

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدايتنا



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضیات مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مدل سازی تصادفی برای سرمایه گذاری های ریسکی در صنعت بیمه

نگارنده: سید حسن اسحقى

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

استاد مشاور

دکتر سید مجتبی میرلوحی

بهمن ۱۳۹۵

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است
به پاس قلب‌های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید
و به پاس محبت‌های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند
این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم
با سپاس از سه وجود مقدس:
آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...
موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...
و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشن‌گر راهمان باشند...

● پدرانمان

● مادرانمان

● استادانمان

سپاس گزاری...

سپاس خدای را به وسعت همه آن سپاسی که ملائکه مقرب و خلائق مکرم و ستاینندگان پسندیده او را شکر گفته اند. برترین شکر چون برتری پروردگارمان برهر وجودی.

سپاس بی پایان از استاد راهنمای ارجمندم سرکار خانم الهام دسترنج که همواره خوشه چین دانش و خرد ایشان بوده‌ام و تداوم همکاری با ایشان نهایت آرزو و مایه افتخارم می‌باشد.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسشان را و تشکر می‌کنم از دوستان عزیزم که همواره بهترین پشتیبان من بودند.

سید حسن اسحقى

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب سید حسن اسحقى دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان مدل سازی تصادفی برای سرمایه گذاری های ریسکی در صنعت بیمه ، تحت راهنمایی الهام دسترنج متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید حسن اسحقى

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

ریاضیات مالی به رفتار بازارهای مالی می‌پردازد که کلیات آن تعیین میزان ریسک و نرخ بازگشت سرمایه است. با شناسایی بازارها می‌توان یک سرمایه‌گذاری مناسب با ریسک کمتر و بازگشت بیشتر، انجام داد. مدل‌سازی‌های مختلفی برای بازارهای مالی انجام شده است که از مهم‌ترین آنها می‌توان به معادلات دیفرانسیل تصادفی اشاره کرد که روند و میزان نوسانات بازار را مدل‌سازی می‌کند. در این پایان‌نامه ابتدا پیش‌نیازها و تعاریف، سپس انواع مدل‌سازی‌های تصادفی و روابط آنها را بررسی می‌کنیم و در انتها به سرمایه‌گذاری در صنعت بیمه، که یکی از بازارهای مهم مالی امروز است، می‌پردازیم و یک رابطه مجانبی را برای احتمال شکست شرکت بیمه ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: مدل‌سازی تصادفی، حرکت براونی، مدل‌سازی فصلی، احتمال شکست، سرمایه‌گذاری ریسکی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. سیدحسن اسحق، الهام دسترنج و محمد رامشگر، مدلسازی بازارهای فصلی، چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه یزد، ۴۷۳-۴۷۰، شهریور ۱۳۹۴.

فهرست مطالب

س فهرست تصاویر

۱ تعاریف اولیه

۱	۱.۱	تعاریف و مفاهیم آنالیز
۲	۲.۱	اندازه و اندازه پذیری
۵	۳.۱	نظریه احتمال
۷	۱.۳.۱	متغیر تصادفی-امید ریاضی
۹	۲.۳.۱	فرآیند تصادفی
۱۰	۳.۳.۱	امید شرطی
۱۰	۴.۳.۱	یادآوری چند توزیع
۱۹	۵.۳.۱	انتگرال گیری تصادفی
۲۰	۶.۳.۱	برخی اصطلاحات سرمایه گذاری

۲ مدل های تصادفی برای سرمایه گذاری های ریسکی

۲۵	۱.۲	مقدمه
۲۵	۱.۱.۲	مدل پرش انتشار
۲۶	۲.۱.۲	مدل بلک - شولز
۲۷	۳.۱.۲	مدل واسیچک
۳۰	۴.۱.۲	مدل کاکس-اینگرسول-راس
۳۳	۲.۲	ارائه یک مدل برای بازارهای فصلی
۳۳	۳.۲	اهمیت ارائه مدل های تناوبی
۳۴	۴.۲	روابط مدل فصلی ارائه شده

۳ بررسی روابط شرکت بیمه

۳۷	۱.۳	احتمال شکست
۳۸	۱.۱.۳	احتمال شکست در شرکت های بیمه
۴۳	۲.۳	تجزیه و تحلیل تقریبی احتمال شکست

۵۱	آ	لم‌های مورد نیاز
۵۱	۱.آ	لم‌ها و گزاره
۵۳		مراجع
۵۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۹		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱۳	تابع چگالی احتمال توزیع نمایی	۱.۱
۱۳	تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت پیوسته	۲.۱
۱۵	تابع چگالی احتمال توزیع پواسون	۳.۱
۱۶	تابع چگالی احتمال توزیع ارلانگ	۴.۱
۱۷	فرآیند تجدید با زمان‌های نگهداری شده S_i و زمان‌های پرش J_n	۵.۱
۱۸	شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد	۶.۱
۲۶	مدل پرش-انتشار با یک پرش و دو پرش	۱.۲
۲۷	مدل بلک شولز	۲.۲
۲۸	مدل واسیچک	۳.۲
۳۱	مدل کاکس-اینگرسول-راس	۴.۲
۳۱	نمونه‌ای از فرآیند دو متغیره X_i	۵.۲
۳۴	مدل تناوبی	۶.۲

فصل ۱

تعاریف اولیه

از آنجا که آشنایی با برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه برای درک بهتر این پایان نامه مورد نیاز است، در این بخش سعی بر آن شده است که به طور خلاصه به آنها پرداخته شود. مطالب ارائه شده در این بخش به جز مواردی که به روشنی ذکر شده است، از مراجع [۳۷] و [۳۶] و [۲۹] آورده شده است.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم آنالیز

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ را یک **نرم** روی V گوئیم هرگاه

$$۱. \text{ برای هر } x \in V, \|x\| \geq ۰,$$

$$۲. \text{ برای هر } x \in V \text{ و } \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$۳. \text{ برای هر } x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$۴. \text{ برای هر } x \in V, \|x\| = ۰ \text{ اگر و فقط اگر } x = ۰.$$

به $(V, \|\cdot\|)$ **فضای نرم‌دار** می‌گوئیم. هرگاه V با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای متریک تام باشد، به آن **فضای باناخ** می‌گوئیم.

۲.۱ اندازه و اندازه پذیری

مفاهیمی که در این بخش و بخش بعدی آمده، از مرجع [۴۱] می باشد. فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی و C دسته ای ناتهی از زیر مجموعه های X باشد.

۱. C را یک نیم حلقه از زیر مجموعه های X گوئیم اگر C تحت اشتراک های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماع متناهی از اعضای دوبه دو مجزای C باشد.

۲. C را یک حلقه از زیر مجموعه های X گوئیم اگر C تحت اجتماع های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. C را یک نیم میدان (نیم جبر) از زیر مجموعه های X گوئیم اگر C تحت اشتراک های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماع متناهی از اعضای دوبه دو مجزای C باشد.

۴. C را یک σ -میدان از زیر مجموعه های X گوئیم اگر C تحت اجتماع های شمارش پذیر و مکمل بسته باشد.

دسته های گوناگون از بازه ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب های دکارتی آنها در سایر فضاها اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه هستند. فرض کنیم C دسته ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه ها باشد، منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

$$(1) \text{ برای هر } A \text{ در } C, 0 \leq \mu(A) \leq \infty,$$

(۲) هرگاه $\{A_n, n \geq 1\}$ دنباله ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبه دو مجزای C باشد به طوری که $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

فرض کنیم C دسته ای دلخواه از زیر مجموعه های X باشد، (برحسب رابطه ی شمول) کوچکترین σ -میدان شامل C از زیر مجموعه های X را σ -میدان تولید شده توسط C می نامیم و به صورت $\sigma(C)$ نشان می دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام σ -جبرهای شامل C است. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و C دسته تمام بازه ها باشد. σ -جبر تولید شده توسط C را σ -جبر بورل گوئیم و با $\mathcal{B}$ نشان می دهیم. دسته تمام بازه ها به صورت $[a, b]$ یا $[a, b)$ یا (a, b) که در آن a, b اعداد گویا هستند و یا مجموعه شعاع هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$ اند.

ملاحظه ۱.۲.۱. الف) به طور کلی در یک فضای توپولوژیکی σ -میدان تولید شده توسط مجموعه های باز را σ -میدان بورل می نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می دهیم.

(ب) دسته مجموعه های بورل، کوچکترین σ -میدانی است که حاوی همه مجموعه های باز است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم C سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی C باشد. **اندازه μ را روی C ، متناهی گوییم** هرگاه برای هر A در C ، $\mu(A) < \infty$ و σ -متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq 1\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n ، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای σ -متناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیر مجموعه دلخواه A از X **اندازه خارجی A** را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n \right\}$$

ملاحظه ۴.۲.۱. الف) برای $I \in \mathcal{H}$ ، $\mu^*(I) = \mu(I)$

ب) اگر $\{A_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای دلخواه باشد آنگاه

$$\mu^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n).$$

زیر مجموعه A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$$

ملاحظه ۵.۲.۱. الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیراند.

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

تعریف ۶.۲.۱. منظور از یک فضای اندازه‌پذیر عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$ ، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند X و σ -میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو A را یک مجموعه اندازه‌پذیر می‌نامیم. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ یک اندازه روی σ -میدان $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۷.۲.۱. گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، تقریباً همه جا^۱ یا (a.e.) برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه‌پذیر و دارای اندازه μ صفر باشند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B)$ را اندازه‌پذیر یا $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $u \in B$ ، داشته باشیم

$$f^{-1}(U) := \{x \in X; f(x) \in U\} \in \mathcal{A}.$$

^۱Almost everywhere

تابع $Y : (\Omega, F) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B)$ را در نظر بگیرید. σ - میدان F_Y تولید شده توسط Y ، کوچکترین σ - میدان روی Ω شامل مجموعه های

$$Y^{-1}(B); \quad B \in B,$$

می باشد، به عبارت دیگر

$$F_Y = \{Y^{-1}(B); B \in B\}.$$

به وضوح Y نسبت به F_Y ، اندازه پذیر است.

انتگرال

تعریف ۹.۲.۱. اگر A مجموعه ای دلخواه از σ - میدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه مجموعه ای A را با χ_A نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع ساده تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد. می توان نوشت $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$ ، روشن است که A_i ها مجزا هستند.

اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_i ها اندازه پذیراند. انتگرال φ نسبت به اندازه ی μ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می کنیم $\circ \times \infty = \circ$. فرض می کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A \varphi d\mu : \varphi \leq f \right\},$$

که در آن φ تابعی ساده و نامنفی است.

ملاحظه ۱۱.۲.۱. فرض کنیم f تابع اندازه پذیر روی X و $A_1, A_2, \dots$ دنباله ای از اعضای دوبه دو مجزای A باشد و $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. در این صورت خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

قرارداد ۱۲.۲.۱. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی مجموعه اندازه‌پذیر A ، انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

تعریف ۱۳.۲.۱. اگر f تابعی حقیقی با دامنه دلخواه باشد، متناظر با f برای هر x از دامنه f توابع f^- و f^+ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

f^- و f^+ را به ترتیب جزء منفی و جزء مثبت f می‌نامیم. در این صورت $f = f^+ - f^-$ ، یعنی هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $|f| = f^+ + f^-$. روشن است اگر f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه f^- و f^+ نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید (X, A, μ) یک فضای اندازه باشد. تابع f که روی X تعریف شده است را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه $\int f^-$ و $\int f^+$ هر دو متناهی باشند. در این صورت برای هر $A \in \mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

تعریف ۱۵.۲.۱. تابع G را ضد مشتق (تابع اولیه) f روی $[a, b]$ گویند اگر و فقط اگر

(۱) G روی $[a, b]$ پیوسته باشد

(۲) برای هر x در (a, b) رابطه زیر را داشته باشیم.

$$G'(x) = f(x)$$

قضیه ۱۶.۲.۱. قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته باشد و G یک تابع اولیه f روی $[a, b]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

۳.۱ نظریه احتمال

نظریه‌ی احتمال مطالعه رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر، نظریه احتمال به شاخه‌ای از ریاضیات گویند که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. هسته تئوری احتمال را متغیرهای تصادفی و فرآیندهای تصادفی و پیشامدها تشکیل می‌دهند. نظریه احتمال علاوه بر توضیح پدیده‌های تصادفی به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازد که لزوماً تصادفی نیستند ولی با تکرار زیاد دفعات آزمایش نتایج از الگویی مشخص پیروی می‌کنند، مثلاً در آزمایش پرتاب سکه یا تاس با تکرار آزمایش می‌توانیم احتمال وقوع پدیده‌های مختلف را حدس بزنیم و مورد بررسی قرار دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. فضای احتمال عبارت است از فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به‌طوری‌که $P(\Omega) = 1$ ،
را فضای نمونه، اعضای $\mathcal{F}$ را پیشامد و P را اندازه احتمال می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی $A \in \mathcal{F}$ را **P-پوچ** می‌نامیم هرگاه $P(A) = 0$.

تعریف ۳.۳.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **کامل** یا **تام** می‌نامیم هرگاه $\mathcal{F}$ شامل تمام زیرمجموعه‌های
هر مجموعه‌ی P -پوچ باشد.

به روشنی، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را می‌توان با اضافه کردن زیر مجموعه‌های هر مجموعه‌ی
 P -پوچ به $\mathcal{F}$ کامل نمود.

تعریف ۴.۳.۱. اگر $P(A) = 1$ می‌گوییم پیشامد A با احتمال ۱ رخ می‌دهد یا A قریب به یقین^۲ رخ
می‌دهد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ، $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ، $\dots$ ، $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ فضاهای اندازه پذیر باشند. زیر
مجموعه‌های $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ از $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ را برای $F_1 \subseteq \Omega_1$ ، $F_2 \subseteq \Omega_2$ ، $\dots$ ،
 $F_n \subseteq \Omega_n$ راست گوشه و برای $F_1 \in \mathcal{F}_1$ ، $F_2 \in \mathcal{F}_2$ ، $\dots$ ، $F_n \in \mathcal{F}_n$ راست گوشه اندازه
پذیر می‌نامیم. دسته راست گوشه‌های اندازه پذیر، یک نیم میدان روی $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ است.
 σ -میدان تولیدشده در $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ توسط نیم میدان راست گوشه‌های اندازه پذیر را σ -میدان
حاصلضربی نامیده و با نماد $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$ نشان می‌دهیم.
اگر برای هر i ، $1 \leq i \leq n$ یک اندازه روی $\mathcal{F}_i$ باشد، اندازه P روی نیم حلقه راست گوشه‌های اندازه پذیر
به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n) = P_1(F_1) \times P_2(F_2) \times \dots \times P_n(F_n).$$

تعریف ۶.۳.۱. گیریم $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ دسته‌ای از زیر- σ -میدان‌های $\mathcal{F}$ باشد. σ -میدان الحاقی این
دسته از σ -میدان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bigvee_{\alpha \in I} U_\alpha = \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)$$

از این پس، همه جا منظور از $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی
توپولوژی استاندارد و σ -میدان مفروض روی آنها σ -میدان بورل است و B نشانگر σ -میدان بورل
روی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه روی $(X, \mathcal{A})$ باشند. اندازه μ_1 را نسبت به اندازه μ_2
مطلقاً پیوسته می‌گوییم و می‌نویسیم $\mu_1 \ll \mu_2$ ، هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0).$$

^۲almost surely

قضیه ۸.۳.۱. (مشتق رادون-نیکودیم ^۳) فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه σ -متناهی روی $(X, \mathcal{A})$ باشند به طوری که $\mu_1 \ll \mu_2$. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی X وجود دارد به طوری که

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_1(A) = \int_A f d\mu_2.$$

۱.۳.۱ متغیر تصادفی-امید ریاضی

در سراسر این رساله توپولوژی مفروض روی فضاها ی اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ -میدان مفروض روی آنها σ -میدان بورل است.

اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضایی احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ **متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

معمولاً برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Z, U, \dots$ استفاده می‌کنیم. بردار تصادفی n -بعدی $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، تابعی است اندازه‌پذیر که دامنه آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مقادیر آن در $\mathbb{R}^n$ است یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$ داریم

$$\{\omega : \bar{X}(\omega) \in A\} = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F},$$

که در آن $\mathcal{B}_n$ ، σ -میدان بورل روی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، σ -میدان تولید شده توسط X که بانماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\},$$

تعریف ۱۰.۳.۱. اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد، تابع توزیع X که آن را با F_X نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

که در آن P_X اندازه القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. $\int_{\Omega} X dP$ را **امید ریاضی** X می‌گوییم و با نماد $E(X)$ نشان می‌دهیم.

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی، مثل $g(X)$ به طور طبیعی به صورت تعریف می‌شود.

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP.$$

^۳Radon-Nikodym Derivation

تعریف ۱۲.۳.۱. واریانس متغیر تصادفی X را با $\sigma^2(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma^2(X) = E[(X - E(X))^2].$$

به طور کلی اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد و

$$\int_{\Omega} |f(X(\omega))| P(\omega) < \infty$$

آن‌گاه

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) P(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) P_X(x).$$

تعریف ۱۳.۳.۱. اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را **کواریانس** می‌نامیم. (اگر دو متغیر یکی باشند کواریانس برابر واریانس خواهد شد) برای متغیرهای تصادفی X و Y که امید ریاضی آنها $E[X] = \mu$ و $E[Y] = \nu$ هستند کواریانس برابر است با

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[(X - \mu)(Y - \nu)]$$

چنان‌که دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند کواریانس آنها صفر می‌شود.

