

صلى الله عليه وسلم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

بهینه سازی ارزش طول عمر مشتری

نگارنده: رجا کشاورزی

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استادان مشاور

دکتر محمد آرشی
آقای خسرو حسین زاده بابر

دی ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم رجا کشاورزی به شماره دانشجویی ۹۳۳۲۹۲۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات تحت عنوان بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۰/۲۰ با حضور هیأت داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

☐ مردود	☐ دفاع مجدد	☒ قبول (با درجه: <u>بسیار</u> امتیاز <u>۱۸/۸۸</u>)
		نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر محمد ارشی	دانشیار	
۳- استاد مشاور	آقای خسرو حسین‌زاده بابره	مربی	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

نام بعضی نفرات رزق روح شده است،
جراتم می بخشد،
روشم می دارد...
تقدیم به محضر از دشمنیدر و مادر عزیزم...
آنان که وجودم جز هدیه وجودشان نیست.

بروردگار... ❖

به من زیستی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته‌است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را خود انتخاب کنم اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

شکر شایان ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از استاد عالی‌قدر **جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی** که در حین انجام این پایان‌نامه از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره بردم، کمال تشکر را دارم.

همچنین لازم است مراتب سپاس و قدردانی را از زحمات بی‌دریغ و تلاش‌های بی‌وقفه استادان گرامی **جناب آقای دکتر محمد آرشی و جنای آقای خسرو حسین‌زاده بابره** بجا آورم که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی آن به نحو احسن اینجانب را یاری نمودند.

رجا کشاورزی
دی ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **رجا کشاورزی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بهینه سازی ارزش طول عمر مشتری**، تحت راهنمایی **جعفر فتحعلی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رجا کشاورزی

دی ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

امروزه در عرصه رقابت، سازمان‌ها و شرکت‌ها متوجه این موضوع شده‌اند که جذب مشتری به تنهایی برای آن‌ها سودآور نیست و ارتباط با مشتری است که باعث سودآوری می‌شود. بنابراین معیاری برای ارزیابی ارزش مشتریان و بخش‌بندی آن‌ها، برای برقراری رابطه طولانی مدت با سودآورترین مشتریان مورد نیاز است. ارزش طول عمر مشتری ابزاری است که برای پیش‌بینی ارزش مشتریان در آینده و بخش‌بندی آن‌ها، بکار برده می‌شود.

با توجه به بودجه محدود سازمان‌ها و شرکت‌ها، علاوه بر محاسبه و شناسایی عوامل موثر بر ارزش طول عمر مشتری، بهینه‌سازی این ارزش برای ارائه خدمات مناسب در بهترین زمان، یکی دیگر از مسائل مهم مطرح شده است که در این پایان‌نامه در زمان گسسته و پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا به معرفی ارزش طول عمر مشتری و بررسی برخی از مدل‌ها و کاربردهای مهم آن می‌پردازیم، سپس فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف را معرفی و از آن برای بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری در زمان‌های گسسته با اتخاذ بهترین سیاست برای تخصیص بودجه به گروه‌های مختلف مشتریان، استفاده می‌شود و در نهایت با فرض پیوسته بودن مدت زمان ارتباط مشتری و شرکت، به بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته نسبت به دو عامل آستانه درآمد تعیین شده توسط شرکت و بهترین زمان بررسی حساب، پرداخته می‌شود.

کلمات کلیدی: ارزش طول عمر مشتری، فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف، برنامه‌ریزی پویای تصادفی، سیاست بهینه

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
۱	فهرست جداول
۳	۱ پیشگفتار
۵	۲ ارزش طول عمر مشتری
۵	۱.۲ مقدمه
۶	۲.۲ مدیریت ارتباط با مشتری
۶	۳.۲ ارزش طول عمر مشتری
۶	۱.۳.۲ مفاهیم و تعاریف
۹	۲.۳.۲ عوامل تاثیرگذار بر ارزش طول عمر مشتری
۱۰	۳.۳.۲ مدل‌های محاسباتی ارزش طول عمر مشتری
۱۲	۴.۳.۲ مقایسه مدل‌ها
۱۲	۴.۲ کاربردهای استفاده از ارزش طول عمر مشتری
۱۷	۳ فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف
۱۷	۱.۳ مقدمه
۱۸	۲.۳ فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف
۱۸	۱.۲.۳ فرآیندهای تصادفی
۱۹	۲.۲.۳ زنجیره مارکوف
۲۴	۳.۳ پیش بینی رفتار یک سیستم با استفاده از فرآیند مارکوف
۲۴	۱.۳.۳ محاسبات برای کوتاه مدت
۲۵	۲.۳.۳ محاسبات برای بلند مدت (حالت پایدار)
۲۷	۴.۳ کاربرد زنجیره مارکوف در مدل‌های محاسباتی CLV
۲۸	۵.۳ سیاست بهینه
۳۰	۶.۳ روش‌های تعیین سیاست بهینه
۳۰	۱.۶.۳ تکرار سیاست

۳۷	برنامه‌ریزی خطی	۲.۶.۳
۴۱	بهبودسازی ارزش طول عمر مشتری با استفاده از فرآیند مارکوف	۴
۴۱	مقدمه	۱.۴
۴۲	مدل زنجیره مارکوف برای رفتار مشتری	۲.۴
۴۶	مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری	۳.۴
۴۷	افق زمانی بینهایت بدون محدودیت	۱.۳.۴
۵۱	افق زمانی معین بدون محدودیت	۲.۳.۴
۵۱	افق زمانی معین با محدودیت	۳.۳.۴
۵۵	بهبودسازی ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته	۵
۵۵	مقدمه	۱.۵
۵۶	محاسبه ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته	۲.۵
۵۷	چارچوب مدل‌سازی	۳.۵
۶۰	بهبودسازی ارزش طول عمر مشتری	۴.۵
۶۳	حالت خاص	۱.۴.۵
۶۷	نتیجه‌گیری	
۶۹	مراجع	
۷۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۲۱	۱.۳	دیاگرام انتقال حالت در زنجیره مارکوف
۶۶	۱.۵	میانگین ارزش طول عمر مشتری $E(CLV)$ نسبت به r_1 برای فرآیند گاما

فهرست جداول

۷	تعاریف CLV در پژوهش‌های مختلف	۱.۲
۱۴	مجموع مقادیر مربوط به محاسبه CLV یکی از بانک‌های تجاری ایران	۲.۲
۱۴	دسته بندی مشتریان براساس CLV برای سال ۱۳۸۴	۳.۲
۲۳	احتمالات تغییر وضعیت دستگاه در هفته	۱.۳
۴۴	بخش بندی حالت مشتریان	۱.۴
۴۵	میانگین درآمد مشتریان در چهار حالت	۲.۴
۵۰	سیاست‌های ثابت بهینه و CLV آن‌ها برای افق زمانی بینهایت	۳.۴
۵۲	سیاست‌های ثابت بهینه و CLV آن‌ها برای افق زمانی معین	۴.۴

فصل ۱

پیشگفتار

امروزه کسب و کارهای مختلف جهت بقا در عرصه ناپایدار کنونی، ملزم به پیروی از فلسفه بازاریابی نوین و درصدر آن، مشتری محوری می‌باشند. به بیانی دیگر مشتری دیگر از دیدگاه یک دادوستد مورد توجه قرار نمی‌گیرد بلکه براساس تکرار دادوستد، بصورت ارزش مادام‌العمر به او نگاه می‌کنند [۲۲].

در بازاریابی سنتی هدف، بدست آوردن مشتریان بیشتر بود اما امروزه با توجه به محیط رقابتی سخت و اینکه هزینه جذب یک مشتری بسیار بیشتر از هزینه حفظ آن می‌باشد، سازمان‌ها و شرکت‌ها متوجه این موضوع شده‌اند که جذب مشتری به تنهایی برای آن‌ها سودآور نیست و ارتباط با مشتری است که باعث سودآوری بیشتر می‌شود. بنابراین معیاری برای ارزیابی ارزش مشتریان و بخش‌بندی آن‌ها، برای برقراری رابطه طولانی مدت با سودآورترین مشتریان مورد نیاز است. ارزش طول عمر مشتری^۱ (CLV) ابزاری است که برای پیش‌بینی ارزش مشتریان در آینده و بخش‌بندی آن‌ها، بکار برده می‌شود که در فصل دوم به معرفی این ارزش، پیشینه، مدل‌ها و کاربردهای مهم آن می‌پردازیم.

با توجه به بودجه محدود سازمان‌ها و شرکت‌ها، علاوه بر محاسبه و شناسایی عوامل موثر بر ارزش طول عمر مشتری، بهینه‌سازی این ارزش برای ارائه خدمات مناسب، یکی دیگر از مسائل مهم مطرح شده‌است که بسیاری از سازمان‌ها و شرکت‌ها به دنبال آن هستند که با توجه به در نظر گرفتن نوع مدت ارتباط مشتری با شرکت (قرارداد) متفاوت است.

ممکن است قرارداد مشتری بصورت گسسته و دوره‌ای در نظر گرفته شود که در این صورت فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف^۲، روابط مشتریان را با توجه به ارتباط فعالیت‌های بازاریابی با ارزش طول عمر

^۱Customer lifetime value

^۲Markov decision processes

مشتریان در دوره حیاتشان، مدلسازی می‌کند. بنابراین ارزش طول عمر مشتریان به عنوان یک متغیر در نظر گرفته می‌شود که به مشتریان و فعالیت‌های بازاریابی (حفظ یا جذب مشتری)، بستگی خواهد داشت. لذا در فصل سوم به تفصیل به معرفی فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف و روش‌های حل آن پرداخته شده است.

فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف این امکان را فراهم می‌کند که بتوان با استفاده از برنامه‌ریزی پویا^۳، ارزش مشتریان را ارزیابی نمود. در فصل چهارم با بکارگیری مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی به بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری در افق زمانی نامحدود و معین می‌پردازیم.

در فصل پنجم نیز با ارائه چارچوبی با توجه به استراتژی شرکت، مدلی برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته معرفی می‌شود و سپس با یافتن بهترین مقدار آستانه درآمد و زمان بررسی مجدد حساب مشتری، ارزش طول عمر مشتری به بیشترین مقدار می‌رسد. با توجه به تصادفی بودن متغیر زمان در این حالت، با ارائه یک مثال از توزیع خاصی استفاده می‌شود و مقدار بهینه ارزش طول عمر مشتری را بدست می‌آوریم.

^۳Dynamic programming

فصل ۲

ارزش طول عمر مشتری

۱.۲ مقدمه

امروزه کسب و کارهای مختلف، جهت بقا در عرصه ناپایدار کنونی ملزم به پیروی از فلسفه بازاریابی نوین و درصدر آن، بازاریابی رابطه‌مند می‌باشند. بازاریابی رابطه‌مند به این معناست که اولویت اول شرکت‌ها و سازمان‌ها، مراقبت و نگهداری از مشتریان موجود و سعی در ساختن یک رابطه بلندمدت با هدف سودآوری مطمئن است [۱۶]. مشتری دیگر از دیدگاه یک دادوستد مورد توجه قرار نمی‌گیرد بلکه براساس تکرار دادوستد، بصورت ارزش مادام‌العمر به او نگاه می‌کنند. برای این منظور سازمان‌ها و شرکت‌ها به معیاری برای رتبه‌بندی مشتریان خود بر اساس ارزش آن‌ها نیاز داشتند که امروزه ارزش طول عمر مشتری به عنوان عامل قابل اندازه‌گیری می‌تواند در بخش‌بندی مشتریان به کار رود. ارزیابی ارزش مشتریان از دهه ۱۹۴۰ میلادی که تعداد محدودی از شرکت‌ها به تخمین ارزش مشتریان خود می‌پرداختند همواره یک دغدغه برای سازمان‌ها و شرکت‌ها بوده‌است. در اواخر دهه ۱۹۶۰، شرکت‌ها و سازمان‌ها از فناوری‌های کامپیوتری جهت پیش‌بینی ارزش مشتریان در طولانی مدت استفاده کردند. در سال‌های اخیر با استفاده از فناوری اطلاعات مدرن مانند پایگاه‌های داده، نرم افزارهای مدیریت، داده‌های کاوی و ... مفهوم ارزش طول عمر مشتری بصورت عمیق‌تر مورد بررسی قرار گرفته است [۳۰].

در این فصل ارزش طول عمر مشتری به عنوان ابزاری جهت رسیدن به مدیریت ارتباط با مشتری سودآور معرفی می‌شود، به طوری که یک سازمان با شناسایی مشتریان خود از طریق تعیین ارزش آن‌ها، می‌تواند از این مشتریان در جهت ماکزیمم کردن سود خود بهره‌برد. سپس با توجه به عوامل تاثیرگذار بر روی

ارزش طول عمر مشتری به معرفی برخی از مدل‌های محاسباتی رایج و مقایسه آن‌ها پرداخته شده و به برخی از کاربردهای آن در بازاریابی^۱ اشاره می‌شود.

۲.۲ مدیریت ارتباط با مشتری

مدیریت ارتباط با مشتری^۲ (CRM) ابزاری کارآمد برای بدست آوردن، نگهداری، طبقه‌بندی و افزایش رضایت‌مندی مشتریان در صنایع رقابتی می‌باشد. به عبارت دیگر مدیریت ارتباط با مشتری به همه فرآیندها و فناوری‌هایی گفته می‌شود که در شرکت‌ها و سازمان‌ها برای شناسایی، ترغیب، گسترش، حفظ و ارائه خدمات بهتر به مشتریان بکار می‌رود.

در واقع مدیریت ارتباط با مشتری در پاسخ به این سوال اساسی کار خود را آغاز کرد که کدام یک از مشتریان یک سازمان یا شرکت سود آور هستند و ارزش رابطه بلندمدت را دارند و کدام دسته را باید به تدریج حذف نمود؟ در مدیریت سنتی به همه‌ی مشتریان به یک چشم نگاه می‌شد اما به گفته‌ی جک ولچ^۳ مدیر عامل سابق جنرال الکتریک، در دهه‌ی ۸۰ هر کسی می‌توانست مشتری باشد اما در دهه‌ی ۹۰ و بعد از آن هر مشتری، شخص منحصر به فردی تلقی می‌گردد [۱۹].

امروزه با در نظر گرفتن این موضوع، مفهوم CRM به صورت یک استراتژی برای حفظ روابط بلند مدت با مشتریان در آمده است. ارزش طول عمر مشتری (CLV) از اصول اساسی مدیریت ارتباط با مشتری است که به عنوان ابزاری برای ارزیابی CRM استفاده می‌شود، به طوری که پیپرز^۴ و همکارانش هدف از CRM را ایجاد روابط نزدیک‌تر و عمیق‌تر با مشتریان به منظور بالا بردن ارزش طول عمر مشتری برای سازمان‌ها می‌دانند [۲۹].

۳.۲ ارزش طول عمر مشتری

۱.۳.۲ مفاهیم و تعاریف

ارزش طول عمر مشتری تحت عناوینی چون ارزش مشتری^۵، سرمایه مشتری^۶، سودآوری مشتری^۷ مورد مطالعه قرار گرفته و معرفی شده است. در حال حاضر بیشتر سازمان‌ها و شرکت‌ها متوجه این موضوع شده‌اند که ۲۰ تا ۴۰ درصد مشتریان آن‌ها سودآور نیستند یا سود کمی برای آن‌ها دارند. طبق اصل پارتو^۸ ۲۰ درصد از مشتریان ۸۰ درصد از سود شرکت را ایجاد می‌کنند [۲۸]. در واقع مفهوم CLV بر این مبنا استوار است که مشتری‌ها، منبع درآمد و سودهای آینده شرکت هستند و با استفاده از ارزش

^۱Marketing

^۲Customer relationship management

^۳Jack Welch

^۴Peppers

^۵Customer value

^۶Customer equity

^۷Customer profitability

^۸Pareto principle

طول عمر مشتری می‌توان سود مشتری در زمان آینده را پیش‌بینی و مشتریان سودآور را شناسایی کرد. به طور کلی ارزش طول عمر مشتری را می‌توان بصورت زیر تعریف نمود:

تعریف ۱.۳.۲ (ارزش طول عمر مشتری). مقدار ارزشی است که انتظار می‌رود یک مشتری در یک افق زمانی معین برای سازمان یا شرکت به همراه داشته باشد که بدون شک این ارزش با میزان منفعتی که از این دسته مشتریان عاید شرکت می‌شود ارتباط مستقیم دارد.

به عبارت دیگر، اگر حاصل جمع هزینه‌هایی که از ابتدای ورود مشتری به سازمان تا زمان ترک سازمان توسط وی، از حاصل جمع درآمدهایی که از تراکنش‌های این مشتری با سازمان به دست آمده تفریق گردد و میزان به دست آمده به ارزش پولی فعلی تبدیل گردد، نتیجه بدست آمده، ارزش آن مشتری برای سازمان خواهد بود. در واقع ارزش طول عمر مشتری، درآمد خالصی است که سازمان از یک مشتری انتظار دارد [۳۵].

باید به این نکته توجه شود که ارزش طول عمر مشتری با میزان سوددهی یک مشتری (یعنی تفاضل درآمدها و هزینه‌های مرتبط با تعامل با یک مشتری در یک بازه زمانی مشخص) متفاوت است، به این دلیل که سوددهی مشتری، گذشته را در نظر می‌گیرد، درحالی‌که ارزش طول عمر مشتری آینده را در نظر می‌گیرد. برای این منظور ارزش طول عمر مشتری در تصمیم‌گیری مدیران نقش بیشتری ایفا کرده و اندازه‌گیری آن بسیار پیچیده‌تر است. به همین دلیل بیشتر در کسب و کارهای متمرکز بر رابطه با مشتری خصوصاً آن‌هایی که دارای قرارداد با مشتری هستند، مانند خدمات بانکی، بیمه‌ای و مخابراتی و... استفاده می‌شود.

در تحقیقات گذشته تعاریف مختلفی از ارزش طول عمر مشتری، تحت عنوان CLV ارائه شده است که تفاوت ناچیزی با هم داشته‌اند. این تعاریف به صورت خلاصه در جدول ۱.۲ آورده شده است [۲۲]:

جدول ۱.۲: تعاریف CLV در پژوهش‌های مختلف

منبع	تعاریف ارزش طول عمر مشتری
گوپتا و لمان ^۹ [۱۸]	ارزش کنونی تمام سودهای آینده حاصل از مشتری
برگر و نسر ^{۱۰} [۴]	سود یا ضرر خالص بدست آمده از مشتری در طول عمر کل تراکنش‌های مشتری با شرکت
بلتبرگ و دایتون ^{۱۱} [۷]	سود مورد انتظار از مشتری، بدون در نظر گرفتن هزینه‌های مرتبط با مدیریت مشتری
پیرسون ^{۱۲}	ارزش خالص فعلی حاصل از تراکنش‌های مشتری و تماس وی با شرکت
رابرتز و برگر ^{۱۳}	ارزش خالص فعلی سود حاصل از تمام همکاری‌های آینده
کورتکس ^{۱۴}	ارزش خالص فعلی تمام سهم‌های آینده به سود و و خارج کلی مورد انتظار از مشتری
جکسون ^{۱۵}	ارزش کنونی خالص سودی که از جریان مشارکت آینده مشتری انتظار می‌رود.

همانطور که از جدول ۱.۲ مشاهده می‌شود، مفهوم بسیاری از این تعاریف بر اساس ارزش خالص

^۹ Gupta - Lehmann

^{۱۱} Berger - Nasr

^{۱۲} Blattberg - Deighton

^{۱۳} Pearson

^{۱۴} Roberts - Berger

^{۱۵} Courtheoux

^{۱۶} Jackson

فعلی^{۱۶} (NVP) بدست آمده از مشتریان، در طول تراکنش‌های آن‌ها متمرکز است. صورت ریاضی مجموعه تعاریف فوق را می‌توان تحت رابطه (۱.۲) بیان نمود که در واقع مدل پایه برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری است [۱۸].

$$CLV_i = \sum_{t=1}^T \frac{r_{i,t} - c_{i,t}}{(1 + \alpha)^t} \quad (1.2)$$

که در آن CLV_i ارزش طول عمر مشتری i ، T افق زمانی برنامه‌ریزی، $r_{i,t}$ و $c_{i,t}$ به ترتیب درآمد و هزینه‌های مشتری i در زمان t و α نرخ تنزیل^{۱۷} ثابت است که ارزش زمانی پول را در نظر می‌گیرد. بنابراین صورت کسر، سود خالص در هر بازه زمانی را نشان می‌دهد و مخرج آن، ارزش سود را به ارزش فعلی تبدیل می‌کند. با استفاده از رابطه (۱.۲) ارزش طول عمر برای هر مشتری محاسبه می‌شود. اگر ارزش طول عمر تمامی مشتریان باهم جمع شود، سرمایه مشتری (CE) بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$CE = \sum_i n_i CLV_i \quad (2.2)$$

در رابطه (۲.۲) n_i تعداد مشتریان در دسته i است. بیان دیگری از سرمایه مشتری، مجموعی از دو ارزش خالص فعلی: میزان هزینه‌های مصرف شده جهت جذب مشتریان و همچنین هزینه‌های حفظ آن‌ها را در نظر می‌گیرد که بصورت زیر قابل محاسبه است [۷]:

$$\begin{aligned} CE &= \underbrace{am - A}_{\text{جذب}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} a \left(m - \frac{R}{r} \right) [r(1 + d)^{-1}]^t}_{\text{حفظ}} \\ &= am - A + a \left(m - \frac{R}{r} \right) \frac{r}{(1 + \alpha - r)} \end{aligned}$$

که در آن a نرخ جذب و r نرخ حفظ مشتری است. A میزان صرف شده از هزینه‌های جذب در یک دوره سالیانه برای هر مشتری و R میزان هزینه نگهداری برای هر مشتری در یک دوره یکساله می‌باشد. m مشارکت هر مشتری در سود و α نرخ تنزیل است. البته بلتبرگ^{۱۸} و همکاران این نکته را بیان می‌کنند که نرخ حفظ به میزان بودجه صرف شده برای نگهداری مشتریان وابسته است [۷]. به عبارتی دیگر نرخ جذب a و نرخ حفظ r را به ترتیب توابعی از A و R در نظر گرفتند که بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a(A) = a_0 (1 - e^{-K_1 A}) \quad r(R) = r_0 (1 - e^{-K_2 R})$$

که در آن a_0 و r_0 نرخ اولیه تعیین شده و K_1 و K_2 مقادیر ثابت مثبت هستند. مدل محاسباتی (۱.۲) از ابتدایی‌ترین مدل‌های موجود برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری است.

^{۱۶}Net present value

^{۱۷}Discount rate

^{۱۸}Blattberg

با توسعه این مدل پایه‌ای و تحقیقات زیادی که در این زمینه انجام شد مدل‌های محاسبه‌ای دیگری پیشنهاد شد که در بخش‌های بعد به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا به معرفی عوامل تاثیرگذار بر CLV پرداخته شده‌است.

۲.۳.۲ عوامل تاثیرگذار بر ارزش طول عمر مشتری

متغیرهای اصلی که ارزش طول عمر مشتری بر اساس آن‌ها قابل تعریف است، عبارتند از: زمان، جریان‌ات نقدی مشتری و نرخ تنزیل که به معرفی هر یک از آن‌ها می‌پردازیم.

