بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

فرآیند کسری- پرش در قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های توان آسیایی

نگارنده: فائزه شکری

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

بهمن ۱۳۹۵

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره 7: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **فائزه شکری** به شماره دانشجویی 9310434 رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان فرآیند کسری-پرش در قیمت گذاری اختیارمعامله های توان آسیایی که در تاریخ **1395/11/4** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز 18/63) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐
نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

1ـ عالی (20 ـ 19)
2ـ بسیار خوب (18/99 ـ 18)
3ـ خوب (17/99 ـ16)
4ـ قابل قبول (15/99 ـ 14)
5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
2- استادراهنمای دوم		—	—
3- استاد مشاور		—	—
4- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد رضا ربیعی	استادیار	
5- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
6ـ استاد ممتحن دوم	دکتر محمد آرشی	دانشیار	

رئیس دانشکده : دکتر ابراهیم هاشمی

پایان‌نامه‌ی خود را تقدیم می‌کنم به همسر مهربانم.

این رساله را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به‌خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت‌آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و بامهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند. به همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است. به استاد عزیزم سرکار خانم دکتر الهام دسترنج و همه‌ی استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند. به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند. به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود. الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم. پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما. خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

فائزه شکری
بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **فائزه شکری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **فرآیند کسری- پرش در قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های توان آسیایی** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فائزه شکری
بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

قیمت‌گذاری اختیار معامله از مهم‌ترین مفاهیم در اقتصادهای مالی و در نتیجه، در ریاضیات مالی است. در حالت خاص، فرآیند براونی کسری به سبب داشتن ویژگی وابستگی دوربرد، برای فرموله کردن دینامیک سهام مناسب است. در این رساله، قیمت اختیار معامله‌های توان آسیایی هندسی تحت چارچوب فرآیند براونی کسری را ارزیابی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اختیار معامله‌ی آسیایی؛ اختیار معامله‌ی توان؛ فرآیند براونی کسری؛ قیمت‌گذاری اختیار معامله

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل برآنیم که برای درک بهتر این پایان‌نامه، به طور خلاصه به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه بپردازیم. مطالب ارائه شده در این فصل به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است، از مراجع [۳۱]، [۶] و [۳۷] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱. یک توپولوژی در مجموعه‌ی X، دسته‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند τ است، به طوری‌که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. X و $\varnothing$ عضو τ باشند،

۲. اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ، عضو τ باشد،

۳. اجتماع هر زیردسته‌ی دلخواه τ، عضو τ باشد.

زوج مرتب (X,τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbf{R}$ باشد، تابع $\|.\|:\mathrm{V}\longrightarrow\mathbf{R}$ را یک نرم روی فضای برداری V می‌گوییم، هرگاه

۱. برای هر $x\in\mathrm{V}$،

$$\|x\|\geq \circ,$$

۲. برای هر $x \in \mathrm{V}$ و $\alpha \in \mathbf{R}$،

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$$

۳. برای هر $x, y \in \mathrm{V}$،

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

۴. برای هر $x \in \mathrm{V}$، $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

به $(\mathrm{V}, \|.\|)$ فضای نرمدار می‌گوییم.

۲.۱ مفهوم اندازه و اندازه‌پذیری

در سراسر این رساله، فرض می‌کنیم که Ω مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی و $\mathcal{C}$ یک مجموعه‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های آن است.

تعریف ۱.۲.۱. Ω را **فضای نمونه** [۱] و اعضای $\mathcal{C}$ را **پیشامد** [۲] می‌گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های X باشد، در این صورت داریم

۱. $\mathcal{C}$ را یک **نیم حلقه** [۳] از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک‌های متناهی، بسته و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۲. $\mathcal{C}$ را یک **حلقه** [۴] از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل، بسته باشد.

۳. $\mathcal{C}$ را یک **نیم میدان** [۵] (نیم جبر) از زیرمجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اشتراک‌های متناهی، بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.

۴. $\mathcal{C}$ را یک **میدان** [۶] گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع‌های متناهی و مکمل، بسته باشد.

۵. $\mathcal{C}$ را یک σ**ـ میدان** [۷] از زیر مجموعه‌های X گوییم، اگر $\mathcal{C}$ تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر و مکمل، بسته باشد.

---

[۱] Sample Space
[۲] Event
[۳] Semi Ring
[۴] Ring
[۵] Semi Field
[۶] Field
[۷] σ- Field or σ-Algebra

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی و دلخواه از زیرمجموعه‌ها باشد، منظور از یک **اندازه** [۸] روی $\mathcal{C}$، تابعی مانند μ با دامنه‌ی $\mathcal{C}$ ($\mu : \mathcal{C} \to [\circ, \infty]$) است به طوری‌که در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر A در $\mathcal{C}$ ، $\circ \leq \mu(A) \leq \infty$،

۲) هرگاه $\{A_n, n \geq ۱\}$، دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{C}$ باشد، به طوری‌که $(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) \in \mathcal{C}$، داشته باشیم $\mu(\cup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n)$.

ویژگی اخیر را ویژگی σ ـ جمع‌پذیری [۹] برای μ می‌گوییم.

ملاحظه ۴.۲.۱. در منابع، در تعریف فوق، شرط سومی را به صورت $\mu(\varnothing) = \circ$، قائل می‌شوند.

تعریف ۵.۲.۱. اگر U خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، (برحسب رابطه‌ی شمول) کوچک‌ترین σـ میدان شامل U از زیرمجموعه‌های X را، **σـ میدان تولید شده توسط** U می‌نامیم و به صورت $\sigma(\mathrm{U})$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \cap\{\mathcal{H}; \mathcal{H} \text{ است } \Omega \text{ یک} \sigma\text{ـمیدان روی } , \mathcal{H} \subset \mathrm{U}\}.$$

یک σ ـ میدان است. لازم به ذکر است که $\sigma(\mathrm{U})$، اشتراک تمام σـ میدان‌های شامل U است. این σ ـ میدان، کوچک‌ترین σ ـ میدانی است که شامل U است. حال اگر $X = \mathbf{R}^n$ (یا $X = \mathbf{R}$) و U مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های باز X باشد، $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ را **σ ـ میدان بورل** $\mathbf{R}^n$ می‌نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $[a, b)$ یا $[a, b]$ یا (a, b) که در آن a, b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$ اند.

تعریف ۶.۲.۱. زیرمجموعه‌ی A از X را مجموعه‌ی بورل [۱۰] گوییم، هرگاه A عضو σـ میدان بورل باشد. به عبارت دیگر، اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه‌ی بورل می‌گوییم.

ملاحظه ۷.۲.۱. الف) به‌طور کلی، در یک فضای توپولوژیکی، σـ میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز σـ میدان بورل نامیده می‌شود.

ب) دسته‌ی مجموعه‌های بورل، کوچکترین σـ میدانی است که حاوی همه‌ی مجموعه‌های باز است.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیرمجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی $\mathcal{C}$ باشد. اندازه‌ی μ را روی $\mathcal{C}$، **متناهی** گوییم، هرگاه برای هر A در $\mathcal{C}$، داشته باشیم

$$\mu(A) < \infty.$$

و اندازه‌ی μ را روی $\mathcal{C}$، **σـ متناهی** [۱۱] گوییم ،هرگاه دسته‌ی شمارش‌پذیر مانند $\{A_n, n \geq ۱\}$ از اعضای $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $X = \cup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

[۸] Measure
[۹] σ-Additivity
[۱۰] Borel Set
[۱۱] σ- Finite

ملاحظه ۹.۲.۱. هر اندازه‌ی متناهی، یک اندازه‌ی σــ متناهی است.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای σ ــمتناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیرمجموعه‌ی دلخواه A از X، **اندازه‌ی خارجی** A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\geq ۱} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \cup_{n\geq ۱} I_n\right\}.$$

قضیه ۱۱.۲.۱. الف) برای $I \in \mathcal{H}$، $\mu^*(I) = \mu(I)$.

ب) اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای دلخواه باشد، آنگاه

$$\mu^*(\cup_{n\geq ۱} A_n) \leq \sum_{n\geq ۱} \mu^*(A_n).$$

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱۲.۲.۱. الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیراند.

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه‌ی دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) + .$$

B را مجموعه‌ی آزمونی برای A می‌نامیم.

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱۳.۲.۱. الف) اگر $A \subseteq B \subseteq X$، آنگاه $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$،

ب) اگر $I \in \mathcal{H}$، داریم $\mu^*(I) = \mu(I)$ و این معادل این است که $\mu^*|_I = \mu$.

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱۴.۲.۱. زیرمجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ)، **اندازه‌پذیر** [۱۲] گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A).$$

ملاحظه ۱۵.۲.۱. اگر A اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای زیرمجموعه‌ی دلخواه B از X داریم

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

[۱۲] Measurable

تعریف ۱۶.۲.۱. دسته‌ی تمام مجموعه‌های μ^* ـ اندازه‌پذیر، تشکیل یک σـ میدان می‌دهند، که به آن σـ میدان لبگ [۱۳] می‌گوییم و آن را با نماد $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۷.۲.۱ (قضیه‌ی گسترش کاراتئودوری). [۱۴] اگر $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X و μ یک اندازه در $\mathcal{H}$ باشد، به طوری‌که تعداد شمارش‌پذیر از اعضای $\mathcal{H}$ با اندازه‌ی σـ متناهی، X را بپوشاند، آنگاه μ گسترشی یگانه روی σـ میدان تولید شده توسط $\mathcal{H}$ در X (یعنی $\mathcal{B}$)دارد.

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{C}$ یک σ ـ میدان از زیرمجموعه‌های آن باشد. جفت مرتب $(\Omega, \mathcal{C})$ را یک **فضای اندازه‌پذیر** [۱۵] می‌گوییم، هرگاه در شرایط تعریف اندازه‌پذیری صدق کند. هر عضو $\mathcal{C}$ را یک **مجموعه‌ی اندازه‌پذیر** می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. تابع $f : (\mathrm{X}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathrm{Y}, \mathcal{B})$ را **اندازه‌پذیر** می‌گوییم، اگر برای هر $B \in \mathcal{B}$،

$$f^{-1}(B) = \{\omega |\, f(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

ملاحظه ۲۰.۲.۱. تابع $f : (\mathrm{X}, \mathcal{A}) \to (\mathrm{Y}, \mathcal{B})$ را در نظر می‌گیریم. σـ **میدان** $\mathcal{F}_Y$ **تولید شده توسط** Y، یعنی

$$\mathcal{F}_Y = \{Y^{-1}(B); \quad B \in \mathcal{B}\}.$$

کوچک‌ترین σـ میدان روی $\mathcal{A}$ است که f را اندازه‌پذیر می‌کند.

۳.۱ انتگرال

در این بخش می‌خواهیم انتگرال تابع نامنفی و دلخواه f را نسبت به اندازه‌ی μ تعریف کنیم.

یادآوری ۱.۳.۱. اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σـ میدان $\mathcal{A}$ باشد، **تابع مشخصه‌ی** [۱۶] **مجموعه‌ی** A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}.$$

تعریف ۲.۳.۱. انتگرال تابع ابتدایی [۱۷] $f = \chi_A$ نسبت به اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \int_X \chi_A d\mu = \mu(A).$$

[۱۳] Lebesque
[۱۴] Caratheodory Extension Theorem
[۱۵] Measurable Space
[۱۶] Characteristic Function
[۱۷] Elementory Function

تعریف ۳.۳.۱. تابع ساده [۱۸] تابعی است با دامنه‌ی دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n$ باشد. می‌توان نوشت $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$. روشن است که A_i ها مجزا هستند.
اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_i ها اندازه‌پذیراند.

تعریف ۴.۳.۱. انتگرال φ نسبت به اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

قرارداد ۵.۳.۱. قرارداد می‌کنیم $0 \times \infty = 0$.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد، (برای $A \in \mathcal{A}$، $\varphi\chi_A$ نیز یک تابع ساده می‌باشد.) انتگرال φ روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \chi_A d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap A).$$

قضیه ۷.۳.۱. فرض کنیم f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، آنگاه دنباله‌ای از توابع ساده مانند φ_n وجود دارند، به طوری‌که φ_n به صورت صعودی به f میل کند.

برهان. به [۶] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۳.۱. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A \varphi d\mu : \varphi \leq f\},$$

که در آن φ تابعی ساده و نامنفی است.

قضیه ۹.۳.۱. فرض کنیم f تابعی اندازه‌پذیر روی X و $A_1, A_2, \cdots$ دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای A باشد و $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. در این صورت خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

برهان. به [۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱۰.۳.۱. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f، روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

[18] Simple Function

قضیه ۱۱.۳.۱ (قضیه‌ی همگرایی یکنوا). [۱۹] فرض کنیم $f_1, f_2, \cdots$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر، نامنفی و صعودی باشند و $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_{n\to\infty}\lim f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. به [۶] رجوع کنید. □

ملاحظه ۱۲.۳.۱. قضیه‌ی فوق در صورت نزولی بودن دنباله یا برداشتن قید نامنفی بودن، ممکن است درست نباشد. به‌طور مثال، اگر $f_n = \chi_{(n,\infty)}$، $n \geq 1$، در این صورت $\int f_n d\mu = \infty$، برای $n \geq 1$، و

$$0 = \int f d\mu \neq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \infty.$$

تعریف ۱۳.۳.۱. اگر f تابع حقیقی با دامنه‌ی دلخواه باشد، متناظر با f، برای هر x از دامنه‌ی f، توابع f^+ و f^- را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^+ = \max\{f(x), 0\},$$

و

$$f^- = \max\{-f(x), 0\}.$$

f^+ و f^- را به‌ترتیب، جزء مثبت [۲۰] و جزء منفی [۲۱] f می‌نامیم. در این صورت، داریم $f = f^+ - f^-$، یعنی، هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم

$$|f| = f^+ - f^-.$$

روشن است که اگر f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f^+ و f^- نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع f را که روی X تعریف شده است، انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه $\int f^+$ و $\int f^-$، هر دو متناهی باشند. در این صورت، برای هر $A \in \mathcal{A}$، انتگرال f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

۴.۱ نظریه‌ی احتمال

نظریه‌ی احتمال، مطالعه‌ی رویدادهای تصادفی است. به عبارت دیگر، نظریه‌ی احتمال شاخه‌ای از ریاضیات است که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. هسته‌ی تئوری احتمال را متغیرهای تصافی،

[۱۹] Monotone Convergence Theorem
[۲۰] Positive Part
[۲۱] Negative Part

فرآیندهای تصادفی و پیشامدها تشکیل می‌دهند. نظریه‌ی احتمال علاوه بر توضیح پدیده‌های تصادفی به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازند که لزوما تصادفی نیستند، ولی با انجام آزمایشات به کرات، نتایج از الگوی خاصی پیروی می‌کنند. مثلا با پرتاب سکه یا تاس، با تکرار آزمایش می‌توانیم احتمال وقوع پدیده‌های مختلف را حدس بزنیم و بررسی کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. تابع مجموعه‌ای $\mathbb{P}:\mathcal{F}\longrightarrow[0,1]$ ، با ویژگی‌های

۱. $\mathbb{P}(\Omega)=1$ و $\mathbb{P}(\varnothing)=0$،

۲. $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$.

که در آن $A_i\in\mathcal{F}$ و $A_i\bigcap A_j=\varnothing$، $i\neq j$، را یک **اندازه‌ی احتمال** روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega,\mathcal{F})$ و سه تایی $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ را یک **فضای احتمال** می‌گوییم.

تعریف ۲.۴.۱. در صورتی‌که تابع تعریف شده‌ِی فوق، ویژگی $\mathbb{P}(\Omega)=1$ را نداشته باشد، آن را یک **اندازه روی** Ω و سه تایی $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ را یک **فضای اندازه** می‌گوییم.

قرارداد ۳.۴.۱. از این پس، در سراسر این رساله مقصود از $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ فضای احتمال مفروض است.

تعریف ۴.۴.۱. مجموعه‌ای که اندازه‌ی احتمال آن یک است را **تکیه‌گاه** یا **ساپورت** [22] می‌گوییم و مجموعه‌ای که اندازه‌ی احتمال آن صفر است، را **مجموعه‌ی پوچ** [23] می‌گوییم.

تعریف ۵.۴.۱. مجموعه‌ی $A\in\mathcal{F}$ را **مجموعه‌ی $\mathbb{P}$ـ پوچ** می‌نامیم، هرگاه $\mathbb{P}(A)=0$.

تعریف ۶.۴.۱. اندازه‌های $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ **معادل‌اند**، اگر هر مجموعه‌ی پوچ نسبت به $\mathbb{P}$، نسبت به $\mathbb{Q}$ نیز پوچ باشد و بالعکس، که آن را با $\mathbb{P}\sim\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ یک فضای اندازه باشد، عضو ω از Ω را **اتم** [24] گوییم، هرگاه هر $\{\omega\}\in\mathcal{F}$ و داشته باشیم $\mathbb{P}(\omega)>0$.

تعریف ۸.۴.۱. به اندازه‌ی احتمالی که تعداد اتم‌های آن شمارش‌پذیر است و یا X توسط مجموعه‌ی اتم‌های آن حمل (ساپورت) می‌شود، **اندازه‌ی احتمال گسسته** می‌گوییم.

تعریف ۹.۴.۱. گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ تعریف شده است، **تقریبا همه جا** یا $(a.e.)$ [25] برقرار است، اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه‌پذیر و دارای اندازه‌ی $\mathbb{P}$ صفر باشند.

تعریف ۱۰.۴.۱. اگر $\mathbb{P}(A)=1$ باشد، می‌گوییم پیشامد A **با احتمال ۱** رخ می‌دهد و یا به بیانی دیگر، **قریب به یقین** [26] رخ می‌دهد.

---

[22] Support
[23] Null Set
[24] Atom
[25] Almost Everywhere
[26] Almost Surely

تعریف ۱.۴.۱۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را **کامل** گوییم، هرگاه $\mathcal{F}$، شامل تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی $\mathbb{P}$ ـ پوچ باشد. به وضوح، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را می‌توان با اضافه کردن زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی $\mathbb{P}$ ـ پوچ کامل کرد.

از این پس، همه‌جا، منظور از $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی، توپولوژی استاندارد و σ ـ میدان مفروض روی آنها، σ ـ میدان بورل است و $\mathcal{B}$ نماد σ ـ میدان بورل روی $\mathbf{R}$ است.

تعریف ۱.۴.۱۲. فرض کنیم $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه روی فضای اندازه‌پذیر $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ باشند. اندازه‌ی $\mu_۱$ را نسبت به $\mu_۲$ **مطلقا پیوسته** [۲۷] گوییم و با نماد $\mu_۱ \ll \mu_۲$ نمایش می‌دهیم، هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ (\mu_۲(A) = ۰ \Rightarrow \mu_۱(A) = ۰).$$

قضیه ۱.۴.۱۳ (مشتق رادون‌ـ نیکودیم). [۲۸] فرض کنیم $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه‌ی σـ متناهی روی $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ باشند به‌طوری‌که $\mu_۱ \ll \mu_۲$. در این صورت، تابع $\mathcal{A}$ ـاندازه‌پذیر و $\mu_۲$ـ انتگرال‌پذیر f روی X وجود دارد به‌طوری‌که $f \geq ۰$ و

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ \mu_۱(A) = \int_A f d\mu_۲.$$

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۴.۱۴. هر تابع مانند f در قضیه‌ی فوق را یک مشتق رادون‌ـ نیکودیم $\mu_۱$ نسبت به $\mu_۲$ می‌گوئیم و با نماد $\frac{d\mu_۱}{d\mu_۲}$ یا $\frac{\mu_۱(dx)}{\mu_۲(dx)}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۱۵. اگر f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی روی فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$\int f d\mu = ۰ \Leftrightarrow f = ۰ \quad a.e..$$

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۴.۱۶. فرض می‌کنیم $(X_۱, \mathcal{A}_۱), \cdots, (X_n, \mathcal{A}_n)$ فضاهای اندازه‌پذیر باشند و

$$Z = X_۱ \times \cdots \times X_n.$$

زیرمجموعه‌های Z به‌صورت $A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n$ را برای $A_۱ \subseteq X_۱, \cdots, A_n \subseteq X_n$ **راست گوشه (مستطیل)** [۲۹] و برای $A_۱ \in \mathcal{A}_۱, \cdots A_n \in \mathcal{A}_n$ **راست گوشه‌ی اندازه‌پذیر** [۳۰] می‌گوئیم. دسته‌ی راست گوشه‌ها و دسته‌ی راست گوشه‌های اندازه‌پذیر، هریک، نیم میدان و در نتیجه یک نیم‌حلقه

[۲۷] Absolutely Continuous
[۲۸] Radon- Nikodym Derivation
[۲۹] Rectangle
[۳۰] Measurable Rectangle

در Z می‌باشند. σ ـ میدان تولید شده در Z، توسط نیم‌میدان راست گوشه‌های اندازه‌پذیر را σ ـ **میدان حاصلضربی** $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ می‌نامیم و با عبارت $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ نمایش می‌دهیم. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، μ_i یک اندازه روی $\mathcal{A}_i$ باشد، با قرار دادن $0 \times \infty = 0$، تعریف می‌کنیم

$$\lambda(A_1 \times \cdots A_n) = \mu_1(A_1) \times \cdots \times \mu_n(A_n).$$

λ یک اندازه روی نیم‌حلقه‌ی راست گوشه‌های اندازه‌پذیر خواهد بود. اگر μ_i ها، σ ـ متناهی باشند، λ نیز σ ـ متناهی است و لذا بنا به قضیه‌ی گسترش کاراتئودوری، گسترش یگانه‌ای به اندازه‌ای روی $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ دارد که آن را **اندازه‌ی حاصلضربی** $\mu_1, \cdots, \mu_n$ می‌نامیم و با $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ نمایش می‌دهیم. فضای $(Z, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ را **فضای اندازه‌ی حاصلضربی (حاصلضرب)** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \cdots (X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ می‌نامیم.

قضیه ۱۷.۴.۱ (قضیه‌ی فوبینی). [۳۱] فرض کنیم μ و ν ، دو اندازه‌ی σـ متناهی باشند و $h : X \times Y \to \mathbf{R}$ و h تابعی $\mathcal{A} \times \acute{\mathcal{A}}$ـ اندازه‌پذیر و λـ انتگرال‌پذیر با انتگرال متناهی باشد، در این صورت، داریم

۱. برای μ، تقریبا هر x در X، تابع $h(x,y) \to y$، νـ انتگرال‌پذیر و دارای νـ انتگرال متناهی است.

۲. تابع $x \to \int_Y h(x,y)\nu(dy)$، روی دامنه‌ی تعریف خود یا گسترش دلخواه و اندازه‌پذیر آن روی X، νـ انتگرال‌پذیر و دارای انتگرال متناهی است.

۳. اگر گسترش مذکور در قسمت قبل را g بنامیم، داریم

$$\int_X g(x)\mu(dx) = \int_{X \times Y} h(x,y)\lambda(dx,dy).$$

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

۱.۴.۱ متغیر تصادفی و امید ریاضی

تعریف ۱۸.۴.۱. فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد، تابع اندازه‌پذیر $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ را یک **متغیر تصادفی** [۳۲] می‌گوییم. به عبارت دیگر، هر تابع حقیقی و اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ متغیر تصادفی نامیده می‌شود. معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مانند $X, Y, Z, A, \cdots$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۴.۱. تابع مشخصه‌ی متغیر تصادفی $X : \Omega \to \mathbf{R}$ ، تابع $\phi_X : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \phi_X(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{itX}] = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{itX} dF(x).$$

[۳۱] Fubini Theorem
[۳۲] Random Variable

انتگرال ظاهر شده در این تعریف از نوع لبگ‌ـ اشتیلیس نسبت به اندازه‌ی به‌وجود آمده از تابع توزیع X است.

قضیه ۲۰.۴.۱. تابع مشخصه‌ی X، توزیع X را به‌طور یکتا مشخص می‌کند و برعکس.

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

تعریف ۲۱.۴.۱. **بردار تصادفی** n [۳۳] ـ بعدی $\bar{X} = (X_۱, X_۲, \cdots, X_n)$، تابعی است اندازه‌پذیر که دامنه‌ی آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و مقادیر آن در $\mathbf{R}^n$ است، یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$ داریم

$$\{\omega : \bar{X}(\omega) \in A\} = \{(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

که در آن $\mathcal{B}_n$، σ ـ میدان بورل روی $\mathbf{R}^n$ است.

تعریف ۲۲.۴.۱. σ **ـ میدان تولید شده توسط متغیر تصادفی** X را که با $\sigma(\mathrm{X})$ نمایش می‌دهیم، کوچک‌ترین σ ـ میدانی است که X نسبت به آن اندازه‌پذیر است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma(\mathrm{X}) = X^{-۱}(\mathrm{B}(\mathbf{R})) = \{\mathrm{X}^{-۱}(A) : \ A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۲۳.۴.۱. فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. هر متغیر تصادفی مانند X، یک فضای احتمال $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ را تولید می‌کند که در آن $\mathcal{B}$، σـ میدان بورل است و اندازه‌ی احتمال القا شده توسط X را که با نماد $\mathbb{P}_{\mathrm{X}}$ نمایش می‌دهیم، به طور طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{P}_{\mathrm{X}}(B) = \mathbb{P}(\mathrm{X}^{-۱}(B)) \quad , B \in \mathcal{F},$$

و به آن **اندازه‌ی احتمال القا شده توسط** X، یا **توزیع** X، یا **تابع احتمال** X می‌گوییم.

تعریف ۲۴.۴.۱. فرض می‌کنیم $\mathbb{P}$ یک اندازه‌ی احتمال روی محور اعداد حقیقی باشد. **تابع توزیع** [۳۴] $\mathbb{P}$، تابع $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ است که به‌صورت $F(x) = \mathbb{P}(-\infty, x]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۵.۴.۱. اگر $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دارای خواص زیر باشد

۱. F صعودی باشد،

۲. $\lim_{n\to\infty} F(x) = ۱$ و $\lim_{n\to -\infty} F(x) = ۰$،

۳. F در هر نقطه دارای حد و از راست پیوسته باشد،

در این صورت، تابع F **تابع توزیع احتمال** نامیده می‌شود.

قضیه ۲۶.۴.۱. فرض می‌کنیم $F = F(x)$ یک تابع توزیع احتمال روی $\mathbf{R}$ باشد. در این صورت یک اندازه‌ی احتمال یکتای $\mathbb{P}$ روی $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ وجود دارد به طوری‌که برای هر a و b حقیقی که $a < b$، $\mathbb{P}(a, b] = F(b) - F(a)$.

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

تعریف ۲۷.۴.۱. اگر X متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد، **تابع توزیع تجمعی** [۳۵] X

[۳۳] Random Vector
[۳۴] Distribution Function
[۳۵] Cumulative Distribution Function

که آن را با نماد $\mathrm{F}_X(x)$ نمایش می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{F}_X(x) = \mathbb{P}_X(-\infty, x] = \mathbb{P}\{X \leq x\}.$$

که در آن $\mathbb{P}_X$ توزیع متغیر تصادفی X است.

تعریف ۲۸.۴.۱. اندازه‌ی القا شده توسط بردار تصادفی $\bar{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ را توزیع بردار تصادفی $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ می‌گوییم و با نماد $\hat{\mathbb{P}}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۴.۱. فرض می‌کنیم $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی باشند، **تابع توزیع توام** [۳۶] یا **تابع توزیع بردار تصادفی** $\bar{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x_1, \cdots, x_n) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n X_i \leq x_i),$$

وقتی‌که $1 \leq i \leq n$ و $-\infty < x_i < \infty$.

