)	۰/۳۵۳	۰/۳۵۶
۴۹	(۱۱/۴۱۷, ۱/۷۱۳, ۲/۳۹۸)	(۱۱/۶۰۷, ۱/۷۶۰, ۲/۴۴۰)	۰/۰۳۶	۰/۰۳۶
۵۰	(۱۰/۲۲۲, ۱/۵۳۳, ۲/۱۴۷)	(۱۱/۱۵۸, ۱/۶۹۰, ۲/۳۴۳)	۰/۸۹۳	۰/۹۰۵
MPE			۰/۵۶۴۰	۰/۵۷۲۸

۲.۳.۵ داده‌های سیمان پرتلند

مثال ۱.۳.۳ را در نظر بگیرید (جدول ۴.۳). با توجه به برخی ابهامات در اندازه‌گیری‌های مربوط به متغیرهای ورودی و مشاهدات متغیر پاسخ، با مشورت یک فرد متخصص با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهناهای راست و چپ متناسب با x_1, x_2, x_3, x_4 و y فازی سازی شده‌اند (جدول ۴.۵).

جدول ۴.۵: مقادیر ورودی فازی برای داده‌های سیمان پرتلند

ردیف	X_1	X_2	X_3	X_4
۱	(۷, ۰/۷۷, ۰/۹۱)	(۲۶, ۲/۸۶, ۳/۳۸)	(۶, ۰/۶۶, ۰/۷۸)	(۶۰, ۶/۶, ۷/۸)
۲	(۱, ۰/۱۲, ۰/۲)	(۲۹, ۳/۴۸, ۵/۸)	(۱۵, ۱/۸, ۳)	(۵۲, ۶/۲۴, ۱۰/۴)
۳	(۱۱, ۲/۰۹, ۱/۲۱)	(۵۶, ۱۰/۶۴, ۶/۱۶)	(۸, ۱/۵۲, ۰/۸۸)	(۲۰, ۳/۸, ۲/۲)
۴	(۱۱, ۱/۶۵, ۱/۸۷)	(۳۱, ۴/۶۵, ۵/۲۷)	(۸, ۱/۲, ۱/۳۶)	(۴۷, ۷/۰۵, ۷/۹۹)
۵	(۷, ۱/۱۲, ۱/۱۹)	(۵۲, ۸/۳۲, ۸/۸۴)	(۶, ۰/۹۶, ۱/۰۲)	(۳۳, ۵/۲۸, ۵/۶۱)
۶	(۱۱, ۱/۲۱, ۱/۶۵)	(۵۵, ۶/۰۵, ۸/۲۵)	(۹, ۰/۹۹, ۱/۳۵)	(۲۲, ۲/۴۲, ۳/۳)
۷	(۳, ۰/۳۶, ۰/۳۳)	(۷۱, ۸/۵۲, ۷/۸۱)	(۱۷, ۲/۰۴, ۱/۸۷)	(۶, ۰/۷۲, ۰/۶۶)
۸	(۱, ۰/۱۸, ۰/۱۴)	(۳۱, ۵/۵۸, ۴/۳۴)	(۲۲, ۳/۹۶, ۳/۰۸)	(۴۴, ۷/۹۲, ۶/۱۶)
۹	(۲, ۰/۳۲, ۰/۳۲)	(۵۴, ۸/۶۴, ۸/۶۴)	(۱۸, ۲/۸۸, ۲/۸۸)	(۲۲, ۳/۵۲, ۳/۵۲)
۱۰	(۲۱, ۲/۱, ۳/۷۸)	(۴۷, ۴/۷, ۸/۴۶)	(۴, ۰/۴, ۰/۷۲)	(۲۶, ۲/۶, ۴/۶۸)
۱۱	(۱, ۰/۱۹, ۰/۱۲)	(۴۰, ۷/۶, ۴/۸)	(۲۳, ۴/۳۷, ۲/۷۶)	(۳۴, ۶/۴۶, ۴/۰۸)
۱۲	(۱۱, ۱/۵۴, ۱/۳۲)	(۶۶, ۹/۲۴, ۷/۹۲)	(۹, ۱/۲۶, ۱/۰۸)	(۱۲, ۱/۶۸, ۱/۴۴)
۱۳	(۱۰, ۱/۷, ۱/۱)	(۶۸, ۱۱/۵۶, ۷/۴۸)	(۸, ۱/۳۶, ۰/۸۸)	(۱۲, ۲/۰۴, ۱/۳۲)

با استفاده از فرمول (۶.۵) VIF_G فازی را برای داده‌ها محاسبه کرده و نتایج زیر بدست آمده است.

$$VIF_{G_1} = ۳/۷۰۵, VIF_{G_2} = ۴۱/۴۲۶, VIF_{G_3} = ۴/۲۲۲, VIF_{G_4} = ۱۵/۸۴۷$$

با توجه به مقادیر VIF_G ، وجود هم‌خطی در میان متغیرهای پیش‌بین آشکار است. در نتیجه استفاده از رگرسیون ريج محرز است. به ازای مقادیر مختلف λ با توجه به رابطه (۱۸.۲) شاخص MPE_1 و MPE_2 به‌ترتیب از فاصله‌های رابطه (۱۴.۱) و (۸.۱) محاسبه شده است) را محاسبه کرده‌ایم و با توجه به جدول ۶.۵ مقدار $\lambda = ۰/۵$ به‌عنوان پارامتر ريج انتخاب می‌کنیم. به ازای $\lambda = ۰/۵$ شاخص MPE_2 برابر با ۴/۱۶۹۳ و ضریب تعیین تعمیم یافته مدل برابر با ۰/۹۸۲ است. مسئله مینیمم سازی (۴.۵) را به کمک نرم‌افزار متمتیکا ۱۰ انجام داده‌ایم و نتایج زیر به ازای $\lambda = ۰/۵$ بدست آمده است