زمان

یکی از عوامل بسیار مهم در مفهوم ارزش طول عمر مشتری، زمان یا طول عمر مشتری در سازمان است. طول عمر مشتری با توجه به نوع کسب و کار شامل یک خرید و یا خریدهای مکرر تعیین می‌شود [۲۴]. این دوره متشکل از بازه‌های زمانی کوچکتر (t) می‌باشد که در هر یک از این بازه‌ها رفتار خرید مشتری بررسی می‌گردد.

جریان‌ات نقدی مشتری

جریان‌ات نقدی^{۱۹} همان مقدار سودی است که هر سازمان بابت ارتباط و تراکنش‌های مشتری بدست می‌آورد، که با میزان ارزش طول عمر مشتری رابطه مستقیم دارد. برای محاسبه سودآوری مشتریان از مفاهیمی مانند میزان خرید مشتری، فروش محصولات دیگر به مشتری که همان فروش اضافی یا جانبی به مشتری است و هزینه‌های سازمان در قبال مشتریان استفاده می‌شود.

نرخ تنزیل

ارزشی که از مشتری در زمان آینده برآورد و محاسبه می‌گردد، باید به ارزش فعلی برای سازمان تبدیل شود. این امر از طریق اعمال ضریب تنزیل^{۲۰} در فرمول ارزش صورت می‌پذیرد. ضریب تنزیل بیان می‌کند که یک واحد پولی آینده در زمان فعلی چه ارزشی دارد [۳۵]. فرمول زیر ضریب تنزیل را نشان می‌دهد:

$$\text{ضریب تنزیل} = (1 + \alpha)^{-t} \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3.2)$$

در محاسبه ضریب تنزیل از پارامتری به نام نرخ تنزیل استفاده می‌شود. در مورد نرخ تنزیل تعاریف متفاوتی وجود دارد. در برخی موارد، نرخ تنزیل معادل میانگین وزنی هزینه سازمان جهت سرمایه‌گذاری در بازاریابی در نظر گرفته می‌شود در برخی دیگر، نرخ تنزیل را برابر با سود مورد انتظار سازمان از سرمایه‌گذاری در جهت محصول مورد نظر می‌دانند. در واقع، نرخ تنزیل درصدی است که مفهوم ارزش زمانی پول را با خود به همراه دارد [۳۹].

^{۱۹}Cash flows

^{۲۰}Discount factor

۳.۳.۲ مدل‌های محاسباتی ارزش طول عمر مشتری

معمولاً مدل‌های ارزش طول عمر مشتری زمانی استفاده می‌شوند که سودآوری یک مشتری در درازمدت مورد اندازه‌گیری قرار گیرد و هدف اصلی از محاسبه آن، ایجاد یک برداشت وزنی از مشتریان به منظور تخصیص بهینه منابع به آن‌ها است. مدل پیش‌بینی می‌تواند سطوح متفاوتی از پیچیدگی و دقت را از یک الگوریتم ساده ابتکاری، تا روش‌های پیچیده تحلیل داده، داشته باشد. همچنین مدلسازی ارزش طول عمر مشتری بستگی به ماهیت کسب و کار و اهداف مدلسازی نیز دارد.

در این مدل‌ها، ارزش یک مشتری بر اساس متغیرهای مختلف معرفی و محاسبه می‌شود زیرا با توجه به سیاست‌های متفاوت سازمان‌ها و شرکت‌های گوناگون و نوع اطلاعاتی که در اختیار داریم روش‌های متفاوتی برای محاسبه آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متداول‌ترین روش‌های مطرح شده عبارت‌اند از: روش ارزش خالص فعلی (NPV)^{۲۱}، روش سهم کیف پول (SOW)^{۲۲}، روش زنجیره مارکوف^{۲۳}، روش ارزش گذشته مشتری (PCV)^{۲۴}، روش بازگشت سرمایه (ROI)^{۲۵} و روش آر.اف.ام (RFM)^{۲۶}. در واقع، همه این مدل‌ها از مدل پایه و ابتدایی ارزش طول عمر مشتری تبعیت می‌کنند. مدل RMF قدرتمندترین مدل در زمینه محاسبه ارزش طول عمر مشتری است که سه فاکتور تازگی^{۲۷}، تعداد دفعات خرید^{۲۸} و ارزش مالی خرید^{۲۹} را در نظر می‌گیرد. تازگی، فاصله زمانی از آخرین استفاده از خدمات شرکت توسط مشتری است که هر چه مقدار تازگی کمتر باشد احتمال خرید بیشتر است. تعداد دفعات بیشتر نشان‌دهنده وفاداری مشتری است و ارزش مالی بالاتر نشانگر نیاز به توجه بیشتر سازمان به چنین مشتریانی است.

به طور کلی، مدل‌های محاسبه ارزش طول عمر مشتری را می‌توان به دو دسته کلی مدل‌های مبتنی بر حفظ و مدل‌های مبتنی بر مهاجرت^{۳۰} مشتری دسته‌بندی کرد. در مدل‌های مبتنی بر حفظ مشتری، فرض می‌شود که به دلیل هزینه بالای تعویض شرکت توسط مشتری و یا عدم وجود شرکت مشابه، مشتریان به یک شرکت خاص وفادار هستند لذا اگر مشتری برای مدتی با شرکت قطع رابطه کند دیگر احتمالی برای بازگشت او در نظر گرفته نمی‌شود. اما در روش دیگر، مشتریان می‌توانند از چندین فروشنده خریداری کنند و مشتری چندین شرکت باشند که میزان خرید از هر یک را تنظیم می‌کنند. در این مدل رفتار مشتریان بصورت احتمالی در نظر گرفته شده و بر اساس آن پیش‌بینی خرید را انجام می‌دهد [۱۳]. چنین مدل‌هایی برای محیط با رقابت بالا مناسب هستند. در ادامه به معرفی هر یک از مدل‌ها پرداخته شده‌است.

^{۲۱} Net present value

^{۲۲} Share of wallet

^{۲۳} Markov chaine

^{۲۴} Past customer value

^{۲۵} Return on investment

^{۲۶} Recency, Frequensy, Monetary

^{۲۷} Recency

^{۲۸} Frequency

^{۲۹} Monetary

^{۳۰} Migration

مدل‌های مبتنی بر حفظ

در این مدل‌ها نرخ به عنوان نرخ حفظ مشتری برای آن دسته از مشتریان که هر ساله به شرکت وفادار می‌مانند، تعریف می‌شود. به عبارت دیگر نرخ حفظ را می‌توان در قالب احتمال عدم رویگردانی^{۳۱} مشتری از شرکت، در یک دوره یکساله تفسیر نمود. بدین ترتیب ارزش طول عمر مشتری از طریق رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود [۱۷]:

$$CLV_i = (r_i - c_i) \cdot \sum_{t=1}^T \frac{p_i}{(1 + \alpha)^t} \quad (4.2)$$

که در آن p نرخ حفظ مشتری و r و c به ترتیب درآمد بدست آمده و هزینه صرف شده برای مشتری i است.

اگر زمان بصورت پیوسته در نظر گرفته شود مدلی برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری بر اساس تابع بقا^{۳۲} بدست می‌آید.

فرض کنید متغیر تصادفی X نشان‌دهنده رویگردانی مشتری از سازمان باشد، در این صورت تابع بقای $\bar{F}(t) = P(X > t)$ احتمال این است که تا زمان t مشتری از سازمان رویگردانی نکرده است یا به عبارتی دیگر احتمال حضور مشتری در سازمان تا لحظه t را نشان می‌دهد. در این صورت مدل ارزش طول عمر مشتری بصورت زیر خواهد بود [۳۵]:

$$CLV = \int_{t=0}^T v(t) \bar{F}(t) D(t) dt \quad (5.2)$$

$v(t)$ نشان‌دهنده مقدار ارزشی است که از مشتری در طول زمان t بدست می‌آید. این مقدار در زمان صفر، ارزش فعلی مشتری را بدست می‌آورد. با استفاده از تابع بقا، می‌توان تابع $f(t) = -d\bar{F}/dt$ را به عنوان احتمال لحظه‌ای رویگردانی مشتری از سازمان در زمان t تعریف نمود و سپس تابع خطر^{۳۳} را محاسبه نمود $(h(t) = f(t)/\bar{F}(t))$. بسیاری از تابع $f(t)$ برای محاسبه میزان رویگردانی مشتریان استفاده می‌کنند، اما اثبات شده که $h(t)$ مقدار مناسب‌تری را بدست می‌آورد [۳۵]. تابع $D(t)$ نیز ضریب تنزیل است. در فصل ۵ نیز به معرفی این مدل و بهینه‌سازی آن پرداخته می‌شود.

مدل‌های مبتنی بر مهاجرت

مدل‌های مبتنی بر مهاجرت را می‌توان حالت تعمیم یافته‌ای از مدل‌های مبتنی بر حفظ در نظر گرفت. بسیاری از این مدل‌ها از زمان آخرین خرید مشتری به منظور پیش‌بینی خرید بعدی وی استفاده می‌کنند [۱۳]. به عبارت دیگر می‌توان گفت این مدل یک تابع ماندگاری بر مبنای زمان سپری شده از آخرین خرید مشتری را برای محاسبه ارزش طول عمر وی در نظر می‌گیرد. برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری ابتدا تعداد مشتری‌هایی که در یک سال معین از خدمات شرکت استفاده می‌کنند محاسبه شده

^{۳۱} Churning

^{۳۲} Survivor function

^{۳۳} Hazard function

و سپس متوسط ارزش طول عمر برای هر مشتری بدست می‌آید. برای محاسبه مشتریانی که در طی یک دوره به طور مداوم از خدمات استفاده می‌کنند از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$N_t = \sum_{j=1}^t \left[N_{(t-j)} p_j \prod_{k=1}^j (1 - p_{(j-k)}) \right] \quad (6.2)$$

در این رابطه، p_j احتمال خرید مشتری با فرض اینکه زمان سپری شده از آخرین خریدش j باشد. $p_0 = 0$ و N_0 تعداد مشتریان اولیه است. رابطه فوق یک رابطه بازگشتی است و چنانچه تعداد مشتریان اولیه معلوم باشد، مقدار متوسط تعداد مشتریان سال‌های بعد قابل محاسبه خواهد بود. حال برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری از مدل زیر استفاده می‌شود:

$$CLV = \frac{(r - c)}{N_0} \sum_{t=0}^T \frac{N_t}{(1 + \alpha)^t} \quad (7.2)$$

۴.۳.۲ مقایسه مدل‌ها

معمولاً مدل‌های بر اساس نرخ حفظ مشتری، برای سازمان‌هایی مناسبند که نوع کسب و کارشان به گونه‌ای است که از بین سازمان‌های رقیب، مشتری فقط با آن‌ها در ارتباط است و در آن مشتری برای جابجایی باید هزینه زیادی را تقبل کند و اگر به هر دلیل سازمان را ترک کند، دیگر به آن باز نخواهد گشت. شرکت‌های بیمه از جمله این سازمان‌ها می‌باشند. شرکت‌های بیمه از میانگین ارزش دوره عمر مشتریان بر اساس نرخ نگهداری و تابع بقای مشتری برای تخمین میزان فروش جانبی خود استفاده می‌کنند [۱۲].

مدل (۵.۲) زمان را به طور پیوسته و سود حاصل از مشتری، ضریب تنزیل و بقای مشتری در سازمان را تابعی از زمان در نظر می‌گیرد. از این مدل‌ها در شرکت‌های مخابراتی و ارتباطات راه دور استفاده می‌شود [۳۵].

از مدل‌های بر اساس مهاجرت مشتری برای سازمان‌هایی که فضای رقابتی دارند، استفاده می‌شود. در این سازمان‌ها این امکان وجود دارد که مشتری پس از مدتی که سازمان را ترک کرده و دوباره به آن رجوع کند [۳۹]. این مدل‌ها برای سازمان‌هایی مناسب است که مشتریان می‌توانند هزینه کمی برای تعویض و جابجایی خود به سازمان‌های دیگر بپردازند (مانند شرکت هواپیمایی).

۴.۲ کاربردهای استفاده از ارزش طول عمر مشتری

ارزش طول عمر مشتری در اندازه‌گیری عملکرد و تحلیل فعالیت‌های کسب و کار [۳۶]، بازاریابی و تخصیص منابع [۳۳]، پیشنهاد محصول و قیمت‌گذاری [۲۰]، سنجش میزان وفاداری و پیش‌بینی رویگردانی مشتریان، بخش‌بندی و ... استفاده شده است. برای رسیدن به هر یک از اهداف بالا مدل‌هایی پیشنهاد شده و ابزارهای مختلفی بکارگرفته شده است.

یکی از مهم‌ترین موارد استفاده از مدل ارزش طول عمر مشتری برای بخش‌بندی مشتریان است. این بخش‌بندی با دانستن این مسئله آغاز می‌شود، که تمامی مشتریان دارای ارزش یکسانی برای شرکت نیستند. تقسیم مشتریان بر اساس متریک ارزش طول عمر به شرکت‌ها اجازه می‌دهد که سودده‌ترین گروه‌های مشتریان خود را پیش‌بینی کرده و به جای تمرکز بر مشتریان کمتر سودده، بر روی آنان متمرکز کنند.

روش‌های مختلفی برای بخش‌بندی مشتریان با استفاده از ارزش طول عمر آن‌ها استفاده می‌شود که می‌توان به مدل‌های RFM،^{۳۴} احتمالی^{۳۵}، اقتصادسنجی^{۳۶}، پایدار^{۳۷}، مبتنی بر علوم کامپیوتری^{۳۸}، اشاره کرد^{۳۹} [۱۷]. مدل‌های احتمالی مبتنی بر زنجیره مارکوف^{۴۰} و مدل Pareto/NBD هستند [۱۵] [۱۹]. مدل‌های اقتصادی بر اساس مدل Pareto/NBD پیاده‌سازی می‌شوند، به خصوص در مواردی، این مدل‌ها احتمال ریزش مشتریان را برآورد می‌کنند. مدل‌های پایدار به مدل کردن رفتار اجزاء مختلف خود می‌پردازند و در مواردی که تعداد کافی از نمونه‌های مربوط به این اجزاء در دسترس باشد می‌توان از سری‌های زمانی برای پویایی آن استفاده کرد [۸]. در مدل‌های مبتنی بر علوم کامپیوتری از روش‌های کامپیوتری مانند شبکه‌های عصبی^{۳۹}، درخت تصمیم‌گیری^{۴۰}، درخت دسته‌بندی و رگرسیون استفاده شده است [۲۶].

پژوهش‌های بسیار زیادی در سال‌های اخیر برای بخش‌بندی مشتریان سازمان‌ها و شرکت‌ها به خصوص بانک‌ها و موسسات مالی با استفاده از محاسبه ارزش طول عمر در داخل و خارج از کشور صورت گرفته است، که هر کدام با توجه به نوع داده‌ها و اطلاعاتی که از مشتریان خود در اختیار داشته‌اند از مدل‌های مختلف استفاده کردند.

به عنوان مثال خواجهوند و همکاران چارچوبی جهت بخش‌بندی مشتریان بانک صادرات ایران بر اساس عوامل مؤثر بر ارزش طول عمر مشتری ارائه دادند [۲]. برای این منظور مجموعه‌ای از تراکنش‌های مربوط به ۳۰۰۰۰ مشتری بانک صادرات (شعب تهران) در حوزه بانکداری خرد و در بازه زمانی اول فروردین ماه سال ۱۳۸۹ تا اول فروردین ماه سال ۱۳۹۰ دریافت شد و پس از آن با استفاده از مدل RFM و با کمک تکنیک درخت تصمیم، مشتریان به چهار دسته ”مشتریان طلایی“، ”مشتریان ارزشمند و وفادار“، ”مشتریان با احتمال رویگردانی“ و ”مشتریان کم ارزش“ تقسیم شدند.

همچنین صفری کهره و همکاران به ارائه مدل مناسبی برای سنجش و اندازه‌گیری ارزش طول عمر مشتریان و سپس بخش‌بندی آن‌ها پرداختند [۳]. به این ترتیب که نمونه‌ای از حساب‌های قرض الحسنه یکی از بانک‌های تجاری ایران، برای ۱۰۰۰۰ مشتری از سال ۱۳۸۴ تا سال ۱۳۸۷ به مدت ۴ سال انتخاب شد و مبنای محاسبه CLV قرار گرفت که نتایج آن در جدول ۲.۲ آورده شده است.

^{۳۴} Probability models

^{۳۵} Econometric models

^{۳۶} Persistence models

^{۳۷} Computer science models

^{۳۸} Markov chain

^{۳۹} Neural network

^{۴۰} Decision tree

جدول ۲.۲: مجموع مقادیر مربوط به محاسبه CLV یکی از بانک‌های تجاری ایران

سال	تعداد (n)	CLV محاسبه شده برای مجموع حساب‌ها	میانگین CLV برای هر سال
۱۳۸۴	۱۰۰۰۰	۳۷۰۵۲۳۱۰۳۰	۳۷۰۵۲۳
۱۳۸۵	۱۰۰۰۰	۷۸۰۱۶۴۷۹۴۰	۷۸۰۱۶۵
۱۳۸۶	۱۰۰۰۰	۵۵۰۳۴۲۵۷۲۰	۵۵۰۳۴۲
۱۳۸۷	۱۰۰۰۰	۲۳۷۳۶۱۸۸۴۰	۲۳۷۳۶۲
مجموع (CE)	—	۱۹۳۸۳۹۲۳۵۳۰	—

سپس بر اساس مقادیر CLV برای هر مشتری، بخش‌بندی آن‌ها با استفاده از روش خوشه‌بندی^{۴۱} انجام شده و براساس میانگین هر خوشه که نشان دهنده ارزش CLV آن دسته است برای هر یک از سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۸۷ بخش‌بندی انجام شده است. برای نمونه حاصل محاسبات سال ۱۳۸۴ را در جدول ۳.۲ آورده شده است:

جدول ۳.۲: دسته‌بندی مشتریان براساس CLV برای سال ۱۳۸۴

عنوان هر دسته	تعداد (n)	میانگین هر دسته
GC	۱۰۰۰	۲۸۶۰۲۱
A	۱۲۰۰	۳۹۷۲۰
B	۱۷۳	۳۲۵۱۹
C	۳۹۶	۲۰۳۹۹
D	۹۴۹	۹۵۱۳
E	۶۲۸۲	۲۲۴۵
مجموع	۱۰۰۰۰	۳۷۰۵۲۳۱۰۳۰

مشتریان بخش GC مشتریان طلایی، بخش A مشتریان با سودآوری مناسب، بخش B و C با سودآوری متوسط، بخش D مشتریان با ارزش پایین و بخش E مشتریان کم ارزش تلقی شدند. این بخش‌بندی‌ها به سازمان‌ها کمک می‌کند که مشتریان با ارزش خود را شناخته و در حفظ و ارائه تسهیلات ویژه به آن‌ها تلاش کنند همچنین باعث شناخت مشتریانی که ممکن است در دوره‌های آینده سازمان را ترک کنند یا در اصطلاح مشتریان رویگردان^{۴۲} می‌شود، که ممکن است سازمان‌ها برنامه‌ای برای حفظ آن‌ها داشته باشند.

از مدل‌های دیگری با توجه به نوع داده‌ها و اطلاعات موجود از مشتریان ممکن است استفاده شود که می‌توان به مدل ارزش طول عمر مشتری با استفاده از زنجیره مارکوف^{۴۳} اشاره کرد. مدل‌های مبتنی

^{۴۱}Clustering

^{۴۲}Customer churn

^{۴۳}Markov chaine

بر زنجیره مارکوف هم بر اساس حفظ مشتری و هم بر اساس مهاجرت مشتری قابل تعریف هستند. زیرا زنجیره مارکوف هم بر اساس نگهداری^{۴۴} و هم بر اساس مهاجرت مشتری^{۴۵} می‌تواند طراحی شود. بنابراین هم برای سازمان‌های رقابتی و هم برای سازمان‌هایی که مشتریان آن‌ها به صورت انحصاری با آنان در ارتباطند، مناسب است [۳۱].

برای معرفی این مدل، در فصل ۳ ابتدا به معرفی فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف و مدل ارزش طول عمر مشتری مبتنی بر فرآیند مارکوف پرداخته و سپس با توجه به اهمیت ارزش طول عمر مشتری در بازاریابی به بهینه کردن آن با یافتن سیاست بهینه می‌پردازیم.

^{۴۴} Retention-based model

^{۴۵} Migration-based model

فصل ۳

فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف

۱.۳ مقدمه

تجزیه و تحلیل مارکوف یا فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف^۱ (MDP) به عنوان یک ابزار توصیفی هدف عمده‌اش پیش‌بینی رفتار آینده سیستم‌های مدیریتی است که این سیستم می‌تواند یک شخص، یک سازمان، تقاضا برای یک محصول، یک ماشین و یا مواردی از این قبیل باشد. روش مارکوف تحلیلی است که به ما اجازه می‌دهد تا آینده را از طریق به کار بردن حالت‌های احتمالی و ماتریس احتمالات انتقال پیش‌بینی کنیم.

تحلیل مارکوف با تحقیق‌های آندری مارکوف^۲ در سال ۱۹۰۶ درباره‌ی توالی آزمایش‌های پیوسته آغاز شد. اولین تعبیرهای ریاضی صحیح از فرآیند مارکوف برای مسیرهای پیوسته در سال ۱۹۲۳ توسط دان ونیر^۳ ارائه شد، ولی نظریه جامع فرآیند و تحلیل‌های مارکوف توسط گرو^۴، دوبلین^۵، لوی^۶ و دوب^۷ در دهه ۱۹۳۰ تکمیل شد [۱].

فرآیند مارکوف کاربرد بسیاری در تصمیم‌گیری مدیریت مانند برنامه‌ریزی نیروی انسانی، کنترل موجودی،

^۱Markov decision processes

^۲Andrey Markov

^۳Don Venir

^۴Groff

^۵Doblin

^۶Levi

^۷Dob

تعمیرات و نگهداری دستگاه، توقف بهینه^۸ و ... دارد. مثلاً گاهی یک پست خاص در یک سازمان با کمبود نیروی انسانی رو به رو می‌شود، در حالی که ممکن است همین پست در زمان‌های دیگر با تورم نیرو رو به رو باشد. موجودی انبار سازمان‌ها در برخی اوقات به صفر می‌رسد و به توقف خط تولید منجر می‌شود در صورتی که در اوقات دیگر موجودی انبار بسیار زیاد است و یا با خراب شدن دستگاهی شرکت هزینه‌های زیادی را بابت تعمیرات و نگهداری آن متحمل می‌شود. همچنین یک سازمان یا شرکت نیازمند پیش‌بینی رفتار مشتریان خود برای حفظ و نگهداری آن‌هاست. برای این منظور به کمک فرآیند مارکوف می‌توان رفتار یک سیستم را پیش‌بینی کرد و بهترین تصمیم را برای جلوگیری از ضرر احتمالی اتخاذ نمود. اکنون به معرفی چند نمونه از تحقیقات و پژوهش‌های بسیار صورت گرفته در این زمینه می‌پردازیم.