تعریف ۳۰.۴.۱. **متغیرهای تصادفی گسسته**، متغیرهایی هستند که برد یا مجموعه‌ی مقادیر آنها قابل شمارش باشد و به عبارت دیگر، متغیرهایی که توزیع آنها، یعنی $\mathbb{P}_X$، اندازه‌ی احتمال گسسته باشد و **متغیرهای تصادفی پیوسته**، متغیرهایی هستند که توزیع آنها نسبت به اندازه‌ی لبگ مطلقا پیوسته باشد، یعنی، $\mathbb{P}_X \ll \mathcal{M}$.

تعریف ۳۱.۴.۱. تابع ساده‌ی اندازه‌پذیر و حقیقی مقدار روی $(\Omega, \mathcal{F})$ را **متغیر تصادفی ساده** می‌گوییم. به طور کلی، متغیر تصادفی ساده‌ی X، به صورت $X = \sum_{i\in I} x_i \chi_{A_i}$ می‌باشد، که در آن مجموعه‌ی اندیس‌گذار I، متناهی و مجموعه‌های $A_i \in \mathcal{F}$ یک افراز برای Ω و $x_i \in \mathbf{R}$ هستند.

تعریف ۳۲.۴.۱. مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی $\{A_i\}_{i=1}^n$ **مستقل** است، اگر برای هر زیرمجموعه‌ی $\{i_1, i_2, \cdots i_n\}$ از $\{1, 2, \cdots n\}$ داشته باشیم

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

خانواده‌ی $\mathrm{C_i} \in \mathcal{F}_{i=1,2,\dots,n}$ مستقل‌اند، اگر برای هر $A_1 \in \mathrm{C}_1, A_2 \in \mathrm{C}_2, \cdots A_n \in \mathrm{C}_n$، پیشامدهای $A_1, A_2, \cdots A_n$ مستقل باشند.

خانواده‌ی $(\mathrm{C}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ که $\mathrm{C_i} \in \mathcal{F}$ با مجموعه‌ی اندیس‌گذار دلخواه I مستقل‌اند، اگرهر خانواده‌ی متناهی از C_i مستقل باشند.

متغیرهای تصادفی X_i، $i \in \mathrm{I}$، روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ مستقل‌اند، اگر σ ـ میدان‌های $\sigma(X_i)$، $i \in \mathrm{I}$، مستقل باشند.

تعریف ۳۳.۴.۱. برای $q > 1$، مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار X روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ با شرط $\mathrm{E}(|X|^q) < \infty$، را با $\mathrm{L}^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ نمایش می‌دهیم.

[۳۶] The Joint Distribution Function

تعریف ۳۴.۴.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد. $\int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ را **امید ریاضی**[۳۷] X می‌گوییم و با نماد $\mathrm{E}(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۴.۱. **ساده‌ی امید ریاضی متغیر تصادفی** $X = \sum_{i\in I} x_i \chi_{A_i}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}[X] := \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(A_i).$$

در صورتی‌که $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$ باشد، **امید ریاضی متغیر تصادفی نامنفی** X را برابر با

$$\mathrm{E}[X] := \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n]$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $X_n \uparrow X$. توابع X^+ و X^- را که به ترتیب، بیانگر قسمت‌های مثبت و منفی تابع X می‌باشند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X^+(a) = X(a) \vee 0 = max(X(a), 0),$$

$$X^-(a) = -X(a) \vee 0 = max(-X(a), 0).$$

تعریف ۳۶.۴.۱. برای متغیر تصادفی دلخواه X، اگر هر دو مقدار $\mathrm{E}[X^+]$ و $\mathrm{E}[X^-]$ متناهی نباشند، **امید ریاضی متغیر تصادفی** X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{E}[X] := \mathrm{E}[X^+] - \mathrm{E}[X^-].$$

در صورتی‌که هر دوی $\mathrm{E}[X^+]$ و $\mathrm{E}[X^-]$ متناهی باشند، متغیر تصادفی X را **انتگرال‌پذیر** می‌گوییم.

تعریف ۳۷.۴.۱. **امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی**، مانند $g(X)$، به‌طور طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) d\mathbb{P}.$$

تعریف ۳۸.۴.۱. فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی باشد. برای عدد حقیقی ثابت c و $n \in \mathbf{N}$، $\mathrm{E}[(X-c)^n]$ را اگر موجود باشد، **گشتاور مرتبه‌ی**[۳۸] n **ام حول** c می نامیم. گشتاور n ام حول صفر را به‌طور ساده، **گشتاور مرتبه‌ی** n **ام** یا **میانگین** n **ام** می‌گوئیم.

ملاحظه ۳۹.۴.۱. امید ریاضی متغیر تصادفی X را گشتاور مرتبه‌ی اول یا میانگین X نیز می‌نامیم.

تعریف ۴۰.۴.۱. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، **تابع مولد گشتاور** X را با علامت $M_X(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}).$$

[۳۷] Expectation
[۳۸] Moment

تعریف ۴۱.۴.۱. **گشتاور مرکزی مرتبه‌ی دوم** را **واریانس متغیر تصادفی** X می‌نامیم و با نماد $\sigma^۲(X)$ یا $\mathrm{Var}(X)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^۲(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^۲].$$

به طور کلی، اگر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، اندازه‌پذیر باشد و $\int_\Omega |f(X(\omega))|\mathbb{P}(\omega) < \infty$، آنگاه

$$\mathrm{E}[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(\omega).$$

تعریف ۴۲.۴.۱. اندازه‌ی تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را **کواریانس** می‌نامیم. برای متغیرهای تصادفی X و Y، اگر داشته باشیم $\mathrm{E}[X] = \mu$ و $\mathrm{E}[X] = \nu$، آنگاه کواریانس X و Y برابر است با

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X)) - (Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

تعریف ۴۳.۴.۱. ویژگی‌های کواریانس به شرح زیر می‌باشد.

۱. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$،

۲. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$،

۳. برای هر $a, b, c, d \in \mathbf{R}$،

(آ) $\mathrm{Cov}(X, a) = ۰$،

(ب) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab.\mathrm{Cov}(X, Y)$،

(ج) $\mathrm{Cov}(X + a, Y + b) = \mathrm{Cov}(X, Y)$.

برهان. به [۶] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۴.۴.۱. دو متغیر تصادفی X و Y را **ناهمبسته** [۳۹] گوییم، هرگاه کواریانس آنها صفر باشد.

تعریف ۴۵.۴.۱. **ضریب همبستگی** دو متغیر تصادفی X و Y را با نماد $\rho(X, Y)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

که در آن $\mathrm{Var}(X) > ۰$ و $\mathrm{Var}(Y) > ۰$.

تعریف ۴۶.۴.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\mathcal{D}$ یک زیر σ ـ میدان از $\mathcal{F}$ باشد. در این صورت، **احتمال شرطی** [۴۰] E به شرط $\mathcal{D}$، که آن را با نماد $\mathbb{P}(E|\mathcal{D})$ نمایش می‌دهیم، تابعی اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ به فضای اندازه‌ی $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ است، به طوری‌که برای هر عضو $D \in \mathcal{D}$ داشته باشیم

$$\int_D \mathbb{P}(E|\mathcal{D})d\mathbb{P} = \mathbb{P}(E \cap D).$$

[۳۹] Uncorrolated

[۴۰] Conditional Probability

تعریف ۴۷.۴.۱. برای $A, B \in \mathcal{F}$، که $\mathbb{P}(B) > 0$ **احتمال** A **به شرط** B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}.$$

تعریف ۴۸.۴.۱. دو **پیشامد** A و B از فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، **مستقل** است، هرگاه

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

ملاحظه ۴۹.۴.۱. با توجه به تعریف فوق، پیشامد A از B مستقل است، اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

تعریف ۵۰.۴.۱. دو **متغیر تصادفی** $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه σ ـ میدان‌های تولید شده توسط X و Y، یعنی، $\mathcal{F}_X$ و $\mathcal{F}_Y$ مستقل باشند، به این معنا که برای هر $A \in \mathcal{F}_X$ و $B \in \mathcal{F}_Y$ داشته باشیم

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

یادآوری ۵۱.۴.۱. $\mathcal{F}_X = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$.

ملاحظه ۵۲.۴.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت داریم

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

برهان.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_\Omega (XY) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} (XY) d\hat{P} \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} (XY) f_(XY)(x,y) dmdm \\
&= \int_{\mathbf{R}} X(\int_{\mathbf{R}} f_Y(y)dm) f_X(x) dm \\
&= \int_{\mathbf{R}} \mathrm{E}(Y) X f_X(x) dm \\
&= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).
\end{aligned}$$

□

ملاحظه ۵۳.۴.۱. اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه کواریانس صفر خواهد شد.

ملاحظه ۵۴.۴.۱. عکس مطلب فوق لزوما برقرار نیست، یعنی اگر کواریانس دو متغیر تصادفی صفر باشد، دو متغیر تصادفی لزوما مستقل نیستند.

ملاحظه ۵۵.۴.۱. دو متغیر تصادفی مستقل، همواره ناهمبسته هستند، اما دو متغیر ناهمبسته، لزوما مستقل از هم نیستند.

تعریف ۵۶.۴.۱. دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 را هم‌توزیع می‌گوییم، هرگاه برای هر عدد حقیقی r، داشته باشیم

$$\mathbb{P}\{X_1 = r\} = \mathbb{P}\{X_2 = r\}.$$

تعریف ۵۷.۴.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $\mathcal{D}$ زیر σـ میدانی از $\mathcal{F}$، $(\mathcal{D} \leq \mathcal{F})$، و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. **امید شرطی** Y **به شرط** $\mathcal{D}$، تابعی $\mathcal{D}$ـ اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{D})$ است که آن را با $\mathrm{E}(Y|\mathcal{D})$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall D \in \mathcal{D}, \quad \int_D \mathrm{E}(Y|\mathcal{D}) d\mathbb{P} = \int_D Y d\mathbb{P}.$$

تعریف ۵۸.۴.۱. برای متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دلخواه، **امید شرطی** [۴۱] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}(Y|\mathcal{D}) = \mathrm{E}(Y^+|\mathcal{D}) - \mathrm{E}(Y^-|\mathcal{D}),$$

که در آن برای هر ω، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), 0\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), 0\}$.

تعریف ۵۹.۴.۱. ویژگی‌هایی از امید شرطی

۱ـ اگر $X \geq 0$، آنگاه

$$\mathrm{E}(X|\mathcal{D}) \geq 0 \qquad \text{a.s.},$$

۲ـ اگر $C \in \mathcal{F}$، آنگاه

$$\mathrm{E}(\chi_C|\mathcal{D}) = \mathbb{P}(C|\mathcal{D}) \qquad \text{a.s.},$$

۳ـ

$$\mathrm{E}(X+Y|\mathcal{D}) = \mathrm{E}(X|\mathcal{D}) + \mathrm{E}(Y|\mathcal{D}) \qquad \text{a.s.},$$

۴ـ برای هر $a \in \mathbf{R}$،

$$\mathrm{E}(aX|\mathcal{D}) = a\mathrm{E}(X|\mathcal{D}) \qquad \text{a.s.},$$

۵ـ اگر $\mathcal{D} = \{\Omega, \varnothing\}$، آنگاه

$$\mathrm{E}(X|\mathcal{D}) = \mathrm{E}(X) \qquad \text{a.s.},$$

۵ـ اگر $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$، آنگاه

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{D}_2)|\mathcal{D}_1) = E(X|\mathcal{D}_1), \qquad \text{a.s.},$$

۶ـ

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathcal{D})) = \mathrm{E}(X), \qquad \text{a.s.}.$$

برهان. به [۶] رجوع کنید. □

[۴۱] Conditional Expectation

۲.۴.۱ فرآیند تصادفی

تعریف ۶۰.۴.۱. یک **فرآیند تصادفی** [۴۲]، خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t\}_{t\in T}$ روی فضای احتمال مشترک $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ است که مقادیر خود را روی فضای اندازه‌پذیر $(\mathbf{R},\mathcal{F})$ می‌گیرند.

تعریف ۶۱.۴.۱. برای هر $\omega\in\Omega$ ثابت، تابع $X(.,\omega)$، $(t\longrightarrow X_t(\omega))$ را یک **مسیر نمونه‌ای** یا **رخداد** X_t می‌نامیم. لازم به ذکر است که در تعریف بالا، بر حسب اینکه T پیوسته یا گسسته باشد، فرآیند را به ترتیب، پیوسته [۴۳] یا گسسته [۴۴] می‌نامیم.

تعریف ۶۲.۴.۱. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد، به خانواده‌ی $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in Z^+=0,1,2,\dots}$ که در آن $\mathcal{F}_n$ ها زیر σ ـ میدان $\mathcal{F}$ هستند، یک **فیلتر گسسته** [۴۵] گوییم، هرگاه داشته باشیم

$$\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{F}.$$

تعریف ۶۳.۴.۱. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد، به خانواده‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in(0,\infty)}$ از زیر σ ـ میدان‌های $\mathcal{F}$، یک **فیلتر پیوسته** [۴۶] گوییم، هرگاه برای هر $s,t\in[0,\infty)$، که در آن $s<t$، داشته باشیم

$$\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t.$$

ملاحظه ۶۴.۴.۱. خانواده‌ی $\{\mathcal{F}_t=\sigma(X(s);0\le s\le t)\}_{t\ge0}$، خانواده‌ای صعودی از زیر σ ـ میدان‌های $\mathcal{F}$ است، یعنی برای $t\le\theta$، $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}_\theta$، پس یک فیلتر روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ می‌باشد، این فیلتر را **فیلتر طبیعی فرآیند تصادفی** $\{X_t\}$ می‌نامند.

تعریف ۶۵.۴.۱. فرآیند تصادفی $\{X(t);t\ge0\}$ روی $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$، با فیلتر $\mathcal{F}_t$ **سازگار** [۴۷] است، اگر برای هر $t\ge0$، متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ ـ اندازه‌پذیر باشد، یعنی $X_t\in\mathcal{F}_t$.

تعریف ۶۶.۴.۱. به ازای فرآیند تصادفی $\{X(t);t\ge0\}$، عدد X_t-X_s، $(s\le t)$ را **نمو فرآیند** در بازه‌ی $[s,t]$ می‌نامیم.

تعریف ۶۷.۴.۱. رده‌های فرآیند تصادفی

- (فرآیند مانا) فرآیند تصادفی X را دارای **نموهای مانا** [۴۸] می‌گوییم، هرگاه برای هر مقدار صحیح k و هر مقدار s,t، $s\le t$، داشته باشیم

$$\mathbb{P}[X(t+\tau)-X(t)=k]=\mathbb{P}[X(s+\tau)-X(s)=k].$$

[۴۲] Stochastic Process
[۴۳] Continuouse
[۴۴] Discrete
[۴۵] Discrete Filteration
[۴۶] Continuouse Filteration
[۴۷] Adapted
[۴۸] Stationary Increment

- (فرآیند با نموهای مستقل) فرآیند تصادفی X را دارای نموهای مستقل [۴۹] می‌نامیم، هرگاه متغیرهای تصادفی $\mathrm{X_t} - \mathrm{X_v}$ و $\mathrm{X_u} - \mathrm{X_s}$ برای $s < u \leq v < t$ از هم مستقل باشند.

- (فرآیند ماركوف) [۵۰] فرآیند تصادفی $\{\mathrm{X}(t)\}$ را **مارکوف** یا **دارای ویژگی مارکوفی** می‌نامند، هرگاه برای $t_{\mathrm{n}} \geq \cdots \geq t_۱ \geq t_۰ \geq ۰$ داشته باشیم

$$\mathbb{P}(y_n, t_n | y_۱, t_۱, \cdots, y_{n-۱}, t_{n-۱}) = \mathbb{P}(y_n, t_n | y_{n-۱}, t_{n-۱}),$$

که در آن $\mathbb{P}(y_n, t_n | y_{n-۱}, t_{n-۱})$، توزیع احتمال انتقال به مفهوم

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{t_n} \leq y_n | \mathrm{X}_{t_{n-۱}}) = y_{n-۱}$$

است.

یک فرآیند مارکوف با داشتن توزیع مقدار اولیه‌ی تابع و توزیع احتمال انتقال آن کاملا مشخص می‌شود، چراکه داریم

$$\mathbb{P}(y_۱, t_۱; y_۲, t_۲) = \mathbb{P}(y_۱, t_۱)\mathbb{P}(y_۲, t_۲ | y_۱, t_۱),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(y_۱, t_۱; y_۲, t_۲; y_۳, t_۳) &= \mathbb{P}(y_۱, t_۱)\mathbb{P}(y_۲, t_۲ | y_۱, t_۱)\mathbb{P}(y_۳, t_۳ | y_۲, t_۲; y_۱, t_۱)\\ &= \mathbb{P}(y_۱, t_۱)\mathbb{P}(y_۲, t_۲ | y_۱, t_۱)\mathbb{P}(y_۳, t_۳ | y_۲, t_۲).\end{aligned}$$

ویژگی مارکوفی بیان می‌کند که با داشتن موقعیت حال یک فرآیند، وضعیت آینده‌ی آن از وضعیت گذشته‌ی آن کاملا مستقل است و فقط به وضعیت حال بستگی دارد و اصطلاحا به آن فرآیند بی‌حافظه می‌گوئیم.

تعریف ۶۸.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مجموع این دو متغیر تصادفی را با $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $\mathrm{F_S}(s)$ نشان دهنده‌ی تابع توزیع S باشد. طبق تعریف تابع توزیع، داریم

$$\mathrm{F_S}(s) = \mathbb{P}(\mathrm{S} \leq s) = \mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} \leq s)$$

اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی گسسته با مقادیر نامنفی باشند، طبق قانون احتمال کل، داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{F_S}(s) &= \sum_{\mathrm{Y} \leq s} \mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} \leq s \mid \mathrm{Y} = y)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)\\ &= \sum_{\mathrm{Y} \leq s} \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq s - y \mid \mathrm{Y} = y)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)\end{aligned}$$

با توجه به استقلال X و Y، می‌توانیم مجموع اخیر را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathrm{F_S}(s) = \sum_{\mathrm{Y} \leq s} \mathrm{F_X}(s - y) f_{\mathrm{Y}}(y).$$

[۴۹] Independent Increment
[۵۰] Markov Process

تابع احتمال نظیر این تابع توزیع را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$f_{\mathrm{S}}(s) = \sum_{\mathrm{Y} \leq s} f_{\mathrm{X}}(s-y) f_{\mathrm{Y}}(y)$$

حال اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی باشند، به طور مشابه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{\mathrm{S}}(s) &= \int_{0}^{s} \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq s-y \mid \mathrm{Y}=y) f_{\mathrm{Y}}(y) dy \\ &= \int_{0}^{s} \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(s-y) f_{\mathrm{Y}}(y) dy,\end{aligned}$$

و تابع احتمال نظیر به صورت زیر است

$$f_{\mathrm{S}}(s) = \int_{0}^{s} f_{\mathrm{X}}(s-y) f_{\mathrm{Y}}(y) dy.$$

تعریف ۶۹.۴.۱. فرآیند تصادفی $\{\mathrm{N}(t) : t \geq 0\}$ را یک **فرآیند شمارشی** [۵۱] گوییم، هرگاه $\mathrm{N}(t)$ تعداد کل پیشامدهایی باشند که تا زمان t رخ داده‌اند. یک فرآیند شمارشی در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. $\mathrm{N}(t)$ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند.

۲. اگر $s \leq t$، آنگاه $\mathrm{N}(s) \leq \mathrm{N}(t)$.

۳. برای $s < t$، $\mathrm{N}(t) - \mathrm{N}(s)$ برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله‌ی زمانی $(s, t]$ رخ می‌دهند.

تعریف ۷۰.۴.۱. فرض کنیم که N متغیر تصادفی شمارشی با تابع احتمال $\mathrm{q}_n = \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$ برای $\mathrm{n} = 0, 1, 2, \cdots$ باشد. همچنین فرض کنیم $\{\mathrm{X}_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی و مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع $\mathbb{P}$ و مستقل از N باشند. توزیع مجموع تصادفی

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_{\mathrm{N}}$$

را **توزیع مرکب** [۵۲] می‌نامیم، که در آن اگر $\mathrm{N} = 0$، آنگاه $\mathrm{S} = 0$. تابع توزیع S طبق قانون احتمال کل، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{S}(x) &= \mathbb{P}(\mathrm{S} \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S} \leq x \mid \mathrm{N} = n) \mathbb{P}(\mathrm{N} = \mathrm{n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n \leq x) \mathbb{P}(\mathrm{N} = \mathrm{n})\end{aligned}$$

طبق تعریف داریم

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n \leq x) = \mathbb{P} * \mathbb{P} * \cdots * \mathbb{P}(x) = \mathbb{P}^{n*}(x)$$

معمولا نام توزیع مرکب را از نام توزیع N می‌گیرند. برای مثال، اگر N دارای توزیع پواسون باشد، آنگاه S دارای توزیع پواسون مرکب خواهد بود.

[۵۱] Counting Process
[۵۲] Compound Distribution

تعریف ۷۱.۴.۱. به فرآیند شمارشی $\{N_t \,:\, t \geq 0\}$ **توزیع پواسون با اندازه شدت** λ، [۵۳] $\lambda \geq 0$، می‌گوییم، هرگاه

۱. $N(0) = 0$،

۲. فرآیند دارای نموهای مانا باشد، یعنی، برای هر مقدار صحیح k و هر مقدار زمانی $s \leq t$ داشته باشیم

$$\mathbb{P}[N(t+\tau) - N(t) = k] = \mathbb{P}[N(s+\tau) - N(s) = k],$$

۳. فرآیند دارای نموهای مستقل باشد، یعنی برای هر مقدار صحیح k و مقادیر زمانی $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ متغیرهای تصادفی $N_{t_1} - N_{t_0}$ و $N_{t_2} - N_{t_1}$ و $\cdots$ و $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ دو به دو از هم مستقل باشند.

تعریف ۷۲.۴.۱. فرآیند تصادفی $\{X_t \,:\, t \geq 0\}$ را یک **فرآیند پواسون مرکب** [۵۴] گوییم، هرگاه به ازای هر $t \geq 0$، بتوان آن را به صورت $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ نشان داد، که در آن $\{N_t \,:\, t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسون و $\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$ خانواده‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع‌اند، و فرآیند $\{N_t \,:\, t \geq 0\}$ و خانواده‌ی $\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$ مستقل در نظر گرفته می‌شوند. میانگین و واریانس X_t عبارتند از

$$E[X_t] = \lambda t E[Y], \qquad \mathrm{Var}[X_t] = \lambda t E[Y^2].$$

تعریف ۷۳.۴.۱. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نمایی با پارامتر** $\lambda > 0$ [۵۵] است ، هرگاه تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد.

$$F_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

اگر تعداد دفعات وقوع پیشامدی از توزیع پواسون با پارامتر λ پیروی کند، آنگاه فاصله‌ی زمانی بین وقوع هر دو اتفاق متوالی از این متغیر تصادفی پواسون، دارای توزیع نمایی با تابع چگالی

$$f(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

خواهد بود.(همچنین از لحظه صفر تا زمان وقوع اولین اتفاق نیز از توزیع نمایی پیروی می‌کند.)

ملاحظه ۷۴.۴.۱. توزیع نمایی بی‌حافظه است، به عبارت دیگر، در توزیع نمایی برای مقادیر مثبت t و s داریم

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

این نکته بدین معنی است که اگر در یک توزیع نمایی، s واحد زمانی گذشته باشد و هنوز اتفاقی نیفتاده باشد، احتمال اینکه در t واحد زمانی آینده نیز اتفاقی نیفتد برابر است با احتمال اینکه از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی t اتفاقی رخ ندهد. (در توزیع نمایی احتمال اینکه در s واحد زمانی گذشته اتفاقی رخ نداده، تاثیری در اینکه در t واحد زمانی آینده نیز اتفاقی رخ ندهد، ندارد.)

[۵۳] Poisson Distribution
[۵۴] Compound Poisson Process
[۵۵] Exponential Distribution

تعریف ۷۵.۴.۱. گاوس در سال ۱۸۰۹ توزیع نرمال را به صورت مستقل ارائه نمود. متغیر تصادفی X را **دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^{۲}$** تعریف می‌کنیم و با نماد $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^{۲})$ نمایش می‌دهیم، اگر برای هر عدد حقیقی x، دارای تابع توزیع و تابع چگالی به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}; \quad -\infty < x < \infty.$$

$$F(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\frac{-(y-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}dy; \quad -\infty < x < \infty.$$

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی نرمال به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \int_{\Omega}\mathrm{X}d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbf{R}} xf(x)dx \\
&= \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}dx = \mu,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
Var(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}[\mathrm{X}-\mu]^{۲} \\
&= \int_{\mathbf{R}}(x-\mu)^{۲}f(x)dx \\
&= \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^{۲}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}dx = \sigma^{۲}.
\end{aligned}$$

ملاحظه ۷۶.۴.۱. فرض کنیم $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^{۲})$، تابع مولد گشتاور توزیع نرمال به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(s) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{s}\mathrm{X}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{s}xf(x)dx \\
&= \mathrm{e}^{s\mu+s^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}, \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}$$

تعریف ۷۷.۴.۱. توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = ۰$ و $\sigma^{۲} = ۱$ را **توزیع نرمال استاندارد** می‌نامیم و آن را با نماد $\mathrm{N}(۰, ۱)$ نمایش می‌دهیم، بنابراین داریم

$$\theta(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x)^{۲}}{۲}} \qquad -\infty < x < \infty.$$

$$\Theta(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\frac{-(y)^{۲}}{۲}}dy \qquad -\infty < x < \infty.$$

ملاحظه ۷۸.۴.۱. اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^{۲}$ باشد، آنگاه $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$ را **متغیر تصادفی نرمال استاندارد** می‌گوییم.

$$f_{z}(\mathrm{Z}) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-z^{۲}}{۲}}.$$

برای محاسبه‌ی احتمالات توزیع نرمال، بدلیل حجم محاسبات و انتگرال های فراوان، معمولا از تابع توزیع نرمال استاندارد استفاده می‌شود و به عبارت دیگر برای محاسبه‌ی احتمال در هر متغیر تصادفی نرمال X از تبدیل متغیر $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$ استفاده می‌شود. بدین ترتیب، برای تابع توزیع تجمعی X، داریم

$$\mathrm{F_X}(a) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq a) = \mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{F_Z}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

معمولا تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را با ϕ نمایش می‌دهند.

ملاحظه ۷۹.۴.۱. اگر $\mathrm{Z} \sim \mathrm{N}(0,1)$، سپس $\mathrm{X} = \sigma \mathrm{Z} + \mu$ دارای توزیع $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ است. برعکس، اگر $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$، سپس $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. براین اساس، اگر $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$، آنگاه

$$\mathrm{F}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq x) = \Theta\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M_Z}(s) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^s\mathrm{Z}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^s x f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{s\mathrm{Z}} \mathrm{e}^{\frac{-(x)^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x^2-2sx)}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{-(x-s)^2}{2}} \mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-s)^2}{2}} dx \\
&= \mathrm{e}^{\frac{s^2}{2}}.
\end{aligned}$$

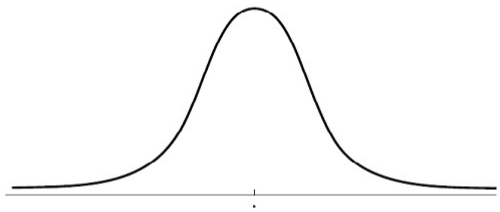
تعریف ۸۰.۴.۱. متغیر تصادفی $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbf{R}$ را **گاوسی** [56] **(نرمال)** می‌گوییم، اگر تابع توزیع آن نرمال باشد.