خواص کواریانس

$$1. \text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$2. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$3. \text{برای هر } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{cov}(X, a) = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y) \quad (\text{ب})$$

$$\text{cov}(X + a, Y + b) = \text{cov}(X, Y) \quad (\text{ج})$$

تعریف ۱۴.۳.۱. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آنگاه $E(X^r)$ (که r یک عدد طبیعی است) را **گشتاور مرتبه r -ام** پیرامون مبدا می‌گوییم.

تعریف ۱۵.۳.۱. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد تابع مولد گشتاور X را با علامت $M_X(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

تعریف ۱۶.۳.۱. دو پیشامد A و B از فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **مستقل** است هرگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

تعریف ۱۷.۳.۱. دو متغیر تصادفی $(\Omega, F, P) \rightarrow (\mathbb{R}, B)$ X, Y را مستقل گوییم هرگاه σ - میدان‌های تولید شده توسط X و Y یعنی F_X و F_Y مستقل باشند، به این معنا که برای هر $A \in F_X$ و $B \in F_Y$ داشته باشیم.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$(F_X = \{X^{-1}(B) : B \in B\})$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۱۸.۳.۱. هرگاه خاصیتی در همه جا برقرار باشد، مگر جاهایی که احتمال وقوع آن‌ها صفر است، در این صورت گوییم برقراری خاصیت مورد نظر تقریباً محتمل است. اگر خاصیت بالا برقرار باشد آن را با نماد "a.s." نمایش می‌دهیم.

۲.۳.۱ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش فضای احتمال مفروض (Ω, F, P) است. همچنین σ - میدان مفروض روی فضاهای اقلیدسی σ - میدان بورل است.

همچنین خانواده‌ی $\{X_t\}_{t \in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک (Ω, F, P) را **فرآیند تصادفی**^۴ می‌نامیم (مجموعه‌ی اندیس گذار I می‌تواند شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد).

یک فرآیند تصادفی $\{X(t), t \in T\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است. یعنی، به ازاء هر $t \in T$ ، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. مجموعه اندیس گذار T را به‌طور معمول زمان نامیده و $X(t)$ را حالت فرآیند^۵ در زمان t می‌خوانیم. اگر مجموعه اندیس گذار T شمارا باشد، فرآیند را گسسته زمان^۶ نامیده، و اگر T پیوسته باشد فرآیند را پیوسته زمان^۷ می‌نامیم. مقادیری که متغیر تصادفی $X(t)$ اختیار می‌کند را فضای حالات^۸ نامیده و این فضا می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. گوییم فرآیند دارای نمونه‌های مستقل^۹ است، هرگاه به ازاء هر دنباله از اندیس‌ها مانند $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ، متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقل از هم بوده، و گوییم دارای نمونه‌های ایستا^{۱۰} است اگر $X(t+s) - X(t)$ برای تمامی t های متعلق به T دارای توزیع ثابت باشد.

^۴ Stochastic Process

^۵ Process State

^۶ Discrete-Time

^۷ Continuouse-Time

^۸ State Space

^۹ Independent Increment

^{۱۰} Stationary Increment

۳.۳.۱ امید شرطی

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضایی احتمال باشد و فرض کنید D زیر σ - میدانی از F و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال پذیر باشد. امید Y به شرط D یک متغیر تصادفی D - اندازه پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Y|D)$ نشان می دهیم و داریم

$$\forall D \in \mathcal{D}, \quad \int_D E(Y|D) dP = \int_D Y dP.$$

برای متغیر تصادفی انتگرال پذیر دلخواه Y ، امید شرطی به صورت زیر تعریف می شود.

$$E(Y|D) = E(Y^+|D) - E(Y^-|D),$$

که در آن برای هر ω ، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), 0\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), 0\}$.

خواص امید شرطی

۱. اگر $X \geq 0$ آن گاه

$$E(X|D) \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

$$E(X + Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \quad \text{a.s.} \quad ۲.$$

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \quad \text{a.s.}$$

۴. اگر $D = \{\Omega, \emptyset\}$ آن گاه

$$E(X|D) = E(X), \quad \text{a.s.}$$

۵. اگر $D_1 \subseteq D_2$

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \quad \text{a.s.}$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X), \quad \text{a.s.}$$

۴.۳.۱ یادآوری چند توزیع

تعریف ۱۹.۳.۱. در آمار و احتمالات تابع چگالی احتمال به تابعی اطلاق می شود که توزیعی آماری را به شکل انتگرالی نمایش دهد. مقدار این تابع غیرمنفی است که تعریف ریاضی آن به صورت زیر است. متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که مقدار آن در فضای اندازه $(X, \mathcal{A})$ تعریف شده است و توزیع احتمال آن اندازه $X * P$ در $(X, \mathcal{A})$ است، آنگاه چگالی X نسبت به اندازه مرجع μ در $(X, \mathcal{A})$ به واسطه مشتق رادون - نیکودیم به شکل زیر تعریف می شود.

$$f = \frac{dX * P}{d\mu}.$$

به عبارتی دیگر، به ازای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \in \mathcal{A}$ ، f می‌تواند هر تابع قابل اندازه‌گیری با ویژگی زیر باشد.

$$P[X \in A] = \int_{X^{-1}A} dP = \int_A f d\mu.$$

بر خلاف احتمالی که به یک متغیر تصادفی گسسته نسبت داده می‌شود، تابع چگالی احتمال می‌تواند مقادیر بیشتر از ۱ را نیز اختیار کند.

تعریف ۲۰.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی تصادفی مستقل از هم باشند. مجموع این دو متغیر تصادفی را با $S = X + Y$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $F_S(s)$ نشان دهنده تابع توزیع S باشد. طبق تعریف تابع توزیع داریم

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X + Y \leq s).$$

اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی گسسته با مقادیر نامنفی باشند، طبق قانون احتمال کل داریم.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{Y \leq s} P(X + Y \leq s \mid Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_{Y \leq s} P(X \leq s - y \mid Y = y)P(Y = y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

با توجه به استقلال X و Y می‌توانیم مجموع اخیر را به صورت زیر بنویسیم.

$$F_S(s) = \sum_{Y \leq s} F_X(s - y)f_Y(y). \quad (2.1)$$

تابع احتمال نظیر این تابع توزیع را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد.

$$f_S(s) = \sum_{Y \leq s} f_X(s - y)f_Y(y).$$

حال اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی باشند به‌طور مشابه برای این حالت داریم.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s P(X \leq s - y \mid Y = y)f_Y(y)dy \\ F_S(s) &= \int_0^s F_X(s - y)f_Y(y)dy \\ f_S(s) &= \int_0^s f_X(s - y)f_Y(y)dy. \end{aligned} \quad (3.1)$$

در احتمال روابط (۲.۱) و (۳.۱) پیچش^{۱۱} دوتایی توابع توزیع $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ نامیده می‌شوند و از نماد $F_X * F_Y$ به جای $F_S(s)$ استفاده می‌کنیم. پیچش را می‌توان برای یک جفت از توابع احتمال یا توابع چگالی احتمال تعریف کرد. حال اگر مجموع n متغیر تصادفی مستقل را به صورت $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ در نظر بگیریم و فرض کنیم F_i تابع توزیع X_i و $F^{(k)}$ تابع توزیع $X_1 + X_2 + \dots + X_k$ باشد، رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} \\ F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\ F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

حال اگر $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع F باشد، رابطه زیر را داریم.

$$F^{(n)}(S) = F^{n*}(S)$$

$F^{n*}(S)$ پیچش n ام $F(x)$ با خودش را نمایش می‌دهد.

تعریف ۲۱.۳.۱. توزیع نمایی توزیعی پیوسته است که دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد.

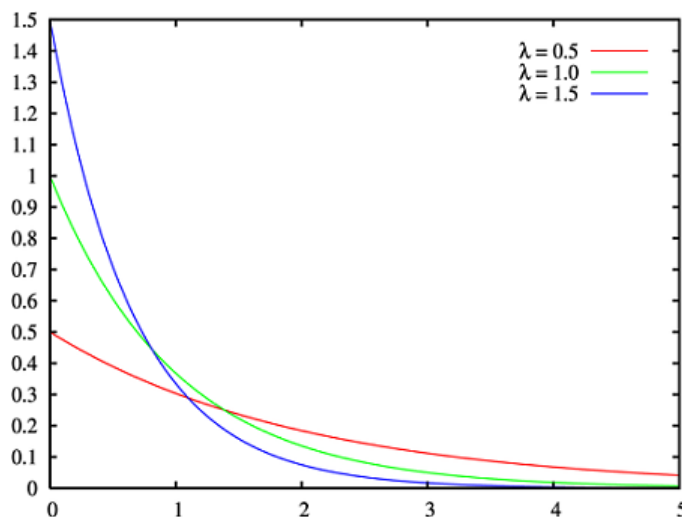
$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

که پارامتر λ در آن وارون میانگین (امید ریاضی) توزیع می‌باشد. توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع گاما^{۱۲} است که در آن پارامتر شکل برابر $k = 1$ و پارامتر مقیاس برابر $\theta = \frac{1}{\lambda}$ می‌باشد. از توزیع نمایی بیشتر در تخمین زدن مدت زمان لازم برای رخداد یک پیشامد خاص استفاده می‌شود. برای نمونه، مدت زمان لازم (از هم اکنون) تا رخداد یک زمین لرزه، آغاز یک جنگ، دریافت یک تماس تلفنی اشتباه، متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی می‌باشند. هرگاه پدیده‌ای از فرآیند پواسون همگن پیروی کند توزیع نمایی به عنوان توصیف کننده زمان بین دو رویداد در فرآیند پواسون به طور طبیعی ظاهر می‌شود. توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که خاصیت بی حافظگی دارد و از این رو بیشتر در حل مسائل احتمال به کار گرفته می‌شود. همچنین از این توزیع برای مدل سازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی استفاده می‌کنند. این ویژگی تابع را می‌توان این طور تفسیر کرد که رویدادهایی را که در گذشته اتفاق افتاده، می‌توانیم در نظر نگیریم و از زمان حال به بعد را مبدا زمان قرار بدهیم. شکل زیر تابع چگالی احتمال توزیع نمایی را نشان می‌دهد.

^{۱۱}Convolution

^{۱۲}Gamma Distribution

^{۱۳}توزیع گاما یکی از توزیع های احتمالی پیوسته است و دارای دو پارامتر مقیاس θ و پارامتر شکل k می‌باشد. اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه توزیع گاما معادل است با مجموع k متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{\theta}$.

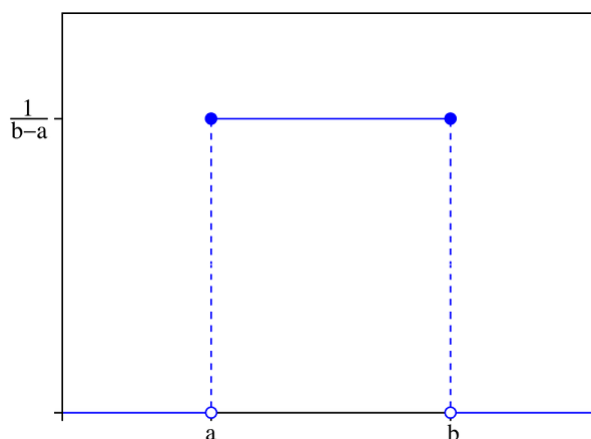


شکل ۱.۱: تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

تعریف ۲۲.۳.۱. در نظریه آمار و احتمال، توزیع یکنواخت پیوسته^{۱۴} یا توضیح راست گوشه از هم‌شاخه‌های توزیع‌های احتمال متقارن است. همچنین طول تمام فواصل هر عضو شاخه تحت این توزیع احتمال یکسان است. کران با دو مقدار a و b که کمینه و بیشینه هستند، تعریف می‌شود. شکل مختصر توزیع اغلب به صورت $U(a, b)$ است. تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت پیوسته چنین می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{برای } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{برای } x < a \text{ یا } x > b \end{cases}$$

همچنین نمودار آن به شکل زیر است.



شکل ۲.۱: تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت پیوسته

تعریف ۲۳.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{N(t) : t \geq 0\}$ را یک فرآیند شمارشی گوئیم هر گاه $N(t)$ تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند و در شرایط زیر صدق کند.

^{۱۴}Continuous Uniform Distribution

(۱) $N(t)$ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند،

(۲) اگر $s \leq t$ آنگاه $N(s) \leq N(t)$ ،

(۳) برای $s < t$ ، $N(t) - N(s)$ برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله زمانی $(s, t]$ رخ می‌دهند.

تعریف ۲۴.۳.۱. فرض کنیم که N متغیر تصادفی شمارشی با تابع احتمال $q_n = P(N = n)$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ باشد. همچنین فرض کنیم $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی و مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F و مستقل از N باشند. توزیع مجموع تصادفی $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ را توزیع مرکب می‌نامیم که در آن، اگر $N = 0$ آنگاه $S = 0$. تابع توزیع S طبق قانون احتمال کل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x)P(N = n) \end{aligned} \quad (۶.۱)$$

طبق تعریف (۲۰.۳.۱) داریم

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) = F * F * \dots * F(x) = F^{n*}(x)$$

معمولا نام توزیع مرکب را از نام توزیع N می‌گیرند. برای مثال اگر N دارای توزیع پواسون باشد، S دارای توزیع پواسون مرکب خواهد بود.

تعریف ۲۵.۳.۱. فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda \geq 0$ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$N(0) = 0 \quad (۱)$$

(۲) فرآیند N_t دارای نمونه‌های مانا باشد یعنی برای هر مقدار صحیح k و هر مقدار زمانی $s \leq t$ و

$$P[N(t + \Delta) - N(t) = k] = P[N(s + \Delta) - N(s) = k], \Delta > 0$$

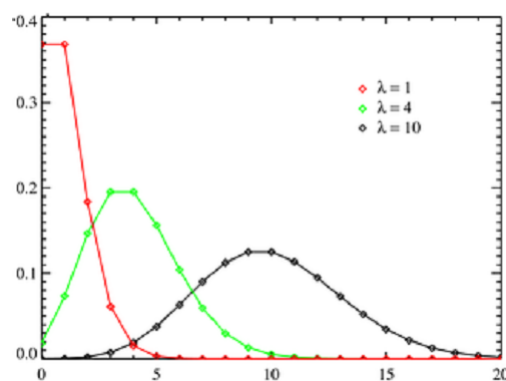
(۳) فرآیند N_t دارای نمونه‌های مستقل باشد یعنی برای هر مقدار صحیح $k > 0$ و مقادیر زمانی $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ متغیرهای تصادفی $N(t_1) - N(t_0)$ و $N(t_2) - N(t_1)$ و $\dots$ و $N(t_k) - N(t_{k-1})$ از هم مستقل باشند.

نتیجه ۲۶.۳.۱. دو خاصیت مهم فرآیند پواسون به شرح زیر است.

(۱) در هر فرآیند پواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ تعداد پیشامدها در فاصله زمانی به طول t دارای توزیع پواسون با پارامتر λt می‌باشد یعنی برای هر $s, t \geq 0$ رابطه زیر را داریم.

$$P[N(t + s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(۲) فرض کنیم $0 < T_1 < T_2 < \dots$ به ترتیب نشان دهنده‌ی زمان‌های وقوع اولین، دومین و... پیشامد باشند در این صورت ثابت می‌شود که متغیر تصادفی زمان‌های بین دو پیشامد یعنی $W_i = T_i - T_{i-1}$ در هر فرآیند پواسون با پارامتر λ ، مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ هستند.



شکل ۳.۱: تابع چگالی احتمال توزیع پواسون

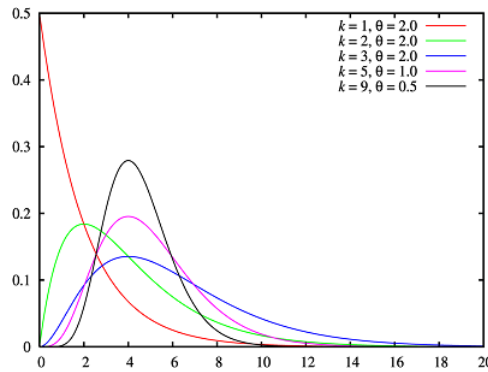
تعریف ۲۷.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$ را یک **فرآیند پواسون مرکب**^{۱۵} گوئیم، هرگاه بتوان آن را به ازاء هر $t \geq 0$ به صورت $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ نشان داد، که در آن $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسون و $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ خانواده‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع هستند، و فرآیند $\{N(t), t \geq 0\}$ و دنباله $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ مستقل فرض می‌شوند. میانگین و واریانس $X(t)$ به ترتیب عبارتند از $E[X(t)] = \lambda t E[Y]$ و $Var[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$.

تعریف ۲۸.۳.۱. توزیع ارلانگ توزیع احتمالی پیوسته‌ای است که مدت زمان لازم برای وقوع n واقعه کاملاً تصادفی (حاصل جمع n نمایی مستقل از هم) را نشان می‌دهد. به دلیل ارتباط آن با توزیع‌های نمایی و گاما دارای کاربردهای بسیاری است. این توزیع دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}.$$

همچنین نمودار تابع چگالی آن در زیر نمایش داده شده است.

