

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
أن هدانا الله



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

نتایجی در خصوص رنگ آمیزی احاطه گر کلی گراف ها

نگارنده: نرجس خاتون مجیدی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

دی ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم نرجس خاتون مجیدی به شماره دانشجویی ۹۳۱۵۰۳۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات تحت عنوان نتایجی در خصوص رنگ آمیزی احاطه گر کلی گراف ها که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۰/۲۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ قبول (با درجه: <u>بسیار</u> امتیاز: _____)	☐ دفاع مجدد	☐ مردود
نوع تحقیق: ☐ نظری ☐ عملی		

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر نادر جعفری راد	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر صادق رحیمی شعر باف	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تقدیم به یگانه‌های زندگی‌ام

مادرم، الهه مهربانی و بردباری، که با او خداوند را
شناختم.

و پدرم، که همواره و در همه حال حضورش را در
کنار خود احساس می‌کنم.

به پاس تمام دلوایسی‌ها، امیدها و آرزوهای
بی‌پایان آن‌ها برای من

سپاس خدایی را که اول است بدون آن که پیش از او اولی باشد، و آخر است بدون آن که پس از او آخری باشد. خدایی که دیده‌های بینندگان از دیدنش فرومانده، و اندیشه‌های توصیف کنندگان از وصفش عاجز شده‌اند. آفریدگان را به قدرت خود پدید آورده و ایشان را بر وفق خواست خود اختراع فرموده است. سپس در طریق اراده خود روان ساخته و در پی محبت خود برانگیخته است. در حالی که از حدی که برایشان تعیین نموده قدمی پیش و پس نتوانند نهاد. سپاس خدای را بر آنچه از خدائی خود به ما شناسانده و بر آنچه از شکر خود به ما الهام کرده و بر آن درها که از علم به ربوبیتش بر ما گشوده و بر اخلاص در توحیدش که ما را به آن راهبری کرده و ما را از کجروی و شک در کار خود دور ساخته است. سپاس خدایی را که زیبایی‌های آفرینش را برای ما برگزید و روزی‌های پاکیزه را بر ما روان ساخت و ما را به تسلط همه آفریدگان برتری داد و از این جهت همه مخلوقاتش ما را به قدرت او فرمانبردار و به نیرویش از اطاعت ما ناچارند. سپاس خدایی را که برای قبض و بسط اعضاء، آلات و عضلاتی در بدن ما ترکیب کرد و ما را از آسایش‌های زندگی بهره‌مند گردانید و اعضایی برای کار در (پیکر) ما برقرار کرد و ما را از روزی‌های پاکیزه اطعام فرمود، و به فضل خود توانگر ساخت و به نعمت خود سرمایه بخشید. سپس ما را به پیروی اوامر خود، فرمان داد تا طاعتمان را بسنجد و از ارتکاب نواهی خود نهی فرمود تا شکرمان را بیازماید. پس از راه امرش منحرف گشتیم و بر مرکب نهیش سوار شدیم. با این حال به عقوبت ما شتاب نکرد و در انتقام ما تعجیل نفرمود؛ بلکه به رحمت خود از روی کرم با ما مدارا کرد، و به مهربانی خویش از روی حلم بازگشتن ما را انتظار کشید. آنچه را که تاب تحمل آن را نداشتیم از (ذمه) ما برداشته و بیرون از حد طاقتمان تکلیف نفرموده و جز به کار آسانمان وانداشته، و برای هیچ یک از ما حجتی و عذری باقی نگذاشته است. سپاسی که پایان نپذیرد و شمارهایش به احصاء در نیاید و نهانی‌اش دسترس و برای مدت‌ش انقطاعی نباشد. سپاسی که موجب رسیدن به طاعت و عفو او و سبب خوشنودی و وسیله آمرزش و راه به سوی بهشت و پناه از انتقام و ایمنی از خشم و پشتیبانی طاعت، و مددکار بر ادای حق و وظایف او باشد.

امام سجاده (علیه السلام)

از پدر و مادر عزیزم که از کودکی شور دانستن و لذت کشف و جستجو را در من بیدار کردند و استقامت و تلاش را به من آموختند و در تمام این سال‌ها، با فراهم کردن آرامش فکری و آسایش روحی، بسیاری از دشواری‌ها را بر من آسان نمودند، با تمام وجودم قدردانم.

به پاس احترام به مقام والای معلم، در مقابل تمام اساتید بزرگواری که در محضرشان کسب فیض نموده و کویر تشنه وجودم را از چشمه جوشان معرفتشان سیراب ساخته‌ام، سر تعظیم فرود آورده و مراتب سپاس گزاری خود را از ایشان ابراز می‌دارم.

نرجس خاتون مجیدی

دی ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **نرجس خاتون مجیدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **نتایج درخصوص رنگ آمیزی احاطه گرکلی گراف ها**، تحت راهنمایی **میثم علیشاهی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نرجس خاتون مجیدی

دی ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

برای هر عدد صحیح k ، یک k -رنگ آمیزی از گراف G ، تابعی مانند $c : V(G) \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$ می باشد، به طوری که برای هر دو راس مجاور u و v داشته باشیم $c(u) \neq c(v)$. کمترین مقدار k ، به طوری که G دارای یک k -رنگ آمیزی باشد، عدد رنگی گراف G نامیده شده و با $\chi(G)$ نمایش داده می شود.

یک رنگ آمیزی احاطه گر از گراف G ، یک رنگ آمیزی می باشد به طوریکه هر راس از $V(G)$ بتواند حداقل یک کلاس رنگ را احاطه کند. عدد رنگی احاطه گر یا $\chi_d(G)$ ، کمترین تعداد کلاس رنگ در یک رنگ آمیزی احاطه گر از G می باشد.

همچنین، یک رنگ آمیزی احاطه گر کلی، یک رنگ آمیزی مجاز از G می باشد به طوری که هر راس از $V(G)$ ، بتواند یک کلاس رنگ بجز کلاس خود را احاطه کند. عدد رنگی احاطه گر کلی $\chi_d^t(G)$ از G ، کمترین تعداد رنگ در یک رنگ آمیزی احاطه گر کلی از G می باشد.

در این پایان نامه، عدد رنگی احاطه گر کلی را روی برخی از گراف ها مورد مطالعه قرار می دهیم و کران هایی بران آن ها ارائه خواهیم کرد، همچنین عدد رنگی احاطه گر کلی در یک گراف را با عدد رنگی و عدد احاطه گر کلی آن مورد مقایسه قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: رنگ آمیزی احاطه گر، رنگ آمیزی احاطه گر کلی، حاصل ضرب خارجی، حاصل ضرب دکارتی، ابرمکعب.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	۱ مقدمه
۱	۱.۱ تاریخچه
۳	۲.۱ تعاریف
۵	۳.۱ مروری بر فصل‌ها
۷	۲ رنگ‌آمیزی احاطه‌گر در برخی از گراف‌ها
۷	۱.۲ مقدمه
۸	۲.۲ تعاریف
۱۰	۳.۲ کران‌های پایین‌تر
۱۸	۴.۲ گراف‌های با عدد رنگی احاطه‌گر کمتر یا مساوی با سه
۲۸	۵.۲ رنگ‌آمیزی احاطه‌گر در گراف‌های P_4 - آزاد
۳۲	۶.۲ نتیجه
۳۳	۳ عدد رنگی احاطه‌گر کلی یک گراف
۳۳	۱.۳ مقدمه
۳۳	۲.۳ تعاریف
۳۶	۳.۳ پیچیدگی
۳۷	۴.۳ برخی کران‌ها
۴۴	۵.۳ عدد رنگی احاطه‌گر کلی برخی از گراف‌ها
۵۰	۶.۳ درخت‌ها
۵۵	۴ رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی در حاصلضرب گراف‌ها
۵۵	۱.۴ مقدمه
۵۵	۲.۴ تعاریف
۵۷	۳.۴ حاصلضرب خارجی گراف‌ها
۶۰	۴.۴ حاصلضرب دکارتی گراف‌ها

۵.۴ ابرمکعب ها ۶۵

مراجع ۷۳

آ پیشنهادات ۷۵

فهرست تصاویر

۲	۱.۱	کمترین تعداد وزیر در صفحه شطرنج
۸	۱.۲	گراف G
۹	۲.۲	عضوهای مجموعه احاطه‌گر گراف G
۱۱	۳.۲	پنجه
۱۱	۴.۲	گراف C_4
۱۳	۵.۲	مسیرالقایی
۱۴	۶.۲	کرونای گراف H
۱۶	۷.۲	گراف G
۱۶	۸.۲	گراف G
۱۹	۹.۲	گرافی در F_3
۲۰	۱۰.۲	گرافی در F_4
۲۰	۱۱.۲	گرافی در F_5
۲۰	۱۲.۲	گرافی در F_6
۳۴	۱.۳	گراف G
۳۵	۲.۳	عضوهای مجموعه احاطه‌گر کلی گراف G
۵۶	۱.۴	حاصلضرب دکارتی دو گراف
۵۶	۲.۴	حاصلضرب خارجی دو گراف

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ضمن اشاره به تاریخچه مختصری از موضوع مورد مطالعه، تعاریف مورد نیاز در فصل‌های بعد را ارائه کرده و در پایان مروری اجمالی بر مطالب فصل‌های بعدی پایان‌نامه خواهیم داشت. تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۹] و [۱] و مقالاتی است که در این پایان‌نامه به بررسی آن‌ها پرداخته‌ایم.

۱.۱ تاریخچه

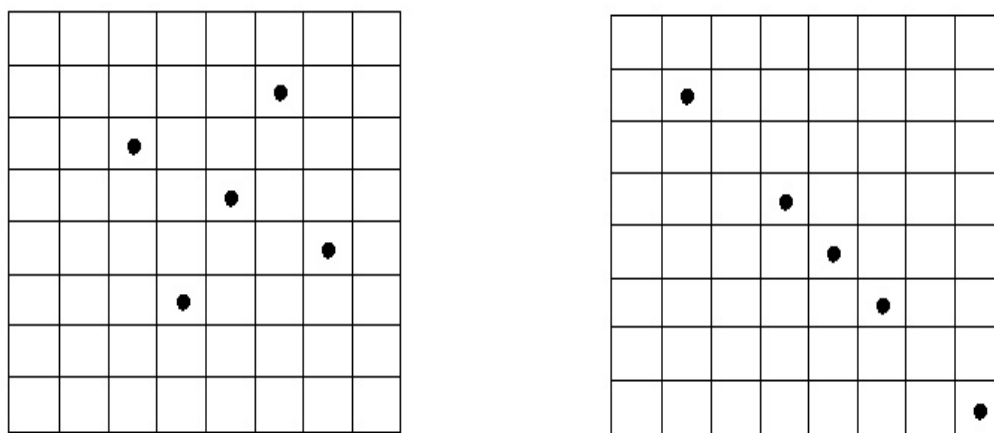
اولین نتیجه‌های بدست آمده در مورد رنگ‌آمیزی گراف از تلاش‌های انجام شده بر روی گراف‌های مسطح برای حل مسئله رنگ‌آمیزی نقشه‌ها بدست آمد. در آن زمان فرانسویس گاتری^۱، ادعا کرد که رنگ‌آمیزی نقشه ایالت‌های مختلف بریتانیا، به طوری که هیچ دو ایالت مجاوری هم‌رنگ نشوند، می‌تواند با ۴ رنگ انجام شود (شرط کافی). برادر گاتری این مسئله را برای معلم ریاضی خود آگوستوس دو مورگان، در کالج دانشگاهی فرستاد. دو مورگان، این مسئله را در سال ۱۸۲۵ میلادی در نامه‌ای که به ویلیام همیلتون نوشت مطرح کرد. در سال ۱۸۷۹ آرتور کیلی این مسئله را در انجمن ریاضی شهر لندن مطرح کرد. در همان سال آلفرد کمپ، نتایج بدست آمده را منتشر کرد و برای یک دهه تصور می‌شد این مسئله حل شده است. برای تلاش‌های کمپ در این زمینه او به عنوان یکی از اعضای جامعه سلطنتی و بعدها به عنوان ریاست انجمن ریاضی شهر لندن انتخاب شد. هیوود^۲، ادعا کرد که استدلال کمپ اشتباه بوده است و اثبات این مسئله را برای ۵ رنگ منتشر کرد.

^۱Francis Guthrie

^۲Heawood

در قرن معاصر تلاش‌های زیادی برای اثبات روش‌های رنگ‌آمیزی نقشه با ۴ رنگ صورت گرفت که در نهایت در سال ۱۹۷۶ توسط کنت اپل^۳، و ولفگانگ هاکن^۴، این مسئله به کمک ایده‌های خود هیوود و کمپ انجام شد که در آن زمان به دلیل استفاده از کامپیوتر برای اثبات مسئله، مورد قبول واقع نشد. رنگ‌آمیزی گراف از اوایل دهه ۷۰ به عنوان یک مسئله الگوریتمی مورد بررسی قرار گرفته است، به طوری که جزء یکی از ۲۱ مسئله NP - کامل، که کارپ^۵ معرفی کرد قرار گرفته است. رنگ‌آمیزی گراف به صورت یک مدل کاربردی برای حل مسائل تخصیص که در آن مشکل کمبود منابع مد نظر است و نیز، حل مسائل زمانبندی، مطرح می‌باشد و نقش کلیدی در گسترش نظریه گراف و در حالت کلی در ریاضیات و بهینه سازی ترکیبیات برعهده دارد. مفهوم احاطه‌گری یکی دیگر از پارامترهای مهم در نظریه گراف است. ایده شکل‌گیری این مفهوم نخست در سال ۱۸۵۰ در پاسخ به سوالی که توسط یک شطرنج باز مطرح شد، برمی‌گردد. سوال به این صورت بود:

کمترین تعداد وزیرهایی که بتوان در صفحه شطرنج طوری قرار داد که هر خانه شطرنج یا توسط یک وزیر پر شود و یا توسط یک وزیر مورد تحدید باشد، چندتا است؟ در پاسخ به این سوال، صفحه شطرنج را به یک گراف با ۶۴ راس متناظر می‌کنیم و یال‌ها را به این صورت در نظر می‌گیریم که اگر یک وزیر از خانه‌ای که در آن قرار دارد بتواند با یک حرکت به خانه دیگری برود در این صورت بین رئوس متناظر آن خانه‌ها در گراف مذکور، یال وجود خواهد داشت. در این صورت با پیدا کردن عدد احاطه‌گر برای گراف متناظر صفحه شطرنج، به سوال بالا پاسخ داده‌ایم.



شکل ۱.۱: کمترین تعداد وزیر در صفحه شطرنج

مفهوم احاطه‌گر کلی نیز با الهام از مساله وزیرها در صفحه شطرنج، در سال ۱۹۸۰ توسط کوکاین^۶

^۳ Kenneth Appel

^۴ Wolfgang Haken

^۵ Karp

^۶ Kvkayn

و دیگران مطرح شد. این مفهوم، شرایط احاطه‌گری را محدودتر می‌کند. در صفحه شطرنج، کمترین تعداد وزیری که بتوانند تمام خانه‌های شطرنج را یا اشغال کنند و یا مورد تحدید قرار دهند همان عدد احاطه‌گر است و اگر خانه هر وزیر نیز توسط وزیری دیگر مورد تحدید باشد در این صورت مفهوم احاطه‌گرکلی را خواهیم داشت.

در سال‌های اخیر ارتباط بین رنگ‌آمیزی با احاطه‌گری و احاطه‌گری کلی مورد مطالعه قرار گرفته است و کاربرد آن‌ها در برخی از مسائل کاربردی، منجر به تحقیق بیشتر در خصوص تلفیق این مفاهیم شده است.

۲.۱ تعاریف

تمام گراف‌های مورد بررسی در این پایان‌نامه، ساده، بدون جهت و متناهی‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. راس $v \in V$ را در نظر بگیرید، راس u مجاور به راس v می‌باشد، اگر $uv \in E(G)$ باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید G گرافی ساده با مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. یک k -رنگ‌آمیزی مجاز گراف G ، به تابع $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ گفته می‌شود، به‌طوری‌که به‌ازای هر دو راس مجاور u و v داریم $c(u) \neq c(v)$. در حقیقت برای هر i ، $1 \leq i \leq k$ ، مجموعه $c^{-1}(i)$ در صورت ناتهی بودن، مجموعه‌ای مستقل است که آن را کلاس رنگی i می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. عدد رنگی گراف G عبارت است از کمترین مقدار k که G ، k -رنگ‌پذیر مجاز باشد و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. گشت: در گراف G ، دنباله ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ که جمله‌های آن متناوباً راس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$ ، دو انتهای e_i ، v_{i-1} ، v_i باشد را یک گشت از v_0 به v_k گویند.

تعریف ۵.۲.۱. اگر راس‌های گشت W متفاوت باشند، W را مسیر می‌نامند.

تعریف ۶.۲.۱. به تعداد یال‌های یک مسیر، طول مسیر گفته می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. مسیر بسته‌ای که ابتدا و راس‌های داخلی آن متمایز باشند، دور نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود هر گاه به‌ازای هر دو راس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد.

تعریف ۹.۲.۱. یک افراز $V_1, V_2, \dots, V_w$ از مجموعه‌ی رئوس V را در نظر بگیرید، اگر برای هر دو راس متفاوت u و v متعلق به V ، یک مسیر بین آن‌ها وجود داشته باشد اگر و تنها اگر u و v در یک مجموعه V_i یکسان، از افراز قرار داشته باشند، آن‌گاه به زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ مولفه‌های همبندی G گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض G گرافی ناهمبند باشد. بخش‌های همبند گراف را مولفه همبندی گراف G می‌نامیم. در این صورت می‌توان گراف را به مولفه‌های همبندی‌اش افراز کرد و رابطه هم‌ارزی را وجود مسیر بین دو مولفه در نظر گرفت.

تعریف ۱۱.۲.۱. گرافی که در آن هر دو راس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل n راسی را با K_n نمایش می‌دهیم. همچنین منظور از C_n و P_n به ترتیب مسیر و دور n راسی و چرخ از مرتبه $n + 1$ می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. مکمل گراف G ، گراف $\bar{G}$ می‌باشد با مجموعه رئوس $V(G)$ و برای هر دو راس v و w ، $vw \in E(\bar{G})$ اگر و تنها اگر $vw \notin E(G)$.

تعریف ۱۳.۲.۱. مکمل گراف کامل، گرافی با n راس و فاقد یال می‌باشد و با $\bar{K}_n$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. تعداد یال‌های گذرنده از هر راس v از گراف G را درجه آن راس نامیده و آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات راس‌های گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. گرافی که درجه هر راس آن d باشد، گراف d -منتظم نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. هر زیرگراف از گراف G ، گرافی مانند H است که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. برای هر گراف دلخواه G و H ، اگر $H \subseteq G$ و $V(H) = V(G)$ باشد، H زیرگراف فراگیر G نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۲.۱. مجموعه S را زیرمجموعه ناتهی از V فرض می‌کنیم. زیرگراف G را که مجموعه راس‌هایش S و مجموعه یال‌هایش، زیرمجموعه‌ای از یال‌های G باشد به طوری که هر دو انتهایش در S قرار دارند، زیرگراف القا شده توسط S نامیده و با $G[S]$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۹.۲.۱. هر زیرگراف کامل از گراف G را خوشه‌ی گراف G می‌نامیم.

حال با توجه به تعریف ۱.۲.۱، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۲۰.۲.۱. مجموعه‌ای از راس‌ها که با راس v از گراف G مجاور باشند را همسایگی راس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. زیرمجموعه S از راس‌های گراف G را مجموعه مستقل می‌نامیم، هر گاه هیچ دو راسی در مجموعه S مجاور نباشند، یعنی برای هر راس $v \in S$ داشته باشیم $|N(v) \cap S| = 0$.

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف G دوبخشی است، اگر بتوان راس‌هایش را به دو بخش P و q چنان افراز کرد، به طوری که راس‌های موجود در یک بخش مجاور نباشند.

تعریف ۲۳.۲.۱. گراف دوبخشی کامل، گرافی دوبخشی است به‌طوری‌که هر راس از هر بخش، با تمام راس‌های موجود در بخش دیگر مجاور باشد. گرافی کامل با دو بخش مانند r و s به‌صورت $K_{r,s}$ نشان داده می‌شود.

پنجه: گراف دوبخشی کامل $K_{1,3}$ ، یک پنجه نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. گراف p -بخشی کامل که با $K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از گرافی دارای p بخش مجزا که هر بخش دارای رئوسی می‌باشد که تمامی این رئوس دوبه‌دو با هم مجاورند.

تعریف ۲۵.۲.۱. درخت، گرافی همبند و بدون دور می‌باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. در یک گراف، راس از درجه یک را برگ و راس مجاور یک برگ را راس پشتیبان می‌نامیم

۳.۱ مروری بر فصل‌ها

در این پایان‌نامه به بررسی نتایج مقالات عنوان شده در منابع پرداخته شده است. در فصل دوم، رنگ‌آمیزی احاطه‌گر برای گراف‌های C_4 -آزاد، P_4 -آزاد، مجزا گراف‌ها و گراف‌های وتری، مورد بررسی قرار گرفته و کران‌هایی برای شان به‌دست آمده و الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای تشخیص عدد رنگی احاطه‌گر کمتر یا مساوی سه، ارائه شده است. کلیه مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۱] می‌باشد. در فصل سوم مفهوم رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده که دارای سختی محاسبه از مرتبه NP -کامل است و عدد رنگی احاطه‌گر کلی برای گراف‌های $C_n, P_n, W_n, \bar{C}_n, \bar{P}_n$ ، k -منتظم، p -بخشی و درخت‌ها بررسی شده و کران‌هایی بدست آمده و به‌علاوه ثابت شده است که در برخی از گراف‌ها این کران‌ها دقیق می‌باشند، کلیه مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۹] است. در فصل آخر نیز عدد رنگی احاطه‌گر کلی روی حاصلضرب دکارتی و حاصلضرب خارجی دو گراف و نیز ابرمکعب مورد بررسی قرار گرفته است، برای مطالب این فصل نیز از مرجع [۱۲] استفاده شده است.

فصل ۲

رنگ‌آمیزی احاطه‌گر در برخی از گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

مفهوم کلی رنگ‌آمیزی احاطه‌گر اخیراً توسط گرا^۱ در [۵] معرفی شد و قبل از آن نیز توسط ایشان مورد مطالعه قرار گرفته بود. دو بعد مهم این مفهوم در [۳، ۵] بیان شده. نخست نشان داده شده که سختی محاسبه عدددرنگی احاطه‌گر از یک گراف، از درجه NP می‌باشد و با دقت بیشتر برای گراف‌هایی که دارای عدددرنگی بیشتر از k به‌طوری‌که $k \geq 4$ باشد، از درجه NP – کامل است [۵]، سپس کران‌های بالا و پایین روی عدددرنگی احاطه‌گر برای یک گراف دلخواه در [۴] و [۵] بیان شده که نشان می‌دهد برای هر گراف دلخواه G رابطه

$$\max\{\gamma(G), \chi(G)\} \leq \chi_d(G) \leq \gamma(G) + \chi(G) \quad (1.2)$$

برقرار است.

در این فصل به بیان کاربرد این جنبه‌ها می‌پردازیم و از آن‌جا که مشکل NP – کامل بودن وجود دارد، طبیعی است که کلاس‌های خاصی از گراف‌ها مورد بررسی قرار گیرد و همچنین برای جستجوی کران‌های بالا و پایین جدید روی عدددرنگی احاطه‌گر، در مورد پیچیدگی محاسباتی عدددرنگی احاطه‌گر توضیحات بیشتری ارائه و نشان داده شده که اگر $\chi_d(G) \leq 2$ باشد، تصمیم‌گیری آسان است (قضیه ۱.۲.۲) و ثابت شده که برای گراف‌های با عدددرنگی احاطه‌گر برابر ۳، می‌توان در زمان چندجمله‌ای، تصمیم‌گیری کرد (قضیه ۱.۴.۲).

^۱Gera

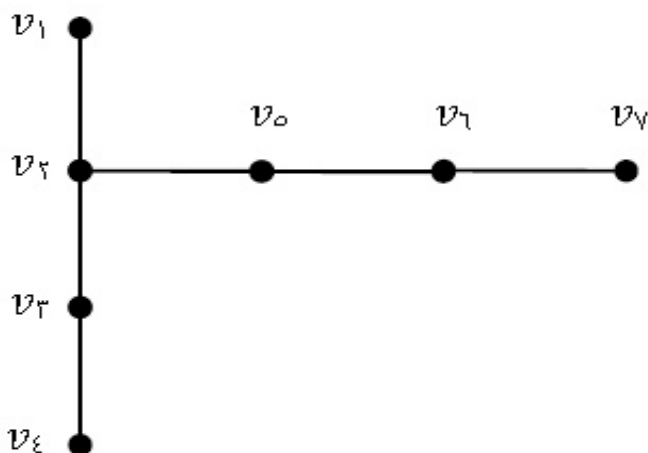
این دو قضیه شامل یک توصیف کامل از ساختار گراف‌های با عدددرنگی برابر ۳ و ۲ می‌باشند. در خصوص کران بالا و پایین عدددرنگی احاطه‌گر در قسمت دوم، بیان می‌کنیم که این کران‌ها در بعضی از کلاس‌های خاص از گراف‌ها تعریف می‌شوند. سوالی که طبیعتاً بوجود می‌آید پیدا کردن کلاس‌هایی از گراف‌هاست که محاسبه عدددرنگی احاطه‌گر گراف‌ها را در زمان چندجمله‌ای ممکن می‌سازد. در بخش ۵.۲، ثابت شده است که محاسبه عدددرنگی احاطه‌گر برای کلاس گراف‌های P_4 - آزاد ممکن می‌باشد و از طرف دیگر مشکل باقی‌مانده‌ها برای درخت‌ها باز شده است.

۲.۲ تعاریف

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه $D \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌گر یا به اختصار DS گوییم، اگر هر راس از $V(G) - D$ دارای مجاورتی در D باشد.

$$N[D] = V(G)$$

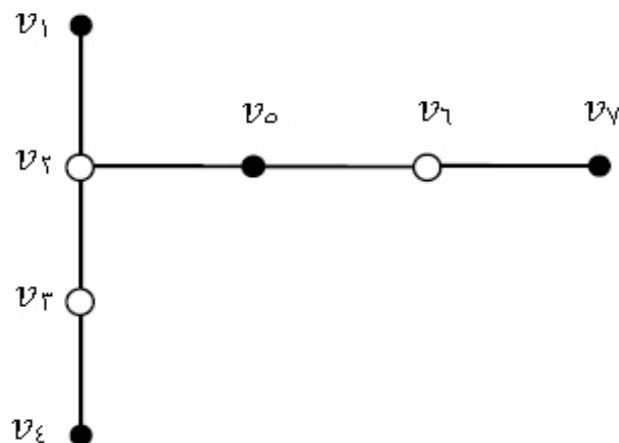
عدد احاطه‌گر گراف G که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود، کمترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد. هر راس از G ، خود و همه‌ی همسایگانش را احاطه می‌کند. به عنوان مثال گراف شکل ۱.۲، را در نظر بگیرید، با در نظر گرفتن رئوس v_2, v_3, v_6 به عنوان عضوهای مجموعه احاطه‌گر، تمامی رئوس



شکل ۱.۲: گراف G

باقی‌مانده طبق شکل ۲.۲، احاطه خواهند شد. و از طرفی تعداد عضوهای انتخابی، کمترین تعداد ممکن است لذا عدد احاطه‌گر این گراف برابر ۳ خواهد بود.

تعریف ۲.۲.۲. یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر از گراف G یا به اختصار DC ، یک k - رنگ‌آمیزی مجاز از گراف G با کلاس‌های $\{X_1, \dots, X_k\}$ می‌باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر راس $v \in V(G)$ حداقل یک کلاس رنگ مانند X_i برای هر $1 \leq i \leq k$ وجود داشته باشد که به‌طور کامل توسط v احاطه شود.



شکل ۲.۲: عضوهای مجموعه احاطه گر گراف G

تعریف ۳.۲.۲. کمترین تعداد کلاس‌های رنگ، در یک رنگ‌آمیزی احاطه گر را عدد رنگی احاطه گر گراف G گویند و با $\chi_d(G)$ نمایش می‌دهند.

برای هر گراف G ، همواره رابطه‌ی $\chi(G) \leq \chi_d(G)$ برقرار می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۲. گراف F را در نظر بگیرید، گراف G را F -آزاد گوئیم اگر شامل زیرگراف یکرخت با F نباشد.

قضیه ۱.۲.۲. [۱] فرض کنید G یک گراف باشد، آن‌گاه

$$G = K_1 \Leftrightarrow \chi_d(G) = 1 \quad (۱)$$

$$G \Leftrightarrow \chi_d(G) = 2 \quad (۲) \text{ برابر باشد با } \bar{K}_2 \text{ و یا } K_{r,s} \text{ با } r, s \geq 1$$

برهان. اگر عدد رنگی احاطه گر برابر یک باشد، پس یالی وجود ندارد در نتیجه به تعداد راس‌ها می‌بایست کلاس رنگی موجود باشد که احاطه گر شود پس گراف G تنها دارای یک راس است.

برعکس: فرض کنیم $G = K_1$ باشد، پس گراف ما شامل تنها یک راس است و در نتیجه برای احاطه آن یک رنگ کافی است و داریم، $\chi_d(G) = 1$.

برای اثبات قسمت دوم، اگر $G = K_{r,s}$ باشد در این صورت برای رنگ‌آمیزی آن به همه راس‌های یک بخش یک رنگ و به راس‌های بخش دیگر، رنگ دیگری می‌دهیم به این ترتیب راس‌های گراف $K_{r,s}$ ، به دو بخش و با دو رنگ مشخص شدند و چون گراف دوبخشی کامل است پس هر راس از بخش اول با هر راس از بخش دوم مجاور است. پس هر راس از هر بخش، تمام رؤوس بخش دیگر را احاطه می‌کند، پس داریم $\chi_d(G) = 2$.