$$\hat{Y} = -۰/۵۸۱ + ۲/۱۹۰x_1 + ۱/۱۵۴x_2 + ۰/۸۱۹x_3 + ۰/۴۸۰x_4$$

جدول ۵.۵: مقادير مشاهده شده و برآورد شده فازى مثلى براى داده‌هاى سيمان پرتلند

ردیف	Y	$\hat{Y}$	d_3	d_2	d_1
۱	(۷۸/۵, ۸/۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۷۸/۵, ۸/۶۹۸, ۱۰/۲۸۰)	۰/۱۳۹	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۰۸
۲	(۷۴/۳, ۸/۹۱۶, ۱۴/۸۶)	(۷۲/۳۵۰, ۸/۷۵۱, ۱۴/۵۸۶)	۲/۳۸۷	۳/۹۲۳	۳/۸۷۹
۳	(۱۰۴/۳, ۱۹/۸۱۷, ۱۱/۴۷۳)	(۱۰۴/۳, ۱۹/۹۲۷, ۱۱/۵۳۶)	۰/۱۷۴	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۱۳
۴	(۸۷/۶, ۱۳/۱۴, ۱۴/۸۹۲)	(۸۸/۴۲۴, ۱۳/۳۵۰, ۱۵/۱۳۰)	۱/۲۷۳	۰/۷۰۷	۰/۶۹۵
۵	(۹۵/۹, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۵/۵۲۹, ۱۵/۳۷۷, ۱۶/۳۳۸)	۰/۴۳۹	۰/۱۳۷	۰/۱۳۶
۶	(۱۰۹/۲, ۱۲/۰۱۲, ۱۶/۳۰۳)	(۱۰۴/۹۲۶, ۱۱/۶۰۵, ۱۵/۸۲۶)	۵/۲۳۳	۱۸/۶۵۷	۱۸/۵۱۲
۷	(۱۰۲/۷, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰۴/۷۳۴, ۱۲/۶۳۷, ۱۱/۵۸۴)	۲/۶۳۵	۴/۱۴۲	۴/۱۳۵
۸	(۷۲/۵, ۱۳/۰۵, ۱۰/۱۵)	(۷۶/۵۵۰, ۱۳/۸۸۳, ۱۰/۷۹۸)	۵/۵۳۳	۱۶/۲۲۰	۱۶/۲۵۲
۹	(۹۳/۱, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۹۱/۴۳۳, ۱۴/۷۲۲, ۱۴/۷۲۲)	۲/۰۱۳	۲/۷۸۶	۲/۷۸۱
۱۰	(۱۱۵/۹, ۱۱/۵۹, ۲۰/۸۹۶)	(۱۱۵/۴۲۴, ۱۱/۶۰۰, ۲۰/۸۸۰)	۰/۵۰۵	۰/۲۲۴	۰/۲۲۵
۱۱	(۸۳/۳, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۸۲/۹۵۱, ۱۵/۸۷۱, ۱۰/۰۲۳)	۰/۴۲۰	۰/۱۲۵	۰/۱۲۳
۱۲	(۱۱۳/۳, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۸۱۵, ۱۵/۸۷۵, ۱۳/۶۰۷)	۰/۵۰۹	۰/۲۳۵	۰/۲۳۵
۱۳	(۱۰۹/۴, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰۳۴)	(۱۱۲/۱۱۳, ۱۹/۱۵۸, ۱۲/۳۹۶)	۳/۶۳۵	۷/۱۶۷	۷/۲۱۹
MPE			۱/۹۱۵	۴/۱۷۹	۴/۱۶۹

همچنين نتايج مقادير برآورد شده از مدل رگرسيونى و خطاى بدست آمده با استفاده از رابطه‌هاى (۸.۱) (d_1)، (۱۴.۱) (d_2) و (۱۶.۱) (d_3) در جدول ۵.۵ آمده است. براى اين مثال نيز با روش اعتبار سنجى متقابل مقدار $MPE_{cv} = ۸/۳۴۶۱$ بدست مى آيد (جدول ۷.۵).

جدول ۶.۵: معيارهاى نيكويى برازش براى داده‌هاى سيمان پرتلند

λ	MPE_1	MPE_2
۰	۴/۳۱۷۳۱	۴/۳۰۹۱۶
۰/۱	۴/۲۳۶۹۲	۴/۲۱۶۱۱
۰/۵	۴/۱۷۹۳۶	۴/۱۶۹۳۱
۱	۴/۲۰۰۵۴	۴/۱۹۱۵۶
۱/۵	۴/۳۳۴۲۱	۴/۳۲۶۰۲
۲	۴/۵۰۶۶	۴/۴۹۵۷۸

جدول ۷.۵: مقادير برآورد شده فازى با روش اعتبار سنجى متقابل براى داده‌هاى سيمان پرتلند

ردیف	Y	$\hat{Y}_{(-i)}$	d_1
۱	(۷۸۵۰۰, ۸۶۳۵, ۱۰/۲۰۵)	(۸۰/۰۲۲, ۸۸۰۱, ۱۰/۴۰۱)	۲/۳۳۷
۲	(۷۴۳۰۰, ۸۹۱۶, ۱۴/۸۶۰)	(۷۲/۰۳۱, ۸۶۶۵, ۱۴/۴۴۱)	۵/۲۹۷
۳	(۱۰۴۳۰۰, ۱۹۸۱۷, ۱۱/۴۷۳)	(۱۰۴/۶۷۹, ۲۰/۰۲۴, ۱۱/۵۹۳)	۰/۱۳۷
۴	(۸۷/۶۰۰, ۱۳/۱۴۰, ۱۴/۸۹۲)	(۸۹/۰۴۲, ۱۳/۴۱۱, ۱۵/۱۹۹)	۲/۱۱۰
۵	(۹۵۹۰۰, ۱۵/۳۴۴, ۱۶/۳۰۳)	(۹۶/۲۴۸, ۱۵/۳۹۹, ۱۶/۳۶۱)	۰/۱۲۲
۶	(۱۰۹/۲۰۰, ۱۲/۰۱۲, ۱۶/۳۸۰)	(۱۰۴/۸۹۲, ۱۱/۶۰۱, ۱۵/۸۱۹)	۱۸/۸۱۲
۷	(۱۰۲/۷۰۰, ۱۲/۳۲۴, ۱۱/۲۹۷)	(۱۰۵/۴۸۴, ۱۲/۷۲۰, ۱۱/۶۶۰)	۷/۷۴۶
۸	(۷۲/۵۰۰, ۱۳/۰۵۰, ۱۰/۱۵۰)	(۷۶/۹۳۴, ۱۴/۱۹۵, ۱۱/۰۴۰)	۱۹/۴۵۹
۹	(۹۳/۱۰۰, ۱۴/۸۹۶, ۱۴/۸۹۶)	(۸۹/۷۳۲, ۱۴/۴۱۲, ۱۴/۴۱۲)	۱۱/۳۸۳
۱۰	(۱۱۵/۹۰۰, ۱۱/۵۹۰, ۲۰/۸۶۲)	(۱۱۲/۶۱۹, ۱۱/۳۹۷, ۲۰/۵۱۵)	۱۰/۹۴۶
۱۱	(۸۳/۳۰۰, ۱۵/۸۲۷, ۹/۹۹۶)	(۷۸/۸۳۶, ۱۵/۲۳۳, ۹/۶۲۱)	۱۹/۶۴۷
۱۲	(۱۱۳/۳۰۰, ۱۵/۸۶۲, ۱۳/۵۹۶)	(۱۱۲/۸۷۶, ۱۶/۱۳۰, ۱۳/۸۲۶)	۰/۱۹۶
۱۳	(۱۰۹/۴۰۰, ۱۸/۵۹۸, ۱۲/۰۳۴)	(۱۱۲/۶۴۷, ۱۹/۴۱۱, ۱۲/۵۶۰)	۱۰/۳۰۹
MPE_{cv}			۸/۳۴۶۱

نتیجه گیری و پیشنهادات

نتیجه گیری

در رگرسیون فازی نیز مانند رگرسیون کلاسیک به دنبال بهبود دادن برآوردهای معادلات رگرسیونی هستیم. یکی از برآوردهای بهبود یافته در رگرسیون کلاسیک زمانی که بین متغیرهای پیش‌بین هم‌خطی وجود داشته باشد، برآوردهای ریج است. در رگرسیون فازی نیز زمانی که بین متغیرهای ورودی (پیش‌بین) هم‌خطی وجود داشته باشد از برآوردهای ریج فازی به جای برآوردهای کمترین توان دوم استفاده می‌کنیم. در این پایان نامه ابتدا مباحث مقدماتی در زمینه مجموعه‌های فازی و رگرسیون چندگانه و مشکل هم‌خطی در آن را بیان کردیم. سپس رگرسیون فازی با دو روش کمترین توان‌های دوم و روش امکانی را شرح دادیم و بعد با استفاده از تابع هدف‌های متفاوت مدل رگرسیون ریج فازی را برآورد کردیم و ضرایب مدل را بدست آورده‌ایم. برای ارزیابی مدل‌های بیان شده دو معیار نیکویی برازش (شاخص MPE و ضریب تعیین تعمیم یافته) را پیشنهاد داده‌ایم. همچنین برای محاسبه خطای پیشگویی مدل از فاصله ژو و فاصله گیلده و گین استفاده کرده‌ایم که با مشاهده نتایج یافتیم که فاصله ژو عملکرد بهتری نسبت به فاصله گیلده و گین دارد. یعنی با استفاده از فاصله ژو می‌توان خطای مدل را کاهش داد. همچنین عامل تورم واریانس تعمیم یافته را برای شناسایی مشکل هم‌خطی در میان متغیرهای ورودی فازی، پیشنهاد داده‌ایم.