گودانگ^۹ از مدل مارکوف، برای افزایش صحت تولید و کیفیت محصولات، از طریق پیش‌بینی زمان کنترل‌های جبرانی استفاده نمود [۲۵]. تحقیقی تحت عنوان برنامه ریزی نیروی انسانی در سوئزلند توسط تاپیسا^{۱۰} به منظور پیش‌بینی سیستماتیک عرضه و تقاضای نیرو کار آینده در کتابخانه سوئزلند انجام شد که این پژوهش اصولی را برای افرادی که مسئولیت برنامه‌ریزی نیروی انسانی را بر عهده دارند طراحی کرد که به موجب آن مشخص شد چه توانایی‌ها، دانش‌ها و صلاحیت‌هایی برای پست‌ها یا مشاغل در آینده مورد نیاز است [۳۸]. کوت^{۱۱} نیز از مدل مارکوف برای انتشار کتاب‌های علوم اجتماعی و ادبیات در یک کتابخانه عمومی، به منظور قضاوت در مورد ارزش کتاب‌ها استفاده نمود [۲۳]. در این زمینه تحقیقاتی هم در داخل کشور انجام شده است. برای نمونه صحرایی در تحقیقی تحت عنوان ”پیش‌بینی عرضه داخلی نیروی سازمان با استفاده از مدل زنجیره مارکوف“ به منظور پیش‌بینی عرضه خالص نیروی انسانی در هر یک از واحدها و پست‌های سازمانی و بررسی مازادها و کمبودهای کارکنان در هر یک از پست‌های شرکت ملی پخش فرآورده‌های نفتی انجام داد [۳۷]. در این فصل ابتدا فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف و کاربرد آن برای پیش‌بینی رفتار یک سیستم معرفی شده است و در نهایت روش‌های حل فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف را، با یافتن بهترین تصمیم خواهیم داشت.

۲.۳ فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف

۱.۲.۳ فرآیندهای تصادفی

فرض کنید t نشان‌دهنده زمان باشد، فرآیند تصادفی^{۱۲} مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی: $\{X_t \in S : t \in T\}$ با مجموعه اندیس‌گذار T و فضای حالت S است، که در آن $X_t \in S$ به ازای هر $t \in T$ یک متغیر تصادفی است. اگر $T = \mathbb{Z}$ ، آنگاه $\{X_t : t \in T\}$ یک فرآیند تصادفی گسسته است که دنباله تصادفی نامیده می‌شود. اگر $T = [0, 1]$ یا $T = [0, \infty)$ آنگاه یک فرآیند تصادفی پیوسته است.

^۸Optimal stopping

^۹Guo-Dong

^{۱۰}Thapisa

^{۱۱}Kohut

^{۱۲}Stochastic process

فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف یا خاصیت مارکوفی حالت خاصی از فرآیندهای تصادفی است که اگر زمان را در این فرآیند به سه دوره گذشته، حال و آینده تقسیم کنیم، آینده این فرآیند بستگی به مسیری که در گذشته طی کرده است، ندارد و تنها به موقعیت آن در زمان حال وابسته است. مثلاً فرآیند پواسون^{۱۳} نوعی فرآیند مارکوف است زیرا در آن تعداد پیشامدهایی که از یک لحظه معین به بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن اتفاق افتاده است. به عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرآیند در لحظاتی مانند $t_1, t_2, \dots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حالت آینده این فرآیند در زمان t_{n+1} ، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرآیند در لحظه t_n کافی است. خاصیت مارکوفی یک فرآیند را می‌توان به زبان ریاضی نیز نشان داد. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t, t \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. اگر X_t طبق فرآیند مارکوف عمل کند رابطه زیر برقرار است:

$$P[X_{t_{n+1}} \leq x | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1] = P[X_{t_{n+1}} \leq x | X_{t_n} = x_n]$$

فرآیندهای مارکوف را می‌توان به طور کلی، برحسب دو عامل دسته‌بندی کرد:

الف) پارامتر t ، که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. گسسته بودن t را می‌توان چنین تفسیر کرد که رفتار سیستم تنها در مقاطع مشخصی از زمان مطالعه می‌شود. در صورتیکه t گسسته باشد، X_t با متغیرهای تصادفی به شکل $X_1, X_2, \dots, X_n$ جایگزین می‌شود.

ب) مجموعه مقادیری را که X_t می‌تواند انتخاب کند، برحسب تعریف، حالت سیستم یا فضای حالت نامیده و با S نشان می‌دهند. فضای حالت S می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

۲.۲.۳ زنجیره مارکوف

زنجیره مارکوف حالت خاصی از فرآیند مارکوف است که در آن پارامتر t و حالت سیستم فقط مقادیر گسسته را انتخاب می‌کند. بر این اساس فرآیند تصادفی $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ را زنجیره مارکوف می‌نامند، اگر برای هر $t \in \mathbb{N}$ و $i, j \in S$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$P(X_{n+1} = j | X_1, X_2, \dots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (1.3)$$

در اینجا به n مرحله یا دوره گفته می‌شود.

عبارت فوق بیانگر احتمال وجود فرآیند در دوره $n + 1$ در حالت j به شرط اینکه در دوره n در حالت i بوده، می‌باشد.

به طور کلی فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف به وسیله چهار نوع اطلاعات توصیف می‌شود:

۱. فضای حالت^{۱۴} (S)

۲. مجموعه تصمیم^{۱۵} (D)

^{۱۳} Poisson process

^{۱۴} State space

^{۱۵} Decision set

۳. احتمالات انتقال^{۱۶} (p)

۴. عایدی (ضرر) مورد انتظار (r)

فضای حالت

در آغاز هر دوره، MDP در حالت i است که i عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, N\}$ است. S به فضای حالت MDP اشاره دارد.

مجموعه تصمیم

برای هر حالت i مجموعه‌ی متناهی از تصمیم‌های مجاز $D(i)$ وجود دارد.

احتمالات انتقال

احتمال شرطی $p(j|i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ را احتمال انتقال یک مرحله‌ای از وضعیت i در مرحله n (زمان n ام، به وضعیت j در مرحله $n+1$ ام می‌نامیم. این احتمال فقط بستگی به j ، i و n دارد. احتمال انتقال یک مرحله‌ای را با p_{ij} نمایش می‌دهیم.

در واقع $p_{ij,d} = p(j|i, d)$ برای $i, j \in S$ ، احتمال انتقال سیستم از حالت i به j نامیده می‌شود در صورتی که تصمیم $d \in D(i)$ انتخاب شده باشد. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم در آغاز یک دوره در حالت i قرار داریم و تصمیم $d \in D(i)$ انتخاب شده باشد، با احتمال $p(j|i, d)$ ، حالت دوره بعدی j خواهد بود که فقط به حالت دوره فعلی و تصمیم گرفته شده در طول دوره فعلی بستگی دارد (نه به حالت‌های گذشته و تصمیمات آن).

ماتریس P که درایه‌های آن احتمال‌های انتقال از یک حالت به حالت دیگر است را ماتریس انتقال^{۱۷} می‌نامند.

در ماتریس P :

(i) برای هر $i, j \in S$ ، $p_{ij} \geq 0$ است.

(ii) برای هر $i \in S$ ، $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ است.

به عبارت دیگر تمام درایه‌های ماتریس انتقال نامنفی هستند و مجموع عناصر هر سطر باید برابر با یک باشد چون یک سیستم به احتمال صد در صد در یکی از مجموعه حالت‌های ممکن در هر لحظه‌ای از زمان خواهد بود. اما مجموع عناصر یک ستون الزاماً یک نیست. اگر مجموع احتمالات هر ستون برابر یک باشد آن ماتریس را ماتریس انتقال مضاعف می‌نامند.

زنجیره مارکوف را معمولاً می‌توان با یک گراف انتقال حالت نشان داد که در مثال زیر نشان داده شده است.

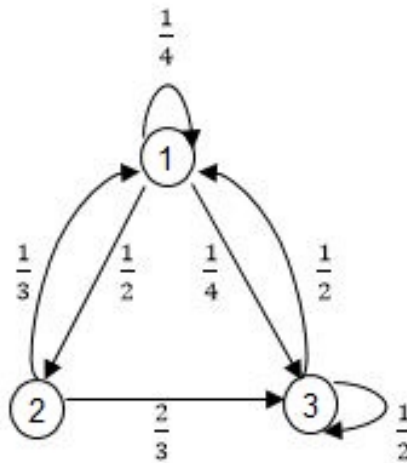
^{۱۶}Transition probability

^{۱۷}Transition matrix

مثال ۱.۲.۳. یک زنجیره مارکوف با فضای حالت $S = \{1, 2, 3\}$ و احتمالات انتقال زیر را در نظر بگیرید:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

گراف زیر نحوه انتقال حالات را نشان می‌دهد. اگر هیچ یالی بین i و j نباشد یعنی احتمال انتقال حالت از i به j صفر است، به عبارتی دیگر: $p_{ij} = 0$.



شکل ۱.۳: دیاگرام انتقال حالت در زنجیره مارکوف

بر اساس گراف فوق برای مثال داریم:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 3 | X_1 = 2) &= p_{23} = \frac{2}{3} \\ P(X_3 = 1 | X_2 = 1) &= p_{11} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

فرض کنید $P(X_0 = 1) = \frac{1}{3}$ ، در این صورت با توجه به خاصیت مارکوفی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1, X_1 = 2) &= P(X_0 = 1)P(X_1 = 2 | X_0 = 1) \\ &= \frac{1}{3}p_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned}
 P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3) &= \\
 &= P(X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_2 = 3|X_1 = 2, X_0 = 1) \\
 &= P(X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_2 = 3|X_1 = 2) \\
 &= \frac{1}{3}p_{12}p_{23} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

زنجیره مارکوف مرتبه اول و مراتب بالاتر

وقتی ماتریس احتمالات جابجایی تشکیل می‌شود باید درجات مختلف زنجیره مارکوف را در نظر گرفت. چنانچه احتمال شرطی فقط به i و j بستگی داشته باشد و مستقل از n باشد زنجیره مارکوف را، همگن^{۱۸} می‌گویند. به عبارت دیگر، زنجیره‌های مارکوف همگن، زنجیره‌هایی هستند که در آن‌ها

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_n = j|X_{n-1} = i)$$

که رابطه بالا برای هر n صحیح است. در واقع احتمال انتقال مستقل از n است و در آن فرض می‌شود که احتمالات جابجایی از یک دوره به دوره بعد تغییر نمی‌کند. مرتبه یک زنجیره مارکوف برابر است با طول حافظه‌ای که مقادیر احتمال ممکن، برای حالت بعدی به کمک آن محاسبه می‌شود. زنجیره مارکوف مرتبه m (که در آن m متناهی است) فرایندی است که در آن، حالت بعدی به m حالت قبلی وابسته است. مثلاً در بازار، انتخاب زنجیره مارکوف مرتبه دوم با این فرض است که انتخاب محصولات توسط مشتریان بستگی به دو دوره گذشته دارد. به طور کلی تحقیقات بازار نشان داده است که مسائل حل شده با فرضیات مرتبه اول صحت خود را نشان داده است زیرا نوسان‌های بازار از یک روند ثابت برخوردار است. در این پایان‌نامه نیز مسائل مرتبه اول از زنجیره مارکوف در نظر گرفته می‌شود.

عایدی (ضرر) مورد انتظار

در طول یک دوره که در حالت i قرار داریم و تصمیم $d \in D(i)$ انتخاب شده است، عایدی (ضرر) $r_{i,d}$ حاصل می‌شود.

به طور کلی فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۲.۲.۳. فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف به عنوان یک چندتایی $M = (S, D, p, r)$ تعریف می‌شود که در آن: S فضای حالت، D مجموعه تصمیم، $p(j|i, d)$ احتمال انتقال با

$$p(j|i, d) = P(X_{t+1} = j|X_t = i, d_t = d)$$

^{۱۸}Homogeneous

$r_{i,d}$ عایدی (ضرر) حاصل از اتخاذ تصمیم $d \in D(i)$ است. حال برای درک بهتر این موضوع به مثال ۳.۲.۳ توجه شود.

مثال ۳.۲.۳. یک دستگاه که در فرآیند تولید کار می‌کند به صورت دوره‌ای در پایان هر هفته از لحاظ کیفیت معاینه و بررسی می‌شود. پس از هر بررسی وضعیت دستگاه‌ها، در یکی از چهار وضعیت، عالی (E)، خوب (G)، متوسط (A) و بد (B) قرار دارد. درآمد هفتگی بدست آمده توسط دستگاه در وضعیت عالی ۱۰۰ دلار، خوب ۸۰ دلار، متوسط ۵۰ دلار و بد ۱۰ دلار است. دستگاه‌ها در آغاز هر هفته مورد بررسی قرار می‌گیرند، بعد از مشاهده وضعیت هر دستگاه می‌توان گزینه‌هایی را با یک دستگاه عالی جایگزین کرد که هزینه تعویض آن ۲۰۰ دلار است. کیفیت دستگاه‌ها در طول زمان در جدول ۱.۳ نشان داده شده‌است. برای این شرایط فضای حالت، مجموعه تصمیم، احتمالات انتقال و میانگین عایدی (ضرر) را بدست می‌آوریم.

جدول ۱.۳: احتمالات تغییر وضعیت دستگاه در هفته

احتمال وضعیت دستگاه در هفته بعد				
وضعیت فعلی دستگاه	عالی	خوب	متوسط	بد
عالی (E)	۰/۷	۰/۳	۰	۰
خوب (G)	۰	۰/۷	۰/۳	۰
متوسط (A)	۰	۰	۰/۶	۰/۴
بد (B)	۰	۰	۰	۱

در این مثال مجموعه حالت‌های ممکن برای یک دستگاه $S = \{E, G, A, B\}$ است.

تصمیمات ممکن برای هر حالت بصورت زیر است :

R = تعویض (جایگزینی) در شروع دوره فعلی

NR = عدم تعویض (جایگزینی) در طول دوره فعلی

حال مجموعه تصمیم را برای هر حالت بدست می‌آوریم. چون جایگزینی دستگاهی که در وضعیت

عالی قرار دارد بی معنی است، لذا داریم:

$$D(E) = \{NR\} \quad D(G) = D(A) = D(B) = \{R, NR\}$$

احتمالات انتقال با توجه به تصمیم انتخاب شده بصورت زیر خواهد بود. برای زمانی که عدم تعویض

دستگاه را انتخاب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} p(E|E, NR) &= 0/7 & p(G|E, NR) &= 0/3 & p(A|E, NR) &= 0 & p(B|E, NR) &= 0 \\ p(E|G, NR) &= 0 & p(G|G, NR) &= 0/7 & p(A|G, NR) &= 0/3 & p(B|G, NR) &= 0 \\ p(E|A, NR) &= 0 & p(G|A, NR) &= 0 & p(A|A, NR) &= 0/6 & p(B|A, NR) &= 0/4 \\ p(E|B, NR) &= 0 & p(G|B, NR) &= 0 & p(A|B, NR) &= 0 & p(B|B, NR) &= 1 \end{aligned}$$

اگر یک دستگاه با یک دستگاه عالی جایگزین شود احتمالات انتقال با زمانیکه هفته را در وضعیت عالی شروع کند، یکسان خواهد بود. بنابراین:

$$p(E|G, R) = p(E|A, R) = p(E|B, R) = 0.7$$

$$p(G|G, R) = p(G|A, R) = p(G|B, R) = 0.3$$

$$p(A|G, R) = p(A|A, R) = p(A|B, R) = 0$$

$$p(B|G, R) = p(B|A, R) = p(B|B, R) = 0$$

اگر دستگاهی تعویض نشود میانگین عایدی برابر با درآمد هفتگی بدست آمده خواهد بود، بنابراین: $r_{B,NR} = 10$ ، $r_{A,NR} = 50$ ، $r_{G,NR} = 80$ ، $r_{E,NR} = 100$. اگر یک دستگاه با دستگاه عالی جایگزین شود مهم نیست که در آغاز هفته در چه وضعیتی بوده است، 100 دلار بدست آمده و 200 دلار هزینه شده است. بنابراین $r_{E,R} = r_{G,R} = r_{A,R} = r_{B,R} = -100$.

۳.۳ پیش بینی رفتار یک سیستم با استفاده از فرآیند مارکوف

همانطور که گفته شد در فرآیند مارکوف هدف یک مساله، مشخص کردن وضعیت در دوره‌های آینده است، در واقع با استفاده از فرآیند مارکوف می‌توان رفتار یک سیستم را با توجه به ویژگی‌هایی که در وضعیت حال دارد در زمان‌های آینده پیش‌بینی کرد که ممکن است این فاصله زمانی، کم (کوتاه مدت) و یا زیاد (بلند مدت) باشد. برای این که بخواهیم وضعیت فعالیت انتخاب شده در آینده نزدیک و یا وضعیت تعادلی در بلند مدت را بدست آوریم باید محاسبات ریاضی معینی انجام داده شود.

۱.۳.۳ محاسبات برای کوتاه مدت

در زمان‌های متفاوت احتمالات برای حالت‌های مختلف در زنجیره‌های مارکوف متفاوت است. به عبارت دیگر، احتمال رخ دادن یک حالت در زمان‌های n و $n+1$ یکسان نیست. فرض می‌کنیم احتمال اینکه، فرآیند در زمان اولیه در هریک از حالت‌ها باشد، مشخص است. برای بدست آوردن احتمالات حالت در زمان بعد، احتمال حالت اولیه را در ماتریس انتقال ضرب می‌کنیم. در واقع احتمالات حالت اولیه به عنوان یک ماتریس سطری در ماتریس انتقال ضرب می‌شود تا احتمال وجود فرآیند در هریک از حالت‌ها در دوره زمانی بعد مشخص شود:

$$\text{احتمالات حالت جدید}(n=1) = \text{ماتریس انتقال} \times \text{احتمالات حالت اولیه}(n=0)$$

برای بدست آوردن احتمالات حالت دوره‌ی $n=2$ ، به دو طریق می‌توان عمل کرد:

الف) احتمالات حالت دوره $n=1$ در ماتریس انتقال ضرب شود.

ب) احتمالات حالت دوره $n=0$ در توان دوم ماتریس انتقال، یعنی P^2 ضرب شود.

بدین ترتیب می‌توان برای دوره‌های بعد نیز عمل کرد و برای هر زمانی از n ، یا احتمالات حالت اولیه ($n = 0$) را در توان n ام ماتریس انتقال ضرب کرد و یا احتمالات حالت دوره ($n - 1$) را در ماتریس انتقال ضرب نمود. برای درک بهتر این موضوع در مثال زیر احتمالات انتقال در دوره‌های مختلف با استفاده از این روش بدست آمده است.

مثال ۱.۳.۳. [۱] فرض کنید ماتریس احتمالات انتقال یک فرآیند خاص مارکوف بصورت زیر باشد و $p_A^{(0)} = 0.45$ ، $p_B^{(0)} = 0.35$ و $p_C^{(0)} = 0.2$ احتمالات اولیه برای هر حالت باشند.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.75 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

اکنون احتمالات رخ دادن حالت‌های مختلف در دوره بعد را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\begin{pmatrix} 0.45 & 0.35 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46 & 0.3325 & 0.2075 \end{pmatrix}$$

چنانچه ملاحظه می‌شود، $p_A^{(1)} = 0.46$ ، $p_B^{(1)} = 0.3325$ و $p_C^{(1)} = 0.2075$ بدست آمده است. به همین ترتیب احتمالات را برای دوره‌های بعد می‌توان بدست آورد. احتمالات حالت برای چند دوره انتخابی در جدول زیر آمده است:

دوره	$n = 0$	$n = 1$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 25$	$n = 30$	$n = 35$
$p_A^{(n)}$	0.45	0.46	0.49466	0.49942	0.49982	0.49994	0.5000
$p_B^{(n)}$	0.35	0.3325	0.28970	0.28610	0.28584	0.28575	0.28575
$p_C^{(n)}$	0.20	0.2075	0.21564	0.21448	0.21434	0.21431	0.21431

با توجه به جدول بالا مشاهده می‌شود با افزایش n ، احتمالات حالت‌ها تغییر کمتری پیدا می‌کنند. این امر دلالت می‌کند که احتمالات حالت ممکن است به سمت یک مجموعه ثابت همگرا شود و سرانجام بدون تغییر باقی بمانند. در این زمان فرآیند به یک حالت پایدار^{۱۹} یا تعادل می‌رسد و در همان حالت باقی خواهد ماند تا اینکه اعمال خارجی احتمالات را تغییر دهند.

۲.۳.۳ محاسبات برای بلند مدت (حالت پایدار)

حالت پایدار (تعادل) به شرایطی در بلند مدت گفته می‌شود که در نهایت به آن خواهیم رسید. این شرایط زمانی بوجود می‌آید که در دوره‌های مختلف تغییری در ماتریس احتمالات جابجایی نداشته باشیم (اگر

^{۱۹}Steady state

احتمالات جابجایی در دوره‌های مختلف تغییر کند، برای یافتن حالت پایدار به درجات بالاتری از زنجیره مارکوف نیاز است).

برای بدست آوردن احتمالات حالت پایدار به روش مثال ۱.۳.۳، زمان زیادی نیاز است، بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۳.۳ روش دیگری ارائه شده است.

تعریف ۲.۳.۳ (زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر^{۲۰}). زنجیره مارکوف را کاهش‌ناپذیر می‌گوییم اگر در سیستمی که از حالت i ام شروع می‌شود با احتمال غیر صفر در نهایت به حالت j ام برسد. به عبارت دیگر عدد صحیح $n \geq 0$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}^n > 0$$

که $n = 0$ به معنای در دسترس بودن همه حالات از حالت i ام است. به بیان دیگر در زنجیره‌های مارکوف کاهش‌ناپذیر از هر حالت می‌توان به هر حالتی رسید.

قضیه ۳.۳.۳. [۹] با فرض کاهش‌ناپذیری زنجیره مارکوف، توزیع پایدار^{۲۱} $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ یکتا وجود دارد به طوریکه:

$$p = pP, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

معادله فوق، معادله ایستای زنجیره مارکوف نامیده می‌شود. بنابراین دستگاه زیر دارای جواب یکتا بوده و مجموعه احتمالات بدست آمده، احتمالات پایدار حالت‌ها است.

$$\begin{cases} (p_1, p_2, \dots, p_N) P_{N \times N} = (p_1, p_2, \dots, p_N) \\ p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

برای محاسبه احتمالات حالت پایدار در مثال ۱.۳.۳ با استفاده از قضیه ۳.۳.۳ داریم:

$$\begin{pmatrix} p_A & p_B & p_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_A & p_B & p_C \end{pmatrix}$$

بنابراین دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} 0.9p_A + 0.1p_B + 0.1p_C = p_A \\ 0.5p_A + 0.8p_B + 0.15p_C = p_B \\ 0.5p_A + 0.1p_B + 0.75p_C = p_C \\ p_A + p_B + p_C = 1 \end{cases}$$

^{۲۰}Irreducible

^{۲۱}Stationary distribution

با مرتب کردن معادلات فوق داریم:

$$\begin{cases} -0.1p_A + 0.1p_B + 0.1p_C = 0 & (1) \\ 0.05p_A - 0.2p_B + 0.15p_C = 0 & (2) \\ 0.05p_A + 0.1p_B - 0.25p_C = 0 & (3) \\ p_A + p_B + p_C = 1 & (4) \end{cases}$$

معادلات (۱)، (۲) و (۳) وابسته خطی هستند، بنابراین از یکی از معادلات صرف نظر کرده و با حل دستگاه فوق احتمالات حالت پایدار بصورت زیر بدست می‌آید:

$$p_A = 0.5 \quad p_B = 0.2857 \quad p_C = 0.2143$$

که نتایج به دست آمده، با نتایج محاسبات قبلی یکسان است.

۴.۳ کاربرد زنجیره مارکوف در مدل‌های محاسباتی CLV

در سال‌های اخیر استفاده از مدل‌های مارکوف جهت پیش‌بینی ارزش طول عمر مشتریان روندی رو به رشد داشته است [۳۹]. برای مثال در صنایع خدمات تعمیر خودرو یا در صنعت محصولات الکتریکی [۸]، و حتی خریدهای اینترنتی مشتریان [۲۷] از زنجیره مارکوف جهت محاسبه ارزش طول عمر مشتریان در حالت‌های گوناگون استفاده شده است.