یک فرآیند گاوسی، فرآیندی است که همه‌ی متغیرهای تصادفی آن دارای توزیع نرمال باشد، به عبارت دیگر، فرآیند گاوسی $\{\mathrm{X}_t, t \geq 0\}$، فرآیند تصادفی است که برای هر افرازی از زمان که از بازه‌ی $[0,T]$ انتخاب می‌شود، مانند $t_1, t_2, \cdots, t_n$، که $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots t_n = T$، مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی $\mathrm{X}_{t_1}, \mathrm{X}_{t_2}, \cdots, \mathrm{X}_{t_n}$ دارای توزیع نرمال باشند.

قضیه ۸۱.۴.۱ (قضیه‌ی حد مرکزی). [57] اگر $\{\mathrm{X}_i; i \geq 1\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل $(i.i.d.)$ [58] با میانگین متناهی μ و واریانس متناهی σ^2 باشد، آنگاه

$$\mathrm{Z}_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i - n\mu\right) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1), \qquad n \to \infty;$$

[56] Gaussian process
[57] Central Limit Theorem
[58] Independent Identicaly Distribution



شکل ۱.۱: توزیع احتمال نرمال

که در آن $\underrightarrow{d}$، نمایشگر همگرایی در توزیع است، یعنی، عبارت اخیر به این معناست که

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \leq x) = \Theta(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

اگر $\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = ۱$، آنگاه

$$\frac{۱}{\sqrt{n}}(\sum_{i=۱}^{n} \mathrm{X}_i) \underrightarrow{d} \mathrm{N}(۰, ۱),$$

به‌علاوه برای هر $c \neq ۰$،

$$c\mathrm{N}(۰, ۱) = \mathrm{N}(۰, c^۲).$$

که در آن نماد $=$ نشانگر معادل بودن است. اگر $\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = ۱$، آنگاه

$$c\frac{۱}{\sqrt{n}}(\sum_{i=۱}^{n} \mathrm{X}_i) \underrightarrow{d} \mathrm{N}(۰, c^۲).$$

تعریف ۸۲.۴.۱. در تئوری احتمال، یک متغیر تصادفی X را دارای **توزیع لگاریتمی نرمال** [۵۹] می‌نامیم، هرگاه لگاریتم آن دارای توزیع نرمال باشد. یعنی، اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع لگاریتمی نرمال باشد، بنابراین $\mathrm{Y} = \ln(\mathrm{X})$ دارای توزیع نرمال می‌باشد و به همین ترتیب، اگر Y دارای توزیع نرمال باشد، بنابراین $\mathrm{X} = \exp(\mathrm{Y})$ دارای توزیع لگاریتمی نرمال می‌باشد. و داریم

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \exp(a + \tfrac{۱}{۲}b^۲)$$

و

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = \exp(\mathbf{۲}(a + b^۲)) - \exp(۲a + b^۲).$$

ملاحظه ۸۳.۴.۱. یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال می‌تواند مقادیر مثبت یا منفی به خود بگیرد، ولی یک متغیر تصادفی با توزیع لگاریتمی نرمال، فقط می‌تواند مقادیر مثبت را به خود بگیرد. همچنین، یک تابع با توزیع نرمال، متقارن می‌باشد، در صورتی‌که توزیع لگاریتمی نرمال، به صورت اریب بوده و میانگین و میانه و مد آن متفاوت است.

[۵۹] Log-Normal (or Lognormal) Distribution

۳.۴.۱ مارتینگل

تعریف ۸۴.۴.۱. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\in Z^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in Z^+}$، **مارتینگل** [۶۰] گوییم، هرگاه

۱. $\{X_n\}_{n\in Z^+}$ نسبت به فیلتر $\mathcal{F}$ سازگار باشد،

۲. برای هر $n\in Z^+$، $\mathrm{E}(\mid X_n\mid)<\infty$ یعنی برای هر $n\in Z^+$، X_n انتگرال‌پذیر باشد،

۳. برای هر $n\geq ۱$، داشته باشیم

$$\mathrm{E}(X_{n+۱}\mid \mathcal{F}_n)=X_n \quad a.s..$$

ملاحظه ۸۵.۴.۱. فرض کنید $\{X_n\}$ یک مارتینگل باشد. برای هر $n>m$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_n|\mathcal{F}_m)&=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-۱})|\mathcal{F}_m] \quad (a.s)\\ &=\mathrm{E}(X_{n-۱}|\mathcal{F}_m) \qquad (a.s)\\ &=\cdots\\ &=\mathrm{E}(X_{m+۱}|\mathcal{F}_m) \qquad (a.s)\\ &=X_m \qquad (a.s).\end{aligned}$$

مثال ۸۶.۴.۱. فرض کنید $X_۰, X_۱, X_۲, \cdots$ متغیرهای تصادفی انتگرال‌پذیر، مستقل از هم و دارای میانگین صفر باشند و همچنین برای هر $n\in\mathbb{Z}^+$، فرض کنید $\mathcal{F}_n=\sigma(X_۰,X_۱,\cdots,X_n)$ و قرار دهید $\xi_n=X_۰+X_۱+\cdots+X_n$، آنگاه ξ_n نسبت به $\mathcal{F}$ سازگار است و همچنین

۱. ξ_n انتگرال‌پذیر است، زیرا

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|\xi_n|)&=\mathrm{E}(|X_۰+X_۱+\cdots+X_n|)\\ &\leq \mathrm{E}(|X_۰|)+\mathrm{E}(|X_۱|)+\cdots+\mathrm{E}(|X_n|)\\ &<\infty.\end{aligned}$$

۲. همچنین داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\xi_{n+۱}|\mathcal{F}_n)&=\mathrm{E}(X_{n+۱}+\xi_n|\mathcal{F}_n) \quad (a.s.)\\ &=\mathrm{E}(X_{n+۱}|\mathcal{F}_n)+\mathrm{E}(\xi_n|\mathcal{F}_n) \quad (a.s.)\\ &=\mathrm{E}(X_{n+۱})+\xi_n \quad (a.s.)\\ &=\xi_n \quad (a.s.).\end{aligned}$$

واین نشان می‌دهد ξ_n یک مارتینگل نسبت به $\mathcal{F}_n$ است.

[۶۰] Martingale

فصل ۲

فرآیند براونی کسری

۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی یک فرآیند تصادفی به نام فرآیند براونی کسری می‌پردازیم. این فرآیند نموهای مانا و وابستگی دوربرد دارد و خودمتشابه است که با واقعیت‌های بازار سازگار است و این سازگاری باعث شده که از این فرآیند به عنوان مدلی برای توصیف حرکت قیمت سهام استفاده شود.

۲.۲ فرآیند براونی

تعریف ۱.۲.۲. حرکت نامنظم گرده‌ی گیاهان که در آب معلق هستند را به افتخار رابرت براون [۱] ، گیاه‌شناس اسکاتلندی که برای نخستین بار در تابستان (۱۸۲۷) میلادی حرکت نامنظم گرده‌ی گیاهان معلق را در آب مشاهده کرد، فرآیند براونی [۲] نامیدند. براون علاقه‌مند شد تا قانون و علت این فرآیند را بیابد اما از عهده‌ی آن برنیامد و این مسئله بدون پاسخ باقی ماند. سپس در سال (۱۹۰۶) میلادی آلبرت انیشتن [۳] موفق به حل مسئله شد و علت این فرآیند را بمباران دانه‌های گرده از سوی ملکول‌های مایع معرفی کرد. به عبارت دیگر، ذرات و مولکول‌های موجود در گازها و یا مایعات دارای حرکت نامنظمی هستند، یعنی در هر راستایی می‌توانند حرکت کنند و با برخورد با یکدیگر تغییر جهت دهند به این فرآیند، فرآیند براونی می‌گویند. با این حال، اولین الگوی ریاضی فرآیند براونی در پایان‌نامه‌ی دکتری

[۱] Robert Brown
[۲] Brownian Motion
[۳] Albert Einstein

ریاضی بشلیر [۴] در سال (۱۹۰۰) میلادی در دانشگاه پاریس و برای یک الگوی اقتصادی مطرح شد. در حقیقت، آنچه بشلیراستخراج نمود، توزیع‌هایی بودند که برای فرآیند براونی کارآیی داشتند، به فرض آنکه اصلا چیزی تحت عنوان فرآیند براونی وجود نداشته باشد. در سال (۱۹۱۸) میلادی نوربرت وینر [۵] ریاضیدان برجسته و نابغه‌ی آمریکایی، الگوی فرآیند براونی را به طور کامل بررسی کرد. وی بیان کرد که شکی در وجود فرآیند براونی نیست، فرآیند براونی را می‌توان زیر میکروسکوپ نظاره کرد، اما هنوز برهانی برای وجود یک فرآیند تصادفی با ویژگی‌های مطلوب در دست نبود. وی در سال (۱۹۲۳) میلادی، فرآیند مطلوب فرآیند براونی را که امروزه فرآیند وینر نامیده می‌شود به زبان ریاضی ساخت. فرآیند براونی یک فرآیند تصادفی است، یعنی خانواده‌ای از فرآیندهای تصادفی است که با مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی اندیس‌گذاری شده است و همگی متغیرهای تصادفی آن روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده‌اند. در ادامه خواهیم دید که این فرآیند دارای ویژگی مارکوفی، گاوسی، مارتینگلی با نموهای ایستا و مستقل است. همچنین دارای ویژگی پیوستگی مسیرها و مشتق‌ناپذیری در هر نقطه می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۲. فرآیند تصادفی $\{\mathrm{B}_t\}_{t\geq 0}$ را یک **فرآیند براونی استاندارد** [۶] گوییم، هرگاه

۱. $\mathrm{B}_0 = 0$،

۲. برای $0 \leq t \leq s$، $\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s - t$ باشد،

۳. برای $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$، متغیرهای تصادفی $\mathrm{B}_{t_2} - \mathrm{B}_{t_1}, \ldots, \mathrm{B}_{t_n} - \mathrm{B}_{t_{n-1}}$ مستقل و هم‌توزیع باشند.(در این حالت گوئیم، B_t دارای نموهای مستقل است.)

فرآیند براونی استاندارد رافرآیند وینر [۷] نیز می‌گوییم.

ملاحظه ۳.۲.۲. از ویژگی دوم نتیجه می‌شود که $\mathrm{B}_{s+t} - \mathrm{B}_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس t است. بنابراین برای هر مجموعه‌ی بورل A داریم

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_{s+t} - \mathrm{B}_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}} x dx.$$

از آنجا که داریم $\mathrm{B}_t = \mathrm{B}_{0+t} - \mathrm{B}_0$، پس از ویژگی دوم فرآیند براونی استاندارد نتیجه می‌شود که هر B_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس t است.

ویژگی‌هایی از فرآیند براونی

۱. فرآیند براونی دارای مسیرهای پیوسته‌ی ساده می‌باشد،

۲. تقریبا هر مسیر براونی B_t دارای تغییرات نامتناهی روی بازه‌ی متناهی است. مهم نیست طول این بازه چقدر بزرگ یا کوچک باشد.

---

[۴] Bachelier

[۵] Norbert Wiener

[۶] Standard Brownian motion

[۷] Wiener process

۳. تقریبا هر مسیر براونی دارای طول نامتناهی است.

۴. فرآیند براونی دارای خاصیت مارکوفی است.

۵. فرآیند براونی دارای خاصیت مارتینگلی است.

۶. فرآیند براونی دارای خاصیت گاوسی است. یعنی، برای $t_1, t_2, \cdots t_n$ متغیرهای تصادفی

$$\mathrm{B}_{t_1}, \mathrm{B}_{t_2}, \cdots \mathrm{B}_{t_n}$$

دارای توزیع نرمال هستند.

۷. قرینه‌ی یک فرآیند براونی، خود نیز یک فرآیند براونی است. (این ویژگی همان ویژگی تقارنی فرآیند براونی است.)

۸. فرآیند براونی دارای ویژگی تفاضلی است، بدین معنی که، فرض کنیم $t > T_a$ و فرآیند براونی تا زمان T_a حرکت کرده باشد، ویژگی تفاضلی می‌گوید که فرآیند تصادفی

$$\{\mathrm{B}(T_a + s) - \mathrm{B}(T_a) = \mathrm{B}(T_a + s) - a; a \geq 0\}$$

یک فرآیند براونی مستقل از فرآیند براونی B تا قبل از رسیدن به نقطه‌ی a است.

۹.

$$\mathrm{E}[\mathrm{B}_s, \mathrm{B}_t] = \min(s, t).$$

۱۰.

$$\lim_{t\to\infty} \tfrac{B_t}{t} = 0 \quad a.s..$$

۱۱. تقریبا تمام مسیرهای فرآیند براونی هیچ‌جا مشتق‌پذیر است، چون

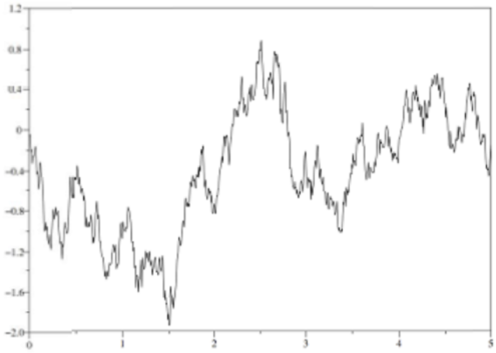
$$\mathbf{P}(\forall t \geq 0; \limsup \frac{\mathrm{B}_{t+h}, \mathrm{B}_t}{h} = +\infty) = 1.$$

۱۲. تقریبا برای همه‌ی مسیرهای براونی، نقطه‌ی افزایشی وجود ندارد. به عبارت دیگر، فرآیند براونی در هیچ بازه‌ای یکنوا نمی‌باشد.

۱۳. مسیر براونی، برای هر $0 < \alpha < \frac{1}{2}$، پیوسته‌ی هولدر از مرتبه‌ی α است. به عبارت دیگر، برای هر $T > 0$، $\mathrm{C}(T, \alpha)$ وجود دارد، به طوری‌که برای هر $s, t < T$، داریم

$$|\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_s| \leq \mathrm{C}|t - s|^{\alpha}.$$

۱۴. مسیر براونی برای $\alpha > \frac{1}{2}$، پیوسته‌ی هولدر از مرتبه‌ی α نمی‌باشد.



شکل ۱.۲: یک نمونه از فرآیند براونی استاندارد

۱۵. فرآیند براونی دارای ویژگی پایایی تحت انتقال است، به این معنی که، $\{\mathrm{B}_t - \mathrm{B}_۰, t \geq ۰\}$ مستقل از $\mathrm{B}_۰$ و دارای توزیع یکسانی با فرآیند براونی است که از صفر شروع می‌شود، یعنی $\mathrm{B}_۰ = ۰$ است.

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

ملاحظه ۴.۲.۲. فیلتر استاندارد فرآیند براونی

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathrm{B}_s, \ \ s \leq t\}.$$

می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنیم $\{\mathrm{W}_t\}_{t\geq ۰}$ یک فرآیند براونی استاندارد باشد. در این صورت، فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq ۰}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند،

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t d\mathrm{W}_t,$$

که در آن α و σ مقادیر ثابت‌اند، را **فرآیند براونی با دیریفت** می‌گوییم.

ملاحظه ۶.۲.۲. در تعریف فوق، به α دیریفت [۸] و به σ پارامتر نوسان [۹] گوییم.

این فرآیند توسط بلک [۱۰]، شولز [۱۱] و مرتون [۱۲] پیشنهاد شد.

قضیه ۷.۲.۲. برای فرآیند براونی با دیریفت $\{X_t\}_{t\geq ۰}$، با فرض $X_۰ = x_۰$، داریم

۱. $\mathrm{E}(X_t) = x_۰ e^{\alpha t}$،

۲. $X_t = x_۰ \exp\{(\alpha - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)t + \sigma \mathrm{W}_t\}$.

[۸] Drift
[۹] Volatility
[۱۰] Black
[۱۱] Scholes
[۱۲] Merton

برهان. به [۳۲] رجوع شود. □

قضیه ۸.۲.۲. اگر $\{B_t\}_{t\geq \circ}$ یک فرآیند براونی و $\mathcal{F}_t$ فیلتر استاندارد فرآیند براونی باشد، آنگاه داریم

۱. برای هر $t \leq s$، $E(B_t.B_s) = t$،

۲. $\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ یک مارتینگل است،

۳. $\{B_t^۲ - t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ یک مارتینگل است.

برهان. ۱.

$$\begin{aligned} E(B_tB_s) &= E(B_t(B_s - B_t + B_t)) \\ &= E(B_t(B_s - B_t)) + E(B_t^۲) \\ &= E(B_t)E(B_s - B_t) + E(B_t^۲) \\ &= \circ + t = t. \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} E(B_s \mid \mathcal{F}_t) &= E(B_s - B_t + B_t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E(B_s - B_t \mid \mathcal{F}_t) + E(B_t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \circ + B_t \\ &= B_t. \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned} E(B_s^۲ - s \mid \mathcal{F}_t) &= E(B_s^۲ \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t + B_t)^۲ \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^۲ + ۲(B_s - B_t)B_t + B_t^۲ \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^۲ \mid \mathcal{F}_t) + E(۲(B_s - B_t)B_t \mid \mathcal{F}_t) + E(B_t^۲ \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^۲) + ۲B_tE(B_s - B_t \mid \mathcal{F}_t) + B_t^۲ - s \\ &= s - t + ۲E(B_s - B_t) + B_t^۲ - s \\ &= B_t^۲ - t. \end{aligned}$$

□

تعریف ۹.۲.۲. با اضافه نمودن عوامل تصادفی به معادله‌ی دیفرانسیل معمولی [۱۳] (در شرایط اولیه و یا شرایط مرزی) یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی [۱۴] به‌وجود می‌آید. لذا یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی،

[۱۳] Ordinary Differential Equation
[۱۴] Stochastic Differential Equation

یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی است که به صورت مجموعه‌ای از یک یا چند جمله‌ی تصادفی است. به عبارت دیگر، معادله‌ی دیفرانسیل معمولی که دارای ضرایب تصادفی یا مقدار اولیه‌ی تصادفی، یا ورودی تصادفی و یا حتی ترکیبی از آنها باشد، یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی می‌باشد که جواب آن نسبت به زمان، مشتق‌پذیر می‌باشد. یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی که با اضافه کردن یک فرآیند تصادفی نامنظم پدید می‌آید، به‌خاطر وجود جملاتی بر حسب فرآیندهای وینر در انتگرال تصادفی مربوطه، جواب آنها بر حسب زمان، مشتق‌پذیر نمی‌باشد و معمولا این گونه از معادلات به صورت انتگرال تصادفی ایتو [۱۵] یا استراتنوویچ [۱۶] بیان می‌شود. [۳۷]

۱.۲.۲ حسابان ایتو

قضیه ۱۰.۲.۲ (انتگرال ایتو). می‌خواهیم معادله‌ی حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به‌دست آوریم. از آنجا که مکان ذره در لحظه‌ی t، ($t \in [0,T]$ و $T > 0$) به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند، تصادفی است (قطعی [۱۷] نیست)، معادله‌ی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{d\mathrm{X}_t}{dt} = b(t, \mathrm{X}_t) + \sigma(t, \mathrm{X}_t)(\text{نوفه}) \qquad (۱.۲)$$

که در آن σ و b توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (0,\infty)$ هستند و نوفه، فرآیند تصادفی‌ای مانند W_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

۱. برای هر $t_1, t_2 \in [0,T]$ که $t_1 \neq t_2$، W_{t_1} و W_{t_2}، مستقل از هم باشند،

۲. توزیع توام متغیرهای تصادفی $W_{t_1+t}, \cdots, W_{t_n+t}$، $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$، به t بستگی نداشته باشد،

۳. برای هر t، $\mathrm{E}[W_t] = 0$.

فرض کنیم $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ افرازی از فاصله‌ی $[0,T]$ می‌باشد. با گسسته‌سازی معادله‌ی (۱.۲) داریم

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k W_k.$$

تنها فرآیندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است، فرآیند براونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta W_j$$

[۱۵] Ito Integral
[۱۶] Stratonovich Integral
[۱۷] Deterministic

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \longrightarrow \circ$ وجود داشته باشد، خواهیم داشت

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t b(s,w)ds + \int_\circ^t \sigma(s,w)dW_s$$

بنابراین، به‌روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{\mathrm{X}_t\}$ لازم است به محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به فرم زیر بپردازیم.

$$\int_s^T f(t,\omega)d\mathrm{B}_t(\omega).$$

که در آن $\mathrm{B}_t(\omega)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $\Omega \times [\circ,\infty)$ است. برای حل این مشکل، ایتو این انتگرال را برای یک سری توابع خاص تعریف کرد و برای رسیدن به این هدف گام‌های زیر را برداشت.

۱. فرض کنیم $\varphi : [\circ,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ تابعی ابتدایی باشد، یعنی

$$\varphi(t,\omega) = \mathrm{X}(\omega)\chi_{[a,b)}(t), \quad a,b \in [\circ,\infty)$$

دراین صورت، تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s,\omega)d\mathrm{B}_s = \int_a^t X(\omega)\chi_{[a,b)}d\mathrm{B}_s(\omega) = \mathrm{X}(\omega)[\mathrm{B}_{b\wedge t}(\omega) - \mathrm{B}_{a\wedge t}(\omega)]$$

که در آن برای هر $x,y \in \mathbf{R}$، $x \wedge y = \min\{x,y\}$.

۲. فرض کنیم f تابعی ساده روی $\Omega \times [\circ,\infty)$ باشد، یعنی

$$f = \sum_{i=\circ}^n \varphi_i,$$

که ϕ_i ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f d\mathrm{B}_s = \sum_{j=\circ}^n \int_a^t \phi_i d\mathrm{B}_s. \tag{۲.۲}$$

۳. برای توابع $f \in \mathcal{P}_۲$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۲.۲. رده‌ی $\mathcal{P}_۲$ از توابع $f(t,\omega)$ روی $\Omega \times [\circ,\infty)$، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

- تابع $(t,\omega) \longrightarrow f(t,\omega)$، $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ ـ اندازه‌پذیر است،
- به ازای هر t ،تابع $f(t,\circ)$، $\mathcal{F}_t$ ـ اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T \geq \circ$، $\mathrm{E}\left[\int_\circ^T f^۲(s,\omega)ds\right] < \infty$.

ملاحظه ۱۲.۲.۲. اگر f یک تابع ساده باشد، آنگاه

.۱

$$\{X_t = \int_a^t f(s,\omega)d\mathrm{B}(s), \mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰},$$

.۲

$$\{(X_t)^۲ - \int_a^t f^۲(s)ds, \mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰},$$

.۳

$$\mathrm{E}[(\int_a^t f(s,\omega)d\mathrm{B}(s))^۲] = \mathrm{E}[\int_a^t f^۲(s)ds],$$

مارتینگل هستند.

برهان. به [۳۷] رجوع کنید. □

قضیه ۱۳.۲.۲ (لم ایزومتری ایتو). [۱۸] اگر تابع $\varphi(t,\omega)$ کراندار و ابتدایی باشد، آنگاه

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_s^T \varphi(t,\omega)d\mathrm{B}_t(\omega)\right)^۲\right] = \mathrm{E}\left[\int_s^T \varphi^۲(t,\omega)dt\right].$$

برهان. به [۳۷] رجوع کنید. □

لم ۱۴.۲.۲. اگر $f \in \mathcal{P}_۲$، آنگاه دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد، به طوری‌که

$$\forall T, \quad \mathrm{E}\left[\int_۰^T \mid \phi(s) - f_n(s) \mid^۲ ds\right] \xrightarrow{n\to\infty} ۰.$$

برهان. به [۳۷] رجوع کنید. □

اکنون می‌توانیم $\int_s^T f(t,\omega)d\mathrm{B}_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_۲$ تعریف کنیم، زیرا برای $f \in \mathcal{P}_۲$، با توجه به لم قبل، دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\varphi_n\}$ موجود است، به طوری‌که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_۰^T f(t,\omega)d\mathrm{B}_t = \lim_{n\to\infty} \int_۰^T \varphi_n d\mathrm{B}_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو** [۱۹] می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۲.۲. فرض کنیم $\{\mathrm{B}_t : t \geq ۰\}$ یک فرآیند براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد، یک انتگرال تصادفی یک بعدی، یک فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است و به صورت

$$X_t(\omega) = X_۰(\omega) + \int_۰^t u(s,\omega)ds + \int_۰^t v(s,\omega)d\mathrm{B}_s,$$

که در آن $u, v : [۰,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$، یا با مشتق‌گیری

$$dX_t = udt + vd\mathrm{B}_s$$

بیان می‌شود. به طور مثال

$$(d\tfrac{۱}{۲}\mathrm{B}_t^۲) = \tfrac{۱}{۲}dt + \mathrm{B}_t d\mathrm{B}_t.$$

[۱۸] Isometric Ito Lemma
[۱۹] Ito integral

قضیه ۱۶.۲.۲ (فرمول ۱ـ بعدی ایتو). فرض کنیم

$$dX_t = udt + vd\mathrm{B}_t, \qquad Y_t = g(t, X_t)$$

اگر قرار دهیم $x = X_t$، پس داریم $g(t, X_t) = g(t, x)$، آنگاه

$$dY_t = \tfrac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \tfrac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \tfrac{۱}{۲}\tfrac{\partial^۲ g}{\partial x^۲}(t, X_t)(dX_t)^۲,$$

که در آن داریم

$$(d\mathrm{B}_t)^۲ = dt, \qquad dt.dt = dt.d\mathrm{B}_t = d\mathrm{B}_t.dt = ۰.$$

قضیه ۱۷.۲.۲ (فرم کلی ایتو). فرض می‌کنیم

$$dX_t = udt + vd\mathrm{B}_s$$

یک انتگرال تصادفی n ـ بعدی و $g : [۰, \infty) \times \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$ یک نگاشت متعلق به $\mathcal{C}^۲$ باشند، آنگاه

$$dY_t = \tfrac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=۱}^{n} \tfrac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \sum_{i,j} \tfrac{۱}{۲}\tfrac{\partial^۲ g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)(dX_i)(dx_j).$$

که در اینجا داریم

$$d\mathrm{B}_i d\mathrm{B}_j = \rho_{ij}dt\,, \qquad dt.dt = dt.d\mathrm{B}_i = d\mathrm{B}_i.dt = ۰.$$

ملاحظه ۱۸.۲.۲. فرض کنیم $\{\mathrm{B}\}_t$ یک فرآیند براونی باشد و $\mu : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ و $\sigma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ همچنین $x_۰ \in \mathbf{R}^n$، اگر معادله‌ی تصادفی زیر را داشته باشیم

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\mathrm{W}(t), \\ X_۰ = x_۰. \end{cases}$$

آنگاه

$$X_t = x_۰ + \int_۰^t \mu(S, X_S)dS + \int_۰^t \sigma(S, X_S)d\mathrm{B}_S, \quad \forall t \geq ۰.$$

قضیه ۱۹.۲.۲. فرض کنیم ثابت k ای وجود داشته باشد، به طوری‌که برای آن، به ازای هر x، y و t، شرایط زیر برقرار باشد.