پیشنهادهای

- ۱- از آنجا که مشکل هم‌خطی در میان متغیرهای ورودی فازی نیز وجود دارد برای مقابله با این مشکل می‌توان از روش‌های دیگر مانند رگرسیون لاسو در محیط فازی، رگرسیون بریج فازی، رگرسیون مولفه‌های اصلی در محیط فازی و ... استفاده کرد.
- ۲- در این پایان نامه رگرسیون ریج فازی برای متغیرهای ورودی دقیق و خروجی فازی و همچنین رگرسیون ریج برای ورودی و خروجی فازی و ضرایب دقیق، مورد مطالعه قرار گرفت. برای تحقیق‌های آینده می‌توان از مدل رگرسیون ریج فازی برای زمانی که هم متغیر ورودی و خروجی فازی باشند و هم ضرایب مدل استفاده کرد.
- ۳- همچنین با انتخاب تابع هدف‌های دیگر می‌توان مدل رگرسیون ریج فازی جدیدی را ارائه داد.
- ۴- در این پایان نامه یکی از شاخص‌های تشخیص هم‌خطی در آمار کلاسیک را برای زمانی که داده‌های ورودی فازی باشند، تعمیم داده‌ایم. در تحقیقات آینده می‌توان دیگر شاخص‌های تشخیص هم‌خطی را

نیز برای داده‌های فازی نیز تعمیم داد و یا شاخص‌های جدیدی برای تشخیص هم‌خطی ارائه داد.

پیوست آ

برنامه‌های نوشته شده در ممتیکا

برنامه مربوط به مثال ۱.۲.۳

```
X = Import[
"D:\\payannname\\article3\\simulation\\dat43.xlsx", {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 3;
m = Array[j, {n, 1}];
l = Array[ys, {n, 1}];
r = Array[s, {n, 1}];
A = Array[c, {n, p}];
k = IdentityMatrix[n];
G0 = Array[f, {n, p + 1}];
G1 = Array[o, {n, p + 1}];
e = Array[a, {n, 1}];
Yhat2 = Array[b, {n, 3}];
x = Array[j, {n, 4}];
G = Array[f, {n, p + 1}];
e = Array[a, {n, 1}];
```

```

Yhat = Array[b, {n, 3}];
v = 10;
x = Array[j, {n, 4}];
For[i = 1, i <= n, i++,
  m[[i, 1]] = X[[i, 4]];
  l[[i, 1]] = X[[i, 5]];
  r[[i, 1]] = X[[i, 6]];
  G[[i, 1]] = X[[i, 1]];
  G[[i, 2]] = X[[i, 2]];
  G[[i, 3]] = X[[i, 3]];
  G[[i, 4]] = 1;
];
For[i = 1, i <= n, i++,
Yhat[[i, 1]] = G[[i]].Transpose[G].Inverse[(1/v)*k + G.Transpose[G]].m;
Yhat[[i, 2]] = G[[i]].Transpose[G].Inverse[(1/v)*k + G.Transpose[G]].l;
Yhat[[i, 3]] = G[[i]].Transpose[G].Inverse[(1/v)*k + G.Transpose[G]].r;
];
d0 = Array[z, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++ ,
d0[[i, 1]] = (m[[i, 1]] - Yhat[[i, 1]])^2 + (1/3)*(m[[i, 1]] - Yhat[[i, 1]])
*((l[[i, 1]] - Yhat[[i, 2]]) - (r[[i, 1]] - Yhat[[i, 3]]))
+ (1/12)*((l[[i, 1]] - Yhat[[i, 2]])^2 + (r[[i, 1]] - Yhat[[i, 3]])^2);
];
MPE=
\sum_{i=1}^n d0[[i, 1]] /n

```

برنامه مربوط به مثال ۱.۳.۳

```

Data = Import["D:\\payanname\\Article2\\minimize2.xlsx", {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[Data][[1]]];
p = 4;
m = Array[j, {n, 1}];
l = Array[ys, {n, 1}];
r = Array[ye, {n, 1}];
A = Array[c, {n, p}];
k = IdentityMatrix[n];

```

```

G = Array[f, {n, p + 1}];
e = Array[a, {n, 1}];
Yhat = Array[b, {n, 3}];
\[Lambda] = 0.4;
x = Array[j, {n, 4}];
For[i = 1, i <= n, i++, m[[i,1]] = Data[[i,5]]; l[[i,1]] = Data[[i,6]];
r[[i,1]] = Data[[i,7]]; G[[i,1]] = Data[[i,1]];
G[[i,2]] = Data[[i,2]]; G[[i,3]] = Data[[i,3]];
G[[i,4]] = Data[[i,4]]; G[[i,5]] = 1; ];
For[i = 1, i <= n, i++, Yhat[[i,1]] = G[[i]] . Transpose[G] .
Inverse[(1/\[Lambda])*k + G . Transpose[G]] . m;
Yhat[[i,2]] = G[[i]] . Transpose[G] .
Inverse[(1/\[Lambda])*k + G . Transpose[G]] . l;
Yhat[[i,3]] = G[[i]] . Transpose[G] .
Inverse[(1/\[Lambda])*k + G . Transpose[G]] . r; ];
d0 = Array[z, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++,
d0[[i,1]] = (m[[i,1]] - Yhat[[i,1]])^2 +
(1/3)*(m[[i,1]] - Yhat[[i,1]]*(l[[i,1]] - Yhat[[i,2]])) -
(r[[i,1]] - Yhat[[i,3]])) + (1/12)*((l[[i,1]] - Yhat[[i,2]])^2 +
(r[[i,1]] - Yhat[[i,3]])^2); ];
MPE = Sum[d0[[i]]/n, {i, 1, n}]

```

برنامه بدست آوردن فاصله (۱۴.۱) (dpq)

```

dpq = Array[g, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++, dpq[[i,1]] =
Integrate[(Yhat[[i,1]] - (1 - a)*Yhat[[i,2]] - Data[[i,5]] +
(1 - a)*Data[[i,6]])^2, {a, 0, 1}] +
Integrate[(Yhat[[i,1]] + (1 - a)*Yhat[[i,3]] - Data[[i,5]] -
(1 - a)*Data[[i,7]])^2, {a, 0, 1}]];
Dpq = (1/n)*Sum[0.5*dpq[[i,1]], {i, 1, n}]

```

برنامه مربوط به محاسبه ضریب تعیین تعمیم یافته

```

my = Sum[m[[i,1]]/n, {i, 1, n}];

```

```

ly = Sum[l[[i,1]]/n, {i, 1, n}];
ry = Sum[r[[i,1]]/n, {i, 1, n}];
SSR2 = Sum[(Yhat2[[i,1]] - my)^2 + (1/3)*(Yhat2[[i,1]] - my)*
  ((Yhat2[[i,3]] - ry) - (Yhat2[[i,2]] - ly)) +
  (1/12)*((Yhat2[[i,2]] - ly)^2 + (Yhat2[[i,3]] - ry)^2), {i, 1, n}]
SST2 = Sum[(m[[i,1]] - my)^2 + (1/3)*(m[[i,1]] - my)*
  ((r[[i,1]] - ry) - (l[[i,1]] - ly)) +
  (1/12)*((l[[i,1]] - ly)^2 + (r[[i,1]] - ry)^2), {i, 1, n}]
R2 = SSR2/SST2