^{۱۵}Compound Poisson Process



شکل ۴.۱: تابع چگالی احتمال توزیع ارلانگ

نظریه تجدید

تعریف ۲۹.۳.۱. نظریه تجدید^{۱۶} شاخه‌ای از نظریه احتمال است که فرآیندهای پواسون را به زمان‌های نگهداری اختیاری عمومیت می‌دهد.

فرآیند تجدید^{۱۷}، تعمیم یافته فرآیند پواسون است. فرآیند پواسون ذاتاً یک فرآیند پیوسته مارکوف می‌باشد که توزیع مستقل یکسان از زمان‌های نگهداری شده از هر عدد صحیح i با توزیع نمایی قبل از رسیدن به عدد صحیح بعدی $i + 1$ با احتمال یک است. در رویه غیر رسمی ممکن است نظریه تجدید را به همین صورت تعریف کنیم به جز اینکه زمان‌های نگهداری شده از توزیع عمومی‌تری گرفته شده اند. توجه داشته باشید که مشخصات توزیع‌های مستقل و یکسان (متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان) از زمان‌های نگهداری شده حفظ می‌شوند.

می‌دانیم که زمان‌های بین دو ورود در فرآیند پواسون متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی هستند. یک تعمیم طبیعی آن است که فرآیندی شمارشی را در نظر بگیریم که در آن زمان‌های بین دو ورود، مستقل و هم توزیع و با توزیع دلخواه باشند. چنین فرآیند شمارشی را یک فرآیند تجدید می‌نامند.

تعریف ۳۰.۳.۱. فرض کنید $S_1, S_2, S_3, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و توزیع شده یکسان باشد مثل $0 < E[S_i] < \infty$. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی S_i به‌عنوان i امین زمان ثبت شده باشد که برای هر $n > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$J_n = \sum_{i=1}^n S_i.$$

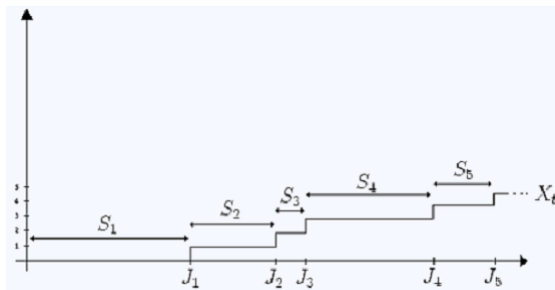
هر J_n مربوط به n امین پرش زمانی است و بازه $[J_n, J_{n+1}]$ به‌عنوان بازه تجدید شناخته می‌شود پس متغیر تصادفی $(X_t)_{t \geq 0}$ به‌صورت زیر داده می‌شود.

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_{J_n \leq t} = \sup\{n : J_n \leq t\}.$$

^{۱۶}Renewal Theory

^{۱۷}Renewal Process

به طوری که $\mathcal{I}$ تابع شاخص مطرح بوده و بیان کننده تعداد پرش است که تا زمان t رخ داده است و به عنوان فرآیند تجدید خوانده می شود. شکل زیر فرآیند تجدید را با زمان های نگه داری شده S_i و زمان های پرش J_n نشان می دهد.



شکل ۵.۱: فرآیند تجدید با زمان های نگهداری شده S_i و زمان های پرش J_n

حرکت براونی^{۱۸} به عنوان مثالی از فرآیند تجدید یک فرآیند تصادفی است. یعنی خانواده ای از متغیرهای تصادفی که با مجموعه اعداد حقیقی نامنفی اندیس گذاری شده است و همگی روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده اند. این فرآیند دارای خاصیت مارکوفی با نمونه های ایستا و مستقل است. همچنین دارای مسیرهای پیوسته ای است که در هیچ نقطه ای مشتق ندارد.

تعریف ۳۱.۳.۱. فرایند تصادفی $\{W(t), t \geq 0\}$ را یک حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر) گوییم اگر

$$(1) \quad W(0) = 0;$$

$$(2) \quad W(t) - W(s) \text{ برای } s \leq t \text{ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس } t - s \text{ باشد؛}$$

$$(3) \quad \text{متغیرهای تصادفی } W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}) \text{ برای } t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \text{ مستقل باشند (گوییم } W(t) \text{ دارای نمونه های مستقل است).}$$

با تعریف فوق برای $s < t$ خواهیم داشت

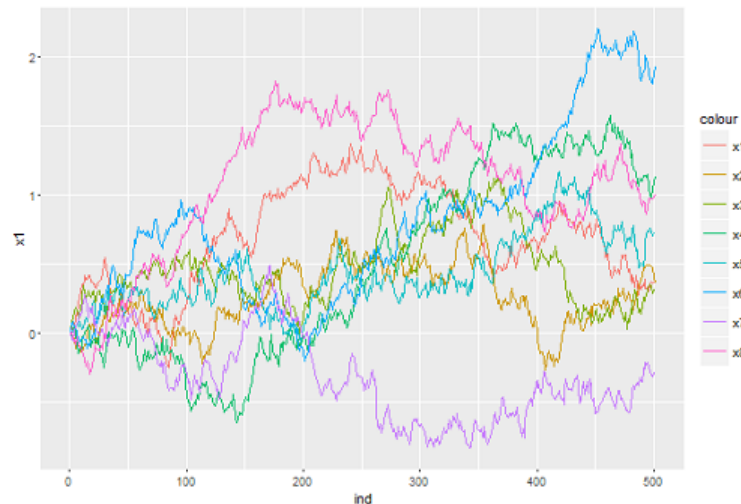
$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= E[(W(t) - W(s) + W(s))W(s)] \\ &= E[(W(t) - W(s))E[W(s)] + E[W(s)^2]] = 0 + s = s \end{aligned}$$

بنابراین $E[W(t)W(s)] = t \wedge s$ که در آن $t \wedge s = \min(t, s)$ می نیمم s, t .

تعریف فوق از مرجع [۱] آورده شده است.

شکل زیر شبیه سازی حرکت براونی استاندارد را با تکرار ۸ نشان می دهد که هر بار یک فرآیند جدید تولید می شود و همه آنها از نقطه صفر شروع به حرکت می کنند.

^{۱۸}Brownian Motion



شکل ۶.۱: شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد

فرآیند مارکف

تعریف ۳۲.۳.۱. فرآیندهای مارکف رده‌ای مهم از فرآیندهای تصادفی هستند. یک فرآیند تصادفی را مارکف گویند هرگاه آینده فرآیند به گذشته آن بستگی نداشته باشد و اصطلاحاً آن را فرآیند بی‌حافظه می‌گوییم.

شرط مارکف را برای $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

برای هر مقدار n و j و i و $i_{n-1}, \dots, i_0$. این احتمال که به آن احتمال تغییر وضعیت از i به j در یک گام (یا احتمال انتقال یک مرحله ای) گفته می‌شود، در حالت کلی به n بستگی دارد.

فرآیند انتشار

تعریف ۳۳.۳.۱. به جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی $dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dX_t$ که دارای یک مسیر پیوسته باشد فرآیند انتشار^{۱۹} گوئیم. فرآیندهای مارکف، حرکت براونی و فرآیند اورنشتاین-اولن‌بک چند نمونه از فرآیندهای انتشار هستند.

تعریف ۳۴.۳.۱. تبدیل لاپلاس^{۲۰} در ریاضیات یک تبدیل انتگرالی است که بسیار پرکاربرد است. تبدیل لاپلاس با نماد $\mathcal{L}\{f(t)\}$ در واقع عملگری از تابع $f(t)$ با آرگومان حقیقی t ، ($t \geq 0$) به تابع $F(s)$ با آرگومان مختلط s است. ویژگی مهم این تبدیل آن است که در بسیاری از رابطه‌ها و تغییراتی که بر روی تابع اصلی $f(t)$ برقرار هستند، در تبدیل یافته آن $F(s)$ نیز با رابطه‌ای ساده و منطقی برقراراند. اگر سامانه‌ای را در نظر بگیریم که توصیف ریاضی یا تابع ورودی و خروجی آن را داشته باشیم، تبدیل

^{۱۹}Diffusion Process

^{۲۰}Laplace Transform

لاپلاس آن به ما کمک می‌کند تا تابع جایگزینی را پیدا کنیم که تحلیل رفتار این تابع را آسان‌تر می‌کند. روش تبدیل لاپلاس، روش عملیاتی است که می‌تواند در حل معادلات دیفرانسیلی خطی سودمند باشد. به کمک تبدیل‌های لاپلاس می‌توان بسیاری از توابع متداول نظیر توابع سینوسی و توابع نمایی را به توابع جبری با یک متغیر مختلط تبدیل کرد. عملیات جبری در صفحات مختلط می‌تواند جای عملیاتی مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را بگیرند. از این رو یک معادله دیفرانسیل خطی را می‌توان به یک معادله جبری با یک متغیر مختلط تبدیل کرد. آن‌گاه جواب معادله دیفرانسیل را می‌توان به کمک جدول تبدیل لاپلاس یا روش تجزیه به کسرهای ساده به دست آورد. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در مجموعه اعداد حقیقی برای $t \geq 0$ تابع $F(s)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

پارامتر s عددی مختلط است که $s = \sigma + i\omega$ که σ و ω حقیقی‌اند.

۵.۳.۱ انتگرال‌گیری تصادفی

در سراسر این پایان‌نامه σ - میدان مفروض روی فضاها ی اقلیدسی، σ - میدان بورل و توپولوژی مفروض روی آن توپولوژی استاندارد است همچنین $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال مفروض ما است.

تعریف ۳۵.۳.۱. رده $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t, w)$ روی مجموعه $\Omega \times [0, +\infty)$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است.

۱- تابع $f(t, w) \rightarrow f(t, w)$ یک تابع $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -اندازه پذیر باشد.

۲- به ازای هر t تابع $f(t, \cdot)$ یک تابع $\mathcal{F}_t$ -اندازه پذیر باشد.

۳- برای هر $T \geq 0$

$$E \left(\int_0^T f^2(s, w) ds \right) < +\infty$$

یعنی رده‌ای اندازه‌پذیر، ناپیشی گیرنده و مربع -انتگرال پذیر باشد.

قضیه ۳۶.۳.۱. اگر تابع $\phi(t, w)$ کران دار و ابتدایی باشد آنگاه

$$E \left[\left(\int_0^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left(\int_0^T \phi^2(t, w) dt \right)$$

قضیه ۳۷.۳.۱. اگر $f \in \mathcal{P}_2$ باشد آنگاه دنباله‌ای از توابع ساده مانند f_n ها موجود هستند به طوری که برای هر T ، رابطه زیر برقرار است.

$$E \left(\int_0^T (f(s) - f_n(s))^2 ds \right) \rightarrow 0$$

قضیه ۳۸.۳.۱. فرض کنید توابع $f, g \in \mathcal{P}_2$ باشد و $0 \leq s \leq u < T$ باشد آنگاه
۱- بازه انتگرال را می‌توان افراز کرد.

$$\int_s^T f dB_t = \int_s^u f dB_t + \int_u^T f dB_t$$

۲- برای انتگرال تصادفی جمع دو تابع و انتگرال تصادفی ضرب عدد ثابت در تابع رابطه زیر را داریم.

$$\int_s^t (cf + g) dB_t = c \int_s^t f dB_t + \int_s^t g dB_t$$

۳-

$$E \left(\int_s^t f dB_t \right) = 0$$

فرمول یک بعدی ایتو

قضیه ۳۹.۳.۱. برای محاسبه مشتق یک رابطه تصادفی که فرآیند انتشار آن را داریم، به شکل زیر است.
فرض کنید $dX_t = u dt + v dB_t$ و $Y_t = g(t, X_t)$ باشد. آنگاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

که در اینجا

$$(dB_t)^2 = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$$

است. [۴۰]

فرمول n-بعدی ایتو

قضیه ۴۰.۳.۱. فرض کنید $dX_t = u dt + v dB_t$ یک انتگرال n -بعدی و $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت C^2 باشد. آنگاه $Y(t, w) = g(t, X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t) dX_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_i dX_j,$$

که در اینجا $dB_i dB_j = \delta_{i,j}$ و $dt \cdot dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0$ است. [۴۰]

۶.۳.۱ برخی اصطلاحات سرمایه‌گذاری

سرمایه‌گذاران برای سرمایه‌گذاری انتخاب‌های متفاوتی دارند که به‌طور کلی می‌توان به دو دسته تقسیم‌بندی کرد.

(۱) سرمایه‌گذاری ریسکی

(۲) سرمایه‌گذاری بدون ریسک

در سرمایه‌گذاری ریسکی میزان سود در هر مقطع زمانی مقدار مشخصی نیست و تحت تاثیر عوامل بازار تغییر می‌کند. افرادی که در این سرمایه‌گذاری‌ها شرکت می‌کنند، افراد ریسک‌پذیر هستند. در مقابل سرمایه‌گذاری‌های بدون ریسک است که در هر مقطع زمانی میزان دارایی مقدار مشخصی است. افرادی که این سرمایه‌گذاری‌ها را برای سرمایه‌گذاری انتخاب می‌کنند ریسک‌گریز می‌نامند.

نمونه ای از سرمایه‌گذاری‌ها

تعریف ۴۱.۳.۱. سرمایه‌گذاری با نرخ ثابت، یک نوع سرمایه‌گذاری است که افراد بدون ریسک و با احتمال یک سرمایه خود را در زمان معین به مقدار مشخصی می‌رسانند. بانک‌ها و موسسات مالی از این نوع سرمایه‌گذاری‌ها محسوب می‌شوند.

تعریف ۴۲.۳.۱. **اختیار معامله** قراردادی دوطرفه بین خریدار و فروشنده است که بر اساس آن خریدار قرارداد، حق دارد که مقدار معینی از دارایی مندرج در قرارداد را با قیمت معین و در زمان مشخص بخرد یا بفروشد. بر این اساس، دو طرف توافق می‌کنند که در آینده معامله‌ای انجام دهند. در این معامله خریدار اختیار معامله، در ازای پرداخت مبلغ معینی، حق خرید یا فروش دارایی مندرج در قرارداد را در زمانی مشخص با قیمتی که هنگام بستن قرارداد تعیین شده است به‌دست می‌آورد. وی در صورت انصراف، مبلغی را که در ازای این حق، پرداخته است از دست می‌دهد. از طرف دیگر فروشنده در صورت درخواست خریدار، ملزم به اجرای قرارداد است. قراردادهای اختیار معامله به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند.

الف- قرارداد اختیار خرید

ب- قرارداد اختیار فروش.

بورس اختیار معامله شیکاگو (CBOE) به عنوان اولین بورس اختیار معامله در سال ۱۹۷۳ تاسیس شد. اختیار معامله به منظور کنترل ریسک سرمایه‌گذاری و همچنین ابزار سودآوری در بازار سهام مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما کارکردهای فراوان و متنوع دیگری نیز در بازارهای ارز، کالا و قرارداد آتی دارد که دو نمونه مشخص از آن در ایران، بیمه نمودن شرکت‌های تامین تجهیزات خارج از ایران و همچنین بیمه نمودن دریافت کنندگان وام‌های ارزی در برابر نوسانات نرخ ارز می‌باشد.

قراردادهای آتی

قرارداد آتی^{۲۱} توافقنامه‌ای مبتنی بر خرید یا فروش دارایی در زمان معین در آینده و با قیمت مشخص است. در کشورهای مختلف، بورس‌های زیادی برای معامله قراردادهای آتی وجود دارد. بورس شیکاگو (CBOT) و بورس تجاری شیکاگو (CME) در آمریکا، دو نمونه از بزرگترین بورس‌های آتی در آمریکا هستند.

^{۲۱} Futures Contract

توضیح یک مثال برای اهمیت قرارداد آتی

یک سرمایه‌گذار ممکن است برای پنج ماه آینده به کارگزار خود خرید صد تن ذرت را سفارش دهد. این دستور به یک معامله‌گر بورس شیکاگو منتقل می‌شود. امکان دارد همزمان سرمایه‌گذار دیگری در یک محل دیگر به کارگزار خود فروش صد تن ذرت را در پنج ماه آینده سفارش دهد. این سفارشات باید به معامله‌گر بورس شیکاگو منتقل شود. با ملاقات حضوری دو معامله‌گر و توافق بر سر قیمت معین، این معامله انجام می‌شود.

در این حالت گفته می‌شود سرمایه‌گذاری که توافق کرده است تا کالا را در تحویل زمان آینده بخرد، موقعیت یا موضع معاملاتی خرید^{۲۲} گویند و سرمایه‌گذار دیگر که توافق کرده است کالای تحویل آینده را بفروشد موضع معاملاتی فروش^{۲۳} گویند. به قیمت مورد توافق طرفین قیمت قرارداد آتی می‌گویند.

داد و ستد الکترونیکی

در آغاز قراردادهای آتی در تالار بورس و از طریق سیستم حراج حضوری معامله می‌شدند. حراج حضوری به این گونه است که معامله‌گران و کارگزاران در تالار بورس حضور پیدا کرده و با استفاده از گفت‌وگو و اشارات دستی معاملات خود را انجام می‌دهند.