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| \leq k\|x - y\|,$$

$$\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

و

$$\|\mu(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq k(\|x\| + ۱).$$

آنگاه معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی (۱۸.۲.۲) جواب یکتا دارد، به طوری‌که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. X دارای مسیرهای پیوسته می‌باشد،

۲. X یک فرآیند مارکوف می‌باشد،

۳. ثابت C ای وجود دارد، به طوری‌که داریم $\mathrm{E}(\|X_t\|^{۲}) \leq C\mathrm{e}^{Ct}(۱ + \|X_{۰}\|^{۲})$.

قضیه‌ی فوق را قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌نامیم.

قضیه ۲۰.۲.۲ (قضیه‌ی گیرسانوف). [۲۰] فرض کنیم برای هر $۰ \leq t \leq T$، $\{\mathrm{B}_t\}_t$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فرآیند براونی تحت فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}$ باشد. همچنین فرض کنیم $\{\theta_u\}$ یک فرآیند سازگار تحت همان فیلتر باشد. اگر برای هر $۰ \leq t \leq T$، قرار دهیم

$$\tilde{\mathrm{B}}_t = \int_{۰}^{t} \theta(u)du + \mathrm{B}_t,$$

$$Z_t = \exp\{-\int_{۰}^{t} \theta(u)d\mathrm{B}_u - \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t} \theta_u^{۲}du\},$$

و یک اندازه‌ی احتمال جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(T)d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

آنگاه $\tilde{\mathrm{B}}_t$ تحت اندازه‌ی احتمال $\tilde{\mathbb{P}}$ یک فرآیند براونی است.

ملاحظه ۲۱.۲.۲. قضیه‌ی فوق با شرط زیر برقرار است.

$$\mathrm{E}[\exp\{\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{T} \theta^{۲}(u)du\}] < \infty.$$

ملاحظه ۲۲.۲.۲. در قضیه‌ی فوق داریم

۱. Z_t مارتینگل است.

۲. $\tilde{\mathbb{P}}$ اندازه‌ی احتمال است.

۳. اگر X یک متغیر تصادفی باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = \mathrm{E}[Z(T)X].$$

که در آن $\mathrm{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}$ امید ریاضی نسبت به اندازه‌ی احتمال $\tilde{\mathbb{P}}$ و E امید ریاضی نسبت به اندازه‌ی احتمال $\mathbb{P}$ است.

برهان. به [۵] رجوع شود. □

لم ۲۳.۲.۲. فرض کنیم $۰ \leq t \leq T$، اگر X، $\{\mathcal{F}_t\}$ـ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه داریم

$$\tilde{\mathrm{E}}(X) = \mathrm{E}(XZ_t).$$

برهان. به [۵] رجوع شود. □

[۲۰] Girsanov theorem

۳.۲ مفهوم و ویژگی‌های فرآیند براونی کسری

فرآیند براونی آشناترین نام در میان فرآیندهای پیوسته است، که ساده و پرکاربرد می‌باشد و برای پیش‌بینی قیمت‌ها در دو دهه، در بازارهای مالی حرف اول را می‌زد، اما به‌خاطر همین ویژگی‌های ساده، توانایی‌هایش برای بیان واقعیت‌های بازار محدود است. یکی از این ضعف‌ها، بی‌حافظه بودن این فرآیند، در بازاری است، که حافظه داشتن قیمت‌ها بر هر خبره‌ای مشهود می‌باشد. این ضعف باعث شد که برای مدل‌سازی قیمت‌ها چاره‌جویی کنند و چه گزینه‌ای بهتر از فرآیند براونی کسری! نخستین گزینه‌ای که به ذهن هر ریاضیدان می‌رسد، تعمیم و تحدید است.

فرآیند براونی کسری [۲۱] برای اولین بار توسط کولموگروف [۲۲] در سال (۱۹۴۰) معرفی شد، [۱۶]. کولموگروف از اسم فرآیند براونی کسری استفاده نکرد، بلکه او این فرآیند را ''مارپیچ وینر'' [۲۳] نامید. وی فرآیند براونی را در چارچوب یک فضای هیلبرت معرفی کرد و تابع کواریانس آن را از خاصیتی که اکنون آن را خودمتشابهی می‌نامیم، به‌دست آورد. پس از کولموگروف، در سال (۱۹۵۱)، هانت [۲۴]، که بر روی همگرایی قریب به تقریبا همه جای سری‌های فوریه‌ی تصادفی و استانداردهای پیوستگی آنها کار می‌کرد، به زبان امروزی، به یک نمایش طیفی از فرآیند براونی کسری رسید. هانت نتایجی راجع به پیوستگی هولدر گونه‌ی فرآیند براونی کسری اثبات نمود. پس از آن، لوی [۲۵]، در سال (۱۹۵۳) تحت عنوان توابع تصادفی، به معرفی فرآیندی پرداخت، که امروزه فرآیند براونی کسری لوی نامیده می‌شود. این فرآیند که از انتگرال کسری ریمان– لیوویل فرآیند براونی کلاسیک حاصل می‌شود و به همین خاطر، فرآیند ریمان–لیوویل نامیده می‌شود، شباهت‌های فراوانی با فرآیند براونی کسری دارد، اما از برخی جهات با آن متفاوت می‌باشد، به عنوان مثال، نموهایش مانا نیست.

در سال (۱۹۵۸)، یاگلوم [۲۶]، حین تحقیقاتش با محوریت تعمیم فرآیندهای مانا، تعریف فرآیندهای با نموهای n ام مانا را معرفی کرد و از این فرآیند به عنوان مثالی از فرآیند با نموهای یکم مانا استفاده نمود و ویژگی‌های این فرآیند را مطرح کرد، [۲۹]. لمپرتی [۲۷]، طی مقاله‌ای با عنوان فرآیندهای تصادفی نیمه پایدار– امروزه این فرآیندهای تصادفی را خودمتشابه می‌نامیم– که در سال (۱۹۶۲)، چاپ شد، فرآیند براونی کسری را نمونه‌ای از فرآیندهای تصادفی نیمه پایدار گاوسی برشمرد. لمپرتی به این موضوع نیز اشاره داشت که این حرکت، جز در حالت کلاسیک، مارکوفی نیست. مندلبرات [۲۸] و ون نس [۲۹] در سال (۱۹۶۸)، طی مقاله‌ای با عنوان فرآیند براونی کسری، نوفه‌های کسری و کاربردهای آنها، فرآیند براونی کسری را به عنوان یک انتگرال تصادفی نسبت به فرآیند براونی استاندارد تعریف کردند، [۲۰] و به خاطر کار آنها، نام فرآیند براونی کسری را بر آن نهادند. نماد پارامتر H، که در تعریف فرآیند براونی کسری

[۲۱] Fractinal Brownian motion or Fractal Brownian motion
[۲۲] Kolmogorov
[۲۳] Wiener Spiral
[۲۴] G.A. Hunt
[۲۵] Paul Levi
[۲۶] A.M. Yaglom
[۲۷] John Lamperti
[۲۸] Mandelbrat
[۲۹] Van ness

خواهید دید، در ابتدا آب شناس انگلیسی هارولد ادوین هرست [۳۰] در بررسی آماری طغیان‌های سالیانه‌ی رود نیل ابداع کرد [۱۹] و مندلبرات و ون نس آنها را در بررسی فرآیند براونی کسری مطرح کردند و حدود آن را که در بازه‌ی $(۰,۱)$ است، مشخص کردند. در ادامه‌ی این فعالیت‌ها فرآیند براونی کسری کاربردهای بسیاری در آب شناسی، اقتصاد، نضریه‌ی صف، مخابرات و ریاضیات مالی پیدا کرد. فرآیند براونی کسری از ساده‌ترین فرآیندهایی است که نه مارکوفی‌اند و نه گاوسی، و این یکی از جاذبه‌های این فرآیند است. در این بخش از رفرنس‌های [۳۶]، [۳۴]، [۱۸]، [۳۳] و [۲۲] استفاده شده است.

۴.۲ نمایش فرآیند براونی کسری به صورت انتگرال تصادفی

در این بخش، فرآیند براونی کسری را به‌وسیله‌ی نمایش اصلی آن به عنوان میانگین متحرک [۳۱] نموهای براونی معرفی می‌کنیم.
پیش از معرفی فرآیند براونی کسری، لوی در سال (۱۹۵۳) انتگرال کسری ریمان-لیوویل [۳۲] را برای تعریف فرآیند

$$X_{\mathrm{H}}(t)=\frac{۱}{\Gamma(\mathrm{H}+\frac{۱}{۲})}\int_{۰}^{t}(t-s)^{(\mathrm{H}-\frac{۱}{۲})}d\mathrm{B}_s$$

به‌کار برد، که در آن انتگرال، نسبت به اندازه‌ی نویز خالص (اغتشاش خالص) $d\mathrm{B}_s$ است.

تعریف ۱.۴.۲. برای $\mathrm{H}\in(۰,۱)$، فرآیند براونی کسری $\{\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t), t\in\mathbf{R}\}$، یک فرآیند تصادفی است که دارای ویژگی‌های زیر است.

۱.

$$\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(۰)=۰,$$

۲.

$$\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t)=C_{\mathrm{H}}\left\{\int_{\mathbf{R}}((t-s)^{\mathrm{H}-\frac{۱}{۲}}-(-s)^{\mathrm{H}-\frac{۱}{۲}})d\mathrm{B}_s\right\},$$

که در آن $\{\mathrm{B}_s, s\in\mathbf{R}\}$ یک فرآیند براونی است و پارامتر H را اندیس هرست [۳۳] یا پارامتر هرست [۳۴] مرتبط با فرآیند براونی کسری می‌نامیم و

$$C_{\mathrm{H}}=\sqrt{\frac{۲\mathrm{H}\Gamma(\frac{۳}{۲}-\mathrm{H})}{\Gamma(\frac{۱}{۲}+\mathrm{H})\Gamma(۲-۲\mathrm{H})}}$$

[۳۰] Harold Edwin Hurst
[۳۱] Moving Average
[۳۲] Reimann- Liouville
[۳۳] Hurst index
[۳۴] Hurst parameter

یک ثابت است و در آن $\Gamma(x)$ تابع گاما می‌باشد، [۳۳]. برای $t > ۰$ فرآیند براونی کسری می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود.

$$\mathrm{B_H}(t) = C_{\mathrm{H}} \left\{ \int_{-\infty}^{۰} ((t-s)^{\mathrm{H}-\frac{۱}{۲}} - (-s)^{\mathrm{H}-\frac{۱}{۲}}) d\mathrm{B}_s + \int_{۰}^{t} (t-s)^{\mathrm{H}-\frac{۱}{۲}} d\mathrm{B}_s \right\}.$$

یادآوری ۲.۴.۲. برای هر $\mathrm{x} \geq ۰$، مقدار **تابع گاما** [۳۵] (Γ) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Gamma_{(x)} = \int_{۰}^{\infty} t^{x-۱}\, e^{-t}\, dt.$$

انتگرال فوق برای هر $\mathrm{x} > ۰$، همگراست و همچنین داریم $\Gamma_{(x+۱)} = x\Gamma_{(x)}$. یک محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد $\Gamma_{(۱)} = ۱$. در نتیجه برای هر عدد طبیعی n، داریم $\Gamma_{(n+۱)} = n!$.

ملاحظه ۳.۴.۲. برای حالت $\mathrm{H} = \frac{۱}{۲}$، داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{\frac{۱}{۲}}(t) &= C_{\frac{۱}{۲}} \left\{ \int_{-\infty}^{۰} ((t-s)^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}} - (-s)^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}}) d\mathrm{B}(s) + \int_{۰}^{t} (t-s)^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}} d\mathrm{B}(s) \right\} \\ &= \int_{۰}^{t} d\mathrm{B}(s) = \mathrm{B}_(t), \end{aligned}$$

که در آن

$$C_{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۲ \times \frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲})}{\Gamma(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲})\Gamma(۲ - ۲ \times \frac{۱}{۲})}}.$$

بنابراین در حالتی‌که $\mathrm{H} = \frac{۱}{۲}$ فرآیند براونی کسری، یک فرآیند براونی استاندارد(فرآیند وینر) خواهد بود.

لم ۴.۴.۲. معمول‌ترین فرم فرآیند براونی کسری به صورت زیر است.

$$\mathrm{B_H}(t) = \frac{۱}{\Gamma(\mathrm{H} + \frac{۱}{۲})} \int_{۰}^{t} (t-\tau)^{(\mathrm{H}-\frac{۱}{۲})} W(\tau) d\tau$$

که در آن $\Gamma(x)$، تابع گاما و $W(\tau)$ نویز سفید گاوسی با میانگین صفر نامیده می‌شود.

برهان. به [۳۰] رجوع کنید. □

۵.۲ تعریف فرآیند براونی کسری

در سال‌های اخیر، فرآیند براونی کسری بیشتر به عنوان فرآیند تصادفی‌ای با ویژگی‌های تابع کواریانس آن شناخته می‌شود، که در این بخش به آن می‌پردازیم. در تئوری احتمالات، **فرآیند براونی کسری** که به اختصار (FBM) نامیده می‌شود، یک تعمیم از فرآیند بروانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

[۳۵] Gama Function

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال کامل و $H \in (0, 1)$ عددی ثابت باشد. یک فرآیند براونی کسری $(\mathrm{B_H}(t))$ با پارامتر هرست، یک فرآیند گاوسی مرکزی و پیوسته روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ با ویژگی‌های زیر است.

۱.

$$\mathrm{B_H}(0) = 0,$$

۲.

$$\mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t)] = 0, \quad \forall t > 0,$$

۳.

$$\mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t)\mathrm{B_H}(s)] = \tfrac{1}{2}(t^{2\mathrm{H}} + s^{2\mathrm{H}} - |t-s|^{2\mathrm{H}}) \quad \forall s, t > 0.$$

پارامتر H را اندیس هرست یا پارامتر هرست مرتبط با فرآیند براونی کسری می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۵.۲. نمو فرآیند براونی کسری به صورت زیر است.

$$\Delta(\mathrm{B_H}(t,s)) = \mathrm{B_H}(t) - \mathrm{B_H}(s) \quad \forall s, t \geq 0.$$

از لم فوق به دست می‌آوریم که برای هر $s, t \geq 0$، فرآیند براونی کسری دارای ویژگی‌های زیر است.

۱.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\Delta(\mathrm{B_H}(t,s))] &= \mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t) - \mathrm{B_H}(s)]\\ &= \mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t)] - \mathrm{E}[\mathrm{B_H}(s)]\\ &= 0,\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\Delta(\mathrm{B_H}(t,s)))^2] &= \mathrm{E}[(\mathrm{B_H}(t) - \mathrm{B_H}(s))(\mathrm{B_H}(s) - \mathrm{B_H}(t))]\\ &= \mathrm{E}[(\mathrm{B_H}(t))^2] + \mathrm{E}[(\mathrm{B_H}(s))^2] - 2\mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t)\mathrm{B_H}(s)]\\ &= t^{2\mathrm{H}} + s^{2\mathrm{H}} - 2.\tfrac{1}{2}(|t|^{2\mathrm{H}} + |s|^{2\mathrm{H}} - |t-s|^{2\mathrm{H}})\\ &= |t-s|^{2\mathrm{H}},\end{aligned}$$

و در نتیجه برای هر $t \geq 0$،

$$\mathrm{E}[\mathrm{B}^2_{\mathrm{H}(t)}] = t^{2\mathrm{H}},$$

۳.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\Delta(\mathrm{B_H}(t,s))\Delta(\mathrm{B_H}(s,0))] &= \mathrm{E}[(\mathrm{B_H}(t) - \mathrm{B_H}(s))(\mathrm{B_H}(s) - \mathrm{B_H}(0))]\\ &= \mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t)\mathrm{B_H}(s)] - \mathrm{E}[\mathrm{B_H}(t)\mathrm{B_H}(0)] - \mathrm{E}[(\mathrm{B_H}(s))^2]\\ &\quad + \mathrm{E}[\mathrm{B_H}(s)\mathrm{B_H}(0)]\\ &= \tfrac{1}{2}(|t|^{2\mathrm{H}} + |s|^{2\mathrm{H}} - |t-s|^{2\mathrm{H}}).\end{aligned}$$

ملاحظه ۳.۵.۲. پارامتر هرست، ناهمواری فرآیند براونی کسری راتوصیف می‌کند. ارزش H، علامت کواریانس از نموهای گذشته و آینده و در حقیقت نوع فرآیند براونی کسری را تعیین می‌کند، بنابراین فرآیند براونی کسری به سه خانواده‌ی کاملا متفاوت $۰ < \mathrm{H} < \frac{۱}{۲}$، $\mathrm{H} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲} < \mathrm{H} < ۱$ تقسیم می‌شود.

- اگر $\mathrm{H} = \frac{۱}{۲}$، فرآیند براونی کسری در حقیقت یک فرآیند براونی استاندارد یا فرآیند وینر است. زیرا

$$\mathrm{E}[\mathrm{B}_{\frac{۱}{۲}}(t)\mathrm{B}_{\frac{۱}{۲}}(s)] = \frac{۱}{۲}(t^{۲\times\frac{۱}{۲}} + s^{۲\times\frac{۱}{۲}} - |t-s|^{۲\times\frac{۱}{۲}}) = \frac{۱}{۲}[t+s+(t-s) = s = min(s,t)].$$

در نتیجه، دارای نموهای مستقل است.

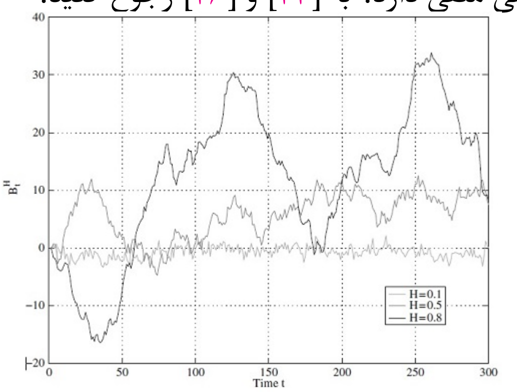
- اگر $\mathrm{H} > \frac{۱}{۲}$، نموهای فرآیند، همبسته‌ی مثبت هستند، (تابع کواریانس مثبت است).
- اگر $\mathrm{H} < \frac{۱}{۲}$، نموهای فرآیند، همبسته‌ی منفی هستند، (تابع کواریانس منفی است).

در حالتی‌که $\mathrm{H} > \frac{۱}{۲}$، فرآیند، رفتار تجمعی [۳۶] دارد و وجود این ویژگی می‌تواند برای توصیف پدیده‌های خوشه‌ای [۳۷] (سیستم‌های باحافظه و بادوام [۳۸]) مفید باشد. در حالتی‌که $\mathrm{H} < \frac{۱}{۲}$، می‌تواند برای مدل کردن فرآیندهای باتناوب و بی‌دوام [۳۹] استفاده شوند.

برهان. از آنجا که طبق تعریف همبستگی برای $\mathrm{B}(t+h) - \mathrm{B}(t)$ و $\mathrm{B}(s+h) - \mathrm{B}(s)$ با $s + h \leq t$ و $t - s = nh$ برابر است با

$$\rho_{\mathrm{H}}(n) = \frac{۱}{۲}h^{۲\mathrm{H}}[(n+۱)^{۲\mathrm{H}} - (n-۱)^{۲\mathrm{H}} - ۲n^{۲\mathrm{H}}].$$

مشاهده می‌شود که $\mathrm{B}(t+h) - \mathrm{B}(t)$ و $\mathrm{B}(t+۲h) - \mathrm{B}(t+h)$، به ازای $\mathrm{H} > \frac{۱}{۲}$، همبستگی مثبت و به ازای $\mathrm{H} < \frac{۱}{۲}$، همبستگی منفی دارد. به [۳۳] و [۳۶] رجوع کنید. □



شکل ۲.۲: مسیرهایی از فرآیند براونی کسری با پارامترهای هرست متفاوت

ملاحظه ۴.۵.۲. فرآیند نمو $X(t) = \mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t+۱) - \mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t)$ یک نویز گاوسی کسری [۴۰] نامیده می‌شود.

[۳۶] Aggregation behaviour
[۳۷] Cluster Phenomena
[۳۸] Systems With Memory And Persistens
[۳۹] Sequences With Intermittency And Anti-Persistence
[۴۰] Fractional Gaussian noise

۶.۲ ویژگی‌های فرآیند براونی کسری

فرآیند براونی استاندارد، مارکوف و مارتینگل است و تغییرات آن در بازه‌های مجزا(نموها)، مستقل است، در حالی‌که قرآیند براونی کسری هیچ‌کدام از این ویژگی‌ها را ندارد و حتی نیم‌مارتینگل هم نیست. نداشتن چنین ویژگی‌ها، مطالعه‌ی این رده از فرآیندهای تصادفی را مشکل‌تر می‌سازد. به عنوان مثال، به دلیل نیم‌مارتینگل نبودن، دیگر نمی‌توان از روش ایتو برای تعریف انتگرال تصادفی استفاده کرد. مارکوف نبودن آن نیز، شبیه‌سازی این دسته از فرآیندهای تصادفی را سخت‌تر می‌سازد. البته فرآیند براونی کسری، مانند فرآیند براونی استاندارد، خودمتشابه است. برای اثبات این ویژگی‌ها به [۳۴] رجوع کنید.

(۱) نموهای ثابت(نرمال، پایا) [۴۱]

از آنجا که

$$\mathrm{E}[(\mathrm{B_H}(t)-\mathrm{B_H}(s))\,(\mathrm{B_H}(u)-\mathrm{B_H}(v))]=\tfrac{1}{2}\left(|s-u|^{2\mathrm{H}}+|t-v|^{2\mathrm{H}}-|t-u|^{2\mathrm{H}}-|s-v|^{2\mathrm{H}}\right),$$

در نتیجه، فرآیند براونی کسری دارای نموهای پایاست، بدین معنی که

$$\mathrm{B_H}(t)-\mathrm{B_H}(s)\sim \mathrm{B_H}(t-s).$$

(۲) خود متشابهی [۴۲]

فرآیند براونی کسری یک فرآیند خود متشابه است، بدین معنی که

$$\mathrm{B_H}(at)\sim |a|^{\mathrm{H}}\mathrm{B_H}(t).$$

این ویژگی اثر این حقیقت است که تابع کواریانس از درجه ۲H همگن است و می‌تواند به عنوان یک ویژگی کسری در نظر گرفته شود. فرآیند براونی کسری فقط فرآیند گاوسی خود متشابه است.

(۳) وابستگی دور برد (دراز مدت) [۴۳]

تعریف ۱.۶.۲. فرآیند پایای $X=(X_t)_{t\geq 0}$، درای ویژگی وابستگی دوربرد است، هرگاه تابع خودهمبستگی [۴۴] $\rho(n)=\mathrm{Cov}(X_k,X_{k+n})$، برای ثابت‌های $c\in\mathbf{R}$ و $\alpha\in(0,1)$، در شرط زیر صدق کند.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(n)}{(c_n)^{-\alpha}}=1.$$

در این حالت، وابستگی بین X_k و X_{k+n} هنگامی‌که n به سمت بی‌نهایت میل کند، به کندی ناپدید می‌شود و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(n)=\infty.$$

---

[۴۱] Stationary increments
[۴۲] Self-similarity
[۴۳] Long-range dependence
[۴۴] Long-range dependence

در این حالت، بلافاصله به دست می‌آوریم که نموهای $X_k = \mathrm{B}(k) - \mathrm{B}(k-1)$ از $\mathrm{B_H}$ و $X_{k+n} = \mathrm{B}(k+n) - \mathrm{B}(k+n-1)$ از $\mathrm{B_H}$ دارای ویژگی وابستگی دوربرد برای $\mathrm{H} > \frac{1}{2}$ هستند.

$$\rho_{\mathrm{H}}(n) = \frac{h^{2\mathrm{H}}}{2}[(n+1)^{2\mathrm{H}} - (n-1)^{2\mathrm{H}} - 2n^{2\mathrm{H}}] \sim \mathrm{H}(2\mathrm{H}-1)n^{2\mathrm{H}-2}.$$

به طوری‌که وقتی $n \to \infty$، به ویژه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{\mathrm{H}}(n)}{\mathrm{H}(2\mathrm{H}-1)n^{2\mathrm{H}-2}} = 1.$$

بنابراین به طور خلاصه، به ازای $\mathrm{H} > \frac{1}{2}$ فرآیند براونی کسری وابستگی دور برد دارد، بدین معنی که

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\mathrm{B_H}(1)\,(\mathrm{B_H}(n+1) - \mathrm{B_H}(n))] = \infty.$$

بنابراین،

- اگر $0 < \mathrm{H} < \frac{1}{2}$، فرآیند براونی کسری دارای وابستگی کوتاه مدت است،
- اگر $\mathrm{H} = \frac{1}{2}$، فرآیند براونی کسری ناوابسته است و
- اگر $\frac{1}{2} < \mathrm{H} < 1$، فرآیند براونی کسری وابستگی بلند مدت دارد.

(۴) منظم بودن [۴۵]

مسیرهای ساده تقریبا همه‌جا دیفرانسیل ناپذیرند. با این وجود، تقریبا همه مسیرها، پیوسته‌ی هولدر از هر درجه‌ی اکیدا کمتر از H هستند. برای هر چنین مسیری، یک ثابت c وجود دارد به طوری‌که

$$|\mathrm{B_H}(t) - \mathrm{B_H}(s)| \leq c \mid t-s \mid^{\mathrm{H}-\epsilon},$$

برای هر $\epsilon > 0$.

(۵) انتگرال‌گیری [۴۶]

وقتی‌که برای فرآیند براونی منظم، انتگرال‌های تصادفی با توجه به فرآیند براونی کسری تعریف می‌شود، معمولا انتگرال‌های تصادفی کسری نامیده می‌شود.