```

برنامه مربوط به بخش ۲.۴.۳ برای رگرسیون ریدج فازی

```

X = Import[
"D:\\payannname\\Article2\\example2\\toldemelli.xlsx", {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 4;
m = Array[j, {n, 1}];
l = Array[ys, {n, 1}];
r = Array[s, {n, 1}];
A = Array[c, {n, p}];
k = IdentityMatrix[n];
G0 = Array[f, {n, p + 1}];
G1 = Array[o, {n, p + 1}];
e = Array[a, {n, 1}];
Yhat2 = Array[b, {n, 3}];
x = Array[j, {n, 4}];
\[Beta]1 = 0.001;
\[Beta]2 = 0.1;
For[i = 1, i <= n, i++ ,
m[[i, 1]] = X[[i, 5]];
l[[i, 1]] = X[[i, 6]];
r[[i, 1]] = X[[i, 7]];
G0[[i, 1]] = X[[i, 1]];
G0[[i, 2]] = X[[i, 2]];
G0[[i, 3]] = X[[i, 3]];
G0[[i, 4]] = X[[i, 4]];

```



```

G0[[i, 5]] = 1;
G1[[i, 1]] = (1/[Beta]1)*X[[i, 1]];
G1[[i, 2]] = (1/[Beta]1)*X[[i, 2]];
G1[[i, 3]] = (1/[Beta]1)*X[[i, 3]];
G1[[i, 4]] = (1/[Beta]1)*X[[i, 4]];
G1[[i, 5]] = 1/[Beta]2;
A[[i, 1]] = X[[i, 1]];
A[[i, 2]] = X[[i, 2]];
A[[i, 3]] = X[[i, 3]];
A[[i, 4]] = X[[i, 4]];
e[[i, 1]] = 1;
];
For[i = 1, i <= n, i++,
Yhat2[[i,1]] = G0[[i]] . Transpose[G1] . Inverse[k + (1/[Beta]1)
*A . Transpose[A] + (1/[Beta]2)*e . Transpose[e]] . m;
Yhat2[[i,2]] = G0[[i]] . Transpose[G1] . Inverse[k + (1/[Beta]1)
*A . Transpose[A] + (1/[Beta]2)*e . Transpose[e]] . l;
Yhat2[[i,3]] = G0[[i]] . Transpose[G1] . Inverse[k + (1/[Beta]1)
*A . Transpose[A] + (1/[Beta]2)*e . Transpose[e]] . r;
];
d2 = Array[z, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++,
d2[[i,1]] = (m[[i,1]] - Yhat2[[i,1]])^2 +
(1/3)*(m[[i,1]] - Yhat2[[i,1]])*(r[[i,1]] - Yhat2[[i,3]] -
(l[[i,1]] - Yhat2[[i,2]])) + (1/12)*((l[[i,1]] - Yhat2[[i,2]])^2 +
(r[[i,1]] - Yhat2[[i,3]])^2);
];
Sum[d2[[i]]/n, {i, 1, n}]

```

برنامه مربوط به بخش ۲.۴.۳ برای رگرسیون فازی

```

X = Import["D:\\payannname\\Article2\\example2\\toldemelli.xlsx"
, {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 4;

```

```

m = Array[j, {n, 1}];
l = Array[ys, {n, 1}];
r = Array[s, {n, 1}];
A = Array[c, {n, p}];
k = IdentityMatrix[n];
G0 = Array[f, {n, p + 1}];
G1 = Array[o, {n, p + 1}];
e = Array[a, {n, 1}];
Yhat2 = Array[b, {n, 3}];
x = Array[j, {n, 4}];
For[i = 1, i <= p, i++,
  m[[i,1]] = X[[i,5]];
  l[[i,1]] = X[[i,6]];
  r[[i,1]] = X[[i,7]];
  G0[[i,1]] = X[[i,1]];
  G0[[i,2]] = X[[i,2]];
  G0[[i,3]] = X[[i,3]];
  G0[[i,4]] = X[[i,4]];
  G0[[i,5]] = 1;
  A[[i,1]] = X[[i,1]];
  A[[i,2]] = X[[i,2]];
  A[[i,3]] = X[[i,3]];
  A[[i,4]] = X[[i,4]];
  e[[i,1]] = 1; ];
For[i = 1, i <= n, i++,
  Yhat2[[i,1]] = G0[[i]] . Transpose[G0] .
  Inverse[k + A . Transpose[A] + e . Transpose[e]] . m;
  Yhat2[[i,2]] = G0[[i]] . Transpose[G0] . Inverse[k + A . Transpose[A] +
  e . Transpose[e]] . l; Yhat2[[i,3]] = G0[[i]] . Transpose[G0] .
  Inverse[k + A . Transpose[A] + e . Transpose[e]] . r; ];
d2 = Array[z, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++,
  d2[[i,1]] = (m[[i,1]] - Yhat2[[i,1]])^2 +
  (1/3)*(m[[i,1]] - Yhat2[[i,1]])*((r[[i,1]] - Yhat2[[i,3]]) -

```

```
(1[[i,1]] - Yhat2[[i,2]])) + (1/12)*((1[[i,1]] - Yhat2[[i,2]]))^2 +
(r[[i,1]] - Yhat2[[i,3]]^2); ];
Sum[d2[[i]]/p, {i, 1, p}]
```

برنامه مربوط به بخش ۲.۴.۳ برای محاسبه d_{pq}

```
dpq = Array[g, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++,
dpq[[i,1]]=Integrate[(Yhat2[[i,1]] - (1 - a)*Yhat2[[i,2]] - X[[i,5]]
+(1 - a)*X[[i,6]])^2, {a, 0, 1}] +
Integrate[(Yhat2[[i,1]] + (1 - a)*Yhat2[[i,3]] - X[[i,5]] -
(1 - a)*X[[i,7]])^2, {a, 0, 1}]];
Dpq = (1/n)*Sum[0.5*dpq[[i,1]], {i, 1, n}]
```

برنامه مربوط به بخش ۲.۴.۳ برای محاسبه ضرایب مدل رگرسیونی

```
X = Import[
"D:\\payannname\\Article2\\example2\\toldemelli.xlsx", {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 4;
k1 = 0.001;
k2 = 0.1;
mw = {mw1, mw2, mw3, mw4};
lw = {lw1, lw2, lw3, lw4};
rw = {rw1, rw2, rw3, rw4};
Yhat1 = Array[h, {n, 2}];
Q1 = NMinimize[
{Sum[(1/3)*(Sum[mw[[k]]*X[[i,k]], {k, 1, p}] - X[[i,5]] +mB)
*((Sum[rw[[k]]*X[[i,k]], {k, 1, p}] - X[[i,7]] +rB)
- (Sum[lw[[k]]*X[[i,k]], {k, 1, p}]
- X[[i,6]] + 1B)) + (1/12)*
((Sum[lw[[k]]*X[[i,k]], {k, 1, p}] - X[[i,6]] + 1B)^
2 + (Sum[rw[[k]]*X[[i,k]], {k, 1, p}] - X[[i,7]] +rB)^2)
+ (Sum[mw[[k]]*X[[i,k]], {k, 1, p}] -
X[[i,5]] + mB)^2, {i, 1, n}] +
k1*Sum[(1/12)*(lw[[k]] + rw[[k]])^2 + mw[[k]]^2,
```

```
{k, 1, p}] + k2*((1/12)*(lB^2 + rB^2) + mB^2),
{lw1 >= 0, lw2 >= 0, lw3 >= 0, lw4 >= 0, rw1 >= 0,
rw2 >= 0, rw3 >= 0, rw4 >= 0, lB >= 0, rB >= 0}},
{mw1, mw2, mw3, mw4, mB, lw1, lw2, lw3, lw4, lB, rw1, rw2,
rw3, rw4, rB}]
```