اگر $G = \bar{K}_2$ باشد، یعنی گرافی بدون یال و با دو راس می‌باشد، که برای احاطه کردن این دو راس به دو رنگ مجزا نیاز داریم پس $\chi_d(G) = 2$.

برعکس: فرض کنید G ، گرافی با $\chi_d(G) = 2$ باشد و فرض کنید S_1, S_2 دو کلاس رنگ در رنگ‌آمیزی

احاطه‌گر از گراف G باشند. اگر G یک گراف دوبخشی کامل باشد، چون به ازای هر راس از گراف، تمام راس‌های موجود در یک کلاس به‌طور کامل احاطه می‌شوند پس اثبات تمام است. پس فرض می‌کنیم که گراف G دوبخشی کامل نباشد، به عبارتی به‌ازای راسی مانند x از یک بخش، راسی مانند y در بخش مقابل موجود است که این دو راس مجاور نباشند. فرض می‌کنیم $|S_1| \geq 2, |S_2| \geq 2$ باشد. طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، راس x باید یک کلاس‌رنگ را احاطه کند، ولی امکان ندارد چون با y مجاور نیست پس کل بخش مقابل را احاطه نمی‌کند و از طرفی کلاس خود را هم نمی‌تواند احاطه کند، چون این کلاس حداقل دو عضو دارد. پس تنها حالتی که امکان دارد این است که $|S_1| = |S_2| = 1$ باشد. که همان گراف $\bar{K}_2$ می‌باشد.

□

با توجه به قضیه ۱.۲.۲، در خصوص صدق کردن یک گراف در رابطه $\chi_d(G) \leq 2$ می‌توان در یک زمان چندجمله‌ای، تصمیم‌گیری کرد.

۳.۲ کران‌های پایین‌تر

در این بخش کران پایینی برای عدد رنگی احاطه‌گر در دو کلاس ویژه از گراف‌ها ارائه می‌شود که نسبت به کران پایین عمومی، از [۴، ۵] قوی‌تر هستند. برای این منظور، نیاز است که بر نتیجه کلاسیک درباره عدد احاطه‌گری، مروری داشته باشیم. اره [۱۳] ثابت کرد که عدد احاطه‌گری هر گراف G از مرتبه n و بدون راس تنها، حداکثر برابر $n/2$ می‌باشد.

در ادامه تعریف کرونا ی یک گراف را ارائه می‌کنیم. کرونا ی گرافی مانند H ، گرافی است که به‌صورت H^* نشان داده می‌شود. و به این‌صورت ساخته می‌شود که به ازای هر راس v از H ، یک راس جدید v' و یال vv' را، در نظر گرفته و به گراف H اضافه می‌کنیم. از [۳] داریم، که کرونا ی H^* هر گراف دوبخشی در رابطه

$$\chi_d(H^*) = \gamma(H^*) + 1 = |V(H)| + 1$$

صدق می‌کند. البته این قاعده برای هر گراف دلخواه H نیز برقرار می‌باشد. قضیه زیر در ادامه ی بررسی مطالب، سودمند خواهد بود.

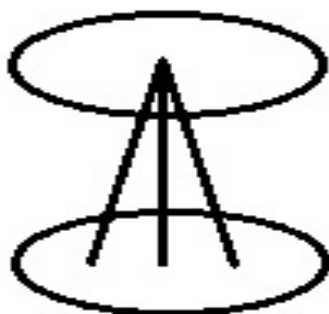
قضیه ۱.۳.۲ ([۲، ۱۴]). فرض کنید G گرافی از مرتبه زوج n و فاقد راس تنها باشد، آنگاه $\gamma(G) = n/2$ است، اگر و تنها اگر هر مولفه از G ، یک دور C_4 ویا کرونا ی یک گراف همبند باشد.

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۳.۲ [۱]. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 2$ باشد، به‌طوری‌که (الف) گراف G ، گرافی C_4 -آزاد باشد، یا (ب) گراف G ، پنجه‌آزاد باشد و C_4 نباشد، آنگاه $\chi_d(G) \geq \gamma(G) + 1$

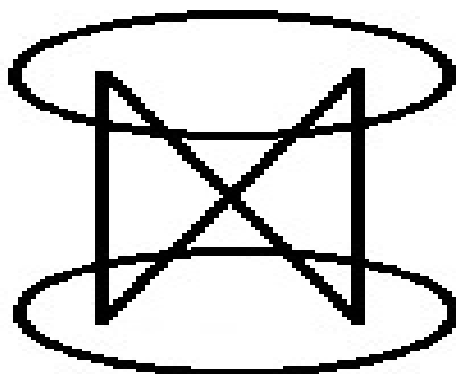
برهان. اگر $\chi_d(G) = 2$ باشد، در این صورت طبق قضیه ۱.۲.۲، گراف ما یا $\bar{K}_2$ است و یا $K_{r,s}$ ، در مورد $\bar{K}_2$ برقرار است و درخصوص پنجه آزاد بودن و C_4 -آزاد بودنش بحثی نداریم، چون هر دو شرط را دارد ولی طبق فرض گراف ما باید همبند باشد که $\bar{K}_2$ ، همبند نیست.

در مورد $K_{r,s}$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم. اگر $r \geq 3$ و یا $s \geq 3$ باشد، در این صورت گراف $K_{r,s}$ ، پنجه‌آزاد نمی‌باشد، و حداقل یک زیرگراف القایی به صورت شکل ۳.۲، خواهیم داشت. پس هیچ‌کدام از r و s نمی‌توانند بزرگتر یا مساوی ۳ باشند.



شکل ۳.۲: پنجه

درنتیجه می‌توانند حداکثر مقدار ۲ را بگیرند. اما خود $r = s = 2$ هم امکان ندارد چون در این صورت گراف ۴.۲ را خواهیم داشت که C_4 می‌باشد.



شکل ۴.۲: گراف C_4

پس حالت‌های ممکن به صورت زیر خواهند بود.

(۱) اگر $r = s = 1$ باشد، در این صورت گراف $K_{1,1}$ را خواهیم داشت و $\gamma(G) = 1$ خواهد بود و طبق حکم قضیه، نامساوی $\chi_d(G) \geq \gamma(G) + 1$ برقرار می‌باشد.

(۲) اگر $s = ۱$ و $r = ۲$ باشد، در این صورت گراف $K_{۲,۱}$ را خواهیم داشت و $\gamma(G) = ۱$ خواهد بود و طبق حکم قضیه، نامساوی $\chi_d(G) \geq \gamma(G) + ۱$ برقرار می‌باشد.

(۳) اگر $s = ۲$ و $r = ۱$ باشد، در این صورت گراف $K_{۱,۲}$ را خواهیم داشت و $\gamma(G) = ۱$ خواهد بود و طبق حکم قضیه، نامساوی $\chi_d(G) \geq \gamma(G) + ۱$ برقرار می‌باشد.

حال برای $\chi_d(G) \geq ۳$ و برای $n \geq ۳$ ، فرض می‌کنیم $\chi_d(G) \leq \gamma(G)$ و $\chi_d(G) = k$ باشد و $V_1, V_2, \dots, V_k$ کلاس‌های رنگی در یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر از $V(G)$ باشند، $|V_k|$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$|V_k| = \max\{|V_i|, 1 \leq i \leq k\}$$

در این صورت حداقل برای یک i ، $|V_i| \geq ۲$ خواهد بود.

اگر i ای، وجود نداشته باشد که اندازه V_i بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، پس اندازه همه برابر ۱ خواهد بود، پس مقدار $k = n$ و در نتیجه مقدار $\chi_d(G) = n$ می‌شود. طبق قضیه اره داریم $\gamma(G) \leq n/۲$ ، در نتیجه خواهیم داشت $\chi_d(G) = n > \gamma(G)$ که تناقض می‌باشد.

پس حداقل اندازه یک کلاس بزرگتر مساوی ۲ خواهد بود که بزرگترین‌شان را با V_k نشان می‌دهیم، پس $|V_k| \geq ۲$ می‌باشد.

برای هر $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ، راس v_i در V_i را چنان انتخاب می‌کنیم که بیشترین همسایگی را در V_k داشته باشد و فرض می‌کنیم $D = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ باشد. طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، هر راس از V_k حداقل یک کلاس رنگ را احاطه می‌کند. راس‌های V_k نمی‌توانند کلاس V_k را احاطه کنند، چون V_k شامل بیش از یک راس می‌باشد و $|V_k| \geq ۲$ است، پس وجود دارد $i \neq k$ به طوری که هر راس از V_k حداقل یک کلاس رنگ V_i را احاطه می‌کند، از آنجایی که کل k ، یک کلاس را احاطه می‌کند پس حداقل به یک v_i می‌بایست متصل باشد و در نتیجه هر راسی که انتخاب کنیم حداقل یک همسایه در D دارد.

طبق فرض داشتیم $\chi_d(G) \leq \gamma(G)$ و $\chi_d(G) = k$ ، در این صورت D مجموعه احاطه‌گر از G نیست، چون D ای که معرفی کردیم کوچکتر از k می‌باشد. پس راس y متعلق به مجموعه $V(G) - D$ وجود دارد که با هیچ کدام از راس‌های D مجاور نیست. اگر راسی مانند y وجود داشته باشد که احاطه نشود، پس y در D وجود ندارد، یعنی هیچ کدام از V_i ها نیست چون V_i ها، خودشان را احاطه می‌کنند، و همسایه‌ای هم در D ندارد چون در این صورت احاطه می‌شده. از طرفی متعلق به V_k هم نیست چون تمام رئوس V_k حداقل یک همسایه در D داشتند. پس اولاً y می‌باید در یکی از V_i ها آمده باشد و به علاوه طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گر می‌باید یک V_j ای را به طور کامل احاطه کند. اگر y ، کلاس V_1 را احاطه کند پس به v_1 متصل است ولی ما فرض کردیم که به v_1 متصل نیست چون در این صورت توسط D احاطه می‌شد و به همین دلیل هیچ V_i ای را نمی‌تواند احاطه کند، پس تنها جایی را که می‌تواند احاطه کند V_k است، پس بایستی به همه اعضای V_k متصل باشد چون قرار است که V_k را احاطه کند. از طرفی v_h هم در V_h است و $y \neq v_h$ می‌باشد.

وقتی y به همه اعضای V_h متصل است یعنی به اندازه $|V_k|$ در V_k مجاور دارد، از طرفی گفته بودیم که v_h بیشترین همسایگی را در V_k دارد که انتخاب شده و در D قرار گرفته پس تعداد همسایگان v_h در

V_k کمتر از تعداد همسایگان y در V_k نمی‌تواند باشد چون در این صورت y انتخاب می‌شده، پس تعداد همسایگی‌های v_h در V_k هم، به همین میزان باید باشد. در این صورت y و v_h و دو راس از V_k یک دور C_4 در G القاء می‌کنند

و چون مربع داریم در حالت (الف) نمی‌توانیم باشیم پس در حالت (ب) هستیم، از این‌رو G باید پنجه آزاد باشد و C_4 هم نباشد، در نتیجه $|V_k| = 2$ می‌باشد چون اگر بیشتر از ۲ باشد، آنگاه پنجه ایجاد می‌شود.

از آنجایی که $|V_k| = 2$ شد، پس برای هر $i \leq k$ داریم $|V_i| \leq 2$. از این‌رو

$$2 = |V_k| \geq \max\{|V_i| \mid i \in \{1, \dots, k-1\}\}$$

$$n = |V(G)| = \sum_{i=1}^k |V_i| \leq \sum_{i=1}^k 2 = 2k \Rightarrow$$

$$k \geq n/2 \Rightarrow \chi_d(G) \geq n/2$$

پس داریم

$$K \geq n/2 \text{ و } k \leq \gamma(G)$$

$$\Rightarrow \gamma(G) \geq n/2$$

و از طرفی طبق قضیه اره داریم $\gamma(G) \leq n/2$

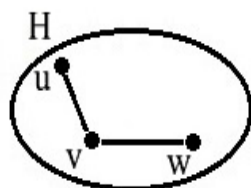
$$\Rightarrow \gamma(G) = n/2$$

چون $\gamma(G) = n/2$ شده پس می‌توانیم از قضیه ۱.۳.۲، استفاده کنیم.

طبق فرض، گراف G یک C_4 نیست، پس باید کرونایی از یک گراف همبند باشد.

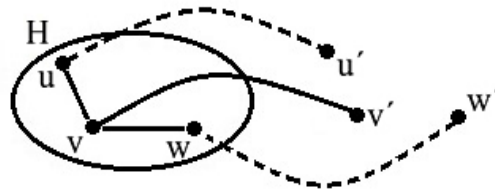
در این صورت $|V(H)| \geq 2$ می‌باشد، چون اگر $|V(H)| = 1$ باشد، در این صورت $|V(H^*)| = 2$ می‌شود، در صورتی که ما فرض کردیم $|V(H^*)| \geq 3$ باشد.

پس گراف H یک گراف همبند است که حداقل سه راس دارد، اگر H خوشه نباشد، چون همبند است پس شامل یک $u-v-w$ مسیر القایی، مانند شکل ۵.۲، می‌باشد.



شکل ۵.۲: مسیر القایی

و کرومای آن به صورت شکل ۶.۲، است.



شکل ۶.۲: کرومای گراف H

رئوس u, v, v', w یک پنجه در H^* القا می‌کنند، که تناقض است و چنین چیزی نمی‌تواند اتفاق بیفتد، پس H می‌بایست یک خوشه باشد. در نتیجه G به صورت جمع یک خوشه و کرومای آن می‌باشد. و اعضای H کوچکترین مجموعه احاطه‌گر می‌باشد و داریم

$$\gamma(G) = |V(H)|$$

از آنجایی که H یک گراف کامل است و تمام اعضایش دو به دو با هم مجاور هستند مجموعه H خودش را احاطه می‌کند و از طرفی تمامی اعضای G یک همسایه در H دارند پس H کل G را هم احاطه می‌کند. به هر راس از رئوس H یک رنگ مجزا می‌دهیم، پس به تعداد $|V(H)|$ رنگ در رنگ‌آمیزی H استفاده می‌شود، و به بقیه رئوس خارج از H هم یک رنگ متفاوت می‌دهیم، پس یک رنگ‌آمیزی با $\gamma(G) + 1$ رنگ خواهیم داشت که یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است.

طبق فرض داشتیم $\chi_d(G) \leq \gamma(G)$. اگر بخواهیم گراف را با $\gamma(G)$ تا رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم می‌بایست به هر راس یک رنگ بدهیم، از آنجایی که $\gamma(G) = |V(H)|$ می‌باشد، پس تمام $\gamma(G)$ تا رنگ برای رنگ‌آمیزی H بکار می‌رود، حال برای رنگ‌آمیزی راس‌های اضافه شده توسط کرنا به این صورت عمل می‌کنیم، به راس مجاور به رنگ ۱ در H ، رنگ ۲ می‌دهیم. طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، به ازای هر راس باید کلاسی وجود داشته باشد که این راس بتواند آن کلاس را کاملاً احاطه کند، هیچ کدام از راس‌های اضافه شده در کرنا نمی‌توانند رنگی جدا از آن $\gamma(G)$ تا رنگ را بگیرند چون در غیر این صورت می‌توانستند کلاس خود را احاطه کنند. پس در گراف G به ازای هر رنگ، دو راس وجود خواهد داشت که یک راس در H و راس دیگر از رئوس اضافه شده توسط کرناست. راس i از کرنا را در نظر بگیرید، طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، این راس باید بتواند یک کلاس را کاملاً احاطه کند ولی ممکن نیست چون راس مجاور به i در H با یک راس دیگر از کرنا در یک کلاس رنگ قرار دارند و i با آن راس دیگر، مجاور نیست پس $\chi_d(G) > \gamma(G)$ که به تناقض رسیدیم.

□

به عنوان یک دستاورد از قضیه ۲.۳.۲، نتیجه زیر را برای گراف‌های وت‌ری خواهیم داشت.

ابتدا تعریفی از گراف وت‌ری ارائه می‌دهیم:

تعریف ۱.۳.۲. گراف وتری، گرافی است که هر دور به طول ۴ یا بیشتر از آن شامل وتر باشد، از این‌رو هر گراف وتری، C_4 -آزاد است.

وتر، یالی است که دو راس از دور را بهم وصل می‌کند درحالی‌که این یال متعلق به دور نیست.

نتیجه ۱.۳.۲. [۱] هر گراف وتری G از مرتبه $n \geq 2$ ، در رابطه $\chi_d(G) \geq \gamma(G) + 1$ صدق می‌کند. **برهان.** از آنجایی‌که هر گراف وتری C_4 -آزاد است، لذا طبق قضیه ۲.۳.۲، برای هر گراف وتری مانند G ، داریم:

$$\chi_d(G) \geq \gamma(G) + 1$$

□

نتیجه دیگر قضیه ۲.۳.۲، در رابطه با درختان می‌باشد. محاسبه مقدار دقیق عدد رنگی احاطه‌گر یک درخت مساله‌ای باز می‌باشد، ولی در این خصوص کرانی وجود دارد که به صورت نتیجه زیر ارائه می‌کنیم.

نتیجه ۲.۳.۲. [۱] هر درخت T از مرتبه $n \geq 2$ ، در رابطه $\gamma(T) + 1 \leq \chi_d(T) \leq \gamma(T) + 2$ صدق می‌کند.

برهان. چون هر درخت یک گراف C_4 -آزاد است، لذا طبق قضیه ۲.۳.۲، برای هر درخت مانند T ، داریم:

$$\chi_d(T) \geq \gamma(T) + 1$$

از طرفی طبق رابطه‌ی (۱.۲)، داریم:

$$\chi_d(T) \leq \gamma(T) + 2$$

لذا رابطه

$$\gamma(T) + 1 \leq \chi_d(T) \leq \gamma(T) + 2$$

برقرار می‌باشد.

□

قضیه ۲.۳.۲، در مورد گراف‌های مجزا نیز صدق می‌کند. گراف‌های مجزا، گراف‌هایی هستند که بتوان مجموعه راس‌هایشان را به یک خوشه و یک مجموعه مستقل افراز کرد.

قضیه ۳.۳.۲. [۱] فرض کنید G یک مجزاکراف همبند باشد و مجموعه راس‌هایش به یک خوشه Q و یک مجموعه مستقل افراز شوند به‌طوری‌که Q ، مینیمال باشد. آن‌گاه $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$ اگر و تنها اگر هر راس از Q یک راس پشتیبان باشد.

برهان. فرض کنید $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$ و D را یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای G در نظر بگیرید که شامل بیشترین تعداد راس از Q باشد. اگر راس y در D وجود داشته باشد که متعلق به S باشد، از آن جایی که گراف G همبند است پس y همسایه‌ای در Q دارد، w را همسایه y در Q در نظر می‌گیریم به‌طوری که w متعلق به D نیست. در این صورت $(D \cup \{w\}) - \{y\} = D'$ ، یک مجموعه احاطه‌گر از G است که شامل بیشترین راس از Q نسبت به D می‌باشد که با انتخاب D تناقض دارد چون ما گفته بودیم که D بیشترین تعداد از رئوس Q را دارد.

پس مجموعه D نمی‌تواند عضوی از S را داشته باشد و حداکثر می‌تواند کل Q را بگیرد پس داریم $D \subseteq Q$

طبق فرض $\gamma(G) \leq \chi_d(G)$ ، $D = \gamma(G)$ و از $D \subseteq Q$ داریم $|Q| \leq \gamma(G)$ ، در نتیجه

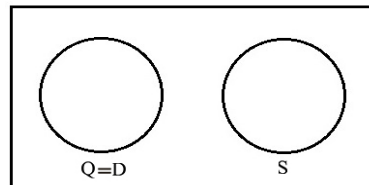
$$\gamma(G) = |D| \leq |Q| \leq \chi(G) \leq \chi_d(G) = \gamma(G) + 1$$

$$\Rightarrow \gamma(G) \leq |Q| \leq \gamma(G) + 1$$

لذا دو حالت زیر را خواهیم داشت:

یا $|Q| = \gamma(G)$ است و یا $|Q| = \gamma(G) + 1$ خواهد بود.

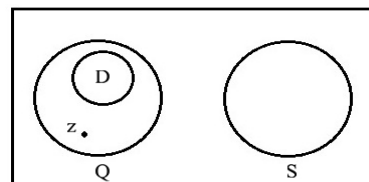
اگر $|Q| = \gamma(G)$ باشد یعنی $D = Q$ ، پس گراف به‌صورت شکل ۷.۲، می‌باشد. و اگر $|Q| = \gamma(G) + 1$



شکل ۷.۲: گراف G

باشد، پس راسی مانند z در Q وجود دارد به‌طوری که متعلق به D نمی‌باشد و داریم $Q = D \cup \{z\}$. در نتیجه گراف G به‌صورت شکل ۸.۲، می‌باشد.

هر راس u از D باید دارای همسایه خصوصی باشد در غیر این صورت $D - \{u\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر



شکل ۸.۲: گراف G

از G و کوچکتر از D است که با مینیمم بودن D تناقض دارد پس $D \subseteq Q$ بوده و هر همسایه شخصی

$u \in D$ در S می‌باشد.

فرض کند s_i مجموعه همسایه‌های شخصی d_i باشد، می‌دانیم $|s_i| \geq 1$ برای هر $1 \leq i \leq t$. اگر $Q = D$ باشد، از آنجایی که S یک مجموعه مستقل است، هر راس متعلق به هر s_i ، یک برگ می‌باشد لذا هر راس از $D = Q$ مجاور به یک برگ است پس هر d_i یک راس پشتیبان می‌باشد حال فرض کنید، راسی مانند $z \in Q$ وجود داشته باشد به‌طوری که $z \notin D$ نباشد، و داشته باشیم $Q = D \cup \{z\}$.

طبق فرض یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر با $\gamma(G) + 1$ رنگ داریم، از طرفی $\gamma(G) = t$ در نظر می‌گیریم، پس داریم $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1 = t + 1$. از آنجایی که $\gamma(G) = D$ می‌باشد و فرض کردیم که $Q = D \cup \{z\}$ باشد پس $|Q| = \gamma(G) + 1$ است و چون Q یک خوشه است پس تمام رنگ‌ها در Q می‌آیند و مجموعه S هم رنگ‌های ۱ تا $\gamma(G) + 1$ را می‌گیرد.

فرض کنید هر d_i رنگ i و z رنگ $t + 1$ را دارد، اگر z ای را که در Q در نظر گرفتیم، هیچ همسایه‌ای در S نداشته باشد، می‌توانیم z را در S قرار دهیم و در این صورت D و $S \cup \{z\}$ افزایی از $V(G)$ به یک خوشه و یک مجموعه مستقل می‌باشند، که با مینیمال بودن Q در تناقض است. چون در این صورت Q کوچکتر می‌شود، بنابراین z یک همسایه مانند u در S دارد. از آنجایی که D یک مجموعه احاطه‌گر است پس u باید به یکی از اعضای D متصل باشد.

فرض می‌کنیم که u به d_1 متصل است و چون طبق فرض d_1 رنگ ۱ را دارد پس u نمی‌تواند رنگ ۱ را داشته باشد و همین‌طور هم نمی‌تواند رنگ $t + 1$ را داشته باشد، به دلخواه رنگ ۲ را به u می‌دهیم، مجموعه s_2 را در نظر بگیرید، هر راس در s_2 به d_2 متصل است، یک راس از s_2 را انتخاب کرده و v می‌نامیم، راس v نمی‌تواند رنگ ۲ را داشته باشد پس به v رنگ j را می‌دهیم که $j \neq 2$. از آنجایی که همه رنگ‌ها در Q آمده‌اند، پس v حداقل به یکی از راس‌های Q وصل نیست و چون رنگ v در Q آمده، لذا یک راس مانند d_j در Q که رنگش j می‌باشد، در نتیجه گراف G حداقل ۲ راس از رنگ j دارد.

از طرفی راس v همسایه خصوصی d_2 است یعنی به هیچ راسی از بین رئوس d_1 تا d_t به جز d_2 متصل نیست ولی ممکن است به z متصل باشد. طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، v باید حداقل یک کلاس را به‌طور کامل احاطه کند اما این کلاس نمی‌تواند از بین کلاس‌های $1, 3, \dots, t$ باشد چون v به $d_1, d_3, \dots, d_t$ متصل نیست، همچنین چون v به u متصل نیست پس کلاس رنگ ۲ را هم احاطه نمی‌کند لذا v باید کلاس $t + 1$ را احاطه کند، پس تمام راس‌های داخل s_2 به z متصل‌اند در نتیجه $s_2 \subseteq N(z)$ است لذا $j \neq t + 1$.

D' را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D' = \{z\} \cup D - \{d_2, d_j\}$$

و از آنجایی که

$$|D'| = |D| - 1 = \gamma(G) - 1$$

لذا D' احاطه‌گر نیست. بنابراین راسی مانند w باید وجود داشته باشد که w به هیچ‌کدام از اعضای D' متصل نباشد. گزینه‌هایی که برای w وجود دارد به این صورت است که یا d_2 یا d_j باشد و یا در S باشد،

d_j و d_i نیست چون Q گرافی کامل است پس w حتما متعلق به S می‌باشد. فرض کنید w دارای رنگ i باشد و حتما راسی در Q وجود دارد که دارای این رنگ باشد چون همه رنگ‌ها در Q ظاهر شدند، طبق فرض w به هیچ راسی در D' متصل نیست و حتما رنگ i در D' آمده. از طرفی w باید یک کلاس را به‌طور کامل احاطه کند چون D یک مجموعه احاطه‌گر بود پس w حتما یک همسایه در D دارد، الان w همسایه‌ای در D' ندارد پس w حداقل به یکی از d_j و d_i و یا هر دو تا متصل است. چون D احاطه‌گر است پس $N(w) \cap D \neq \emptyset$ است، لذا $N(w) \subseteq \{d_i, d_j\}$ می‌باشد. w باید یک کلاس را احاطه کند ولی w نمی‌تواند کلاس رنگ ۲ یا رنگ j را احاطه کند از طرفی w به هیچ‌کدام از اعضای D' متصل نیست پس $w \notin \{v, u\}$ ، از طرفی چون u به d_1 متصل است ولی w به d_1 متصل نیست پس u نیست، v هم نیست چون v به z وصل است که z در D' است پس v هم نیست. چون راس v دارای رنگ j بود، پس کلاس j را احاطه نمی‌کند و چون رنگ u هم ۲ است و به u هم وصل نیست پس کلاس ۲ را هم احاطه نمی‌کند پس این دو تا رو احاطه نمی‌کند در نتیجه هیچ راسی از D را احاطه نمی‌کند و چون به هیچ راسی در D' وصل نیست پس هیچ کلاسی را احاطه نمی‌کند که این تناقض است.

برعکس: فرض کنید هر راس Q یک راس پشتیبان باشد یعنی با حذف هر راس از Q یک راس از S به راس تنها تبدیل می‌شود پس Q یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، بنابراین $\gamma(G) = |Q|$ می‌باشد. لذا می‌توان بوسیله اختصاص دادن رنگ‌های ۱ تا $|Q|$ به راس‌های Q و رنگ $|Q| + 1$ به راس‌های S یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر ارائه دهیم پس

$$\chi_d(G) = |Q| + 1 \Rightarrow \chi_d(G) = \gamma(G) + 1$$

□

۴.۲ گراف‌های با عدد رنگی احاطه‌گر کمتر یا مساوی با سه

از آنجایی که تصمیم گرفتن برای مشخص کردن عدد رنگی احاطه‌گر یک گراف با اندازه حداکثر ۴، یک مسئله NP -کامل می‌باشد. در این قسمت به توصیف گراف‌هایی مانند G به‌طوری که $\chi_d(G) \leq 3$ باشد، پرداخته و نشان داده می‌شود که این توصیف، ما را به یک الگوریتم تشخیص زمان چندجمله‌ای برای چنین گراف‌هایی هدایت می‌کند.

دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ با $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ را در نظر بگیرید، اجتماع این دو گراف به صورت $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ و جمع مستقیم این دو گراف به صورت $G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ با $E_{1,2} = \{\{x, y\} | x \in V_1, y \in V_2\}$ می‌باشد. کلاس‌های $F_0, \dots, F_6$ از گراف‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

• F خانواده همه گراف‌هایی است که به‌صورت $\bar{K}_3$ می‌باشند.

$$F_0 = \{\bar{K}_3\}$$

- F_1 خانواده همهی گراف‌هایی است که به صورت اجتماع یک گراف دو بخشی و یک راس تنها باشد.

$$F_1 = \{K_{r,s} \cup K_1 | r \geq 1, s \geq 1\}$$

- F_2 خانواده‌ای از گراف‌های G است اگر دو راس a و b متعلق به G موجود باشند به‌طوری‌که $V(G) - \{a, b\}$ مجموعه‌ای مستقل بوده و روابط زیر برقرار باشد.

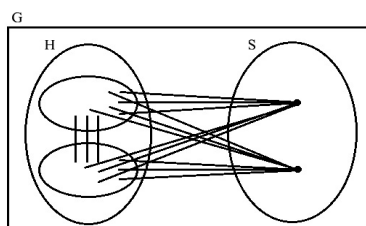
$$N(a) - N(b) = \emptyset \quad N(b) - N(a) = \emptyset$$

(مجموعه $N(a) \cap N(b)$ ممکن است تهی باشد).

- F_3 خانواده همه گراف‌هایی است که مطابق با تعریف زیر باشند.

$$F_3 = \{G = H \oplus S | \text{برای } S = K_p \text{ و } E(H) \neq \emptyset \text{ باشد } p \geq 1\}$$

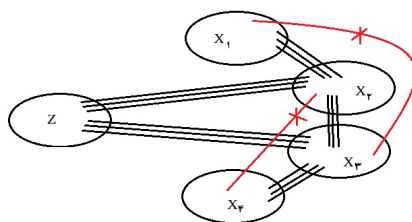
یک گراف در F_3 مانند شکل ۹.۲، می‌باشد.