همانطور که اشاره شد زنجیره مارکوف، توالی از متغیرهای تصادفی است که در آن ارزش یک متغیر تنها به حال وابسته است نه به گذشته. در پژوهش‌های انجام شده در زمینه استفاده از زنجیره مارکوف در محاسبه CLV استفاده از معیار RFM مرسوم بوده که در آن مشتریان بر مبنای یکی از معیارهای زمان سپری شده از آخرین خرید، تعداد دفعات خرید، ارزش پولی خرید^{۲۲} و یا ترکیبی از آن‌ها دسته‌بندی می‌شوند [۲۷]. در این صورت به کمک بخش‌بندی مشتریان می‌توان حالت یک فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف را بدست آورد.

برای مثال، اگر زمان سپری شده از آخرین خرید به عنوان معیاری برای تعیین حالت یک سیستم در نظر گرفته شود، داریم:

$$\begin{cases} s_1 & Recency = 1 \\ s_2 & Recency > 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

یعنی اگر از آخرین خرید مشتری تنها یک دوره زمانی گذشته باشد مشتری در حالت s_1 قرار می‌گیرد و در غیر این صورت در حالت s_2 قرار خواهد گرفت. به همین ترتیب می‌توان برای حالت‌های دیگر به دسته‌بندی مشتریان پرداخت.

با دانستن حالت‌ها و احتمالات وابسته به انتقال مشتریان، چنانچه هر حالتی جریان مالی خاص خود

^{۲۲}Monetary

را داشته باشد، مدل ارزش دوره عمر مشتری بر اساس زنجیره مارکوف مطابق با فرمول زیر خواهد بود [۳۱]:

$$CLV = \sum_{t=0}^T [(1+d)^{-1}P]^t R \quad (۴.۳)$$

ماتریس P ماتریس احتمالات انتقال، بردار R بردار پاداش با درایه r_j است که هر درایه r_j ، جریان مالی مرتبط با حالت j را نشان می‌دهد. d نرخ تنزیل و T طول رابطه است. اگر طول رابطه را بینهایت فرض کنیم، در صورتیکه $\|(1+d)^{-1}P\| < 1$ باشد. آنگاه رابطه بالا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$CLV^\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} CLV^T = [I - (1+d)^{-1}P]^{-1} R \quad (۵.۳)$$

چنانچه مشاهده شد از فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف برای پیش‌بینی ارزش یک مشتری برای بخش‌بندی مشتریان می‌توان استفاده کرد. در این مدل معیار اصلی دسته‌بندی مشتریان مقدار عایدی است که مشتریان نصیب سازمان می‌کنند. به طور کلی در فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف برای هر حالت مجموعه تصمیماتی در اختیار است که در آغاز هر دوره مجبور به انتخاب تصمیمی از آن‌ها هستیم. بنابراین معیاری برای انتخاب بهترین تصمیم در هر دوره نیاز است که در بخش بعد به آن پرداخته شده است.

۵.۳ سیاست بهینه

مطالب این بخش از مراجع [۵]، [۲۱]، [۴۱] و [۳۲] جمع‌آوری شده است. در یک MDP برای پاسخ به این سوال که چه معیاری باید برای انتخاب تصمیم درست انتخاب شود، نیاز است موضوعی به نام سیاست بهینه^{۲۳} معرفی شود.

تعریف ۱.۵.۳. یک سیاست^{۲۴}، نگاشتی از فضای حالت S به مجموعه تصمیم D است. به عبارت دیگر سیاست قاعده‌ای است که مشخص می‌کند که چگونه در هر دوره برای هر حالت تصمیمی انتخاب شود.

تصمیم دوره t ممکن است به سابقه قبلی فرآیند وابسته باشد. یعنی می‌تواند به حالت در طول دوره‌های $1, 2, \dots, t$ و به تصمیم‌های انتخاب شده در طول دوره‌های $1, 2, \dots, t-1$ بستگی داشته باشد. انتخاب تصمیم ممکن است قطعی ($\delta_t: S \rightarrow D$) یا تصادفی ($\delta_t: S \rightarrow \Delta(D)$) باشد. یک سیاست ممکن است غیر ثابت ($\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots)$) یا ثابت (مارکوفی) بصورت $\delta = (\delta, \delta, \dots)$ باشد.

تعریف ۲.۵.۳. سیاست δ ، سیاست ثابت (پایدار)^{۲۵} است، اگر در هر مقطع زمانی که در حالت i قرار داشتیم (مستقل از دوره)، سیاست δ تنها یک تصمیم مشخص اتخاذ کند. این سیاست را با $\delta(i)$ نمایش می‌دهند.

^{۲۳}Optimal policy

^{۲۴}Policy

^{۲۵}Stationary policy

برای ارزیابی یک سیاست و مقایسه سیاست‌ها برای انتخاب بهترین آن، از تابع ارزش^{۲۶} برای تخمین ارزش هر حالت استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۵.۳. ارزش یک حالت عبارت است از مجموع مقدار عایدی که با شروع از آن حالت و پیروی از سیاست مشخصی که به حالت نهایی ختم می‌شود، دریافت می‌گردد. ارزش هر حالت برای افق زمانی نامحدود با در نظر گرفتن نرخ تنزیل بصورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید δ نماینده یک سیاست دلخواه و Δ نماینده مجموعه تمام سیاست‌ها باشد. اگر $X_t =$ متغیر تصادفی برای حالت ممکن در آغاز دوره t (برای مثال، $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$) $X =$ حالت داده شده و معلوم فرایند در آغاز دوره $\circ$ (حالت اولیه) $\delta_t =$ سیاست انتخاب شده در طول دوره t $\alpha =$ نرخ تنزیل

$V_\delta(i) =$ امید ریاضی عایدی بدست آمده در طول دوره‌های نامحدود (ارزش)، با فرض اینکه در آغاز دوره‌ی اول حالت i است و سیاست δ خواهد بود. سپس:

$$V_\delta(i) = E_\delta \left(\sum_{t=\circ}^{t=\infty} \alpha^t r_{X_t, \delta(X_t)} | X_\circ = i \right) \quad (۶.۳)$$

که $E_\delta(\alpha^t r_{X_t, \delta(X_t)} | X_\circ = i)$ امید ریاضی عایدی بدست آمده در طول دوره t است. در واقع رابطه (۶.۳) تابع ارزش یک حالت برای افق زمانی نامحدود با نرخ تنزیل $\alpha \in [0, 1)$ است. برای هر $\alpha \in [0, 1)$ سری همیشه همگرا است (برای $r_{i,d}$ محدود و کراندار). تابع ارزش برای حالت نامتناهی همیشه با فرض $|r_{i,d}| \leq M < \infty$ برای هر $i \in S$ و هر $d \in D(i)$ در نظر گرفته می‌شود [۳۲].

در یک مسئله ماکزیم‌سازی، ارزش بهینه $V^*(i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V^*(i) = \text{Max}_{\delta \in \Delta} V_\delta(i) \quad (۷.۳)$$

و در یک مسئله مینیم‌سازی، تعریف می‌کنیم:

$$V^*(i) = \text{Min}_{\delta \in \Delta} V_\delta(i) \quad (۸.۳)$$

تعریف ۴.۵.۳. سیاست δ^* یک سیاست بهینه^{۲۷} است، اگر برای هر $i \in S$ خاصیت زیر برقرار باشد:

$$V^*(i) = V_{\delta^*}(i)$$

در واقع جواب یک MDP سیاست بهینه δ^* است که در آن:

$$\delta^* \in \text{argmax}_{\delta \in \Delta} V_\delta$$

^{۲۶} Value function

^{۲۷} optimal policy

تذکر : $\delta^* \in \operatorname{argmax}(\cdot)$ است نه $\delta^* = \operatorname{argmax}(\cdot)$ ، زیرا یک MDP ممکن است بیش از یک سیاست بهینه را بپذیرد. به عبارت دیگر وجود یک سیاست δ^* که همه i ها را به طور همزمان در (۷.۳) ماکزیمم کند بدیهی نیست. بلک ول^{۲۸} (۱۹۶۲) نشان داد اگر $r_{i,d}$ ها کراندار باشند سیاست بهینه وجود دارد [۴۱].

۶.۳ روش‌های تعیین سیاست بهینه

سیاست ثابت بهینه را برای یک MDP، می‌توان بوسیله سه روش زیر بدست می‌آورد:

۱. تکرار سیاست^{۲۹}

۲. برنامه‌ریزی خطی^{۳۰}

۳. تکرار ارزش^{۳۱} یا تقریب پی در پی

که در بخش‌های بعد تنها دو روش اول که از متداول‌ترین روش‌ها برای یافتن بهترین سیاست هستند، معرفی می‌شود.

۱.۶.۳ تکرار سیاست

معادلات تعیین ارزش

پیش از توضیح درباره روش تکرار سیاست، نیاز به تعیین دستگاه معادلات خطی به منظور بدست آوردن ارزش $V_\delta(i)$ برای هر $i \in S$ است. برای این منظور معادله بلمن^{۳۲} برای تعیین ارزش هر حالت بکار برده می‌شود.

گزاره ۱.۶.۳. [۵] برای هر سیاست δ ، تابع ارزش برای حالت $i \in S$ در رابطه زیر (معادله بلمن) صدق می‌کند:

$$V_\delta(i) = r_{i,\delta(i)} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, \delta(i)) V_\delta(j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (9.3)$$

^{۲۸}Blackwell

^{۲۹}Policy Iteration

^{۳۰}Linear Programming

^{۳۱}Value Iteration

^{۳۲}Bellman Equation

برهان. برای هر سیاست δ طبق رابطه (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 V_\delta(i) &= E_\delta \left(\sum_{t=0}^{t=\infty} \alpha^t r_{X_t \delta(X_t)} | X_0 = i \right) \\
 &= r_{i, \delta(i)} + E_\delta \left(\sum_{t=1}^{t=\infty} \alpha^t r_{X_t \delta(X_t)} | X_0 = i \right) \\
 &= r_{i, \delta(i)} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} P(X_1 = j | X_0 = i, \delta(i)) E_\delta \left(\sum_{t=1}^{t=\infty} \alpha^{t-1} r_{X_t \delta(X_t)} | X_1 = j \right) \\
 &= r_{i, \delta(i)} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, \delta(i)) V_\delta(j)
 \end{aligned}$$

□

با استفاده از معادله بلمن دستگاه معادلات خطی با N مجهول و N معادله خطی بدست آمده و با حل این دستگاه ارزش هر حالت $V_\delta(i)$ را می‌توان محاسبه نمود.

مثال ۲.۶.۳. می‌خواهیم ارزش هر حالت را برای مثال ۳.۲.۳ بدست می‌آوریم. ابتدا سیاست ثابت اولیه زیر، برای تعویض دستگاه‌ها در نظر گرفته می‌شود:

$$\delta(E) = \delta(G) = NR \quad \delta(A) = \delta(B) = R$$

این سیاست به تعویض دستگاه بد و متوسط و تعویض نشدن دستگاه‌های خوب و عالی اشاره دارد. یعنی در هر دوره اگر دستگاه در حالت A و B قرار داشت، باید تعویض شود در غیر این صورت نیازی به تعویض دستگاه نیست. برای این سیاست و با فرض $\alpha = 0.9$ ، با جایگذاری در رابطه (۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 V_\delta(E) &= r_{E, NR} + \alpha \sum_{j=1}^4 p(j|E, \delta(E)) V_\delta(j) \\
 V_\delta(E) &= 100 + 0.9 \{ (p(E|E, NR) V_\delta(E)) + (p(G|E, NR) V_\delta(G)) \\
 &\quad + (p(A|E, NR) V_\delta(A)) + (p(B|E, NR) V_\delta(B)) \} \\
 &= 100 + 0.9 \{ (0.7 V_\delta(E)) + (0.3 V_\delta(E)) + 0 + 0 \} \\
 &= 100 + 0.9 (0.7 V_\delta(E) + 0.3 V_\delta(G))
 \end{aligned}$$

و به همین صورت برای سایر حالت‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 V_\delta(G) &= 80 + 0.9 (0.7 V_\delta(G) + 0.3 V_\delta(A)) \\
 V_\delta(A) &= -100 + 0.9 (0.7 V_\delta(E) + 0.3 V_\delta(G)) \\
 V_\delta(B) &= -100 + 0.9 (0.7 V_\delta(E) + 0.3 V_\delta(G))
 \end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق داریم :

$$V_{\delta}(E) = ۶۸۷/۸۱ \quad V_{\delta}(G) = ۵۷۲/۱۹$$

$$V_{\delta}(A) = ۴۸۷/۸۱ \quad V_{\delta}(B) = ۴۸۷/۸۱$$

در واقع ارزش هر حالت با توجه به سیاست اولیه، با استفاده از معادله بلمن بدست آورده شد.

پس از یافتن ارزش اولیه هر حالت با استفاده از معادلات تعیین ارزش، بررسی سیاست اتخاذ شده و یافتن بهترین سیاست نیاز است. از این رو ابتدا اصل بهینگی بلمن را بیان کرده و سپس به معرفی روش‌های یافتن سیاست بهینه پرداخته می‌شود.

اصل بهینگی بلمن

سیاست بهینه دارای این خاصیت است که با انتخاب هر تصمیم اولیه برای هر حالت، بقیه تصمیمات باید بگونه‌ای انتخاب شود که با همان تصمیم اولیه به بهینگی نزدیک شویم [۵].

معادله بهینه بلمن

گزاره ۳.۶.۳ (معادله بهینه بلمن). [۵] تابع ارزش بهینه برای مسئله ماکزیم‌سازی $V^*(i) = \text{Max}_{\delta \in \Delta} V_{\delta}(i)$ جواب بهینه معادله بلمن است:

$$V^*(i) = \text{Max}_{d \in D(i)} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) V^*(j)]$$

که سیاست بهینه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta^*(i) = \text{argmax}_{d \in D(i)} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) V^*(j)]$$

برهان. برای هر سیاست $\delta = (d, \delta')$ طبق رابطه (۷.۳) داریم:

$$V^*(i) = \text{Max}_{\delta \in \Delta} V_{\delta}(i)$$

$$\begin{aligned} V^*(i) &= \text{Max}_{\delta \in \Delta} E_{\delta} \left(\sum_{t \geq 0} \alpha^t r_{X_t \delta(X_t)} | X_0 = i \right) \\ &= \text{Max}_{(d, \delta')} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) V_{\delta'}(j)] \\ &= \text{Max}_{d \in D(i)} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) \text{Max}_{\delta'} V_{\delta'}(j)] \\ &= \text{Max}_{d \in D(i)} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) V^*(j)] \end{aligned}$$

□

روش تکرار سیاست هاوارد

روش تکرار سیاست هاوارد^{۳۳} یکی از روش‌های یافتن سیاست ثابت بهینه برای فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف است. این روش برای یک فرآیند (مسئله ماکزیم‌سازی) بصورت زیر است [۲۱]:

گام اول ارزیابی سیاست: انتخاب یک سیاست اولیه ثابت δ و استفاده از معادلات تعیین ارزش برای بدست آوردن $(i = 1, 2, \dots, N), V_\delta(i)$.

گام دوم بهبود سیاست: برای همه حالت‌ها $(i = 1, 2, \dots, N)$ ، محاسبه:

$$T_\delta(i) = \text{Max}_{d \in D(i)} \left(r_{i,d} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d) V_\delta(j) \right) \quad (10.3)$$

چون می‌توان $d = \delta(i)$ برای $i = 1, 2, \dots, N$ انتخاب کرد، $T_\delta(i) \geq V_\delta(i)$. اگر $T_\delta(i) = V_\delta(i)$ برای $i = 1, 2, \dots, N$ ، سپس δ یک سیاست بهینه است. اگر برای حداقل یک حالت $T_\delta(i) > V_\delta(i)$ ، آنگاه δ سیاست بهینه نیست. در این صورت، δ را طبق اصل بهینگی بلمن به صورتی اصلاح می‌کنیم که نسبت به سیاست قبلی به بهینگی نزدیک‌تر باشد. در این صورت یک سیاست ثابت جدید δ' بدست می‌آید به طوریکه $V_{\delta'}(i) \geq V_\delta(i)$ برای $i = 1, 2, \dots, N$. با جایگزین شدن سیاست δ' به جای δ دوباره به گام اول باز می‌گردیم.

در مسئله مینیم‌سازی، معادله ۱۰.۳ به مینیم تبدیل می‌شود. اگر $T_\delta(i) = V_\delta(i)$ برای هر $i = 1, 2, \dots, N$ ، سپس δ یک سیاست بهینه است، در غیر این صورت با جایگزینی سیاست جدید δ' دوباره به گام اول بازگشته و این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که $T_{\delta_{new}}(i) = V_{\delta_{new}}(i)$.

الگوریتم روش تکرار سیاست

۱. δ را سیاست اولیه دلخواه قرار می‌دهیم.

۲. در هر تکرار $k = 1, 2, \dots$ ، با فرض δ_k :

- ارزیابی سیاست: تابع ارزش V_{δ_k} را محاسبه می‌کنیم.
- بهبود سیاست: برای هر $i \in S$ ، سیاست حریصانه^{۳۴} δ_{k+1} را بدست می‌آوریم:

$$\delta_{k+1}(i) \in \text{argmax}_{d \in D(i)} \left(r_{i,d} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d) V_{\delta_k}(j) \right) \quad (11.3)$$

۳. δ_k بهینه است، اگر: $V_{\delta_k} = V_{\delta_{k+1}}$.

^{۳۳}Howard's policy iteration method

^{۳۴}Greedy policy

همگرایی روش تکرار سیاست

حال به بررسی همگرایی روش تکرار سیاست پرداخته و نشان داده می‌شود این الگوریتم در تعداد متناهی تکرار به سیاست بهینه می‌رسد.

تعریف ۴.۶.۳. فرض کنید در فضای حالت گسسته، $|S| = N$ و $V_\delta \in \mathbb{R}^N$ باشد. برای هر $W \in \mathbb{R}^N$ عملگر بلمن^{۳۵} برای سیاست δ ، $\tau_\delta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ است که بصورت رابطه (۱۲.۳) تعریف می‌شود:

$$\tau_\delta W(i) = r_{i,\delta(i)} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, \delta(i)) W_\delta(j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (12.3)$$

و تعریف عملگر بهینه بلمن^{۳۶} برای هر بردار $W \in \mathbb{R}^N$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\tau W(i) = \text{Max}_{d \in D} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) W(j)] \quad (13.3)$$

تعریف ۵.۶.۳. [۱۴] بردار $v \in \nu$ نقطه ثابت^{۳۷} عملگر $\tau : \nu \rightarrow \nu$ است اگر $\tau v = v$.

با استفاده از تعاریف فوق، اگر $W = V_\delta$ سپس

$$\tau_\delta V_\delta(i) = r_{i,\delta(i)} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, \delta(i)) V_\delta(j) = V_\delta(i)$$

بنابراین V_δ نقطه ثابت عملگر بلمن τ_δ است. به همین صورت V^* نیز نقطه ثابت عملگر بهینه τ خواهد بود. زیرا

$$\tau V^*(i) = \text{Max}_{d \in D} [r_{id} + \alpha \sum_j p(j|i, d) v^*(j)] = V^*(i)$$

خواص مهم عملگر بلمن

• خاصیت یکنوایی: برای هر $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^N$ ، اگر $W_1 \leq W_2$ در این صورت:

$$\tau_\delta W_1 \leq \tau_\delta W_2 \quad \tau W_1 \leq \tau W_2$$

• برای هر سیاست δ : V_δ نقطه ثابت منحصر به فرد τ_δ است.

V^* نقطه ثابت منحصر به فرد τ است.

• برای هر بردار $W \in \mathbb{R}^N$ و سیاست δ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\tau_\delta)^k W &= V_\delta \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\tau)^k W &= V^* \end{aligned}$$

^{۳۵}Bellman operator

^{۳۶}Bellman optimality operator

^{۳۷}Fixed point

برای اثبات خواص فوق به [۳۲] مراجعه شود.

قضیه ۶.۶.۳ همگرایی روش تکرار سیاست را بیان می‌کند.

قضیه ۶.۶.۳. [۲۱] الگوریتم تکرار سیاست دنباله‌ای از سیاست‌های غیر نزولی را تولید می‌کند، به عبارتی دیگر برای $k = 1, 2, \dots$:

$$V_{\delta_{k+1}} \geq V_{\delta_k}$$

که این دنباله‌ها در تعداد متناهی از تکرارها همگرا به δ^* است.

برهان. از تعریف نقطه ثابت عملگر بلمن و رابطه (۱۱.۳) سیاست حریصانه δ_{k+1} داریم:

$$V_{\delta_k} = \tau_{\delta_k} V_{\delta_k} \leq \tau V_{\delta_k} = \tau_{\delta_{k+1}} V_{\delta_k}$$

با استفاده از خاصیت یکنوایی برای $\tau_{\delta_{k+1}}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V_{\delta_k} &\leq \tau_{\delta_{k+1}} V_{\delta_k} \\ \tau_{\delta_{k+1}} V_{\delta_k} &\leq (\tau_{\delta_{k+1}})^2 V_{\delta_k} \\ &\vdots \\ (\tau_{\delta_{k+1}})^{n-1} V_{\delta_k} &\leq (\tau_{\delta_{k+1}})^n V_{\delta_k} \\ &\vdots \end{aligned}$$

با توجه به نامساوی‌های فوق و خاصیت عملگر بلمن:

$$V_{\delta_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_{\delta_{k+1}})^n V_{\delta_k} = V_{\delta_{k+1}}$$

بنابراین سیاست‌ها تشکیل دنباله غیر نزولی می‌دهند. حال می‌خواهیم نشان دهیم که این روش در تعداد متناهی تکرار q به سیاست بهینه خواهد رسید. یعنی:

$$V_{\delta_q} = V^*$$

از آنجایی که تعداد سیاست‌ها محدود می‌باشد، الگوریتم بعد از تعداد محدودی از تکرارها متوقف می‌شود که $V_{\delta_q} = V_{\delta_{q+1}}$.

$$V_{\delta_q} = V_{\delta_{q+1}} = \tau_{\delta_{q+1}} V_{\delta_{q+1}} = \tau_{\delta_{q+1}} V_{\delta_q} = \tau V_{\delta_q}$$

بنابراین V_{δ_q} نقطه ثابت عملگر τ است. با توجه به اینکه τ دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است، لذا طبق تعریف نقطه ثابت عملگر τ ، $V_{\delta_q} = V^*$ است. بنابراین δ_q سیاست بهینه خواهد بود. $\square$

در واقع قضیه بالا بیان می‌کند روش تکرار سیاست همیشه در تعداد متناهی تکرار به جواب می‌رسد. زیرا تعداد سیاست‌ها و فضای حالت متناهی است، همچنین الگوریتم نمی‌تواند دارای دور باشد زیرا در هر تکرار جواب بدتر نمی‌شود.