برآورد مدل و محاسبه ضریب تعیین تعمیم یافته برای فصل ۴

```
X = Import["D:\\payannname\\Article2\\minimize2.xlsx", {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 4;
A = {a1, a2, a3, a4, a0};
mw = {mw1, mw2, mw3, mw4};
lw = {lw1, lw2, lw3, lw4};
rw = {rw1, rw2, rw3, rw4};
B = {mw1, mw2, mw3, mw4, lw1, lw2, lw3, lw4, rw1, rw2, rw3, rw4, mw0,
lw0, rw0};
Y = Array[y, {n, 3}];
Xm = Array[x, {n, p}];
XL = Array[xs2, {n, p}];
XR = Array[xr2, {n, p}];
K1 = K2 = 1;
Yhat = Array[yhat, {n, 3}];
For[i = 1, i <= n, i++,
Y[[i,1]] = X[[i,5]];
Y[[i,2]] = X[[i,6]];
Y[[i,3]] = X[[i,7]];
Xm[[i,1]] = X[[i,1]];
Xm[[i,2]] = X[[i,2]];
Xm[[i,3]] = X[[i,3]];
Xm[[i,4]] = X[[i,4]];
];
For[i = 1, i <= n, i++,
Yhat[[i,1]] = mw0 + Sum[mw[[j]]*X[[i,j]], {j, 1, p}];
Yhat[[i,2]] = lw0 + Sum[lw[[j]]*X[[i,j]], {j, 1, p}];
Yhat[[i,3]] = rw0 + Sum[rw[[j]]*X[[i,j]], {j, 1, p}];
```

```

];
Q = {q0, q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7, q8, q9, q10};
For[L = 1, L <= 11, L++,
Q[[L]] = NMinimize[{
K1*Sum[(Y[[i,1]] - Yhat[[i,1]])^2,{i, 1, n}] +
K2*(Sum[((Y[[i,1]] - Y[[i,2]]) - (Yhat[[i,1]] - Yhat[[i,2]]))^2,
{i, 1, n}] + Sum[((Y[[i,1]] + Y[[i,3]]) - (Yhat[[i,1]] + Yhat[[i,3]]))^2
, {i, 1, n}]) + (0.1*(L - 1))*(mw0^2 + Sum[mw[[j]]^2, {j, 1, p}]),
{lw1 >= 0, lw2 >= 0, lw3 >= 0, lw4 >= 0,
rw1 >= 0, rw2 >= 0, rw3 >= 0, rw4 >= 0, lw0 >= 0, rw0 >= 0}}, B]]
h = 2
Yhat1 = Array[h, {n, 3}];
For[i = 1, i <= n, i++,
Yhat1[[i,1]] = Q[[h,2,1,2]]*X[[i,1]] +
Q[[h,2,2,2]]*X[[i,2]] + Q[[h,2,3,2]]*X[[i,3]] +
Q[[h,2,4,2]]*X[[i,4]] + Q[[h,2,13,2]];
Yhat1[[i,2]] = Q[[h,2,5,2]]*X[[i,1]] + Q[[h,2,6,2]]*X[[i,2]] +
Q[[h,2,7,2]]*X[[i,3]] + Q[[h,2,8,2]]*X[[i,4]] +
Q[[h,2,14,2]]; Yhat1[[i,3]] = Q[[h,2,9,2]]*X[[i,1]] +
Q[[h,2,10,2]]*X[[i,2]] + Q[[h,2,11,2]]*X[[i,3]] +
Q[[h,2,12,2]]*X[[i,4]] + Q[[h,2,15,2]];
];
my = Sum[Y[[i,1]]/n, {i, 1, n}];
ly = Sum[Y[[i,2]]/n, {i, 1, n}];
ry = Sum[Y[[i,3]]/n, {i, 1, n}];
SSR = Sum[(1/3)*(Yhat1[[i,1]] - my)*((Yhat1[[i,3]] - ry) -
(Yhat1[[i,2]] - ly)) + (1/12)*((Yhat1[[i,2]] - ly)^2 +
(Yhat1[[i,3]] - ry)^2) + (Yhat1[[i,1]] - my)^2, {i, 1, n}];
SST = \Sum[(1/3)*(Y[[i,1]] - my)*((Y[[i,3]] - ry) -
(Y[[i,2]] - ly)) + (1/12)*((Y[[i,2]] - ly)^2 +
(Y[[i,3]] - ry)^2) + (Y[[i,1]] - my)^2, {i, 1, n}];
R22 = SSR/SST
d2 = Array[z, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++, d2[[i,1]] = (Y[[i,1]] - Yhat1[[i,1]])^2 +

```

```
(1/3)*((Y[[i,3]] - Yhat1[[i,3]]) - (Y[[i,2]] - Yhat1[[i,2]]))*
  (Y[[i,1]] - Yhat1[[i,1]]) +
(1/12)*((Y[[i,2]] - Yhat1[[i,2]])^2 +
  (Y[[i,3]] - Yhat1[[i,3]])^2); ];
Sum[d2[[i]]/n, {i, 1, n}]
```

برنامه مربوط به رسم شکل در ممتیکا

```
Needs["PlotLegends`"];
ZAR = Array[zar, {5, 11}];
For[k = 1, k <= 11, k++,
  ZAR[{{1, 2, 3, 4, 5},k}] = {mw1 /. Last[Q[[k]]], mw2 /. Last[Q[[k]]],
  mw3 /. Last[Q[[k]]], mw4 /. Last[Q[[k]]], mw0 /. Last[Q[[k]]]}; ]
ListLinePlot[ZAR, DataRange -> {0, 1},
  PlotStyle -> {Black, Red, Blue, Green, Yellow},
  Mesh -> All, PlotMarkers -> Automatic, AxesOrigin -> {0, -200},
  PlotRange -> All,
  PlotLegend -> {"mA1", "mA2", "mA3", "mA4", "mA0"},
  Background -> Directive[White, Opacity[1]],
  Frame -> True, FrameLabel -> {"\[Lambda]", "Estimation"},
  LegendPosition -> {1, -0.3}]
```

برنامه مربوط به اعتبار سنجی متقابل برای فصل سوم

```
X = Import["D:\\payannname\\Article2\\minimize2.xlsx", {"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 4;
k1 = 0.0001;
k2 = 0.0001;
mw = {mw1, mw2, mw3, mw4};
lw = {lw1, lw2, lw3, lw4};
rw = {rw1, rw2, rw3, rw4};
Yhat = Array[s, {n, 3}];
a = 0;
```

```

V1 = {"i", "Z", "mw1", "mw2", "mw3", "mw4", "lw1", "lw2", "lw3",
      "lw4", "mB", "lB", "Ym", "Yl", "Yr", "d2"};
W = {"k1", "k2", "MPE"};
For[i = 1, i <= n, i++,
a = a + 1;
X1 = Drop[Import["D:\\payannname\\Article2\\minimize2.xlsx",
  {"Data", 1}], {i}];
n1 = n - 1;
Yhat = Array[s, {n, 3}];
d2 = Array[z, {n, 1}];
Q1 = NMinimize[{
k1*Sum[mw[[k]]^2 + (1/12)*(lw[[k]] + rw[[k]])^2, {k, 1,p}]
+ k2*(mB^2 + (1/12)*(lB^2 + rB^2))
+ Sum[(Sum[mw[[k]]*X1[[i,k]], {k, 1, p}] + mB - X1[[i,5]])^2 +
(1/3)*(Sum[mw[[k]]*X1[[i,k]], {k, 1, p}] + mB - X1[[i,5]])*
((Sum[rw[[k]]*X1[[i,k]], {k, 1, p}] + rB - X1[[i,7]])
- (Sum[lw[[k]]*X1[[i,k]], {k, 1, p}] + lB - X1[[i,6]])) +
(1/12)*((Sum[lw[[k]]*X1[[i,k]], {k, 1, p}] + lB - X1[[i,6]])^2 +
(Sum[rw[[k]]*X1[[i,k]],{k,1,p}]+ rB - X1[[i,7]])^2),{i, 1, n1}
],
{lw1 >= 0, lw2 >= 0, lw3 >= 0, lw4 >= 0, rw1 >= 0, rw2 >= 0,
  rw3 >= 0,  rw4 >= 0, rB >= 0}},
{mw1, mw2, mw3, mw4, mB, lw1, lw2, lw3, lw4, lB, rw1
, rw2, rw3, rw4, rB}];
Yhat[[i,1]] = Q1[[2,5,2]] + Q1[[2,1,2]]*X[[i,1]] +
Q1[[2,2,2]]*X[[i,2]] + Q1[[2,3,2]]*X[[i,3]] + Q1[[2,4,2]]*X[[i,4]];
Yhat[[i,2]] = Q1[[2,10,2]] + Q1[[2,6,2]]*X[[i,1]]
+ Q1[[2,7,2]]*X[[i,2]]+Q1[[2,8,2]]*X[[i,3]] + Q1[[2,9,2]]*X[[i,4]];
Yhat[[i,3]] = Q1[[2,15,2]] + Q1[[2,11,2]]*X[[i,1]]
+Q1[[2,12,2]]*X[[i,2]]+Q1[[2,13,2]]*X[[i,3]]+Q1[[2,14,2]]*X[[i,4]];
d2[[i,1]]=(X[[i,5]]-Yhat[[i,1]])^2+(1/3)*(X[[i,5]]-Yhat[[i,1]])
*((X[[i,7]] - Yhat[[i,3]]) - (X[[i,6]] - Yhat[[i,2]])) +
(1/12)*((X[[i,6]] - Yhat[[i,2]])^2 + (X[[i,7]] - Yhat[[i,3]])^2);
AppendTo[V1, {i, Q1[[1]], Q1[[2,1,2]], Q1[[2,2,2]], Q1[[2,3,2]]