بازار فرابورس (OTC)

در کنار بازارهای سازمان یافته بورس، مجموعه‌ای از بازارهای فرابورس (CBOT)^{۲۴} وجود دارند که برخلاف بورس‌ها از نظر فیزیکی، مکان معینی ندارند، این بازارها به صورت شبکه‌ای مبتنی بر ارتباطات تلفنی و رایانه‌ای هستند که معامله‌گرانی را به همدیگر مرتبط می‌سازند که نمی‌توانند به طور حضوری با هم ارتباط برقرار کنند. در بازار فرابورس (OTC) بیشتر معاملات بین مؤسسات مالی و یا بین یک مؤسسه مالی و شرکت مشتری آن صورت می‌گیرد. مؤسسات مالی با عرضه قیمت‌های پیشنهادی خرید یا فروش، نقش بازار ساز را ایفا می‌کنند.

پیمان‌های آتی

پیمان آتی از آن جهت که توافقی است مبتنی بر خرید یا فروش یک دارایی در زمانی معین در آینده و با قیمت مشخص، شبیه قرارداد آتی است. وجه تمایز پیمان آتی و قرارداد آتی در این است که قراردادهای آتی در بورس و پیمان‌های آتی در فرابورس معامله می‌شوند. در پیمان آتی اغلب ارزهای خارجی مورد معامله قرار می‌گیرند.

^{۲۲} Long position

^{۲۳} Short position

^{۲۴} Over The Counter market

قراردادهای اختیار معامله

به طور کلی می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد، اختیار خرید^{۲۵} و اختیار فروش^{۲۶}. یک اختیار خرید این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد. به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال^{۲۷} و تاریخ ذکر شده در قرارداد را تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله^{۲۸} می‌گویند.

اختیار خرید یا فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و امریکایی تقسیم می‌شود. قرارداد اختیار اروپایی^{۲۹} فقط در تاریخ سررسید قابلیت اعمال دارد. قرارداد اختیار امریکایی^{۳۰} در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است. در بازارهای اختیار معامله چهار نوع معامله‌گر وجود دارند.

۱- خریداران اختیار خرید

۲- فروشندگان اختیار خرید

۳- خریداران اختیار فروش

۴- فروشندگان اختیار فروش.

تعریف ۴۳.۳.۱. منظور از خریداران، معامله‌گرانی هستند که موضع خرید، و منظور از فروشندگان افرادی هستند که موضع فروش اتخاذ کرده‌اند. فروش یک اختیار را **صدور حق اختیار معامله** می‌گویند.

انواع معامله‌گران

سه گروه عمده از معامله‌گران را می‌توان به صورت زیر زیر در نظر گرفت.

۱- پوشش دهندگان ریسک

۲- سفته بازان

۳- آربیتراژگران.

پوشش دهندگان ریسک با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان‌های آتی و اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند که از حرکت بالقوه آتی در یک متغیر ناشی می‌شود.

^{۲۵}Call Option

^{۲۶}put Option

^{۲۷}Exercise Price(Strike Price)

^{۲۸}Exercise Date Or expiration Date Or Maturity

^{۲۹}European option

^{۳۰}American option

سفته‌بازان از پیش‌بینی، جهت حرکت آتی قیمت، در یک متغیر بازار استفاده می‌کنند. آربیتراژگران با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف، به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند.

اندازه‌گیری نرخ‌های بهره

وقتی که بانک نرخ بهره سپرده‌هایی یک ساله را برای مثال سالانه 10% اعلام می‌کند، به علت روش اندازه‌گیری نرخ بهره که روشی ساده و دقیق می‌باشد، معمولاً هیچ ابهامی در مورد محاسبه بهره سپرده بانکی وجود نخواهد داشت. نرخ بهره مرکب سالانه 10% بدین معناست، که بهره به صورت یک بار در سال محاسبه می‌شود و یک سپرده 100 دلاری بعد از یک سال به 110 دلار می‌رسد.

$$110 = 100 \times 1/1$$

هنگامی که نرخ بهره مرکب به صورت شش ماهه بیان می‌شود یعنی سود حاصل از سرمایه‌گذاری برابر 5% در هر شش ماه است. البته با این شرط، که بهره شش ماهه اول مجدداً در شش ماهه دوم سرمایه‌گذاری شده باشد. بنابراین خواهیم داشت

$$\text{دلار } 110.25 = 100 \times 1.05 \times 1.05 = \text{ارزش سرمایه‌گذاری در پایان دوره}$$

هنگامی که نرخ بهره مرکب به صورت فصلی بیان می‌شود یعنی سود حاصل از سرمایه‌گذاری برای هر سه ماه $2/5\%$ است. که البته بهره‌های حاصل مجدداً در دوره‌های بعد سرمایه‌گذاری می‌شوند. لذا خواهیم داشت

$$\text{دلار } 110.38 = 100 \times (1.025)^4 = \text{ارزش سرمایه‌گذاری در پایان دوره}$$

در حالت کلی، با فرض سرمایه‌گذاری مبلغ A برای n سال با نرخ بهره مرکب سالانه $R\%$ ، در صورتی که نرخ بهره به صورت یک‌بار در سال محاسبه شود، ارزش نهایی این سرمایه‌گذاری در پایان سال برابر است با

$$A(1 + R)^n$$

و هرگاه نرخ بهره به صورت m بار در سال محاسبه شود، ارزش نهایی سرمایه‌گذاری در پایان دوره از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$A\left(1 + \frac{R}{m}\right)^{mn}$$

هرگاه متغیر m به سمت بی‌نهایت میل کند، یعنی تعداد دفعات پرداخت بهره مرکب بیشتر شود و سرانجام به بی‌نهایت میل کند، اصطلاحاً می‌گویند بهره به صورت پیوسته محاسبه شده است. می‌توان نشان داد که در حالت کلی، برای مبلغ A که برای n سال با نرخ R به صورت پیوسته سرمایه‌گذاری شده باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$\text{ارزش سرمایه‌گذاری در پایان دوره} = Ae^{Rn}$$

که در آن $e \simeq 2.71828$ است.

فصل ۲

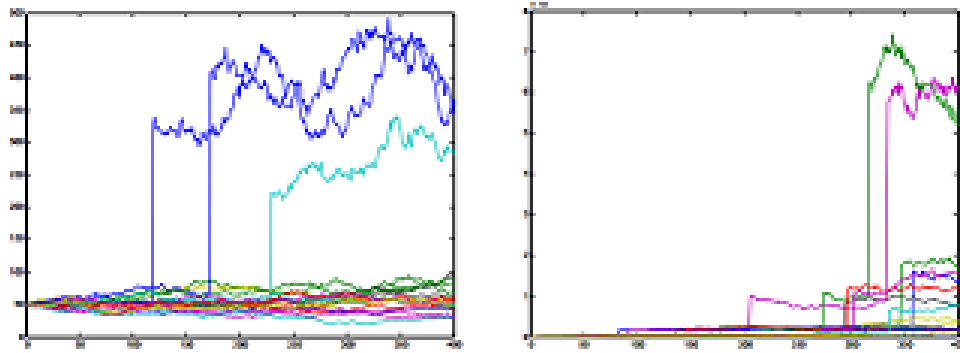
مدل‌های تصادفی برای سرمایه‌گذاری‌های ریسکی

۱.۲ مقدمه

در ریاضیات مالی گام نخست برای تجزیه و تحلیل بازارهای مالی شناسایی یک مدل مناسب برای معرفی نحوه رشد و تلاطم بازار است. ابزارهای رایج برای مدل‌سازی بازارهای مالی می‌توان به سری‌های زمانی، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل تصادفی اشاره کرد. در این بخش ما به معرفی معادلات دیفرانسیل تصادفی حل شده رایج می‌پردازیم که می‌تواند نحوه رشد یا روند کلی بازار و همچنین نوسانات بازار را مدل‌سازی کند.

۱.۱.۲ مدل پرش انتشار

به مجموع فرآیندهای انتشار و فرآیندهای لوی فرآیند پرش – انتشار گویند که دارای یک مسیر تصادفی با تعداد متناهی پرش است. میزان پرش‌ها از یک توزیع خاص آماری تبعیت می‌کند.



شکل ۱.۲: مدل پرش-انتشار با یک پرش و دو پرش

۲.۱.۲ مدل بلک - شولز

در اوایل دهه ۱۹۷۰، آقایان «رابرت مرتون»، «فیشر بلک» و «میرن شولز» گام بزرگی در قیمت گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه کار آنها ارائه مدلی بود که تحت عنوان «مدل بلک-شولز» معروف گشت.

این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش ریسک اختیار معامله داشته است. همچنین این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است. «رابرت مرتون» و «میرن شولز» در سال ۱۹۹۷ به خاطر اهمیت مدل فوق، موفق به دریافت جایزه نوبل اقتصادی شدند. متأسفانه «فیشر بلک» در سال ۱۹۹۵ فوت کرده بود. اگر ایشان زنده بود، بدون شک یکی دیگر از افرادی بود که به آنها جایزه تعلق گرفت.

مدل بلک - شولز (براونی هندسی) یک ساختار اساسی برای مدل کردن ارزش دارایی ریسکی است. همچنین در مدل‌سازی فرآیندهای عدم قطعیت کاربرد دارد که معادله دیفرانسیل تصادفی آن به شکل زیر است.

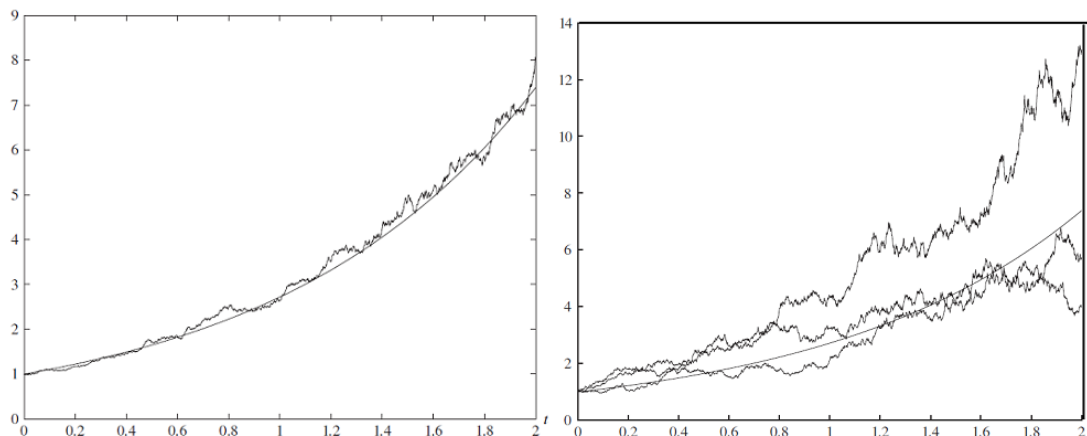
$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (1.2)$$

که در آن α و σ اعداد ثابت هستند و W_t یک حرکت براونی استاندارد است، همچنین α معیاری برای امید ریاضی فرآیند و σ معیاری برای میزان نوسان فرآیند می‌باشد. معادله (۱.۲) با روش حل معادلات تصادفی به کمک روش ایتو انجام می‌شود و می‌توان نشان داد جواب خصوصی این معادله به صورت زیر است.

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \quad (2.2)$$

امید ریاضی مدل بلک-شولز (۱.۲) این گونه محاسبه می‌شود.

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$$



شکل ۲.۲: مدل بلک شولز

با انتگرال گیری از معادله فوق رابطه زیر را داریم.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s$$

از طرفین رابطه امید ریاضی میگیریم.

$$E(X_t) = E(X_0) + \alpha \int_0^t E(X_s) ds + \sigma \int_0^t E(X_s) dW_s$$

با توجه به خواص امید ریاضی حرکت براونی استاندارد انتگرال آخر صفر می شود. حال با مشتق گیری از رابطه فوق و تبدیل آن به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول و حل آن امید ریاضی فرآیند یک تابع نمایی به شکل زیر می شود.

$$E(X_t) = \exp(\alpha t)$$

برای محاسبه واریانس مدل بلک شولز از فرمول اصلی واریانس استفاده می کنیم.

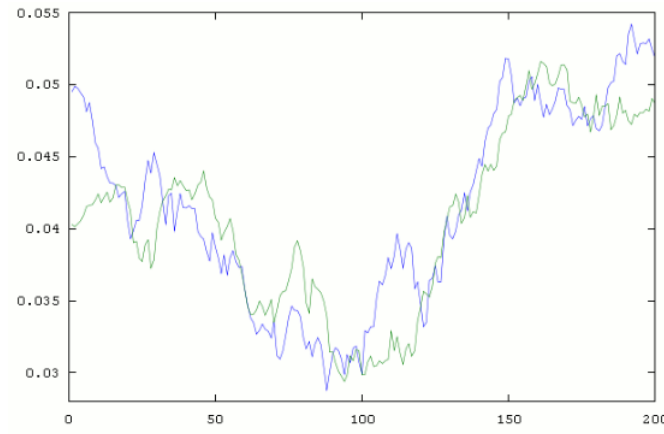
$$\text{Var}(dX_t) = E(dX_t^2) - (E(dX_t))^2 = E(\sigma^2 X_t^2 dX_t^2) - 0 = \sigma^2 E(X_t^2 dt)$$

۳.۱.۲ مدل واسیچک

واسیچک در سال ۱۹۷۷ برای اولین بار یک مدل ریاضی، برای قیمت گذاری اوراق قرضه دارای نرخ بهره کوتاه مدت تصادفی ارائه داد. نرخ بهره کوتاه مدت به عنوان فرآیندهای انتشار با پارامترهای ثابت مدل شده اند. فرآیند انتشار این مدل، جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر است.

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.2)$$

که در آن a و b و σ اعداد صحیح و مثبت هستند.



شکل ۳.۲: مدل واسیچک

با استفاده از فرمول ایتو و فرض $f(t, X_t) = \exp(at)X_t$ داریم.

$$\begin{cases} f_t = a \exp(at)X_t \\ f_X = a \exp(at) \\ f_{XX} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d(e^{at}X_t) &= e^{at}dX_t + ae^{at}X_tdt \\ &= e^{at}[a(b - X_t)dt + \sigma dW_t] + ae^{at}X_tdt \\ &= abe^{at}dt - aX_te^{at}dt + e^{at}\sigma dW_t + aX_te^{at}dt \\ &= abe^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا روابط زیر به دست می‌آید.

$$e^{at}X_t = X_0 + ab \int_0^t e^{as}ds + \sigma \int_0^t e^{as}dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s$$

یک جواب برای (SDE) (۳.۲) است و با حل انتگرال معین داریم.

$$\begin{aligned} X_t &= e^{-at} \left[X_0 + b(e^{at} - 1) + \sigma \int_0^t e^{au}dW_u \right] \\ &= \mu_t + \sigma \int_0^t e^{a(u-t)}dW_u \end{aligned}$$

که در آن μ_t یک تابع غیر تصادفی، و $\mu_t = E(X_t)$ است. امید ریاضی فرآیند به شکل زیر محاسبه می‌شود.

معادله دیفرانسیل تصادفی فرآیند واسیچک به صورت زیر است.

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم

$$X_t = X_0 + \int_0^t (a(b - X_u)du + \sigma dW_u)$$

با امید ریاضی گرفتن و خواص حرکت براونی رابطه را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\mu_t := E(X_t) = X_0 + \int_0^t a(b - E(X_u))du$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه، طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه اول، به شکل زیر، می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_t}{dt} &= (t)'a(b - \mu_t) - (0)'a(b - \mu_t) \\ &= a(b - \mu_t) \end{aligned}$$

این یک معادله همگن از درجه اول است.

$$\frac{d\mu_t}{b - \mu_t} = a dt \rightarrow -\ln(b - \mu_t) = at + c$$

$$b - \mu_t = e^{-at} + c \rightarrow \mu_t = b - e^{-at} + c$$

$$\mu_t = e^{-at}[X_0 + b(e^{at} - 1)]$$

با حل این معادله دیفرانسیل معمولی جواب خصوصی این معادله به شکل زیر حاصل می‌گردد.

$$E(X_t) = e^{-at}[X_0 + b(e^{at} - 1)] = \mu_t$$

که در این مدل b سطح معینی از X_t است که قرار است به آن برسیم.

معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$ دارای یک روند قطعی و یک بخش تصادفی است که قسمت دوم معادله، ضریب مشتق حرکت براونی بیانگر نوسانات بازار است. پس انتظار می‌رود با واریانس رابطه مستقیم داشته باشد.