شکل ۹.۲: گرافی در F_3

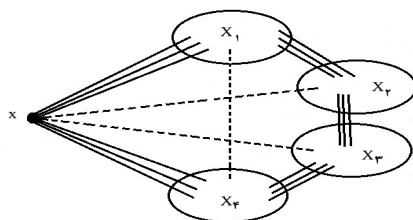
- گراف G در کلاس F_4 است، اگر بتوان راس‌هایش را به پنج مجموعه‌ی مستقل X_1, X_2, X_3, X_4, Z افراز کرد به‌طوری‌که مجموعه‌های X_1, X_2, X_3, X_4 غیرتهی‌اند و هر راس از X_i با هر راس از X_{i+1} برای $i = 1, 2, 3$ مجاور است. و هر راس از Z با همه‌ی راس‌های $X_2 \cup X_3$ مجاور است و $Z \cup X_1 \cup X_4$ یک مجموعه‌ی مستقل می‌باشد. و هر راس از رئوس X_1 را که در نظر بگیریم، حداقل به یکی از راس‌های X_3 متصل نیست. و در مورد X_2 و X_4 نیز به همین صورت می‌باشد، یعنی هر راسی از X_2 را که در نظر بگیریم، یک غیرمجاور در X_4 دارد.

- گراف G متعلق به کلاس F_5 می‌باشد، اگر بتوان راس‌هایش را به پنج مجموعه‌ی غیرتهی X_1, X_2, X_3, X_4 و $\{x\}$ افراز کرد به‌طوری‌که برای $i = 1, 2, 3$ ، هر راس از X_i مجاور به هر راس از X_{i+1} باشد و $X_1 \cup X_3$ و $X_2 \cup X_4$ مجموعه‌های مستقل باشند و x با هر راس از $X_1 \cup X_4$ مجاور باشد.



شکل ۱۰.۲: گرافی در F_4

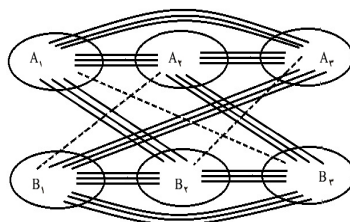
ممکن است میان x و $X_2 \cup X_3$ و همین‌طور میان X_1 و X_4 ، یال‌هایی وجود داشته باشد و یا این‌که یالی نداشته باشیم.



شکل ۱۱.۲: گرافی در F_5

● گراف G در کلاس F_6 است، اگر بتوان راس‌هایش را به شش مجموعه‌ی غیرتهی A_1, A_2, A_3 و B_1, B_2, B_3 ، افراز کرد به‌طوری‌که برای $i = 1, 2, 3$ یک مجموعه‌ی مستقل باشد و هر راس از A_i مجاور به همه‌ی راس‌های $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ (به پیمانه‌ی سه) باشد و هر راس از B_i مجاور به همه‌ی راس‌های $A_{i+2} \cup B_{i+2}$ (به پیمانه‌ی سه) باشد و هر راس از A_i حداقل به یک راس از B_{i+2} (به پیمانه‌ی سه) وصل نیست. به عبارتی، هر راس از A_i ، حداقل یک غیرمجاور در B_{i+2} دارد.

همچنین بین A_1 و A_2 ، A_2 و A_3 ، B_1 و B_2 ، B_2 و B_3 ، می‌تواند یالی وجود داشته باشد و یا فاقد یال



شکل ۱۲.۲: گرافی در F_6

باشد.

قضیه ۱.۴.۲. [۱] گراف G در رابطه‌ی $\chi_d(G) = 3$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر G متعلق به کلاس $F_0 \cup \dots \cup F_6$ باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که G متعلق به کلاس $F_0 \cup \dots \cup F_6$ باشد. به وسیله‌ی قضیه‌ی ۱.۲.۲، نشان می‌دهیم که $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد و سپس ثابت می‌کنیم که $\chi_d(G) = 3$ است و رنگ‌آمیزی‌ای با سه رنگ ارائه می‌دهیم به‌طوری‌که رنگ‌آمیزی ارائه شده یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر خواهد بود.

اگر گراف داده شده متعلق به F_0 باشد، پس به‌صورت $\bar{K}_3$ است. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) \neq 1$ است چون گراف K_1 نیست. فرض کنید $\chi_d(G) = 2$ باشد، طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، گراف $K_{r,s}$ و یا $\bar{K}_2$ باشد. $K_{r,s}$ نیست چون فاقد یال است و $\bar{K}_2$ هم نیست پس $\chi_d(G) \neq 2$ است و $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد.

اگر گراف داده شده متعلق به F_1 باشد، طبق تعریف F_1 ، گراف G به‌صورت $K_{r,s} \cup K_1$ می‌باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) \neq 1$ است چون گراف K_1 نیست. از طرفی گراف G ، شامل $K_{r,s}$ است پس مقدار $\chi(G)$ حداقل برابر ۲ است و چون $\chi \leq \chi_d$ است پس در گراف G ، مقدار $\chi_d(G)$ ، اگر برابر با ۳ نباشد پس حداقل ۲ است.

اگر $\chi_d(G) = 2$ باشد، طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، گراف G یا $K_{r,s}$ است و یا $\bar{K}_2$. $\bar{K}_2$ که نیست و $K_{r,s}$ هم نیست چون، گراف دیگری به آن اضافه شده در نتیجه $\chi_d(G) \neq 2$ است پس $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد.

اگر گراف داده شده متعلق به F_2 باشد. طبق تعریف F_2 ، گراف G به‌صورت دو راس غیرمجاور و یک مجموعه‌ی مستقل می‌باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) \neq 1$ است زیرا به‌وضوح گراف G ، K_1 نیست. فرض کنید $\chi_d(G) = 2$ باشد، طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) = 2$ است اگر و تنها اگر G ، گراف $K_{r,s}$ یا $\bar{K}_2$ باشد. این گراف $K_{r,s}$ نیست چون راس‌هایی مانند a و b وجود دارند که غیرمجاوراند و نیز راس‌هایی مانند x و y وجود دارند که a حداقل به y متصل نیست و b هم حداقل به x متصل نیست. و از طرفی این گراف مجموعه‌ی مستقل هم نیست چون a حداقل به x و b هم حداقل به y متصل است. در نتیجه G ، $K_{r,s}$ و $\bar{K}_2$ نیست پس $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد.

اگر گراف داده شده متعلق به F_3 باشد. طبق تعریف F_3 ، G به‌صورت جمع مستقیم دو گراف H و S می‌باشد که H یک گراف دوبخشی غیرتهی و S گراف $\bar{K}_p$ با $p \geq 1$ است. از آن‌جا که H یک گراف دوبخشی غیرتهی است پس حداقل یک یال را دارد و چون $S = \bar{K}_p$ است پس حداقل یک راس هم در S داریم و طبق تعریف، گراف G به‌صورت $H \oplus S$ می‌باشد، در نتیجه در این گراف مثلث خواهیم داشت پس $\chi(G) \geq 3$ خواهد بود و از طرفی می‌دانیم که $\chi_d \geq \chi$ می‌باشد، پس $\chi_d(G) \geq 3$ خواهد بود.

اگر گراف داده شده متعلق به F_4 باشد. طبق تعریف F_4 ، گراف G را می‌توان به پنج مجموعه‌ی X_1, X_2, X_3, X_4, Z افراز کرد به‌طوری‌که مجموعه‌های X_1, X_2, X_3, X_4, Z غیرتهی‌اند و برای هر $i = 1, 2, 3$ ، X_i با X_{i+1} مجاور است. پس حداقل سه یال داریم که مسیری با چهار راس می‌سازند، طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) \neq 1$ می‌باشد چون K_1 نیست. فرض کنید $\chi_d(G) = 2$ باشد پس G یا، $K_{r,s}$ برابر است و یا، $\bar{K}_2$.

با $\bar{K}_2$ برابر نیست چون $E(G) \neq \emptyset$ می‌باشد از طرفی گراف G دوبخشی کامل هم نیست چون بین X_1 و X_4 یالی وجود ندارد. پس $\chi_d(G) \neq 2$ بوده و در نتیجه $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد و از طرفی اگر $Z \neq \emptyset$ باشد، طبق تعریف F_4 ، مجموعه‌های $Z \cup X_2 \cup X_3$ تشکیل یک خوشه می‌دهند، پس مثلث خواهیم داشت و $\chi(G) \geq 3$ خواهد بود و چون $\chi \leq \chi_d$ می‌باشد پس باز هم $\chi_d(G) \geq 3$ خواهد بود. اگر گراف داده شده متعلق به F_5 باشد. طبق تعریف F_5 ، G را می‌توان به پنج مجموعه‌ی غیرتهی به‌صورت $\{x\}, X_1, X_2, X_3, X_4$ ، افراز کرد به‌طوری‌که هر راس از X_i به هر راس از X_{i+1} مجاور است و x نیز، با هر راس از $X_1 \cup X_4$ مجاور است پس یک دور پنج‌تایی خواهیم داشت. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) \neq 1$ است زیرا $K_1 \neq G$ می‌باشد. و اگر $\chi_d(G) = 2$ باشد، G یا $\bar{K}_2$ و یا $K_{r,s}$ است. $\bar{K}_2$ نیست چون $E(G) \neq \emptyset$ است. $K_{r,s}$ هم نیست، چون گراف G شامل دور پنج‌تایی است، یعنی دارای دور فرد می‌باشد و دور فرد هم دوبخشی نیست لذا $\chi(G) \geq 3$ می‌باشد و از آن‌جا که $\chi \leq \chi_d$ است پس $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد.

اگر گراف داده شده متعلق به F_6 باشد. طبق تعریف F_6 ، G را می‌توان به شش مجموعه‌ی غیرتهی افراز کرد به‌طوری‌که برای هر $i = 1, 2, 3$ ، مجموعه‌های $A_i \cup B_i$ مستقل‌اند و هر راس از A_i مجاور به همه‌ی راس‌های $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ (به پیمانه‌ی سه) و هر راس از B_i مجاور به هر راس از $A_{i+2} \cup B_{i+2}$ (به پیمانه‌ی سه) می‌باشد. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲، $\chi_d(G) = 1$ نیست چون $G \neq K_1$ می‌باشد. فرض کنید $\chi_d(G) = 2$ باشد پس G یا $K_{r,s}$ و یا $\bar{K}_2$ است. $\bar{K}_2$ که نیست چون $E(G) \neq \emptyset$ است و $K_{r,s}$ هم نیست چون سه مجموعه‌ی A_1, A_2, A_3 ، دوه‌دو مجاوراند و همین‌طور سه مجموعه‌ی B_1, B_2, B_3 نیز دوه‌دو مجاوراند، پس G دارای مثلث می‌باشد و از طرفی G دارای دور فرد می‌باشد و مجموعه‌های $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ و A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 نمونه‌هایی از دوره‌های پنج‌تایی در G می‌باشند، پس $\chi(G) \geq 3$ می‌باشد و از آن‌جا که $\chi_d \geq \chi$ است پس $\chi_d(G) \geq 3$ می‌باشد. حال برای هر کدام یک رنگ‌آمیزی با سه‌رنگ ارائه می‌دهیم.

اگر G متعلق به F_6 باشد، با دادن سه‌رنگ مختلف به سه‌راس آن، یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر خواهیم داشت پس $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود.

اگر G متعلق به F_1 باشد یک رنگ به K_1 می‌دهیم و چون $K_{r,s}$ ، دوبخشی است، به هر بخش آن نیز یک رنگ مجزا اختصاص می‌دهیم در نتیجه $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود.

اگر G متعلق به F_2 باشد به دو راس a و b که مجاور نیستند، دو رنگ متفاوت می‌دهیم و به باقی‌مانده‌ی راس‌ها که مجموعه‌ای مستقل بودند رنگ سوم را می‌دهیم در این صورت $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود. اگر G متعلق به F_3 باشد از آن‌جا که $S = \bar{K}_p$ است، به مجموعه‌ی S رنگ ۱ را می‌دهیم و به مجموعه‌ی H که گرافی دوبخشی و غیرتهی است، رنگ‌های ۲ و ۳ را می‌دهیم در نتیجه یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر با سه رنگ خواهیم داشت پس $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود.

اگر G متعلق به F_4 باشد از آن‌جا که $X_1 \cup X_4 \cup Z$ مجموعه‌ای مستقل است پس به هر کدام از این سه مجموعه رنگ ۱ را می‌دهیم و چون مجموعه‌های X_2 و X_3 غیرتهی و مجاور به‌هم‌اند و $Z \cup X_2 \cup X_3$ یک خوشه می‌سازند و از آن‌جایی که رنگ ۱ را به Z دادیم، پس به هر یک از مجموعه‌های X_2 و X_3 یک رنگ مجزا می‌دهیم در نتیجه یک رنگ‌آمیزی با سه رنگ خواهیم داشت و $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود.

اگر G متعلق به F_5 باشد، رنگ ۱ را به $X_1 \cup X_3$ و رنگ ۲ را به $X_2 \cup X_4$ و رنگ ۳ را هم به x می‌دهیم پس $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود.

اگر G متعلق به F_6 باشد، چون مجموعه‌ی $A_i \cup B_i$ برای هر $i = 1, 2, 3$ ، مجموعه‌ای مستقل است پس به هر مجموعه‌ی $A_i \cup B_i$ ، یک رنگ مجزا می‌دهیم در نتیجه $\chi_d(G) = 3$ خواهد بود. برعکس: فرض کنید G ، گرافی با $\chi_d(G) = 3$ باشد. یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر c ، با ۳ رنگ را در نظر بگیرید، فرض کنید S_1, S_2, S_3 ، سه کلاس رنگ باشند. از آن‌جاکه عدد رنگی احاطه‌گر گراف برابر با ۳ است، طبق قضیه ۱.۲.۲، گراف G ، دوبخشی کامل نیست و سه کلاس رنگ وجود دارد، پس حداقل سه راس داریم، اگر $|V(G)| = 3$ باشد، در نتیجه برای تعداد یال‌ها سه حالت زیر اتفاق می‌افتد و می‌تواند برابر صفر، یک و یا سه، باشد.

۱. اگر $|E| = 0$ باشد در نتیجه گراف $\bar{K}_3$ را خواهیم داشت، پس گراف G متعلق به F_0 خواهد بود.

۲. اگر $|E| = 1$ باشد یعنی دو راس با هم مجاورند و یک راس تنها داریم، پس گراف G متعلق به F_1 خواهد بود.

۳. اگر $|E| = 3$ باشد یعنی راس‌ها دوه‌دو با هم مجاورند، به عبارتی G در این حالت از $K_2 \oplus K_1$ ، تشکیل شده است، پس گراف G متعلق به F_3 خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم $|V(G)| \geq 4$ ، باشد از آن‌جاکه $\chi_d(G) = 3$ است پس دو راس در یک کلاس رنگ قرار دارند، فرض کنید $|S_3| \geq 2$ باشد. از آن‌جاکه c ، یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است پس هر راس از گراف، باید یک کلاس را به‌طور کامل احاطه کند، لذا هر راس از S_3 ، کلاس S_1 یا S_2 را احاطه می‌کند و سه حالت زیر اتفاق می‌افتد

حالت اول اگر $|S_1| = |S_2| = 1$ باشد، قرار می‌دهیم $S_1 = \{a\}$ و $S_2 = \{b\}$ و $S_3 = \{e, d\}$ فرض کنید

$$A = N(a) - (C \cup \{b\}) \quad B = N(b) - (C \cup \{a\})$$

$$C = N(a) \cap N(b)$$

در این صورت مجموعه‌های A, B, C افزای برای G می‌سازند. از آن‌جاکه e و d را در یک کلاس در نظر گرفتیم پس رنگ‌های یکسانی دارند و در نتیجه مجاور نیستند و چون a و b را در کلاس‌های جداگانه در نظر گرفتیم پس هر کدام دارای یک رنگ مجزا هستند در نتیجه یا مجاورند، یعنی ab یک یال است و یا مجاور نیستند پس دو حالت را بررسی می‌کنیم.

• اگر ab یال باشد، در این صورت اگر $C \neq \emptyset$ باشد، یعنی $N(a)$ و $N(b)$ با هم اشتراک ندارند پس هر کدام از a و b ، دارای همسایه‌های شخصی هستند پس مجموعه‌های A و B مخالف تهی هستند. لذا مجموعه‌ی A که همسایه‌ی a است و خود a و مجموعه‌ی B که همسایه‌ی b است و خود b ، موجوداند که تهی نیستند. اگر این چهار مجموعه را با مجموعه‌ی C در نظر بگیریم، آن‌گاه G در F_4 قرار دارد.

حال اگر ab یال بوده و از طرفی $C \neq \emptyset$ باشد در این صورت a و b دارای همسایه ی مشترک هستند و یعنی این که حداقل یکی از مجموعه های A یا B ، تهی است، به عبارتی a و b همسایه های مشترک دارند که آن همسایه ها با هم مجاور نیستند. پس G به صورت جمع مستقیم یک گراف دوبخشی و یک گراف K_1 می باشد لذا G در F_3 قرار دارد و قرار می دهیم $S = \{a\}$.

● حال فرض می کنیم ab یال نباشد در این صورت اگر $C = \emptyset$ باشد یعنی a و b همسایه های مشترک ندارند، اگر ab یال نباشد، پس ممکن است یکی از راس های a یا b به صورت راس تنها باشد. لذا گراف G تشکیل شده از یک راس تنها و یک گراف دوبخشی در این صورت یکی از مجموعه های A یا B ، تهی می باشد و در نتیجه G در F_1 قرار دارد. در غیر این صورت، اگر یکی از a یا b به صورت تک راس نباشد و از طرفی $C = \emptyset$ باشد نتیجه می گیریم که a و b هر کدام به صورت مجزا به راسی متصل اند، یعنی هر کدام دارای همسایه ی شخصی می باشند و چون $V(G) - \{a, b\}$ یک مجموعه ی مستقل است و بین a و b یالی وجود ندارد پس G در F_2 قرار دارد. اکنون فرض کنید $C \neq \emptyset$ باشد یعنی a و b دارای همسایه ی مشترک هستند، اگر اندازه ی $N(a)$ و $N(b)$ و اندازه ی اجتماع شان، هر سه با هم برابر باشند یعنی داشته باشیم

$$|N(a)| = |N(b)| = |N(a) \cup N(b)|$$

در این صورت A و B هر دو تهی هستند. در نتیجه گراف دوبخشی کامل است. اگر هیچ کدام از مجموعه های A و B تهی نباشند، پس هر کدام از a و b دارای همسایه ی شخصی هستند و در نتیجه G در F_2 قرار دارد و اگر یکی از A یا B تهی نباشد یعنی یکی از a یا b دارای همسایه ی شخصی است که این همسایه در اشتراک همسایه ها نیامده، در نتیجه فقط یکی از A یا B مقدار تهی می گیرید. فرض کنید $A \neq \emptyset$ باشد، در این صورت می توان راس های G را به مجموعه های $Z = \emptyset, \{b\}, C, \{a\}, A$ افراز کرد، در این صورت G در F_4 قرار دارد.

حالت دوم اگر $|S_2| \geq 2$ و $|S_1| = 1$ باشد، قرار می دهیم $S_1 = \{x\}$ و برای $i = 2, 3$ فرض کنید B_i زیرمجموعه ای از راس های S_i باشد که دارای غیرهمسایگی در S_{5-i} هستند. از آن جاکه c یک رنگ آمیزی احاطه گر است و $|S_2| \geq 2$ و $|S_3| \geq 2$ می باشند، پس برای هر راس کلاس رنگی وجود دارد که به طور کامل احاطه می شود، به همین دلیل هر راس از $B_2 \cup B_3$ باید با x مجاور باشد، نخست فرض می کنیم x همسایه ای در S_2 ندارد و همین طور $B_2 = \emptyset$ باشد و از آن جاکه هر راس باید بتواند یک کلاس را به طور کامل احاطه کند پس هر راس از S_2 به هر راس از S_3 مجاور است. اگر x به راس های S_3 نیز مجاور نباشد پس یک گراف کامل و یک راس تنها خواهیم داشت از این رو G متعلق به F_1 می باشد.

اگر فرض کنیم S_2 و S_3 تشکیل یک گراف کامل دهند و x به S_2 متصل باشد، در این صورت x نمی تواند به تمام راس های S_3 متصل باشد زیرا در این حالت G به یک گراف دوبخشی کامل

تبدیل شده و $\chi_d(G) = 2$ می‌شود و x نمی‌تواند در کلاس S_2 قرار گیرد پس x یک غیرهمسایگی در S_3 دارد، لذا افزای به صورت $(Z = \emptyset), S_3 \cap N(x), S_2, S_3 - N(x)$ برای راس‌های G خواهیم داشت در نتیجه G در F_4 قرار دارد.

حال فرض می‌کنیم که x یک همسایه در S_2 و یک همسایه نیز در S_3 داشته باشد از آن‌جا که C یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است پس برای راس‌های باقی‌مانده در S_2 و S_3 که به x متصل نیستند باید کلاس دیگری وجود داشته باشد که بتواند آن کلاس را احاطه کنند. پس هر راس از $S_i - N(x)$ به هر راس از S_{5-i} برای $i = 2, 3$ مجاور است.

و همچنین x در مجموعه‌های S_2 و S_3 دارای غیرهمسایگی می‌باشد در این صورت افزای به صورت $(S_3 \cap N(x), S_2 - N(x), S_3 - N(x), S_2 \cap N(x), \{x\})$ برای راس‌های G در نظر می‌گیریم. در نتیجه G در F_5 قرار دارد.

به‌طور مشابه این بار فرض می‌کنیم x با همه‌ی اعضای مجموعه‌های S_2 و S_3 مجاور است در این صورت حتماً بین S_2 و S_3 باید، یال وجود داشته باشد چون در غیر این صورت، گراف دوبخشی می‌شود و خواهیم داشت، $\chi_d(G) = 2$. لذا بین S_2 و S_3 نیز یال وجود دارد، در این صورت گراف G از جمع مستقیم یک گراف دوبخشی و گراف K_1 تشکیل شده و در نتیجه متعلق به F_3 می‌باشد و قرار می‌دهیم $S = \{x\}$.

حال فرض می‌کنیم که x یک غیرهمسایه در S_3 دارد، اگر $B_3 = \emptyset$ باشد یعنی هر راس متعلق به S_3 با تمام راس‌های S_2 مجاور است، از طرفی x هم با راس‌های S_2 مجاور می‌باشد پس در این صورت گراف G را می‌توان به صورت جمع مستقیم یک گراف دوبخشی با گراف $\bar{K}_2$ در نظر گرفت پس G در کلاس F_3 قرار دارد و قرار می‌دهیم $S = S_2$.

اگر $B_3 \neq \emptyset$ باشد، در این صورت راس‌هایی متعلق به S_3 ، وجود دارند که دارای غیرهمسایگی در S_2 هستند، فرض کنید Z مجموعه‌ی راس‌هایی از S_3 باشد که با $S_2 \cup \{x\}$ مجاور است، البته ممکن است مجموعه‌ی Z تهی باشد، در این صورت می‌توان برای گراف G ، افزای به صورت $(Z, S_3 - (B_3 \cup Z), S_2, \{x\}, B_3)$ در نظر گرفت، در نتیجه G ، در کلاس F_4 قرار دارد.

حالت سوم اگر $|S_1| \geq 2$ و $|S_2| \geq 2$ باشد، در این صورت دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

۳.۱ اگر هر راس از S_2 با هر راس از S_3 مجاور باشد، در این صورت فرض کنید که Z ، مجموعه راس‌هایی از S_1 باشد که با همه راس‌های $S_2 \cup S_3$ مجاوراند و فرض کنید A_1 ، مجموعه‌ای از راس‌های S_1 است که به همه راس‌های S_2 مجاور باشند و یک غیرهمسایگی در S_3 داشته باشند و فرض کنید B_1 مجموعه‌ای از راس‌های S_1 باشد که به همه راس‌های S_3 مجاور است و یک غیرهمسایگی در S_2 دارد، از آن‌جا که c یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است و $|S_1| \geq 2$ می‌باشد و از طرفی $S_1 = A_1 \cup B_1 \cup Z$ را داریم.

حال اگر $A_1 = \emptyset$ و $B_1 = \emptyset$ باشند، در این صورت S_1 را به مجموعه‌های A_1, B_1, Z افزای کردیم به‌طوری که A_1 با S_2 و نیز B_1 با S_3 مجاور است و همین‌طور Z هم با $S_2 \cup S_3$ مجاور است. در نتیجه افزای از راس‌های G به صورت A_1, S_2, S_3, B_1, Z خواهیم داشت،

لذا G در کلاس F_4 قرار دارد.

حال فرض کنید A_1 یا B_1 تهی باشد، به طور مثال اگر $A_1 = \emptyset$ باشد، در این صورت راسی از مجموعه‌ی S_1 وجود ندارد که دارای غیرهمسایگی در S_3 باشد و چون طبق تعریف، A_1 در S_3 دارای غیرهمسایگی بوده، پس با حذف A_1 ، تمام راس‌های S_3 با تمام راس‌های $S_1 \cup S_2$ مجاور خواهند بود و مجموعه‌ی S_1 باقی‌مانده، متشکل از Z و B_1 خواهد بود که دارای همسایه در S_2 می‌باشند پس $G - S_3$ یک گراف دوبخشی خواهد بود، در نتیجه می‌توان گفت که G تشکیل شده از جمع مستقیم یک گراف دوبخشی و گراف $S = S_3$ که فاقد یال است. پس G در کلاس F_3 قرار دارد.

۳.۲ در این قسمت فرض می‌کنیم که برای هر جفت $i, j \in \{1, 2, 3\}$ با $i \neq j$ ، مجموعه‌ی S_i شامل حداقل یک راس است که یک غیرهمسایه در S_j دارد، چنین راسی از S_i نمی‌تواند کلاس S_j را احاطه کند و چون $|S_i| \geq 2$ است پس کلاس خود را هم نمی‌تواند احاطه کند و از آن جاکه c یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است و برای هر راسی باید کلاسی وجود داشته باشد که توسط آن راس احاطه شود، پس مجموعه‌ی S_h مانند S_h به‌طوری که $(h \neq i, j)$ باشد، وجود دارد که توسط راس‌هایی از S_i که دارای غیرهمسایه در S_j هستند، به‌طور کامل احاطه می‌شود.

همچنین می‌توان برای هر $i \in \{1, 2, 3\}$ ، مجموعه‌ی S_i را به دو مجموعه‌ی ناتهی A_i و B_i افراز کرد به‌طوری که هر راس از A_i با همه رئوس S_{i+1} و هر راس از B_i با همه رئوس S_{i+2} (به پیمانه سه)، مجاور باشد. از طرف دیگر، هر راس از S_i که با تمام رئوس $S_{i+1} \cup S_{i+2}$ مجاور باشد در B_i قرار دارد. از این‌رو افرازی به‌صورت $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ را برای گراف G خواهیم داشت، لذا G متعلق به F_6 خواهد بود.

□

نتیجه ۱.۴.۲. [۱] یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای وجود دارد که صدق کردن گراف G ، در رابطه $\chi_d(G) \leq 3$ را بررسی می‌کند.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۲، می‌توان درستی رابطه $\chi_d(G) \leq 2$ را برای هر گرافی بررسی کرد. طبق بخش اول از قضیه‌ی ۱.۲.۲، اگر G به‌صورت یک راس تنها باشد، پس $\chi_d(G) = 1$ می‌باشد و همچنین طبق بخش دوم قضیه‌ی ۱.۲.۲، داریم $\chi_d(G) = 2$ است اگر و تنها اگر گراف ما $\bar{K}_2$ و یا $K_{r,s}$ باشد. برای تشخیص $\bar{K}_2$ بودن، به این ترتیب عمل می‌کنیم که اگر گراف G ، بیشتر از دو راس داشته باشد پس $\bar{K}_2$ نیست و اگر دارای دو راس باشد ولی $E(G) \neq \emptyset$ باشد باز هم $\bar{K}_2$ نیست و در غیر این صورت گراف ما $\bar{K}_2$ است.

برای تشخیص $K_{r,s}$ بودن گراف G ، به این ترتیب عمل می‌کنیم، یک راس از گراف را انتخاب می‌کنیم و تمام راس‌های مجاورش را در طرف مقابل قرار می‌دهیم، به عبارتی می‌خواهیم دوبخش بسازیم، پس یک راس را انتخاب کرده و در بخش اول قرار می‌دهیم و تمام راس‌های مجاورش را در بخش دوم قرار می‌دهیم حال به‌سراغ همسایه‌های راس‌هایی که در بخش دوم هستند، رفته و تمام آن همسایه‌ها را، در

بخش اول قرار می‌دهیم و به‌همین ترتیب ادامه داده تا وقتی که راسی باقی نماند. به‌این‌صورت دوبخشی بودن گراف G را بررسی می‌کنیم و اگر دوبخشی بود آنگاه طبق قضیه ۱.۲.۲، $\chi_d(G) = 2$ خواهد بود.

حال برای تشخیص این که گراف G در رابطه‌ی $\chi_d(G) = 3$ صدق کند، از قضیه ۱.۴.۲، استفاده می‌کنیم.

بررسی عضویت در F_0 به‌این‌صورت است که اگر گراف G دارای بیشتر و یا کمتر از سه راس باشد متعلق به F_0 نیست و همین‌طور اگر $E(G) \neq \emptyset$ باشد نیز متعلق به F_0 نخواهد بود در غیر این صورت G متعلق به F_0 می‌باشد.