```

```
,Q1[[2,4,2]],Q1[[2,6,2]], Q1[[2,7,2]], Q1[[2,8,2]], Q1[[2,9,2]]
,Q1[[2,5,2]],Q1[[2,10,2]], Yhat[[i,1]], Yhat[[i,2]], Yhat[[i,3]]
,d2[[i,1]]}];
Print[a]];
Export["D:\\payanname\\Article1\\cross\\crossvalidation.xlsx", {V1}];
XX=Drop[Import["D:\\payanname\\Article1\\cross\\crossvalidation.xlsx"
,{"Data", 1}], {1}];
MPE = Mean[Transpose[XX][[16]]];
AppendTo[W, {k1, k2, MPE}];
Export["D:\\payanname\\Article1\\cross\\MPEcrossvalidation.xlsx",{W}];
```

برنامه مربوط به اعتبار سنجی متقابل برای مثال شبیه سازی در بخش ۱.۳.۴

```
X = Import["D:\\payanname\\article3\\simulation\\data18.xlsx",
{"Data", 1}];
n = Length[Transpose[X][[1]]];
p = 3;
v = 0.1;
A = {a1, a2, a3, a4, a0};
mw = {mw1, mw2, mw3};
lw = {lw1, lw2, lw3};
rw = {rw1, rw2, rw3};
B = {mw1, mw2, mw3, lw1, lw2, lw3, rw1, rw2, rw3, mw0, lw0, rw0};
V1 = {"i", "Z", "mw1", "mw2", "mw3", "lw1", "lw2", "lw3", "mB", "lB",
"rB", "Ym", "Yl", "Yr", "d2"};
W = {"\\[Lambda]", "MPE"};
Y = Array[y, {n, 3}];
Xm = Array[x, {n, p}];
XL = Array[xs2, {n, p}];
XR = Array[xr2, {n, p}];
K1 = K2 = 1;
Yhat = Array[yhat, {n, 3}];
d2 = Array[z, {n, 1}];
For[i = 1, i <= n, i++,
Y[[i,1]] = X[[i,4]];
Y[[i,2]] = X[[i,5]];
```

```

Y[[i,3]] = X[[i,6]];
Xm[[i,1]] = X[[i,1]];
  Xm[[i,2]] = X[[i,2]];
Xm[[i,3]] = X[[i,3]];
];
a = 0;
\[Lambda] = 0.1;
For[i = 1, i <= n, i++,
  Yhat[[i,1]] = mw0 + Sum[mw[[j]]*X[[i,j]], {j, 1, p}];
  Yhat[[i,2]] = lw0 + Sum[lw[[j]]*X[[i,j]], {j, 1, p}];
  Yhat[[i,3]] = rw0 + Sum[rw[[j]]*X[[i,j]], {j, 1, p}];
];
For[i = 1, i <= n, i++,
a = a + 1;
X1 = Drop[Import["D:\\payannname\\article3\\simulation\\data18.xlsx",
{"Data", 1}], {i}];
  n1 = n - 1;
Q1 = NMinimize[
{K1*Sum[(X1[[i,4]] - (mw0 + Sum[mw[[j]]*X1[[i,j]], {j, 1, p})))^2,
{i, 1, n1}] + K2*(Sum[(X1[[i,4]] - X1[[i,5]]) -
((mw0 + Sum[mw[[j]]*X1[[i,j]], {j, 1, p}]) -
(lw0 + Sum[lw[[j]]*X1[[i,j]], {j, 1, p})))^2, {i, 1, n1}] +
Sum[((X1[[i,4]] + X1[[i,6]]) - ((mw0 + Sum[mw[[j]]*X1[[i,j]], {j,1,p}])
+(rw0 + Sum[rw[[j]]*X1[[i,j]], {j, 1, p})))^2,
{i, 1, n1}]) + \[Lambda]*(mw0^2 + Sum[mw[[j]]^2, {j, 1, p}]),
{lw1 >= 0, lw2 >= 0, lw3 >= 0, rw1 >= 0, rw2 >= 0, rw3 >= 0,
lw0 >= 0, rw0 >= 0}}, B];
Yhat[[i,1]] = Q1[[2,10,2]]+Q1[[2,1,2]]*X[[i,1]]+Q1[[2,2,2]]*X[[i,2]]
+Q1[[2,3,2]]*X[[i,3]];
Yhat[[i,2]] = Q1[[2,11,2]]+Q1[[2,4,2]]*X[[i,1]]+Q1[[2,5,2]]*X[[i,2]]
+Q1[[2,6,2]]*X[[i,3]];
Yhat[[i,3]] = Q1[[2,12,2]] + Q1[[2,7,2]]*X[[i,1]] +
Q1[[2,8,2]]*X[[i,2]] + Q1[[2,9,2]]*X[[i,3]];
d2[[i,1]] = (X[[i,4]] - Yhat[[i,1]])^2 + (1/3)*(X[[i,4]] - Yhat[[i,1]])

```

```

*((X[[i,6]] - Yhat[[i,3]]) - (X[[i,5]] - Yhat[[i,2]])) +
(1/12)*((X[[i,5]] - Yhat[[i,2]])^2 + (X[[i,6]] - Yhat[[i,3]])^2);
AppendTo[V1, {i, Q1[[1]], Q1[[2,1,2]], Q1[[2,2,2]], Q1[[2,3,2]],
Q1[[2,4,2]], Q1[[2,5,2]], Q1[[2,6,2]], Q1[[2,10,2]], Q1[[2,11,2]],
Q1[[2,12,2]], Yhat[[i,1]], Yhat[[i,2]], Yhat[[i,3]], d2[[i,1]]}];
Print[a]]
Export["D:\\payannname\\Article2\\cross\\crossvalidation.xlsx", {V1}];
XX = Drop[Import[
"D:\\payannname\\Article2\\cross\\crossvalidation.xlsx"
,{"Data", 1}],{1}];
MPE = Mean[Transpose[XX][[15]]];
AppendTo[W, {\[Lambda], MPE}];
Export["D:\\payannname\\Article2\\cross\\MPEcrossvalidation.xlsx",{W}];