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t) = E[(X_t - \mu_t)^2] = E[(\sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dW_u)^2]$$

طبق فرمول ایتو $dW_u \cdot dW_u = du$. پس رابطه زیر برقرار است.

$$\sigma_t^2 = E[\sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2au} du] = \sigma^2 e^{-2at} E[\int_0^t e^{2au} du]$$

$$= \sigma^2 e^{-2at} \left[\frac{1}{2a} e^{2au} \Big|_0^t \right] = \frac{\sigma^2}{2ae^{2at}} [e^{2at} - 1]$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \left[\frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right]$$

چون $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ با میانگین و واریانس محاسبه شده است. چون که متغیر تصادفی نرمال با احتمال بزرگ‌تر از صفر، مقادیر کوچک‌تر از صفر را اختیار می‌کند. این یک ضعف مدل واسیچک است با این وجود به دلیل سادگی و انعطاف پذیری این مدل اعتبار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در چهارچوب ارزیابی ریسک خنثی قیمت اوراق قرضه بدون کوپن با زمان سررسید T در لحظه t به شکل زیر است.

$$B(t, T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \Big| \mathcal{F}\right]$$

فرآیند X_u را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$X_u = r_u - b$$

معادله دیفرانسیل تصادفی که دارای جواب کلی به شکل $r_u - b$ باشد معادله اورنشتاین-اولن یک گویند که با شرط اولیه $X_0 = r_0 - b$ ، به شکل زیر است.

$$dX_t = -\alpha X_t + \sigma dW_t.$$

با استفاده از فرمول ایتو X_u را محاسبه می‌کنیم.

$$X_u = e^{-\alpha u} \left(X_0 + \int_0^u \sigma e^{\alpha s} dW_s \right)$$

عملگر بی‌نهایت کوچک برای مدل واسیچک به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2}{du^2} + \alpha(b - u) \frac{d}{du}$$

۴.۱.۲ مدل کاکس-اینگرسول-راس

در این مدل ابتدا یک حرکت براونی d بعدی را در نظر می‌گیریم $W = (W_1, W_2, \dots, W_d)$. فرض کنید $\beta > 0$ و $\sigma > 0$ اعداد ثابت باشند. برای $d, \dots, 2, 1$ فرض کنید $X_j(0) \in \mathbb{R}$ باشد، پس رابطه زیر برقرار است.

$$X_1'(0) + X_2'(0) + X_3'(0) + \dots + X_d'(0) \geq 0$$

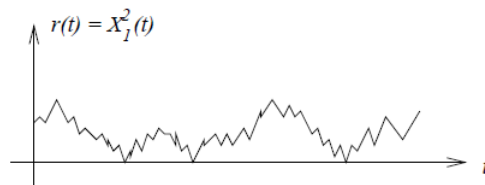
و فرض کنید X_j جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد.

$$dX_j(t) = -\frac{1}{2}\beta X_j(t)dt + \frac{1}{2}\sigma dW_j(t), \quad (4.2)$$

X_j را معادله اورنشتاین-اولن بک می‌گویند که همواره یک مقدار شناور نزدیک به مبدأ دارد. جواب این معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر است.

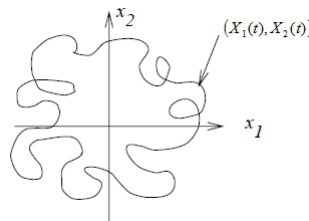
$$X_j(t) = e^{-\frac{1}{4}\beta t} \left[X_j(0) + \frac{1}{4}\sigma \int_0^t e^{\frac{1}{4}\beta u} dW_j(u) \right].$$

شکل زیر مدل کاکس-اینگرسول-راس را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۲: مدل کاکس-اینگرسول-راس

اگر X_i ها فرایندهای مستقل از هم باشند شکل زیر را داریم.



شکل ۵.۲: نمونه‌ای از فرایند دو متغیره X_i

برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی (۴.۲) با فرض

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$$

فرمول ایتو را برای تابع f می‌نویسیم

$$f_{x_i, x_j} = \begin{cases} 2 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dr(t) &= \sum_{i=1}^d f_{x_i} dX_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d f_{x_i x_i} dX_i dX_i \\ &= \sum_{i=1}^d 2X_i \left(-\frac{1}{4}\beta X_i dt + \frac{1}{4}\sigma dW_i(t) \right) + \sum_{i=1}^d \frac{1}{4}\sigma^2 dW_i dW_i \\ &= -\beta r(t) dt + \sigma \sum_{i=1}^d X_i dW_i + \frac{d\sigma^2}{4} dt \\ &= \left(\frac{d\sigma^2}{4} - \beta r(t) \right) dt + \sigma \sqrt{r(t)} \sum_{i=1}^d \frac{X_i(t)}{\sqrt{r(t)}} dW_i(t). \end{aligned}$$

W_t را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$W(t) = \sum_{i=0}^d \int_0^t \frac{X_i(u)}{\sqrt{r(u)}} dW_i(u).$$

W یک مارتینگل است.

$$dW = \sum_{i=1}^d \frac{X_i}{\sqrt{r}} dW_i$$

$$dW dW = \sum_{i=1}^d \frac{X_i^2}{r} dt = dt$$

W یک حرکت براونی است.

$$dr(t) = \left(\frac{d\sigma^2}{4} - \beta r(t) \right) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t).$$

فرآیند کاکس-اینگرسول-راس برابر با رابطه زیر است.

$$dr(t) = \left(\alpha - \beta r(t) \right) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t).$$

k را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$k = \frac{4\alpha}{\sigma^2} > 0$$

اگر k یک عدد صحیح باشد آن‌گاه

$$r_t = \sum_{i=1}^k X_i^2(t)$$

لزومی ندارد k عددی صحیح باشد. اگر $k < 2$ باشد $(\alpha < \frac{1}{4}\sigma^2)$ ، آن‌گاه

$$P\{r_t = 0 \text{ به تعداد نامتناهی } t \geq 0 \text{ وجود داشته باشد}\} = 1$$

که این انتخاب خوبی برای پارامتر نیست.

اگر $k > 2$ باشد $(\alpha > \frac{1}{4}\sigma^2)$ ، آن‌گاه

$$P\{ \text{حداقل یک مقدار از } t > 0 \text{ وجود داشته باشد که } r_t = 0 \text{ باشد} \} = 0$$

در فرآیند CIR می‌توان فرمول به‌دست آمده را تحت فرض $k = \frac{4\alpha}{\sigma^2}$ برای k های صحیح و مثبت فرض کرد.

۲.۲ ارائه یک مدل برای بازارهای فصلی

در بازار برای قیمت گذاری کالاهایی که روندی نمایی (صعودی یا نزولی) دارند، مدل بلک-شولز مدل مناسبی است. در این مقاله بازارهای فصلی را که روند تناوبی دارند بررسی می کنیم و ادعا می کنیم معادله دیفرانسیل تصادفی زیر مدل مناسبی برای آنها است.

$$dX_t = \alpha \sin(t)X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

در ریاضیات مالی یکی از اهداف مهم، ارائه یک مدل مناسب برای بازار است که یکی از شناخته شده ترین مدل ها مدل براونی هندسی است که در بازار به مدل بلک-شولز شهرت دارد. در این مدل فرض می شود قیمت کالای بدون ریسک در معادله دیفرانسیل عادی $dS_t = rS_t$ صدق کند که در آن عدد ثابت r ، نرخ بهره را مشخص می کند و قیمت کالای ریسکی با معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$ توصیف می شود. W_t فرآیند براونی استاندارد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. α و $\sigma > 0$ اعداد ثابت هستند و σ تلاطم بازار را نشان می دهد. از محاسن مدل بلک-شولز این است که برای بسیاری از اختیارات معادله می توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی به دست آورد. اما شواهد تجربی نشان می دهد که این مدل در هم خوانی با واقعیت های بازار چندان موفق نیست. به همین علت در بسیاری از موارد تعمیم هایی از این مدل مورد استفاده قرار می گیرد. روشن است که روند مدل بلک-شولز که در حقیقت امیدریاضی X_t در معادله ی زیر است، نمایی است. زیرا داریم

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

در نتیجه داریم

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s$$

حال با گرفتن امیدریاضی از طرفین معادله فوق داریم

$$E(X_t) = E(X_0) + E\left(\int_0^t \alpha X_s ds\right) + E\left(\int_0^t \sigma X_s dW_s\right)$$

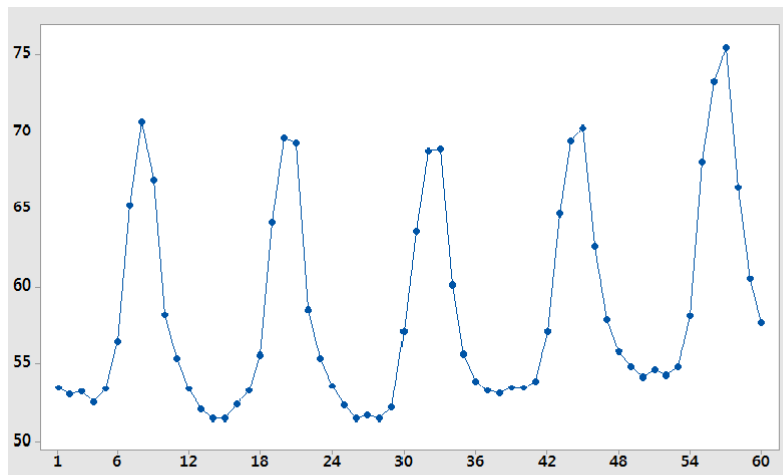
و در نتیجه

$$E(X_t) = e^{\alpha t}$$

پس در مدل بلک-شولز روند بازار نمایی است که با توجه به مقدار α صعودی یا نزولی است.

۳.۲ اهمیت ارائه مدل های تناوبی

گاه با بازارهایی مواجه می شویم که نه روند صعودی دارند و نه نزولی. در حقیقت روندی تناوبی دارند. بازارهای فصلی از این گونه اند. در این بازارها فرآیند قیمت مشابه شکل (۴.۲) ابتدا روندی صعودی داشته و در انتهای فصل روندی نزولی را طی می کند و این روند همواره تکرار می شود.



شکل ۶.۲: مدل تناوبی

در اینجا به دنبال یافتن مدل مناسبی برای این گونه بازارها هستیم.

۴.۲ روابط مدل فصلی ارائه شده

قضیه ۱.۴.۲. یکی از مدل‌های تصادفی مناسب برای فرآیند قیمت سهام ریسکی در بازارهای فصلی به فرم زیر است.

$$dX_t = \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t. \quad (۵.۲)$$

اکنون روند کلی بازار را برای مدل مفروض بدست می‌آوریم. از (۵.۲) رابطه زیر را داریم.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha \sin(s) X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین معادله داریم

$$E(X_t) = E(X_0) + E\left(\int_0^t \alpha \sin(s) X_s ds\right) + E\left(\int_0^t \sigma X_s dW_s\right)$$

$$\Rightarrow E(X_t) = e^{-\alpha \cos(t)}$$

بنابراین روند کلی بازار فصلی، تناوبی است.

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید $\{X_u\}_{u \in [s, t]}$ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد.

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

همچنین فرض کنید $p(s, y; t, x)$ تابع چگالی انتقال $\{X_u\}_u$ باشد. آنگاه p در معادله زیر که به معادله فوکر-پلانک معروف است، صدق می کند [۴۰، ۳۲].

$$\begin{aligned} p_t(s, y; t, x) &= \mathcal{A}^* p(s, y; t, x), & (t, x) &\in (0, T) \times \mathbb{R} \\ p(s, y; t, x) &\rightarrow \delta_y, & t &\downarrow s \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

در رابطه (۶.۲) عملگر $\mathcal{A}^*$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$(\mathcal{A}^* f)(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(t, x) f(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [C_{ij}(t, x) f(t, x)].$$

با توجه به قضیه بالا، برای معادله دیفرانسیل تصادفی (۵.۲) معادله فوکر-پلانک به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial p}{\partial t}(s, y; t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 p(s, y; t, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha \sin(t) x p(s, y; t, x)].$$

در نتیجه

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (\frac{1}{2} \sigma^2 - \alpha \sin(t)) x \frac{\partial p}{\partial x} + (\sigma^2 - \alpha \sin(t)) p.$$

قضیه ۳.۴.۲. فرض می کنیم بازار داده شده در مدل (۵.۲) صدق کند. اگر بازار فاقد آربیتراژ باشد تابع قیمت گذاری اختیار یعنی $F(t, S_t)$ جواب معادله زیر خواهد بود.

$$F_t(t, s) + F_s(t, s) + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2(t, s) F_{ss}(t, s) - r F(t, s) = 0 \quad (۷.۲)$$

$$F(T, S_T) = \phi(s).$$

در مساله مقدار مرزی بالا مقصود از r نرخ بهره دارایی بدون ریسک است.

به موجب قضیه قبل با روش $Feynman - kac$ می توان تابع قیمت گذاری را به صورت زیر بدست آورد.

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E[\phi(s)] \quad (۸.۲)$$

$$\Rightarrow F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(se^z) f(z) dz. \quad (۹.۲)$$

در عبارت اخیر f تابع چگالی احتمال فرآیند نرمالایز شده قیمت سهام ریسکی (Z) است که از توزیع زیر پیروی می کند.

$$N[(r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - t), \sigma \sqrt{T - t}]. \quad (۱۰.۲)$$

فصل ۳

بررسی روابط شرکت بیمه

۱.۳ احتمال شکست

احتمالا ورشکستگی تلخ‌ترین، ترسناک‌ترین و دردناک‌ترین کلمه‌ای است که می‌تواند در زندگی یک صاحب کسب‌وکار وجود داشته باشد. حالا به واقع ورشکستگی چه معنایی دارد؟ در ادبیات مالی واژه‌های غیرتمایزی برای ورشکستگی وجود دارد. برخی از این واژه‌ها عبارتند از وضع نامطلوب مالی، شکست، عدم موفقیت واحد تجاری، وخامت، عدم قدرت پرداخت دیون و غیره. در فرهنگ وبستر "شکست" چنین تعریف شده است: "توصیف یا حقیقت نداشتن یا عدم کفایت وجوه در کوتاه مدت". در واقع ورشکستگی یا توقف، حالت یک تاجر یا شرکتی تجاری است که از پرداخت بدهی‌های خود ناتوان شده و نمی‌تواند تعهدات خود را عملی کند. پیش‌بینی موضوعی است که از دیرباز ذهن انسان را به‌خود مشغول نموده است. به‌طور کلی می‌توان گفت که یکی از مهم‌ترین وظایف علم در زمینه‌های مختلف تلاش جهت یافتن ارتباط بین پدیده‌های متفاوت به‌منظور پیش‌بینی آینده است. از آنجا که علی‌رغم وجود شرایط ورشکستگی در مواردی شرکت‌ها به حیات ظاهری خود ادامه می‌دهند و به نوعی غیرمستقیم منجر به هدر رفتن منابع و عدم بهره‌گیری از فرصت‌های سرمایه‌گذاری می‌شود. از این جهت تلاش می‌شود تا با بهره‌گیری از تکنیک‌های پیشرفته بتوان از احتمال ورشکستگی شرکت‌ها در آینده دور نمایی صحیح به‌دست آورد.

ورشکستگی تقریباً مقوله‌ای باستانی و به همین میزان هم شایع می‌باشد. ورشکستگی ممکن است در یک مغازه خرده‌فروشی کوچک که قادر به ایفای تعهد اجاره‌اش نیست و بدین دلیل بسته می‌شود یا در شرکت تولیدی بزرگ به دلیل نداشتن نقدینگی مطلوب و زیان‌های مستمر سالانه اتفاق بیفتد.

حسابداران باید علل پدیدآورنده ورشکستگی را به خوبی درک کنند زیرا آنها هستند که می‌توانند قبل از وقوع ورشکستگی، مدیریت را آگاه سازند و راه حل پیش‌گیری کننده ارائه نمایند. ورشکستگی زمانی اتفاق می‌افتد که طبق قانون، دارایی‌ها برای پرداخت بدهی شرکت فروخته شود و شرکت منحل شود. در ادامه به بررسی این مفهوم در شرکت‌های بیمه می‌پردازیم.

۱.۱.۳ احتمال شکست در شرکت‌های بیمه

تعریف ۱.۱.۳. بیمه دانشی است که به موجب آن یک طرف تعهد می‌کند در ازای دریافت وجه یا وجوهی از طرف دیگر، در صورت وقوع یا بروز حادثه معین، خسارت حاصل از آن را جبران نموده و یا مخارج مربوط به جبران خسارت را تقبل نماید. متعهد را بیمه‌گر، طرف تعهد را بیمه‌گذار و وجهی را که بیمه‌گذار به بیمه‌گر می‌پردازد، حق بیمه می‌نامند.

کلمه خطر در بیمه برای توصیف عامل بروز خسارت و زیان مالی یا جانی به کار می‌رود به عنوان مثال، خطر سیل، خطر تصادف، خطر سرقت و غیره به همین معنی هستند. به بیانی دیگر بیمه یک مکانیسم انتقال ریسک است که از طریق آن بار ریسک زیان‌های ناشی از وقوع خسارت از یک شخص یا بنگاه اقتصادی به دیگران منتقل شده، در سطح گسترده‌تر پیش بینی شده‌ای قرار می‌گیرد. از این رو مسائل مربوط به ورشکستگی برای ادامه حیات یک شرکت بیمه نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. نظریه‌های ریسک و نظریه‌های مربوط به آن به‌خصوص ورشکستگی نقش مهمی را در ریاضیات بیمه دارند.