مثال ۷.۶.۳. با استفاده از روش تکرار سیاست برای مثال ۳.۲.۳ به ماکزیمم کردن ارزش با یافتن بهترین سیاست بهینه می‌پردازیم. برای این منظور سیاست ثابت اولیه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\delta(E) = \delta(G) = NR \quad \delta(A) = \delta(B) = R$$

برای این سیاست با استفاده از معادلات تعیین ارزش، $V_\delta(G) = 572/19$ ، $V_\delta(E) = 687/81$ ، $V_\delta(B) = 478/81$ و $V_\delta(A) = 487/81$ بدست آمده بود (مثال ۲.۶.۳). حال باید مقادیر $T_\delta(E)$ ، $T_\delta(G)$ ، $T_\delta(A)$ و $T_\delta(B)$ محاسبه شود. چون تنها تصمیم ممکن برای حالت E ، NR است ($D(E) = \{NR\}$)، با توجه به رابطه (۱۰.۳) داریم:

$$T_\delta(E) = V_\delta(E) = 687/81$$

بنابراین $T_\delta(E)$ بوسیله تصمیم NR بدست آمده است. برای حالت G چون $D(G) = \{R, NR\}$ داریم:

$$T_\delta(G) = \text{Max} \begin{cases} -100 + 0.9(0.7V_\delta(E) + 0.3V_\delta(G)) = 487/81 & (R) \\ 80 + 0.9(0.6V_\delta(G) + 0.3V_\delta(A)) = 572/19^* & (NR) \end{cases}$$

بنابراین $T_\delta(G) = V_\delta(G) = 572/19$ که بوسیله تصمیم NR بدست آمد. برای سایر حالت‌ها به همین صورت داریم:

$$T_\delta(A) = \text{Max} \begin{cases} -100 + 0.9(0.7V_\delta(E) + 0.3V_\delta(G)) = 487/81 & (R) \\ 50 + 0.9(0.6V_\delta(A) + 0.3V_\delta(B)) = 489/81^* & (NR) \end{cases}$$

و

$$T_\delta(B) = \text{Max} \begin{cases} -100 + 0.9(0.7V_\delta(E) + 0.3V_\delta(G)) = 487/81^* & (R) \\ 10 + 0.9V_\delta(B) = 449/10 & (NR) \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می‌شود $T_\delta(B) = V_\delta(B)$ ، $T_\delta(G) = V_\delta(G)$ ، $T_\delta(E) = V_\delta(E)$ و $T_\delta(A) > V_\delta(A)$. بنابراین سیاست δ بهینه نیست، اکنون سیاست جدیدی را انتخاب می‌کنیم و δ را بهبود می‌بخشیم. سیاست δ' را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta'(E) = \delta'(G) = \delta'(A) = NR \quad \delta'(B) = R$$

دوباره به گام اول باز می‌گردیم و معادلات تعیین ارزش را برای δ' حل می‌کنیم. از رابطه (۹.۳) معادلات تعیین ارزش برای δ' بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 V_{\delta'}(E) &= 100 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(E) + 0.3V_{\delta'}(G)) \\
 V_{\delta'}(G) &= 80 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(G) + 0.3V_{\delta'}(A)) \\
 V_{\delta'}(A) &= 50 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(A) + 0.4V_{\delta'}(B)) \\
 V_{\delta'}(B) &= -100 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(E) + 0.3V_{\delta'}(G))
 \end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق، $V_{\delta'}(E) = 690.23$ ، $V_{\delta'}(G) = 575.50$ ، $V_{\delta'}(A) = 492.35$ و $V_{\delta'}(B) = 490.23$ بدست می‌آید. مشاهده می‌شود که برای هر i ، $V_{\delta'}(i) > V_{\delta}(i)$ است. اکنون به گام دوم می‌رویم:

$$T_{\delta'}(E) = V_{\delta'}(E) = 690.23$$

$$T_{\delta'}(G) = \text{Max} \begin{cases} -100 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(E) + 0.3V_{\delta'}(G)) = 490.23 & (R) \\ 80 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(G) + 0.3V_{\delta'}(A)) = 575.50^* & (NR) \end{cases}$$

$$T_{\delta'}(A) = \text{Max} \begin{cases} -100 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(E) + 0.3V_{\delta'}(G)) = 490.23 & (R) \\ 50 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(A) + 0.4V_{\delta'}(B)) = 492.35^* & (NR) \end{cases}$$

و

$$T_{\delta'}(B) = \text{Max} \begin{cases} -100 + 0.9(\alpha V_{\delta'}(E) + 0.3V_{\delta'}(G)) = 490.23^* & (R) \\ 10 + 0.9V_{\delta'}(B) = 451.21 & (NR) \end{cases}$$

برای هر حالت i ، $T_{\delta'}(i) = V_{\delta'}(i)$. بنابراین δ' یک سیاست ثابت بهینه است. به عبارت دیگر برای ماکزیمم شدن ارزش مورد انتظار، در آغاز هر هفته و پس از بررسی دستگاه‌ها، یک دستگاه بد باید تعویض شود ولی نیاز به تعویض دستگاه عالی، خوب و متوسط نیست.

۲.۶.۳ برنامه‌ریزی خطی

روش برنامه‌ریزی خطی روش دیگری برای یافتن سیاست بهینه است. این روش نیز برای زمانی که افق زمانی برنامه‌ریزی نامحدود است بکار برده می‌شود. با توجه به معادله بهینه بلمن برای یک مسئله ماکزیمم‌سازی، مقدار بهینه $V(i)$ برای هر حالت $i \in S$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$V(i) = \text{Max}_{d \in D(i)} \left(r_{i,d} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d) V(j) \right) \quad (\forall i, j \in S)$$

بنابراین مجموعه‌ای از محدودیت‌های نامساوی زیر برقرار است:

$$V(i) \geq r_{i,d} + \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d) V(j) \quad (\forall i, j \in S, \forall d \in D(i)) \quad (14.3)$$

در حقیقت برای هر i مقادیر بهینه برای $V(i)$ ها کوچکترین اعدادی (کوچکترین کران بالا نسبت به همه مقادیر) هستند که در نامساوی (۱۴.۳) صدق میکنند. لذا سیاست ثابت بهینه برای یک مسئله ماکزیم‌سازی را، می‌توان بوسیله حل برنامه‌ریزی خطی زیر بدست آورد [۳۴]:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = V(1) + V(2) + \dots + V(N) \\ \text{s.t.} \quad & V(i) - \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d) V(j) \geq r_{id} \quad (\forall i, j \in S, \forall d \in D(i)) \\ & V(i) \geq 0 \end{aligned} \quad (15.3)$$

و برای مسائل مینیم‌سازی نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = V(1) + V(2) + \dots + V(N) \\ \text{s.t.} \quad & V(i) - \alpha \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d) V(j) \leq r_{id} \quad (\forall i, j \in S, \forall d \in D(i)) \\ & V(i) \geq 0 \end{aligned} \quad (16.3)$$

$V^*(i)$ جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی خواهند بود. اگر یک محدودیت برای حالت i و تصمیم d ، محدودیتی فعال باشد (بدون متغیر کمکی یا زائد)، سپس تصمیم d برای حالت i ، بهینه است. در غیر این صورت تصمیمی بهینه برای حالت i نخواهد بود.

مثال ۸.۶.۳. برای مثال ۳.۲.۳ با روش برنامه‌ریزی خطی، بهترین سیاست را بطوریکه میانگین ارزش ماکزیمم شود، بدست می‌آوریم.

حل: با استفاده از رابطه (۱۵.۳)، برای مثال تعویض دستگاه‌ها، برنامه‌ریزی خطی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= V(E) + V(G) + V(A) + V(B) \\ \text{s.t. } V(E) &\geq 100 + 0.9(0.7V(E) + 0.3V(G)) && (E \text{ برای } NR) \\ V(G) &\geq 80 + 0.9(0.7V(G) + 0.3V(A)) && (G \text{ برای } NR) \\ V(G) &\geq -100 + 0.9(0.7V(E) + 0.3V(G)) && (G \text{ برای } R) \\ V(A) &\geq 50 + 0.9(0.6V(A) + 0.4V(B)) && (A \text{ برای } NR) \\ V(A) &\geq -100 + 0.9(0.7V(E) + 0.3V(G)) && (A \text{ برای } R) \\ V(B) &\geq 10 + 0.9V(B) && (B \text{ برای } NR) \\ V(B) &\geq -100 + 0.9(0.7V(E) + 0.3V(G)) && (B \text{ برای } R) \\ V(i) &\geq 0 \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی خطی فوق با استفاده از نرم افزار لینگو^{۳۸} حل شده که خروجی آن بصورت زیر است:

Global optimal solution found.

Objective value:	2235.625
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	6

Variable	Value	Reduced Cost
VE	690.2325	0.000000
VG	575.5075	0.000000
VA	492.3525	0.000000
VB	490.2325	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	2235.625	-1.000000
2	0.000000	-14.58438
3	0.000000	-18.43750
4	84.37500	0.000000
5	0.000000	-5.978125
6	42.68437	0.000000
7	123.1562	0.000000
8	0.000000	-1.000000

مقادیر تقریبی ارزش بهینه هر حالت :

$$V^*(E) = ۶۹۰/۲۳ \quad V^*(G) = ۵۴۵/۵۰$$

$$V^*(A) = ۴۹۲/۳۵ \quad V^*(B) = ۴۹۰/۲۳$$

همچنین همانطور که مشاهده می‌شود لینگو نشان می‌دهد که محدودیت‌های اول، دوم، چهارم و هفتم محدودیت‌های فعال و بدون متغیر کمکی هستند. لذا سیاست بهینه، تعویض دستگاه بد و جایگزین نشدن دستگاه‌های عالی، خوب و متوسط را بیان می‌کند. به عبارتی دیگر:

$$\delta^*(B) = R \quad \delta^*(E) = \delta^*(G) = \delta^*(A) = NR$$

دو روش معرفی شده در این فصل از پرکاربردترین روش‌های یافتن سیاست بهینه هستند. در واقع یافتن بهترین تصمیم به ما کمک می‌کند در برخی مواقع که سازمان یا شرکت با محدودیت بودجه مواجه است بتواند بهترین سیاست را بگونه‌ای انتخاب کند که به ماکزیمم شدن ارزش سیستم بیانجامد. در فصل بعد با بکارگیری از این روش‌ها و یافتن سیاست بهینه به ماکزیمم کردن ارزش طول عمر مشتریان در هر حالت و تخصیص مناسب بودجه به هر دسته از آنان پرداخته خواهد شد.

فصل ۴

بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری با استفاده از فرآیند مارکوف

۱.۴ مقدمه

همانطور که در فصل ۳ اشاره شد، فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف به پیش‌بینی رفتار آینده یک سیستم می‌پردازد که این سیستم می‌تواند رفتار مشتریان یک سازمان یا شرکت باشد. در سال‌های اخیر استفاده از خواص مارکوف و زنجیره‌های مارکوف برای تخصیص منابع بازاریابی به مشتریان، بر مبنای بهینه کردن ارزش طول عمرشان، امری متداول گشته‌است.

استفاده از برنامه‌ریزی پویا جهت حداکثرسازی ارزش مشتریان در بلند مدت و مفهوم فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف، ریشه در صنایع فروش محصولات در قالب کاتالوگ در دهه ۱۹۵۰ دارد. برای این منظور مشتریان بر اساس زمان آخرین خریدشان بخش‌بندی شده و از فرآیند مارکوف جهت پیدا کردن سیاست بهینه برای پست یا عدم پست کاتالوگ‌ها با توجه به محدودیت بودجه استفاده شد [۶]. به همین ترتیب پژوهش‌های مختلفی در این زمینه صورت گرفته است. به عنوان مثال تیرنی^۱ از شبیه‌سازی مونت کارلو^۲ برای تخمین احتمالات انتقال در فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف استفاده کرده و به تخصیص بودجه‌های بازاریابی یک شرکت هواپیمایی اروپایی پرداخت [۳۹]. ونکاتسان^۳ و کومار^۴، با بهره‌گیری از خواص

^۱Tirenni

^۲Monte Carlo simulations

^۳Venkatesan

^۴Kumar

توزیع‌های گوسی (مانند توزیع عمومی گاما)، کانال‌های بازاریابی را به عنوان متغیر، درون توزیع قرار داده و بر مبنای آن احتمالات را محاسبه نمودند. مشارکت مشتری به کمک رگرسیون برآورده شده و در مدل برای ماکزیمم‌سازی بدون محدودیت قرار داده شد [۴۰].

در فصل‌های گذشته ارزش طول عمر مشتری و فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف معرفی شد. همانطور که اشاره شد، مشتریان سرمایه یک سازمان یا شرکت در نظر گرفته می‌شوند، به همین جهت باید بدانیم کدام مشتریان ارزشمندتر هستند و با بودجه و سرمایه محدود ما کدام مشتریان را باید انتخاب کرد [۲۷]. همچنین باید برنامه‌ای داشت تا بتوان سود حاصل از انتخاب بهترین مشتریان را بیشینه کرد. برای این منظور مفاهیمی مانند ارزش طول عمر مشتری و فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف این امکان را فراهم کرده است.

در این فصل با استفاده از فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف، به صورت نظری (بدون مطالعه موردی) به تخصیص بودجه‌های تبلیغاتی به مشتریان یک شرکت پرداخته می‌شود. ابتدا به پیش‌بینی رفتار مشتریان با استفاده از فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف می‌پردازیم سپس به صورت تئوری و با استفاده از داده‌های فرضی، تخصیص بودجه‌ها در جذب و حفظ مشتری با استفاده از فرآیند مارکوف انجام گرفته که به ماکزیمم شدن مقدار CLV برای هر دسته از مشتریان می‌انجامد.

۲.۴ مدل زنجیره مارکوف برای رفتار مشتری

در این بخش، مدلی برای پیش‌بینی رفتار مشتری با استفاده از فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف معرفی شده است. همانطور که در فصل ۳ اشاره شد برای تعیین حالت فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف، به بخش‌بندی مشتریان طبق معیاری از ارزش طول عمر مشتری نیاز داریم. برای این منظور معیار بخش‌بندی مشتریان را میزان استفاده از خدمات شرکت قرار داده، بنابراین مشتری‌های یک شرکت را برحسب میزان استفاده از خدمات آن شرکت، می‌توان به N حالت ممکن $\{0, 1, \dots, N-1\}$ ، طبقه‌بندی کرد. برای مثال مشتری‌ها را می‌توان به چهار حالت ($N=4$)، طبقه‌بندی کرد: سطح پایین (حالت ۱)، سطح متوسط (حالت ۲)، سطح بالا (حالت ۳) و به منظور در نظر گرفتن تمام مشتریان بازار، یک سطح ۰ معرفی می‌شود.

می‌گوییم یک مشتری در سطح ۰ قرار دارد اگر، در طول دوره مورد بررسی، از خدمات شرکت هیچ استفاده‌ای نکند یا مشتری شرکت رقیب باشد.

بنابراین در هر زمان، یک مشتری در بازار دقیقاً به یکی از حالت‌های $\{0, 1, \dots, N-1\}$ تعلق دارد. احتمالات انتقال مشتریان در میان این حالت‌ها با استفاده از ماتریس انتقال نشان داده می‌شود. $P_{N \times N}$ ماتریس انتقال حالت مشتریان است که در آن $p_{ij}(i, j = 0, 1, \dots, N-1)$ نمایانگر احتمال انتقال مشتری از سطح i به سطح j در دوره بعدی و p_{ii} احتمال ماندن او در حالت i در دوره بعد است.

هم چنین مجموعه تصمیم، با توجه تصمیم‌گیری‌های مدیریتی برای سازمان‌ها و شرکت‌های مختلف، متفاوت است. امروزه سیاست بیشتر سازمان‌ها و شرکت‌ها تخصیص بودجه‌های تسهیلاتی (دادن تخفیف، اعطای جایزه، تبلیغات مناسب و...) به مشتریان، به ویژه اعطای یا عدم اعطای تسهیلات به گروه‌های مختلف مشتریان با توجه به بودجه محدود و همچنین یافتن زمان مناسب برای اعطای

تسهیلات به مشتریان خاص خود است.

با توجه به اینکه تمام اطلاعات لازم برای استفاده از فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف موجود می‌باشد روش مارکوف، روشی مناسب برای پیش‌بینی رفتار یک مشتری در بازار است.

طبق قضیه ۳.۳.۳، توزیع پایدار $p = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1})$ وجود دارد بطوریکه:

$$p = pP, \quad \sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

با استفاده از توزیع پایدار p ، می‌توان احتمال حفظ^۵ مشتری یک شرکت را به کمک رابطه زیر محاسبه کرد [۱۰]:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{p_i}{\sum_{j=1}^{N-1} p_j} \right) (1 - p_{i0}) = 1 - \frac{1}{1 - p_0} \sum_{i=1}^{N-1} p_i p_{i0} \quad (1.4)$$

که همان احتمال ماندن مشتری و استفاده از خدمات شرکت، در دوره بعدی است. علاوه بر احتمال حفظ مشتری، به کمک زنجیره مارکوف و با توجه به این شرایط، می‌توان مدل دیگری برای ارزش طول عمر مشتری (CLV) ارائه کرد. برای این منظور، اگر c_i به عنوان درآمد بدست آمده از مشتری در حالت i تعریف شود. سپس ارزش مورد انتظار مشتری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$CLV = \sum_{i=0}^{N-1} c_i p_i \quad (2.4)$$

لازم به ذکر است که احتمال حفظ و ارزش مورد در بالا، با فرض اتخاذ یک تصمیم خاص از مجموعه تصمیم بدست آمده است. باید به این موضوع توجه شود که ماتریس احتمالات P برای تصمیمات مختلف به طور قابل توجهی با هم متفاوت است. در مثال ۱.۲.۴ که بر روی داده‌های فرضی یک شرکت خدمات کامپیوتری پیاده شده است، این مسئله نشان داده خواهد شد.

مثال ۱.۲.۴. در یک شرکت خدمات کامپیوتری با توجه به پایگاه داده آن شرکت، ویژگی‌های مهم و مورد نیاز برای هر مشتری گرفته شده است. درآمد بدست آمده مشتری که در واقع مقدار کل پولی است که مشتری در طول هفته‌های مورد بررسی خرج کرده است و مقدار ساعت‌های مصرف مشتری در این هفته‌ها از جمله این اطلاعات هستند. فرض کنید شرکت در یک دوره ۲۰ هفته‌ای به مدت ۸ هفته متوالی اقدام به اعطای تسهیلات به مشتریان در دسته‌های گوناگون می‌نماید و ۱۲ هفته هیچ تسهیلاتی برای آن‌ها در نظر نمی‌گیرد. شرکت می‌خواهد رفتار مشتریان را در این دوره (۲۰ هفته) مورد بررسی قرار دهد و احتمال حفظ و ارزش طول عمر را بدست آورده تا بر اساس آن سیاست‌هایی را اتخاذ کند.

^۵ Retention Probability

برای هر هفته، مشتریان به چهار حالت (۰، ۱، ۲، ۳)، با توجه به ساعات استفاده از خدمات بخش‌بندی شده‌اند. که در جدول ۱.۴ چگونگی این بخش‌بندی نشان داده شده‌است. در اینجا یک مشتری در حالت ۰ قرار دارد، اگر او، مشتری شرکت رقیب باشد یا استفاده‌ای از خدمات در طول هفته نکرده باشد.

جدول ۱.۴: بخش‌بندی حالت مشتریان

حالت	۱	۲	۳	۰
دقیقه	۱ - ۲۰	۲۱ - ۴۰	> ۴۰	۰.۰۰

مجموعه تصمیم را اعطای تسهیلات (۸ هفته) و عدم اعطای آن (۱۲ هفته) در نظر گرفته و به این ترتیب برای هر تصمیم، ماتریس احتمالات انتقال قابل محاسبه خواهد بود. به این صورت که در هر دوره، تعداد مشتریانی که از حالت i به حالت j رفته را ثبت کرده و سپس بر کل مشتریان حالت i در دوره مورد نظر تقسیم میشود به عبارت دیگر:

$$p_{ij} = \frac{\text{تعداد انتقال مشتریان از حالت } i \text{ به } j}{\text{تعداد کل مشتریان موجود در حالت } i \text{ در دوره}} \quad (۳.۴)$$

طبق رابطه (۳.۴)، ماتریس احتمالات انتقال را تحت اعطای تسهیلات ($P^{(۱)}$) و عدم اعطای تسهیلات ($P^{(۲)}$)، بدست آورده شده است که به ترتیب زیر است:

$$P^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۰/۴۲۳۰ & ۰/۰۹۹۲ & ۰/۰۶۱۵ & ۰/۴۱۶۳ \\ ۰/۳۴۵۸ & ۰/۲۱۰۹ & ۰/۲۱۴۸ & ۰/۲۲۸۵ \\ ۰/۲۱۴۷ & ۰/۲۰۳۴ & ۰/۴۴۴۷ & ۰/۱۳۷۲ \\ ۰/۱۴۸۹ & ۰/۰۲۶۶ & ۰/۰۱۹۱ & ۰/۸۰۵۴ \end{pmatrix}$$

و

$$P^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۰/۴۱۴۶ & ۰/۰۶۲۳ & ۰/۰۲۶۷ & ۰/۴۹۶۴ \\ ۰/۳۸۳۷ & ۰/۱۷۴۴ & ۰/۱۱۵۸ & ۰/۳۲۶۱ \\ ۰/۲۷۴۲ & ۰/۲۰۶۹ & ۰/۲۸۰۹ & ۰/۲۳۸۰ \\ ۰/۱۰۶۴ & ۰/۰۱۲۱ & ۰/۰۰۵۳ & ۰/۸۷۶۲ \end{pmatrix}$$

همانطور که قبلاً اشاره شد و انتظار داشتیم $P^{(۱)}$ و $P^{(۲)}$ بسیار باهم متفاوت هستند. حال می‌توان احتمال حفظ و ارزش طول عمر مشتریان را برای هر دو حالت بدست آورد. با توجه به قضیه ۳.۳.۳ توزیع پایدار برای دو ماتریس احتمالات انتقال $P^{(۱)}$ و $P^{(۲)}$ بصورت زیر بدست آورده می‌شود. برای حالت اول طبق قضیه ۳.۳.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰/۴۲۳۰ & ۰/۰۹۹۲ & ۰/۰۶۱۵ & ۰/۴۱۶۳ \\ ۰/۳۴۵۸ & ۰/۲۱۰۹ & ۰/۲۱۴۸ & ۰/۲۲۸۵ \\ ۰/۲۱۴۷ & ۰/۲۰۳۴ & ۰/۴۴۴۷ & ۰/۱۳۷۲ \\ ۰/۱۴۸۹ & ۰/۰۲۶۶ & ۰/۰۱۹۱ & ۰/۸۰۵۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

در نتیجه دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} -0.577p_0 + 0.3458p_1 + 0.2147p_2 + 0.1489p_3 = 0 \\ 0.992p_0 - 0.7891p_1 + 0.2034p_2 + 0.266p_3 = 0 \\ 0.615p_0 + 0.2148p_1 - 0.5553p_2 + 0.191p_3 = 0 \\ 0.4163p_0 + 0.2285p_1 + 0.1372p_2 - 0.1946p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

با حل دستگاه خطی فوق نتیجه می‌شود:

$$p^{(1)} = (0.2306, 0.0691, 0.0738, 0.6265)$$

برای حالت دوم نیز به همین صورت داریم:

$$p^{(2)} = (0.1692, 0.0285, 0.0167, 0.7856)$$

احتمال حفظ مشتریان با جایگذاری در رابطه (۵.۴) برای زمانی که تسهیلات در اختیار مشتریان قرار می‌گیرد و زمانی که هیچ تسهیلاتی داده نمی‌شود به ترتیب ۰.۶۷۳۶ و ۰.۵۴۶۱ بدست می‌آید. واضح است که احتمال حفظ مشتری زمانی که به آن تسهیلات داده شود بیشتر است. با توجه به اطلاعات داده شده از مشتریان، میانگین درآمد مشتریان در حالت‌های مختلف برای هر دو تصمیم و سیاست شرکت کامپیوتری در جدول ۲.۴ آورده شده است. باید به این نکته توجه شود که درآمد بدست آمده از مشتریان در زمان اعطای تسهیلات (مثل تخفیف بزرگ، اعطای جایزه و ...) به طرز قابل توجهی کمتر از دوره ایست که هیچ تسهیلاتی نداریم.