```

برنامه مربوط به شبیه سازی داده در نرم افزار R

```

n=50
p=3
R=0.99
s=1
W<-matrix(rnorm(n*p,5,1),nrow=n,ncol=p)
X<-matrix(0,n,p)
for(i in 1:n){
for(j in 1:p)
X[i,j]=sqrt(1-R^2)*W[i,j]+R*W[i,p] }
e=matrix(rnorm(n*1,0,s^2),nr=n)
A=t(X)%*%X
eigen(A)
B=matrix(eigen(A)$ vectors[,1],nrow=3)
Y=X%*%B+e

```

مراجع

- [۱] آرشی. م، (۱۳۸۷)، پایان نامه دکتری: ”برآوردگرهای بهبود یافته در مدل رگرسیون خطی چندگانه با خطاهای دارای توزیع بیضی گون”، دانشگاه فردوسی مشهد
- [۲] اسدالهی، م.، (۱۳۹۵)، پایان نامه کارشناسی ارشد: ”برآورد ضرایب مدل های رگرسیون خطی بر اساس متغیر وابسته فازی و متغیرهای مستقل فازی و غیر فازی”، دانشگاه بیرجند،
- [۳] خوئی، م.، (۱۳۹۵)، پایان نامه کارشناسی ارشد: ”رگرسیون ریج به ظاهر ناهمبسته در مدل های نیمه پارامتری”، دانشگاه سمنان،
- [۴] ربیعی، م، آرشی م و فرخی م، (۱۳۹۵)، ”رگرسیون ریج فازی با ورودی و خروجی فازی”، ششمین کارگاه آمار و احتمال فازی کشوری، شاهرود، ایران.
- [۵] روزبه، م.، (۱۳۹۰)، پایان نامه دکتری: ”برآورد در مدل های خطی جزئی”، . دانشگاه فردوسی مشهد،
- [۶] طاهری م، ماشین چی م، (۱۳۹۲)، ”مقدمه ای بر احتمال و آمار فازی” چاپ دوم، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان،
- [۷] فرخی م، ربیعی م و آرشی م، (۱۳۹۵)، ”رگرسیون ریج فازی دو پارامتری با ورودی دقیق و خروجی فازی”، ارسال به مجله اندیشه آماری (تحت داوری)
- [۸] فرخی م، ربیعی م و آرشی م، (۱۳۹۵)، ”تحلیل رگرسیون ریج فازی وزن دار شده دو پارامتری با ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی”، ششمین کارگاه آمار و احتمال فازی کشوری، شاهرود، ایران.
- [۹] نجاریان، س.، (۱۳۹۱)، پایان نامه کارشناسی ارشد: ”بررسی رفتار برآوردگر ریج در مدل های خطی منفرد”، دانشگاه صنعتی شاهرود،
- [۱۰] نیرومند، ح.ع.، (۱۳۸۷)، ”تحلیل رگرسیون خطی ابزاری برای تحقیق“ انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

-
- [11] Akdeniz, F. and Kacilanlar, S.,(1995), "On the almost unbiased generalized Lui estimator and unbiased estimation of the bias and MSE," **Communication in Statistics-Theory and Methods**, 24(7): 1789-1797.
- [12] Akdeniz, F., Erol, H. (2003), "Mean squared error matrix comparisons of some biased estimators in linear regression", **Communications in Statistics-Theory and Methods** , 32(12): 2389-2413.
- [13] Arabpour, A. R., and M. Tata, (2008), "Estimating the parameters of a fuzzy linear regression model" **Iranian Journal of Fuzzy Systems** 5(2): 1-19.
- [14] Balasundaram, S, Kapil, (2011), "Weighted fuzzy ridge regression analysis with crisp inputs and triangular fuzzy outputs" **International Journal of Advanced Intelligence Paradigms**, 3(1): 67-81.
- [15] Belsley, D. A., Kuh, E. and Welsch, R. E., (1980),"Regression Diagnostics," John-Wiley, New York.
- [16] Cao, B. Y. (2010). **Optimal Models and Methods with Fuzzy Quantities**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg..
- [17] Celmins, A. (1987). "Least squares model fitting to fuzzy vector data", **Fuzzy Sets and Systems**, 22(3): 260-269.
- [18] Chang, Y. H. O. (2001). "Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures", **Fuzzy Sets and Systems**, 119(2): 225-246.
- [19] Chen, S. P. and Dang, J.F. (2008), "A variable spread fuzzy linear regression model with higher explanatory power and forecasting accuracy". **Information Sciences**, 178(20):3973-3988.
- [20] Diamond, P. (1988). "Fuzzy least squares", **Information Sciences**, 46(3): 141-157.
- [21] Diamond, P. and Korner, R. (1997). "Extended fuzzy linear models and least squares estimates", **Computers and Mathematics with Applications**, 33(9): 15-32
- [22] Diamond. P, (1987), "Least squares fitting of several fuzzy variables", In 2nd Int. Fuzzy Syst. Assoc. IFSA World Congress, (pp. 329-331).
- [23] Dubios, D., Prade, H. (1980), "Theory and Application" , **Fuzzy sets and systems**

- [24] Donoso, S., Marín, N. and Vila, M.A., (2007), "Fuzzy ridge regression with non symmetric membership functions and quadratic models", **In International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning** (pp. 135-144). Springer Berlin Heidelberg.
- [25] Donoso, S. (2006), "Análisis de regresión difusa: nuevos enfoques y aplicaciones". Tesis doctoral, Universidad de Granada, .
- [26] Fung, G. and Mangasarian, O.L. (2001) "Proximal support vector machine classifiers", in Provost, F. and Srikant, R. (Eds.): Proceedings of KDD-2001: Knowledge Discovery and Data Mining, 59 (1-2): 77–86, ACM, New York.
- [27] Galton, F.,(1886), "Regression towards mediocrity in hereditary stature," **The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland**, 15 : 246-263.
- [28] Gildeh, B. S., Gien, D. E. N. I. S. (2002), "A goodness of fit index to reliability analysis in fuzzy model". **In 3rd WSEAS international conference on fuzzy sets and fuzzy systems**. Interlaken, Switzerland (pp. 11-14).
- [29] Gibbons. D. G (1981), "A simulation study of some ridge estimators", **Journal of the American Statistical Association** , 76(373): 131-139.
- [30] Hassanpour H, Maleki HR, and Yaghoobi MA, (2010) "Fuzzy linear regression model with crisp coefficients: a goal programming approach", **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, 7(2):1–153.
- [31] Hoerl, A. E. and Kennard, R. W., (1970), "Ridge regression biased estimation for nonorthogonal problems", **Technometrics** 12(1): 69–82.
- [32] Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman.(2001) , **The Elements of Statistical Learning: data mining, inference, and prediction**. Springer.
- [33] Hong, D. H. and et.al, (2004), "Ridge estimation for regression models with crisp inputs and Gaussian fuzzy output", **Fuzzy Sets and Systems** ,142(2): 307-319.
- [34] Kim, B., Bishu, R. R. (1998), "Evaluation of fuzzy linear regression models by comparing membership functions", **Fuzzy sets and systems**, 100(1): 343-352.
- [35] Kao, C. and Chyu, C. L. (2003). "Least-squares estimates in fuzzy regression analysis". **European Journal of Operational Research**, 148(2): 426-435.