بررسی عضویت در F_1 به‌این‌صورت است که اگر در گراف G راس تنهایی مانند u موجود باشد به‌طوری‌که $G - \{u\}$ یک گراف دوبخشی باشد در این صورت G متعلق به F_1 است. بررسی عضویت در F_2 به‌این‌صورت است که برای هر جفت از راس‌های a و b که غیرمجاور باشند اگر $V(G) - \{a, b\}$ یک مجموعه‌ی مستقل بوده و روابط $N(a) - N(b) \neq \emptyset$ و $N(b) - N(a) \neq \emptyset$ برقرار باشد، در این صورت G متعلق به F_2 خواهد بود.

بررسی عضویت در F_3 به‌این‌صورت است که نخست گراف $\bar{G}$ را تشکیل می‌دهیم و برای هر مولفه‌ی K در $\bar{G}$ اگر K یک خوشه و $G - V(K)$ ، گرافی دوبخشی با مجموعه یال‌های غیرتهی باشد در این صورت G متعلق به F_3 می‌باشد.

بررسی عضویت در F_4 به‌این‌صورت است که طبق تعریف F_4 ، یک مسیر بدون وتر $x_1 - x_2 - x_3$ وجود دارد به‌طوری‌که راس $x_1 \in X_1$ و $x_4 \in X_4$ است و راس $x_3 \in X_3$ با x_1 و همچنین راس $x_2 \in X_2$ با x_4 غیرهمسایه‌اند.

به‌علاوه: $X_2 = N(x_1) \cap N(x_3)$ و $X_3 = N(x_2) \cap N(x_4)$ می‌باشد و X_1 مجموعه‌ی همسایگان x_2 می‌باشد که دارای غیرهمسایه در X_3 است و همین‌طور، X_4 مجموعه‌ی همسایگان x_3 می‌باشد که دارای غیرهمسایه در X_2 است و Z شامل مجموعه‌ی راس‌هایی است که با تمام رئوس موجود در $X_2 \cup X_3$ مجاورند. لذا جهت بررسی برای هر مسیر بدون وتر $x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ از G مجموعه‌های X_1, X_2, X_3, X_4 و Z را به‌صورت بالا تعریف کرده و بررسی می‌کنیم که این مجموعه‌ها در روابط گفته شده صدق کنند که در صورت صدق کردن، G متعلق به F_4 خواهد بود.

بررسی عضویت در F_5 به‌این‌صورت است، اگر راسی مانند x را در G بیابیم که $G - \{x\}$ یک گراف دوبخشی باشد و سپس بتوانیم $G - \{x\}$ را به دو کلاس A و B چنان افراز کنیم که $|A| \geq 2$ و $|B| \geq 2$ باشند و رئوسی در A وجود داشته باشند که با همه‌ی راس‌های B مجاور باشند و رئوسی از B نیز وجود داشته باشند که مجاور به همه‌ی رئوس A باشند و هر راس از A که دارای غیرهمسایه‌ای در B است، با x مجاور باشد و هر راس از B که دارای غیرهمسایه‌ای در A است هم، مجاور با x باشد و x هم دارای غیرهمسایه در A و B باشد. در این صورت G متعلق به F_5 خواهد بود.

برای بررسی عضویت در F_6 به‌این‌صورت عمل می‌کنیم، اگر بتوان راس‌های گراف G را به شش مجموعه‌ی $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ چنان افراز کرد که A_i و B_i به‌ازای هر $i = 1, 2, 3$ ، غیرمجاور باشند و برای هر $a_i \in A_i$ و $b_i \in B_i$ ، یال‌های $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1, b_1b_2, b_2b_3, b_3b_1, a_1b_2, a_2b_3, a_3b_1$ موجود

باشند و همچنین با انتخاب هر جفت راس غیرمجاور $a_i \in A_i$ و $b_i \in B_i$ و با در نظر گرفتن یال بین راس‌های غیرمجاور، یک دور شش‌تایی داشته باشیم، در نتیجه این راس‌ها یک $\bar{C}_6$ القاء می‌کنند. لذا مجموعه‌های S_i و A_i و B_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_i = N(a_{i+1}) \cap N(a_{i+2}) \cap N(b_{i+1})$$

مجموعه‌ای از راس‌های S_i باشد که دارای غیرهمسایگی در S_{i+2} هستند $A_i =$

$$B_i = S_i - A_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

و گراف G را به این صورت مورد بررسی قرار می‌دهیم که برای هر شش‌تایی $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ از G که یک $\bar{C}_6$ القاء کند، بررسی می‌کنیم که رابطه‌ی $S_i = A_i \cup B_i$ برای هر $i = 1, 2, 3$ صدق کند. برآورد تقریبی از پیچیدگی این الگوریتم از مرتبه‌ی $O(n^6)$ می‌باشد و بیشترین زمان مصرف شده، در بررسی تعلق داشتن به F_6 می‌باشد. $\square$

۵.۲ رنگ‌آمیزی احاطه‌گر در گراف‌های P_4 -آزاد

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مقدار $\chi_d(G)$ را برای هر گراف G که P_4 -آزاد باشد، محاسبه کرد و در این خصوص از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۲. ([۱۵] Seinsche) فرض کنید که G یک گراف P_4 -آزاد، با حداقل دو راس باشد آن‌گاه G یا $\bar{G}$ همبند نیست.

قضیه‌ی ۱.۵.۲، مطالعه‌ی رنگ‌آمیزی‌های احاطه‌گر را به طور کلی‌تر برای گراف‌هایی که همبند نیستند و گراف‌هایی که مکمل آن‌ها ناهمبند است، موجب می‌شود. در این‌جا یک نمادگذاری جدید را به صورت زیر معرفی می‌کنیم. هر رنگ‌آمیزی احاطه‌گر c در گراف G را در نظر بگیرید، تعداد رنگ‌های به کار رفته در c را با q_c نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که c یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است، پس یک مجموعه از کلاس‌های رنگ از c وجود دارد به طوری که هر راس از G حداقل یک کلاس رنگ از آن مجموعه را احاطه می‌کند، کمترین تعداد کلاس‌های رنگ که توسط راس‌های G احاطه شوند را با p_c نمایش می‌دهیم. توجه کنید که ممکن است $p_c < q_c$ باشد ولی الزاماً این رابطه همیشه برقرار نمی‌باشد و ممکن است حالت تساوی را هم داشته باشیم.

برای مثال در گراف $\bar{C}_6$ که مکمل گراف C_6 می‌باشد، رنگ‌آمیزی احاطه‌گر c را چنان می‌توان در نظر گرفت که در آن $q_c = p_c = 3$ باشد. پس در این حالت $\chi(\bar{C}_6) = 3$ خواهد بود ولی با در نظر گرفتن رنگ‌آمیزی g که $g \neq c$ باشد، داریم $q_g = 4$ و $p_g = 2$. به طوری که دو راس غیرمجاور رنگ‌های ۱ و ۲ را می‌گیرند و به بقیه راس‌ها به صورت متناوب رنگ‌های ۳ و ۴ داده می‌شود. پس برای مقادیر p_c و q_c در یک گراف ثابت، ممکن است که، هر دو حالت نامساوی و تساوی را داشته باشیم.

لم ۱.۵.۲. [۱] فرض کنید G یک گراف باشد آن‌گاه:

(i) مطالب زیر معادل اند

- G دارای یک رنگ آمیزی احاطه گر c با $p_c = 1$ می باشد.

- G یک راس فراگیر دارد.

- هر رنگ آمیزی c از G ، یک رنگ آمیزی احاطه گر با $p_c = 1$ می باشد.

(ii) اگر G همبند نباشد آن گاه هر رنگ آمیزی از G ، یک رنگ آمیزی احاطه گر است و $\chi_d(G) = \chi(G)$ می باشد. به علاوه اگر G راس فراگیر نداشته باشد، پس هر رنگ آمیزی احاطه گر c از G در رابطه ی $p_c = 2$ صدق می کند.

برهان. برای اثبات قسمت i ، فرض کنید G دارای رنگ آمیزی احاطه گر c با $p_c = 1$ باشد، بنابراین یک کلاس رنگ X وجود دارد به طوری که هر راس از G کلاس X را احاطه می کند، پس تمام راس های متعلق به کلاس X هم باید بتوانند کلاس X را احاطه کنند و چون راس های موجود در یک کلاس با هم مجاور نیستند در نتیجه X تنها دارای یک راس مانند x می باشد، به این ترتیب x یک راس فراگیر است.

برعکس: فرض کنید G دارای راس فراگیری مانند x باشد. به عبارتی، راسی مانند x وجود دارد که به تمام رئوس گراف G متصل است پس کل گراف را با دو رنگ می توان رنگ آمیزی کرد، در نتیجه دو کلاس رنگ وجود خواهد داشت که یکی شامل راس فراگیر x و کلاس دیگر شامل بقیه رئوس می باشد، در این صورت کلاسی که شامل راس فراگیر x است توسط بقیه رئوس احاطه می شود و راس x ، خودش را احاطه می کند. پس هر رنگ آمیزی c یک رنگ آمیزی احاطه گر با $p_c = 1$ می باشد.

برای اثبات قسمت ii ، فرض کنید $\bar{G}$ همبند نباشد، پس می توان افزای از $V(G)$ به دو مجموعه ی غیر تهی V_1 و V_2 در نظر گرفت، به طوری که هر راس از مجموعه ی V_1 با هر راس از مجموعه ی V_2 مجاور باشد.

فرض کنید c هر رنگ آمیزی از G باشد پس رنگ α متعلق به V_1 وجود دارد که در V_2 ظاهر نشده و همین طور، رنگ β متعلق به V_2 وجود دارد که در V_1 ظاهر نشده است، از آن جاکه هر راس از V_1 با هر راس از V_2 مجاور است، پس رنگ β توسط هر راس از V_1 احاطه می شود و به صورت مشابه رنگ α هم توسط هر راس از V_2 احاطه می شود، به این ترتیب c یک رنگ آمیزی احاطه گر است و $\chi_d(G) = \chi(G)$ می باشد.

با توجه به افزای که برای $V(G)$ گفته شد، هر راس از V_1 به هر راس از V_2 متصل است پس تمام رئوس V_1 می توانند کلاس β را احاطه کنند و همین طور، تمام رئوس V_2 می توانند کلاس α را احاطه کنند در نتیجه $p_c \leq 2$ می باشد و از آن جاکه گراف G فاقد راس فراگیر می باشد، یعنی کلاسی شامل راس تنها نداریم و حداقل تعداد رئوس در یک کلاس، دو راس می باشد پس طبق قسمت i ، $p_c \neq 1$ است و از آن جاکه G یک رنگ آمیزی احاطه گر است، برای رئوس داخل این کلاس که توسط دیگر راس ها احاطه شده اند هم باید کلاسی وجود داشته باشد که بتواند آن را احاطه کنند، پس به کلاس دیگری هم نیاز است، در نتیجه $p_c = 2$ خواهد بود. $\square$

لم ۲.۵.۲. [۱] فرض کنید G یک گراف غیرهمبند با مولفه‌های $G_1, \dots, G_k$ و $k \geq 2$ باشد، اگر همه‌ی انتخاب‌ها از یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر c_i برای هر G_i ، کمترین باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\chi_d(G) = \min\left\{\sum_{i=1}^k p_{c_i} + \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{c_i} - p_{c_i}\}\right\}$$

برهان. فرض کنید c هر رنگ‌آمیزی احاطه‌گر از G باشد، برای $i = 1, \dots, k$ ، هر کلاس‌رنگی را که همه‌ی رئوس آن متعلق به G_i باشند، یک رنگ‌خصوصی برای G_i می‌نامیم.

فرض کنید p_i تعداد رنگ‌های خصوصی G_i باشد و فرض کنید c_i یک رنگ‌آمیزی القایی به‌وسیله‌ی c روی G_i باشد. هر راس x از G_i را در نظر می‌گیریم، چون c یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر است، پس x باید یک کلاس‌رنگ را احاطه کند و از آن‌جاکه x تنها به راس‌های مولفه‌ی G_i متصل است، پس فقط می‌تواند همین راس‌ها را احاطه کند لذا رنگ احاطه شده توسط x یک رنگ‌خصوصی از G_i می‌باشد.

و چون به‌ازای هر راس x از G_i همین استدلال برقرار است، پس c_i یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر از G_i می‌باشد و همچنین $p_i \geq p_{c_i}$ است. به‌علاوه اگر مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی که دارای رنگ‌خصوصی در G_i هستند را با R_i مشخص کنیم در این صورت c به تعداد $q_{c_i} - p_i$ رنگ را روی راس‌های $G_i - R_i$ استفاده کرده و چنین رنگ‌هایی می‌توانند روی چندین مولفه استفاده شوند، بنابراین c حداقل به تعداد $\sum_{i=1}^k p_i + \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{c_i} - p_i\}$ رنگ را استفاده کرده است و از آن‌جایی که $p_i \geq p_{c_i}$ است، با جایگزینی p_{c_i} به جای p_i ، مقدار $\sum_{i=1}^k p_i + \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{c_i} - p_{c_i}\}$ را خواهیم داشت که این جایگزینی فقط باعث کم شدن مقدار جمع می‌شود و اگر مقدار بیشینه هم افزایش پیدا کند، در حالت کلی باعث کاهش مقدار جمع می‌گردد.

از طرف دیگر با انتخاب $q = \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{c_i} - p_{c_i}\}$ ، می‌توان c را به یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر c' تبدیل کرد به‌طوری‌که عدد رنگی احاطه‌گر آن برابر با مقدار $\sum_{i=1}^k p_{c_i} + \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{c_i} - p_{c_i}\}$ باشد. از آن‌جاکه c_i یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر از G_i است، برای رنگ‌آمیزی هر G_i دقیقاً به تعداد p_{c_i} رنگ خصوصی نیاز داریم به‌این‌ترتیب با تغییرنام بقیه‌ی رنگ‌های متعلق به c_i به نام‌های $q_{c_i} - p_{c_i}, \dots, 1$ ، رنگ‌آمیزی c ، یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر می‌باشد و $\chi_d(G)$ برابر است با کمترین این مقدار، پس داریم:

$$\chi_d(G) = \min\left\{\sum_{i=1}^k p_{c_i} + \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{c_i} - p_{c_i}\}\right\}$$

□

به‌عنوان یک مثال از فرمول گفته شده در ۲.۵.۲، گراف G را به‌صورت $G = 3\bar{C}_6$ در نظر می‌گیریم. این گراف دارای سه مولفه‌ی یکریخت به‌صورت $\bar{C}_6$ می‌باشد، اگر یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر با چهار رنگ برای هر مولفه در نظر بگیریم، در این صورت $q_{c_i} = 4$ و $p_{c_i} = 2$ را خواهیم داشت و در نتیجه با توجه به فرمول گفته شده در ۲.۵.۲، برای گراف مورد نظر، مقدار

$$\chi_d(G) = \sum_{i=1}^3 2 + \max\{2, 2, 2\} = 8$$

$$\Rightarrow \chi_d(G) = 8$$

را به دست می‌آوریم.

محاسبه‌ی فرمول داده شده در ۲.۵.۲، در حالت کلی، ساده نیست ولی این مقدار در مورد گراف‌های P_4 -آزاد محاسبه شده، که پیامد آن را به صورت زیر ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲.۵.۲. [۱] فرض کنید G یک گراف P_4 -آزاد باشد.

(i) اگر G همبند باشد، آن‌گاه $\chi_d(G) = \chi(G)$ است.

(ii) اگر G همبند نباشد و k تعداد مولفه‌های G و $k \geq 2$ باشد، فرض کنید h تعداد مولفه‌هایی از G باشد که یک راس فراگیر دارند، آن‌گاه

– اگر G دارای مولفه‌هایی مانند H باشد به طوری که H دارای راس فراگیر است و در رابطه‌ی $\chi(H) = \chi(G)$ صدق کند، پس داریم:

$$\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 1$$

– و در غیر این صورت

$$\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 2$$

برهان. برای اثبات قسمت i ، فرض کنید G همبند باشد، اگر $|V| = 1$ باشد آن‌گاه $\chi_d(G) = \chi(G)$ است و اگر $|V| \geq 2$ باشد، از آن‌جا که طبق فرض، G یک گراف P_4 -آزاد می‌باشد، لذا با استفاده از قضیه‌ی ۱.۵.۲، $\bar{G}$ ناهمبند است و به کمک بخش ii از لم ۱.۵.۲، نتیجه می‌گیریم که $\chi_d(G) = \chi(G)$ می‌باشد.

حال برای اثبات بخش ii ، فرض کنید که G همبند نباشد و فرض کنید $G_1, \dots, G_k$ مولفه‌های گراف G باشند، با استفاده از لم ۲.۵.۲، به وسیله‌ی انتخاب مناسب از یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر C_i برای هر G_i ، داریم:

$$\chi_d(G) = \sum_{i=1}^k p_{C_i} + \max_{1 \leq i \leq k} \{q_{C_i} - p_{C_i}\}$$

حال هر مولفه‌ی G_i از G را در نظر بگیرید، این مولفه یا دارای راس فراگیر است و یا فاقد راس فراگیر می‌باشد، اگر G_i دارای راس فراگیر باشد، پس به وسیله‌ی بخش i در لم ۱.۵.۲، خواهیم داشت $p_{C_i} = 1$ و اگر G_i فاقد راس فراگیر باشد، پس $|V(G_i)| \geq 2$ است و چون طبق فرض گراف P_4 -آزاد بود لذا با استفاده از قضیه‌ی ۱.۵.۲، $\bar{G}$ ناهمبند است و همچنین به وسیله‌ی بخش ii از لم ۱.۵.۲، $p_{C_i} = 2$ خواهد بود. در نتیجه مقدار $\sum p_{C_i}$ از فرمول $\chi_d(G)$ در گراف ناهمبند G معادل با مقدار $h + 2(k - h)$ خواهد بود.

برای هر i ، فرض کنید $q_{C_i} = \chi(G_i)$ باشد. طبق بخش i از این قضیه، هر G_i دارای یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر با $\chi(G_i)$ رنگ است، لذا $\chi_d(G) = \chi(G)$ می‌باشد.

حال اگر مولفه‌ی G_i دارای راس فراگیر باشد، طبق صورت قضیه، $\chi(G_i) = \chi(G)$ خواهد بود و

از آن‌جا که برای چنین مولفه‌ای $p_{c_i} = 1$ بوده پس مقدار $\max\{q_{c_i} - p_{c_i}\}$ از فرمول $\chi_d(G)$ در گراف ناهمبند G ، برابر با $1 - \chi(G)$ خواهد بود و در نتیجه رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 1$$

حال اگر G دارای مولفه‌ای با راس فراگیر نباشد، در این صورت هر مولفه‌ی G_i برای هر رنگ‌آمیزی احاطه‌گر c_i در رابطه‌ی p_{c_i} صدق می‌کند و از طرفی چون G دارای مولفه‌ای با راس فراگیر نیست پس به‌ازای هر i داریم، $\chi(G_j) \leq \chi(G)$ و برای مولفه‌ای مانند G_j رابطه‌ی $\chi(G_j) = \chi(G)$ برقرار خواهد بود، لذا $2 - \chi(G_i) - p_{c_i} \leq \chi(G) - 2$ می‌باشد و در نتیجه رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 2$$

□

۶.۲ نتیجه

محاسبه‌ی کمترین تعداد رنگ در رنگ‌آمیزی احاطه‌گر از یک گراف، مسئله‌ای سخت می‌باشد. ما با ارائه‌ی این مطلب که مسئله‌ی $\chi_d(G) \leq 3$ در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود و همچنین ارائه دادن یک کران بالایی جدید برای عدد رنگی احاطه‌گر، به اطلاعات در رابطه با رنگ‌آمیزی احاطه‌گر، بهبود بخشیدیم و با استفاده از این اطلاعات، عدد رنگی احاطه‌گر را برای گراف P_4 - آزاد محاسبه کردیم. محاسبه‌ی عدد رنگی احاطه‌گر گراف وتری، از مسائلی است که هنوز به صورت باز باقی مانده است و مشخص نیست که آیا می‌تواند در زمان چندجمله‌ای مورد محاسبه قرار گیرد یا خیر و برای درخت‌ها نیز، مسئله تا هم‌اکنون به صورت باز باقی مانده است.

فصل ۳

عددرنگی احاطه گرکلی یک گراف

۱.۳ مقدمه

مفهوم رنگ آمیزی احاطه گرکلی، تعمیمی از رنگ آمیزی احاطه گر می باشد، با این توضیح که برای بدست آوردن یک رنگ آمیزی احاطه گرکلی، محدودیت بیشتری برای رنگ آمیزی رئوس یک گراف اعمال می کنیم که در طول فصل به آن می پردازیم.

این مفهوم نخست بوسیله گرا^۱، هورتون^۲ و راسموسین^۳ [۵] مطالعه شد، و نیز، مطالعات تکمیل تری توسط گرا [۳، ۴] و چلالی^۴ و مافرای^۵ [۱]، با تفصیل بیشتر روی این موضوع انجام شده است. در این فصل نشان می دهیم که سختی محاسبه عددرنگی احاطه گرکلی یک گراف، از درجه NP - کامل می باشد.

۲.۳ تعاریف

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V از مرتبه $n(G)$ و مجموعه یال های E از اندازه $m(G)$ باشد. همسایگی باز و همسایگی بسته ی راسی مانند $v \in V$ به ترتیب

^۱Gera

^۲Horton

^۳Rasmussen

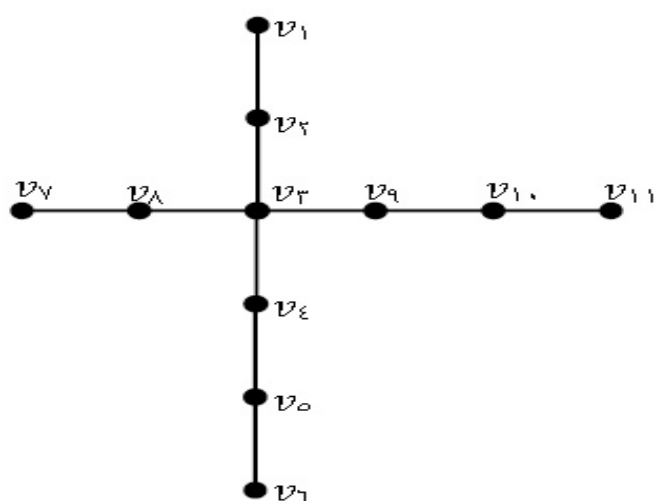
^۴Chellali

^۵Maffray

به صورت $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ و $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌شوند. همچنین درجه راسی مانند v عبارت است از $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.

تعریف ۲.۲.۳. یک مجموعه احاطه گرکلی یا مختصراً TDS ، زیر مجموعه S از گراف G ، می‌باشد به طوری که برای هر راس $v \in V(G)$ ، $N_G(v) \cap S \neq \emptyset$ باشد. عدد احاطه گرکلی $\gamma_t(G)$ از G ، کمترین تعداد رئوس در یک مجموعه احاطه گرکلی می‌باشد.

به عنوان مثال گراف زیر را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن رئوس $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$ به

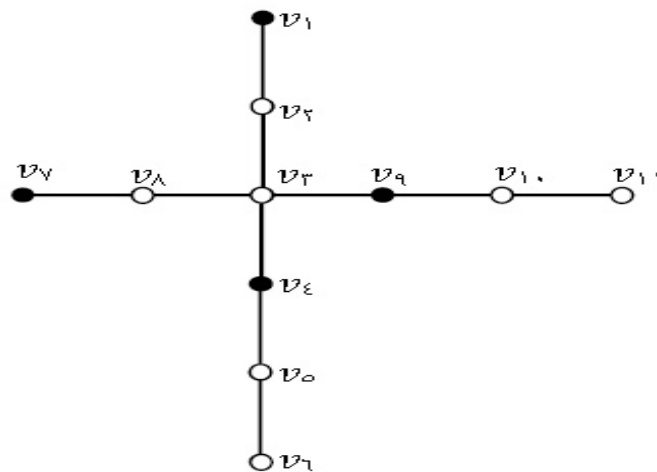


شکل ۱.۳: گراف G

عنوان عضوهای مجموعه احاطه گرکلی، همین طور که در شکل ۲.۳، می‌بینیم، تمامی رئوس باقی‌مانده احاطه می‌شوند و رئوس انتخاب شده نیز یکدیگر را احاطه می‌کنند. و از طرفی تعداد عضوهای انتخابی، کمترین تعداد ممکن است لذا عدد احاطه گرکلی این گراف برابر ۷ خواهد بود.

تعریف ۳.۲.۳. راس $v \in V(G)$ به طور کامل زیرمجموعه X از G را احاطه می‌کند، اگر $X \subseteq N(v)$ باشد، به عبارتی اگر v با هر راس در X مجاور باشد و می‌نویسیم $v \succ_t X$. همچنین $v \not\succ_t X$ ، یعنی این که v مجموعه X را به طور کامل احاطه نمی‌کند.

تعریف ۴.۲.۳. یک رنگ آمیزی احاطه گرکلی یا به اختصار یک TDC از گراف G ، یک رنگ آمیزی مجاز از گراف G می‌باشد، به طوری که برای هر راس از گراف G ، حداقل یک کلاس رنگ بجز کلاس خودش، وجود داشته باشد که احاطه شود. عدد رنگ آمیزی احاطه گرکلی از گراف G که به صورت $\chi_d^t(G)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از کمترین تعداد کلاس رنگ در یک TDC از G . یک $\chi_d^t(G)$ -رنگ آمیزی از G ، هر رنگ آمیزی احاطه گرکلی از G با $\chi_d^t(G)$ رنگ، می‌باشد.



شکل ۲.۳: عضوهای مجموعه احاطه گر کلی گراف G

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنید $f = (V_1, V_2, \dots, V_l)$ یک TDC از گراف G باشد. راس v را همسایه مشترک V_i می‌نامیم اگر $v \succ_t V_i$. مجموعه‌ی همسایه‌های مشترک V_i را همسایگی مشترک V_i در G می‌نامیم و با $CN_G(V_i)$ و یا به اختصار به وسیله $CN(V_i)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۳. فرض کنید $f = (V_1, V_2, \dots, V_l)$ یک TDC از گراف G باشد. راس v را همسایه اختصاصی V_i نسبت به f می‌نامیم، اگر $v \succ_t V_i$ و برای هر $j \neq i$ ، داشته باشیم $v \not\succ_t V_j$. مجموعه‌ی همسایه‌های اختصاصی V_i ، همسایگی اختصاصی V_i در G نامیده می‌شود و به وسیله $pn_G(V_i : f)$ و یا به اختصار $pn(V_i : f)$ نشان می‌دهیم.

با توجه به تعاریف ۴.۲.۳ و ۵.۲.۳ گزاره زیر را خواهیم داشت.

گزاره ۱.۲.۳. [۹] فرض کنید $f = (V_1, V_2, \dots, V_l)$ یک TDC از گراف G باشد و مجموعه‌ی I را به صورت $I = \{i \mid |V_i| \leq \Delta(G)\}$ تعریف می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$V(G) = \cup_{i \in I} CN_G(V_i)$$

برهان. از آن جاکه f یک TDC است لذا برای هر راس G کلاس رنگی V_i وجود دارد که آن راس با رئوس V_i مجاور است، از طرفی خود آن راس هم توسط یک راس دیگر احاطه می‌شود لذا هر راسی حداقل دارای یک همسایه می‌باشد.

فرض کنید برای راسی مانند v ، کلاس رنگی V_i موجود باشد، به طوری که v با تمام رئوس V_i مجاور است. راس v همسایه مشترک V_i بوده و داریم $V_i \subseteq N(v)$. حال اگر برای راسی مانند u هم کلاس رنگی V_i موجود باشد که توسط u احاطه شود پس $V_i \subseteq N(u)$ هم می‌باشد لذا $CN(V_i) = \{v, u\}$ و یعنی همسایگان مشترک V_i رئوس v و u می‌باشند. پس با پیدا کردن همسایگان مشترک کلاس رنگی V_i می‌توان رئوسی از G را که V_i کلاس رنگی در رنگ آمیزی احاطه گر کلی آن رئوس باشد، را شمرد و این کار برای

تمام V_i ها به ازای $i = 1, \dots, l$ ، برقرار است لذا با $UCN(V_i)$ برای $i \in I$ ، می توان کل رئوس G را شمارش کرد. $\square$

۳.۳ پیچیدگی

در این بخش، طبق تعریف، دشواری تشخیص عدد رنگی احاطه گرکی از یک گراف دلخواه را ثابت می کنیم. نخست، بعضی از مشکلات تشخیص مناسب را، بیان می کنیم.

مساله رنگ آمیزی دارای دو ورودی است که یکی گراف G و دیگری عدد صحیح مثبت k می باشد و سؤال این است که آیا تابعی مانند

$$f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

وجود دارد، به طوری که $f(u) \neq f(v)$ بوده، هر گاه $uv \in E(G)$ باشد؟

مساله رنگ آمیزی احاطه گرکی دارای دو ورودی است که یکی گراف G و دیگری عدد صحیح مثبت k می باشد و سؤال این است که آیا، تابعی مانند

$$f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

وجود دارد، به طوری که $f(u) \neq f(v)$ بوده، هر گاه $uv \in E(G)$ باشد و همچنین برای هر راس $x \in V(G)$ ، یک کلاس رنگ مانند V_i به طوری که $x \succ_t V_i$ ؟

قضیه ۱.۳.۳. [۹] عدد رنگی احاطه گرکی، NP - کامل است.

برهان. عدد رنگی احاطه گرکی به وضوح متعلق به NP می باشد، چون برای هر تابع داده شده f ، در زمان چند جمله ای می توان بررسی کرد که آیا این تابع در شرایط مورد نظر مساله رنگ آمیزی احاطه گرکی صدق می کند یا نه. از این رو ما می توانیم به طور کارآمد بررسی کنیم که یک تخصیص از رنگ ها به راس های گراف G یک رنگ آمیزی حقیقی باشد و همچنین هر راس v ، برخی کلاس های رنگ دیگر بجز کلاس v را احاطه کند.