نتیجه ۲.۶.۲. برای $1 < \alpha \leq 2$، فرض می‌کنیم $f(t)$ یک تابع پیوسته در $[a,b]$ و (t) تابعی βـ پیوسته در $[a,b]$، $(\beta = \alpha - 1)$ و پیوسته در a باشد. بنابراین، حل معادلات

$$dy = f(t)(dt)^{\alpha}, \qquad y(a) = y_0, \qquad (a) = 0,$$

به صورت زیر است.

$$y(t) - (a)(t-a) - y(a) = \int_a^t f(\tau)(d\tau)^{\alpha} = \alpha(\alpha-1)\int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-2} f(\tau)(d\tau).$$

[۴۵] Regularity
[۴۶] Integration

برهان. به [۱۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۳.۶.۲ (فرمول ایتو کسری)**.** فرض کنیم که $f(t,x):[0,\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به $\mathcal{C}^{1,2}([0,\infty)\times\mathbf{R})$ تعلق دارد و فرآیند تصادفی X_t از معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کند.

$$dX_t = \upsilon(t,X_t)dt + \nu(t,X_t)dB_H(t), \tag{۳.۲}$$

$(\frac{1}{2}\le H<1)$، بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) &+ \int_0^t [\tfrac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\upsilon(s,X_s) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)b^2(s,X_s)]ds \\ &+ \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dB_H(s) \end{aligned}$$

که می‌تواند به فرم دیفرانسیلی زیر نوشته شود.

$$df(t,X_t) = [\tfrac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\upsilon(t,X_t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)b^2(t,X_t)]dt + \tfrac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dB_H(t) \tag{۴.۲}$$

که در آن

$$b^2(t,X_t) = 2H(2H-1)\int_0^t (t-s)^{2H-2}\nu^2(s,x)ds.$$

برهان. برای $H=\frac{1}{2}$، با جایگذاری، قضیه‌ی فوق برقرار می‌شود. برای $\frac{1}{2}\le H<1$ با استفاده از فرمول تیلور کلاسیک از یک تابع با دو متغیر تصادفی، داریم

$$df(t,X_t) = \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \tfrac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2.$$

با توجه به اینکه $\{X_t\}$ در معادله‌ی (۳.۲) صدق می‌کند، بنابراین

$$X_t = X_0 + \int_0^t \upsilon(s,X_s)ds + \int_0^t \nu(s,X_s)dB_H(s). \tag{۵.۲}$$

اگر قرار دهیم $Y_t=\int_0^t f(t)dB_H(t)$. بنابراین، خواهیم داشت

$$E[(dY_t)^2] = f^2(t)(dt)^{2H}. \tag{۶.۲}$$

زمانی‌که $1<2H<2$ از (۲.۶.۲)، ما می‌توانیم تعیین کنیم که معادله‌ی (۶.۲) برابر است با

$$E[(dY_t)^2] = a(t)dt + f^2(t)(dt)^{2H} \tag{۷.۲}$$

که در آن، $a(t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f^2(\tau)(d\tau)^{2H}$. از معادله‌ی (۵.۲) همچنین داریم

$$E[(X_{t+\Delta t}-X_t)|X_t=x] = \int_t^{t+\Delta t}\nu(s,x)ds, \tag{۸.۲}$$

و

$$\mathrm{E}[(\mathrm{X}_{t+\Delta t}-\mathrm{X}_t)^{۲}|\mathrm{X}_t=x]=\left(\int_t^{t+\Delta t}\nu(s,x)ds\right)^{۲}+\mathrm{E}[(\mathrm{Z}_{t+\Delta t}-\mathrm{Z}_t)^{۲}] \quad (۹.۲)$$

که در آن $\mathrm{Z}_t=\int_{۰}^{t}\nu(s,x)d\mathrm{B}_s(\mathrm{H})$. در نتیجه داریم

$$\mathrm{E}[(\mathrm{Z}_{t+\Delta t}-\mathrm{Z}_t)^{۲}]=b^{۲}(t,x)\Delta t+\nu^{۲}(t,x)(\Delta t)^{۲\mathrm{H}} \quad (۱۰.۲)$$

$b^{۲}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{۰}^{t}\nu^{۲}(s,x)(ds)^{۲\mathrm{H}}$. پس کافی‌است نشان دهیم

$$\lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\frac{\mathrm{E}[(\mathrm{X}_{t+\Delta t}-\mathrm{X}_t)|\mathrm{X}_t=x]}{\Delta t}=\nu(t,x).$$

$$\lim_{\Delta t\longrightarrow ۰}\frac{\mathrm{E}[(\mathrm{X}_{t+\Delta t}-\mathrm{X}_t)^{۲}|\mathrm{X}_t=x]}{\Delta t}=\nu(t,x)=b^{۲}(t,x).$$

با استفاده از (۲.۶.۲)، داریم

$$b^{۲}(t,x)=۲\mathrm{H}(۲\mathrm{H}-۱)\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲\mathrm{H}-۲}\nu^{۲}(t,x)ds.$$

□

قضیه ۴.۶.۲ (حالت خاص فرمول ایتو کسری). در حالت خاص، برای $\upsilon(t,x)=\mu x$ و $\nu(t,x)=\sigma x$، خواهیم داشت

$$b^{۲}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{۰}^{t}\nu^{۲}(s,x)(ds)^{۲\mathrm{H}}=۲\mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲}x^{۲}.$$

بنابراین، فرمول ایتو کسری به صورت زیر خواهد بود.

(۱۱.۲)

$$d\mathrm{f}(t,\mathrm{X}_t)=[\tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial t}(t,\mathrm{X}_t)+\tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(t,\mathrm{X}_t)\mu\mathrm{X}_t+\mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\tfrac{\partial^{۲}\mathrm{f}}{\partial x^{۲}}(t,\mathrm{X}_t)\sigma^{۲}\mathrm{X}_t^{۲}]dt+\sigma\mathrm{X}_t\tfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(t,\mathrm{X}_t)d\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t).$$

فصل ۳

قیمت گذاری اختیارمعامله‌ی توان آسیایی

۱.۳ مقدمه

دگرگونی اقتصاد جهانی طی دهه‌های اخیر و توسعه‌ی اقتصادی، موجب ابداع یا تکامل ابزارهای متعدد مالی گردیده است. علاوه بر گسترش معامله‌های سنتی دارایی‌های فیزیکی و مالی، مبادلات ابزار مشتقه شامل قراردادهای آتی [۱] ، قراردادهای اختیار معامله [۲] و قراردادهای معاوضه‌ای [۳] شتاب روزافزونی داشته است. تخمین قیمت‌گذاری اختیار معامله یک بحث مهم در ریاضیات مالی است. تکنیک‌های مدرن قیمت‌گذاری اختیار معامله اغلب در بین پیچیده‌ترین محاسبات ریاضی از همه‌ی زمینه‌های کاربردی ریاضیات مالی وجود دارد. از پیشگامان این حوزه می‌توان بلک و شولز(۱۹۷۳) و مرتون(۱۹۷۳) را نام برد که زمینه‌ساز اصلی انجام تحقیقات گسترده در زمینه‌ی ارزشیابی اختیار، هم به لحاظ تئوری و هم به لحاظ عملی بوده‌اند. در مدل بلک_ شولز، فرآیند قیمت دارایی پایه به‌وسیله‌ی یک فرآیند براونی هندسی توصیف می‌شود و تحت دو فرض بازار کامل و عدم وجود فرصت‌های آربیتراژ، جوابی تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی، ارائه می‌شود. در حالت خاص، فرآیند براونی کسری به‌خاطر وابستگی دوربردی که دارد، برای دینامیک سهام مناسب است. در این فصل، قیمت اختیار معامله‌های آسیایی را تحت چارچوب فرآیند براونی کسری هندسی ارزیابی می‌کنیم. گرچه، اختیار معامله‌های به اختیار معامله‌هایی با مشخصه‌ی اضافی که عایدی‌اش یک تابع توان باشد توسعه یافته است.

[۱] Futures
[۲] Options
[۳] Swaps

۲.۳ مفاهیم ریاضی مالی

در ساده‌ترین مدل بازارمالی، تنها دو تاریخ را در نظر می‌گیریم. یکی امروز، $t = 0$ و دیگری فردا، $t = 1$. ویژگی دیگر این مدل این است که دو نوع دارایی داریم.

۱. دارایی بدون ریسک [۴]

۲. دارایی ریسکی [۵].

ازجمله دارایی‌های بدون ریسک، می‌توان به اوراق قرضه [۶] و از جمله دارایی‌های ریسکی، می‌توان به سهام بازار بورس اشاره کرد.

تعریف ۱.۲.۳. زوج مرتب (α, θ) را که در آن α، تعداد دارایی بدون ریسک و θ، تعداد دارایی ریسکی باشد را یک **سبد سهام** [۷] می‌نامیم. به عبارت دیگر، سبد سهام، ترکیبی از سهام و دارایی‌های دیگر است که سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است، به این ترتیب، سود یک سهم، می‌تواند ضرر سهم دیگر را جبران کند.

تعریف ۲.۲.۳. سبد سهام $h = (x, y)$ را در نظر می‌گیریم. **فرآیند ارزش سبد سهام** h به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_t^h = x\mathrm{B}_t + y\mathrm{S}_t, \quad t = 0, 1,$$

که در آن، S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t و B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی [۸]) در زمان t است.

تعریف ۳.۲.۳. متغیر تصادفی X را یک **ادعای مشروط** [۹] با زمان سررسید T می‌نامیم، هر گاه $\mathrm{X} \in \mathcal{F}_T$. دارنده‌ی این ادعا در $t = T$، مقدار تصادفی X را دریافت می‌کند.
فرض کنیم S_t فرآیند قیمت دارایی پایه باشد، ادعای مشروط X را یک **ادعای مشروط ساده** [۱۰] می‌نامیم، هر گاه به صورت $\mathrm{X} = \phi(\mathrm{S}_T)$ باشد، که ϕ تابع قرارداد [۱۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۳. اگر اندازه‌ی حاکم بر بازار را $\mathbb{P}$ بنامیم، اندازه‌ی احتمال دیگری مانند $\mathbb{Q}$ را با اندازه‌ی $\mathbb{P}$ **معادل** [۱۲] گوئیم، هرگاه داشته باشیم

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0,$$

---

[۴] Risk Less Asset
[۵] Risky Asset
[۶] Bond
[۷] Portfolio
[۸] Determinestic
[۹] Contingent Claim
[۱۰] Simple Contingent Claim
[۱۱] Contract Function
[۱۲] Equivalent

یا

$$\mathbb{P}(A) = ۱ \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = ۱.$$

تعریف ۵.۲.۳. اندازه‌ی احتمال $\mathbb{Q}$ روی Ω را یک **اندازه‌ی مارتینگلی** می‌گوییم، هرگاه

۱. دو اندازه‌ی احتمال $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ معادل باشند،

۲. برای هر $i = ۱, \cdots, N$، فرآیند قیمت نرمالایز شده Z_t^i نسبت به $\mathbb{Q}$ مارتینگل باشد.

تعریف ۶.۲.۳. اندازه‌ی احتمال $\mathbb{Q}$ را **اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی** [۱۳] گوییم، هرگاه داشته باشیم

۱. دو اندازه‌ی احتمال $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ معادل باشند،

۲. فرآیند قیمت دارایی تنزیل شده $D(t)S(t)$ تحت $\mathbb{Q}$ مارتینگل باشد، که در آن $D(t) = \mathrm{e}^{-\int_۰^t r(s)ds}$، نرخ تنزیل و $r(t)$ نرخ بهره‌ی بدون ریسک می‌باشد.
در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل e^{-rt} می‌باشد.

تعریف ۷.۲.۳. فرض کنیم $h(t)$ عایدی (بازدهی) [۱۴] یک دارایی در لحظه t باشد. در این صورت، **ارزش دارایی تحت اندازه‌ی ریسک خنثی در لحظه‌ی** t به صورت زیر است.

$$V(t) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T R(s)ds} h(T) \mid \mathcal{F}\right], \quad ۰ \leq t \leq T,$$

که $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}$ امید ریاضی نسبت به اندازه‌ی ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ است.

تعریف ۸.۲.۳. **سبد سهام آربیتراژی** بدین معنی است که شما استراتژی، یا در حقیقت، سبدی را برمی‌گزینید که ارزش سبد در ابتدا صفر باشد، یعنی $V(S) = ۰$، اما $\mathbb{P}(V(S)) = ۱$.

تعریف ۹.۲.۳. بازاری که فاقد آربیتراژ باشد را یک **بازار کامل** [۱۵] می‌گوئیم.

قضیه ۱۰.۲.۳. اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی وجود دارد، اگر و تنها اگر، بازار فاقد آربیتراژ باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

۱.۲.۳ قراردادهای اختیار معامله

تاریخچه‌ی اختیار معامله

اولین قراردادهای اختیار معامله در اوایل قرن هجده میلادی در اروپا وآمریکا صورت گرفت. در سال‌های اولیه به علت رواج فساد و رشوه‌خواری، این بازارها شهرت خوبی نداشت. در اوایل دهه‌ی (۱۹۹۰) گروهی از شرکت‌ها که خود را ''انجمن کارگزاران و معامله‌گران اختیار خرید و اختیار فروش '' [۱۶] معرفی

[۱۳] Risk Neutral Measure
[۱۴] Pay Off
[۱۵] Compete Market
[۱۶] Put and Call Broker and Dealers Association

می‌کردند، برای ایجاد یک بازار اختیار معامله اقدام نمودند. هدف این انجمن گردهم آوردن خریداران و فروشندگان در کنار یکدیگر بود. اگر سرمایه‌گذاری قصد خرید یک اختیار معامله را داشت، بایستی با یکی از اعضای انجمن تماس می‌گرفت، تا او یک فروشنده را، که قصد فروش اختیار معامله مذکور را دارد، پیدا کند. اگر عضو مذکور نمی‌توانست یک فروشنده پیدا کند، خود شرکت برای فروش اختیار معامله مذکور اقدام می‌کرد. در آوریل (۱۹۷۳)، بورس شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معامله‌ها بر روی سهام تشکیل داد. این بورس، بورس اختیار معامله‌ی شیکاگو [۱۷] نامگذاری شد. پس از آن چندین بورس سهام، به مبادله‌ی اختیار معامله اقدام نمودند.
در کنار بازارهای سازمان‌یافته‌ی بورس، مجموعه‌ای از بازارهای فرابورس [۱۸] وجود دارند، که برخلاف بورس‌ها که از نظر فیزیکی مکان معینی دارند، این بازارها، به صورت شبکه‌ای مبتنی بر ارتباطات تلفنی و یارانه‌ای هستند که معامله‌گرانی را به هم مرتبط می‌سازند که نمی‌توانند به طور حضوری با هم ارتباط برقرار کنند. در بازارهای فرابورس، بیشتر معامله‌ها بین موسسات مالی و یا بین یک موسسه مالی و شرکت مشتری آن صورت می‌گیرد. از اوایل دهه‌ی (۱۹۸۰)، بازار فرابورس اختیار معامله با سرعت چشمگیری رشد کرده و اکنون از بازار معاملاتی بورس بزرگتر است. یکی از مزیت‌های اختیار معامله‌ی فرابورس در این است که یک موسسه‌ی مالی می‌تواند آن را به گونه‌ای طراحی کند، که احتیاجات یک مشتری خاص را برآورده نماید.
اختیار معامله‌های مهم، هم در بازارهای رسمی بورس و هم در بازارهای فرابورس معامله می‌شوند.
به طور کلی، می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد.

اختیار معامله‌ی استاندارد

- **اختیار خرید** [۱۹] یک اختیار معامله‌ی خرید، قراردادی است که به دارنده‌ی آن، این حق (و نه التزام) را می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را به قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بخرد.

- **اختیار فروش** [۲۰] یک اختیار معامله‌ی فروش، قراردادی است که به دارنده‌ی آن، این حق (و نه التزام) را می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را به قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بفروشد.

موضوع مورد قرارداد را **دارایی پایه** [۲۱] می‌نامیم. اختیار معامله‌ها بر اساس نوع دارایی که در برگیرنده‌ی آن هستند، به انواع مختلفی تقسیم‌بندی می‌شوند.

- قراردادهای اختیارمعامله روی سهام [۲۲]

[۱۷] CBOE
[۱۸] over–the–counter market or OTC
[۱۹] Call Option
[۲۰] Put Option
[۲۱] The Underlyhng Asset
[۲۲] Stock Options

- قراردادهای اختیارمعامله روی ارز
- قراردادهای اختیارمعامله روی شاخص‌ها [۲۳]
- قراردادهای اختیارمعامله روی قراردادهای آتی

قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، **قیمت توافقی** [۲۴] یا **قیمت اعمال** [۲۵] و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحا، **تاریخ انقضا** [۲۶] یا **سررسید اختیار معامله** [۲۷] می‌نامیم.
در قراردادهای اختیار معامله، دارنده‌ی برگه‌ی قرارداد، باید پولی را پیشاپیش پرداخت کند، که به آن **قیمت اختیار** می‌گوئیم.
در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف معامله‌گر وجود دارد. یک طرف معامله کننده، سرمایه‌گذاری است که موقعیت خرید اتخاذ کرده است و اختیار معامله را خریده است. در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار موقعیت فروش اتخاذ کرده است، یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است. فروش یک اختیار را **صدور حق اختیار معامله** می‌گویند. خریدار یا دارنده‌ی اختیار معامله، هیچ‌گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، در حالی‌که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند. سود یا زیان صادر کننده‌ی اختیار، درست عکس خریدار است.
هر بورس باید شرایط و ویژگی‌های یک قرارداد اختیار معامله را که مورد داد و ستد قرار می‌گیرد، دقیقا مشخص نماید.
در بازارهای اختیار معامله، چهار نوع معامله‌گر وجود دارد.

- خریداران اختیار خرید
- فروشندگان اختیار خرید
- خریداران اختیار فروش
- فروشندگان اختیار فروش

بر اساس دوره‌های زمان اعمال، اختیار معامله‌های خرید و یا فروش، به سه نوع زیر دسته‌بندی می‌شوند.

۱. **اختیار معامله‌های آمریکایی** [۲۸] دارنده‌ی این اختیار معامله می‌تواند در هر زمان تا تاریخ انقضا و یا در خود تاریخ انقضا، قرارداد اختیار معامله را اعمال کند.

۲. **اختیار معامله‌های اروپایی** [۲۹] این اختیار معامله‌ها، فقط در تاریخ انقضا قابل اعمال هستند.

---
[۲۳] Futures Options
[۲۴] Exercise Price
[۲۵] Strike Price
[۲۶] Exercise Date
[۲۷] Expiration Date or Maturity
[۲۸] American Option
[۲۹] European Option

۳. **اختیار معامله‌های برمودان** [۳۰] این دسته از اختیار معامله‌ها بیشتر در بازارهای فرابورس استفاده می‌شوند که می‌توانند در یک بازه‌ی متناهی مخصوص از زمان که چند روز قبل از تاریخ انقضا می‌باشد، اعمال شوند.

اکنون می‌خواهیم با توجه به تصادفی بودن قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید، بازدهی یا ارزش نهایی سرمایه‌گذار را در حالت کلی بیان کنیم. واضح است که هزینه‌ی اولیه‌ی سرمایه‌گذاری در اینجا دخیل نمی‌باشد.
اگر K را قیمت اعمال و $\mathrm{S(T)}$ را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید T، در نظر بگیریم، آنگاه بازدهی حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از

$$\max(\mathrm{S(T)} - K, \circ) = (\mathrm{S(T)} - K)^+.$$

رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که اگر $K > \mathrm{S(T)}$ باشد، اختیار معامله اعمال خواهد شد و در غیر این صورت، یعنی اگر $K \leq \mathrm{S(T)}$ باشد، اختیار معامله اعمال نخواهد شد. بازدهی سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید اروپایی اتخاذ کرده، به صورت زیر خواهد بود.

$$-\max(\mathrm{S(T)} - K, \circ) = \min(K - \mathrm{S(T)}, \circ) = (K - \mathrm{S(T)})^+.$$

و به همین منوال، بازدهی سرمایه‌گذاری که موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش اروپایی اتخاذ کرده، به صورت زیر می‌باشد.

$$\max(K - \mathrm{S(T)}, \circ) = (K - \mathrm{S(T)})^+.$$

همچنین، بازدهی دارنده‌ی موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش اروپایی به صورت زیر است.

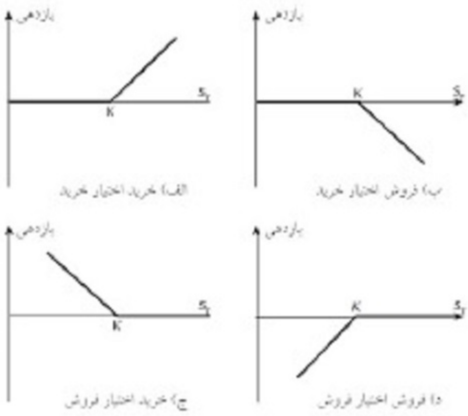
$$-\max(K - \mathrm{S(T)}, \circ) = \min(\mathrm{S(T)} - K, \circ).$$

که فقط به ارزش لحظه‌ای دارایی پایه بستگی دارند.

شش عامل مهمی که قیمت اختیار معامله را تحت تاثیر قرار می‌دهند به شرح زیر است.

- قیمت جاری سهم، $\mathrm{S}_\circ$،
- قیمت توافقی، K،
- مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید، T،
- نوسان‌پذیری قیمت سهام، σ،
- نرخ بهره‌ی بدون ریسک، r و
- سود تقسیمی، q.

[۳۰] Bermudan Option



شکل ۱.۳: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله‌های اروپایی

ذکر این نکته لازم است که r نرخ بهره‌ی اسمی است نه نرخ بهره‌ی واقعی. فرض می‌کنیم $r > 0$. به بیان دیگر، یک سرمایه‌گذاری با نرخ بهره‌ی بدون ریسک، نباید امتیازی به وجه نقد داشته باشد. چنانچه $r < 0$ باشد، وجه نقد به جای سرمایه‌گذاری با نرخ بهره‌ی بدون ریسک ترجیح داده می‌شود. به طور کلی، ارزش یک قرارداد اختیار خرید با افزایش قیمت فعلی سهام، زمان باقی‌مانده تا سررسید، نوسان‌پذیری و نرخ بهره‌ی بدون ریسک افزایش می‌یابد و با افزایش قیمت توافقی کاهش می‌یابد. همچنین، به طور کلی، ارزش یک قرارداد اختیار فروش با افزایش قیمت توافقی، زمان باقی‌مانده تا سررسید، نوسان‌پذیری افزایش می‌یابد و با افزایش قیمت فعلی سهام و نرخ بهره‌ی بدون ریسک کاهش می‌یابد. ما می‌توانیم بدون در نظر گرفتن نوسان‌پذیری قیمت‌های سهام، ارزش قراردادهای اختیار معامله‌ی سهام را حساب کنیم.

اختیار معامله‌ی غیراستاندارد

همه‌ی انواع اختیار معامله‌های نامتعارف (غیراستاندارد) [۳۱] یکی پس از دیگری در فضایی از بازار مالی بی‌ثبات به وجود می‌آیند. قراردادهای اختیار معامله‌ی نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازدهی‌هایی را می‌دهند که محاسبه‌ی این بازدهی‌ها همچون حق اختیار معامله‌ی استاندارد، ساده و آسان نیست. برخی از این اختیارات، مجموعه‌ای ازاختیار معامله‌های خرید و فروش اروپایی و آمریکایی هستند، بقیه مقداری پیچیده‌تر هستند. چندین نوع از اختیار معامله‌های نامتعارف وجود دارند، مانند قراردادهای اختیار معامله‌ی نامتعارف آمریکایی [۳۲]، اختیار معامله‌ی آسیایی [۳۳]، اختیار معامله‌ی باتاخیر [۳۴]، اختیار معامله‌ی مرکب [۳۵]، اختیار معامله‌ی گزینشی [۳۶]، اختیار معامله‌ی مانع [۳۷]،

[۳۱] Exotic Option
[۳۲] Nonstandard American Option
[۳۳] Asian Option
[۳۴] Forward Start Option
[۳۵] Compound Option
[۳۶] Chooser Option
[۳۷] Barrier Option

اختیار معامله‌ی دوتایی [۳۸]، اختیار معامله‌ی متکی به گذشته [۳۹] و....
اختیار معامله‌ی آسیایی که به **اختیار معامله‌ی میانگین** [۴۰] نیز معروف است، برای اولین بار در سال (۱۹۸۷)، در یک شعبه از یک بانک آمریکایی در شهر توکیوی ژاپن توسط دو متخصص بانکی به نام‌های دیوید اسپاگتون [۴۱] و مارک استندیش [۴۲] برای اختیار معامله‌ی نفت خام انجام گرفت و به علت حضورشان در توکیو نام آن را اختیار معامله‌ی آسیایی نامیدند. این اختیار معامله، قراردادی است که بازدهی آن به قیمت میانگین دارایی پایه در طول مدت زمان عمر اختیار معامله بستگی دارد و دو نوع خاص از آن وجود دارد.

۱. **اختیار معامله با نرخ میانگین** [۴۳]. این اختیار معامله برای مواردی است که در آن تسویه نقدی صورت می‌گیرد و قیمت نهایی آن بر مبنای تفاوت قیمت میانگین دارایی مورد نظر در طول عمر اختیار معامله و قیمت اعمال است.

۲. **اختیار معامله با قیمت اعمال میانگین** [۴۴]. این اختیار معامله برای مواردی است که تسویه نقدی و دارایی پایه است و همانند اختیار خرید و فروش است با این تفاوت که قیمت اعمال، قیمت میانگین دارایی پایه در طول عمر اختیار معامله است.
هر دو این اختیار معامله‌ها برای اختیار خرید و فروش می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند. از نظر زمان اجرا، معمولا این اختیار معامله‌ها، اروپایی هستند، اما امکان اجرا قبل از تاریخ انقضا نیز وجود دارد و در آن صورت، میانگین‌های مورد نظر تا زمان انقضا قبل از موعد، مورد محاسبه قرار خواهد گرفت. محاسبه‌ی میانگین مورد نظر می‌تواند به صورت حسابی (عددی) و یا هندسی باشد.

ویژگی میانگین در این اختیار معامله، بی‌ثباتی ذاتی در اختیار معامله را کاهش می‌دهد، بنابراین اختیار معامله‌های آسیایی اغلب کمتر با معادل اروپایی خود مقایسه می‌شوند.
اختیارمعامله‌های آسیایی ترتیب‌های بی‌شماری دارد، مانند اختیار معامله‌های قیمت اعمال شناور و ثابت.
بازدهی اختیار معامله‌های قیمت اعمال ثابت برای یک اختیار معامله‌ی خرید و فروش، به‌ترتیب، عبارتند از

$$(\mathrm{A}(\mathrm{T})-K)^{+}$$

و

$$(K-\mathrm{A}(\mathrm{T}))^{+},$$

[۳۸] Binary Option
[۳۹] Look-Back Option
[۴۰] Average Option
[۴۱] David Spaughton
[۴۲] Mark Standish
[۴۳] Average Rate Of Option
[۴۴] Average Strike Option

به طوری‌که K قیمت اعمال و $\mathrm{A(T)}$ قیمت میانگین دارایی پایه را نمایش می‌دهند.
بازدهی اختیار معامله‌های قیمت اعمال شناور برای یک اختیار معامله‌ی خرید و فروش، به‌ترتیب، عبارتند از

$$(\mathrm{S(T)} - \mathrm{A(T)})^{+}$$

و

$$(\mathrm{A(T)} - \mathrm{S(T)})^{+},$$

به طوری‌که $\mathrm{S(T)}$ ارزش لحظه‌ای دارایی پایه می‌باشد. از نظر قیمت میانگین $\mathrm{A(T)}$، اختیار معامله‌های آسیایی می‌توانند به دو مقوله‌ی زیر دسته‌بندی شوند.