یک شرکت بیمه را در نظر بگیرید که با سرمایه اولیه u شروع به سرمایه‌گذاری کرده است و حق بیمه را با نرخ ثابت c از بیمه‌گذار دریافت می‌کند و این سرمایه را در یک سرمایه‌گذاری در زمان پیوسته سرمایه‌گذاری می‌کند. این شرکت سرمایه خود را در یک سرمایه‌گذاری نامطمئن سرمایه‌گذاری می‌کند که بازار آن از مدل تصادفی براونی هندسی با مقدار ثابت شناور a و میزان نوسان σ پیروی می‌کند. این فرآیند تصادفی را Z_t در نظر می‌گیریم. این فرآیند نشان دهنده میزان سرمایه شرکت بیمه است که سرمایه خود را در یک سرمایه‌گذاری نامطمئن سرمایه‌گذاری کرده است و هنوز ادعایی را که قرار است در مقابل آن خسارت بپردازد، اتفاق نیفتاده باشد. بنابراین دارای یک معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر است.

$$dZ_t = (C + aZ_t)dt + \sigma Z_t dB_t.$$

که در آن B_t یک فرآیند براونی استاندارد می‌باشد. عملگر بی‌نهایت کوچک تعریف شده روی SDE بالا به شکل زیر به دست می‌آید.

$$A = (C + au) \frac{d}{du} + \frac{\sigma^2}{2} u^2 \frac{d^2}{du^2}. \quad (1.3)$$

حال فرض کنیم در این شرکت بیمه، ادعاها دارای زمان‌های وقوع مستقل از هم و با توزیع‌های یکسان و مستقل از هم مدل سازی شده باشند که با متغیرهای تصادفی X_k نشان می‌دهیم و همچنین دارای امیدهای ریاضی متناهی‌اند یعنی $E(X_k) < \infty$. تابع توزیع X_k را با F_X نشان می‌دهیم و

را $\bar{F} = 1 - F_X$ دم تابع توزیع تعریف می‌کنیم. تابع چگالی را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه هریک از ادعاهای شرکت بیمه رخ دهد، شرکت بیمه مقدار ضرر (ادعاهایی که قبلاً پذیرفته بود) را از میزان سهام سرمایه‌گذاری شده می‌پردازد. بنابراین باید این مقدار ادعاها هم به فرآیند سرمایه اضافه شود که در نتیجه فرآیند سرمایه به شکل زیر به دست می‌آید.

$$U(t) = u + ct + a \int_0^t U(s)ds + \sigma \int_0^t U(s)dB_s - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k. \quad (2.3)$$

که در آن $N(t)$ به تعداد ادعاهای اتفاق افتاده تا زمان t اشاره دارد. زمانی که $N(t)$ فرآیند پواسون باشد، یک فرآیند پرش-انتشار کلاسیک خواهیم داشت [۳۰]. در این پایان نامه $N(t)$ را یک فرآیند تجدید در نظر می‌گیریم که دارای زمان‌های وقوع مستقل هستند. زمان‌های ورود τ_k (زمان‌های بین وقوع هر ادعا که بین T_k ها اتفاق می‌افتند) دارای تابع چگالی f_τ هستند که در معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت صدق می‌کند. همچنین می‌توانیم این معادلات را به حاصل ضرب فاکتورهای اول تجزیه کنیم، یعنی برای هر معادله دیفرانسیل مرتبه بالا رابطه زیر را داریم.

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} \right) f_\tau(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \frac{d^j}{dt^j} f_\tau(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \beta_i \right) f_\tau(t) = 0. \quad (3.3)$$

و با شرایط اولیه همگن، یعنی رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} f_\tau^{(k)}(0) = 0, & (k = 0, 1, 2, \dots, n-2) \\ f_\tau^{(n-1)}(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

یا با شرایط اولیه ناهمگن که در زیر آورده شده است.

$$\begin{cases} f_\tau^{(k)}(0) = M_k, & (k = 0, 1, 2, \dots, n-2) \\ f_\tau^{(n-1)}(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (5.3)$$

که $\alpha_i \in \mathbb{R}$ و $\alpha_n = 1$ و $\beta_i \in \mathbb{C}$ ، که لزومی ندارد β_i ها متمایز باشند. (۴.۳) را شرایط همگن گوییم، چون تنها مقدار ناصفر آن در شرایط اولیه $f_\tau^{(n-1)}$ است. همچنین f_τ یک تابع چگالی است، یعنی انتگرال آن برابر یک است. اگر تابع چگالی در (۳.۳) صدق کند، معادل با این است که بگوییم تبدیل لاپلاس آن دارای یک تابع گویا است. این کلاس از توابع چگالی که شامل کلاس توزیع‌های نوع فازی هم هست، در زمینه نظریه نابودی^۱ و نظریه صف^۲ کاربرد دارد [۳۸]. از خواص کلاس تبدیلات لاپلاس گویا در گسترش جواب‌های دقیق برای مسائل نظریه نابودی از فرآیند پواسون مرکب در چهارچوب فرآیندهای تجدید استفاده کرده‌اند [۹]. علاوه بر این در شرایط مرزی (۳.۳) برای ODE فرض (۳.۳) بهتر است تابع چگالی f_τ برای هر تبدیل لاپلاس گویا یک کسر ثابت داشته باشد. در واقع می‌توان هر چگالی که

^۱Ruin Theory

^۲Queueing Theory

از ترکیب n تا چگالی نمایی با پارامتر β_i نام گذاری می کنند را با شرایط اولیه همگن (۴.۳) به صورت زیر نشان داد.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \beta_i\right).$$

در نتیجه چگالی ارلانگ (n, β) به صورت زیر حاصل می شود.

$$f_\tau(t) = \frac{1}{(n-1)!} \beta^n t^{n-1} e^{-\beta t} \quad \text{برای } (t > 0).$$

در حالت خاص می توانیم پارامترهای β_i ها را با هم برابر فرض کنیم. در این صورت با فرض $\beta_i = \beta$ در (۳.۳) و همچنین با در نظر گرفتن شرایط همگن (۴.۳) رابطه زیر را داریم.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \beta_i\right) = \left(\frac{d}{dt} + \beta\right)^n.$$

اما اگر شرایط ناهمگن باشد، شرایط همگن برای آن برقرار نیست. در زیر به مثالی در این خصوص اشاره می کنیم.

مثال ۲.۱.۳. برای این توزیع ها می توان به ترکیب دو توزیع نمایی یا توزیع دو ارلانگ اشاره کرد. در اینجا ترکیب دو نمایی را بررسی می کنیم که تابع چگالی آن به صورت زیر است.

$$f(t) = \theta \beta_1 e^{-\beta_1 t} + (1 - \theta) \beta_2 e^{-\beta_2 t}, \quad t > 0. \quad (6.3)$$

این توزیع باید با عملگر مشتق زیر در (۳.۳) صدق کند.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} + \beta_1\right) \left(\frac{d}{dt} + \beta_2\right) \quad (7.3)$$

همچنین در شرایط مرزی ناهمگن است، چون

$$\begin{aligned} f_\tau(0) &= \theta \beta_1 + (1 - \theta) \beta_2 \\ f'_\tau(0) &= -\theta \beta_1^2 - (1 - \theta) \beta_2^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

توجه داشته باشید در حالتی که $\theta = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}$ و $\beta_1 \neq \beta_2$ ، به پیچش دو توزیع نمایی اشاره می کند که با در نظر گرفتن عملگر (۷.۳) و شرایط مرزی همگن (۴.۳) که در آن $\alpha_0 = \beta_1 \beta_2$ ، در (۳.۳) صدق می کند.

تعریف ۳.۱.۳. اولین زمانی که سرمایه $U(t)$ از سبد سرمایه بیمه به زیر صفر نزول کند را زمان شکست می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T_u = \inf_{t \geq 0} \{t : U(t) < 0 | U(0) = u\}.$$

تعریف ۴.۱.۳. احتمال شکست را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\psi(u) = P(T_u < \infty | U(0) = u).$$

لم ۵.۱.۳. اگر A^n را ترکیب n بار از A تعریف کنیم، یعنی $A^n = A \circ A \circ \dots \circ A$ ، که A در (۱.۳) تعریف شد، آن گاه هنگامی که تابع چگالی f_τ در (۳.۳) با شرایط اولیه (۵.۳) صدق کند، هر تابع h در دامنه $\mathcal{D}(A^n)$ با شرط $E[h(U(\tau)) | U(\circ) = u] = h(u)$ برقرار باشد، معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر را داریم.

$$\mathcal{L}^*(A)h(u) = \sum_{k=\circ}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j (-1)^{j-k} f_\tau^{(j-k-1)}(\circ) \right) \int_{\circ}^{\infty} h^{(k)}(u-x) dF_X(x). \quad (۹.۳)$$

□

برهان. به مرجع [۳۴] مراجعه شود.

بنابراین احتمال شکست $\psi(u)$ در دامنه $\mathcal{D}(A^n)$ است. $\psi(u)$ در معادله دیفرانسیل-انتگرالی زیر صدق می کند.

$$\mathcal{L}^*(A)\psi(u) = \sum_{k=\circ}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j (-1)^{j-k} f_\tau^{(j-k-1)}(\circ) \right) \int_{\circ}^{\infty} \psi^{(k)}(u-x) dF_X(x).$$

با دو بخشی کردن انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} = \int_{\circ}^u + \int_u^{\infty}$ و با استفاده از تعریف ψ ، رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(A)\psi(u) &= \sum_{k=\circ}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j (-1)^{j-k} f_\tau^{(j-k-1)}(\circ) \right) \int_{\circ}^u \psi^{(k)}(u-x) dF_X(x) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (-1)^j f_\tau^{(j-1)}(\circ) \right) \int_u^{\infty} dF_X(x). \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

همچنین در [۳]، احتمال شکست به عنوان جواب مساله مقدار مرزی نشان داده شده است. به ویژه اگر تابع $h \in \mathcal{D}(A^n)$ در معادله دیفرانسیل-انتگرال (۹.۳) با اضافه کردن شرط منظم بودن زیر صدق کند، آن گاه h احتمال شکست است.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = \circ$$

این روش در قضیه ۲.۱ [۱۸] برای تجزیه و تحلیل احتمال شکست در فرآیند پواسون پرش-انتشار و تجدید پرش-انتشار تعمیم داده شده است. بنابراین، طبیعی است که تجزیه و تحلیل احتمال شکست به عنوان جواب مساله مرزی با معادله دیفرانسیل-انتگرال (۱۰.۳) با فرض زیر بیان شود.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \circ. \quad (۱۱.۳)$$

در اینجا $\mathcal{L}^*$ الحاقی از $\mathcal{L}$ است که f_τ را توصیف می کند. این به روشنی به صورت زیر به دست می آید.

$$\mathcal{L}^* \left(\frac{d}{dt} \right) f_\tau(t) = \sum_{j=\circ}^n (-1)^j \alpha_j \frac{d^j}{dt^j} f_\tau(t) = \prod_{i=1}^n \left(-\frac{d}{dt} + \beta_i \right) f_\tau(t). \quad (۱۲.۳)$$

با شرط $\langle f, g \rangle = \int_{\circ}^{\infty} f(x)g(x)dx$ که ضرب عددی به صورت $\langle \mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} \right) f_\tau, g \rangle = \langle f_\tau, \mathcal{L}^* \left(\frac{d}{dt} \right) g \rangle$ با اضافه کردن شرایط ابتدایی مشابه تعریف می شود. این عملگر الحاقی نقش عمده ای در باقی این فصل

ایفا می‌کند. با قرار دادن (۱۲.۳) در (۱۰.۳)، یک احتمال شکست را به دست می‌آوریم که در معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر صدق می‌کند.

$$\prod_{i=1}^n (-A + \beta_i) \psi(u) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \int_0^u \psi^{(k)}(u-x) dF_X(x) + C_0 \int_u^\infty dF_X(x) \quad (13.3)$$

با اضافه کردن شرط منظم (۱۱.۳)، برای $k = 0, \dots, n-1$ رابطه زیر را داریم.

$$C_k = \sum_{j=k+1}^n \alpha_j (-1)^{j-k} f_\tau^{(j-k-1)}(0).$$

برای شرایط مرزی مشابه (۴.۳)، $C_0 = (-1)^n f_\tau^{(n-1)}(0)$ و برای $k = 1, \dots, n-1$ ، $C_k = 0$. بنابراین سمت راست رابطه (۱۰.۳) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\mathcal{L}^*(A) \psi(u) = (-1)^n \alpha_0 \left(\int_0^u \psi(u-x) dF_X(x) + \int_u^\infty dF_X(x) \right), \quad (14.3)$$

که با رابطه زیر معادل است.

$$\prod_{i=1}^n (-A + \beta_i) \psi(u) = \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \left(\int_0^u \psi(u-x) dF_X(x) + \int_u^\infty dF_X(x) \right),$$

رابطه بالا می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k A^k \psi(u) - \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \int_0^u \psi(u-x) dF_X(x) = \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \bar{F}_X(x) \quad (15.3)$$

ساختار معادله (۱۰.۳) با تبدیل لاپلاس تخمین زده می‌شود و ابزاری تقریبی برای تجزیه و تحلیل تقریبی نظریه مختلف منظم در [۲۵] است. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل تقریبی در واحد بودن اغلب-راست در دامنه لاپلاس را از طریق قضیه‌های تابریان-کاراماتا^۳ یا اصل هوپساید^۴، حالت تقریبی در بی‌نهایت و در دامنه حقیقی را انجام خواهیم داد. از آنجایی که قضیه تابریان-کاراماتا مربوط به حالت تقریبی تبدیل اشتیلیس-لاپلاس^۵ از یک تابع در مبدا با حالت تقریبی از این تابع در بی‌نهایت است، تابع کمکی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } u < 0, \\ \int_0^u \psi(x) dx, & \text{اگر } u \geq 0, \end{cases} \quad (16.3)$$

و تبدیل اشتیلیس-لاپلاس را با $\tilde{\Psi}(u)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{\Psi}(u) = \int_0^\infty e^{-sx} d\Psi(x) = \int_0^\infty e^{-sx} \psi(x) dx := \hat{\psi}(s),$$

^۳Karamata-Tauberian

^۴Heaviside Principle

^۵Laplace-Stieltjes

که $\hat{\psi}(u)$ تبدیل لاپلاس ψ است. از آنجایی که عملگر دیفرانسیل $\mathcal{L}(A)$ در معادله (۱۰.۳) ضریب چندجمله‌ای است، با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۱۰.۳) می‌بینیم که $\hat{\psi}(s)$ در معادله دیفرانسیل معمولی ناهمگن با ضریب چندجمله‌ای صدق می‌کند. علاوه بر این، قسمت همگن این معادله تنها در نقطه صفر منظم است، و در نتیجه مجموعه جواب بنیادی یک حالت جبری در مبدا دارد [۳۴]. از طرفی جواب ویژه روی سمت راست بوده که تبدیل لاپلاس از دم^۶ توزیع اندازه ادعا^۷ است. تجزیه و تحلیل‌های ما به عنوان توان‌های مهم تقریبی در بین جواب‌های بنیادی و جواب‌های ویژه معادله دیفرانسیل برای $\hat{\psi}$ شناخته می‌شوند که بیشتر رفتار تقریبی ψ را تعیین می‌کنند. در سراسر این فصل، از نماد زیر استفاده می‌کنیم.

$$\rho = \frac{2a}{\sigma^2} - 1. \quad (17.3)$$

این یک پارامتر بحرانی در تعیین کردن رفتار تقریبی از سود در حال کار است.

۲.۳ تجزیه و تحلیل تقریبی احتمال شکست

قضیه ۱.۲.۳. مدل (۲.۳) را با نوسانات مثبت $\sigma > 0$ و زمان‌های ورودی میانی a با چگالی f_τ را در نظر بگیرید که در ODE (۳.۳) با شرایط مرزی (۵.۳) صدق کند.

- اگر $\rho > 0$ ، آن‌گاه احتمال شکست به‌طور تقریبی به‌صورت زیر رفتار می‌کند.

$$\psi(u) \sim Cu^{-\rho} + k_n \bar{F}_X(u), \quad u \rightarrow \infty \quad (18.3)$$

در اینجا C ثابت مثبت است و

$$k_n = \frac{\prod_{i=1}^n \left(-2 + \frac{2a}{\sigma^2} + \frac{2\beta_i}{\sigma^2}\right) - \prod_{i=1}^n \left(\frac{2\beta_i}{\sigma^2}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(-3 + \frac{2a}{\sigma^2} \left(-2 + \frac{2a}{\sigma^2}\right) + \frac{2\beta_i}{\sigma^2}\right)}$$

- اگر $\rho \leq 0$ ، آن‌گاه برای هر $u > 0$ ، $\psi(u) = 1$ خواهد شد.

ملاحظه ۲.۲.۳. از (۱۸.۳) نتیجه می‌شود که رفتار تقریبی ψ از مرتبه $u^{-\rho}$ یا $\bar{F}_X(u)$ است که هر کدام به‌طور تدریجی از بین می‌رود. بنابراین ادعاهای دم سبک^۸ تاثیری روی رفتار تقریبی احتمال ورشکستگی برای این مدل تجدید تحت سرمایه‌گذاری ندارند.

برهان. برای $\rho \leq 0$ ، یعنی $2a \leq \sigma^2$ ، اثبات این که $\psi(u) = 1$ برای هر u مشابه اثبات [۲۸، ۱۹، ۳۰] است. بنابراین $\rho > 0$ را در دنباله در نظر بگیرید. ابتدا حالت مقدار اولیه همگن (حالت A) را در نظر می‌گیریم و سپس حالت‌های کلی بیشتری از مقدار اولیه ناهمگن (حالت B) را ارائه می‌دهیم.