در ادامه عدد رنگی را به عدد رنگی احاطه گرکی تبدیل می کنیم. یک نمونه ی دلخواه (G, k) از عدد رنگی را در نظر می گیریم و با استفاده از آن به صورت زیر، عدد رنگی احاطه گرکی (G', k') را ایجاد می کنیم. به گراف G راسی مانند v' اضافه کرده و از راس v' به هر راس از گراف G یک یال در نظر می گیریم، در این صورت $k' = k + 1$ است.

فرض کنید گراف G دارای یک رنگ آمیزی حقیقی است که به تعداد k رنگ استفاده کرده باشد. از آن جاکه $k' = k + 1$ می باشد، پس رنگ آمیزی G' با آن k رنگ و یک رنگ جدید برای v' ، یک رنگ آمیزی حقیقی از G' می باشد. و از آن جاکه برای هر راس $u \in V(G)$ داریم $v' \in N(u)$ و برای هر رنگ i که با رنگ متعلق به v' مخالف باشد داریم: $\{u \in V(G) | f(u) = i\} \subseteq N(v')$ ، پس این رنگ آمیزی یک TDC از G' می باشد که در آن به اندازه ی $k' = k + 1$ رنگ استفاده شده است.

حال فرض می کنیم G' یک TDC دارد که k' رنگ استفاده کرده است، چون v' مجاور به همه ی راس ها

در G' است، پس باید رنگی مجزا از سایر رئوس G' داشته باشد و با حذف v' یک رنگ‌آمیزی حقیقی از G با $k - 1 = k'$ رنگ باقی می‌ماند. $\square$

۴.۳ برخی کران‌ها

در این بخش کران‌های بالا و پایینی دقیقی برای عدد رنگی احاطه‌گر کلی یک گراف ارائه می‌دهیم و همچنین به بررسی کران‌های ارائه شده در مشاهده زیر می‌پردازیم.

مشاهده ۱.۴.۳. [۹] فرض کنید G ، گرافی از مرتبه n و فاقد راس تنها باشد آن‌گاه داریم:

$$\max\{\chi_d(G), \gamma_t(G)\} \leq \chi_d^t(G) \leq n$$

قضیه‌ی زیر کران‌های بالا و پایینی برای عدد رنگی احاطه‌گر کلی یک گراف، ارائه می‌دهد که عدد رنگی احاطه‌گر کلی مولفه‌های همبندی آن می‌باشد.

قضیه ۱.۴.۳. [۹] فرض کنید G گرافی فاقد راس تنها باشد، اگر $G_1, G_2, \dots, G_w$ همه‌ی مولفه‌های همبند گراف G باشند، آن‌گاه

$$\max_{1 \leq i \leq w} \chi_d^t(G_i) + 2w - 2 \leq \chi_d^t(G) \leq \sum_{i=1}^w \chi_d^t(G_i)$$

برهان. برای هر $1 \leq i \leq w$ ، فرض کنید f_i یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی از G_i باشد و فرض کنید f تابعی روی $V(G)$ باشد به‌طوری‌که برای هر $v \in V(G_i)$ داشته باشیم $f(v) = (i, f_i(v))$. در این رنگ‌آمیزی رئوسی از G که در مولفه G_i قرار دارند، رنگ $(i, f_i(v))$ می‌گیرند، درایه اول این جفت دوتایی یعنی i در همه راس‌های مولفه G_i یکسان است و چون طبق فرض f_i یک رنگ‌آمیزی مجاز است پس درایه دوم این جفت دوتایی برای رئوس مجاور متفاوت است، لذا f یک رنگ‌آمیزی مجاز می‌باشد و از طرفی به ازای هر راس از گراف G که در مولفه G_i قرار دارد، در رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی f_i ، حداقل یک کلاس رنگ وجود داشت که آن راس را احاطه می‌کرد که این قاعده در رنگ‌آمیزی f نیز برقرار می‌باشد، پس f یک TDC است و از آن‌جاکه G_i ها مولفه‌های همبندی گراف G بودند لذا در مولفه‌ها احتمال راس تکراری وجود دارد پس در مجموع تعداد رنگ‌های استفاده شده در رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی G_i ها بیشتر یا مساوی از تعداد رنگ‌ها در رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی گراف G خواهد بود. از طرفی f یک TDC بود لذا $\chi_d^t(G)$ حتما کمتر مساوی مجموع عددهای رنگی احاطه‌گر کلی مولفه‌ها می‌باشد.

حال فرض کنید مولفه‌هایی وجود داشته باشند که دو بخشی کامل نباشند، از آن‌جایی که گراف ما فاقد راس تنهاست، اگر مولفه‌هایی داشته باشیم که دو بخشی کامل نباشند، حتما دارای عدد رنگی احاطه‌گر کلی بیش از ۲ هستند لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: همه مولفه‌ها دو بخشی کامل هستند، که در این صورت هر مولفه دارای عدد رنگی احاطه‌گر کلی ۲ می‌باشند.

حالت دوم: برخی از مولفه‌ها دو بخشی کامل نباشند که در این صورت آن مولفه‌ها دارای عدد رنگی احاطه گرکی بیش از ۲ می‌باشند. از آنجایی که مولفه‌ها همبند هستند و کمترین حالت همبندی به صورت K_2 می‌باشد که برای رنگ آمیزی به ۲ رنگ نیاز دارد، پس برای هر مولفه‌ی G_i که $i \neq j$ باشد، حداقل ۲ رنگ مورد نیاز می‌باشد. در این صورت به ازای برخی از $1 \leq i \leq w$ که G_i دوبخشی کامل نباشد، قرار می‌دهیم:

$$\chi_d^t(G_j) = \max_{1 \leq i \leq w} \chi_d^t(G_i)$$

آن‌گاه حداقل تعداد رنگ مورد استفاده در رنگ آمیزی احاطه گرکی گراف G به صورت زیر خواهد بود.

$$\max \chi_d^t(G_i) + 2w - 2 \leq \chi_d^t(G)$$

اگر تعداد مولفه‌هایی که دوبخشی کامل نباشند فقط یک مولفه می‌بود، این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شد ولی در صورتی که بیش از یک مولفه وجود داشته باشد که دوبخشی کامل نباشد، چون ما فقط یکی از آن مولفه‌ها، که بزرگترین آن‌ها بوده را در نظر گرفتیم پس مقدار واقعی یعنی $\chi_d^t(G)$ مسلماً بیشتر از $\max \chi_d^t(G_i) + 2w - 2$ خواهد بود.

□

با دقت در اثبات قضیه‌ی ۱.۴.۳، در ادامه ملاحظه‌ی ۱.۴.۳، را ارائه خواهیم داد.

ملاحظه ۱.۴.۳. [۹] برای هر گراف G که فاقد راس تنها بوده و $G_1, G_2, \dots, G_w$ همه‌ی مولفه‌های همبندی آن باشند، داریم $\chi_d^t(G) = \max_{1 \leq i \leq w} \chi_d^t(G_i) + 2w - 2$ اگر و تنها اگر حداکثر یک مولفه‌ی همبندی از گراف G ، دوبخشی کامل نباشد.

در ادامه فرض می‌کنیم که G همبند باشد، قضیه بعد کران پایین ۲ و کران بالای n را برای عدد رنگی احاطه گرکی گراف G از مرتبه n به طوری که گراف G فاقد راس تنها باشد، ارائه می‌دهد.

قضیه ۲.۴.۳. [۹] اگر G گرافی همبند از مرتبه n و فاقد راس تنها باشد، آن‌گاه داریم:

$$2 \leq \chi_d^t(G) \leq n$$

به علاوه $\chi_d^t(G)$ برابر ۲ یا n است اگر و تنها اگر گراف G به ترتیب، گراف دوبخشی کامل یا گراف K_n باشد.

برهان. طبق مشاهده ۱.۴.۳، $\max\{\chi_d(G), \gamma_t(G)\} \leq \chi_d^t(G)$ است، در این صورت از هر دوی آن‌ها هم بزرگتر بوده لذا $\gamma_t(G) \leq \chi_d^t(G)$ می‌باشد و از آنجایی که طبق تعریف، عدد احاطه گرکی حداقل ۲ می‌تواند باشد یعنی $2 \leq \gamma_t(G)$ است و خواهیم داشت $2 \leq \gamma_t(G) \leq \chi_d^t(G)$ ، در نتیجه $2 \leq \chi_d^t(G)$ می‌باشد. از طرفی در هر رنگ آمیزی بدترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که ما مجبور باشیم به هر راس از گراف مورد نظر، یک رنگ اختصاص بدهیم، در گراف مورد نظر که از مرتبه n است، بدترین حالت زمانی است که برای رنگ آمیزی به n رنگ احتیاج داشته باشیم پس حداکثر تعداد رنگ‌های مورد نیاز

در این حالت n رنگ خواهد بود در نتیجه $2 \leq \chi_d^t(G) \leq n$ می‌باشد. حال اگر گراف ما دوبخشی کامل باشد پس می‌توانیم راس‌هایش را به دو مجموعه مجزای (V_1, V_2) تقسیم کنیم به‌طوری که هیچ دو راسی که در یک مجموعه قرار دارند با هم مجاور نباشند، در این صورت برای رنگ‌آمیزی این گراف ۲ رنگ کافی است و از آنجایی که این گراف دو بخشی کامل است پس به ازای هر راس $v \in V_1$ ، تمامی راس‌های موجود در بخش V_2 با آن مجاور است در این صورت این رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی نیز هست لذا $\chi_d^t(G) = 2$ خواهد بود. حال فرض کنید گراف ما گراف کامل K_n باشد پس هر راس این گراف با تمامی رئوس دیگر مجاور است و لذا طبق تعریف رنگ‌آمیزی، برای رنگ‌آمیزی این گراف به تعداد رئوس گراف یعنی به n رنگ احتیاج داریم و از آنجایی که هر راس از این گراف با تمام رئوس دیگر مجاور است پس این رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی نیز خواهد بود لذا $\chi_d^t(G) = n$ می‌باشد. حال فرض کنید $\chi_d^t(G) = 2$ بوده و $f = (v_1, v_2)$ یک $\chi_d^t(G)$ -رنگ‌آمیزی باشد به‌طوری که برای $i = 1, 2$ داشته باشیم $V_i = \{v \in V(G) | f(v) = i\}$. پس مجموعه‌ی $V(G) = V_1 \cup V_2$ خواهد بود و از آنجایی که V_1 و V_2 کلاس‌رنگی هستند و مستقل می‌باشند لذا G دوبخشی است و از طرفی طبق فرض f یک $\chi_d^t(G)$ رنگ‌آمیزی می‌باشد لذا به ازای هر راس، یک کلاس‌رنگ وجود دارد که توسط آن راس احاطه شود و از طرفی گراف G فاقد راس تنه‌است لذا گراف ما دوبخشی کامل خواهد بود.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $\chi_d^t(G) = n$ باشد آن‌گاه G گراف کامل K_n است. فرض کنید $G \neq K_n$ و $\chi_d^t(G) = n$ باشد و فرض کنید f یک $\chi_d^t(G)$ -رنگ‌آمیزی باشد. اگر $n = 1$ باشد پس گراف G ، شامل تنها یک راس خواهد بود ولی ما راس تنها نداریم و اگر $n = 2$ باشد، در این صورت G برابر با K_2 خواهد بود که گراف کامل است پس فرض می‌کنیم که $n \geq 3$ باشد. حال اگر هر n رنگ در رنگ‌آمیزی گراف G آمده باشد، از آنجایی که گراف ما K_n نیست پس رئوسی وجود دارد که مجاور نیستند. فرض کنید راسی مانند x وجود داشته باشد که $\deg_G(x) = 1$ باشد و α عضوی دلخواه از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\} - \{f(x)\}$ باشد. با تعریف تابعی مانند g بر روی $V(G)$ به‌صورت زیر

$$g(v) = \begin{cases} f(v) & \text{اگر } v \neq x \text{ باشد,} \\ \alpha & \text{اگر } v = x \text{ باشد.} \end{cases}$$

تابع g یک TDC با $n - 1$ کلاس‌رنگ است چون اولاً g مجاز است به این دلیل که اگر $v \neq x$ باشد f را داریم که مجاز بوده و اگر $v = x$ باشد، از آنجایی که برای رنگ‌آمیزی هر راس یک رنگ مجزا استفاده شده، از بین رنگ‌های استفاده شده‌ی غیر مجاور می‌توان رنگ α را انتخاب نمود. ثانیاً g یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی است چون f یک TDC بود و فرض شده که برای $v = x$ هم یک کلاس‌رنگی یافت می‌شود به‌طوری که احاطه‌گر کلی باشد لذا g یک TDC با $n - 1$ رنگ خواهد بود پس $\chi_d^t(G) < n$ می‌باشد که تناقض است بنابراین $\delta(G) \geq 2$ می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم u و u' دو راس غیر مجاور از گراف G باشند. تابع h را روی $V(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(v) = \begin{cases} f(v) & \text{اگر } v \neq u \text{ باشد,} \\ f(u') & \text{اگر } v = u \text{ باشد.} \end{cases}$$

در این صورت h یک TDC با $n - 1$ رنگ خواهد بود. چون اولاً مجاز است چون f مجاز بود و ثانیاً

h یک TDC است لذا h هم TDC می باشد ولی از آن جایی که در تعریف تابع h ، دو راس u و u' رنگ یکسانی می گیرند لذا یک رنگ کم می شود و h یک رنگ آمیزی احاطه گرکی با $n - 1$ رنگ خواهد بود. پس $\chi_d^t(G) < n$ بوده و به تناقض می رسیم. لذا $G = K_n$ می باشد. $\square$

فرض کنید S ، مجموعه ای از راس های مستقل از گراف $G = (V, E)$ باشد به طوری که زیرگراف القایی $G[V - S]$ فاقد راس تنها باشد و یا هر راس تنها در آن با همه رئوس S همسایه باشد و $\alpha_0(G)$ را بزرگترین مجموعه ای S در گراف G در نظر می گیریم. حال با این تعریف و نمادگذاری، قضیه زیر را مطرح می کنیم.

قضیه ۳.۴.۳. [۹] فرض کنید G گرافی همبند، از مرتبه n و فاقد راس تنها باشد. آن گاه داریم:

$$\chi_d^t(G) \leq n + 1 - \alpha_0(G)$$

برهان. فرض کنید S یک مجموعه از راس های مستقل در G باشد به طوری که زیرگراف القایی $G[V(G) - S]$ دارای راس تنها نباشد و یا هر راس تنها در آن با همه رئوس مجاور باشد، قرار می دهیم $|S| = \alpha_0(G)$. اگر $n - \alpha_0(G)$ رنگ را به $n - \alpha_0(G)$ راس از رئوس اختصاص دهیم، این رنگ آمیزی مجاز است چون هر راس، رنگی متمایز از بقیه رئوس دریافت کرده است و چون S از رئوس مستقل تشکیل شده است لذا راس های آن ها با هم مجاور نیستند پس می توانند یک رنگ دریافت کنند به این ترتیب به رئوس G به تعداد $n + 1 - \alpha_0(G)$ رنگ اختصاص پیدا کرده است. این رنگ آمیزی مجاز است و چون در هر $n - \alpha_0(G)$ کلاس رنگی یک راس وجود دارد و طبق تعریف $G[V - S]$ ، تمام رئوس مجاورند و اگر راس تنها داشته باشیم آن راس در کلاس رنگی $n + 1 - \alpha_0(G)$ دارای مجاور می باشد، لذا این رنگ آمیزی، TDC است و از آن جایی که در رنگ آمیزی رئوس $G[V(G) - S]$ ، بیشترین تعداد رنگ ممکن را استفاده کرده ایم لذا عدد رنگی احاطه گرکی گراف G کمتر یا مساوی مقدار $n + 1 - \alpha_0(G)$ خواهد بود. $\square$

قضیه بعد یک کران بالای دقیق برای عدد رنگی احاطه گرکی از یک گراف همبند را ارائه می دهد. در اصطلاح این کران، عدد احاطه گرکی و عدد رنگی زیرگراف القایی آن گراف می باشد.

قضیه ۴.۴.۳. [۹] فرض کنید G گرافی همبند و فاقد راس تنها باشد، آن گاه داریم:

$$\chi_d^t(G) \leq \gamma_t(G) + \min_S \chi(G[V(G) - S])$$

که $S \subseteq V(G)$ بوده و یک مجموعه ای $\gamma_t(G)$ عضوی است. همچنین این کران، کرانی دقیق می باشد.

برهان. فرض کنید

$$l = \min\{\chi(G[V(G) - S]) \mid S \text{ مجموعه ای } \gamma_t \text{ عضوی باشد}\}$$

و $D = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ یک مجموعه ای γ_t عضوی بوده به طوری که $\chi(G[V(G) - D]) = l$ باشد و نیز فرض کنید

$$f : V(G) - D \longrightarrow \{1, 2, \dots, l\}$$

یک رنگ آمیزی مجاز برای $G[V(G) - D]$ باشد. حال تابع g را به صورت

$$g : V(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, l + m\}$$

تعریف می کنیم به طوری که برای هر راس v داریم:

$$g(v) = \begin{cases} l + i & \text{اگر } v = v_i \in D \text{ باشد,} \\ f(v) & \text{اگر } v \notin D \text{ باشد.} \end{cases}$$

در این صورت D یک TDS برای G و g یک TDC برای G می باشد. طبق فرض مجموعه D یک مجموعه γ_t عضوی است، طبق تعریف تابع g ، هر راس متعلق به مجموعه D ، رنگی متفاوت از سایر رئوس این مجموعه را داراست، پس برای هر راس مجاورتی وجود دارد، از طرفی رئوسی که متعلق به مجموعه D ، نیستند رنگ $f(v)$ را می پذیرند که رنگ آمیزی تحت تابع f مجاز بود و رنگ $l + i$ را نمی پذیرند و این مطلب بیانگر این است که این رئوس حتما دارای مجاورتی در مجموعه D ، هستند. لذا مجموعه D ، یک TDS می باشد. از آن جایی که f یک رنگ آمیزی مجاز بود لذا g نیز به ازای $v \notin D$ مجاز است و چون رئوس متعلق به مجموعه D ، با $l + i$ رنگ مجزا، رنگ می شوند که بر این اساس اعضای مجموعه D رنگ های مجزا می پذیرند پس g یک رنگ آمیزی احاطه گر کلی می باشد. بنابراین تابع g یک TDC است و چون عدد رنگی احاطه گر کلی گراف G همواره کمتر یا مساوی تعداد رنگ های استفاده شده در هر رنگ آمیزی ارائه شده برای گراف G می باشد پس داریم:

$$\chi_d^t(G) \leq m + l = \gamma_t(G) + \min\{\chi(G[V(G) - S]) \mid S \text{ مجموعه ای عضو } \gamma_t \text{ است}\}$$

نشان می دهیم که این کران برای گراف K_n از مرتبه $3 \leq n$ و گراف p -بخشی کامل $K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}$ که $p \geq 3$ باشد و همین طور برای گراف W_n از مرتبه $4 \leq n + 1$ که n زوج باشد، دقیق است. یعنی حالت تساوی برقرار است.

در گراف K_n ، عدد رنگی احاطه گر کلی برابر n و عدد احاطه گر کلی برابر 2 می باشد، بر این اساس مجموعه S را به صورت دو عضوی در نظر می گیریم و گراف $V(K_n) - S$ را تشکیل می دهیم که دارای $n - 2$ راس می باشد، که گرافی کامل است. پس به ازای هر مجموعه S دو عضوی، زیرگراف $V(K_n) - S$ ، کامل و دارای $n - 2$ راس بوده پس با $n - 2$ رنگ، رنگ آمیزی می شود که مینیمم این تعداد همان $n - 2$ می باشد، در نتیجه داریم:

$$\chi_d^t(K_n) = \gamma_t(K_n) + \min_S \chi(G[V(K_n) - S])$$

$$n = 2 + \min\{n - 2, n - 2, \dots, n - 2\}$$

$$\implies n = n$$

به همین ترتیب برای گراف p -بخشی کامل $K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}$ ، عدد رنگی احاطه گر کلی برابر p می باشد. در این گراف دوبخش، دارای تنها یک راس است و چون این گراف، گرافی کامل است لذا تمامی رئوس مجاورند، لذا به ازای هر دو راس دلخواه، تمام رئوس احاطه خواهند شد. بر این اساس مجموعه S

را به صورت دوعضوی در نظر می گیریم و گراف $V(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) - S$ را تشکیل می دهیم. حال سه حالت اتفاق می افتد:

اگر دو راس انتخابی متعلق به بخش هایی باشند که تک راس هستند در این صورت زیرگراف $V(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) - S$ شامل $p - 2$ بخش خواهد بود و در نتیجه $p - 2$ رنگ را می پذیرد و اگر یکی از دو راس انتخابی، از بخش هایی باشد که شامل یک راس و راس دیگر از سایر بخش ها باشد، در این صورت زیرگراف $V(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) - S$ شامل $p - 1$ بخش خواهد بود و در نتیجه $p - 1$ رنگ را می پذیرد و اگر دو راس انتخابی از بخش هایی باشد که بیش از یک راس دارند، در این صورت زیرگراف $V(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) - S$ شامل p بخش خواهد بود و لذا p رنگ را می پذیرد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\chi_d^t(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) = \gamma_t(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) + \min_S \chi(G[V(K_{1,1,n_1,\dots,n_{p-2}}) - S])$$

$$p = 2 + \min\{p, p - 1, p - 2\}$$

$$\implies p = p$$

برای گراف W_n با n زوج به صورت زیر عمل می کنیم:

گراف W_n تشکیل شده از یک راس در مرکز چرخ که به تمام رئوس مجاور است و یک دور، که اگر مرتبه گراف چرخ، زوج باشد پس مرتبه دور، فرد خواهد بود و بالعکس. پس $\chi_d^t(W_n)$ برابر است با $1 + \chi(C_n)$ که برای W_n از مرتبه زوج، برابر ۴ خواهد بود.

حال با استفاده از صورت قضیه ۴.۴.۳، تساوی را نشان می دهیم.

در هر گراف W_n ، راس مرکزی با تمامی رئوس دیگر مجاور است پس برای انتخاب رئوسی که احاطه گرکلی باشند، کافی است راس مرکزی و یک راس دیگر از سایر رئوس را انتخاب کنیم پس $\gamma_t(W_n) = 2$ می باشد و مجموعه S دو عضوی خواهد بود. با حذف این دو راس از گراف، مسیر P_n را خواهیم داشت که با دو راس به صورت مجاز رنگ آمیزی خواهد شد لذا

$$\chi_d^t(W_n) = 2 + 2 = 4$$

□

و تساوی را نشان دادیم.

نتیجه ۱.۴.۳. [۹] اگر G گراف p -بخشی، همبند و فاقد راس تنها باشد آن گاه:

$$\chi_d^t(G) \leq \gamma_t(G) + p$$

در قضیه بعد کران بالای دیگری برای عدد رنگی احاطه گرکلی یک گراف همبند p -بخشی ارائه می دهیم.

قضیه ۵.۴.۳. [۹]

فرض کنید G یک گراف p -بخشی همبند از مرتبه n باشد که اعداد $n_1, n_2, \dots, n_p$ اندازه ی مجموعه های مستقل آن باشند. اگر برای برخی از i ها $\delta(G) \geq n_i$ باشد آن گاه $\chi_d^t(G) \leq n - n' + 1$ است به طوری که $n' = \max\{n_i | \delta(G) \geq n_i\}$ می باشد.

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند p -بخشی از مرتبه n باشد که به مجموعه‌های مستقل $V_1, \dots, V_p$ و به ترتیب با اندازه‌های $n_1, \dots, n_p$ افراز شده باشد و طبق تعریف n' ، وجود دارد i ای که $n' = n_i$ باشد. طبق فرض n_i اندازه مجموعه مستقل V_i می‌باشد.

لذا به راس‌های $V(G) - V_i$ ، رنگ‌های $1, 2, \dots, n - n_i$ را اختصاص می‌دهیم که در این صورت هر راس یک رنگ می‌پذیرد و به رئوس موجود در V_i رنگ $n - n_i + 1$ را اختصاص می‌دهیم. از آنجایی که رئوس موجود در هر بخش مستقل بودند پس رنگ‌آمیزی رئوس بخش V_i که یک رنگ مشترک دارند مجاز می‌باشد و بقیه رئوس هم که هر یک دارای یک رنگ مجزا هستند پس در حالت کلی رنگ‌آمیزی مجاز می‌باشد.

از طرفی گراف ما دارای راس تنها نیست پس هر راس حداقل به یک راس دیگر متصل است و چون هر راس بجز کلاس V_i ، دارای یک رنگ مجزا می‌باشد پس هر راس یک کلاس رنگ را احاطه می‌کند. برای رئوس $v \in V_i$ ، چون گراف همبند است، به تعداد $n - n_i$ کلاس رنگ وجود دارد که هر راس متعلق به V_i حداقل با یکی از این کلاس‌ها مجاور هستند پس این رنگ‌آمیزی یک TDC می‌باشد از این‌رو $\chi_d^t(G) \leq n - n' + 1$ می‌باشد. $\square$

توجه کنید که اگر گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی f با $\chi_d^t(G)$ رنگ باشد که کلاس رنگی تک عضوی نداشته باشد، در این صورت f یک DC هم خواهد بود و بنابراین $\chi_d^t(G) = \chi_d(G)$ می‌باشد. گزاره بعد نشان می‌دهد که این شرط برای برقراری تساوی $\chi_d^t(G) = \chi_d(G)$ یک شرط لازم نیست.

گزاره ۱.۴.۳. [۹] فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه n و فاقد راس تنها باشد. اگر $\Delta(G) = n - 1$ باشد آن گاه داریم:

$$\chi_d^t(G) = \chi_d(G) = \chi(G)$$

برهان. فرض کنید $f = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ یک رنگ‌آمیزی مجاز برای G باشد که $\chi(G) = m$ و $V_1 = \{v\}$ است که راس v از درجه $n - 1$ می‌باشد. در این صورت برای هر راس w که $w \in V(G) - V_1$ باشد داریم $w \succ_t V_1$ و همچنین برای هر $2 \leq i \leq m$ داریم $v \succ_t V_i$. به عبارتی راس v تمام رئوس دیگر را احاطه می‌کند و بقیه رئوس هم، همگی راس v را احاطه می‌کنند بنابراین f یک TDC با $\chi(G)$ کلاس رنگ می‌باشد. لذا $\chi_d^t(G) \leq \chi(G)$ می‌باشد. از طرفی از مشاهدۀ ۱.۴.۳ داریم:

$$\max\{\chi_d, \gamma_t\} \leq \chi_d^t \leq n$$

که به این ترتیب $\chi_d \leq \chi_d^t \leq \chi$ خواهد بود. و از طرفی طبق تعریف ?? داریم، $\chi \leq \chi_d$ پس $\chi_d^t \leq \chi \leq \chi_d$ خواهد بود. در نتیجه با توجه به مطالب گفته شده داریم:

$$\chi = \chi_d = \chi_d^t$$

$\square$

نتیجه ۲.۴.۳. [۹] فرض کنید G گرافی همبند، فاقد راس تنها و از مرتبه n باشد. اگر $\Delta(G) = n - 1$ و $v_1, \dots, v_l$ همه ی رئوس از درجه $1 - n$ باشند آن گاه داریم:

$$\chi_d^t(G) = l + \chi(G[V - \{v_1, \dots, v_l\}])$$

۵.۳ عدد رنگی احاطه گرکی برخی از گراف ها

به وضوح عدد رنگی احاطه گرکی گراف p -بخشی کامل برابر p می باشد. در این بخش این عدد را برای برخی از کلاس های دیگر از گراف ها محاسبه خواهیم کرد.

گزاره ۱.۵.۳. [۹] فرض کنید W_n یک چرخ از مرتبه ی $4 \leq n + 1$ باشد آن گاه داریم:

$$\chi_d^t(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 4 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

برهان. این گراف در شرایط نتیجه ۲.۴.۳ صدق می کند، چون اولاً گرافی همبند و فاقد راس تنها و از درجه n است و از طرفی $\Delta(G) = n - 1$ برای راس داخلی چرخ برقرار است. لذا $l = 1$ می باشد و داریم $\chi_d^t(W_n) = 1 + \chi(G[V - \{a\}])$ ، که با برداشتن راس داخلی چرخ به دوری با $1 - n$ راس می رسیم. پس می توان نوشت $\chi_d^t(W_n) = 1 + \chi(C_n)$. از طرفی رنگ آمیزی دورها بستگی به زوج یا فرد بودن تعداد رئوس دارد، اگر تعداد رئوس زوج باشد که با دو رنگ قابل رنگ آمیزی خواهند بود اما برای n های فرد، که در این صورت با رنگ آمیزی یک در میان رئوس، یک راس باقی می ماند که باید رنگ جدید بگیرد پس برای تعداد رئوس فرد به سه رنگ احتیاج داریم. لذا

$$\chi_d^t(W_n) = 1 + \chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 4 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

□

گزاره ۲.۵.۳. [۹] فرض کنید C_n دوری به طول $3 \leq n$ باشد به این ترتیب

$$\chi_d^t(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } n = 4 \text{ باشد} \\ 4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + r & \text{اگر } n \neq 4 \text{ و برای } r = 0, 1, 2, 4 \text{ داشته باشیم } n \equiv r \pmod{6} \text{ (به پیمانه ۶)} \\ 4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + r - 1 & \text{اگر } n \equiv r \pmod{6} \text{ و } r = 3, 5 \text{ (به پیمانه ۶)} \end{cases}$$

برهان. اگر تعداد رئوس در گراف C_n ، برابر چهار باشد، پس دور C_4 را داریم در این صورت می توان به هر دو راس غیر مجاور، یک رنگ مشترک داد. این رنگ آمیزی مجاز است زیرا رئوس مجاور دارای رنگ های متفاوت اند و نیز برای هر راس یک کلاس رنگ وجود دارد که توسط آن راس احاطه شود پس یک رنگ آمیزی احاطه گرکی با دو رنگ خواهیم داشت.