- آسیایی میانگین هندسی [۴۵]،
- آسیایی میانگین حسابی [۴۶]،

و هر دوی این فرم‌ها می‌توانند روی یک پایه‌ی میانگین وزنی [۴۷]، میانگین گرفته شوند. برای موارد پیوسته، میانگین حسابی به‌وسیله‌ی

$$\mathrm{A(T)} = \tfrac{1}{T}\int_{0}^{T} \mathrm{S(t)}dt$$

و میانگین هندسی به‌وسیله‌ی

$$\mathrm{A(T)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} \ln \mathrm{S(t)}dt}$$

محاسبه می‌شوند. برای موارد ناپیوسته، فقط به تغییر انتگرال در جمع‌بندی نیاز داریم. اختیار معامله‌های آسیایی دسته‌ی مهمی از اختیار معامله‌های وابسته مسیر است. اصالت شکل انتگرال مسیر توسط ریچارد فاینمن [۴۸] در فیزیک کوانتوم ایجاد شد، [۳۲]. نوربرت وینر [۴۹] این نوع از انتگرال را در تحقیقاتش از فرآیند براونی به کار برد [۲۷]، و جان داش اولین بار این نوع از انتگرال مسیر را در اقتصاد معرفی کرد که توسعه‌ی مطالعات تجربی‌اش با مدل بلک‑ شولز‑ مرتون [۵۰] و مدل ساختار دوره‌ای یک عاملی مقید [۵۱]، مرتبط شد. تاکنون هیچ جوابی برای نوع حسابی آن وجود ندارد، به همین خاطر، ارزیابی تحلیلی مجموع متغیرهای تصادفی لگ‑نرمال مرتبط با آن دشوار است. فاینمن [۵۲] و کلینرت [۵۳] نشان دادند که به وسیله‌ی متد انتگرال مسیر، مسئله‌ی میانگین هندسی می‌تواند با پتانسیل کارآمد حل شود، [۱۰]. در سال (۱۹۹۰) کمنا [۵۴] و ورست [۵۵] درباره‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های آسیایی حسابی

[۴۵] Geometric Average Asian
[۴۶] Arithmetic Average Asian
[۴۷] Weighted Average
[۴۸] Richard Feynman
[۴۹] Norbert Wiener
[۵۰] Black-Scholes-Merton
[۵۱] One-Factor Term Structure Constrained
[۵۲] Feynman
[۵۳] Kleinert
[۵۴] Kemna
[۵۵] Vorst

با متد ام سی ام سی [۵۶] بحث کردند و یک عبارت تحلیلی برای اختیار معامله‌های آسیایی با واسطه‌ی هندسی دارای معادله دیفرانسیل تصادفی مطرح کردند که بر این اساس، واسطه‌ی هندسی به عنوان متغیر کنترل برای به دست آوردن نتیجه رضایتبخش برای قیمت گذاری اختیار معامله‌های آسیایی با واسطه‌ی حسابی بکار بردند و فرمول ترن بال و واکمن [۵۷] را برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی میانگین حسابی تحت مورد پیوسته را معرفی کردند. بنابراین آنها یک راه‌حل تحلیلی برای این نوع اختیار معامله به‌وسیله‌ی تغییر دوره‌ی انتشار ثابت کردند. در سال (۱۹۹۵) راگرز [۵۸] و شی [۵۹] مسئله‌ی قیمت‌گذاری را با روند معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی حل کردند. به عبارت دیگر فرآیند براونی کسری به توسعه‌ی تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله برمی‌گردد. بشلیر [۶۰]، پدر تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله، ابتدا فرآیند براونی حسابی را به دینامیک مدل دارایی پایه توسعه داد. در سال (۱۹۰۰)، بلک و شولز، مدل بلک– شولز– مرتون را که در آن فرض شده که فرآیند سهام از یک فرآیند براونی هندسی پیروی می کند، معرفی کردند و به نوعی فرمول بلک– شولز [۶۱] شناخته شده را ثابت کردند. [۳۲] اما مطالعات تجربی آنها مشخص کرد که بازگشت‌های لگاریتمی [۶۲] معمولا، نرمال نیستند و ساختار وابستگی را نشان داد. به‌علاوه، آنها همچنین تصریح کردند که قیمت سهام معمولا ویژگی‌هایی نظیر دنباله‌ی دم سنگین [۶۳]، خود متشابهی و وابستگی دور برد دارد و این عدم زوجیت بین مدل و بازار را تصریح می‌کند. بنابراین مطالعات انجام گرفته، مشخص کرد که فرآیند براونی کسری می‌تواند برای مدل برخی موقعیت‌ها مانند موارد زیر استفاده شود.

- سطح آب یک رودخانه به عنوان تابعی از زمان،
- ارزش‌های توابع بازگشتی لگاریتمی سهام،
- بی‌ثباتی تجربی سهام،
- قیمت‌های الکتریسیته در یک بازار الکتریکی آزاد و موارد دیگر.

در سال (۲۰۰۸)، نکولا [۶۴] یک فرمول بلک– شولز کسری صریح به‌وسیله‌ی کاربرد انتقال فوریه تعیین کرد، [۲۲]. مندلبرات [۶۵] و تیلور [۶۶] مطرح کردند که بازار سهام باید روی یک کاراکتر از فرآیند براونی کسری باشد. سپس پیترز [۶۷] فرآیند براونی کسری را برای مدل دینامیک قیمت سهام معرفی کرد، [۹]. بعد از این دانشمندان بسیاری در این زمینه، همکاری‌های فوق‌العاده داشتند. در سال (۲۰۰۰) دانکن

[۵۶] MCMC
[۵۷] Turnbull And Wakeman Formula
[۵۸] Rogers
[۵۹] Shi
[۶۰] Bachelier
[۶۱] BS Formula
[۶۲] Log-Returns
[۶۳] Fat Tail
[۶۴] Necula
[۶۵] Mandelbrot
[۶۶] Taylor
[۶۷] Peters

و همکارانش [۶۸]، هو و اکسندال [۶۹]، فرمول بلک_ شولز کسری را با استفاده از ضرب ویک [۷۰] توسعه دادند، [۸]. و تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی سیستماتیک تحت چارچوب فرآیند براونی کسری توسط هو و همکارانش [۷۱] معرفی شده است.
دسته‌ای دیگر از اختیار معامله‌های نامتعارف، اختیار معامله‌ی توان [۷۲] می‌باشد. یک **اختیار معامله‌ی توان معمولی** ، قراردادی است که بازدهی آن، تابعی چندجمله‌ای از قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید است. تابع بازدهی اختیار خرید توان معمولی، عبارتند از

$$V_T = \max(\sum_{i=۱}^{n} a_i \mathrm{S(T)}^i - \sum_{i=۱}^{n} a_i K^i, ۰), \quad a_i \geq ۰,$$

که در آن n، عدد صحیح مثبت، $\mathrm{S(T)}$ قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید و K قیمت توافقی می‌باشد.
چند نوع اختیار معامله‌ی توان وجود دارد، که ما در این رساله، اختیار معامله‌ی توان استاندارد را در نظر می‌گیریم. اختیار معامله‌ی توان استاندارد، اختیاری است که بازدهی آن، به قیمت دارایی پایه با توانی از $n > ۰$، بستگی دارد. اگر فرض کنیم $\mathrm{S(T)}$ قیمت دارایی پایه در زمان سررسید T و K قیمت توافقی باشد، بازده‌ی اختیار خرید توان n _ام استاندارد، برابر است با

$$\max(\mathrm{S(T)}^n - K^n, ۰) = (\mathrm{S(T)}^n - K^n)^+,$$

و به همین ترتیب، بازده‌ی اختیار فروش توان n _ام استاندارد، برابر است با

$$\max(K^n - \mathrm{S(T)}^n, ۰) = (K^n - \mathrm{S(T)}^n)^+.$$

اختیار معامله‌های توان آسیایی به صورت گسترده در رشته‌هایی از سهام، جنس، انرژی و ارز خارجی به‌کار می‌روند.
بلمان و کلارک [۷۳] در سال (۲۰۰۵)، برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی توان با استفاده از روش معاوضه‌ی یک سرمایه با دیگری تحت اندازه‌ی مارتینگل برابر، تصریح کردند که قیمت اختیار خرید توان با قیمت اختیار معامله‌ی معاوضه شده‌ی توان، وقتی‌که توان سرمایه‌ی دیگری صفر است، برابر است.

۲.۲.۳ انواع معامله‌گران

عملکرد بازارهای اختیار معامله، به دلیل توانایی این بازارها در جذب تعداد زیادی از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات، به طور چشمگیری موفقیت‌آمیز بوده است. به

[۶۸] Duncan et all
[۶۹] Hu And Oksendal
[۷۰] Wick-Product
[۷۱] Hu et all
[۷۲] Power Option
[۷۳] Blenman and Clark

طوری‌که چنانچه سرمایه‌گذاری بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولا مشکلی در یافتن طرف دوم پیدا نمی‌کند. سه گروه عمده‌ی معامله‌گران به شرح زیر می‌باشد.

- **پوشش دهندگان ریسک** [۷۴] پوشش دهندگان ریسک، کسانی هستند که می‌کوشند ریسک حاصل از نوسان قیمت را به حداقل برسانند. از این نظر، پوشش دهندگان ریسک را می‌توان ''مدیران ریسک'' نیز نامید. به عبارت دیگر، پوشش دهندگان ریسک در موقعیتی هستند که در معرض ریسک مرتبط با تغییر قیمت دارایی‌اند. آنها از قراردادهای اختیار معامله برای کاهش یا حذف این ریسک استفاده می‌کنند.

- **سفته‌بازان** [۷۵] سفته‌بازی یا بورس‌بازی یک راهبرد سرمایه‌گذاری است، که مستلزم پذیرفتن ریسک بالا و انجام معامله‌های مکرر می‌باشد. سفته‌بازان به استقبال ریسک می‌روند و موقعیت‌هایی را متناسب با نوع پیش‌بینی خود درباره‌ی تغییر قیمت‌ها کسب می‌کنند. به عبارت بهتر، سفته‌بازان تمایل دارند که حرکت آتی قیمت دارایی را پیش‌بینی کنند و قراردادهای اختیار معامله برای آنها، این نوع اهرم را ایجاد می‌کند. بنابراین سود یا زیان بالقوه‌ی آنها افزایش پیدا می‌کند.

- **آربیتراژگران** [۷۶] گروه سوم و مهم معامله‌گران در بازارهای اختیار معامله، آربیتراژگران هستند. آربیتراژ عبارت است از فرصت دستیابی به سود بدون ریسک، از طریق ورود هم‌زمان در دو یا چند بازار. آربیتراژگران از مزایای تفاوت قیمت بین دو یا چند بازار مختلف برای کسب سود استفاده می‌کنند.

ملاحظه ۱۱.۲.۳. باید توجه داشت که فرصت‌های آربیتراژی نمی‌تواند برای مدت طولانی استمرار داشته باشد. به طور کلی می‌توان گفت، وجود تعداد زیادی آربیتراژگر در بازار، به این معناست که در عمل، فرصت آربیتراژی بسیار کمی در بازارهای مالی مشاهده می‌شود. به همین دلیل، بیشتر مسائلی که در خصوص ارزش قراردادهای اختیار معامله‌ها مطرح می‌شود، بر این پیش‌فرض مبتنی هستند که، فرصت‌های آربیتراژی وجود ندارد.

قضیه ۱۲.۲.۳ (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری)**.** فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و فرآیند قیمت $\{\mathrm{S}_t\}_{t\geq 0}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، بازار کامل است، اگر و تنها اگر، اندازه‌ی مارتینگلی $\mathbb{Q}$ وجود داشته باشد که S تحت اندازه‌ی $\mathbb{Q}$ مارتینگل باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱۳.۲.۳ (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری)**.** بازار کامل است، اگر و تنها اگر، اندازه مارتینگلی یکتا باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

[۷۴] Hedgers
[۷۵] Speculators
[۷۶] Arbitrageurs

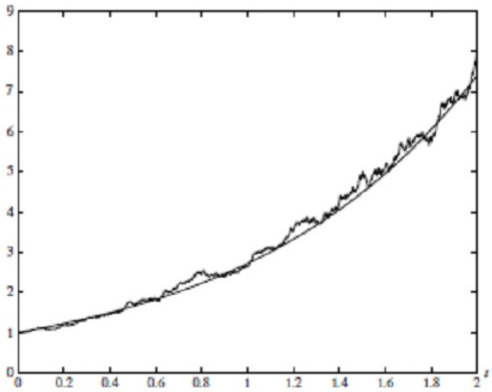
تعریف ۱۴.۲.۳. یکی از بلوک‌های اصلی مدلسازی قیمت سهام، **فرآیند براونی هندسی** [۷۷] است. معادله‌ی مذکور، در حقیقت، تعمیم طبیعی از معادله‌ی دیفرانسیل معمولی است، که به فرم زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} dX_t = \alpha X_t d_t + \sigma X_t dW_t, \\ X_\circ = x_\circ. \end{cases}$$

که معادل است با

$$X_t = x_\circ + \alpha \int_\circ^t X_s d_s + \sigma \int_\circ^t X_s dW_s.$$

در حقیقت، می‌توان فرآیند براونی هندسی را یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با ضرایب تصادفی دانست، که با یک نویز همراه است. (dW_t، همان نویز یا نوفه‌ی سفید است.) با یک شبیه‌سازی کامپیوتری، اگر قرار دهیم $0/2, x_\circ = 1$: $X_t($ به فرم زیر است.



شکل ۲.۳: فرآیند براونی هندسی با $\alpha = 1$ و $\sigma = 0/2$

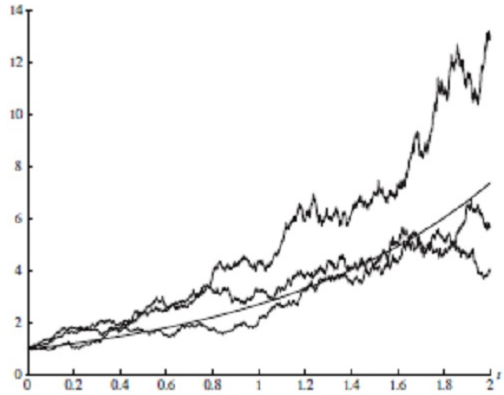
در حقیقت، مطابق شکل فوق، اگر σ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، نموار مسیر [۷۸] بسیار نزدیک به نموار $E(X_t)$، یعنی $e^{\alpha t}$، خواهد بود. ولی اگر σ بزرگ انتخاب شود، آنگاه مطابق شکل زیر، انحراف [۷۹] مسیرها از $e^{\alpha t}$ قابل چشم‌پوشی نیست. پس حدس ما این است که X_t، برای هر t، فرم نمایی دارد، یعنی، $X_t = e^{Z_t}$.

قضیه ۱۵.۲.۳. جواب معادله‌ی فرآیند براونی هندسی به فرم زیر است.

$$X_t = x_\circ e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

برهان. با توجه به نکاتی که در دو شکل قبل داده شد، می‌توان X_t، یعنی جواب معادله‌ی فرآیند براونی هندسی را یک تابع نمایی در نظر گرفت، یعنی، قرار می‌دهیم $X_t = e^{Z_t}$. در نتیجه، برای یافتن X_t،

[۷۷] Geometric Brownian Motion
[۷۸] Trajectory
[۷۹] Deviation



شکل ۳.۳: فرآیند براونی هندسی با $\alpha = ۱$ و $\sigma = ۰/۴$

باید Z_t را یافت.

$$\mathrm{X}_t = \mathrm{e}^{\mathrm{Z}_t} \Longrightarrow \mathrm{Z}_t = \ln \mathrm{X}_t,$$

از فرمول ایتو داریم

$$d\mathrm{Z}_t = \frac{۱}{\mathrm{X}_t} d\mathrm{X}_t + \frac{۱}{۲} \times -\frac{۱}{\mathrm{X}_t^۲}(d\mathrm{X}_t)^۲, \qquad (۱.۳)$$

از طرفی از تعریف فرآیند براونی هندسی داریم

$$d\mathrm{X}_t = \alpha \mathrm{X}_t dt + \sigma \mathrm{X}_t dW_t,$$

با قرار دادن (۱.۳) در فرمول فوق، خواهیم داشت

$$d\mathrm{Z}_t = \frac{۱}{\mathrm{X}_t}(\alpha \mathrm{X}_t dt + \sigma \mathrm{X}_t dW_t) - \frac{۱}{۲\mathrm{X}_t^۲}(d\mathrm{X}_t)^۲,$$

از طرفی

$$\begin{aligned}(d\mathrm{X}_t)^۲ &= (\alpha \mathrm{X}_t dt + \sigma \mathrm{X}_t dW_t)(\alpha \mathrm{X}_t dt + \sigma \mathrm{X}_t dW_t) \\ &= \sigma^۲ \mathrm{X}_t^۲ dW_t dW_t \\ &= \sigma^۲ \mathrm{X}_t^۲ dt.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$d\mathrm{Z}_t = \alpha dt + \sigma dW_t - \frac{۱}{۲}\sigma^۲ dt = (\alpha - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)dt + \sigma dW_t.$$

پس داریم

$$\mathrm{Z}_t = \ln x_۰ + \int_۰^t (\alpha - \frac{\sigma^۲}{۲})ds + \int_۰^t \sigma dW_s,$$

در نتیجه

$$\mathrm{Z}_t = \ln x_۰ + (\alpha - \frac{\sigma^۲}{۲})t + \sigma W_t,$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\mathrm{X}_t = \mathrm{e}^{\mathrm{Z}_t}$$
$$\mathrm{X}_t = \mathrm{e}^{\ln x_\circ + (\alpha - \frac{\sigma^۲}{۲})t + \sigma W_t}$$
$$= x_\circ + \mathrm{e}^{(\alpha - \frac{\sigma^۲}{۲})t + \sigma W_t}.$$

و اثبات تمام است. □

تعریف ۱۶.۲.۳ (مدل بلک ــ شولز)**.** مدل بلک ــ شولز، مدلی شامل دو دارایی است. یکی دارایی بدون ریسک و دیگری دارایی ریسکی که دینامیک آن از فرآیند براونی هندسی تبعیت می‌کند. اگر فرآیند قیمت دارایی بدون ریسک را با B_t و فرآیند قیمت دارایی ریسکی را با S_t نمایش دهیم، مدل بلک ــ شولز به صورت زیر فرموله می‌شود.

$$d\mathrm{B}_t = r\mathrm{B}_t dt, \quad \mathrm{B}_\circ = ۱,$$
$$d\mathrm{S}_t = \mu \mathrm{S}_t dt + \sigma \mathrm{S}_t dW_t.$$

که در آن r، σ و μ به ترتیب نرخ بهره، نوسان‌پذیری قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشند و W_t یک فرآیند براونی استاندارد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است.

قضیه ۱۷.۲.۳ (مسئله‌ی مقدار مرزی)**.** [۸۰] سه تابع $\mu(t, X_t)$، $\sigma(t, X_t)$ و $\phi(x)$ را در نظر می‌گیریم. در مسئله‌ی کوشی [۸۱]، هدف، یافتن تابع F ای است $(F : [\circ, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R})$ که در معادله‌ی زیر که به مسئله‌ی مقدار مرزی شهرت دارد، صدق کند.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, X) + \mu(t, X)\frac{\partial F}{\partial X}(t, X) + \frac{۱}{۲}\sigma^۲(t, X)\frac{\partial^۲ F}{\partial X^۲}(t, X) = \circ. \tag{۲.۳}$$

با شرط مرزی $F(T, x) = \phi(x)$، آنگاه معادله‌ی فوق برابر است با

$$F_t + \mu F_x + \frac{۱}{۲}\partial^۲ F_{xx} = \circ.$$

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱۸.۲.۳ (قضیه‌ی اول فاینمن ــ کاک)**.** [۸۲] فرض کنیم F در معادله‌ی (۳.۳) صدق کند(به عبارت دیگر، F جواب مسئله‌ی مقدار مرزی (۳.۳) باشد.)، اگر

$$\sigma(S, X_S)\frac{\partial F}{\partial X}(S, X_S) \in L^۲$$

باشد و داشته باشیم

$$\begin{cases} dX_s = \mu(S, X_S)ds + \sigma(S, X_S)dW_s, \\ X_t = x, \end{cases}$$

[۸۰] Boundary Value Problem
[۸۱] Couchy Problem
[۸۲] Feynman- Kac

آنگاه F، دارای نمایشی به فرم زیر است.

$$F(t, X_t) = \mathrm{E}(t,x)[\phi(X_t)].$$

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱۹.۲.۳ (قضیه‌ی دوم فاینمن_ کاک). فرض کنیم F جواب مسئله‌ی مقدار مرزی کلی‌تر زیر باشد.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0. \tag{۳.۳}$$

با شرط مرزی $F(T,x) = \phi(x)$، اگر فرآیند

$$\{\mathrm{Z}_s\}_s = \{\mathrm{e}^{-rs}\sigma(s,\mathrm{X}_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,\mathrm{X}_s)\}_s \in L^2,$$

(یعنی، برای هر s، $\mathrm{Z}_s \in L^2$.) که در آن $\{\mathrm{X}_t\}_t$، فرآیندی است که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} dX_s = \mu(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s, \\ X_t = x, \end{cases}$$

آنگاه F از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$F(T,x) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{E}_{t,x}[\phi(\mathrm{X}_T)].$$

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

۳.۳ قیمت‌گذاری مشتقات مالی

۱.۳.۳ قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی آسیایی

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم فرآیند قیمت دارایی از مدل بلک شولز پیروی کند، (نرخ بهره و نوسان‌پذیری مقادیر ثابت‌اند). اگر $h_T = h(\mathrm{S}_T)$ که در آن $h(x)$، یک تابع برای $x \in \mathbf{R}$ باشد، آنگاه $V(t) = F(t,\mathrm{S}_t)$، که در آن $0 \le t \le T$ و $\tau = T - t$، و داریم

$$F(t,x) = \mathrm{e}^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}h(x\exp\{\sigma\sqrt{\tau}y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\})dy.$$

برهان. به [۳۲] مراجعه کنید. □

قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های آسیایی میانگین حسابی، از روش‌های عددی با به‌کار بردن مدل‌های لوی محاسبه می‌شود، اما اختیار معامله‌های میانگین هندسی، می‌تواند بدون مدل‌های لوی، به صورت تحلیلی برآورد قیمت شوند. به خاطر این ویژگی آماری است که با استفاده از مفروضات تعیین می‌شود که قیمت سهام از یک توزیع لگ- نرمال پیروی می‌کند. کمنا و ورست [۱۴]، یک فرمول تحلیلی برای اختیار معامله‌های آسیایی از این نوع، به صورت زیر ثابت کردند.

لم ۲.۳.۳. برای یک اختیار معامله‌ی میانگین هندسی، بازدهی آن به صورت $(\mathrm{A}(\mathrm{T})-K)^+$ است که در آن K قیمت اعمال است و

$$\mathrm{A}(\mathrm{T})=\mathrm{e}^{\frac{۱}{T-T_۰}}\int_{T_۰}^{T}\ln \mathrm{S}(\mathrm{t})dt$$

با $[T_۰,T]$، که بازه‌ی زمانی نهایی روی ارزش میانگین سهام محاسبه شده است. $\mathrm{A}(\mathrm{T})$ یک توزیع لگ- نرمال دارد، بنابراین ارزش اختیار معامله در زمان $T_۰$ به صورت زیر است.

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}(T_۰),T_۰)=\mathrm{S}(T_۰)\mathrm{e}^{-\frac{۱}{۲}(r+\frac{۱}{۶}\sigma^۲)(T-T_۰)}\mathrm{F}_\mathrm{N}(d_۱)-K\mathrm{e}^{-r(t-t_۰)}\mathrm{F}_\mathrm{N}(d_۲),$$

که در آن،

$$d_۱=-\frac{\ln\frac{\mathrm{S}(T_۰)}{K}+\frac{۱}{۲}(r+\frac{۱}{۶}\sigma^۲)(T-T_۰)}{\sigma\sqrt{\frac{۱}{۳}(T-T_۰)}},$$

و

$$d_۲=d_۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\sigma\sqrt{T-T_۰}.$$

برهان. ابتدا جواب معادله‌ی فرآیند براونی هندسی زیر را به دست می‌آوریم.

$$d\mathrm{S}_t=\begin{cases}\alpha s(t)dt+\sigma s(t)dW_t\\ \mathrm{S}(۰)=s_۰.\end{cases}$$

همان‌طور که قبلا بیان کردیم، می‌توان جواب فرآیند براونی هندسی را یک تابع نمایی به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\mathrm{S}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{Z}(t)},$$

در نتیجه، برای یافتن $\mathrm{S}(t)$ باید $\mathrm{Z}(t)$ را بیابیم.

$$\mathrm{Z}(t)=\ln\mathrm{S}(t)$$

از فرمول ایتو داریم

$$\begin{aligned}d\mathrm{Z}(t)&=\tfrac{۱}{\mathrm{S}(t)}d\mathrm{S}(t)+(\tfrac{۱}{۲})(-\tfrac{۱}{\mathrm{S}(t)}^{۲})(d\mathrm{S}(t))^۲\\&=\tfrac{۱}{\mathrm{S}(t)}(\alpha\mathrm{S}(t)dt+\sigma\mathrm{S}(tdW_t)\\&=[\alpha-\tfrac{۱}{۲}\sigma^۲]dt+\sigma dW_t\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}(t) &= \ln \mathrm{S}(\circ) + \int_{\circ}^{t} (\alpha - \tfrac{۱}{۲}\sigma^{۲}) ds + \int_{\circ}^{t} \sigma dW_s \\
&= \ln \mathrm{S}(\circ) + (\alpha - \tfrac{۱}{۲}\sigma^{۲})t + \sigma W_t
\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{Z}(t)} \\
&= \mathrm{e}^{\ln \mathrm{S}(t) + (\alpha - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})t + \sigma W_t} \\
&= \mathrm{S}(\circ) + (\alpha - \tfrac{۱}{۲}\sigma^{۲})t + \sigma W_t
\end{aligned}$$

از طرفی طبق قضیه‌ی فاینمن ـ کاک داریم

$$\mathrm{F}(t,s) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}_{t,s}[\phi(\mathrm{S}(T))] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathrm{S}\mathrm{e}^{\mathrm{Z}}) f(\mathrm{Z}) d\mathrm{Z},$$

که در آن $f(\mathrm{Z})$، تابع چگالی Z است که توزیع زیر را دارد.

$$\mathrm{N}[(r - \tfrac{\sigma^{۲}}{۲})(T-t), \sigma\sqrt{T-t}]$$

اگر بازدهی، اختیار خرید آسیایی میانگین هندسی باشد، داریم

$$\Phi(\mathrm{S}_T) = max[A(T) - K, \circ]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}_{t,s}[\Phi(\mathrm{S}_T)] &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}_{t,s}[max[A(T) - K, \circ]] \\
&= \circ \times \mathbb{Q}(A(T) \leq A) + \int_{\ln \frac{K}{\mathrm{S}}}^{\infty} (A(T) - K) f(\mathrm{Z}) d\mathrm{Z} \\
&= \int_{\ln \frac{K}{\mathrm{S}}}^{\infty} (A(T) - K) \mathrm{e}^{-\dfrac{(\mathrm{Z} - (r - \frac{\sigma^{۲}}{۲})(T-t))^{۲}}{۲(\sigma\sqrt{T-t})}} d\mathrm{Z} \\
&= \mathrm{S}\mathrm{N}(d_{۱}(t,s)) - \mathrm{e}^{-r(T-t)} K \mathrm{N}(d_{۲}(t,s)).
\end{aligned}$$

که در آن داریم

$$d_{۱} = \tfrac{۱}{\sigma\sqrt{T-t}}\{\ln(\tfrac{\mathrm{S}}{K}) + (r + \tfrac{۱}{۲}\sigma^{۲})(T-t)\},$$

و

$$d_{۲} = d_{۱}(s,t) - \sigma\sqrt{T-t}.$$

□

در چارچوب فرآیند براونی کسری، سهام، همان دارایی پایه فرض می‌شود و برای سادگی، به‌وسیله‌ی $\mathrm{S}(t)$ نمایش داده می‌شود. بنابراین، فرآیند قیمت می‌تواند به‌وسیله‌ی معادله دیفرانسیل جزئی زیر مدل شود.

$$d\mathrm{S}(t) = \mu\mathrm{S}(t)dt + \sigma\mathrm{S}(t)d\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t)$$

به عبارت دیگر،

$$\frac{d\mathrm{S}(t)}{\mathrm{S}(t)} = \mu dt + \sigma d\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t). \qquad (۴.۳)$$

که در آن $\mathrm{S}(t)$ قیمت آنی (لحظه‌ای) از دارایی پایه در زمان t است و μ و σ هر دو ثابت هستند و $\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t)$ فرآیند براونی کسری استاندارد است. هو و اکسندال در سال (۲۰۰۰) نشان دادند که بازار بلک- شولز کسری که قیمت دارایی پایه‌اش از معادله‌ی فوق پیروی می‌کند، آربیتراژ ندارد و کامل است. [۳۷]. تحت احتمال ریسک خنثی، معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی فوق به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$d\mathrm{S}(t) = r\mathrm{S}(t)dt + \sigma\mathrm{S}(t)d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t),$$

به عبارت دیگر،

$$\frac{d\mathrm{S}(t)}{\mathrm{S}(t)} = rdt + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t). \qquad (۵.۳)$$

که در آن r نرخ بهره‌ی بدون ریسک و $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)$ فرآیند براونی کسری تحت اندازه‌ی جدید است.
برای یک اختیار معامله‌ی اروپایی، معادله‌ی دیفرانسیل جزئی فرآیند قیمت را به‌دست می‌آوریم. با توجه به دینامیک (۵.۳) قرار می‌دهیم

$$V = \mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\mathrm{C}.$$

با استفاده از فرمول ایتوی کسری داریم

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{S}} r\mathrm{S}(t) + \mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\frac{\partial^{۲} V}{\partial \mathrm{S}^{۲}}\sigma^{۲} S^{۲}(t)\right]dt + \sigma\mathrm{S}(t)\frac{\partial V}{\partial \mathrm{S}}d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt = \frac{\partial[\mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\mathrm{C}]}{\partial t} = -r\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}dt + \mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial t}dt,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathrm{S}}dt = \mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}}dt,$$

$$\frac{\partial^{۲} V}{\partial \mathrm{S}^{۲}}dt = \mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\frac{\partial^{۲} \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}^{۲}}dt.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} dV = \Big[-r\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du} + \mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial t} + \mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du} r\mathrm{S}(t)\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}} \\ + \mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲}\mathrm{S}^{۲}(t)\mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\frac{\partial^{۲} \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}^{۲}}\Big]dt + \sigma\mathrm{S}(t)\mathrm{e}^{-\int_{۰}^{t} r_u du}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}}d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت

$$\big[-r\mathrm{C}+\mathrm{e}^{-\int_{\circ}^{t} r_u du}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial t}+r\mathrm{S}(t)\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}}+\mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲}\mathrm{S}^{۲}(t)\frac{\partial^{۲}\mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}^{۲}}\big]\mathrm{e}^{-\int_{\circ}^{t} r_u du}=\circ.$$

بنابراین، برای یک اختیار معامله‌ی خرید اروپایی، فرآیند قیمت آن یعنی $\mathrm{C}(\mathrm{S}(t),t)$، در معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر صدق می‌کند.

$$-r\mathrm{C}+\mathrm{e}^{-\int_{\circ}^{t} r_u du}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial t}+r\mathrm{S}(t)\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}}+\mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲}\mathrm{S}^{۲}(t)\frac{\partial^{۲}\mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}^{۲}}=\circ.$$

با حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی فوق، فرمول قیمت‌گذاری زیر به دست می‌آید، [۳۲].