جدول ۲.۴: میانگین درآمد مشتریان در چهار حالت

حالت	۱	۲	۳	۰
اعطای تسهیلات	۶۹۷	۱۸۰۹	۴۳/۷۵	۰/۰۰
عدم اعطای تسهیلات	۱۴۰۳	۵۱/۷۲	۱۳۹/۲۰	۰/۰۰

با استفاده از رابطه (۲.۴) درآمد مورد انتظار از مشتری یا همان ارزش مشتری بدست خواهد آمد. که برای دوره اعطای تسهیلات ۲.۴۲ و برای دوره عدم اعطای تسهیلات ۱۷.۰۷ خواهد بود. همانطور که مشاهده می‌شود زمانی که تسهیلاتی را در اختیار مشتریان قرار می‌دهیم به دلیل هزینه‌های صورت گرفته، ارزش مشتریان به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد بنابراین باید سعی شود در صورت لزوم و برای گروه خاصی از مشتریان تسهیلات در نظر گرفته شود. همچنین در برخی مواقع بودجه محدودی در اختیار سازمان یا شرکت قرار دارد که نیاز به انتخاب بهترین زمان برای اجرای سیاست هستیم.

در واقع در یک سیستم مجبور به اتخاذ تصمیمات پی در پی در زمان‌های مختلف هستیم. چون

این تصمیم‌گیری‌ها در چند مرحله انجام می‌گیرند از این رو مسائل تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای نامیده می‌شوند. نوعی از این مسائل چند مرحله‌ای برنامه‌ریزی پویا می‌باشد. برنامه‌ریزی پویا با بکارگیری فرآیندهای نظام‌گرا، ترکیبی از تصمیمات متوالی را معین می‌کند که به ماکزیمم شدن کارایی سیستم منتهی می‌گردد. به دلیل اینکه با اتخاذ یک تصمیم در یک حالت از یک مرحله با احتمالاتی به حالت‌های متفاوتی در مرحله بعد خواهیم رفت و حالت مرحله بعد قطعی نیست از برنامه‌ریزی پویای تصادفی^۶ برای افق زمان محدود و نامحدود استفاده می‌شود. در بخش‌های بعد نشان می‌دهیم چگونه ابزاری مانند فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف می‌تواند روابط پویای میان مشتریان و شرکت را مدلسازی کرده و در تخصیص بهینه بودجه به ما کمک کند. در واقع با تعیین بهترین سیاست، بودجه‌های ارتباط با مشتری بگونه‌ای بین مشتریان تقسیم می‌شود که ارزش طول عمر مشتریان در دراز مدت بیشینه شود.

۳.۴ مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری

در این بخش یک مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی به کمک زنجیره مارکوف برای بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری ارائه می‌شود. در فصل گذشته معادلات تعیین ارزش در رابطه (۹.۳) معرفی شد. در مجموع رابطه کلی تعیین ارزش (برای مسئله ماکزیمم‌سازی) می‌تواند برای حالت عمومی‌تر مورد استفاده قرارگیرد. به طور کلی اگر n دوره تصمیم‌گیری باقی مانده باشد، $V_i(n)$ بیشترین مقدار ارزش بدست آمده در حالت i است که به شکل رابطه زیر بیان می‌شود [۴۱]:

$$V_i(n) = \text{Max}\{r_{i,d} + \alpha \sum_{j=1}^N p(j|i, d) V_j(n-1)\} \quad (n \geq 1) \quad (4.4)$$

$$V_i(0) = 0$$

چنانچه افق زمانی محدود باشد فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف در قالب مساله برنامه‌ریزی پویا قابل حل است و نوع نامحدود آن هم قابل تبدیل به یک برنامه‌ریزی خطی خواهد بود. مسئله سیاست بهینه در قالب برنامه‌ریزی پویا در زمینه تبلیغات و تخصیص بودجه مربوط به آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این بخش از مدل برنامه‌ریزی تصادفی پویا برای ماکزیمم‌سازی CLV تحت یافتن سیاست بهینه استفاده می‌شود.

برای این منظور، فرض می‌کنیم:

N = تعداد کل حالات ($i = 0, 1, \dots, N-1$)

M = مجموع کل سیاست‌ها ($j = 1, 2, \dots, M$)

T = تعداد دوره زمانی افق برنامه ریزی (در اینجا ماه) ($t = 1, 2, \dots, T$)

$d_i^{(j)}$ = منابع لازم برای انجام تصمیم j در هر دوره برای مشتری در حالت i

^۶Stochastic dynamic programming

$c_i^{(j)}$ = درآمد بدست آمده از یک مشتری در حالت i با انجام تصمیم j در هر دوره
 $p_{ik}^{(j)}$ = احتمال انتقال مشتری از حالت i به حالت k تحت تصمیم j در هر دوره
 α = نرخ تنزیل

$V_i(t)$ به عنوان امید ریاضی درآمد بدست آمده در مدل برنامه‌ریزی پویا با t دوره (ماه) باقی‌مانده برای یک مشتری در حالت i در آغاز دوره $(T - t)$ برای $i = 0, 1, \dots, N - 1$ و $t = 1, 2, \dots, T$ ، تعریف می‌شود که در واقع همان ارزش مشتری است. در این صورت رابطه بازگشتی برای ماکزیمم‌سازی درآمد به شکل زیر خواهد بود:

$$V_i(t) = \text{Max}_{j=1, \dots, M} \{c_i^{(j)} - d_i^{(j)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(j)} V_k(t-1)\} \quad (5.4)$$

در بخش‌های بعد، مدل‌های مختلف برای ماکزیمم‌سازی CLV بر اساس رابطه بازگشتی بالا برای دو حالت افق زمانی بینهایت و افق زمانی معین معرفی شده است. افق زمانی بینهایت با کمک برنامه‌ریزی خطی و افق زمانی معین با کمک برنامه‌ریزی پویا و روش تکرار سیاست قابل حل است.

۱.۳.۴ افق زمانی بینهایت بدون محدودیت

در این بخش فرمول‌بندی یک فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف با افق زمانی بی‌نهایت بررسی می‌شود. از نتایج بدست آمده از فصل ۳ برای هر i مقادیر بهینه V_i برای فرآیند مارکوف با افق زمانی بی‌نهایت باید در رابطه زیر صدق کند [۴۱]:

$$V_i \geq c_i^{(j)} - d_i^{(j)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(j)} V_k \quad (6.4)$$

برای هر i و $j = 1, \dots, M$. در حقیقت مقادیر بهینه برای V_i ها کوچکترین اعدادی (کوچکترین کران بالا نسبت به مقدار همه سیاست‌های ممکن) هستند که در نامساوی (۶.۴) صدق میکنند. طبق فصل ۳ برای یک مساله ماکزیمم‌سازی، می‌توان برای تعیین V_i ها مساله را به شکل برنامه‌ریزی خطی بصورت رابطه زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{i=0}^{N-1} V_i \\ \text{s.t.} \quad & V_i \geq c_i^{(j)} - d_i^{(j)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(j)} V_k \quad i, k = 0, 1, \dots, N-1 \\ & V_i \geq 0 \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی بالا به سادگی قابل حل خواهد بود. با حل این مدل سیاست بهینه ثابت بصورتی بدست می‌آید که ارزش مشتری به بیشترین مقدار خود برسد.

پیاده‌سازی و تجزیه و تحلیل مدل

حال به بررسی مثال شرکت خدمات کامپیوتری پرداخته می‌شود. شرکت خدمات کامپیوتری می‌خواهد بداند با توجه به بررسی رفتار مشتریان خود (۲۰ هفته)، در یک افق زمانی بلند مدت، به چه دسته‌هایی و چه زمانی اقدام به اعطای تسهیلات نماید تا بیشترین سود را به همراه داشته باشد. طبق فرضیات مسئله داریم:

$$M = \mathcal{V}(D(i) = \{p, np\}) \quad N = \mathcal{V}(S = \{1, 2, 3, 0\})$$

مجموعه تصمیم را برای هر حالت، اعطا (۱) یا عدم اعطای (۲) تسهیلات $(D(i) = \{1, 2\})$ در نظر می‌گیریم. به این ترتیب مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{i=0}^3 V_i \\ \text{s.t.} \quad & V_i \geq c_i^{(1)} - d_i^{(1)} + \alpha \sum_{k=0}^3 p_{ik}^{(j)} V_k \quad i, k = 0, 1, \dots, 3 \\ & V_i \geq c_i^{(2)} - d_i^{(2)} + \alpha \sum_{k=0}^3 p_{ik}^{(j)} V_k \quad i, k = 0, 1, \dots, 3 \\ & V_i \geq 0 \end{aligned}$$

که در جدول ۲.۴ مقدار $c_i^{(j)}$ داده شده است و ماتریس احتمالات انتقال برای تصمیمات مختلف بدست آمده بود (مثال ۱.۲.۴).

با استفاده از نرم افزار لینگو برای نرخ تنزیل (α) و هزینه‌های ثابت انجام تسهیلات (d) متفاوت، سیاست‌های بهینه و مقدار های CLV آن‌ها بدست آمده است که نتایج تقریبی در جدول ۳.۴ آمده است. توجه شود که هزینه تسهیلات برای زمانی در نظر گرفته می‌شود که تصمیم ۱ انتخاب شده باشد و $d_i^{(2)}$ برای هر حالت صفر است.

برای نمونه خروجی بدست آمده در لینگو برای حل مسئله با فرض $\alpha = 0.9$ و $d = 2$ آورده شده است:

Global optimal solution found.

Objective value:	621.1462
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	0

Variable	Value	Reduced Cost
V1	101.6123	0.000000
V2	163.6028	0.000000
V3	281.8636	0.000000
V0	74.06756	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
-----	------------------	------------

1	621.1462	-1.000000
2	0.000000	-9.915415
3	0.6298730	0.000000
4	64.15457	0.000000
5	0.000000	-3.587557
6	68.57377	0.000000
7	0.000000	-3.111276
8	0.000000	-23.38575
9	2.802847	0.000000

زمانی که هزینه ثابت تسهیلات ۲ و نرخ تنزیل 0.90 است، با توجه به اینکه محدودیت‌های اول، چهارم، ششم و هفتم محدودیت‌هایی فعال هستند بنابراین بهترین تصمیم این است که زمانی که مشتری در حالت ۱ یا ۰ است، تسهیلاتی برای آن در نظر بگیریم ($D_1 = D_0 = 1$). و زمانی که حالت فعلی آن ۲ یا ۳ باشد نیازی به اعطای تسهیلات نیست ($D_2 = D_3 = 2$). بقیه مقادیر را نیز به همین صورت می‌توان تفسیر کرد.

جدول ۳.۴ سیاست‌های بهینه (اعطای تسهیلات ($D_i = 1$) و عدم اعطای تسهیلات ($D_i = 2$)) و ارزش متناظر با این سیاست‌ها را برای نرخ تنزیل و هزینه‌های مختلف تسهیلات با توجه به محدودیت‌های فعال نشان می‌دهد.

جدول ۳.۴: سیاست‌های ثابت بهینه و CLV آن‌ها برای افق زمانی بینهایت

$d = 2$			$d = 0$			
$\alpha = 0.90$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$	
۶۲۱	۱۰۱۲	۴۰۸۳	۶۸۷	۱۱۴۹	۴۷۹۱	z
۱۰۱	۱۹۸	۹۶۵	۱۱۹	۲۳۴	۱۱۴۴	V_1
۱۶۳	۲۶۱	۱۰۳۰	۱۷۹	۲۹۵	۱۲۰۶	V_2
۲۸۱	۳۸۲	۱۱۵۳	۲۹۶	۴۱۵	۱۳۲۸	V_3
۷۴	۱۶۸	۹۳۴	۹۲	۲۰۴	۱۱۱۲	V_0
۱	۱	۱	۱	۱	۱	D_1
۲	۲	۲	۲	۲	۲	D_2
۲	۲	۲	۲	۲	۲	D_3
۱	۱	۱	۱	۱	۱	D_0

$d = 5$			$d = 3$			
$\alpha = 0.90$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$	
۵۴۱	۸۲۷	۳۰۵۶	۶۵۹۰	۹۴۳	۳۷۲۹	z
۸۲	۱۵۱	۷۰۷	۹۴	۱۸۱	۸۷۷	V_1
۱۴۵	۲۱۷	۷۷۵	۱۵۶	۲۴۵	۹۴۲	V_2
۲۶۴	۳۳۹	۱۸۹۹	۲۷۵	۳۶۶	۱۰۶۶	V_3
۵۱	۱۱۹	۶۷۵	۶۵	۱۵۱	۸۴۵	V_0
۲	۲	۲	۲	۱	۱	D_1
۲	۲	۲	۲	۲	۲	D_2
۲	۲	۲	۲	۲	۲	D_3
۱	۱	۱	۱	۱	۱	D_0

با توجه به مثال عددی و نتایج جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت:

- زمانی که هزینه‌های تسهیلات d بزرگ باشد، سیاست بهینه به گونه‌ایست که نباید هر تسهیلات به مشتریان فعال ارائه داده شود و باید طرح‌های تسهیلاتی خود را در اختیار مشتریان غیر فعال و مشتریان شرکت رقیب قرار داده شود. با این وجود زمانی که d کوچک باشد باید مراقب مشتریان سطح پایین برای جلوگیری از رویگردانی آن‌ها از شرکت به سوی شرکت‌های رقیب بود. همچنین ارزش طول عمر مشتریان زمانی که هزینه تسهیلات بالا باشد مقدار کمتری دارد.
- واضح است که CLV مشتریان سطح بالا بیشتر از بقیه گروه‌هاست.
- CLV هر گروه از مشتریان به طور قابل توجهی به نرخ تنزیل α وابسته است و برای نرخ تنزیل‌های بالا مقدار بهتری بدست می‌آید.

۲.۳.۴ افق زمانی معین بدون محدودیت

در برخی سازمان‌ها مانند صنعت مخابرات یا شرکت خدمات کامپیوتر و ... که چرخه عمر محصول کوتاه است، افق زمانی، محدود و معین در نظر گرفته می‌شود. رایج ترین نوع مسائل برای فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف، مسائلی است که در آن هیچ محدودیتی نداریم. به عبارت دیگر فرض بر این است که در تصمیم‌گیری در هر دوره تنها ماکزیمم کردن سود یا مینیمم کردن هزینه مطرح است. در این صورت اگر سیاست ما به عنوان مثال اعطای تسهیلات یا عدم اعطای آن به مشتری باشد، و چنانچه اعطای تسهیلات برای مشتریان یک دسته به حداکثر شدن ارزش آن‌ها منجر شود، تا لحظه‌ای که سودآوری حداکثر شود بدون محدودیت در اعطای تسهیلات، این کار صورت خواهد گرفت. بدین ترتیب رابطه فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف مطابق با رابطه (۵.۴) بصورت زیر خواهد بود:

$$V_i(t) = \text{Max}\{c_i^{(p)} - d_i^{(p)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(p)} V_k(t-1), c_i^{(np)} - d_i^{(np)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(np)} V_k(t-1)\} \quad (7.4)$$

p = اعطای تسهیلات

np = عدم اعطای تسهیلات

۳.۳.۴ افق زمانی معین با محدودیت

در حالتی که افق زمانی معین باشد، ممکن است شرکت در اختصاص بودجه‌ها هم محدودیت داشته باشد. در این صورت تعداد تسهیلات و دوره‌های باقی مانده نیز باید در برنامه‌ریزی پویا در نظر گرفته شود. در این حالت سیاست بهینه بهترین زمان را به دلیل محدودیت بودجه تسهیلاتی به ما نشان می‌دهد. در واقع به ما می‌گوید در چه زمانی و به کدام گروه از مشتریان بودجه تسهیلات اختصاص داده شود بطوریکه بیشترین ارزش را برای ما داشته باشند. برنامه‌ریزی پویا روشی است که از آخرین حالت ممکن شروع کرده و آنچه را که در آن حالت امکان‌پذیر است بررسی می‌نماید سپس با استفاده از اطلاعات بدست آمده از فرض بودن در آخرین حالت به حل حالت ماقبل می‌پردازد و این کار برای حالت‌های قبل از آن ادامه می‌یابد.

در چنین حالتی مرحله، دوره زمانی است که در آن قرار داریم، متغیر حالت تعداد جوایز باقی مانده و متغیر تصمیم نیز اعطا و عدم اعطای تسهیلات به مشتریان در دوره‌ای است که در آن قرار داریم. برای این حالت $V_i(t, p)$ به عنوان ارزش مشتری در حالت i زمانی که t دوره باقی مانده و تعداد تسهیلات باقی مانده p باشد، تعریف می‌شود. رابطه بازگشتی برای این مسئله بصورت زیر است:

$$V_i(t, p) = \text{Max}\{c_i^{(p)} - d_i^{(p)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(p)} V_k(t-1, p-1), c_i^{(np)} - d_i^{(np)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(np)} V_k(t-1, p)\}$$

برای $p = 1, \dots, p_{max}$ و $t = 1, \dots, t_{max}$ و

$$V_i(t, 0) = c_i^{(np)} - d_i^{(np)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(np)} V_k(t-1, 0)$$

برای مثال:

$$V_i(1, p) = \text{Max}\{c_i^{(p)} - d_i^{(p)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(p)} V_k(0, p-1), r_i^{(np)} - d_i^{(np)} + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(np)} V_k(0, p)\}$$

نماینگر ارزش مشتری در دوره ما قبل آخر است زمانی که p تسهیلات باقی مانده باشد. با استفاده از رابطه بازگشتی فوق و بررسی سیاست در هر دوره با تکرار سیاست‌های مختلف، بهترین زمان اجرای سیاست با بیشترین ارزش بدست خواهد آمد.

پیاده‌سازی و تجزیه و تحلیل مدل

برای داده‌های شرکت خدمات کامپیوتری فرض می‌کنیم طول دوره برنامه‌ریزی برحسب هفته $w_{max} = 52$ باشد، همچنین بیشترین تعداد تسهیلات $p_{max} = 4$ باشد. برنامه‌ریزی پویا با کمک نرم افزار حل شده و نتایج آن در جدول ۴.۴ آورده شده است. در جدول جواب بهینه بصورت زیر آورده شده است:

$$(t_1, t_2, t_3, t_4, V^*)$$

که در آن V^* میانگین درآمد بهینه و t_i بهترین هفته برای اعطای تسهیلات در سیاست بهینه و $(-)$ به عدم تسهیلات اشاره دارد. خلاصه نتایج برای هزینه‌های تسهیلات و نرخ تنزیل متفاوت در جدول آورده شده است:

جدول ۴.۴: سیاست‌های ثابت بهینه و CLV آن‌ها برای افق زمانی معین

حالت ۰	حالت ۱	حالت ۲	حالت ۳	α	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۶۷)	(-, -, -, -, ۲۷۶)	(-, -, -, -, ۱۵۸)	(۱, ۴۵, ۵۰, ۵۲, ۹۵)	۰.۹	$d = 0$
(۱, ۲, ۳, ۴, ۱۳۸)	(-, -, -, -, ۳۳۵)	(-, -, -, -, ۲۳۴)	(۴۵, ۴۸, ۵۰, ۵۱, ۱۶۹)	۰.۹۵	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۹۲۹)	(-, -, -, -, ۱۱۵۵)	(-, -, -, -, ۱۰۳۱)	((۴۷, ۴۹, ۵۰, ۵۱, ۹۶۳)	۰.۹۹	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۶۰)	(-, -, -, -, ۲۷۱)	(-, -, -, -, ۱۵۲)	(۴۹, ۵۰, ۵۱, ۵۲, ۸۹)	۰.۹	$d = 2$
(۱, ۲, ۳, ۴, ۱۲۸)	(-, -, -, -, ۳۴۷)	(-, -, -, -, ۲۲۵)	(۴۸, ۵۰, ۵۱, ۵۲, ۱۶۰)	۰.۹۵	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۸۱۵)	(-, -, -, -, ۱۰۴۱)	(-, -, -, -, ۹۱۷)	(۴۸, ۴۹, ۵۱, ۵۲, ۸۴۹)	۰.۹۹	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۶۰)	(-, -, -, -, ۲۶۹)	(-, -, -, -, ۱۵۰)	(-, -, -, -, ۸۷)	۰.۹	$d = 3$
(۱, ۲, ۳, ۴, ۱۲۳)	(-, -, -, -, ۳۴۲)	(-, -, -, -, ۲۲۱)	(۴۹, ۵۰, ۵۱, ۵۲, ۱۵۵)	۰.۹۵	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۷۵۸)	(-, -, -, -, ۹۸۴)	(-, -, -, -, ۸۶۰)	(۴۸, ۵۰, ۵۱, ۵۲, ۷۹۲)	۰.۹۹	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۵۰)	(-, -, -, -, ۲۶۴)	(-, -, -, -, ۱۴۴)	(-, -, -, -, ۸۱)	۰.۹	$d = 5$
(۱, ۲, ۳, ۴, ۱۱۴)	(-, -, -, -, ۳۳۴)	(-, -, -, -, ۲۱۲)	(-, -, -, -, ۱۴۷)	۰.۹۵	
(۱, ۲, ۳, ۴, ۶۵۰)	(-, -, -, -, ۸۷۶)	(-, -, -, -, ۷۵۲)	(-, -, -, -, ۶۸۴)	۰.۹۹	

از نتایج جدول ۴.۴ داریم:

- برای مقادیر متفاوت هزینه‌های ثابت d ، سیاست بهینه به عدم اعطای تسهیلات به مشتریان حالت ۲ و ۳ اشاره دارد.
- برای مشتریانی که در حالت ۰ قرار دارند، سیاست بهینه اعطای هر چهار تسهیلات موجود به این گروه از مشتریان در اسرع وقت است.
- در حالت ۱، سیاست ثابت بهینه بستگی به مقدار d دارد. اگر d بزرگ باشد نیاز به اعطای تسهیلات به این گروه از مشتریان نیست. در غیر این صورت زمانی که d کوچک است می‌توان تسهیلات را در اواخر دوره ارائه داد.

به طور کلی در این فصل فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف به عنوان روش مورد استفاده برای بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتریان با فرض گسسته بودن طول ارتباط مشتریان و شرکت، معرفی شد و با توجه به ویژگی‌های آن و مدل برنامه‌ریزی پویا تصادفی، روش‌هایی برای ایجاد مدل و حل آن استفاده شد و با یافتن بهترین سیاست ارزش مشتریان در طول رابطه با شرکت به بهترین مقدار خود رسید. پس از بررسی ارزش طول عمر مشتریان در زمان گسسته در فصل بعد با فرض پیوسته بودن طول مدت ارتباط شرکت و مشتری به بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته پرداخته خواهد شد.

فصل ۵

بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته

۱.۵ مقدمه

همانطور که در فصل‌های پیشین اشاره شد، هدف از مدلسازی ارزش طول عمر مشتری یک مداخله آینده‌نگر است. به عبارت دیگر ارزش طول عمر مشتری می‌تواند با نظارت بر ارزش مشتری، به تصمیم‌گیری درباره چگونی رفتار با مشتری در آینده (چه در زمینه فروش محصولات، چه در هزینه، ارائه نرخ بهره و ...) کمک کند.