-
- [36] Kao, Chiang, and Chin-Lu Chyu, (2002), "A fuzzy linear regression model with better explanatory power" **Fuzzy sets and systems** 126(3) : 401-409.
- [37] Kao, Chiang, and Chin-Lu Chyu, (2003), "Least-squares estimates in fuzzy regression analysis" **European Journal of Operational Research** 148(2) : 426-435.
- [38] Lu, J. and Wang, R. (2009), "An enhanced fuzzy linear regression model with more flexible spreads", **Fuzzy Sets and Systems**, 160(17): 2505-2523.
- [39] Liu, K. J., (2003), "Using Liu type estimator to combat collinearity", **Communication in Statistics-Theory and Methods**, 32(5): 1009–1020.
- [40] Marquart, D. W.,(1970), "Generalized inverse ridge regression biased linear estimation and non-linear estimation", **Technometrics**, 12(3): 591-612.
- [41] Mason. R. L, Gunst. R. F and Webster. J. T., (1975), "Ridge analysis and problems of multicolliearity",**Communications in Statistics-Theory and Methods** ,4: 277-292
- [42] Mc.Donald.G.C,Galarneau.D.I.(1975), "Amonte Carlo evalution of some ridge type estimators", **Journal of the American Statistical Association** 70(350) : 407-416.
- [43] Mohammadi, J., Taheri, S.M. (2003), "Pedomodels fitting with fuzzy least squares regression", **Iranian J. Fuzzy Systems**, 1 (2): 45-62
- [44] Montgomery, Douglas C and Peck, Elizabeth A and Vining, G Geoffrey ,(2015), **Introduction to linear regression analysis**, John Wiley & Sons
- [45] Newhouse. J. P. and Oman. S. D. (1971), "An evalution of ridge estimators", **Rand Corporation**, P-716-PR.
- [46] Rao, C. R. and Toutenburg, H., (1995), **Linear Models: Least Squares and Alternatives**, 2nd Edition, Springer.
- [47] Saunders, G., Gammerman, A. and Vovk, V. (1998) "Ridge regression learning algorithm in dual variables", Proceedings of the 15th Int. Conf. on Machine Learning, ICML'98, pp.515–521
- [48] Swindel, B. F. (1976). "Good ridge estimators based on prior information", **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 5(11): 1065-1075.
- [49] Tanaka, H., Uegima, S. and Asai, K. (1982). "Linear regression analysis with fuzzy model", **IEEE Transactions on Systems. Man. and Cybematics**, 12: 903-907

- [50] Tanaka. H , Lee. H ,(1998) ,” Interval regression analysis by quadratic programming approach, **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, 6(4):473-481
- [51] Woods, H. and et.al, (1932), ”Effect of composition of Portland cement on heat evolved during hardening”, **Industrial & Engineering Chemistry**, 24(11): 1207-1214.
- [52] Wasserman, L. (2006), **All of Nonparametric Statistics**, Springer Texts in Statistics. Springer , New York
- [53] Xu, R. (1991),” A linear regression model in fuzzy environment”, **Advances in Modeling , Simulation**, 27: 31-40.
- [54] Xu, R. and Li, C. (2001),” Multidimensional least squares fitting with a fuzzy model”, **Fuzzy Sets and Systems**, 119: 215-223.
- [55] YAN, X. and SU, X. G.,(2009), **Linear regression analysis**, theory and computing. World Scientific.
- [56] Zadeh, L. A. and et.al, (1978), ”Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility”, **Fuzzy Sets and Systems** , 100: 9-34.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Extention principle	اصل توسعه
Cross-validation	اعتبار سنجی متقابل
Fuzzy numbers	اعداد فازی
LR fuzzy numbers	اعداد فازی LR
h -cut	h - برش
Left spread	پهنای چپ
Right spread	پهنای راست
Predictor	پیش بین
Membership function	تابع عضویت
Estimation error	خطای برآورد
Relative error of estimate	خطای نسبی برآورد
Estimated error	داده‌ی برآورد شده
Crisp	دقیق
Linear regression	رگرسیون خطی
Multiple linear regression	رگرسیون خطی چندگانه
Variance inflation factor	عامل تورم واریانس
Condition number	عدد شرطی
Parabolic number	عدد فازی سهموی
Symmetric fuzzy number	عدد فازی متقارن
Triangular fuzzy number	عدد فازی مثلثی
Normal fuzzy number	عدد فازی نرمال
Least absolute error	کمترین قدر مطلق خطا
Least square error	کمترین توان‌های خطا
Gauss-Markov	گوس - مارکف
Smoothing matrix(Hat matrix)	ماتریس هموار سازی (ماتریس هت)
Input variable	متغیر ورودی
Output variable	متغیر خروجی

Fuzzy set.....	مجموعه فازی.....
Positive definite	معین مثبت
Eigen value.....	مقدار ویژه.....
Goodness of fit	نیکویی برازش
Multiple collinearity.....	همخطی چندگانه.....

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Condition number	عدد شرطی
Crisp	دقیق
Cross-validation	اعتبار سنجی متقابل
Eigen value	مقدار ویژه
Estimated data	داده‌ی برآورد شده
Estimation error	خطای برآورد
Extention principle	اصل توسیع و گسترش
Fuzzy numbers	اعداد فازی
Fuzzy set	مجموعه فازی
Gauss-Markov	گوس-مارکف
Goodness of fit	نیکویی برازش
h -cut	h -برش
Input variable	متغیر ورودی
Linear regression	رگرسیون خطی
LR fuzzy numbers	اعداد فازی LR
Membership function	تابع عضویت
Multiple collinearity	همخطی چندگانه
Multiple linear regression	رگرسیون خطی چندگانه
Normal fuzzy number	عدد فازی نرمال
Observed data	داده‌ی مشاهده شده
Output variable	متغیر خروجی
Parabolic fuzzy number	عدد فازی سهموی
Positive definite	معین مثبت
Relative error of estimate	خطای نسبی برآورد
Smoothing matrix(Hat matrix)	ماتریس هموار سازی(ماتریس هت)
Symmetric fuzzy number	عدد فازی متقارن
The least absolute error	کمترین قدرمطلق خطا

The least square error	کمترین توان دوم خطا
Triangular fuzzy number	عدد فازی مثلثی
Left Spread	پهنای چپ
Right spread	پهنای راست
Variance inflation factor	عامل تورم واریانس

Aabstract

In practical problems with non-exact component, the use of fuzzy sets eliminates some of the current restriction. Non-exact statistical analysis with non-precise (fuzzy) data has a widespread application in various fields of statistical sciences, such as quality control, regression and reliability. Regression analysis is a method to determine and analyze the relationship between statistical variables. In classical regression, it is assumed, variables and their corresponding observations, are crisp and there is no linear relationship among the predictor variables. However, they might not be correct. For example observations are non-exact or they might have reported non-precise. In such situations classical method cannot be used, instead we use the concept of fuzzy sets. In classical regression, if problem of multicollinearity exists, the result of least squares regression cannot be trusted. Many methods to deal with this problem are proposed, such as ridge regression, lasso regression, principal component regression and etc. In fuzzy regression, when the multicollinearity is present, the validity of model is reduced. In this regard, few studies have been done, that in this thesis we describe some of these methods and evaluate them. At the end, to extend the existing results, when the multicollinearity exists between the independent variables, for input and output fuzzy variables, we propose a new fuzzy ridge regression model. To check the existence of multicollinearity problem between the fuzzy predictor variables, we have defined a generalized variance inflation factor. In order to evaluate the goodness of fit, we have computed the mean squared prediction error and generalize coefficient of determination in simulation and real data examples.

Keywords: Fuzzy least squares, Multicollinearity, Fuzzy ridge regression



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Statistics

**Study on some ridge regression approaches
in fuzzy environment**

By: Masoumeh Farrokhi

Supervisors

Dr. Mohammadreza Rabiei

Dr. Mohammad Arashi

January 2017