حال فرض کنید $V(C_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ و $v_i v_j \in E(C_n)$ اگر و تنها اگر $j \equiv i + 1$ و به

پیمانه n باشد. ادعا می‌کنیم که در هر TDC برای C_n ، حداقل چهار رنگ جهت رنگ کردن هر شش راس متوالی مورد نیاز است. فرض کنید $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}$ ، شش راس متوالی باشند در این صورت برخی از رنگ‌ها مانند a ، حداقل به دو راس باید اختصاص داده شوند، ما رنگ a و b را به ترتیب به راس‌های v_{i+1} و v_{i+2} و v_i تخصیص می‌دهیم و می‌توانیم رنگ b را به راس v_{i+3} اختصاص دهیم و یا این‌که به روشی دیگر این راس را رنگ کنیم، در هر حالت به حداقل دو رنگ جدید مثل c و d نیاز داریم تا رئوس باقی‌مانده را رنگ کنیم زیرا بوسیله رنگ‌های جدید c و d ، در حالت اول می‌توان رنگ c را به راس v_{i+4} و رنگ d را به راس v_{i+5} تخصیص داد و در حالت دوم می‌توان رنگ‌های c و d و c را به ترتیب به راس‌های v_{i+5} و v_{i+4} و v_{i+3} اختصاص دهیم بنابراین ادعای ما ثابت شد. توجه کنید که هر شش راس متوالی را به وسیله چهار رنگ a و b و c و d به یکی از روش‌های زیر می‌توان رنگ کرد.

رنگ اول: a, b, a, b, c, d دوم: a, b, a, c, d, c

در روش اول داریم:

$$v_{i+1} \in pn(V_a : f), v_{i+2} \in pn(V_b : f), v_{i+3} \in pn(V_c : f), v_{i+4} \in pn(V_d : f)$$

در روش دوم داریم:

$$v_{i+1} \in pn(V_a : f), v_{i+2} \in pn(V_b : f), v_{i+4} \in pn(V_c : f), v_{i+3} \in pn(V_d : f)$$

برای کامل کردن اثبات شش حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت صفر: $n \equiv 0$ به پیمانه شش.

در این صورت تعداد رئوس مضربی از شش است، طبق مطالب بالا برای رنگ‌آمیزی هر شش راس متوالی به چهار رنگ نیاز داریم پس برای هر شش راس متوالی این رنگ‌آمیزی را ادامه می‌دهیم. فرض کنید f یک رنگ‌آمیزی مجاز باشد که از روش اول یا دوم به دست آمده باشد به این ترتیب f یک TDC برای C_n با مینیمم مقدار $4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ کلاس رنگ می‌باشد.

حالت اول: $n \equiv 1$ به پیمانه شش.

در این صورت تعداد رئوس برای $k \geq 1$ برابر $n = 6k + 1$ می‌باشد. فرض کنید f یک TDC روی $C_n \setminus \{v_n\}$ باشد که در حالت صفر داده شده در این صورت برای رنگ‌آمیزی راس v_n به یک رنگ جدید نیاز داریم، پس با اختصاص دادن رنگ جدید به راس v_n ، یک TDC روی C_n با مینیمم مقدار $4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ کلاس رنگ داریم.

حالت دوم: $n \equiv 2$ به پیمانه شش.

در این صورت تعداد رئوس برای $k \geq 1$ برابر $6k + 2$ می‌باشد. فرض کنید f یک TDC روی $C_n \setminus \{v_{n-1}, v_n\}$ باشد. لذا برای رنگ کردن این دو راس، به دو رنگ جدید نیاز داریم با اختصاص دادن دو رنگ به این رئوس یک TDC روی C_n با مینیمم مقدار $4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$ خواهیم داشت.

حالت سوم: $n \equiv 3$ به پیمان سه ش.

در این حالت تعداد رئوس برای $k \geq 1$ برابر $6k + 3$ می باشد. فرض کنید f یک TDC روی $C_n - \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ باشد. از آن جایی که رئوس v_{n-2} و v_n مجاور نیستند لذا برای رنگ آمیزی سه راس باقی مانده، دو رنگ کافی خواهد بود با رنگ های جدید θ و ε می توان رئوس v_{n-2} و v_{n-1} را به ترتیب به صورت ε و θ و رنگ آمیزی کرد لذا یک TDC روی C_n با مینیمم مقدار $2 + 4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ کلاس رنگ ارائه دادیم.

حالت چهارم: $n \equiv 4$ به پیمان سه ش.

در این حالت تعداد رئوس برای $k \geq 1$ برابر $6k + 4$ می باشد. فرض کنید f یک TDC روی $C_n - \{v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ باشد. از آن جایی که این چهار راس یک دور C_4 نمی سازند پس نمی توانند با دو رنگ، رنگ آمیزی شوند پس حداقل سه رنگ مورد نیاز خواهد بود، حال اگر به رئوس v_{n-3} و v_{n-1} یک رنگ بدهیم و به هر یک از رئوس v_n و v_{n-2} رنگی مجزا بدهیم در این صورت یک رنگ آمیزی مجاز داریم ولی احاطه گر کلی نیست چون برای راس v_n کلاس رنگی وجود ندارد که توسط راس v_n احاطه شود به عبارتی برای سه راس از چهار راس، با دو رنگ می توان یک رنگ آمیزی احاطه گر کلی ارائه داد ولی در این صورت یک راس باقی مانده که هیچ کلاس رنگی را احاطه نمی کند لذا این چهار راس نمی توانند با سه رنگ، رنگ آمیزی شوند پس برای رنگ آمیزی به چهار رنگ نیاز داریم که به هر راس یک رنگ مجزا اختصاص دهیم لذا یک TDC روی C_n با مینیمم مقدار $4 + 4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ کلاس رنگی خواهیم داشت.

حالت پنجم: $n \equiv 5$ به پیمان سه ش.

در این حالت تعداد رئوس برای $k \geq 1$ برابر $6k + 5$ می باشد. فرض کنید f یک TDC روی $C_n - \{v_{n-4}, v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ باشد، پنج راس داریم که باید رنگ آمیزی شوند، این پنج راس را به صورت سه راس جدا و دو راس جدا در نظر می گیریم. طبق حالت سوم، برای رنگ آمیزی سه راس به دو رنگ نیاز داریم و طبق حالت دوم برای رنگ آمیزی دو راس هم به دو رنگ احتیاج داریم پس برای رنگ آمیزی این پنج راس به چهار رنگ نیاز خواهیم داشت، اگر این چهار رنگ را به صورت π و ς و θ و ε در نظر بگیریم، در این صورت به رئوس v_n و v_{n-1} و v_{n-2} و v_{n-3} و v_{n-4} به ترتیب رنگ های ε و θ و π و ς و π را اختصاص می دهیم. لذا یک TDC روی C_n با مینیمم مقدار $4 + 4\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ کلاس رنگ ارائه دادیم.

□

گزاره ۳.۵.۳. [۹] فرض کنید P_n یک مسیر با طول $n \geq 2$ باشد. آن گاه:

$$\chi_d^t(P_n) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 & \text{اگر } n \equiv 1 \text{ (به پیمان سه)، باشد} \\ 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $V(P_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ و $v_i v_j \in E(P_n)$ اگر و تنها اگر $j = i + 1$ باشد و $f = (V_1, V_2, \dots, V_l)$ را یک TDC روی P_n در نظر بگیرید. درجه هر راس در P_n ، یک و یا دو

می باشد، از آن جایی که با پیمان سه کار می کنیم و باقی مانده هر عددی به پیمان سه برابر صفر و یا یک و یا دو می باشد، در ادامه نشان می دهیم که اگر تعداد رئوس P_n ، سه یا چهار و یا پنج باشد به ترتیب به حداقل دو، سه و چهار رنگ نیاز خواهیم داشت زیرا به ازای $1 < i < n$ درجه راس v_i برابر دو خواهد بود و در غیر این صورت درجه راس، برابر یک می باشد. لذا کلاس هایی مانند V_j که $1 \leq j \leq l$ می باشد، وجود خواهند داشت که شامل دو راس غیر مجاور به صورت $V_j = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ و همین طور به ازای $1 \leq j < k \leq l$ کلاس هایی به صورت $v_{i+1} \in V_k$ و $v_{i-1} \in V_j$ وجود دارند که در این صورت، $|V_k| = 1$ و $|V_j| = 1$ می باشند. لذا $V(P_n)$ به زیر مجموعه هایی با سه راس متوالی افزاز می شود به طوری که رنگ های a و b و a می گیرند و یا به زیر مجموعه هایی با چهار راس متوالی که رنگ های a و c و b و a به آن ها اختصاص داده می شود و یا زیر مجموعه هایی با پنج راس متوالی به طوری که به ترتیب یکی از رنگ آمیزی های d و c و a و b و a و d و c و b و a را می پذیرد که در هر حالت، رنگ آمیزی مجاز است.

حال اگر $n \equiv 0$ (به پیمان سه)، باشد پس $V(P_n)$ ، طبق مطالب گفته شده به زیر مجموعه هایی با سه راس متوالی افزاز می شوند، در این حالت تابعی مانند f روی $V(P_n)$ تعریف می کنیم به طوری که برای هر راس v_i داریم:

$$f_0(v_i) = \begin{cases} 1 + 2k & \text{اگر } i = 1 + 3k \text{ یا } i = 3 + 3k \text{ باشد} \\ 2 + 2k & \text{اگر } i = 2 + 3k \text{ باشد} \end{cases}$$

وقتی که $0 \leq k \leq \frac{n}{3} - 1$ باشد.

طبق ضابطه اول این تابع به ازای یک k مشخصی، دو اندیس متفاوت که تفاوت شان دو واحد می باشد، رنگ یکسانی می گیرند و طبق ضابطه دوم به ازای همان k مشخص، اندیسی که بین دو اندیس بالا قرار دارد رنگی مجزا می گیرد و این روند برای هر k جدید تکرار می شود به عبارتی به ازای هر k ، سه راس متوالی رنگ آمیزی می شود که راس وسط، رنگی مجزا و رئوس مجاور آن که البته باهم مجاور نیستند، رنگ های یکسان می گیرند. لذا این رنگ آمیزی مجاز می باشد و از طرفی به ازای هر k ای که سه راس متوالی رنگ آمیزی شود، دو راس دارای رنگ یکسان می توانند راس بین خود را که رنگی مجزا دارد، احاطه کنند و راس وسط هم می تواند رئوس مجاور خود که دارای رنگی یکسان هستند را احاطه کند پس f یک TDC روی P_n با کمترین تعداد $2\lceil \frac{n}{3} \rceil$ کلاس رنگ می باشد.

اگر $n \equiv 1$ (به پیمان سه)، باشد. در این حالت تابعی مانند f_1 روی $V(P_n)$ تعریف می کنیم به طوری که برای هر راس v_i داریم:

$$f_1(v_i) = \begin{cases} 1 + 2k & \text{اگر } i = 1 + 3k \text{ یا } i = 3 + 3k \text{ باشد} \\ 2 + 2k & \text{اگر } i = 2 + 3k \text{ باشد} \end{cases}$$

وقتی که $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$ باشد و همچنین داشته باشیم

$$f_1(v_{n-3}) = f_1(v_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, f_1(v_{n-2}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, f_1(v_{n-1}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1.$$

با توجه به قسمت اول تابع f_1 که یک تابع دوضابطه ای می باشد، به ازای هر k ای که انتخاب کنیم، همانند حالت همنهشتی با صفر، رئوس P_n به صورت زیر مجموعه هایی با سه راس متوالی، رنگ آمیزی

می‌شوند که این رنگ‌آمیزی یک TDC می‌باشد ولی طبق کرانی که برای k تعریف شد، چهار راس متوالی باقی می‌ماند که توسط تابع دوضابطه‌ای رنگ‌آمیزی نمی‌شود و باید از قسمت دوم تابع f_1 که روابط زیر می‌باشد، برای رنگ‌آمیزی آن چهار راس متوالی استفاده کرد.

$$f_1(v_{n-3}) = f_1(v_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \quad f_1(v_{n-2}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \quad f_1(v_{n-1}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1.$$

باتوجه به این روابط، رئوس v_n و v_{n-3} که ابتدا و انتهای، این چهار راس متوالی باقی‌مانده می‌باشند، رنگی یکسان می‌گیرند و دو راس متوالی بین‌شان یعنی v_{n-2} و v_{n-1} هر کدام رنگی مجزا می‌گیرند که بر این اساس رئوس مجاور دارای رنگ‌های مجزا خواهند بود و از طرفی رئوس v_{n-2} و v_{n-1} می‌توانند همدیگر را احاطه کنند و رئوس ابتدا و انتها در این چهار راس متوالی که دارای رنگی یکسان هستند به ترتیب می‌توانند راس بعد از خود و راس قبل از خود را احاطه کنند. لذا f_1 یک TDC روی P_n با کمترین تعداد $2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ کلاس رنگ می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $n \equiv 2$ (به پیمانه سه) باشد. اگر $n = 2$ باشد که در این صورت $P_2 = K_2$ خواهد بود و $\chi_d^t(P_2) = 2$ می‌باشد. لذا فرض می‌کنیم $n = 5$ باشد که در ابتدای اثبات توضیح دادیم که در این حالت به چهار رنگ نیاز خواهیم داشت، که این رنگ‌ها می‌توانند به صورت a, b, a, c, d و یا a, b, c, d, a اختصاص داده شوند. از این رو فرض می‌کنیم $n \geq 8$ باشد. تابع f_2 را روی $V(P_n)$ تعریف می‌کنیم به طوری که برای هر راس v_i داریم:

$$f_2(v_i) = \begin{cases} 1 + 2k & \text{اگر } i = 1 + 3k \text{ یا } i = 3 + 3k \text{ باشد} \\ 2 + 2k & \text{اگر } i = 2 + 3k \text{ باشد} \end{cases}$$

وقتی که $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$ و

$$f_2(v_{n-4}) = f_2(v_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \quad f_2(v_{n-3}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor,$$

$$f_2(v_{n-2}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, \quad f_2(v_{n-1}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$$

باشد.

با توجه به قسمت اول تابع f_2 که یک تابع دوضابطه‌ای می‌باشد، به ازای هر k ای که انتخاب کنیم، همانند حالت همنهشتی با صفر، رئوس P_n به صورت زیر مجموعه‌هایی با سه راس متوالی، رنگ‌آمیزی می‌شوند که این رنگ‌آمیزی یک TDC می‌باشد ولی مانند قسمت قبل، طبق کرانی که برای k تعریف شد، پنج راس متوالی باقی می‌ماند که توسط تابع دوضابطه‌ای رنگ‌آمیزی نمی‌شود و باید از قسمت دوم تابع f_2 که روابط زیر می‌باشد، برای رنگ‌آمیزی آن پنج راس متوالی استفاده کرد

$$f_2(v_{n-4}) = f_2(v_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \quad f_2(v_{n-3}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor,$$

$$f_2(v_{n-2}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, \quad f_2(v_{n-1}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$$

باتوجه به این روابط، رئوس v_n و v_{n-4} که ابتدا و انتهای، این چهار راس متوالی باقی‌مانده می‌باشند، رنگی یکسان می‌گیرند و سه راس متوالی بین‌شان یعنی v_{n-3} و v_{n-2} و v_{n-1} هر کدام رنگی مجزا

می گیرند که بر این اساس رئوس مجاور دارای رنگ های مجزا خواهند بود و از طرفی رئوس v_{n-1} و v_{n-2} و همچنین v_{n-2} و v_{n-3} می توانند همدیگر را احاطه کنند و رئوس ابتدا و انتها در این پنج راس متوالی که دارای رنگی یکسان هستند به ترتیب می توانند راس بعد از خود و راس قبل از خود را احاطه کنند. لذا f یک TDC روی P_n با کمترین تعداد $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ کلاس رنگ می باشد. $\square$

گزاره ۴.۵.۳. [۹] فرض کنید $\bar{C}_n$ مکمل گراف C_n و از مرتبه $n \geq 4$ باشد، آن گاه

$$\chi_d^t(\bar{C}_n) = \begin{cases} 4 & \text{اگر } n = 4, 5 \text{ باشد} \\ \lceil \frac{n}{4} \rceil & \text{اگر } n \geq 6 \text{ باشد} \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $V(\bar{C}_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ و $v_i v_j \in E(\bar{C}_n)$ اگر و تنها اگر $j = i - 1, i + 1$ باشد.

اگر $n = 4, 5$ باشد در این صورت $\bar{C}_n$ به ترتیب با $2K_2$ و C_5 همریخت می باشد، از آن جایی که $\chi_d^t(K_2) = 2$ است لذا $\chi_d^t(2K_2) = 4$ می باشد و از طرفی با استفاده از حالت پنجم قضیه قبل $\chi_d^t(C_n)$ نیز برابر چهار می باشد لذا در هر دو حالت، $\chi_d^t(\bar{C}_n)$ خواهد بود.

حال فرض کنید $n \geq 6$ باشد. از آن جایی که درجه هر راس در گراف C_n برابر ۲ می باشد، لذا درجه هر راس در $\bar{C}_n$ بدون در نظر گرفتن راس مورد نظر، برابر $n - 2$ می باشد و یا به عبارتی هر راس در $\bar{C}_n$ با $n - 3$ راس مجاور است. در این گراف، ماکزیمم تعداد رئوسی که با هم مجاور نباشند، دو راس می باشد چون درجه هر راس $n - 3$ است پس هر راس بجز دو راس مجاورش با بقیه رئوس در ارتباط است و از آن جایی که رئوس مجاور این راس در $\bar{C}_n$ ، خود با هم مجاورند پس نمی توانند رنگ یکسانی بگیرند پس عدد استقلال گراف $\bar{C}_n$ برابر دو می باشد لذا برای هر TDC مانند $f = (V_1, V_2, \dots, V_l)$ از $\bar{C}_n$ ، به ازای هر i ، $|V_i| \leq 2$ می باشد. با توجه به اینکه n تا راس داریم و می دانیم که این n تا راس حداکثر به صورت دو عضوی باشند برابر $\frac{n}{2}$ می باشد و اگر کلاس های تک عضوی هم داشته باشیم، بخصوص اگر با n فرد کار کنیم حتما این اتفاق رخ می دهد که در این صورت تعداد کلاس ها از $\frac{n}{2}$ بیشتر خواهد بود لذا $\chi_d^t(\bar{C}_n) \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ می باشد. حال نشان می دهیم که برای این مقدار دقیقا تساوی برقرار می باشد. حال برای $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ فرض کنید $V_i = \{v_{2i}, v_{2i-1}\}$ باشد، با در نظر گرفتن $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ دقیقا تعداد مجموعه های دو عضوی بدست می آید، به این ترتیب اگر n زوج باشد می توانیم n را به صورت $2k$ در نظر بگیریم که k عددی صحیح می باشد. در این صورت $2k$ نیز عددی صحیح و زوج بوده و بر ۲ بخش پذیر می باشد، لذا مقدار سقف و کف آن تفاوتی ندارد. لذا $f = (V_1, V_2, \dots, V_{\lceil \frac{n}{4} \rceil})$ یک TDC از $\bar{C}_n$ با $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ کلاس رنگ می باشد و اگر n فرد باشد، یعنی یک راس تنها باقی می ماند که رنگی مجزا از سایر رئوس خواهد داشت در این صورت n را به صورت $2k + 1$ در نظر می گیریم، از آن جایی که این عدد به ۲ بخش پذیر نمی باشد و چون یک مجموعه تک عضوی داریم پس برای رنگ آمیزی رئوس به یک رنگ بیشتر از قبل نیاز داریم لذا می بایست سقف $\frac{n}{2}$ را در نظر بگیریم، پس $g = (V_1, V_2, \dots, V_{\lceil \frac{n}{4} \rceil}, \{v_n\})$ یک TDC از $\bar{C}_n$ با $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ کلاس رنگ خواهد بود. $\square$

گزاره ۵.۵.۳. [۹] فرض کنید $\bar{P}_n$ مکمل مسیر P_n و از مرتبه $n \geq 4$ باشد. آن گاه داریم:

$$\chi_d^t(\bar{P}_n) = \begin{cases} 3 & \text{اگر } n = 4 \text{ باشد} \\ \lceil \frac{n}{4} \rceil & \text{اگر } n \geq 5 \text{ باشد} \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $V(\bar{P}_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ و $v_i v_j \in E(\bar{P}_n)$ اگر و تنها اگر $\{i, j\} = \{1, n\}$ یا $j = i - 1, i + 1$ باشد.

با این تعریف به ازای $n = 4$ ، یال‌های $v_1 v_2$ و $v_1 v_3$ و $v_1 v_4$ را خواهیم داشت که تشکیل یک مسیر می‌دهند پس $\bar{P}_4 = P_4$ می‌باشد لذا با استفاده از گزاره ۳.۵.۳، نتیجه می‌گیریم که $\chi_d^t(\bar{P}_n)$ خواهد بود. حال فرض کنید $n \geq 5$ باشد. از آنجایی که درجه هر راس در گراف P_n برابر یک یا دو می‌باشد، لذا رئوسی که دارای درجه یک می‌باشند، در گراف $\bar{P}_n$ از درجه $n - 2$ خواهند بود و رئوسی که در گراف P_n از درجه دو باشند در گراف $\bar{P}_n$ از درجه $n - 3$ خواهند بود. پس رئوس گراف $\bar{P}_n$ یا از درجه $n - 2$ و یا $n - 3$ می‌باشند پس هر راس حداقل با $n - 3$ و حداکثر با $n - 2$ راس دیگر مجاور است. به عبارتی، رئوسی که با $n - 2$ راس دیگر مجاورند، با یک راس مجاورتی ندارند و رئوسی که با $n - 3$ راس مجاورند با دو راس مجاورتی ندارند لذا بیشترین انتخاب برای مجموعه مستقل از میان رئوس با $n - 3$ مجاورت خواهد بود ولی آن دو راسی که با راسی از درجه $n - 3$ مجاورت ندارند، خودشان با هم مجاورند لذا راس مورد نظر ما با تنها یک راس دیگر، تشکیل یک مجموعه مستقل را می‌دهد. پس در این گراف، ما کزیمم تعداد رئوسی که با هم مجاور نباشند برابر دو می‌باشد لذا عدداستقلال این گراف برابر دو می‌باشد و مشابه استدلال انجام شده در قضیه ۴.۵.۳، $\chi_d^t(\bar{P}_n) \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ می‌باشد. از طرف دیگر مانند قضیه ۴.۵.۳، به ازای n ‌های فرد و زوج، ثابت می‌شود که $\chi_d^t(\bar{P}_n) = \lceil \frac{n}{4} \rceil$ می‌باشد. $\square$

۶.۳ درخت‌ها

در این بخش عدد رنگی احاطه گرکی یک درخت را مورد بررسی قرار می‌دهیم، ابتدا تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۳. در یک گراف همبند G ، فاصله بین دو راس u و v به صورت $d_G(u, v)$ یا به اختصار $d(u, v)$ نشان داده می‌شود که عبارت است از کمترین طول یک u, v - مسیر.

تعریف ۲.۶.۳. در گراف همبند G ، یک قطر عبارت است از $\max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$ که با $diam(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۶.۳. گریز از مرکز برای راسی مانند u به صورت $\epsilon(u)$ نشان داده می‌شود که برابر است با $\max_{v \in V} d(u, v)$.

تعریف ۴.۶.۳. شعاع گراف G ، که با $rad(G)$ نشان داده می‌شود برابر است با $\min_{v \in V(G)} \epsilon(u)$.

تعریف ۵.۶.۳. مرکز گراف G عبارت است از زیرگراف القایی توسط رئوسی با مینیمم مرکزگریزی.

قضیه زیر در خصوص مرکز درخت، توضیح می‌دهد.

قضیه ۱.۶.۳. ([۱۶] Jordan) مرکز یک درخت، عبارت است از یک راس یا یک یال.

در یک درخت، یک برگ راسی از درجه یک است و همسایه‌ای از یک برگ با درجه بیشتر از یک را راس پشتیبان می‌نامند. مجموعه برگ‌های درخت T را با L و مجموعه رئوس پشتیبان را بوسیله S و اندازه این مجموعه‌ها را نیز با l و s نشان می‌دهند. مجموعه $S = \{v_i | 1 \leq i \leq s\}$ و مجموعه $L = \{u_i | 1 \leq i \leq l\}$ می‌باشد. همچنین σ ، تابعی روی مجموعه $\{1, 2, \dots, s\}$ می‌باشد که مجموعه اندیس‌های عضوهای S است به‌طوری‌که $\sigma(i) = j$ اگر u_i با v_j مجاور باشد. بنابراین $v_{\sigma(i)}$ ، راس پشتیبان متعلق به برگ u_i می‌باشد. ما بحث را با لم زیر آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۶.۳. [۹]

برای هر درخت T از مرتبه $n \geq 3$ ، $\chi_d^t(T) \geq s + 1$ می‌باشد.

برهان. طبق تعریف $N(u_i) = \{v_{\sigma(i)}\}$ می‌باشد، به‌عبارتی یک برگ فقط شامل یک همسایه می‌باشد که همان راس پشتیبان نام دارد و از آنجایی که طبق تعریف TDC ، برای هر راس باید یک کلاس‌رنگ وجود داشته باشد که توسط آن راس احاطه شود و یک برگ فقط به راس پشتیبان متصل است پس برای برگ‌ها فقط راس پشتیبان مربوطه وجود دارد که بتواند احاطه کند پس راس پشتیبان می‌باید دارای یک رنگ مجزا از سایر رئوس باشد و این مطلب برای هر راس پشتیبان برقرار می‌باشد پس به تعداد رئوس پشتیبان، کلاس‌رنگ خواهیم داشت و از طرفی برای رنگ‌آمیزی برگ‌ها، یک رنگ کافی است چون برگ‌ها با هم مجاور نیستند پس می‌توانند رنگی یکسان بگیرند. بنابراین $\chi_d^t(T) \geq s + 1$ خواهد بود. $\square$

گزاره ۱.۶.۳. [۹] فرض کنید T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد. اگر $diam(T) \leq 3$ باشد، داریم:

$$\chi_d^t(T) = s + 1$$

برهان. با توجه به شرط $diam(T) \leq 3$ ، نتیجه می‌گیریم که دو برگ مانند u_i و u_j وجود دارند که حداکثر فاصله بین‌شان سه می‌باشد پس مسیری مانند $u_i v_{\sigma(i)} v_{\sigma(j)} u_j$ و یا $u_i v_{\sigma(i)} u_j$ وجود دارد. در این صورت رئوس ما یا برگ‌اند و یا راس پشتیبان. که با توجه به لم ۱.۶.۳، هر راس پشتیبان رنگی مجزا از سایر رئوس می‌گیرد و همه برگ‌ها دارای رنگی یکسان‌اند لذا طبق لم ۱.۶.۳، $\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, V(T) - \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ (یک TDC از T می‌باشد لذا $\chi_d^t(T) = s + 1$ می‌باشد). $\square$

گزاره ۲.۶.۳. [۹] فرض کنید T درختی با مرکزیت C باشد اگر $diam(T) = 4$ باشد، داریم:

$$\chi_d^t(T) = \begin{cases} s + 1 & \text{اگر } V(C) \subseteq S, \\ s + 2 & \text{اگر } V(C) \not\subseteq S. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید T یک درخت با مرکزیت C و $diam = 4$ باشد. با توجه به شرط $diam = 4$ ، دو برگ مانند u_i و u_j وجود دارند که فاصله بین‌شان چهار و فاصله بین بقیه رئوس کمتر از این مقدار

باشد. طبق قضیه ۱.۶.۳، مرکز یک گراف، یک راس و یا یک یال می باشد و طبق تعریف ۵.۶.۳، مرکز گراف عبارت است از زیرگراف القایی توسط رئوسی با کمترین گریز از مرکز. یعنی رئوسی که با بقیه رئوس، دارای کمترین فاصله باشند که اگر تعداد این رئوس فقط یکی باشد پس مرکز گراف یک راس می باشد و اگر دوتا باشند، آن گاه مرکز گراف یک یال می باشد. با این توضیح از آنجایی که قطر گراف چهار می باشد لذا بین دو برگ، سه راس موجود است که در نتیجه فقط یک راس در بین این دو برگ با کمترین فاصله از دوسر آن وجود خواهد داشت. پس مرکز این گراف یک راس خواهد بود. فرض کنید $C = \{w\}$ باشد. اگر $w \in S$ باشد پس یکی از رئوس پشتیبان بوده لذا طبق لم ۱.۶.۳، داریم $\chi_d^t(T) = s + 1$ حال فرض کنید $w \notin S$ باشد. در این صورت برای هر u_i ، $d(u_i, w) = 2$ بوده و برای هر دو برگ u_i و u_j مسیر $u_i v_{\sigma(i)} u_j v_{\sigma(j)} u_j$ یا $u_i v_{\sigma(i)} u_j$ وجود خواهد داشت. اگر $\chi_d^t(T) = s + 1$ باشد در این صورت $f = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, V(T) - S)$ ، تنها TDC برای T خواهد بود که این شذنی نیست زیرا هیچ راس پشتیبانی، مجاور با همه رئوس یک کلاس رنگی نداریم. چون در این صورت w می باید با تمام برگ ها مجاور باشد که در این صورت درجه برگ ها، دو خواهند شد که این امکان ندارد و حداقل یک رنگ دیگر مورد نیاز است از این رو $\chi_d^t \geq s + 2$ خواهد بود. پس با دادن یک رنگ مجزا به w ، تابع g را به صورت $g = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, \{w\}, L)$ در نظر می گیریم که یک TDC برای T با $s + 2$ رنگ می باشد لذا $\chi_d^t(T) = s + 2$ خواهد بود.