^۶Tail

^۷Claim Size Distribution

^۸Light-Tailed Claims

حالت A . همان‌طور که در بخش ۱.۱.۳ بیان کردیم، تحت مقادیر اولیه همگن^۹ (۴.۳) احتمال شکست در معادله دیفرانسیل-انتگرال (۱۵.۳) صدق میکند. با تبدیل لاپلاس گرفتن از (۱۵.۳) و با استفاده از لم ۱.۱.آ در آ (شرایط تبدیل لاپلاس وابسته) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k \hat{A}^k \hat{\psi}(s) - \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \hat{\psi}(s) \hat{f}_X(s) = \beta_n + \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \hat{\bar{F}}_X(s)$$

یا به‌طور معادل

$$\prod_{i=1}^n (-A + \beta_i) \hat{\psi}(s) - \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \hat{\psi}(s) \hat{f}_X(s) = q(s), \quad (19.3)$$

که

$$q(s) = \beta_n + (-\beta)^n \hat{\bar{F}}_X(s) = \beta_n + (-\beta)^n \left(\frac{1}{s} - \frac{\hat{f}_X(s)}{s} \right).$$

در اینجا

$$\beta_1 = D_1 = c\psi(0),$$

و

$$\beta_2 = -2\beta_1 D_1 + D_2 = -2\beta c\psi(0) + c^2\psi'(0),$$

و

$$\begin{aligned} \beta_n = & (-1)^n \binom{n}{0} c^n \psi^{n-1}(0) + (-1)^{n-2} \binom{n}{1} c^{n-1} \beta \psi^{n-2}(0) + \dots \\ & + (-1)^{n-k} \binom{n}{k-1} c^{n-k+1} \beta^{k-1} \psi^{(n-k+1)}(0) + \dots + \binom{n}{n-1} c \beta^{n-1} \psi(0) \end{aligned} \quad (20.3)$$

حال می‌خواهیم رفتار تقریبی از جواب معادله دیفرانسیل معمولی (۱۹.۳) را در صفر تجزیه و تحلیل کنیم. بدین منظور، عبارت عملگر (۳.آ) را جایگزین $\hat{A}$ در (۱۹.۳) می‌کنیم و رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{d^2}{ds^2} - (2\sigma^2 - a)s \frac{d}{ds} - cs - \sigma^2 + a + \beta_i \right) \hat{\psi}(s) \\ & - \prod_{i=1}^n (-\beta_i) \hat{\psi}(s) \hat{f}_X(s) = q(s), \end{aligned}$$

که ما را به معادله دیفرانسیل از مرتبه $2n$ با ضرایب متغیر زیر می‌رساند.

$$\left(s^{2n} \frac{d^{2n}}{ds^{2n}} + p_{2n-1}(s) s^{2n-1} \frac{d^{2n-1}}{ds^{2n-1}} + \dots + p_1(s) s \frac{d}{ds} + p_0(s) \right) \hat{\psi}(s) = \frac{q(s)}{\left(-\frac{a^2}{n}\right)^n}, \quad (21.3)$$

که $k = 0 \dots 2n-1$ ، $p_k(s)$ چندجمله‌ای‌های از مرتبه $2n-k+1$ هستند. قسمت همگن این معادله صفر را به‌عنوان یک تک نقطه منظم دارد. با روش فروبنیوس^{۱۰} (به‌طور مثال [۲۴] را ببینید)، هر مجموعه جواب اساسی از معادله (۲۱.۳) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود.

$$\hat{\psi}_i(s) = s^{r_i} \gamma_i(s) \quad , \quad i = 1, \dots, 2n,$$

^۹Homogeneous Initial Values

^{۱۰}Frobenius Method

که r_i ($i = 1, \dots, 2n$) جواب معادله ویژه زیر است.

$$\prod_{i=1}^n \left(-(r+1) \left(r+2 - \frac{2a}{\sigma^2} \right) + \frac{2\beta_i}{\sigma^2} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{2\beta_i}{\sigma^2} \right),$$

و γ_i تابعی هستند که در $\circ$ هولومورفیک اند و $\gamma_i(\circ) \neq \circ$. با نرمال سازی کردن به طوری که $\gamma_i(\circ) = 1$ ، جواب کلی معادله (۲۱.۳) به شکل زیر است.

$$\hat{\psi}(s) = \sum_{i=1}^{2n} c_i s^{r_i} \gamma_i(s) + \hat{\psi}_p(s) \quad (22.3)$$

که $\hat{\psi}_p(s)$ جواب ویژه است. تنها ریشه های $2n$ از معادله ویژه (۲.۳) به دست می آیند به طوری که جواب ها n معادله درجه دوم هستند.

$$(r+1) \left(r+2 - \frac{2a}{\sigma^2} \right) = \frac{2\beta_i}{\sigma^2} \left(1 - e^{\frac{2\pi i k}{n}} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (23.3)$$

برای $n=1$ جواب ها $r_1 = -1$ و $r_2 = -2 + \frac{2a}{\sigma^2} = -1 + \rho$ هستند که $r_1 < r_2$ ، بنابراین $\rho > 0$. برای $n \geq 2$ ، گزاره ۲.۱.آ در آ نشان می دهد که قسمت حقیقی جواب های (۲۳.۳) می توانند به صورت زیر مرتب شوند.

$$\Re(r_{2n-1}) < \dots < \Re(r_3) < r_1 = -1 < r_2 = -1 + \rho < \Re(r_4) < \dots < \Re(r_{2n})$$

از شرایط منظم (۱۱.۳) نتیجه می گیریم که ضرایب با ضریب فرد در (۲۲.۳) به صفر می رسند، $c_{2i+1} = 0$. نرخ کاهشی در جواب های همگن باقی مانده به وسیله تدریجی ترین توان کاهشی به دست می آید که ما را به دوره ای می رساند که با $r_2 = -2 + \frac{2a}{\sigma^2}$ شروع می شود. استفاده از قضیه تابریان-کاراماتا دوره ای را در دامنه حقیقی به ما می دهد، که به مرتبه زیر کاهش می یابد.

$$u^{1-\frac{2a}{\sigma^2}}, \quad u \rightarrow \infty. \quad \text{هنگامی که}$$

(توجه داشته باشید که برای $\frac{2a}{\sigma^2} \geq 2$ ، می تواند کاربردی از استدلال بخش ۵ [۴۲] باشد). این نرخ نزولی تقریبی یکسان است به طوری که ابتدا در [۳۰] برای زمان های ورودی میانی به دست آمد. نیاز است که احتمال $c_2 = 0$ را در نظر بگیریم، اما در گزاره ۲.۱.آ در آ به تناقض می رسیم. (در واقع، $c_2 = 0$ می تواند بر این دلالت کند که s^{r_2} که دوره مقدم است، خودش می تواند به این دلالت داشته باشد که احتمال شکست زمان های ورودی میانی برای ارلانگ (n) ، سریع تر از زمان های ورودی میانی برای نمایی نزول پیدا می کند، که با گزاره ۲.۱.آ در آ در تناقض است). حال مشخص کردن جواب ویژه کمکی باقی می ماند. با این روش پارامترهای متغیر به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\hat{\psi}_p(s) = \left(-\frac{2}{\sigma^2} \right)^n \sum_{i=1}^{2n} \hat{\psi}_i(s) \int_{\epsilon_0}^s \frac{q(t)W_i(t)}{t^{2n}W(t)} dt, \quad (24.3)$$

که W دترمینان رونسکین^{۱۱} از سیستم بنیادی و W_i دترمینان رونسکینی است که از W با جایگزین کردن ستون i -ام با ستون $(\circ, \circ, \dots, \circ, 1)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ به دست می آید و $\epsilon_\circ$ ثابت مثبت بسیار کوچکی است. با استفاده از لم ۳.۱.آ در آ توابع هولومورفیک^{۱۲} $\tilde{\gamma}_m$ و $\tilde{\gamma}$ ، $\tilde{\gamma}_m(\circ) \neq \circ \neq \tilde{\gamma}(\circ)$ ، برای $m = 1, \dots, 2n$ وجود دارند به طوری که دترمینان های رونسکین $W(s)$ و $W_m(s)$ (که W_m از W با جایگزین کردن ستون m -ام با ستون $(\circ, \circ, \dots, \circ, 1)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ به دست می آید) می توانند به صورت زیر نوشته شوند.

$$\frac{W_m(s)}{s^{2n}W(s)} = s^{-r_m-1} \frac{\tilde{\gamma}_m(s)}{\tilde{\gamma}(s)},$$

که به رابطه زیر می رسیم.

$$\int_{\epsilon_\circ}^s \frac{q(t)W_i(t)}{t^{2n}W(t)} dt = \int_{\epsilon_\circ}^s q(t)t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt.$$

از آنجایی که $q(s) = B_n + (-\beta)^n \hat{F}_X(s)$ ، رابطه (۲۴.۳) به صورت زیر تفسیر می شود.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_p(s) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\gamma}{\sigma^2} \right) B_n \sum_{i=1}^{2n} s^{r_i} \gamma_i(s) \int_{\epsilon_\circ}^s t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt \\ &+ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\gamma \beta_i}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^{2n} s^{r_i} \gamma_i(s) \int_{\epsilon_\circ}^s \hat{F}_X(s) t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt. \end{aligned} \quad (25.3)$$

وابستگی روی $\hat{F}_X$ می تواند با یکی از دو حالت زیر شناخته شود.

A۱ ادعاهای دم سبک با دم کران دار نمایی (فرض کنید که $\hat{F}_X$ در $-\mu < \circ$ یکتا باشد و $\hat{F}_X(-\mu) = \infty$).

A۲ ادعاهای دم سنگین (برای هر $\epsilon_\circ$ ، $\hat{F}_X(\epsilon_\circ) = \infty$).

حالت A۱. اندازه های دم سبک. با دو بار استفاده از قانون هوییتال^{۱۴} می توانیم نشان دهیم رابطه زیر برقرار است.

$$\int_{\epsilon_\circ}^s \hat{F}_X(t)t^{-r_i-1} dt \sim \frac{1}{-r_i} s^{-r_i} \hat{F}_X(s), \quad \text{هنگامی که } s \rightarrow -\mu \quad (26.3)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\mu} \frac{\int_{\epsilon_\circ}^s \hat{F}_X(t)t^{-r_i-1} dt}{s^{-r_i} \hat{F}_X(s)} &= \lim_{s \rightarrow -\mu} \frac{s^{-r_i-1} \hat{F}_X(s)}{-r_i s^{-r_i-1} \hat{F}_X(s) + s^{-r_i} \frac{d}{ds} \hat{F}_X(s)} \\ &= \frac{1}{-r_i + \lim_{s \rightarrow -\mu} \frac{s}{\hat{F}_X(s)} \frac{d}{ds} \hat{F}_X(s)} = \frac{1}{-r_i} \end{aligned}$$

^{۱۱}Wronskian Determinant

^{۱۲}Holomorphic Functions

^{۱۳}تابع تحلیلی مختلط یا توابع هولومورفیک موضوع اصلی در مطالعه آنالیز مختلط هستند. آنها توابعی هستند که بر روی یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تعریف شده اند با مقداری در $\mathbb{C}$ که در هر نقطه مشتق مختلط دارند. هولومورفیک بودن یک شرط قوی تر از مشتق پذیری مختلط است و دلالت بر این دارد که تابع بی نهایت بار مشتق پذیر است.

^{۱۴}L'Hopital Rule

در نتیجه رابطه زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_p(s) &\sim \prod_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i}{\sigma^2} \right) B_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{-r_i} \gamma_i(-\mu) \frac{\tilde{\gamma}_i(-\mu)}{\tilde{\gamma}(-\mu)} \\ &+ \prod_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \beta_i}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \gamma_i(-\mu) \frac{\tilde{\gamma}_i(-\mu)}{\tilde{\gamma}(-\mu)} \hat{F}_X(s), \quad s \rightarrow -\mu, \end{aligned} \quad (27.3)$$

که با نرمال سازی کردن γ_i برای هر i به این صورت که $\gamma_i(-\mu) = \frac{\tilde{\gamma}_i(-\mu)}{\tilde{\gamma}(-\mu)}$ حاصل می شود. بنابراین $-\mu$ به طور منحصر سمت راست ترین از $\hat{\psi}_p(s)$ است و اولین دوره از این مجموع در $-\mu$ تحلیلی است (می توان به این صورت نوشت که $(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(s+\mu)^k)$ ، با به کار بردن اصل عملکردی هویساید (به طور مثال صفحه ۱۸۸ از [۲] را ببینید) می توان رابطه زیر را نتیجه گرفت.

$$\psi_p(s) \sim \prod_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \beta_i}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \bar{F}_X(s), \quad \text{هنگامی که } u \rightarrow \infty.$$

حالت A۲. ادعاهای دم سنگین. با دوبار استفاده از قانون هویساید و ویژگی های حد می توان رابطه زیر را نشان داد.

$$\int_{\epsilon_0}^s \hat{F}_X(t) t^{-r_i-1} dt \sim \frac{1}{-r_i} s^{-r_i} \hat{F}_X(s), \quad \text{هنگامی که } s \rightarrow 0. \quad (28.3)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_{\epsilon_0}^s \hat{F}_X(t) t^{-r_i-1} dt}{s^{-r_i} \hat{F}_X(s)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{-r_i-1} \hat{F}_X(s)}{-r_i s^{-r_i-1} \hat{F}_X(s) + s^{-r_i} \frac{d}{ds} \hat{F}_X(s)} \\ &= \frac{1}{-r_i + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\hat{F}_X(s)} \frac{d}{ds} \hat{F}_X(s)} = \frac{1}{-r_i} \end{aligned} \quad (29.3)$$

همچنین برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، γ_i و γ در 0 هولومورفیک اند و $r_i \neq 0$. (بعد از نرمال سازی کردن برای هر i یعنی $1 = \frac{\tilde{\gamma}_i(0)}{\tilde{\gamma}(0)} \gamma_i(0)$) رابطه زیر را داریم.

$$\gamma_i(s) \int_{\epsilon_0}^s t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt \sim \int_{\epsilon_0}^s t^{-r_i-1} dt, \quad \text{هنگامی که } s \rightarrow 0, \quad (30.3)$$

همچنین هنگامی که $s \rightarrow 0$ ، رابطه زیر را داریم.

$$\psi_p(s) \sim \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2} \right)^n B_n \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{r_i} \right) \prod_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \beta_i}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \hat{F}_X(s) \quad (31.3)$$

که اولین دوره از این مجموع ثابت است. از آنجایی که صفر به طور منحصر سمت راست ترین از $\hat{\psi}_p(s)$ است (و اولین دوره از مجموع ثابت است). این در صفر تحلیلی است (می توان به این صورت نوشت

که $(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(s+\mu)^k)$ ، مجدداً می‌توانیم با به کار بردن اصل عملکردی هویساید رابطه زیر را نتیجه بگیریم.

$$\psi_p(s) \sim \prod_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{1}{-r_i} \right) \bar{F}_X(s), \quad u \rightarrow \infty. \quad \text{هنگامی که}$$

بنابراین جواب ویژه نمی‌تواند یک دوره تقریبی اصلی را در حالتی که ادعاها دم سبک‌اند، ارائه دهد. از طرفی در حالتی که اندازه‌های ادعا دم سنگین‌اند، ابتدا توان کاهشی $u^{-\rho}$ و دم توزیع اندازه ادعا $\bar{F}_X$ را مقایسه می‌کنیم و این‌که کدام یک آهسته‌تر است، را تعیین می‌کنیم. حال با به کار بردن قانون ویتا^{۱۵} بر روی معادله ویژه (۲.۳) رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$r^{2n} + a_1 r^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} r + a_{2n} = 0. \quad (32.3)$$

در نتیجه رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{1}{-r_i} \right) = - \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{1}{r_i} \right) = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}.$$

حالت B . برای حالتی که چگالی‌های زمان ورودی میانی با مقادیر اولیه ناهمگن، یک جواب تحلیلی از معادله دیفرانسیل-انتگرال (۱۳.۳) را دارند، با رابطه زیر معادل است.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k \psi(u) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \int_0^u \psi^{(k)}(u-x) dF_X(x) = C_0 \bar{F}_X(u). \quad (33.3)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از (۳۳.۳) و استفاده از خواص تبدیل لاپلاس، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k \hat{A}^k \hat{\psi}(s) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k s^k \right) \hat{\psi}(s) \hat{f}_X(s) \\ &= B_n + C_0 \bar{F}_X(s) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} \psi^{(k-j-1)}(0) \right) \hat{f}_X(s), \end{aligned}$$

که B_n در (۲۰.۳) به‌دست آمد. این با رابطه زیر معادل است.

$$\prod_{i=1}^n (-A + \beta_i) \hat{\psi}(s) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k s^k \right) \hat{\psi}(s) \hat{f}_X(s) = q(s), \quad (34.3)$$

مجدداً سمت راست با $q(s)$ مشخص می‌شود. می‌توان دید که با الحاق کردن عملگر $\hat{A}$ بیان شده در (۳.آ) و با تقسیم کردن بر $\left(-\frac{\sigma^2}{4}\right)^n$ ، به یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه $2n$ می‌رسیم. این بخش همگن مجدداً تنها در نقطه صفر منظم است. روش فروبنیوس یک معادله ویژه مشابه (۲.۳) را تولید می‌کند که ما را به یک جواب همگن مشابه برای معادله (۳۴.۳) با توجه به (۱۹.۳) می‌رساند، بنابراین

^{۱۵}Vieta's Rule

جواب ویژه متفاوت خواهد بود.

$$\begin{aligned}\psi_p(s) &= B_n \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n s^{r_i} \gamma_i(s) \int_{\epsilon_0}^s t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt \\ &+ C_0 \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n s^{r_i} \gamma_i(s) \int_{\epsilon_0}^s \hat{F}_X(t) t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt \\ &+ \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} C_k \sum_{i=1}^n s^{r_i} \gamma_i(s) \int_{\epsilon_0}^s \left(\sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} \psi^{(k-j-1)}(\circ) \right) \\ &\times \hat{f}_X(t) t^{-r_i-1} \frac{\tilde{\gamma}_i(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt\end{aligned}$$

مشابه (۲۹.۳) که در بخش قبلی نتیجه شد، می‌توان نشان داد که برای ادعاهای دم سنگین رابطه زیر را داریم.