تاکنون مدلسازی ارزش طول عمر مشتری در زمان‌های گسسته و بهینه‌سازی آن با کمک فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف معرفی شد. در این فصل به بررسی ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته و بهینه‌سازی آن با در نظر گرفتن پیوسته بودن مدت زمان ارتباط مشتری و شرکت پرداخته می‌شود. روزت^۱ و همکاران [۳۵] مدلی برای ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته با استفاده از تابع ارزش $v(t)$ ارائه کردند. فرض کنید متغیر تصادفی T مدت زمان ارتباط مشتری با شرکت (قرارداد) باشد که دارای تابع توزیع تجمعی $F(t) = P(T \leq t)$ است، آنگاه میانگین ارزش طول عمر یک مشتری در

^۱Rosset

طول زمان قرارداد با شرکت بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} E \left\{ \int_0^T v(s) ds \right\} &= E \left\{ \int_0^\infty I(0 < s < T) v(s) ds \right\} \\ &= \int_0^\infty v(s) E \{ I(0 < s < T) \} ds \\ &= \int_0^\infty v(s) P(T > s) ds \\ &= \int_0^\infty v(s) \{ 1 - P(T \leq s) \} ds \\ &= \int_0^\infty v(s) \{ 1 - F(s) \} ds \end{aligned}$$

سپس بر روی مدل‌هایی برای توزیع T تمرکز کرده و به بررسی اثرات تابع خطر^۲ بر ارزش مشتری و سرانجام به بررسی مثال‌ها پرداختند.

در این فصل با ارائه چارچوبی با توجه به استراتژی شرکت، مدلی برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته معرفی شده و سپس با یافتن بهترین مقدار آستانه درآمد و زمان بررسی مجدد حساب مشتری، ارزش طول عمر مشتری به بیشترین مقدار می‌رسد. برای این منظور ابتدا به معرفی مدل اولیه ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته پرداخته می‌شود.

۲.۵ محاسبه ارزش طول عمر مشتری در زمان پیوسته

همانگونه که در زمان گسسته عوامل تاثیرگذار بر ارزش طول عمر مشتری معرفی شد، در زمان پیوسته هم سه عامل برای محاسبه ارزش طول عمر یک مشتری موثر است:

۱. ارزش مشتری در طول زمان $(v(t))$ برای $t \geq 0$ ، که $t = 0$ نشان دهنده ارزش فعلی مشتری است. ارزش آینده مشتری با استفاده از داده‌های موجود با کمک دانش کسب و کار و ابزارهای تحلیلی تخمین زده می‌شود.

۲. احتمال ریزش (رویگردانی) مشتری در طول زمان معمولاً توسط تابع بقا توصیف می‌شود. در واقع تابع بقا $\bar{F}(t)$ احتمال ماندگاری مشتری بعد از زمان t را بیان می‌کند. به عبارت دیگر اگر $F(t) = P(T \leq t)$ تابع توزیع T باشد، آنگاه $\bar{F}(t) = P(T > t)$ است که $\bar{F}(0) = 1$ و $\bar{F}(\infty) = 0$ است.

۳. ضریب تنزیل $D(t)$ که ارزش فعلی پول را بیان می‌کند. این تابع براساس نوع کسب و کار بدست می‌آید که معمولاً دو انتخاب رایج وجود دارد:

• تنزیل نمایی^۳:

$$D(t) = \exp(-at) \quad a \geq 0$$

^۲Hazard function

^۳Exponential decay

● تابع آستانه^۴:

$$D(t) = I(t \leq T) \quad T > 0$$

ممکن است در برخی مدل ها نرخ تنزیل در نظر گرفته نشود. با توجه به این سه عامل، یک مدل صریح و روشن برای محاسبه ارزش طول عمر مشتری بصورت زیر است [۳۵]:

$$CLV = \int_0^T \bar{F}(t) D(t) v(t) dt$$

یکی از محدودیت های مدل فوق، فرض قطعی بودن فرآیند ارزش $v(\cdot)$ است. در بسیاری از موارد احتمال آن است که فرآیند در معرض نوسانات تصادفی در طول زمان باشد. در بخش بعد پیشنهاد می شود ارزش مشتری به عنوان فرآیند تصادفی، منعکس کننده ویژگی فردی رفتار مشتری باشد و مدلی برای محاسبه ارزش مشتری ارائه می شود [۱۱].

۳.۵ چارچوب مدل سازی

فرض کنید که یک مشتری در زمان $t = 0$ با یک شرکت قرارداد می بندد. در طول این دوره $(0, t)$ تا شروع دوره بعدی، درآمد بدست آمده از مشتری برای شرکت $V_1(t)$ و هزینه صرف شده برای مشتری توسط شرکت در این دوره $C_1(t)$ است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می شود که $V_1(0) = 0$ و $C_1(0) = 0$. در واقع $C_1(0) > 0$ نشان دهنده هزینه جذب مشتری است که تاثیری روی بررسی ندارد.

فرآیند V_1 معمولاً صعودی در نظر گرفته می شود (البته ممکن است در برخی شرایط اینگونه نشود، مثلاً زمانی که شرکت متحمل هزینه برای یک قرارداد خاص و یا بازپرداخت به مشتری برای برخی دلایل می شود). فرآیند C_1 اغلب قطعی است که برای همه مشتریان یکسان است، این موضوع نشان دهنده آن است که هزینه هایی که برای شرکت بوجود می آید تقریباً ثابت در نظر گرفته می شود با این فرض داریم: $E\{C_1(t)\} = \gamma_1 t$ که در آن $\gamma_1 > 0$ نرخ هزینه^۵ است.

این نکته را باید در نظر گرفت که اختیار اتمام قرارداد و خاتمه دادن به آن در هر زمان برای شرکت و مشتری امکان پذیر است. زمان پایان قرار داد با T_1 نشان داده خواهد شد که دارای تابع توزیع $F_1(t) = P(T_1 \leq t)$ و تابع بقا $\bar{F}_1(t) = 1 - F_1(t)$ است.

استراتژی شرکت بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

قرارداد (حساب) مشتری در زمان r_1 که $T_1 > r_1$ بررسی می شود، فرض کنید v_1 سطح آستانه درآمد تعیین شده باشد، اگر $V_1(r_1) \leq v_1$ باشد قرارداد بوسیله شرکت فسخ می شود، در غیر این صورت اگر $V_1(r_1) > v_1$ ، شرکت با ارائه یک قرارداد جدید مشتری را تشویق به تمدید حساب در شرایط مطلوب تر می کند. آرایش جدید نیاز به فرآیند درآمد جدید V_2 و فرآیند هزینه جدید C_2 در یک دوره جدید برای قرارداد دارد. این احتمال وجود دارد که زمانی که این قرارداد پیشنهاد می شود، مشتری

^۴ Threshold function

^۵ Cost rate

آن را رد کند. این احتمال می‌تواند به وسیله اینکه اجازه دهیم T_2 با احتمال مثبت صفر شود جایگزین گردد.

مرحله دوم (V_2, C_2, T_2) مانند مرحله قبل بصورت دوره‌ای تکرار می‌شود، یعنی در هر دوره ممکن است اگر درآمدها زیر حد آستانه قرار بگیرد قرارداد فسخ شود و در صورت مطلوب بودن شرایط، دوره جدید قرارداد آغاز شود.

تحت استراتژی بررسی تک منظوره^۶، ارزش مشتری در مدت زمان طول عمر قراردادش (CLV) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$CLV = \begin{cases} V_1(T_1) - C_1(T_1) & T_1 \leq r_1 \\ V_1(r_1) - C_1(r_1) & T_1 > r_1, V_1(r_1) \leq v_1 \\ V_1(r_1) - C_1(r_1) + V_2(T_2) - C_2(T_2) & T_1 > r_1, V_1(r_1) \geq v_1 \end{cases}$$

تعریف ۱.۳.۵ (تابع نشانگر^۷). [۱۴] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و A زیر مجموعه‌ای از X باشد، در این صورت تابع نشانگر A در X یعنی $I_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ برای هر $x \in X$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X - A \end{cases}$$

که با $I(A)$ نیز نشان داده می‌شود.

اگر X یک فضای احتمالی با توزیع P باشد، سپس $I(A)$ یک متغیر تصادفی است که میانگین ارزش آن برابر است با:

$$E(I(A)) = \int_X I(A) dP = \int_A dP = P(A)$$

با توجه به این موضوع که T متغیر تصادفی مدت زمان است با فرض $X = T$ می‌توان رابطه ارزش طول عمر مشتری را به راحتی توسط تابع نشانگر $I(\cdot)$ ، بصورت زیر نوشت:

$$CLV = \{V_1(T_1) - C_1(T_1)\}I(T_1 \leq r_1) + \{V_1(r_1) - C_1(r_1)\}I(T_1 > r_1) \quad (1.5) \\ + \{V_2(T_2) - C_2(T_2)\}I(T_1 > r_1)I(V_1(r_1) > v_1)$$

فرآیندهای V_1 و V_2 مستقل نیستند. زیرا ممکن است درآمد بدست آمده از مشتری در مرحله اول و دوم یکسان باشد. V_1 و V_2 بوسیله ZU_1 و ZU_2 جایگزین می‌شوند، که Z یک مولفه تصادفی است که نشان‌دهنده شاخص ارزش فردی (ویژگی شخصی) است و فرآیندهای U_1 و U_2 غیر نزولی هستند. بنابراین یک «مشتری خوب» دارای مقدار Z مثبت بزرگ خواهد بود و یک «مشتری بد» مقدار Z مثبت کوچک یا حتی منفی خواهد داشت. در این صورت با جایگذاری در رابطه (۱.۵) داریم:

$$CLV = \{ZU_1(T_1) - C_1(T_1)\}I(T_1 \leq r_1) + \{ZU_1(r_1) - C_1(r_1)\}I(T_1 > r_1) \quad (2.5) \\ + \{ZU_2(T_2) - C_2(T_2)\}I(T_1 > r_1)I(ZU_1(r_1) > v_1)$$

^۶Single-review

^۷Indicator function

اکنون فرض می شود که U_1, U_2, T_1, T_2 و Z همگی مستقلند. همچنین Z دارای میانگین ۱ در سراسر جمعیت افراد است. به عبارت دیگر تاثیر ویژگی شخصی برای همه افراد یکسان در نظر گرفته شده و U_1 و U_2 تاثیر مستقیم در میانگین درآمد بدست آمده دارند ($E(Z) = 1$). با فرض استقلال می توان نوشت:

$$\begin{aligned} E(CLV) &= E_Z E_{T_1} E_{U_1} E_{C_1} \{ZU_1(T_1) - C_1(T_1)\} I(T_1 \leq r_1) \\ &+ E_Z E_{T_1} E_{U_1} E_{C_1} \{ZU_1(r_1) - C_1(r_1)\} I(T_1 > r_1) \\ &+ E_Z E_{T_1} E_{T_2} E_{U_1} E_{U_2} E_{C_2} \{ZU_2(T_2) - C_2(T_2)\} I(T_1 > r_1) I(ZU_1(r_1) > v_1) \\ &= E_{T_1} E_{U_1} E_{C_1} \{U_1(T_1) - C_1(T_1)\} I(T_1 \leq r_1) \\ &+ E_{U_1} E_{C_1} \{U_1(r_1) - C_1(r_1)\} E_{T_1} \{I(T_1 > r_1)\} \\ &+ E_{T_1} E_{U_1} E_{U_2} E_{C_2} \left(\int_{\frac{v_1}{U_1(r_1)}}^{\infty} \{ZU_2(T_2) - C_2(T_2)\} dF_Z(Z) \right) E_{T_1} I(T_1 > r_1) \\ &= E_{U_1} E_{C_1} \int_0^{r_1} \{U_1(t) - C_1(t)\} dF_1(t) \\ &+ E_{U_1} E_{C_1} \{U_1(r_1) - C_1(r_1)\} \bar{F}_1(r_1) \\ &+ E_{T_1} E_{U_1} E_{U_2} E_{C_2} \left(\int_{\frac{v_1}{U_1(r_1)}}^{\infty} \{ZU_2(T_2) - C_2(T_2)\} dF_Z(Z) \right) \bar{F}_1(r_1) \\ &= \int_0^{r_1} E\{U_1(t) - C_1(t)\} dF_1(t) + E\{U_1(r_1) - C_1(r_1)\} \bar{F}_1(r_1) \\ &+ E \left(\int_{\frac{v_1}{U_1(r_1)}}^{\infty} \{ZU_2(T_2) - C_2(T_2)\} dF_Z(Z) \right) \bar{F}_1(r_1) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} E(CLV) &= \int_0^{r_1} E\{U_1(t) - C_1(t)\} dF_1(t) + E\{U_1(r_1) - C_1(r_1)\} \bar{F}_1(r_1) \quad (3.5) \\ &+ E \left(\int_{\frac{v_1}{U_1(r_1)}}^{\infty} \{ZU_2(T_2) - C_2(T_2)\} dF_Z(Z) \right) \bar{F}_1(r_1) \end{aligned}$$

که F_Z تابع توزیع Z است.

در برخی مواقع ممکن است مشتری ها قرار داد خود را خاتمه ندهند. در این صورت $P(T_1 = \infty) = 1$ که در رابطه (۳.۵) عبارت اول صفر می شود و در عبارت دوم و سوم $\bar{F}_1(r_1) = P(T_1 > r_1) = 1$ است. زیرا $P(T_1 = \infty > r_1) = 1$.

اگر اطلاعات بیشتری از مشتری در اختیار باشد یعنی $Z = z_1$ معلوم باشد، عبارت سوم در (۳.۵) به

عبارت زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\frac{v_1}{U_1(r_1)}}^{\infty} \frac{v_1}{U_1(r_1)} \{z_1 U_2(T_2) - C_2(T_2)\} dF_{z_1}(z_1) \right) &= E \left(\{z_1 U_2(T_2) - C_2(T_2)\} I(z_1 > \frac{v_1}{U_1(r_1)}) \right) \\ &= E(\{z_1 U_2(T_2) - C_2(T_2)\}) E \left(I(z_1 > \frac{v_1}{U_1(r_1)}) \right) \\ &= E(\{z_1 U_2(T_2) - C_2(T_2)\}) P(U_1(r_1) > \frac{v_1}{z_1}) \end{aligned}$$

۴.۵ بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری

در این بخش شرایطی در نظر گرفته می‌شود که شرکت می‌خواهد مقدار آستانه درآمد (v_1) و بهترین زمان برای بررسی قرارداد (r_1) را طوری بدست آورد که میانگین ارزش طول عمر مشتری بیشترین مقدار شود.

ابتدا تغییرات $E(CLV)$ نسبت به v_1 مود بررسی قرار گرفته می‌شود. از رابطه (۳.۵) با استفاده از قضیه لایب نیتز^۸ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial v_1} E(CLV) = E \left[-\frac{1}{U_1(r_1)} \left\{ \frac{v_1 U_2(T_2)}{U_1(r_1)} - C_2(T_2) \right\} f_Z\left(\frac{v_1}{U_1(r_1)}\right) \right] \bar{F}_1(r_1) \quad (۴.۵)$$

که f_Z تابع چگالی Z است. برای فهم بهتر این رابطه و روشن شدن مطلب، فرض می‌شود که U_1 و U_2 فرآیندهایی کاملاً قطعی هستند، که $U_1(t) = \beta_1 t$ و $U_2(t) = \beta_2 t$ و در آن β نرخ درآمد^۹ خواهد بود. سپس با جایگذاری در (۴.۵) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial v_1} E(CLV) = -\frac{\mu_2}{\beta_1 r_1} \left(\frac{v_1 \beta_2}{\beta_1 r_1} - \gamma_2 \right) f_Z\left(\frac{v_1}{U_1(r_1)}\right) \bar{F}_1(r_1) \quad (۵.۵)$$

که $\mu_2 = E(T_2)$.

بنابراین ما کزیمم مقدار آستانه درآمد از حل معادله $\frac{\partial}{\partial v_1} E(CLV) = 0$ بدست می‌آید، که در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_2}{\beta_1 r_1} \left(\frac{v_1 \beta_2}{\beta_1 r_1} - \gamma_2 \right) f_Z\left(\frac{v_1}{U_1(r_1)}\right) \bar{F}_1(r_1) &= 0 \\ \left(\frac{v_1 \beta_2}{\beta_1 r_1} - \gamma_2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\hat{v}_1 = \frac{\gamma_2 \beta_1 r_1}{\beta_2}$$

لذا $\hat{v}_1 = \frac{\gamma_2 \beta_1 r_1}{\beta_2}$ بیشترین مقدار آستانه درآمد شرکت است که به ازای آن ارزش طول عمر مشتری به بیشترین مقدار خود خواهد رسید.

^۸Leibniz theorem

^۹Income rate

اگر $\beta_2 < \beta_1$ باشد، یعنی نرخ درآمد در مرحله دوم کمتر از مرحله اول باشد، در این صورت $\hat{v}_1 > \gamma_2 r_1$. این بدین معنی است که بهترین آستانه درآمد تعیین شده از نرخ هزینه مرحله دوم دوره اول بیشتر می‌شود که این نشان‌دهنده بدست آوردن سود بیشتر از مشتری در طول مرحله دوم قرارداد است. اکنون تاثیر متغیر r_1 بر $E(CLV)$ مورد بررسی قرار داده می‌شود. با حفظ قطعی بودن U_1 و U_2 و خطی بودن فرآیند هزینه از رابطه (۳.۵) داریم:

$$E(CLV) = \int_0^{r_1} (\beta_1 t - \gamma_1 t) dF_1(t) + (\beta_1 r_1 - \gamma_1 r_1) \bar{F}_1(r_1) \quad (۶.۵)$$

$$+ E \left(\int_{\frac{v_1}{\beta_1 r_1}}^{\infty} (Z\beta_2(T_2) - \gamma_2(T_2)) dF_Z(Z) \right) \bar{F}_1(r_1)$$

با توجه به اینکه $\bar{F}_1(r_1) = 1 - F_1(r_1)$ و مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۶.۵) نسبت به r_1 داریم:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} E(CLV) = (\beta_1 r_1 - \gamma_1 r_1) f_1(r_1) + (\beta_1 - \gamma_1) \bar{F}_1(r_1) - f_1(r_1) (\beta_1 r_1 - \gamma_1 r_1)$$

$$- \frac{v_1}{\beta_1 r_1^2} \left[\frac{v_1}{\beta_1 r_1} (\beta_2 T_2 - \gamma_2 T_2) \left(f_Z \left(\frac{v_1}{\beta_1 r_1} \right) \right) \right] \bar{F}_1(r_1)$$

$$- E \left(\int_{\frac{v_1}{\beta_1(r_1)}}^{\infty} (Z\beta_2 T_2 - \gamma_2 T_2) dF_Z(Z) \right) f_1(r_1)$$

با ساده کردن عبارت فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} E(CLV) = (\beta_1 - \gamma_1) \bar{F}_1(r_1) - f_Z \left(\frac{v_1}{\beta_1 r_1} \right) \bar{F}_1(r_1) \mu_2 \left(\frac{v_1 \beta_2}{\beta_1 r_1} - \gamma_2 \right) \left(\frac{v_1}{\beta_1 r_1^2} \right)$$

$$- f_1(r_1) \mu_2 \int_{\frac{v_1}{\beta_1(r_1)}}^{\infty} (Z\beta_2 - \gamma_2) dF_Z(Z)$$

در $v_1 = \hat{v}_1$ عبارت دوم صفر می‌شود، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} E(CLV) = (\beta_1 - \gamma_1) \bar{F}_1(r_1) - f_1(r_1) \mu_2 E \left\{ (Z\beta_2 - \gamma_2) I \left(Z > \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) \right\} \quad (۷.۵)$$

اگر رابطه (۷.۵) را مساوی صفر قرار دهیم، داریم:

$$\frac{f_1(r_1)}{\bar{F}_1(r_1)} = \frac{(\beta_1 - \gamma_1)}{\mu_2 E \{ \max(0, \beta_2 Z - \gamma_2) \}} \quad (۸.۵)$$

عبارت سمت چپ تابع خطر^{۱۰} T_1 در نقطه r_1 است.

^{۱۰}Hazard function

تعریف ۱.۴.۵. تابع خطر نشان‌دهنده احتمال مرگ یا از کار افتادن واحدی از جامعه آماری در یک بازه زمانی مشخص است به شرط آنکه آن واحد در ابتدای این بازه زنده یا فعال باشد که بصورت زیر بدست می‌آید:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

که در آن $f(t)$ تابع چگالی و $\bar{F}(t)$ تابع بقا فرآیند در زمان t است. در رابطه (۸.۵) صورت کسر سمت راست تفاضل نرخ درآمد و هزینه در مرحله اول است و مخرج کسر برابر تفاضل نرخ درآمد و هزینه در مرحله دوم برای مشتری منحصر به فرد است. رابطه (۸.۵) با آن که شرط جالبی است اما همیشه برای تعیین r_1 کاربردی نیست. برای مثال اگر T_1 دارای توزیع نمایی باشد سمت چپ رابطه مستقل از r_1 خواهد بود. زیرا توزیع نمایی دارای تابع چگالی $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ و تابع بقا $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ است بنابراین:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \lambda$$

برای این منظور در ادامه به اتخاذ توابع و توزیع‌های خاص برای متغیرهای تصادفی نیاز است. برای نمونه در بخش بعد با فرض اینکه مولفه تصادفی Z دارای توزیع نرمال است به محاسبه ارزش طول عمر مشتری پرداخته شده است که قبل از آن لازم است که لم زیر ارائه شود.

لم ۲.۴.۵. اگر Z دارای توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، آن‌گاه:

$$E[ZI(Z > x)] = \sigma \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) + \mu \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \right\} \quad (9.5)$$

که ϕ تابع چگالی و Φ تابع توزیع نرمال استاندارد $N(0, 1)$ است.

برهان. از آنجایی که $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\phi'(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = -x\phi(x)$$

همچنین

$$E[ZI(Z > x)] = \int_x^\infty Z \phi\left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right) dZ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[ZI(Z > x)] &= \int_x^\infty \sigma \left(\frac{Z + \mu - \mu}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right) dZ \\ &= \sigma \int_x^\infty \left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right) dZ + \mu \int_x^\infty \phi\left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right) dZ \\ &= \sigma \int_x^\infty -\phi'\left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right) dZ + \mu \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \right\} \\ &= \sigma \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) + \mu \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \right\} \end{aligned}$$

□

۱.۴.۵ حالت خاص

فرض کنید نرخ متوسط درآمد تعهدی در طول زمان ثابت است، به عبارت دیگر $E\{U_1(t)\} = \beta_1 t$ و $E\{U_2(t)\} = \beta_2 t$ ، همچنین میانگین فرایندهای هزینه در زمان خطی هستند یعنی:

$$E\{C_1(t)\} = \gamma_1 t \quad E\{C_2(t)\} = \gamma_2 t$$

که در آن $\gamma_1 = \gamma_2$.

فرض کنید Z دارای توزیع نرمال باشد، با استفاده از لم ۲.۴.۵ و با فرض $\mu = 1$ میانگین ارزش طول عمر مشتری از رابطه (۳.۵) در قضیه زیر بیان شده است. توجه شود که با فرض $\mu = 1$ برای Z ، با احتمال غیر صفر $Z < 0$ نیز وجود دارد که برای مشتری از دست رفته و مشتری سطح پایین در نظر گرفته می‌شود.