□

گزاره ۳.۶.۳. [۹] فرض کنید T درختی با مرکز C باشد. اگر $diam(T) = 5$ باشد، داریم:

$$\chi_d^t(T) = \begin{cases} s + 1 & |S| \geq 3 \text{ و } |V(C) \cap S| = 2 \text{ اگر} \\ s + 2 & |S| = 2 \text{ یا } |S| \geq 3 \text{ و } |V(C) \cap S| = 1 \text{ اگر} \\ s + 3 & |S| \geq 3 \text{ و } |V(C) \cap S| = 0 \text{ اگر.} \end{cases}$$

برهان. فرض کنید T درختی با مرکز C و $diam(T) = 5$ باشد. طبق قضیه ۱.۶.۳، مرکز T یک یال خواهد بود. فرض کنید $C = \{e_1 e_2\}$ و فرض کنید $e_1 \in N(v_1)$ و $e_2 \in N(v_s)$ و همچنین $|S| = 2$ باشند. به این ترتیب $S = \{v_1, v_2\}$ و $V(T) = L \cup S \cup \{e_1, e_2\}$ افزای برای رئوس T می باشند. طبق لم ۱.۶.۳، $\chi_d^t(T) \geq 3$ می باشد. اگر $\chi_d^t(T) = 3$ باشد آن گاه $f = (\{v_1\}, \{v_2\}, L \cup \{e_1, e_2\})$ تنها TDC درخت T است ولی این ممکن نیست چون $e_1 e_2$ یک یال است و e_1 و e_2 نمی توانند رنگ یکسان بگیرند. لذا $\chi_d^t(T) \geq 4$ خواهد بود. از آنجایی که $diam(T) = 5$ می باشد و مرکز درخت یک یال است که شامل دو راس می باشد به طوری که راس پشتیبان بجز یک برگ با یکی از این رئوس هم مجاور می باشد، به عبارتی هر راس پشتیبان دقیقاً دو همسایه خصوصی دارد. لذا تابع g را به صورت $g = (\{v_1\}, \{v_2\}, N(v_1), N(v_2))$ در نظر گرفته که یک TDC با $s + 2$ کلاس رنگ می باشد. زیرا هر راس پشتیبان یک رنگ مجزا می گیرد و همسایه های هر راس پشتیبان هم رنگی یکسان می گیرند و چون رئوس پشتیبان، همسایه مشترک ندارند لذا یک رنگ آمیزی مجاز داریم که احاطه گر کلی نیز می باشد زیرا رئوس پشتیبان، رئوس مجاور را احاطه کرده و رئوس مجاور هم راس پشتیبان را احاطه می کنند لذا

$\chi_d^t(T) = 4$ خواهد بود.

حال برای $|S| \geq 3$ ، این بحث را در سه حالت زیر ادامه می‌دهیم.

حالت اول: فرض کنید $|S \cap V(C)| = 2$ باشد لذا $e_1, e_2 \in S$ می‌باشند. اگر رنگ‌آمیزی g را به صورت $g = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, L)$ در نظر بگیریم در این صورت بجز برگ‌ها، به هر راس یک رنگ مجزا داده‌ایم و یک رنگ هم به برگ‌ها می‌دهیم لذا g یک TDC برای T با $s+1$ کلاس رنگ خواهد بود که طبق لم ۱.۶.۳، داریم $\chi_d^t(T) = s+1$.

حالت دوم: فرض کنید $|S \cap V(C)| = 1$ باشد. در این صورت یکی از e_1 یا e_2 متعلق به S نمی‌باشند. فرض کنید $e_1 \in S$ و $e_2 \notin S$ باشند. اگر $\chi_d^t = s+1$ باشد پس $f = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, V(T) - e_2)$ خواهد بود که در این صورت f تنها TDC برای T خواهد بود، اما چنین چیزی غیرممکن است چون $|S| \geq 3$ است و از طرفی e_2 برگ و راس پشتیبان نیست پس e_2 با راسی پشتیبان مجاور می‌باشد که در این صورت برای این که رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی باشد، برای این راس پشتیبان می‌باید کلاس رنگی وجود داشته باشد که بتواند احاطه کند، کلاس رنگ متعلق به برگ‌ها را که نمی‌تواند احاطه کند پس e_2 باید دارای رنگ مجزایی باشد تا رنگ‌آمیزی صورت گرفته احاطه‌گر کلی باشد. به عبارت دیگر راسی مانند $v_i \in S - \{v_1\}$ وجود دارد به طوری که برای هر کلاس رنگ W از f ، $v_i \notin W$. لذا اگر g را به صورت $g = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, \{e_2\}, L)$ در نظر بگیریم در این صورت g یک TDC از T با $s+2$ کلاس رنگ می‌باشد. در نتیجه $\chi_d^t(T) = s+2$ خواهد بود.

حالت سوم: فرض کنید $|S \cap V(C)| = 0$ باشد. در این صورت $e_1, e_2 \notin S$. لذا در این حالت عدد رنگی احاطه‌گر کلی مسلماً بیشتر از حالت قبل خواهد بود. از آنجایی که $|S| \geq 3$ است، فرض می‌کنیم $\deg(e_1) \geq \deg(e_2)$ باشد. اگر $\chi_d^t(T) = s+2$ باشد آن‌گاه هر رنگ‌آمیزی احاطه‌گر کلی f برای T به صورت $f = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, E_1, E_2)$ خواهد بود. برای زیرمجموعه جدا از هم E_1 و E_2 به طوری که $e_1 \in E_1$ و $e_2 \in E_2$ باشد، بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $I = \{i | v_i \in N(e_1)\}$ و $J = \{i | v_i \notin N(e_1)\}$ باشد. آن‌گاه $\cup_{i \in I} N(v_i) \subseteq E_1$ و $\cup_{i \in J} N(v_i) \subseteq E_2$ در نظر می‌گیریم. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $|J| \geq 2$ باشد در این صورت حداقل دو راس پشتیبان وجود خواهد داشت که e_1 همسایه مشترک‌شان است ولی با برگ‌های متفاوتی نیز مجاورند که این برگ‌ها و راس e_1 در مجموعه E_1 قرار داشته و دارای رنگی یکسان می‌باشند. اگر این دو راس پشتیبان را v_1 و v_2 در نظر بگیریم و رنگ مربوط به مجموعه E_1 را هم W در نظر بگیریم در این صورت $v_1 \notin W$ و $v_2 \notin W$. لذا $\chi_d^t(T) \geq s+3$ می‌باشد. پس e_1 و e_2 نمی‌توانند با برگ‌ها در یک کلاس رنگ قرار بگیرند لذا تابع g به صورت $g = (\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_s\}, \{e_1\}, \{e_2\}, L)$ یک TDC برای T با $s+3$ کلاس رنگ می‌باشد، در نتیجه $\chi_d^t(T) = s+3$ خواهد بود.

□

فصل ۴

رنگ آمیزی احاطه گرکلی در حاصلضرب گراف ها

۱.۴ مقدمه

در این فصل، رنگ آمیزی احاطه گرکلی را در حاصلضرب دکارتی و حاصلضرب خارجی از دو گراف و همین طور در ابرمکعب، مورد بررسی قرار می دهیم. نخست برخی از تعاریف مورد نیاز، اصطلاحات علمی و قضیه از [۹] و [۱۲] ارائه می کنیم.

۲.۴ تعاریف

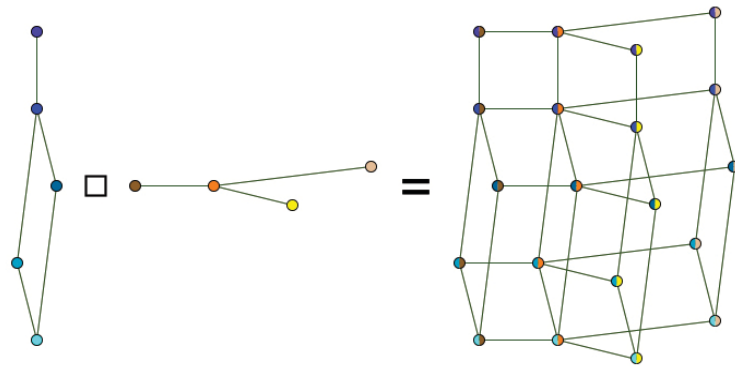
تعریف ۱.۲.۴. گراف G و H را در نظر بگیرید. حاصلضرب دکارتی این دو گراف که به صورت $G \square H$ نشان داده می شود، گرافی است با مجموعه راس های $V(G) \times V(H)$ و دو راس (g_1, h_1) و (g_2, h_2) مجاورند اگر و تنها اگر هر یک از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

۱. اگر $g_1 = g_2$ آن گاه $(h_1, h_2) \in E(H)$ باشد.

۲. اگر $h_1 = h_2$ آن گاه $(g_1, g_2) \in E(G)$ باشد.

به عنوان مثال شکل ۱.۴، حاصلضرب دکارتی دو گراف دلخواه را نشان می دهد.

تعریف ۲.۲.۴. گراف G و H را در نظر بگیرید. حاصلضرب خارجی این دو گراف که به صورت $G \times H$ نمایش داده می شود، گرافی با مجموعه راس های $V(G) \times V(H)$ می باشد و دو راس (g_1, h_1) و (g_2, h_2)

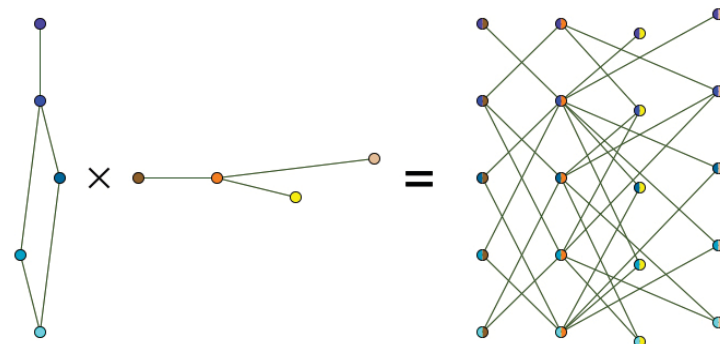


شکل ۱.۴: حاصلضرب دکارتی دو گراف

با هم مجاورند، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$(g_1, g_2) \in E(G) \quad \text{و} \quad (h_1, h_2) \in E(H)$$

به عنوان مثال شکل ۲.۴، حاصلضرب خارجی دو گراف دلخواه را نشان می دهد.



شکل ۲.۴: حاصلضرب خارجی دو گراف

تعریف ۳.۲.۴. راس $x = (u, v)$ از حاصلضرب دکارتی $G \square H$ را در نظر بگیرید، گراف G - لایه، زیرگرافی القایی است و به این صورت تعریف می شود که

$$G_x = \{(w, v) \in V(G \square H) | w \in V(G)\}.$$

و به طور مشابه می توانیم H - لایه، را تعریف کنیم.

گزاره ۱.۲.۴ (کازمی [۱۲]، ۲۰۱۲). فرض G و H دو گراف فاقد راس تنها باشند، در نتیجه

$$\gamma_t(G \square H) \leq \min\{\gamma_t(G)|V(H)|, \gamma_t(H)|V(G)|\}$$

گزاره ۲.۲.۴ (کاظمی [۹]، ۲۰۱۳). فرض کنید G یک گراف از مرتبه n و فاقد راس تنها باشد، در نتیجه

$$\gamma_t(G) \leq \chi_d^t(G) \leq n$$

گزاره ۳.۲.۴ (کاظمی [۹]، ۲۰۱۳). اگر G گراف p -بخشی، همبند و فاقد راس تنها باشد، در نتیجه

$$\chi_d^t(G) \leq \gamma_t(G) + p$$

گزاره ۴.۲.۴ (کاظمی [۹]، ۲۰۱۳). اگر G یک گراف همبند از مرتبه n و فاقد راس تنها باشد در نتیجه $2 \leq \chi_d^t(G) \leq n$. به علاوه، $\chi_d^t(G)$ برابر است با ۲ یا n اگر و تنها اگر G به ترتیب گراف دوبخشی کامل یا یکریخت با گراف کامل K_n باشد.

۳.۴ حاصلضرب خارجی گراف ها

در این بخش ثابت می شود که عدد رنگی احاطه گرکی حاصلضرب خارجی دو گراف، بیشتر از حاصلضرب اعداد رنگی احاطه گرکی شان است و در ادامه عدد رنگی احاطه گرکی حاصلضرب خارجی دو گراف چند جزئی کامل محاسبه خواهد شد.

قضیه ۱.۳.۴ [۱۲]. اگر $G \times H$ ، حاصلضرب خارجی دو گراف G و H باشد به طوری که راس تنها نداشته باشد، در این صورت داریم

$$\chi_d^t(G \times H) \leq \chi_d^t(G) \cdot \chi_d^t(H),$$

برهان. فرض کنید $f_G = (V_1, V_2, \dots, V_a)$ و $f_H = (W_1, W_2, \dots, W_b)$ به ترتیب یک $\chi_d^t(G)$ - رنگ آمیزی و $\chi_d^t(H)$ - رنگ آمیزی باشند. در این صورت $\bigcup_{i,j} V_i \times W_j$ ، افرازی از $V(G \times H)$ ، به مجموعه های مستقل در $G \times H$ است. برای $1 \leq i \leq a$ و $1 \leq j \leq b$ ، فرض کنید c_{ij} ، رنگ متفاوت باشد و فرض کنید f تابعی روی $V(G \times H)$ باشد که به هر راس $(v, w) \in V_i \times W_j$ رنگ c_{ij} را اختصاص بدهد. از آنجایی که f_G یک TDC برای گراف G است، پس طبق تعریف عدد رنگی احاطه گرکی برای هر $v \in V_i$ کلاسی مانند $V_{i'}$ که $1 \leq i' \leq a$ و $i' \neq i$ وجود دارد به طوری که $v \succ_t V_{i'}$ و به طور مشابه در گراف H نیز برای هر $w \in W_j$ کلاسی مانند $W_{j'}$ وجود دارد که برای $1 \leq j' \leq b$ و $j' \neq j$ ، $w \succ_t W_{j'}$ است. به این ترتیب در حاصلضرب خارجی $G \times H$ راس (v, w) به طور کلی راس $V_{i'} \times W_{j'}$ را احاطه می کند. به این ترتیب هر راس در $G \times H$ به هر راس از تعدادی کلاس رنگ مجاور است و به این معنی است که f یک TDC در $G \times H$ می باشد. و از آنجایی که ما یک TDC با ab رنگ معرفی کردیم و χ_d^t ، کمتری مقدار این TDC ها می باشد، لذا

$$\chi_d^t(G \times H) \leq ab = \chi_d^t(G) \cdot \chi_d^t(H)$$

□

خواهد بود.

گزاره ۱.۳.۴ [۱۲]. برای $2 \leq p \leq q$ اگر G یک گراف p -بخشی کامل و H نیز گراف q -بخشی کامل باشد، در این صورت $2 + p = \chi_d^t(G \times H)$.

برهان. برای $2 \leq p \leq q$ ، فرض کنید $G = K(n_1, n_2, \dots, n_p)$ و $H = K(m_1, m_2, \dots, m_q)$ به ترتیب شامل مجموعه‌های مستقل $V_1, V_2, \dots, V_p$ و $W_1, W_2, \dots, W_q$ باشند، به‌طوری‌که به ازای هر $1 \leq i \leq p$ و $1 \leq j \leq q$ ، $|V_i| = n_i$ و برای هر $1 \leq j \leq q$ ، $|W_j| = m_j$ باشد.

در صورت لزوم می‌توانیم فرض کنیم $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$ و $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q$ باشد. برای $i = 1, 2, \dots, p$ و $j = 1, 2, \dots, q$ ، فرض کنید

$$X_i = \bigcup_{j=1}^q V_i \times W_j \quad \text{و} \quad Y_j = \bigcup_{i=1}^p V_i \times W_j$$

در این صورت حاصلضرب خارجی $G \times H$ ، یک گراف p -بخشی با مجموعه‌های مستقل $X_1, X_2, \dots, X_p$ و نیز یک گراف q -بخشی با مجموعه‌های مستقل $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$ می‌باشد. به این ترتیب هر بخش، رنگی مجزا می‌گیرد و چون طبق فرض، بخش‌های $V_1, V_2, \dots, V_p$ و $W_1, W_2, \dots, W_q$ مستقل بودند و با توجه به تعریف وجود یال در حاصلضرب خارجی، این بخش‌ها نیز مستقل می‌باشند پس رنگ‌آمیزی مجاز است و از آنجایی که عدد رنگی، کمترین تعداد رنگ‌های ممکن در یک رنگ‌آمیزی مجاز می‌باشد و طبق فرض $p \leq q$ می‌باشد، داریم $\chi(G \times H) \leq \min\{p, q\} = p$. حال به ازای $i = 1, 2, \dots, p$ ، فرض کنید برای هر $v_i \in V_i$ و $w_i \in W_i$ مجموعه U را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$U = \{(v_i, w_i) | i = 1, 2, \dots, p\}$$

از آنجایی که G و H گراف‌هایی کامل فرض شده‌اند و با توجه به تعریف وجود یال در حاصلضرب خارجی، مجموعه U ، گراف کامل K_p از مرتبه p ارائه می‌دهد. بنابراین $\chi(G \times H) \geq p$ می‌باشد در نتیجه $\chi(G \times H) = p$ خواهد بود و از طرفی $\chi_d^t(G \times H) \geq \chi(G \times H) = p$ است لذا $\chi_d^t(G \times H) \geq p$ می‌باشد.

فرض کنید $f = (C_1, C_2, \dots, C_l)$ یک TDC در $G \times H$ باشد، به‌طوری‌که هر راس در کلاس رنگی C_i دارای رنگ i باشد. اگر نیاز باشد می‌توانیم مجدداً رنگ‌ها را تغییر دهیم، فرض می‌کنیم برای هر $(v_i, w_i) \in C_i$ ، $i = 1, 2, \dots, p$ ، $(v_1, w_1) \succ_t C_2$ باشد. بنابراین راس (v_1, w_1) با هر راس از کلاس رنگی C_2 مجاور است و از آنجایی که طبق تعریف وجود یال در حاصلضرب خارجی بین (v_1, w_1) و رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) یالی وجود نخواهد داشت پس این رئوس در کلاس رنگی C_2 قرار ندارند و رنگ ۲ را نمی‌پذیرند، به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که

$$C_2 \subseteq X_2 \setminus (V_2 \times W_1) \quad \text{یا} \quad C_2 \subseteq Y_2 \setminus (V_1 \times W_2)$$

فرض کنید $l = p$ باشد. طبق توضیح قسمت قبل، راس (v_2, w_2) نیز با رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) مجاور نخواهد بود لذا رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) با همه‌ی رئوس مجموعه‌ی $U \setminus \{(v_1, w_1), (v_2, w_2)\}$ مجاور خواهند بود، از طرفی در قسمت قبل گفتیم که رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) رنگ ۲ را نمی‌پذیرند و از آنجایی که طبق فرض $(v_i, w_i) \in C_i$ بوده و این دو راس با همه‌ی رئوس $U \setminus \{(v_1, w_1), (v_2, w_2)\}$ مجاورند، لذا رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) رنگ‌های $3, \dots, p$ را نیز نمی‌پذیرند، پس هر دو دارای رنگ ۱ می‌باشند، ولی طبق تعریف وجود یال در حاصلضرب خارجی این دو راس با هم مجاورند و این تناقض

است لذا $l \geq p + 1$ خواهد بود.

فرض کنید $l = p + 1$ باشد. در نتیجه تنها رنگ‌های مجاز برای رنگ‌آمیزی راس‌های (v_1, w_2) و (v_2, w_1) ، رنگ‌های ۱ و $p + 1$ می‌باشند. رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) مجاور هستند و رنگ‌هایی متمایز دارند، بدون کم شدن از کلیت مساله، فرض کنید که راس (v_1, w_2) دارای رنگ ۱ و راس (v_2, w_1) دارای رنگ $p + 1$ باشد، اثبات را در ۳ حالت زیر ادامه می‌دهیم.

فرض کنید $p = 2$ باشد. در نتیجه (v_1, w_2) رنگ ۱ و (v_2, w_1) رنگ ۳ را می‌گیرد. از آنجایی که راس (v_1, w_2) به راس (v_1, w_1) از رنگ ۱ و به راس (v_2, w_2) از رنگ ۲، مجاور نیست، نتیجه می‌گیریم که راس (v_1, w_2) با راس‌های دارای رنگ ۳ مجاور است، لذا $(v_1, w_2) \succ_t C_3$ ، بنابراین $C_3 \subseteq X_2 \setminus V_2 \times W_2$ می‌باشد. از طرف دیگر راس (v_2, w_2) دارای رنگ ۲ می‌باشد و با راس (v_1, w_2) از رنگ ۱، مجاور نیست پس کلاس C_1 را احاطه نمی‌کند لذا نتیجه می‌گیریم که $(v_2, w_2) \succ_t C_3$ ، که این مطلب با $C_3 \subseteq X_2 \setminus V_2 \times W_2$ در تناقض است بنابراین $l \geq p + 2$ می‌باشد و چون f ، یک TDC دلخواه در $G \times H$ است خواهیم داشت $\chi_d^t(G \times H) \geq p + 2$.

فرض کنید $p = 3$ باشد. به این ترتیب راس (v_1, w_2) دارای رنگ ۱ و راس (v_2, w_1) دارای رنگ ۴ است و از آنجایی که راس (v_2, w_1) با راس (v_1, w_1) از رنگ ۱ و با راس (v_2, w_2) از رنگ ۲، مجاور نیست، در صورت لزوم می‌توانیم دوباره رنگ‌ها را نامگذاری کنیم، به‌طوری‌که راس (v_2, w_1) با هر راس دارای رنگ ۳ مجاور باشد. و این مطلب به این معنی است که $(v_2, w_1) \succ_t C_3$. در نتیجه راس (v_3, w_1) نمی‌تواند دارای رنگ ۳ باشد چون در این صورت مجاور خواهند شد. به‌علاوه از آنجایی که راس (v_3, w_1) با راس (v_1, w_2) از رنگ ۱ مجاور است پس رنگ ۱ را نمی‌گیرد و چون با هر راس در مجموعه $U \setminus \{(v_1, w_1), (v_3, w_3)\} = \{(v_2, w_2)\}$ مجاور است، پس رنگ ۲ را هم نمی‌پذیرد لذا دارای رنگ ۴ می‌باشد. به‌علاوه چون $(v_2, w_1) \succ_t C_3$ ، پس نتیجه می‌گیریم که راس (v_2, w_3) نمی‌تواند دارای رنگ ۳ باشد. از آنجایی که راس (v_2, w_3) با تمام راس‌ها، از هر رنگ بجز رنگ ۲، مجاور است نتیجه می‌گیریم که $(v_2, w_3) \in C_4$ می‌باشد. به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که $(v_3, w_2) \in C_4$ می‌باشد، چون راس (v_3, w_2) به تمام راس‌ها از هر رنگ، بجز راس‌های دارای رنگ ۳، مجاور است. در نتیجه راس (v_3, w_2) با راس (v_1, w_2) از رنگ ۱، با راس (v_2, w_2) از رنگ ۲ و با راس (v_3, w_1) از رنگ ۴ مجاور نیست. پس نتیجه می‌گیریم که راس (v_3, w_2) با تمام راس‌های دارای رنگ ۳ مجاور است و به این معنی است که $(v_3, w_2) \succ_t C_3$ ، که تناقض است چون (v_3, w_2) دارای رنگ ۳ می‌باشد. بنابراین داریم $\chi_d^t(G \times H) \geq p + 2$ و چون f یک TDC دلخواه در $G \times H$ می‌باشد لذا $\chi_d^t(G \times H) \geq p + 2$ است.

فرض کنید $p \geq 4$ باشد. به این ترتیب تنها رنگ مجاز جهت رنگ‌آمیزی راس‌های (v_1, w_2) و (v_2, w_1) رنگ‌های ۱ و $p + 1$ می‌باشند. چون رئوس (v_1, w_2) و (v_2, w_1) مجاور هستند پس رنگ‌های مجزا می‌پذیرند. فرض کنید راس (v_1, w_2) دارای رنگ ۱ و راس (v_2, w_1) دارای رنگ $p + 1$ باشد چون راس (v_2, w_1) با راس (v_1, w_1) که دارای رنگ ۱ است و با راس (v_2, w_2) که دارای رنگ ۲ است، مجاور نمی‌باشد. ما دوباره رنگ‌ها را نامگذاری می‌کنیم به‌طوری‌که راس (v_2, w_1) به هر راس رنگ شده توسط رنگ ۳، مجاور باشد. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که راس (v_3, w_1) نمی‌تواند توسط رنگ ۳، رنگ شده باشد. به‌علاوه از آنجایی که راس (v_3, w_1) با راس (v_1, w_2) از رنگ ۱ مجاور است پس رنگ ۱ را

نیز نمی‌گیرد و چون با هر راس در مجموعه $U \setminus \{(v_1, w_1), (v_3, w_3)\}$ مجاور است، لذا رنگ ۲ را نیز نمی‌پذیرد، پس راس (v_3, w_1) با رنگ $p+1$ رنگ‌آمیزی می‌شود و از آنجایی که $(v_2, w_1) \succ_t C_3$ ، راس (v_2, w_3) نمی‌تواند با رنگ ۳، رنگ‌آمیزی شود در نتیجه راس (v_2, w_3) با تمام راس‌ها از هر رنگ بجز راس‌های دارای رنگ ۲ مجاور است و این مطلب به این معنی است که $(v_2, w_3) \in C_3$ و به‌طور مشابه $(v_3, w_2) \in C_3$ خواهد بود، چون راس (v_3, w_2) با تمام راس‌ها از هر رنگ بجز راس‌های دارای رنگ ۳ مجاور است. از آنجایی که راس (v_3, w_2) ، با راس (v_1, w_2) از رنگ ۱ و با راس (v_2, w_2) از رنگ ۲ و با راس (v_3, w_1) از رنگ $p+1$ مجاور نیست. ما می‌توانیم نامگذاری جدیدی در نظر بگیریم به‌طوری‌که راس (v_3, w_2) با راس‌های دارای رنگ ۴، مجاور باشد و به این معنی است که $(v_3, w_2) \succ_t C_4$. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که راس (v_4, w_2) نمی‌تواند توسط رنگ ۴، رنگ شده باشد. با این وجود راس (v_4, w_2) با راس (v_1, w_1) از رنگ ۱ و راس (v_2, w_3) از رنگ ۲ و راس (v_3, w_3) از رنگ ۳ و راس (v_2, w_1) از رنگ $p+1$ مجاور است. به‌علاوه برای هر $i = 5, \dots, p$ ، راس (v_i, w_2) با راس (v_4, w_2) از رنگ i مجاور است. لذا راس (v_4, w_2) با همه رئوس از $p+1$ رنگ ممکن مجاور خواهد بود که این یک تناقض است. بنابراین $l \geq p+2$ و از آنجایی که f یک TDC دلخواه روی $G \times H$ است، داریم $\chi_d^t(G \times H) \geq p+2$.

فرض کنید $X_1^* = V_1 \times W_1$ و $X_p^* = V_p \times W_1$ باشد. به این ترتیب تابع $f^* = (X_1^*, X_p^*, X_1 \setminus X_1^*, X_2 \setminus X_2^*, X_3, \dots, X_p)$ یک TDC برای $G \times H$ با $p+1$ کلاس‌رنگ می‌باشد، پس $\chi_d^t(G \times H) \leq p+2$ و لذا $\chi_d^t(G \times H) = p+2$ می‌باشد. $\square$

۴.۴ حاصلضرب دکارتی گراف‌ها

در این بخش، عدد رنگی احاطه‌گر کلی را برای حاصلضرب دکارتی دو گراف، بدست می‌آوریم.

قضیه ۱.۴.۴. [۱۲] برای هر دو گراف G و H که راس تنها نداشته باشند، داریم

$$\max\{\chi_d^t(G), \chi_d^t(H)\} \leq \chi_d^t(G \square H) \leq \min\{\chi_d^t(G) \cdot n(H), \chi_d^t(H) \cdot n(G)\}.$$

برهان. فرض کنید $V(G \square H) = \{(v_i, u_j) | 1 \leq i \leq n \text{ و } 1 \leq j \leq m\}$ باشد. از آنجایی که گراف $G \square H$ از حاصلضرب دکارتی دو گراف G و H حاصل شده است لذا طبق تعریف حاصلضرب دکارتی در گراف $G \square H$ ، به تعداد رئوس H از گراف G و به تعداد رئوس G از گراف H وجود دارد. به عبارتی در گراف $G \square H$ به تعداد $V(G) \times V(H)$ گراف G و H داریم پس $\chi_d^t(G \square H) \geq \chi_d^t(G)$ و همچنین $\chi_d^t(G \square H) \geq \chi_d^t(H)$ می‌باشد. لذا $\chi_d^t(G \square H) \geq \max\{\chi_d^t(G), \chi_d^t(H)\}$ خواهد بود.

حال به بررسی درستی کران بالا می‌پردازیم.

فرض کنید $\min\{\chi_d^t(G) \cdot n(H), \chi_d^t(H) \cdot n(G)\} = \chi_d^t(G) \cdot m$ و $\chi_d^t(G) = a$ باشد. برای یک TDC مشخص $f = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ در G ، فرض کنید f' تابعی روی $V(G \square H)$ باشد، به‌طوری‌که برای هر راس (u_i, v_j) داشته باشیم $f'((v_i, u_j)) = (f(v_i), j)$. فرض کنید $(v_i, u_j) \in V(G \square H)$ باشد. چون f یک TDC روی G است لذا وجود دارد t و l که $1 \leq l \neq t \leq a$ بوده و $v_i \in V_l$ و $v_i >_t V_t$.