$$\int_{\epsilon_0}^s \hat{f}_X(t) t^{-r_i-1} dt \sim \frac{1}{-r_i} s^{-r_i} \hat{f}_X(s), \quad s \rightarrow 0, \quad \text{هنگامی که} \quad (35.3)$$

به واسطه

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_{\epsilon_0}^s \hat{f}_X(t) t^{-r_i-1} dt}{s^{-r_i} \hat{f}_X(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{-r_i-1} \hat{f}_X(s)}{-r_i s^{-r_i-1} \hat{f}_X(s) + s^{-r_i} \frac{d}{ds} \hat{f}_X(s)} = \frac{1}{-r_i}.$$

از آنجایی که به‌طور مشابه برای ادعاهای دم سبک، به‌طور منحصر سمت راست‌ترین $-\mu$ ، درست است. بر اساس (۲۹.۳)، (۳۰.۳)، (۳۵.۳) و رابطه تقریبی

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k \hat{f}_X(s) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} \psi^{(k-j-1)}(\circ) \sim \psi(\circ) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \sum_{k=0}^{n-1} C_k \hat{f}_X(s)$$

به‌ترتیب زمانی که $s \rightarrow 0$ برای ادعاهای دم سنگین و زمانی که $s \rightarrow -\mu$ برای ادعاهای دم سبک، جواب ویژه به‌طور تقریبی به‌صورت زیر رفتار می‌کند.

$$\begin{aligned}\psi_p(s) &\sim B_n \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) C_0 \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \hat{F}_X(s) \\ &+ \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \psi(\circ) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \sum_{k=0}^{n-1} C_k \hat{f}_X(s)\end{aligned}$$

این مجموعی از تابع تحلیلی $B_n \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right)$ است و رابطه زیر تبدیل لاپلاس از تابع H است.

$$\hat{H}(s) = C_0 \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i + \gamma} \right) \hat{F}_X(s) + \left(-\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^n \psi(\circ) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i} \right) \sum_{k=0}^{n-1} C_k \hat{f}_X(s).$$

با توجه به اصل هویساید، جواب ویژه کمکی زمانی که با تبدیل لاپلاس معکوس $\hat{H}(s)$ به دست می‌آید، نزول خواهد کرد. در نتیجه رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \psi_p(u) \sim C_0 \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i}\right) \hat{F}_X(u) \\ + \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)^n \psi^{(0)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{-r_i}\right) \sum_{k=0}^{n-1} C_k f_X(u), \quad u \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

هنگامی که

نشان دادن این که ψ_p رفتاری تقریبی مانند $\bar{F}_X$ دارد، باقی می‌ماند. برای این که دوره غالب را بین این دو ایجاد کنیم، نیاز است که حد $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_X(u)}{\bar{F}_X(u)}$ را تجزیه و تحلیل کنیم که فقط حدی از تابع نرخ مخاطره^{۱۶} است. برای اندازه‌های ادعای کراندار نمایی، این حد ثابت است ([۳۸] را ببینید) که نتیجه می‌دهد چگالی f_X و دم $\bar{F}_X$ رفتاری مشابه در بی‌نهایت دارند. برای ادعاهای دم سنگین، تابع نرخ مخاطره به صفر کاهش می‌یابد که بر این دلالت دارد، دوره با $\bar{F}_X$ آهسته‌تر نزول می‌کند.

□

^{۱۶} Hazard Rate Function

پیوست آ

لم‌های مورد نیاز

۱. آ‌ها و گزاره

لم آ.۱.۱. اگر چگالی زمان ورودی میانی در ODE با ضریب ثابت به شکل زیر صدق کند،

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right) f_{\tau}(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \beta_i\right) f_{\tau}(t) = 0,$$

آن‌گاه تبدیل لاپلاس عملگر $\mathcal{L}^*(A)$ ، خود یک عملگر به صورت زیر است.

$$\widehat{\mathcal{L}^*(A)(\psi)} = \prod_{i=1}^n (-\widehat{A} + \beta_i) \psi = \prod_{i=1}^n ((-\hat{A} + \beta_i) \hat{\psi}) + B \quad (1.A)$$

که B ثابت است.

برهان. یادآوری می‌کنیم که $A = (C + au) \frac{d}{du} + \frac{\sigma^2}{2} u^2 \frac{d^2}{du^2}$ با استفاده از شرایط اساسی تبدیل لاپلاس اشتقاقی، رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned} \widehat{A\psi(s)} &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{ds^2} (s^2 \hat{\psi}(s)) - a \frac{d}{ds} (s \hat{\psi}(s)) + c (s \hat{\psi}(s) - \psi(0)) \\ &:= \hat{A}\hat{\psi}(s) - D_1, \end{aligned} \quad (2.A)$$

که $D_1 = c\psi(0)$ و عملگر $\hat{A}$ می‌تواند به صورت زیر بسط پیدا کند.

$$\hat{A} = \frac{a^2}{2} s^2 \frac{d^2}{ds^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - a\right) s \frac{d}{ds} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - a + cs\right). \quad (3.A)$$

برای هر $k \geq 2$ ، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\hat{A}^k \hat{\psi}(s) = \hat{A}(\hat{A}^{k-1} \hat{\psi}(s)) \quad , \quad \text{یا} \quad \hat{A}^k = \hat{A} \hat{A}^{k-1}$$

بنابراین به‌طور بازگشتی رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \widehat{\hat{A}\psi(s)} &= \widehat{\hat{A}\hat{A}^{k-1}\psi(s)} - D_k \\ &= \hat{A}(\widehat{\hat{A}\hat{A}^{k-2}\psi(s)} - D_{k-1}) - D_k = \hat{A}^2 \widehat{\hat{A}^{k-2}\psi(s)} - D_k \\ &= \dots \\ &= \hat{A}^k \hat{\psi}(s) - D_k, \end{aligned} \quad (4.1)$$

□ که $D_k = cA^{k-1}\psi(s)|_{s=0} = c^k \psi^{k-1}(0)$ به (1.1) رهنمون می‌شود.

گزاره ۲.۱.۱. فرض کنیم $\psi_n(u)$ نشان دهنده احتمال شکست فرآیند ریسکی $U^{(n)}$ که در زیر تعریف می‌کنیم، باشد.

$$U^{(n)}(t) = u + ct + a \int_0^t U(s)ds + \sigma \int_0^t U(s)dB_s - \sum_{k=1}^{N^n(t)} X_k \quad (5.1)$$

که فرآیند تعداد ادعا N^n با یک فرآیند تجدید با زمان‌های ورودی میانی ارلانگ (n) شروع می‌شود. پس برای هر $m < n$ ، $\psi_m(u) \geq \psi_n(u)$.

لم ۳.۱.۱. فرض کنیم که برای $i = 1, \dots, 2n$ ، $y_i(s) = s^{r_i} \gamma_i(s)$ ، یک جواب اساسی برای معادله همگن (21.3) باشد که $\gamma_i(s)$ توابع هولومورفیک هستند و $\gamma_i(0) = 1$. فرض کنید برای هر $m = 1, \dots, 2n$ رابطه زیر را داشته باشیم.

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \sum_{i=1}^{2n} r_i - n(2n-1) \\ \bar{\omega}_m = \sum_{i=1, i \neq m}^{2n} r_i - (n-1)(2n-1) \end{cases}$$

پس توابع هولومورفیک $\tilde{\gamma}$ و $\tilde{\gamma}_m$ برای $m = 1, \dots, 2n$ وجود دارند به‌طوری‌که دترمینان‌های رونسکین $^1 W(s)$ و $W_m(s)$ (که W_m از W با جایگزین کردن ستون m -ام با ستون $(0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^m$) به‌دست می‌آید می‌توانند به‌صورت زیر نوشته شوند.

$$W(s) = s^{\bar{\omega}} \tilde{\gamma}(s) \quad , \quad W_m(s) = s^{\bar{\omega}_m} \tilde{\gamma}_m(s).$$

همچنین $\tilde{\gamma}(0) \neq 0 \neq \tilde{\gamma}_m(0)$ ، و برای $m = 1, \dots, 2n$ رابطه زیر را داریم.

$$\frac{W_m(s)}{s^{2n} W(s)} = s^{-r_m-1} \frac{\tilde{\gamma}_m(s)}{\tilde{\gamma}(s)},$$

که g_m به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g_m = \frac{\tilde{\gamma}_m(0)}{\tilde{\gamma}(0)}.$$

¹Wronskian Determinants

مراجع

- [۱] جهانی‌پور ر، ظهوری زنگنه ب، (۱۳۸۳)، حرکت براونی ”حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل‌ساز پدیده‌های طبیعی“ انتشارات فرهنگ و اندیشه ریاضی، صفحه ۲۰-۱.
- [2] Abate, J., Whitt, W. "Asymptotics for M/G/1 low-priority waiting-time tail probabilities". **Queueing Systems**, (1997).25(1-4), 173-233.
- [3] C. Constantinescu, E. Thomann, "Martingales for renewal jump-diffusion processes", **Preprint**, 2011.
- [4] C. Hipp, M. Plum, "Optimal investment for insurers", **Insurance Math. Econom.** 27 (2) (2000) 215–228.
- [5] C. Klüppelberg, U. Stadtmüller, "Ruin probabilities in the presence of heavy-tails and interest rates", **Scand. Actuar. J.** (1) (1998) 49–58.
- [6] C.M. Goldie, "Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations", **Ann. Appl. Probab.** 1 (1) (1991) 126–166.
- [7] E. Thomann, E. Waymire, "Contingent claims on assets with conversion costs", **J. Statist. Plann. Inference** 113 (2003) 403–417.
- [8] G. Wang, R. Wu, "Distributions for the risk process with a stochastic return on investments", **Stochastic Process. Appl.** 95 (2) (2001) 329–341.
- [9] H. Albrecher, C. Constantinescu, G. Pirsic, G. Regensburger, M. Rosenkranz, "An algebraic operator approach to the analysis of Gerber-Shiu functions", **Insurance Math. Econom.** 46 (1) (2010) 42–51.
- [10] H.K. Gjessing, J. Paulsen, "Present value distributions with applications to ruin theory and stochastic equations", **Stochastic Process. Appl.** 71 (1) (1997) 123–144.
- [11] H. Nyrhinen, "Finite and infinite time ruin probabilities in a stochastic economic environment", **Stochastic Process. Appl.** 92 (2) (2001) 265–285.

-
- [12] H. Nyrhinen, "Large deviations for the time of ruin", **J. Appl. Probab.** 36 (3) (1999) 733–746.
 - [13] J.F. Collamore, "Random recurrence equations and ruin in a Markov-dependent stochastic economic environment", **Ann. Appl. Probab.** 19 (4) (2009) 1404–1458.
 - [14] J. Gaier, P. Grandits, "Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment", **Insurance Math. Econom.** 30 (2) (2002) 211–217.
 - [15] J. Gaier, P. Grandits, "Ruin probabilities and investment under interest force in the presence of regularly varying tails", **Scand. Actuar. J.** (4) (2004) 256–278.
 - [16] J. Gaier, P. Grandits, W. Schachermayer, "Asymptotic ruin probabilities and optimal investment", **Ann. Appl. Probab.** 13 (3) (2003) 1054–1076.
 - [17] J.L. Teugels, G. Willmot, "Approximations for stop-loss premiums", **Insurance Math. Econom.** 6 (3) (1987) 195–202.
 - [18] J. Paulsen, H.K. Gjessing, "Ruin theory with stochastic return on investments", **Adv. in Appl. Probab.** 29 (4) (1997) 965–985.
 - [19] J. Paulsen, "On Cramér-like asymptotics for risk processes with stochastic return on investments", **Ann. Appl. Probab.** 12 (4) (2002) 1247–1260.
 - [20] J. Paulsen, "Ruin models with investment income", **Probab. Surv.** 5 (2008) 416–434.
 - [21] L. Wei, "Ruin probability of the renewal model with risky investment and large claims", **Sci. China Ser. A** 52 (7) (2009).
 - [22] P. Grandits, "A Karamata-type theorem and ruin probabilities for an insurer investing proportionally in the stock market", **Insurance Math. Econom.** 34 (2) (2004) 297–305.
 - [23] Q. Tang, G. Tsitsiashvili, "Finite- and infinite-time ruin probabilities in the presence of stochastic returns on investments", **Adv. in Appl. Probab.** 36 (4) (2004) 1278–1299.
 - [24] Q. Tang, L. Wei, "Asymptotic aspects of the Gerber-Shiu function in the renewal risk model using Wiener-Hopf factorization and convolution equivalence", **Insurance Math. Econom.** 46 (1) (2010) 19–31.

- [25] Q. Tang, G. Tsitsiashvili, "Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks", **Stochastic Process. Appl.** 108 (2) (2003) 299-325.
- [26] R. Kostadinova, "Optimal investment for insurers when the stock price follows an exponential L'evy process", **Insurance Math. Econom.** 41 (2) (2007) 250-263.
- [27] S. Pergamenschchikov, "Erratum to: Ruin probability in the presence of risk investments [Stochastic Process Appl. 116 (2006) 267-278]", **Stochastic Process. Appl.** 119 (1) (2009) 305-306.
- [28] S. Pergamenschchikov, O. Zeitouny, "Ruin probability in the presence of risky investments", **Stochastic Process. Appl.** 116 (2) (2006) 267-278.
- [29] V. Kalashnikov, R. Norberg, "Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments", **Stochastic Process. Appl.** 98 (2) (2002) 211-228.
- [30] A. Frolova, Y. Kabanov, S. Pergamenschchikov, "**In the insurance business risky investments are dangerous**", Finance Stoch. 6 (2) (2002) 227-235.
- [31] Hull, J., Treepongkaruna, S., Colwell, D., Heaney, R., Pitt, D. "**Fundamentals of futures and options markets**". Pearson Higher Education AU.(2013).
- [32] I.Karatzas and S.E. Shereve,"**Brownian Motion and Stochastic Calculus**", 2nd ed., Springer Verlag, 1991.
- [33] K.C. Yuen, G. Wang, R. Wu, "**On the renewal risk process with stochastic interest**", Stochastic Process. Appl. 116 (10) (2006) 1496-1510.
- [34] M.V. Fedoryuk, Asymptotic Analysis, Springer-Verlag, Berlin, "**Linear ordinary differential equations**", Translated from the Russian by Andrew Rodick.1993.
- [35] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, "**Regular Variation**", in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [36] Øksendal, B. "**Stochastic differential equations**" (pp. 65-84). Springer.(2003). Berlin Heidelberg.
- [37] Rudin, W. "**Functional Analysis**". McGraw Hill, New York.(1991).

-
- [38] S. Asmussen, H. Albrecher, **"Ruin Probabilities, second edition, in: Advanced Series on Statistical Science Applied Probability"**, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2010.
- [39] Sturm, A., and Björk, T. **"Arbitrage Theory in Continuous Time"**.(2001).
- [40] T.Bjork, **"Arbitrage Theory in Continuous Time"**, 3nd ed., Oxford University Press, 2009
- [41] Varsei, A. **"Red Analysis–Notes"**. Lecture Notes, Preprint
- [42] W. Feller, **"An Introduction to Probability Theory and its Applications"**. vol. II, second edition, John Wiley Sons Inc., New York, 1971.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

American Option.....	اختیار آمریکایی
European option.....	اختیار اروپایی
Call Option	اختیار خرید
put Option	اختیار فروش
Light-Tailed Claims	ادعاهای دم سبک
Heaviside Principle	اصل هویساید
Over The Counter market	بازارهای فرا بورس
Holomorphic Functions.....	توابع هولومورفیک
Claim Size Distribution	توزیع اندازه ادعا
Tail.....	دم
Frobenius Method	روش فروبنیوس
Exercise Date Or expiration Date Or Maturity	سررسید اختیار معامله
L'Hopital Rule.....	قانون هوییتال
Futures Contract	قرارداد آتی
Exercise Price(Strike Price)	قیمت توافقی
Laplace	لاپلاس
Homogeneous Initial Values	مقادیر اولیه همگن
Long position	موضع معاملاتی خرید
Short position	موضع معاملاتی فروش
Ruin Theory	نظریه شکست
Queueing Theory	نظریه صف

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Brownian	براونی
Claim	ادعا
Covolution	پیچش
Distribution	توزیع
Function	تابع
Heavy Tailed	دم سنگین
Hazard	مخاطره
Independent	مستقل
Initial	اولیه
Insuracce	بیمه
Lebesgue	لبگ
Motion	حرکت
Normal	نرمال
Portfilio	سبد سهام
Premium	حق بیمه
Probability	احتمال
Process	فرآیند
Rate	نرخ
Renewal	تجدید
Risk	خطر
Ruin	شکست
Stochastic	تصادفی

Aabstract

Financial mathematics which deals with the general behavior of financial markets that determine the risk and rate of return Capital. By identifying the market can be a good investment with less risk and greater return, Did. Different modeling for financial markets is the most important of them can be Stochastic differential equations noted that the level of market volatility is modeled. In this thesis Prerequisites and definitions, then all kinds of modeling random and examine their relationships and in Finally, to invest in the insurance industry, which today is one of the most important financial market, and we offer a asymptotic relationship for the probability of ruin of the insurance company.

keywords: Stochastic modeling, Brownian motion, Seasonal modeling, Ruin probability, Risky Investments



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: financial mathematics

Stochastic modeling for risk investments in the insurance industry

By: Seyed Hassan Eshaghi

Supervisor

Elham Dastranj

Advisor

Seyed Mojtaba Mirlohi

February 2017