قضیه ۳.۴.۵. فرض کنید مولفه تصادفی Z دارای توزیع نرمال بوده و $\mu_Z = 1$ آنگاه:

$$E(CLV) = (\beta_1 - \gamma_1) \left(\int_0^{r_1} t dF_1(t) + r_1 \bar{F}_1(r_1) \right) + \{ \beta_2 \sigma E_1 + (\beta_2 - \gamma_2)(1 - E_2) \} \mu_2 \bar{F}_1(r_1) \quad (10.5)$$

که در آن:

$$E_1 = \left[\phi \left\{ \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1 \right) / \sigma \right\} \right] \quad E_2 = \left[\Phi \left\{ \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1 \right) / \sigma \right\} \right]$$

برهان. برای اثبات رابطه فوق، طبق رابطه (۳.۵) و با توجه به فرضیات مسئله:

$$\begin{aligned} E(CLV) &= \int_0^{r_1} (\beta_1 t - \gamma_1 t) dF_1(t) + (\beta_1 r_1 - \gamma_1 r_1) \bar{F}_1(r_1) \\ &+ E \left(\int_{\frac{v_1}{\beta_1 r_1}}^{\infty} (Z \beta_2 T_2 - \gamma_2 T_2) dF_Z(Z) \right) \bar{F}_1(r_1) \\ &= (\beta_1 - \gamma_1) \left(\int_0^{r_1} t dF_1(t) + r_1 \bar{F}_1(r_1) \right) \\ &+ \mu_2 \bar{F}_1(r_1) E \left(\int_{\frac{v_1}{\beta_1 r_1}}^{\infty} (Z \beta_2 - \gamma_2) dF_Z(Z) \right) \\ &= (\beta_1 - \gamma_1) \left(\int_0^{r_1} t dF_1(t) + r_1 \bar{F}_1(r_1) \right) \\ &+ \mu_2 \bar{F}_1(r_1) E \left(\beta_2 \int_{\frac{v_1}{\beta_1 r_1}}^{\infty} Z dF_Z(Z) - \gamma_2 \int_{\frac{v_1}{\beta_1 r_1}}^{\infty} dF_Z(Z) \right) \end{aligned}$$

همچنین:

$$E \left(\beta_1 \int_{v_1}^{\infty} Z dF_Z(Z) - \gamma_1 \int_{v_1}^{\infty} dF_Z(Z) \right) = E \left(\beta_1 E \left[Z I(Z > \frac{v_1}{\beta_1 r_1}) \right] - \gamma_1 E \left[I(Z > \frac{v_1}{\beta_1 r_1}) \right] \right) (*)$$

طبق لم ۲.۴.۵ داریم:

$$\begin{aligned} (*) &= E \left(\beta_1 E \left[Z I(Z > \frac{v_1}{\beta_1 r_1}) \right] - \gamma_1 E \left[I(Z > \frac{v_1}{\beta_1 r_1}) \right] \right) \\ &= E \left\{ \beta_1 \sigma \phi \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1/\sigma \right) + \beta_1 \left(1 - \Phi \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1/\sigma \right) \right) \right\} \\ &\quad - \gamma_1 E \left(1 - \Phi \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1/\sigma \right) \right) \\ &= \beta_1 \sigma E \left\{ \phi \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1/\sigma \right) \right\} + \beta_1 E \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1/\sigma \right) \right\} \\ &\quad - \gamma_1 E \left(1 - \Phi \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1/\sigma \right) \right) \\ &= \beta_1 \sigma E_1 + (\beta_1 - \gamma_1)(1 - E_1) \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$E(CLV) = (\beta_1 - \gamma_1) \left(\int_0^{r_1} t dF_1(t) + r_1 \bar{F}_1(r_1) \right) + \{ \beta_1 \sigma E_1 + (\beta_1 - \gamma_1)(1 - E_1) \} \mu_2 \bar{F}_1(r_1)$$

□

رابطه (۱۰.۵) یک رابطه کلی برای بدست آوردن ارزش طول عمر مشتری است، با فرض اینکه Z دارای توزیع نرمال باشد. از این رابطه می‌توان برای بدست آوردن ارزش طول عمر مشتری با فرض توزیع‌های مختلف برای T استفاده کرد. برای نمونه در مثال عددی زیر از توزیع احتمالی پیوسته وایبل استفاده شده است.

مثال ۴.۴.۵. فرض کنید T_1 دارای توزیع وایبل^{۱۱} با تابع بقا $\bar{F}_1(t) = \exp\{-(t/\lambda)^k\}$ باشد، برای توزیع T_1 با فرض اینکه چارک اول و سوم به ترتیب ۱۰.۵ (۶ هفته) و ۶ ماه باشد پارامترهای ثابت $\lambda = ۴/۴۹۹$ و $k = ۱/۱۳۴$ هستند. میانگین T_2 را $\mu_2 = ۲۴$ (ماه) در نظر گرفته، همچنین $\sigma = ۰/۷۸۰۲$ است. نرخ درآمد و هزینه بر حسب واحد پولی در ماه نیز بصورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\beta_1 = ۲۰۰ \quad \gamma_1 = ۵۰$$

$$\beta_2 = ۱۰۰ \quad \gamma_2 = ۷۵$$

^{۱۱}Weibull distribution

همانطور که مشاهده می‌شود نرخ درآمد خالص (سود) در مرحله دوم ($\beta_2 - \gamma_2 = 25$) بطور قابل ملاحظه‌ای کمتر از مرحله اول ($\beta_1 - \gamma_1 = 150$) است، زیرا ممکن است شرکت پیشنهاد مطلوب‌تری به مشتری معتبر خود ارائه دهد.

با توجه به فرضیات مسئله برای استفاده از رابطه (۱۰.۵) تنها مشخص کردن توزیع برای فرآیند $U_1(r_1)$ باقی می‌ماند که بوسیله آن بتوان E_1 و E_2 را بدست آورد. برای این منظور فرض می‌شود توزیع $U_1(r_1)$ توزیع گاما^{۱۲} است. به عبارت دیگر $U_1(r_1) \sim \text{Gamma}(\eta t, \frac{1}{\xi})$ ، با تابع چگالی:

$$f_U = g(u; \xi, \eta t) = \frac{u^{\eta t - 1} e^{-u/\xi} \xi}{\Gamma(\eta t)} \quad u > 0$$

که در آن $\Gamma(\eta t)$ ، بیانگر تابع گاما^{۱۳} است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\eta t) = \int_0^\infty y^{\eta t - 1} \exp(-y) dy \quad \eta t > 0$$

تابع گاما انتگرالی همگراست و مقدار آن برابر عددی مثبت است.

توزیع گاما دارای میانگین $\xi \eta r_1$ و واریانس $\xi^2 \eta r_1$ است.

برای حالت خاص فرض کنید $\xi = 50$ و $\eta = 4$ ، بنابراین $U_1(t)$ دارای میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ در زمان $t = 1$ (ماه) است.

$$E\{U_1(t)\} = \xi \eta t = 50(4)(1) = 200 (= \beta_1)$$

$$\text{Var}\{U_1(t)\} = \xi^2 \eta t = 2500(4)(1) = 10000$$

با توجه به فرضیات فوق:

$$\begin{aligned} E_1 &= E \left[\phi \left\{ \left(\frac{v_1}{U_1(r_1)} - 1 \right) / \sigma \right\} \right] \\ &= \int_0^\infty \phi \left\{ \left(\frac{v_1}{u} - 1 \right) / \sigma \right\} g(u; \xi, \eta t) du \\ &= \frac{1}{\xi \eta t \Gamma(\eta t)} \int_0^\infty u^{\eta t - 1} e^{-u/\xi} \phi \left\{ \left(\frac{v_1}{u} - 1 \right) / \sigma \right\} \end{aligned}$$

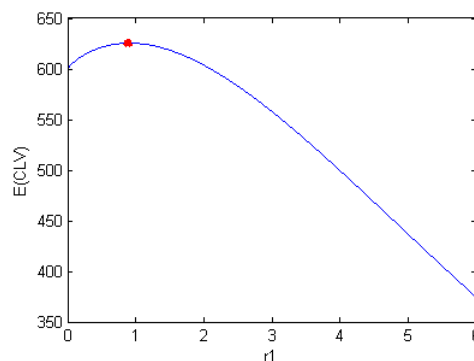
و E_2 هم به همین شکل خواهد بود با این تفاوت که Φ جایگزین ϕ می‌شود.

برای مثال فوق با فرض اینکه آستانه درآمد $v_1 = 90$ تعیین شده باشد مقادیر E_1 و E_2 محاسبه شده‌است. اکنون می‌توان میانگین ارزش طول عمر مشتری را با استفاده از رابطه (۱۰.۵) محاسبه نمود.

با فرض $(0 < r_1 \leq 6)$ ، در شکل ۱.۵ مقادیر میانگین ارزش طول عمر مشتری در این بازه زمانی مشخص شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود بیشترین مقدار ارزش طول عمر مشتری حدود ۶۳۰ است که در $r_1 = 1$ (ماه) بدست آمده است.

^{۱۲} Gamma distribution

^{۱۳} Gamma function



شکل ۱.۵: میانگین ارزش طول عمر مشتری $E(CLV)$ نسبت به r_1 برای فرآیند گاما

بنابراین نتیجه می‌شود اگر فرآیند درآمد از توزیع گاما پیروی کند بهترین زمان برای بررسی حساب مشتری در اوایل قرارداد است که در این صورت ارزش مشتری بیشترین مقدار را خواهد داشت. بهترین مقدار آستانه درآمد تعیین شده توسط شرکت را نیز می‌توان با توجه به رابطه (۴.۵)، بدست آورد.

$$\frac{\partial}{\partial v_1} E(CLV) = E \left[-\frac{1}{U_1(r_1)} \left\{ \frac{v_1 U_2(T_2)}{U_1(r_1)} - C_2(T_2) \right\} f_Z\left(\frac{v_1}{U_1(r_1)}\right) \right] \bar{F}_1(r_1) = 0$$

با توجه به فرض مسئله $E\{U_1(r_1)\} = \xi \eta r_1$. همچنین اگر فرض شود در مرحله دوم (T_2) برای فرآیند گاما $\xi' = 50$ و $\eta' = 2$ باشد:

$$-\frac{\mu_2}{\xi \eta r_1} \left(\frac{v_1 \xi' \eta'}{\xi \eta r_1} - \gamma_2 \right) f_Z\left(\frac{v_1}{U_1(r_1)}\right) \bar{F}_1(r_1) = 0$$

بنابراین:

$$\left(\frac{v_1 \xi' \eta'}{\xi \eta r_1} - \gamma_2 \right) = 0$$

در $r_1 = 1$ داریم:

$$\hat{v}_1 = \frac{\gamma_2 \xi \eta}{\xi' \eta'} = \frac{75 \times 200}{100} = 150$$

بنابراین بهترین آستانه درآمد تعیین شده توسط شرکت 150 است که به ازای آن ارزش طول عمر مشتری به بیشترین مقدار خواهد رسید.

می‌توان توزیع‌های دیگری را برای فرآیند درآمد در نظر گرفت و برای آن‌ها نیز بیشترین میانگین ارزش طول عمر مشتری را نیز بدست آورد.

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ابتدا ارزش طول عمر مشتری به عنوان معیاری برای ارزیابی ارزش مشتریان و بخش‌بندی آنان به گروه‌های مختلف معرفی شد. سپس با توجه به اهمیت این فاکتور برای سازمان‌ها و شرکت‌ها در عرصه رقابت و نیز محدودیت بودجه‌ای که در اختیار این سازمان‌ها و شرکت‌ها قرار دارد، بهینه‌سازی این ارزش با فرض گسسته و پیوسته بودن مدت زمان ارتباط مشتری و شرکت، مورد بررسی قرار گرفت.

ابتدا با فرض گسسته بودن مدت زمان ارتباط، از مدل برنامه‌ریزی پویا به منظور بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتریان استفاده شد که افق زمانی بینهایت و معین مورد بررسی قرار گرفت. در افق زمانی بینهایت فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف به عنوان روش مورد استفاده برای بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتریان معرفی شد که با تعیین بهترین سیاست از مجموعه تصمیمات احتمالی، بیشترین مقدار ارزش مشتریان بدست آمد. همچنین برای افق زمانی محدود برنامه‌ریزی پویا با بررسی سیاست در هر مرحله برای هر حالت، بصورت بازگشتی بهترین سیاست اتخاذ شده را تعیین و میزان ارزش مشتریان در هر گروه را مشخص نمود. به طور کلی سیاست بهینه به توجه بیشتر و ارائه تسهیلات بهتر (اعطای وام، جایزه، تخفیف ویژه و ...) به مشتریان غیر فعال و یا مشتریان شرکت رقیب در سریع‌ترین زمان اشاره دارد که میزان نرخ تنزیل و هزینه تسهیلات بر انتخاب تصمیم، تاثیرگذار است.

با توجه به اینکه ممکن است همیشه مدت زمان ارتباط شرکت و مشتری گسسته و بصورت دوره‌ای در نظر گرفته نشود، در این پایان‌نامه فرض پیوسته بودن مدت زمان نیز مورد بررسی قرار گرفته شد که برای این منظور به بهینه‌سازی ارزش طول عمر مشتری نسبت به دوپارامتر آستانه درآمد مورد انتظار شرکت و بهترین زمان بررسی حساب پرداخته شد. با توجه به اینکه در مدل‌های قبلی ارزش مشتریان فرآیندی قطعی در نظر گرفته شده بود با فرض تصادفی بودن فرآیند درآمد مشتریان، با استفاده از توزیع‌های مختلف، آستانه درآمد و زمان بررسی حساب مشتریان به گونه‌ای بدست آمد که میانگین ارزش مشتریان بیشترین مقدار خود را داشته باشد که با فرض پیوسته بودن زمان قرارداد نیز بهتر است زمان بررسی حساب در اوایل قرارداد صورت بگیرد.

مراجع

- [۱] حکیمی، ا. (۱۳۷۵). کاربرد تئوری زنجیره های مارکوف در تصمیم گیری مدیریت. فصلنامه دانش مدیریت، ۳۱.
- [۲] خواجهوند، س.، تقوی فرد، م. ت.، نجفی، ا. (۱۳۹۱). بخش بندی مشتریان بانک صادرات ایران با استفاده از داده کاوی. مطالعات مدیریت بهبود و تحول، ۲۱ (۶۷) ۱۷۹-۲۰۰.
- [۳] صفری کهره، م.، خدادادحسینی، س. ح.، آذر، ع. (۱۳۹۳). تجزیه و تحلیل ارزش بلندمدت مشتری (CLV) به منظور بخش بندی و مدیریت سودآوری مشتریان مورد مطالعه: یکی از بانک های تجاری ایران. پژوهش های مدیریت در ایران، ۱۸ (۴) ۸۷-۱۱۰.
- [4] Berger, P. D., and Nasr, N. I. (1998). Customer lifetime value: Marketing models and applications. *Journal of Interactive Marketing*, 12(1), 17-30.
- [5] Bellman, R. (1957). A Markovian Decision Process. RAND CORP SANTA MONICA CA. P-1066.
- [6] Bitran, G., and Mondschein, S. (1997). A comparative analysis of decision making procedures in the catalog sales industry. *European Management Journal*, 15(2), 105-116.
- [7] Blattberg, R. C., and Deighton, J. (1996). Manage marketing by the customer equity test. *Harvard Business Review*, 74(4), 136.
- [8] Chan, S. L., Ip, W. H., and Cho, V. (2010). A model for predicting customer value from perspectives of product attractiveness and marketing strategy. *Expert Systems with Applications*, 37(2), 1207-1215.
- [9] Chung, K. L. (2001). A Course in Probability Theory. Academic press.
- [10] Ching, W. K., Ng, M. K., Wong, K. K., and Altman, E. (2004). Customer lifetime value: stochastic optimization approach. *Journal of the Operational Research Society*, 55(8), 860-868.

-
- [11] Crowder, M., Hand, D. J., and Krzanowski, W. (2007). On optimal intervention for customer lifetime value. *European Journal of Operational Research*, 183(3), 1550-1559.
- [12] Donkers, B., Verhoef, P. C., and de Jong, M. G. (2007). Modeling CLV: A test of competing models in the insurance industry. *Quantitative Marketing and Economics*, 5(2), 163-190.
- [13] Dwyer, F. R. (1997). Customer lifetime valuation to support marketing decision making. *Journal of Interactive Marketing*, 11(4), 6-13.
- [14] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (Seconded). John Wiley and Sons.
- [15] Glady, N., Baesens, B., and Croux, C. (2009). A modified Pareto/NBD approach for predicting customer lifetime value. *Expert Systems with Applications*, 36(2), 2062-2071.
- [16] Gummesson, E. (1978). Toward a theory of professional service marketing. *Industrial Marketing Management*, 7(2), 89-95.
- [17] Gupta, S., Hanssens, D., Hardie, B., Kahn, W., Kumar, V., Lin, N., and Sriram, S. (2006). Modeling customer lifetime value. *Journal of Service Research*, 9(2), 139-155.
- [18] Gupta, S., and Lehmann, D. R. (2003). Customers as assets. *Journal of Interactive Marketing*, 17(1), 9-24.
- [19] Haenlein, M., Kaplan, A. M., and Beeser, A. J. (2007). A model to determine customer lifetime value in a retail banking context. *European Management Journal*, 25(3), 221-234.
- [20] Hidalgo, P., Manzur, E., Olavarrieta, S., and Farias, P. (2008). Customer retention and price matching: The AFPs case. *Journal of Business Research*, 61(6), 691-696.
- [21] Howard, R. (1960). *Dynamic Programming and Markov Decision Processes* mit Press. Cambridge, MA.
- [22] Hwang, H., Jung, T., and Suh, E. (2004). An LTV model and customer segmentation based on customer value: a case study on the wireless telecommunication industry. *Expert Systems with Applications*, 26(2), 181-188.

-
- [23] Kohut, D. R. (1986). A Markov model applied to the circulation of social science and literature books in a public library. *Collection Building*, 7(4), 12-19.
- [24] Kumar, V. (2008). *Managing Customers for Profit: Strategies to Increase Profits and Build Loyalty*. Prentice Hall Professional.
- [25] Li, G. D., Yamaguchi, D., and Nagai, M. (2007). Application hybrid grey dynamic model to forecasting compensatory control. *Engineering Computations*, 24(7), 699-711.
- [26] Min, S. H., and Han, I. (2005). Detection of the customer time-variant pattern for improving recommender systems. *Expert Systems with Applications*, 28(2), 189-199.
- [27] Paauwe, P., van der Putten, P., and Van Wezel, M. (2007, August). DTMC: An actionable e-customer lifetime value model based on Markov chains and decision trees. In *Proceedings of the ninth international conference on Electronic commerce*, 253-262.
- [28] Pareto, V., and Page, A. N. (1971). *Translation of Manuale Di Economia Politica (Manual of Political Economy)*. AM Kelley.
- [29] Peppers, D., and Rogers, M. (2004). *Managing Customer Relationships: Strategic Framework*. John Wiley and Sons.
- [30] Peterson, R. A., Balasubramanian, S., and Bronnenberg, B. J. (1997). Exploring the implications of the Internet for consumer marketing. *Journal of the Academy of Marketing science*, 25(4), 329-346.
- [31] Pfeifer, P. E., and Carraway, R. L. (2000). Modeling customer relationships as Markov chains. *Journal of Interactive Marketing*, 14(2), 43.
- [32] Puterman, M. L. (2014). *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley and Sons.
- [33] Reinartz, W., Thomas, J. S., and Kumar, V. (2005). Balancing acquisition and retention resources to maximize customer profitability. *Journal of Marketing*, 69(1), 63-79.
- [34] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*. Academic press.

-
- [35] Rosset, S., Neumann, E., Eick, U., and Vatnik, N. (2003). Customer lifetime value models for decision support. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 7(3), 321-339.
- [36] Rust, R. T., Lemon, K. N., and Zeithaml, V. A. (2004). Return on marketing: Using customer equity to focus marketing strategy. *Journal of Marketing*, 68(1), 109-127.
- [37] Sahraee, R. (1387). Prediction of Internal Human Resource Supply in Organizations Using Markov Chain Model. M.A. Thesis. Education and Psychology Department of Allameh Tabatabaee
- [38] Thapisa, A. P. N. (1994). Human resources planning in Swaziland: Rolls-Royce versus Volkswagen approaches. *Library Management*, 15(4), 22-29.
- [39] Tirenni, G. R. (2005). Allocation of marketing resources to optimize customer equity (Doctoral dissertation, University of St. Gallen).
- [40] Venkatesan, R., and Kumar, V. (2004). A customer lifetime value framework for customer selection and resource allocation strategy. *Journal of Marketing*, 68(4), 106-125.
- [41] Winston, W. L., and Goldberg, J. B. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms* (Vol. 3). Belmont, CA: Duxbury press.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Net Present Value	ارزش خالص فعلی
Customer Lifetime Value	ارزش طول عمر مشتری
Marketing	بازاریابی
Stochastic Dynamic Programming	برنامه‌ریزی پویا تصادفی
Linear Programming	برنامه‌ریزی خطی
Value Function	تابع ارزش
Survivor Function	تابع بقا
Distribution Function	تابع توزیع
Density Function	تابع چگالی
Hazard Function	تابع خطر
Indicator Function	تابع نشانگر
Stationary Distribution	توزیع ثابت
Chash Flow	جریان نقدی
State	حالت
Churn	رویگردان
Markov Chain	زنجیره مارکوف
Policy	سیاست
Bellman Operator	عملگر بلمن
Stochastic Process	فرآیند تصادفی
Markov Decision Processes	فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف
Pareto Law	قانون پارتو
Irreducible	کاهش ناپذیر
Discount Rate	نرخ تنزیل
Retention Rate	نرخ حفظ
Income Rate	نرخ درآمد
Cost Rate	نرخ هزینه
Transition Matrix	ماتریس انتقال

Customer Relationship Managment	مدیریت ارتباط با مشتری
Migration	مهاجرت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bellman Operator	عملگر بلمن
Chash Flow	جریان نقدی
Churn	رویگردان
Cost Rate	نرخ هزینه
Customer Lifetime Value	ارزش طول عمر مشتری
Customer Relationship Managment	مدیریت ارتباط با مشتری
Density Function	تابع چگالی
Discount Rate	نرخ تنزیل
Distribution Function	تابع توزیع
Stochastic Dynamic Programming	برنامه‌ریزی پویا تصادفی
Hazard Function	تابع خطر
Income Rate	نرخ درآمد
Indicator Function	تابع نشانگر
Irreducible	کاهش ناپذیر
Linear Programing	برنامه‌ریزی خطی
Marketing	بازاریابی
Markov Chain	زنجیره مارکوف
Markov Decision Processes	فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف
Migration	مهاجرت
Net Present Value	ارزش خالص فعلی
Pareto Law	قانون پارتو
Policy	سیاست
Retention Rate	نرخ حفظ
State	حالت
Stationary Distribution	توزیع ثابت
Stochastic Process	فرآیند تصادفی
Survivor Function	تابع بقا

Transition Matrix	ماتریس انتقال
Value Function.....	تابع ارزش

Abstract

In recent years, corporations realized that customers are not profitable for them alone. The development of relationships with the profitable customers is a crucial factor in staying in the market. Marketing is the art of attracting and keeping profitable customers. The customer lifetime value (CLV) is a prediction of the net profit attributed to the entire future relationship with a customer.

In the thesis we consider the discrete and continuous CLV. First we introduce some models of CLV and its applications, then Markov decision process is used to optimize CLV. Finally, in the case that the relationship of company and customer is in a continuous time the optimal time to review account is discussed.

Keywords: Customer lifetime value, Markov decision process, Stochastic dynamic programming, Optimal policy



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations Research

On Optimal Intervention for Customer Lifetime Value

By: Roja Keshavarzi

Supervisor

Dr. Jafar Fathali

Advisors

Dr. Mohammad Arashi

Mr. Khosro Hoseinzadeh Babere

January 2017