قضیه ۳.۳.۳. برای هر $t\in[\circ,T]$، قیمت اختیار معامله‌ی خرید اروپایی با قیمت توافقی k و سررسید T، به صورت زیر است.

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}(\circ),\circ)=\mathrm{S}(\circ)\mathrm{F_N}(d_۱)-K\mathrm{F_N}(d_۲)$$

که در آن $\mathrm{F_N}(\circ)$، تابع توزیع تجمعی از توزیع نرمال با

$$d_۱=\frac{\ln(\frac{K}{\mathrm{S}})+rT+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}}{\sigma},$$

و

$$d_۲=d_۱-\sigma T^{\mathrm{H}}=\frac{\ln(\frac{K}{\mathrm{S}})+rT-\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}}{\sigma}$$

می‌باشد.

برهان. از قضیه‌ی فاینمن_ کاک داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(\mathrm{S}(t),t)&=\mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-r(T-t)}max(\mathrm{S}(t)-K,\circ)]\\&=\mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{S}(t)\chi_{\{\mathrm{S}(t)>K\}}]-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t[\chi_{\{\mathrm{S}(t)>K\}}],\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}\{\mathrm{S}(t)>K\}&=\{\mathrm{S}(\circ)\exp\{rT-\tfrac{۱}{۲}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}+\sigma\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)\}>K\}\\&=\{\ln\mathrm{S}(\circ)(+rT-\tfrac{۱}{۲}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}+\sigma\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t))>\ln K\}\\&=\{\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)>\frac{\ln(\frac{K}{\mathrm{S}})-rT+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}}{\sigma}\}\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم

$$d_۲^{*}=\frac{\ln(\frac{K}{\mathrm{S}})-rT+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}}{\sigma},$$

داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t[\chi_{\{\mathrm{S}(t)>K\}}] &= \mathrm{E}_t[\chi_{x>d_۲^*}(\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t))]\\ &= \int_{d_۲^*}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi(T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}})}} \exp\big(-\frac{(x-\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t))^۲}{۲(T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}})}\big)dx\\ &= \int_{\frac{d_۲^*-\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)}{\sqrt{T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}}}}}^{\infty} \tfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp(-\tfrac{\mathrm{Z}^۲}{۲})dZ\\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)-d_۲^*}{\sqrt{T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}}}}} \tfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp(-\tfrac{\mathrm{Z}^۲}{۲})dZ\\ &= \mathrm{N}(d_۲).\end{aligned}$$

داریم

$$\mathrm{B}_{\mathrm{H}}^*(t) = \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) - \int_۰^t ۲\mathrm{H}\sigma^{۲\mathrm{H}-۱}dt = \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) - \sigma t^{۲\mathrm{H}};\, ۰ \le t \le T.$$

بنابر قضیه‌ی گیرسانو، یک اندازه‌ی P^* وجود دارد که این فرآیند، یک فرآیند براونی تحت اندازه‌ی جدید P^* است. برای سادگی، نمایش می‌دهیم $\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}} = \mathrm{Z}(t) = \exp(\sigma\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) - \frac{\sigma^۲}{۲}t^{۲\mathrm{H}})$. داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t[\mathrm{S}(t)\chi_{\{\mathrm{S}(t)>K\}}] &= \mathrm{e}^{rT}\mathrm{E}_t[\mathrm{Z}(T)۱_{\{x>d_۲^*\}}\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t)]\\ &= \mathrm{e}^{rT}\mathrm{Z}(t)\mathrm{E}_t^*[۱_{\{x>d_۲^*\}}\mathrm{B}_{\mathrm{H}}(t)]\\ &= \mathrm{e}^{rT}\mathrm{Z}(t)\mathrm{E}_t^*[۱_{\mathrm{S}(t)>K}].\end{aligned}$$

اما،

$$\ln(\mathrm{S}(T)) = \ln(\mathrm{S}) + rT - \tfrac{\sigma^۲}{۲}\mathrm{T}^{۲\mathrm{H}} + \sigma\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(T) = \ln(\mathrm{S}) + rT + \tfrac{\sigma^۲}{۲}\mathrm{T}^{۲\mathrm{H}} + \sigma\mathrm{B}_{\mathrm{H}}^*(T).$$

قرار می‌دهیم

$$d_۱^* = \frac{\ln(\frac{K}{\mathrm{S}}) - rT - \frac{۱}{۲}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}}{\sigma}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t^*[\chi_{\{\mathrm{S}(t)>K\}}] &= \mathrm{E}^*[\chi_{\{x>d_۱^*\}}\mathrm{B^*}_{\mathrm{H}}(t)]\\ &= \int_{d_۱^*}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi(T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}})}} \exp\big(-\frac{(x-\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t))^۲}{۲(T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}})}\big)dx\\ &= \int_{\frac{d_۱^*-\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)}{\sqrt{T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}}}}}^{\infty} \tfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp(-\tfrac{\mathrm{Z}^۲}{۲})dZ\\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)-d_۱^*}{\sqrt{T^{۲\mathrm{H}}-t^{۲\mathrm{H}}}}} \tfrac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp(-\tfrac{\mathrm{Z}^۲}{۲})dZ\\ &= \mathrm{N}(d_۱).\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}_t[\mathrm{S}(t)1_{\{\mathrm{S}(t)>K\}}] = \mathrm{e}^{rT}\mathrm{Z}(t)\mathrm{N}(d_1) = \mathrm{e}^{rT}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{S}(t)\mathrm{N}(d_1).$$

بنابراین قیمت اختیار معامله‌ی خرید اروپایی به‌دست می‌آید و اثبات تمام می‌شود. □

بیگینی و اکسندال و ... مدل را با استفاده از فرضیاتی که نرخ بهره‌ی بدون ریسک و نرخ سود سهام، توابع غیرتصادفی هستند، توسعه دادند. بنابراین، فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت چارچوب فرآیند براونی کسری به صورت زیر است.

لم ۴.۳.۳. فرض کنیم که قیمت دینامیک دارایی پایه تحت اندازه‌ی ریسک خنثی از معادله‌ی دیفرانسیل جزئی (۵.۳) پیروی می‌کند. اگر نرخ بهره‌ی بدون ریسک $r(t)$ و نرخ سود سهام $q(t)$ توابع غیرتصادفی باشند و تابع بازدهی آن در سررسید، $f(\mathrm{S}(t),t)$، کراندار باشد، قیمت اختیار معامله‌ی اروپایی $V(\mathrm{S}(t),t)$ در معادله‌ی زیر صدق می‌کند.

$$V(\mathrm{S}(t),t) = \mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)ds}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}f\left(\mathrm{S}(t)\mathrm{e}^{\int_t^T[r(s)-q(s)]ds-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2\mathrm{H}}-t^{2\mathrm{H}})+\sigma\sqrt{T^{2\mathrm{H}}-t^{2\mathrm{H}}}}\right)dx.$$

برهان. به [۳] رجوع کنید. □

برای یک اختیار معامله‌ی خرید توان اروپایی، دو نوع تابع بازدهی وجود دارد.

$$f(\mathrm{S}(t),t) = \begin{cases} (\mathrm{S}^n(T),K)^+ & \mathrm{S}^n(T) > K \\ (\mathrm{S}^n(T),K)^+ & \mathrm{S}(T) > K \end{cases}$$

که در آن n یک عدد مثبت است. در سال (۲۰۰۵) وانگ و همکارانش [۸۳] یک فرمول صریح برای اختیار معامله‌های اروپایی ثابت کردند.

زیائو و همکارانش [۸۴] برخی ویژگی‌های اختیار معامله‌های توان تحت چارچوب فرآیند براونی کسری را بررسی کردند، [۲۸]. در سال (۲۰۰۶)، وانگ و همکارانش مدل اختیار معامله‌های توان آسیایی هندسی را تعمیم دادند و مورد پیوسته‌ی آن را حل کردند. در این رساله، دارایی پایه را تحت یک فرآیند براونی کسری توسعه می‌دهیم. ژو [۸۵] و ژئو [۸۶] [۳۰] اختیار معامله‌های توان آسیایی تحت چارچوب فرآیند براونی کسری را در نظر گرفتند و فرمول قیمت‌گذاری خرید و فروش آن را به‌خوبی ارائه کردند. در این رساله، اختیار معامله‌های توان آسیایی را تحت چارچوب فرآیندبراونی کسری در نظر می‌گیریم.به ترتیب، برای یک اختیار معامله‌ی خرید توان آسیایی با قیمت اعمال ثابت K و سررسید T، دو نوع تابع بازدهی زیر وجود دارد.

$$f(\mathrm{A}(t),t) = \begin{cases} (\mathrm{A}^n(T),K)^+ & \mathrm{A}^n(T) > K, \\ (\mathrm{A}^n(T),K)^+ & \mathrm{A}(T) > K. \end{cases}$$

[۸۳] Y. Wang et al.
[۸۴] Y. Xiao et al.
[۸۵] Zhao
[۸۶] Zhou

که در آن $\mathrm{A}(t)$، به صورت

$$\mathrm{A(T)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{T}} \int_{0}^{T} \ln \mathrm{S(t)} dt$$

تعریف شده است.

۲.۳.۳ مدل قیمت‌گذاری

فرضیات کلی

فرضیات کلی در این مدل به صورت زیر است.

۱. دینامیک دارایی پایه از فرآیند براونی کسری پیروی می‌کند.

۲. نرخ بهره‌ی بدون ریسک، $r(t)$، تابع غیرتصادفی است.

۳. هیچ هزینه معاملاتی یا مالیات در خرید و فروش سهام، اختیار معامله‌ها وجود ندارد؛ یعنی، بازار بی‌اصطحکاک است.

۴. سود سهام روی دارایی پایه در طول عمر اختیار معامله با نرخ $q(t)$ پرداخت می‌شود.

۵. اختیار معامله فقط می‌تواند در تاریخ سررسید اعمال می‌شود.

۶. بازار آربیتراژ نمی‌پذیرد.

۳.۳.۳ چارچوب قیمت‌گذاری با نرخ بهره‌ی ثابت و نرخ سود سهام ثابت

قبل از اینکه به مورد نرخ بهره‌ی بدون ریسک غیرتصادفی بپردازیم، ابتدا موردی که نرخ بهره‌ی بدون ریسک و نرخ سود سهام، هر دو ثابت باشند را در نظر می‌گیریم. برای سادگی، فرض می‌کنیم $t = 0$ باشد. تحت فرضیات بالا، دینامیک‌های فرآیند قیمت سهام (۵.۳) تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی از فرمول زیر تبعیت می‌کند.

$$\frac{d\mathrm{S}(t)}{\mathrm{S}(t)} = (r-q)dt + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) \qquad (۶.۳)$$

که در آن r و q، به ترتیب، نرخ بهره‌ی بدون ریسک و نرخ سود سهام هستند و $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)$ فرآیند براونی کسری تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی است. پس، فرآیند قیمت سهام به فرم زیر خواهد بود.

$$\mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{\left((r-q)t - \frac{1}{2}\sigma^{2}t^{2\mathrm{H}} + \sigma\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)\right)}.$$

برهان. فرض می‌کنیم دینامیک فرآیند قیمت سهام از (۶.۳) پیروی کند. مشابه روند قبل، تابع نمایی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathrm{S}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{Z}(t)}$$

در نتیجه، برای یافتن $\mathrm{S}(t)$ باید $\mathrm{Z}(t)$ را بیابیم.

$$\mathrm{Z}(t) = \ln \mathrm{S}(t)$$

با استفاده از فرمول ایتوی کسری داریم

$$d\mathrm{Z}(t) = \big[\tfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t} + \tfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{S}}(r-q)\mathrm{S}(t) + \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}\tfrac{\partial^2 \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2\mathrm{S}^2(t)\big]dt + \sigma\mathrm{S}(t)\tfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{S}}d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}.$$

پس،

$$d\mathrm{Z}(t) = \big[\tfrac{1}{\mathrm{S}(t)}(r-q)\mathrm{S}(t) + \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}(-\tfrac{1}{\mathrm{S}^2(t)})\sigma^2\mathrm{S}^2(t)\big]dt + \sigma\mathrm{S}(t)\tfrac{1}{\mathrm{S}(t)}d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}.$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}(t) &= \ln \mathrm{S}(0) + \int_0^t ((r-q) - \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\\ &= \ln \mathrm{S}(0) + (r-q)t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^{2\mathrm{H}} + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\mathrm{H}\int_0^t t^{2\mathrm{H}-1}\sigma^2 ds = \mathrm{H}(\tfrac{1}{2\mathrm{H}-1+1})t^{2\mathrm{H}-1+1}\sigma^2|_0^t = \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^{2\mathrm{H}},$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(t) &= \mathrm{e}^{\ln \mathrm{S}(0) + (r-q)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2\mathrm{H}} + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}}\\ &= \mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{(r-q)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2\mathrm{H}} + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}}.\end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی امید ریاضی $\mathrm{S}(t)$ به طریق زیر عمل می‌کنیم. در نظر می‌گیریم

$$\mathrm{Z}(t) = \ln \mathrm{S}(t)$$

پس

$$\mathrm{Z}(t) = \ln \mathrm{S}(0) + \int_0^t ((r-q) - \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}$$

از طرفین تساوی فوق، امید ریاضی می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{Z}(t)] &= \mathrm{E}[\ln \mathrm{S}(0) + \int_0^t ((r-q) - \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}]\\ &= \mathrm{E}[\ln \mathrm{S}(0)] + \mathrm{E}[\int_0^t ((r-q) - \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}\sigma^2)ds] + \mathrm{E}[\int_0^t \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}]\\ &= \ln \mathrm{S}(0) + (r-q)t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^{2\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

□

قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی آسیایی هندسی

در این بخش، ابتدا جوابی برای اختیار معامله‌های آسیایی هندسی با قیمت اعمال ثابت به‌دست می‌آوریم. در این راستا، قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنیم دینامیک دارایی پایه تحت اندازه‌ی ریسک خنثی از (۶.۳) پیروی کند. اگر نرخ بهره‌ی بدون ریسک $r(t)$ و نرخ سود سهام $q(t)$، ثابت باشند، اختیار معامله‌ی خرید آسیایی هندسی در زمان $t=\circ$ به صورت زیر قیمت‌گذاری می‌شود.

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}(\circ),T)=\mathrm{S}(\circ)\mathrm{e}^{-\frac{۱}{۲}(r+q)T-\frac{۱}{۴(۲\mathrm{H}+۱)(\mathrm{H}+۱)}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}}\mathrm{F}_{\mathrm{N}}(d_{۱})-K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{F}_{\mathrm{N}}(d_{۲})$$

که در آن

$$d_{۲}=\frac{\ln\frac{\mathrm{S}(\circ)}{K}+\frac{۱}{۲}(r-q)T-\frac{۱}{۲(۲\mathrm{H}+۱)}\sigma^{۲}T^{۲}\mathrm{H}}{\frac{\sigma T^{\mathrm{H}}}{\sqrt{۲(\mathrm{H}+۱)}}}$$

و

$$d_{۱}=d_{۲}+\frac{\sigma T^{\mathrm{H}}}{\sqrt{۲(\mathrm{H}+۱)}}.$$

برهان. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{G}(\mathrm{T})=\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T}\ln\mathrm{S}(\mathrm{t})dt$$

و

$$\mathrm{A}(\mathrm{T})=\exp(\mathrm{G}(\mathrm{T})).$$

از تعریف، $\mathrm{G}(\mathrm{T})$ یک توزیع نرمال با میانگین $\tilde{\mu}$ و واریانس $\tilde{\sigma}^{۲}$ دارد، که به صراحت در زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}&=\tilde{\mathrm{E}}[\mathrm{G}(\mathrm{T})]=\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T}\tilde{\mathrm{E}}\big[\ln\mathrm{S}(\mathrm{t})\big]dt\\
&=\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T}\tilde{\mathrm{E}}\big[\ln\mathrm{S}(\circ)+\int_{\circ}^{t}((r-q)-\mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲})ds+\int_{\circ}^{t}\sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\big]dt\\
&=\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T}\tilde{\mathrm{E}}\big[\ln\mathrm{S}(\circ)+(r-q)t-\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}t^{۲\mathrm{H}}+\int_{\circ}^{t}\sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\big]dt\\
&=\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T}\ln\mathrm{S}(\circ)dt+\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T}(r-q)tdt-\frac{۱}{۲T}\int_{\circ}^{T}t^{۲\mathrm{H}}\sigma^{۲}dt+\circ\\
&=\frac{۱}{T}(\ln\mathrm{S}(\circ)|_{\circ}^{T})+\frac{۱}{T}\big((r-q)\frac{t^{۲}}{۲}|_{\circ}^{T}\big)-\frac{۱}{۲T}\big(\frac{\sigma^{۲}t^{۲\mathrm{H}+۱}}{۲\mathrm{H}+۱}|_{\circ}^{T}\big)\\
&=\ln\mathrm{S}(\circ)+\frac{T}{۲}(r-q)\frac{T^{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲T}(\frac{\sigma^{۲}t^{۲\mathrm{H}+۱}}{۲\mathrm{H}+۱})\\
&=\ln\mathrm{S}(\circ)+\frac{T}{۲}(r-q)-\frac{۱}{۲}(\frac{\sigma^{۲}t^{۲\mathrm{H}+۱}}{۲\mathrm{H}+۱}).
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{2} &= \mathrm{Var}[\mathrm{G(T)}] = \tilde{\mathrm{E}}\big[\mathrm{G(T)} - \tilde{\mu}\big]^{2} = \tilde{\mathrm{E}}\big[\tfrac{1}{T}\int_{0}^{T} \ln \mathrm{S(t)} dt\big]^{2} \\
&= \tilde{\mathrm{E}}\big[(\mathrm{G(T)} - \tilde{\mu})(\mathrm{G(T)} - \tilde{\mu})\big] \\
&= \tfrac{1}{T^{2}} \int_{0}^{T}\int_{0}^{T} \sigma^{2} \tilde{\mathrm{E}}\big[\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(\tau)\big] dt d\tau \\
&= \tfrac{1}{2T^{2}} \int_{0}^{T}\int_{0}^{T} \sigma^{2}\big(|t|^{2\mathrm{H}} + |s|^{2\mathrm{H}} - |t-s|^{2\mathrm{H}}\big) dt d\tau \\
&= \tfrac{1}{2(\mathrm{H}+1)} \sigma^{2} T^{2\mathrm{H}}.
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathrm{E}}[.]$ امید ریاضی تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی را نمایش می‌دهد. بنابراین، ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\mathrm{A(T)}$ توزیع لگ- نرمال دارد، به عبارت دیگر

$$\ln \mathrm{A(T)} = \mathrm{G(T)} \sim \mathrm{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^{2}).$$

برای یک اختیار معامله‌ی آسیایی هندسی، بازدهی آن در زمان سررسید عبارتند از

$$(\mathrm{A(T)} - K)^{+} = \big(\exp(\mathrm{G(T)}) - K\big).$$

پس، تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی، ارزش اختیار معامله‌ی خرید برابر است با

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}(0), T) = \mathrm{e}^{-rT} \tilde{\mathrm{E}}\big[\big(\mathrm{A(T)} - K\big)^{+}\big] = \mathrm{e}^{-rT} \int_{D} (\mathrm{e}^{x} - K) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\tilde{\mu})^{2}}{2\tilde{\sigma}^{2}}} dx$$

که در آن $\mathrm{D} = \{x : \mathrm{A(T)} > K\} = \{x : \mathrm{e}^{x} > K\}$، و محاسبات ساده نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(\mathrm{S}(0), T) &= \mathrm{e}^{-rT} \int_{D} \big(\mathrm{e}^{\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}y} - K\big) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^{2}}{2}} dy \\
&= \mathrm{e}^{-rT+\tilde{\mu}+\frac{\tilde{\sigma}^{2}}{2}} \int_{-d_{2}}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\tilde{\sigma})^{2}}{2}} dy - K\mathrm{e}^{-rT} \int_{-d_{2}}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^{2}}{2}} dy \\
&= \mathrm{e}^{-rT+\tilde{\mu}+\frac{\tilde{\sigma}^{2}}{2}} \int_{-d_{2}-\tilde{\sigma}}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^{2}}{2}} dy - K\mathrm{e}^{-rT} \mathrm{F_N}(d_{2}) \\
&= \mathrm{S}(0) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(r+q)T - \frac{1}{2(2\mathrm{H}+1)}\sigma^{2}T^{2\mathrm{H}} + \frac{1}{4(\mathrm{H}+1)}\sigma^{2}T^{2\mathrm{H}}} \mathrm{F_N}(d_{1}) - K\mathrm{e}^{-rT} \mathrm{F_N}(d_{2}) \\
&= \mathrm{S}(0) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(r+q)T - \frac{1}{4(2\mathrm{H}+1)(\mathrm{H}+1)}\sigma^{2}T^{2\mathrm{H}}} \mathrm{F_N}(d_{1}) - K\mathrm{e}^{-rT} \mathrm{F_N}(d_{2})
\end{aligned}$$

که در آن داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= \{x:\ \mathrm{A(T)} > K\} = \{y:\ \mathrm{e}^{\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}y} > K\} \\
&= \{y : \tilde{\mu} + \tilde{\sigma} y > \ln K\} \\
&= \{y:\ y > \tfrac{\ln K - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\} \\
&= \left\{y:\ y > -\frac{\ln K + \ln \mathrm{S}(0) + \frac{1}{2}(r-q)T - \frac{\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}}{2(2\mathrm{H}+1)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}}{2(\mathrm{H}+1)}}}\right\} \\
&= \left\{y:\ y > -\frac{\ln \frac{\mathrm{S}(0)}{K} + \frac{1}{2}(r-q)T - \frac{\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}}{2(2\mathrm{H}+1)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}}{2(\mathrm{H}+1)}}}\right\}.
\end{aligned}$$

و در آن d_1 و d_2 به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$d_2 = \frac{\ln \frac{\mathrm{S}(0)}{K}}{+} \tfrac{1}{2}(r-q)T - \tfrac{1}{2(2\mathrm{H}+1)}\sigma^2 T^{2\mathrm{H}} \frac{\sigma T^{\mathrm{H}}}{\sqrt{2(\mathrm{H}+1)}} \qquad (۷.۳)$$

و

$$d_1 = d_2 + \frac{\sigma T^{\mathrm{H}}}{\sqrt{2(\mathrm{H}+1)}}. \qquad (۸.۳)$$

اثبات تمام شد. □

همچنین، با روش مشابه، می‌توانیم محاسبه کنیم که تحت چارچوب فرآیند براونی کسری، قیمت یک اختیار معامله‌ی فروش آسیایی هندسی به صورت زیر است.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}(0), T) = K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{F_N}(-d_2) - \mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(r+q)T - \frac{1}{4(2\mathrm{H}+1)(\mathrm{H}+1)}\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}}\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}\mathrm{F_N}(-d_1),$$

که در آن d_1 و d_2 به صورت (۷.۳) و (۸.۳) تعریف شده‌اند.

قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی توان آسیایی هندسی

در ادامه، ما این اختیار معامله‌ها را به اختیار معامله‌های توان آسیایی هندسی گسترش می‌دهیم و نتیجه‌ی زیر را تعیین می‌کنیم.

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید که دینامیک دارایی پایه تحت احتمال ریسک خنثی از (۵.۳) پیروی می‌کند. اگر نرخ بهره‌ی بدون ریسک $r(t)$ و نرخ سود سهام $q(t)$، ثابت باشند و تابع عایدی در سررسید داده شده در

$$f(\mathrm{A}(t), t) = (\mathrm{A}^n(T), K)^+ : \quad \mathrm{A}^n(T) > K$$

صدق کند، قیمت یک اختیار معامله‌ی خرید توان آسیایی هندسی در زمان $t = 0$، $\mathrm{C}(\mathrm{S}(0), T)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}(0), T) = \mathrm{S}^n(0)\mathrm{e}^{-rT + \frac{n}{2}(r-q)T - \frac{n}{2(2\mathrm{H}+1)}\sigma^2 T^{2\mathrm{H}} + \frac{n^2}{4(\mathrm{H}+1)}\sigma^2 T^{2\mathrm{H}}}\mathrm{F_N}(D_1) - K\mathrm{e}^{-rT}\mathrm{F_N}(D_2)$$

که در آن

$$D_۲ = \frac{\ln \frac{S(۰)}{\sqrt[n]{K}} + \frac{۱}{۲}(r-q)T - \frac{۱}{۲(۲H+۱)}\sigma^۲ T^{۲H}}{\frac{\sigma T^H}{\sqrt{۲(H+۱)}}}$$

و

$$D_۱ = D_۲ + \frac{n\sigma T^H}{\sqrt{۲(H+۱)}}.$$

برهان. برای اختیار معامله‌ی بحث شده در قضیه‌ی فوق، بازدهی آن در زمان سررسید عبارتند از

$$f(A(t),t) = (A^n(T),K)^+ = (\exp(nG(t)) - K)^+$$

بر پایه‌ی قضیه‌ی قبل، داریم

$$\begin{aligned}
C(S(۰),T) &= e^{-rT}\int_{\acute{D}} \left(e^{n(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}y)} - K\right)\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{y^۲}{۲}}dy \\
&= e^{-rT+n\tilde{\mu}}\int_{-D_۲}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{n\tilde{\sigma}y-\frac{y^۲}{۲}}dy - Ke^{-rT}\int_{-D_۲}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{y^۲}{۲}}dy \\
&= e^{-rT+n\tilde{\mu}+\frac{n\tilde{\sigma}^۲}{۲}}\int_{-D_۲}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(y-n\tilde{\sigma})^۲}{۲}}dy - Ke^{-rT}F_N(D_۲) \\
&= e^{-rT+n\tilde{\mu}+\frac{n\tilde{\sigma}^۲}{۲}}F_N(D_۱) - Ke^{-rT}F_N(D_۲) \\
&= S^n(۰)e^{-rT+\frac{n}{۲}(r-q)T-\frac{n}{۲(۲H+۱)}\sigma^۲T^{۲H}+\frac{n^۲}{۴(H+۱)}\sigma^۲T^{۲H}}F_N(D_۱) - Ke^{-rT}F_N(D_۲)
\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\acute{D} = \{x : A^n(T) > K\} &= \{y :\ e^{n\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}y} > K\} \\
&= \{y : \tilde{\mu}+\tilde{\sigma}y > \ln\sqrt[n]{K}\} \\
&= \{y :\ y > \tfrac{\ln\sqrt[n]{K}-\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\} \\
&= \left\{y :\ y > -\frac{\ln\sqrt[n]{K} + \ln S(۰) + \frac{۱}{۲}(r-q)T - \frac{\sigma^۲T^{۲H}}{۲(۲H+۱)}}{\sqrt{\frac{\sigma^۲T^{۲H}}{۲(H+۱)}}}\right\} \\
&= \left\{y :\ y > -\frac{\ln\frac{S(۰)}{\sqrt[n]{K}} + \frac{۱}{۲}(r-q)T - \frac{\sigma^۲T^{۲H}}{۲(۲H+۱)}}{\sqrt{\frac{\sigma^۲T^{۲H}}{۲(H+۱)}}}\right\}.
\end{aligned}$$

که در آن $D_۱$ و $D_۲$ به صورت (۷.۳) و (۸.۳) تعریف شده‌اند و اثبات تمام شد. □

بنابراین، روند مشابه قیمت اختیار معامله‌ی فروش متناظر به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$C(S(۰),T) = Ke^{-rT}F_N(-D_۲) - S^n(۰)e^{-rT+\frac{n}{۲}(r-q)T-\frac{n}{۲(۲H+۱)}\sigma^۲T^{۲H}+\frac{n^۲}{۴(H+۱)}\sigma^۲T^{۲H}}F_N(-D_۱)$$

که در آن $D_۱$ و $D_۲$ به طور مشابه، به صورت (۷.۳) و (۸.۳) تعریف شده‌اند.

۴.۳.۳ چارچوب قیمت‌گذاری کلی

سرانجام، موردی را که نرخ بهره‌ی بدون ریسک و نرخ سود سهام، توابعی غیرتصادفی باشند، در نظر می‌گیریم. تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی، دینامیک‌های قیمت سهام به‌صورت زیر فرض می‌شوند.

$$\mathrm{S}(t)=\mathrm{S}(\circ)\exp\left(\int_\circ^t (r(s)-q(s))ds-\tfrac{1}{۲}\sigma^۲ t^{۲\mathrm{H}}+\sigma\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t)\right).$$

پس، $\mathrm{S}(t)$ توزیع لگ‌ـ نرمال به صورت زیر دارد.

$$\ln\mathrm{S}(t)\sim\mathrm{N}\left(\ln\mathrm{S}(\circ)+\int_\circ^t (r(s)-q(s))ds-\tfrac{1}{۲}\sigma^۲ t^{۲\mathrm{H}},\sigma^۲ t^{۲\mathrm{H}}\right).$$

فرض کنید $\mathrm{A(T)}$، به صورت

$$\mathrm{A(T)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{T}}\int_\circ^T \ln\mathrm{S(t)}dt.$$

باشد. بنابراین، داریم

$$\mathrm{A(T)}\sim\mathrm{N}(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^۲)$$

و با محاسبات ساده به‌دست می‌آوریم

$$\tilde{\mu}=\ln\mathrm{S}(\circ)-\tfrac{1}{۲(۲\mathrm{H}+1)}\sigma^۲ t^{۲\mathrm{H}}+\tfrac{1}{T}\int_o^T\int_\circ^t (r(s)-q(s))\,dsdt$$

$$\tilde{\sigma}^۲=\tfrac{1}{۲(\mathrm{H}+1)}\sigma^۲ t^{۲\mathrm{H}}.$$

در نتیجه، فرمول اختیار معامله به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(\mathrm{S}(\circ),T)&=\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds}\int_{\acute{D}}\left(\mathrm{e}^{n(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}y)}-K\right)\tfrac{1}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^۲}{۲}}dy\\
&=\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds+n\tilde{\mu}}\int_{-D_۲}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{n\tilde{\sigma}y-\frac{y^۲}{۲}}dy-K\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds}\int_{-D_۲}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^۲}{۲}}dy\\
&=\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds+n\tilde{\mu}+\frac{n\tilde{\sigma}^۲}{۲}}\int_{-D_۲}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{۲\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-n\tilde{\sigma})^۲}{۲}}dy-K\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds}\mathrm{F_N}(D_۲)\\
&=\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds+n\tilde{\mu}+\frac{n\tilde{\sigma}^۲}{۲}}\mathrm{F_N}(D_1)-K\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds}\mathrm{F_N}(D_۲)\\
&=\mathrm{S}^n(\circ)\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds+\frac{n}{T}\int_o^T\int_\circ^t(r(s)-q(s))dsdt-\frac{n}{۲(۲\mathrm{H}+1)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}+\frac{n^۲}{۴(\mathrm{H}+1)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}}\mathrm{F_N}(D_1)\\
&-K\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds}\mathrm{F_N}(D_۲)
\end{aligned}$$

که در آن

$$D_۲=\frac{\ln\frac{\mathrm{S}(\circ)}{\sqrt[n]{K}}-\frac{1}{۲(۲\mathrm{H}+1)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}+\frac{1}{t}\int_o^T\int_\circ^t(r(s)-q(s))\,dsdt}{\frac{\sigma T^{\mathrm{H}}}{\sqrt{۲(\mathrm{H}+1)}}}\qquad(۹.۳)$$

و

$$D_{۱} = D_{۲} + \frac{n\sigma T^{\mathrm{H}}}{\sqrt{۲(\mathrm{H}+۱)}}. \qquad (۱۰.۳)$$

همچنین، برای اختیار معامله‌ی فروش توان آسیایی هندسی، فرمول قیمت‌گذاری به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}(\circ), T) = K\mathrm{e}^{-\int_{\circ}^{T} r(s)ds}\mathrm{F_N}(-D_{۲})$$
$$- \mathrm{S}^{n}(\circ)\mathrm{e}^{-\int_{\circ}^{T} r(s)ds + \frac{n}{T}\int_{o}^{T}\int_{\circ}^{t}(r(s)-q(s))dsdt - \frac{n}{۲(۲\mathrm{H}+۱)}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}} + \frac{n^{۲}}{۴(\mathrm{H}+۱)}\sigma^{۲}T^{۲\mathrm{H}}}\mathrm{F_N}(D_{۱})$$

به طوری‌که در آن $D_{۱}$ و $D_{۲}$ به فرم (۹.۳) و (۱۰.۳) تعریف شده‌اند.

ملاحظه ۷.۳.۳. اختیار معامله‌های آسیایی هندسی، فقط مورد $n = ۱$ از اختیار معامله‌های توان آسیایی هندسی هستند.

۴.۳ برابری اختیار معامله‌ی خرید_ فروش

از برابری خرید_ فروش [۸۷]، می‌توانیم برای تعیین قیمت اختیار معامله‌ی خرید و فروش، وقتی‌که قیمت دیگری با مشخصات مشابه (روی همان دارایی و با همان سررسید و با همان قیمت اعمال) در دست است، استفاده کنیم.

مثال ۱.۴.۳. فرض کنیم مدل بلک_ شولز برای تعیین قیمت اختیار معامله‌ی خرید اروپایی ارائه شده است. با استفاده از این برابری، قادر خواهیم بود با اتکا به مدل بلک_ شولز، قیمت اختیار معامله‌ی فروش مشابه را تعیین کنیم.

$$\mathrm{C} + \mathrm{X}\mathrm{e}^{-rT} = \mathrm{P} + \mathrm{S}(\circ)$$

که در آن C، قیمت جاری اختیار معامله‌ی خرید روی یک سهم برای سررسید T، با قیمت اعمال K، و P، قیمت جاری اختیار معامله‌ی فروش روی یک سهم برای سررسید T، با قیمت اعمال K، $\mathrm{S}(\circ)$ قیمت جاری موضوع خرید و فروش در بازار و r نرخ بهره‌ی بدون ریسک است.

گزاره ۲.۴.۳. برای اثبات درستی برابری خرید_ فروش، دو روش به صورت زیر وجود دارد

- (سبد سهام ۱)

قیمت جاری اختیار معامله‌ی خرید به‌علاوه‌ی $\mathrm{X}\mathrm{e}^{-rT}$.

ملاحظه ۳.۴.۳. اگر مبلغ $\mathrm{X}\mathrm{e}^{-rT}$ را برای سررسید T، با نرخ بهره‌ی بدون ریسک، سپرده کنیم، ارزش آتی آن X خواهد شد. پس در سررسید، X دلار پول و یک اختیار معامله‌ی خرید داریم.

[۸۷] Call- Put Parity

ملاحظه ۴.۴.۳. اگر قیمت سهم در بازار بزرگ‌تر از X باشد، $(\mathrm{S}(T) > K)$، اختیار معامله‌ی خرید را اعمال و مبلغ $\mathrm{S}(T)$ را دریافت می‌کنیم.
($\mathrm{S}(T)$ قیمت سهام موضوع قرارداد خرید و فروش در بازار در سررسید این دو قرارداد است.)

ملاحظه ۵.۴.۳. اگر قیمت سهم در بازار، کوچک‌تر و یا مساوی X باشد، اختیار معامله‌ی خرید، بدون استفاده منقضی خواهد شد و ارزش پورتفولیو، X خواهد بود. $(\mathrm{S}(T) \leq K)$،

در نتیجه، ارزش پورتفولیوی ۱ در زمان T، برابر است با

$$\max(\mathrm{X}, \mathrm{S}(T)).$$

- (سبد سهام ۲)

قیمت جاری اختیار معامله‌ی فروش به‌علاوه‌ی سهام.

ملاحظه ۶.۴.۳. در سررسید اختیار معامله‌ی فروش، اگر $\mathrm{S}(T) < \mathrm{X}$ باشد، اختیار معامله‌ی فروش بدون استفاده منقضی خواهد شد و اگر $\mathrm{S}(T) \geq \mathrm{X}$ سهم به صادر کننده‌ی اختیار معامله‌ی فروش تحویل و در ازای آن، مبلغ X دلار در یافت خواهد شد.

در نتیجه، ارزش پورتفولیوی ۲ در زمان T، برابر است با

$$\max(\mathrm{X}, \mathrm{S}(T)).$$

در نتیجه، ارزش هر دو پورتفولیو برابر است با

$$\max(\mathrm{X}, \mathrm{S}(T)).$$

در این صورت، باید ارزش دو پورتفولیو در زمان حال هم برابر باشد، وگرنه، فرصت آربیتراژ به‌وجود خواهد آمد. اگر یک طرف گرانتر باشد، آربیتراژگر پورتفولیوی گران‌تر را می‌فروشد و وجه حاصل را صرف خرید پورتفولیوی ارزان‌تر خواهد کرد و سود آربیتراژی کسب خواهد کرد.

قضیه ۷.۴.۳. فرض کنیم که دینامیک‌های دارایی پایه تحت اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی از معادله‌ی دیفرانسیل جزئی (۵.۳) پیروی کند. اگر نرخ بهره‌ی بدون ریسک $r(t)$ و نرخ سود سهام $q(t)$، ثابت باشند و تابع بازدهی آنها در سررسید،

$$f(\mathrm{A}(t), t) = (\mathrm{A}^n(T), K)^+ : \quad \mathrm{A}^n(T) > K$$

باشد، بنابراین، فرمول برابری خرید_ فروش آن عبارتند از

$$\mathrm{C}(\mathrm{S}(\circ), T) - \mathrm{P}(\mathrm{S}(\circ), T) = \mathrm{S}^n(\circ)\mathrm{e}^{-rT+\frac{n}{۲}(r-q)T-\frac{n}{۲(۲\mathrm{H}+۱)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}+\frac{n^۲}{۴(\mathrm{H}+۱)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}} - K\mathrm{e}^{-rT}.$$

گرچه، برای مورد توابع غیرتصادفی از $r(t)$ و $q(t)$، رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(\mathrm{S}(\circ), T) - \mathrm{P}(\mathrm{S}(\circ), T) = {} & \mathrm{S}^n(\circ)\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds+\frac{n}{T}\int_o^T\int_\circ^t(r(s)-q(s))dsdt-\frac{n}{۲(۲\mathrm{H}+۱)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}+\frac{n^۲}{۴(\mathrm{H}+۱)}\sigma^۲T^{۲\mathrm{H}}} \\ & - K\mathrm{e}^{-\int_\circ^T r(s)ds}.\end{aligned}$$

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

فصل ۴

اضافه کردن پرش به اختیار معامله‌ی توان آسیایی هندسی

هدف ما در این بخش، این است که برای محاسبه‌ی پرش‌ها یا ناپیوستگی‌ها و نوسانات در فرآیند قیمت سهام، به مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی توان آسیایی هندسی، پرش منطبق با چارچوب فرآیند براونی کسری اضافه کنیم.

در این بخش از مراجع [۲۸]، [۲۴]، [۲۳]، [۱۵] و [۳] استفاده شده است.

دینامیک فرآیند قیمت

$$\frac{d\mathrm{S}(t)}{\mathrm{S}(t)} = rdt + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t). \tag{۱.۴}$$

را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۰.۴. مدل فرآیند براونی کسری را برای فرآیند قیمت دارایی پایه به‌همراه فرآیند پواسون مرکب به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به [۲۴] رجوع کنید.

$$d\mathrm{S}(t) = r\mathrm{S}(t)dt + \sigma\mathrm{S}(t)d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) + (\mathrm{e}^{J_i} - ۱)\mathrm{S}(t^-)d\mathrm{N}(t) - \mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{J_i} - ۱)\mathrm{S}(t)d\mathrm{N}(t)\}. \tag{۲.۴}$$

که در آن

- $\{d\mathrm{N}(t)\}_{۰\leq t\leq T}$، فرآیند پواسون با پارامتر شدت λ و مستقل از فرآیند براونی کسری است.
- e^{J_i}، به ازای هر $۱ \leq i \leq \mathrm{N}(t)$، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع است که معرف اندازه‌ی پرش است.

- J_i، دارای توزیع لگ- نرمال خواهد بود.
- $\mathrm{S}(t^-)$ مقدار فرآیند پرش دقیقا قبل از وقوع پرش در فرآیند قیمت است و

$$\mathrm{S}(u) = \mathrm{e}^{J_i}\mathrm{S}(u^-).$$

داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{J_i} - 1)\mathrm{S}(t)d\mathrm{N}(t)\} &= \mathrm{E}[\mathrm{e}^{J_i} - 1]\mathrm{E}[\mathrm{S}(t)]\mathrm{E}[d\mathrm{N}(t)] \\ &= \left(\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\gamma^2} - 1\right)\mathrm{S}(t)\lambda d(t). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $m = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\gamma^2} - 1$، بنابراین، خواهیم داشت

$$\mathrm{E}\{(\mathrm{e}^{J_i} - 1)\mathrm{S}(t)d\mathrm{N}(t)\} = m\mathrm{S}(t)\lambda dt. \tag{۳.۴}$$

با قرار دادن (۳.۴) در (۲.۴) داریم

$$d\mathrm{S}(t) = (r - m\lambda)\mathrm{S}(t)dt + \sigma\mathrm{S}(t)d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) + (\mathrm{e}^{J_i} - 1)\mathrm{S}(t^-)d\mathrm{N}(t) \tag{۴.۴}$$

قرار می‌دهیم $\mathrm{Z}(t) = \ln\mathrm{S}(t)$، با استفاده از فرمول ایتوی کسری داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(t) &= \mathrm{Z}(0) + \int_0^t \left(\tfrac{1}{\mathrm{S}(u)}r\mathrm{S}(u) + \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}(\tfrac{1}{\mathrm{S}^2(u)})\sigma^2\mathrm{S}^2(u)\right)dt + \sigma\mathrm{S}(t)(\tfrac{1}{\mathrm{S}(t)})d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) \\ &= \mathrm{Z}(0) + \int_0^t (r + \mathrm{H}t^{2\mathrm{H}-1}\sigma^2)dt + \int_0^t \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(u) + \sum_{u=0}^{t}(\mathrm{Z}(u) - \mathrm{Z}(u^-)) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که $\mathrm{Z}(u^-)$، مقدار $\mathrm{Z}(u)$ دقیقا قبل از وقوع پرش در لحظه‌ی u است. از قبل داشتیم

$$\mathrm{S}(u) = \mathrm{e}^{J_i}\mathrm{S}(u^-),$$

از طرفی داریم

$$\mathrm{Z}(u) = \ln\mathrm{S}(u)$$

پس

$$\mathrm{Z}(u) = \ln\mathrm{S}(u) = \ln\mathrm{e}^{J_i}\mathrm{S}(u^-) = J_i\ln\mathrm{S}(u^-) = J_i\mathrm{Z}(u^-).$$

در نتیجه

$$\mathrm{Z}(u) = J_i\mathrm{Z}(u^-).$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\mathrm{Z}(u) - \mathrm{Z}(u^-) = (J_i - 1)\mathrm{Z}(u^-).$$

اگر در لحظه‌ی u، پرش رخ ندهد، آنگاه

$$\mathrm{Z}(u) - \mathrm{Z}(u^-) = ۰,$$

در مواردی که بیش از یک پرش رخ می‌دهد، خواهیم داشت

$$\mathrm{Z}(u) - \mathrm{Z}(u^-) = (J_i - ۱)\mathrm{Z}(u^-)\Delta \mathrm{N}_u.$$

همچنین

$$\begin{aligned}\sum_{u=۰}^{t}(\mathrm{Z}(u) - \mathrm{Z}(u^-)) &= \sum_{u=۰}^{t}(J_i - ۱)\mathrm{Z}(u^-) - \Delta \mathrm{N}_u \\ &= \int_{۰}^{t}(J_i - ۱)\mathrm{Z}(u^-)d\mathrm{N}_u\end{aligned}$$

پس بنابر فرمول ایتوی کسری، خواهیم داشت

$$\mathrm{Z}(u) = \mathrm{Z}(۰) + \int_{۰}^{t}(r + \mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲})dt + \int_{۰}^{t}\sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(u) + \int_{۰}^{t}(J_i - ۱)\mathrm{Z}(u^-)d\mathrm{N}_u.$$

بنابراین

$$d\mathrm{Z}(t) = (r + \mathrm{H}t^{۲\mathrm{H}-۱}\sigma^{۲})dt + \sigma d\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}(t) + (J_i - ۱)\mathrm{Z}(t^-)d\mathrm{N}_t.$$

مراجع

[۱] سیاح س. و صالح آبادی ع، (۱۳۸۴)، ''**مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، (ترجمه)**'' **گروه رایانه تدبیر پرداز**.

[۲] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر. ا، (۱۳۸۳)، ''حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی''، **فرهنگ و اندیشه ریاضی**، صفحه ۲۰-۱

[3] Biagini F., Hu Y., Oksendal B. and Zhang T. (2008), "Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications" **Springer Science and Business Media**

[4] Black, F., and Scholes, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, **The Journal of political economy**, 637-654.

[5] Chalasani, P., and Jha, S. (1997), "Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance" Lecture notes, October.

[6] Chung, K.L. (2001), "**A course in probability theory**", Academic press.

[7] Dai W. and Heyde C. (1996), "Ito's formula with respect to fractional Brownian motion and its application" **International Journal of Stochastic Analysis**, 9,4, pp 439–448

[8] Duncan T.E., Maslowski B. and Pasik-Duncan B. (2000), "Adaptive control for semilinear stochastic systems" **SIAM Journal on Control and Optimization**, 38,6, pp 1683–1706

[9] Edgar E. (1989), "Fractal structure in the capital markets" **Financial Analysts Journal**, 45,4, pp 32–37

[10] Feynman R.P. (1948), "Space- Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics" **Reviews of Modern Physics**, 20,2, pp 367-387

[11] Feynman R. and Kleinert H. (1986), " Effective Classical Partition Functions" **Physical Review**, 34, pp 5080-5084

[12] Fusai G. and Meucci A. (2008), ”Pricing discretely monitored Asian options under Levy processes” **Journal of Banking and Finance**, 32,10, pp 2076–2088

[13] Hu Y. and Oksendal B. (2003), ”Fractional white noise calculus and applications to finance” **Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics**, 6,1, pp 1–32

[14] Kemna A. and Vorst A. (1990), ”A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values” **Journal of Banking and Finance**, 14,1, pp 113- 129

[15] Kim K., Myong-Guk S. and Un-Hua Ch. (2014), ”Pricing formula for exchange option in fractional Black-Scholes model with jumps” **Journal of Hyperstructures** 3.2.

[16] Kolmogorov A.N. (1940), ”Wienersche Spiralen und Einige Andere Interessante Kurven im Hilbertschen Raum” ?????26, pp 115–118

[17] Liang Zh, Mao Zh. and others. (2013), ”Evaluation of geometric Asian power options under fractional Brownian motion” **Journal of Mathematical Finance** , 1, 1, pp 1

[18] Longjin L., Ren F.Y. and Qiu W.Y. (2010), ”The Application of Fractional Derivatives in Stochastic Models Driven by Fractional Brownian Motion” **Department of Mathematics**, 389,21, pp 4809–4818

[19] Mandelbrot B. and Taylor H. (1967), ”On the distribution of stock price differences” **Operations research**, 15,6, pp 1057–1062

[20] Mandelbrot B. and Van Ness J. (1968) ” Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications” **Siam Reu**, 10, pp 422–437

[21] Meng L. and Wang M. (2010), ”Comparison of Black–Scholes formula with fractional Black–Scholes formula in the foreign exchange option market with changing volatility” **Asia-Pacific Financial Markets**, 17,2, pp 99–111

[22] Necula C. (2002), ”Option pricing in a fractional Brownian motion environment” **Available at SSRN 1286833**

[23] Peng B. and Peng F. (2012), ”Pricing Asian power options under jump-fraction process” **Journal of Economics Finance and Administrative Science**, 17, 33, pp 2–9

[24] Pillay E. and O’Hara G. (2011), ”FFT based option pricing under a mean reverting process with stochastic volatility and jumps” **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 235, 12, pp 3378–3384

[25] Rosenow, B. (2002), ”Fluctuations and market friction in financial trading” **International Journal of Modern Physics C**, 13,3, pp 419–425

[26] Wang Y., Zhou S. and ZHANG Y. (2005), ”The Pricing of European Power Options” **Journal of Gansu Science**, 17,2, pp 21–23

[27] Wiener N. (1921), ” The Average of an Analytical Functional” **Proceedinggs of the Nationl Academy of Sciences**, 7,9, pp 253–260

[28] Xiaoyang Zh. and Iingyu W. (2012), ”Pricing European currency options in a fractional Brownian motion with jumps” **Journal of Economic Theory**, 6,4-6, pp 128–131

[29] Yaglom A.M. (2008), ”Correlation Theory of Processes with Random Stationary nth Increments ” **AMS Translation**, 195,8, pp 87–141

[30] Zhou Q. (2015), ”The Application of Fractional Brownian Motion in Option Pricing” **International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering**, 10,1, pp 173–182

[31] Aliprantis D. (1998), ”**Principles Of Real Analysis**”, Academic Press.

[32] Björk T. and Sturm A. (2001), ”**Arbitrage Theory in Continuous Time**”

[33] Beckmann M, Kunzi H., Fandel G. and Trockel W. (2009), ”**Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems(Lecture Note)**”

[34] Doukhan P., Oppenheim G. and Taqqu M. (2003), ”**Theory and applications of long-range dependence**”

[35] Jeanblanc M. (2007), ”**Jump processes(Lecture Note)**” , CIMPA School

[36] Mishura Y. (2008), ”**Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes**”, Vol. 1929

[37] Oksendal, B. (2003), ”**Stochastic differential equations**”, (pp. 65-84). Springer Berlin Heidelberg

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آربیتراژگران	Arbitrageurs
اتم	Atom
اندازه	Measure
اندازه‌پذیر	Measurable
بردار تصادفی	Random Vector
پیشامد	Event
تابع ابتدایی	Elementory Function
تابع توزیع	Distribution Function
تابع توزیع تجمعی	Cumulative Distribution Function
تابع توزیع توام	The Joint Distribution Function
تابع ساده	Simple Function
توزیع پواسون	Poisson Distribution
توزیع مرکب	Compound Distribution
ساپورت	Support
گشتاور	Moment
مجموعه‌ی پوچ	Null Set
متغیر تصادفی	Random Variable
مطلقا پیوسته	Absolutely Continuouse
نمو مانا	Stationary Increment
نمو مستقل	Independent Increment

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

سازگار .... Adapted
تقریبا همه‌جا .... Almost Everywhere
اندازه .... Almost Surely
اختیار معامله‌ی آمریکایی .... American Option
آسیایی میانگین حسابی .... Arithmetic Average Asian
اختیار معامله‌ی آسیایی .... Asian Option
فرآیند براونی .... Brownian Motion
اختیار خرید .... Call Option
امید شرطی .... Conditional Expectation
احتمال شرطی .... Conditional Probability
پیوسته .... Continuouse
فرآیند شمارشی .... Counting Process
فیلتر گسسته .... Discrete Filteration
تابع توزیع .... Distribution Function
اختیار معامله‌ی اروپایی .... European Option
تاریخ اعمال .... Exercise Date
قیمت اعمال .... Exercise Price
امید ریاضی .... Expectation
فرآیند براونی کسری .... Fractional Brownian Motion
آسیایی میانگین هندسی .... Geometric Average Asian
پرش .... Jump
توپولوژی ضعیف .... Exercise Price

Aabstract

Option pricing is one of the most important concept in fractional economics and specially financial mathematics. In particular, the fractional Brownian motion is proper to model the stock dynamics for long- range dependence. In this thesis, we evaluate the price of the price of geometric Asian options under fractional Brownian motion framework.
Keywords: Asian Option, Fractional Brownian Motion, Power Option, Pricing Option

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Analysis

Jump- Fraction Process in Pricing Asian Power Options

By: Faeze Shokri

Supervisor

Elham Dastranj

April 2016