به این ترتیب در حاصلضرب دکارتی $G \square H$ راس (v_i, u_j) به طور کلی $V_i \times \{j\}$ را احاطه می کند. بنابراین هر راس از $G \square H$ با هر راس از تعدادی کلاس رنگ، مجاور است و نتیجه می دهد که f' یک TDC در $G \square H$ است. بنابراین خواهیم داشت $\chi_d^t(G \square H) \leq am = \chi_d^t(G) \cdot |V(H)|$. به این ترتیب وجود کران بالا را ثابت کردیم. $\square$

قضیه ۲.۴.۴. [۱۲] برای هر گراف G که فاقد راس تنها باشد داریم

$$\chi_d^t(G) \leq \chi_d^t(G \square K_2) \leq 2\chi_d^t(G),$$

و $\chi_d^t(G \square K_2) = \chi_d^t(G)$ است، اگر و تنها اگر $G = K_n$ باشد.

برهان. فرض کنید G گرافی فاقد راس تنها و از مرتبه n و

$V(G \square K_2) = \{(v_i, j) | 1 \leq n \text{ و } j = 1, 2\}$ باشد. از قضیه ۱.۴.۴ داریم:

$$\max\{\chi_d^t(G), \chi_d^t(H)\} \leq \chi_d^t(G \square H) \leq \min\{\chi_d^t(G) \cdot n(H), \chi_d^t(H) \cdot n(G)\}.$$

حال اگر $H = K_2$ باشد، چون $\chi_d^t(K_2) = 2$ می باشد و چون G فاقد راس تنهاست لذا، $\max$ در G اتفاق می افتد و از طرفی $1 \neq n(G)$ است و اگر $G = K_2$ باشد پس $\chi_d^t(G \square K_2) \leq 2\chi_d^t(G)$ و اگر $n \geq 3$ هم باشد، چون با $\min$ کار می کنیم و عدد رنگی یک گراف حداکثر به تعداد رئوسش می باشد پس برای هر تعداد راس، عدد رنگی کمتر یا مساوی تعداد رئوس خواهد بود پس باز هم برقرار است و $\min\{\chi_d^t(G) \cdot 2, 2 \cdot n(G)\} = 2\chi_d^t(G)$ می باشد بنابراین

$$\chi_d^t(G) \leq \chi_d^t(G \square K_2) \leq 2\chi_d^t(G)$$

خواهد بود.

اگر G گراف کامل K_n باشد، در این صورت

$$(\{(v_1, 1), (v_2, 2)\}, \{(v_2, 1), (v_3, 2)\}, \dots, \{(v_{n-1}, 1), (v_n, 2)\}, \{(v_n, 1), (v_1, 2)\})$$

یک TDC روی $G \square K_2$ با n کلاس رنگ می باشد. زیرا اولاً این رنگ آمیزی مجاز است، چون طبق تعریف وجود یال در حاصلضرب دکارتی دو گراف، بین رئوس قرار گرفته در یک کلاس رنگ، یالی وجود ندارد پس می توانند رنگی یکسان بگیرند و از طرفی برای هر راس دلخواه از $G \square K_2$ که در نظر بگیریم یک کلاس رنگ وجود دارد به طوری که توسط راس مورد نظر احاطه شود.

به طور مثال راس $(v_1, 1)$ را در نظر بگیرید، باید کلاسی پیدا کنیم که زیرمجموعه همسایگان $(v_1, 1)$ باشد. چون K_n گراف کامل است پس v_1 با $v_2, \dots, v_n$ راس مجاور خواهد بود و از طرفی گراف K_2 نیز یک گراف کامل دو راسی است پس راس ۱ با راس ۲ مجاور خواهد بود. لذا طبق تعریف وجود یال در حاصلضرب دکارتی، راس $(v_1, 1)$ با تمام رئوسی که به صورت $(v_1, 2)$ و $(v_i, 1)$ به ازای $i = 2, \dots, n$ باشند مجاور است در این صورت راس $(v_1, 1)$ می تواند کلاس رنگی $\{(v_1, 2), (v_n, 1)\}$ را احاطه کند و به همین ترتیب برای هر راس یک کلاس رنگ وجود خواهد داشت که احاطه شود. در نتیجه یک

رنگ‌آمیزی احاطه‌گرکلی روی $G \square H$ و با n کلاس‌رنگ خواهیم داشت و از آن جایی که $\chi_d^t(K_n) = n$ می‌باشد پس $\chi_d^t(G \square K_2) = \chi_d^t(G) = k$ خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم $\chi_d^t(G \square K_2) = \chi_d^t(G) = k$ باشد. ادعا می‌کنیم، یک χ_d^t -رنگ‌آمیزی روی $G \square K_2$ وجود دارد به‌طوری‌که در هر دو G -لایه‌ی، $\{1\} \times G$ و $\{2\} \times G$ ، تمام رنگ‌ها به راس‌ها اختصاص داده شده باشند. برهان خلف: فرض کنید یک χ_d^t -رنگ‌آمیزی مانند $f = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ در $G \square K_2$ وجود دارد به‌طوری‌که تعداد رنگ‌هایی را که به راس‌های $\{1\} \times G$ نسبت می‌دهد، کمتر از k تا می‌باشد. پس برخی از رؤوس متعلق به $\{1\} \times G$ وجود دارند که رنگ یکسان می‌گیرند و رنگ‌هایی در $\{2\} \times G$ حضور دارند که در $\{1\} \times G$ مصرف نشده‌اند و از آن جایی که در حاصلضرب دکارتی هستیم، لذا هر راس از $\{1\} \times G$ به راسی از $\{1\} \times G$ متصل می‌باشد، به این ترتیب در $\{1\} \times G$ ، راسی مانند $(v, 1)$ و کلاس‌رنگی مانند $V_i \subseteq \{2\} \times G$ وجود دارند به‌طوری‌که $(v, 1) \succ_t V_i$ ، و به ازای هر $i \neq j$ ، $(v, 1) \not\succ_t V_j$. چون تعداد رنگ‌ها در $\{1\} \times G$ کمتر از k تا می‌باشد پس راسی مانند $(v, 1)$ وجود دارد که توسط رؤوس ستون اول احاطه نشود و از آن جایی که مجموعه‌ی احاطه‌گرکلی داریم پس می‌باید کلاسی یافت شود که توسط راس $(v, 1)$ احاطه شود پس این کلاس تک‌عضوی از $\{2\} \times G$ خواهد بود و راس $(v, 2)$ تنها راسی است که توسط $(v, 1)$ احاطه می‌شود. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که $V_i = \{(v, 2)\}$. از سوی دیگر، $\delta(G) \geq 1$ می‌باشد و نتیجه می‌دهد که راسی مانند $(v', 1)$ در $N_{G \times \{1\}}((v, 1))$ وجود دارد. چون G فاقد راس تنه‌است لذا در ستون اول که یک کپی از G می‌باشد، راس تنها نداریم فرض کنید برای $i \neq t$ ، $(v', 1) \in V_t$ باشد. در این صورت $|V_t| \geq 2$ می‌باشد. برای راس $(v', 1)$ رنگ جدید i را به‌جای رنگ t جایگزین می‌کنیم و یک χ_d^t -رنگ‌آمیزی جدید برای $G \square K_2$ ارائه می‌دهیم، به‌طوری‌که تعداد رنگ‌های اختصاص داده شده به رؤوس $\{1\} \times G$ بیشتر از رنگ‌آمیزی قبلی باشد. با ادامه دادن این روند یک χ_d^t -رنگ‌آمیزی برای $G \square K_2$ بدست می‌آوریم به‌طوری‌که همه رنگ‌ها به تمام راس‌ها در هر دو G -لایه، $\{1\} \times G$ و $\{2\} \times G$ تخصیص داده شوند، و در نتیجه ادعای ما ثابت شد.

حالا فرض می‌کنیم $f = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ یک $\chi_d^t(G \square K_2)$ -رنگ‌آمیزی باشد به‌طوری‌که برای هر $1 \leq i \leq k$ و $j = 1, 2$ داشته باشیم $V_i \cap (G \times \{j\}) \neq \emptyset$. اگر $k < n$ باشد، پس رؤوس متعلق به ستون اول، همگی باهم مجاور نیستند پس رنگی مانند t وجود دارد که حداقل به ۲ راس داده شده است، پس برای $1 \leq t \leq k$ ، خواهیم داشت $|V_t \cap (G \times \{1\})| \geq 2$. حال فرض کنید $(x, 1) \succ_t V_i$ و $(x, 1) \succ_t V_i$ باشد و برای $i \neq t$ و $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم $(x, 1) \succ_t V_i$. از طرفی راسی مانند $(x, 2)$ وجود دارد که می‌بایست کلاسی را احاطه کند، فرض می‌کنیم $(x, 2) \succ_t V_j$ به‌طوری‌که $j \neq t$ باشد. چون راس $(x, 2)$ با راس $(y, 1)$ مجاور نیست پس $j = t$ نمی‌باشد و چون با $V_i \cap (G \times \{1\})$ هم مجاور نیست پس $j = i$ هم نیست پس راس $(x, 1)$ تنها همسایه برای راس $(x, 2)$ در گراف $G \times \{1\}$ می‌باشد که طبق مطالب گفته شده، راس $(x, 2)$ در کلاس V_t قرار دارد که $j \neq t$ می‌باشد، پس $V_j \cap (G \times \{1\}) = \emptyset$ می‌باشد که تناقض است لذا $k = n$ می‌باشد و طبق گزاره ۴.۲.۴ داریم: $G = K_n$. $\square$

در دو گزاره بعد، کران‌های بالایی برای عدد رنگ‌آمیزی احاطه‌گرکلی گراف‌های $C_n \square K_m$ و $P_n \square K_m$

ارائه خواهیم کرد.

گزاره ۱.۴.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ و $m \geq 2$ داریم،

$$\chi_d^t(P_n \square K_m) \leq \begin{cases} m & \text{اگر } m \geq n, \\ n & \text{اگر } m = 2 \text{ و } n \text{ زوج باشد,} \\ n + m - 1 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

برهان. گراف $G = P_n \square K_m$ را با مجموعه راس های $V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ در نظر بگیرید. حالت های زیر را بررسی می کنیم.

حالت اول فرض کنید $m = 2$ باشد. تابع f را روی مجموعه V ، به ازای هر راس از گراف به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$f((i, j)) = \begin{cases} i & \text{اگر } j = 1, \\ i + 1 & \text{اگر } j = 2 \text{ و } i \text{ فرد باشد,} \\ i - 1 & \text{اگر } j = 2 \text{ و } i \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

به این ترتیب تابع f یک TDC در G با $n + r$ کلاس رنگ، خواهد بود. زیرا، اولاً f مجاز است چون برای $m = 2$ در حاصلضرب دکارتی دو کپی از P_n وجود دارد به طوری که رئوس متناظر در دو کپی، با هم مجاور خواهند بود، در کپی اول یعنی $j = 1$ ، به هر راس رنگ سطری را که در آن واقع شده، داده ایم پس مجاز است، حال به سراغ کپی دوم یعنی $j = 2$ ، می رویم. رئوس این کپی، با رئوس متناظر خود در کپی اول و همچنین با رئوس قبل و بعد خود مجاورند پس راس (i, j) نمی تواند رنگ i یعنی رنگ سطر خود را بگیرد، در این رنگ آمیزی ارائه داده شده برای سطرهای زوج رنگ $i - 1$ و برای سطرهای فرد رنگ $i + 1$ در نظر گرفته شده که مجاز است. ثانیاً برای هر راس (i, j) که در نظر می گیریم کلاسی وجود دارد که به طور کامل احاطه می شود به این صورت که هر راس $(i, 1)$ که i زوج باشد، کلاس رنگی $i - 1$ که شامل رئوس $\{(i - 1, 1), (i, 2)\}$ می باشد و راس $(i - 1)$ که i فرد باشد، کلاس رنگی $i + 1$ که شامل رئوس $\{(i + 1, 1), (i, 2)\}$ می باشد را احاطه می کند و همچنین برای راس $(i, 2)$ که i فرد باشد کلاس رنگی $i - 1$ وجود دارد که شامل رئوس $\{(i, 1), (i + 1, 2)\}$ و برای راس $(i, 2)$ که i زوج باشد کلاس رنگی $i + 1$ وجود دارد که شامل رئوس $\{(i - 1, 2), (i, 1)\}$ می باشد. در این رنگ آمیزی ارائه شده به تعداد n رنگ در کپی اول و تعداد r رنگ در کپی دوم استفاده شده است که اگر n زوج باشد، $r = 0$ است و در غیر این صورت $r = 1$ خواهد بود. در نتیجه داریم

$$\chi_d^t(G) \leq n + r$$

حالت دوم فرض کنید $m \geq 3$ باشد. تابع f را روی مجموعه V به ازای هر راس از گراف، به صورت

زیر تعریف می‌کنیم،

$$f((i, j)) = \begin{cases} m + i - 1 & j = m, \\ j & \text{اگر } i \text{ فرد باشد و } 1 \leq j < m, \\ a_j & \text{اگر } i \text{ زوج باشد و } 1 \leq j < m. \end{cases}$$

درحالی‌که، $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ ، یک پریش روی مجموعه $X = \{1, 2, \dots, m-1\}$ می‌باشد. به این ترتیب تابع f یک TDC در G ، با $n+m-1$ کلاس‌رنگ می‌باشد. زیرا اولاً این رنگ‌آمیزی مجاز است چون هر راس در ستون $j = m$ ، رنگ متفاوت $m+i-1$ را می‌پذیرد. از طرفی هر راس که در سطر فرد واقع شده است، رنگ ستونش را می‌گیرد و رئوس واقع بر سطرهاى زوج دارای رنگ a_j خواهند بود. از طرفی چون هر سطر کپی‌ای از گراف K_m می‌باشد پس تمام رئوس واقع بر یک سطر با هم مجاورند و از آنجایی‌که رئوس واقع بر ستون $j = m$ ، هر کدام رنگی متفاوت دارند و هر راس آن با تمام رئوس سطر خود مجاور است لذا راس‌های هر سطر می‌توانند کلاس شامل راس مجاور خود که در ستون $j = m$ ، واقع شده را احاطه کنند و رئوس واقع در $j = m$ هم رئوس مجاور خود را احاطه می‌کنند. در این رنگ‌آمیزی n رنگ برای رنگ‌آمیزی رئوس ستون $j = m$ و $m-1$ رنگ نیز برای رنگ‌آمیزی بقیه رئوس استفاده شده است، به این ترتیب $\chi_d^t(G) \leq n+m-1$ می‌باشد.

□

گزاره ۲.۴.۴. برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ و $m \geq 2$ داریم،

$$\chi_d^t(C_n \square K_m) \leq \begin{cases} n+m-1 & \text{اگر } n \geq 4 \text{ زوج باشد,} \\ n & \text{اگر } m=2 \text{ و } n \text{ زوج باشد,} \\ n+2m-2 & \text{اگر } n \geq 3 \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

برهان. گراف $G = C_n \square K_m$ را با مجموعه راس‌های $V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ در نظر گرفته و حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت اول فرض کنید $m = 2$ باشد. تابع f را به ازای هر راس (i, j) روی مجموعه V ، تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که

$$f((i, j)) = \begin{cases} i & j = 1, \\ i+1 & \text{اگر } j=2 \text{ و } i \text{ فرد باشد,} \\ i-1 & \text{اگر } j=2 \text{ و } i \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

مشابه اثبات حالت اول در گزاره ۱.۴.۴، تابع f یک TDC در G با $n+r$ کلاس‌رنگ می‌باشد، اگر n زوج باشد داریم $r = 0$ ، در غیراین صورت $r = 1$ خواهد بود و نتیجه می‌دهد که $\chi_d^t(G) \leq n+r$.

حالت دوم فرض کنید $n \geq 4$ و زوج باشد. تابع f را به ازای هر راس (i, j) ، روی مجموعه V تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که

$$f((i, j)) = \begin{cases} m + i - 1 & \text{اگر } j = m, \\ j & \text{اگر } i \text{ فرد باشد و } 1 \leq j < m, \\ a_j & \text{اگر } i \text{ زوج باشد و } 1 \leq j < m. \end{cases}$$

درحالی‌که که $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ یک پریش روی مجموعه $X = \{1, 2, \dots, m-1\}$ می‌باشد. مشابه اثبات حالت دوم در گزاره ۱.۴.۴، تابع f یک TDC در G ، با $n + m - 1$ کلاس‌رنگ خواهد بود، و به این معنی است که $\chi_d^t(G) \leq n + m - 1$ می‌باشد.

حالت سوم فرض کنید $n \geq 3$ و فرد است. تابع f را به ازای هر راس (i, j) ، روی مجموعه V تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که

$$f((i, j)) = \begin{cases} m + i - 1 & \text{اگر } j = m, \\ j & \text{اگر } i < m \text{ فرد باشد و } 1 \leq j < m, \\ a_j & \text{اگر } i < m \text{ زوج باشد و } 1 \leq j < m, \\ n + m - 1 + j & \text{اگر } i = m \text{ و } 1 \leq j < m. \end{cases}$$

در جایی‌که $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ یک پریش روی مجموعه $X = \{1, 2, \dots, m-1\}$ باشد، به این ترتیب تابع f یک TDC روی G با $n + 2m - 2$ کلاس‌رنگ خواهد بود، زیرا اولاً این رنگ‌آمیزی مجاز است چون تمام رئوس واقع بر ستون $j = m$ و همین‌طور سطر $i = m$ ، رنگ‌های متفاوت می‌پذیرند و برای بقیه رئوس، اگر روی سطر فرد واقع باشند رنگ ستون خود را می‌گیرند و اگر روی سطر زوج واقع باشند رنگ a_j را می‌پذیرند و از سوی دیگر رئوس واقع بر یک سطر مشخص می‌توانند کلاس شامل راس مجاورشان در $j = m$ یا $i = m$ را احاطه کنند و همچنین رئوس موجود در $i = m$ یا $j = m$ نیز می‌توانند کلاس‌های مجاورشان در همین سطر یا ستون را احاطه کنند در نتیجه به تعداد n رنگ در ستون $j = m$ و به تعداد $m - 1$ رنگ در سطر $i = m$ و به تعداد $m - 1$ رنگ نیز برای سایر رئوس نیاز داریم در نتیجه $\chi_d^t(G) \leq n + 2m - 2$ می‌باشد.

□

۵.۴ ابر مکعب‌ها

به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، مکعب n -بعدی یا ابرمکعب Q_n ، گراف ساده‌ای است که راس‌های آن شامل n -تایی‌هایی با درایه‌های $\{0, 1\}$ می‌باشد که

$$V(Q_n) = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$$

است و یالهای آن به صورت زوجهایی از n - تاییها می باشند که دقیقاً در یک درایه اختلاف دارند. توجه کنید که Q_n یک گراف دوبخشی است و با حاصلضرب دکارتی $Q_{n-1} \square K_2$ یکریخت می باشد. در این بخش به بررسی، کرانهایی کلی برای عدد رنگی احاطه گرکلی از ابرمکعبها و پیدا کردن مقدار دقیق برای برخی از این نوع گرافها می پردازیم.

از آنجایی که، $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$ می باشد. از قضیه ۲.۴.۴، گزاره زیر را نتیجه می گیریم.

گزاره ۱.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ داریم:

$$\chi_d^t(Q_{n-1}) + 1 \leq \chi_d^t(Q_n) \leq 2\chi_d^t(Q_{n-1}).$$

گزاره زیر، شرط لازم برای آن که تابع رنگ آمیزی مجاز روی مجموعه $V(Q_n)$ ، یک رنگ آمیزی احاطه گرکلی باشد را ارائه می دهد.

گزاره ۲.۵.۴. [۱۲] فرض کنید $f = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ یک تابع رنگ آمیزی مجاز روی راسهای ابرمکعب Q_n باشد. همچنین فرض کنید $l = |\{j | |V_j| > n\}|$ و برای $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $l_i = |\{j | |V_j| = i\}|$ به این ترتیب $k = \sum_{i=1}^n l_i$ بوده و

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots + nl_n + (n+1)l_0 \leq 2^n \leq nl_1 + 2l_2 + l_3 + \dots + l_n.$$

برهان. فرض کنید $\{a_1 a_2 \dots a_n | a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$ برای $V(Q_n)$ و فرض کنید $f = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ ، یک رنگ آمیزی مجاز روی مجموعه $V(Q_n)$ باشد. اگر $V_i = \{v\}$ باشد در این صورت $CN(V_i) = N(v)$ ، به عبارتی اگر هر کلاس رنگ، شامل تنها یک راس باشد لذا همسایه مشترک هر کلاس همان همسایه عضوش می باشد و از آنجایی که درجه هر راس در Q_n برابر n می باشد، بنابراین داریم $|CN(V_i)| = n$. حال کلاسها را به صورت دوعضوی در نظر می گیریم و فرض می کنیم $V_i = \{\alpha, \beta\}$ باشد به طوری که $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$ و $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$ بوده و برای هر i ، $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$ باشند. اگر α و β دارای همسایه مشترکی مانند $\delta = \delta_1 \dots \delta_n$ باشند، از آنجایی که رئوس مجاور تنها در یک درایه متفاوت اند، پس هر راس با همسایه مشترکشان در $n - 1$ درایه اشتراک دارند به عبارتی

$$|\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap \{\delta_1, \dots, \delta_n\}| = |\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \cap \{\delta_1, \dots, \delta_n\}| = n - 1$$

می باشد. لذا α و β در دو درایه متفاوت خواهند بود پس $|\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap \{\beta_1, \dots, \beta_n\}| = n - 2$ بنابراین اگر $|V_i| = 2$ باشد، با توجه به مطالب بالا و با توجه به تعریف پریش، تعداد چنین δ_s ای، برابر دو می باشد و نتیجه می گیریم که $|CN(V_i)| \leq 2$.

در پایان فرض می کنیم $|V_i| \geq 3$ باشد. اگر $|V_i| > n$ باشد، از آنجایی که درجهی رئوس در گراف Q_n ، برابر n می باشد و هر راس دقیقاً، به تعداد درجه خود، دارای مجاورت است و چون گراف Q_n شامل $n - 1$ کپی از گراف Q_2 به صورت $Q_2^{(1)}, Q_2^{(2)}, \dots, Q_2^{(n-1)}$ می باشد به طوری که هر راس در هر کپی با رئوس متناظرش در سایر کپیها مجاور باشد، لذا هر راس با دو راس دیگر در کپی خود و با $n - 2$ راس در سایر کپیها، مجاور می باشد، بنابراین حداکثر تعداد رئوسی که دارای همسایه مشترک باشند به تعداد درجه رئوس می باشد لذا $CN(V_i) = 0$ خواهد بود.

حال $3 \leq |V_i| \leq n$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $V(Q_n) = V(Q_{n-1}) \times \{1, 2\}$ باشد، برای این که $CN(V_i)$ مجموعه ای ناتهی باشد، لازم است به ازای $j = 1, 2$ ، نامساوی

$$|V_i \cap V((Q_{n-1}) \times \{j\})| \geq |V_i| - 1$$

وجود داشته باشد. توجه کنید که اگر

$$V_i = (V_i \cap (V(Q_{n-1}) \times \{1\})) \cup \{(x, 2)\}$$

باشد خواهیم داشت، $v \in CN(V_i)$ اگر و تنها اگر $v = (x, 1)$ و $v \in CN(V_i \cap ((V(Q_{n-1}) \times \{1\})))$ باشد خواهیم داشت، $|CN(V_i)| \leq 1$. بنابراین با در نظر گرفتن این که $V(G) = \bigcup_{i=1}^k CN(V_i)$ است، نامساوی زیر را بدست می‌آوریم.

$$|V_i \cap (V(Q_{n-2}) \times \{t\})| \geq |V_i \cap (V(Q_{n-1}) \times \{j\})| - 1 \geq |V_i| - 2$$

اگر این روند را برای $t = 1, 2$ ادامه دهیم، خواهیم داشت $|CN(V_i)| \leq 1$. بنابراین با در نظر گرفتن این که $V(G) = \bigcup_{i=1}^k CN(V_i)$ است، نامساوی زیر را بدست می‌آوریم.

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots + nl_n + (n+1)l_0 \leq 2^n \leq nl_1 + 2l_2 + l_3 + \dots + l_n.$$

به عبارت دیگر، از آن جایی که $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ ، افزایی از $V(Q_n)$ می‌باشد، بدست می‌آوریم، $k = \sum_{i=0}^n l_i$

بعد از یافتن $\chi_d^t(Q_{n-1})$ ، اگر k_0 کوچکترین عددی باشد که در شرط گزاره ۲.۵.۴ صدق کند، در این صورت

$$k_0 \leq \chi_d^t(Q_n) \leq 2\chi_d^t(Q_{n-1}).$$

خواهد بود و همچنین با مقایسه نامعادلات، نامساوی زیر را بدست می‌آوریم

$$(n+1)l_0 + 2l_3 + 3l_4 + \dots + (n-1)l_n \leq (n-1)l_1.$$

از آن جایی که ابر مکعب Q_n ، یک گراف دو بخشی همبند می‌باشد. به صورت دست‌آوردی از گزاره ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴، گزاره زیر بدست می‌آید.

گزاره ۳.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ داریم،

$$\gamma_t(Q_n) \leq \chi_d^t(Q_n) \leq \gamma_t(Q_n) + 2$$

از گزاره ۱.۵.۴، با عنوان این مطلب که، Q_n با حاصل ضرب دکارتی $Q_{n-1} \square K_2$ یکرخت است. گزاره زیر به به عنوان یک نتیجه حاصل می‌شود.

گزاره ۴.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 4$ داریم، $\gamma_t(Q_n) \leq 2^{n-2}$.

گزاره بعد مقدار $\gamma_t(Q_n)$ را محاسبه می‌کند، وقتی که $1 \leq n \leq 5$ باشد.

گزاره ۵.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $۵ \leq n \leq ۱$ داریم،

$$\gamma_t(Q_n) = \begin{cases} 2^n & \text{اگر } n = ۱, ۲, \\ 2^{n-۱} & \text{اگر } n = ۳, \\ 2^{n-۲} & \text{اگر } n = ۴, ۵. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $\{ \text{برای } ۱ \leq i \leq n, a_i \in \{0, 1\}, V(Q_n) = \{a_1 a_2 \dots a_n\}$ باشد. اگر n ، مقدار یک یا دو بگیرد، در این صورت Q_n به ترتیب، با K_2 یا C_4 یکرخت است، با توجه به تعریف احاطه گرکلی، باید رئوسی را در نظر بگیریم که به ازای هر راس از گراف مجاورتی با رئوس انتخاب شده وجود داشته باشد، لذا در گراف K_n هر دو راس را انتخاب می کنیم چون یک راس، در تعریف احاطه گری کلی، نمی تواند کلاس خود را احاطه کند و به همین دلیل در گراف C_4 که یک دور، با چهار راس می باشد نیز دو راس، مجاور را انتخاب می کنیم. لذا $\gamma_t(Q_n) = 2^n$ می باشد.

فرض کنید $n = ۳$ باشد. پس به تعداد $۲^۳ = ۸$ راس داریم که باید احاطه شوند. درجه هر راس در این گراف برابر سه می باشد لذا هر راس فقط می تواند سه راس دیگر را احاطه کند، راس a_1 را در نظر می گیریم، این راس، سه راس دیگر را احاطه می کند و چون خودش هم باید احاطه شود پس یکی از رئوس مجاورش مانند a_2 که احاطه شده را در مجموعه رئوس احاطه گر قرار می دهیم حال راس a_2 نیز می تواند سه راس دیگر را احاطه کند، از آنجایی که با راس a_1 مجاور بوده پس برای احاطه کردن، دو راس دیگر باقی می ماند که بتوانند توسط راس a_2 احاطه شوند، پس رئوس a_1 و a_2 تمام رئوس مجاور خود یعنی مجموعا شش راس را احاطه کردند، حال راس a_3 را به عنوان عضوی از مجموعه احاطه گر در نظر می گیریم، برای این که این راس احاطه شود بایستی با راس a_1 یا راس a_2 مجاور بوده باشد که در این صورت فقط یک راس برای احاطه کردن a_3 باقی می ماند از این رو هر سه راس، هفت راس را باهم، به صورت کلی احاطه می کنند و چون Q_3 دارای هشت راس می باشد لذا $\gamma_t(Q_3) > ۳$ خواهد بود. حال اگر رئوس a_1, a_2, a_3, a_4 را به صورت $a_1 = 011, a_2 = 010, a_3 = 001, a_4 = 000$ در نظر بگیریم در این صورت $S = \{000, 010, 001, 011\}$ یک TDS جدید در Q_3 است و $\gamma_t(Q_3) = 4 = 2^{n-1}$ می باشد.

حال فرض کنید $n = ۴$ باشد. پس به تعداد $۲^۴ = ۱۶$ راس وجود دارد که باید احاطه شود از آنجایی که درجه هر راس برابر ۴ می باشد پس هر راس می تواند ۴ راس دیگر را احاطه کند. اثبات مشابه حالت $n = ۳$ می باشد، از این رو هر سه راس حداکثر یازده راس را در Q_4 به طور کلی احاطه می کند و چون Q_4 ، شانزده راس دارد پس $\gamma_t(Q_4) \geq ۴$ می باشد. حال اگر رئوس a_1, a_2, a_3, a_4 را به صورت $a_1 = (1111), a_2 = (1101), a_3 = (0010), a_4 = (0000)$ در نظر بگیریم از این رو $S = \{0000, 0010, 1101, 1111\}$ یک TDS جدید در Q_4 می باشد زیرا اولاً به ازای هر راس از گراف که در نظر بگیریم، مجاورتی در مجموعه S وجود دارد و از طرف دیگر رئوس مجموعه S دوبره دو مجاورند و توسط هم احاطه می شوند لذا $\gamma_t(Q_4) = 4 = 2^{n-2}$ خواهد بود.

نهایتاً فرض کنید $n = ۵$ باشد. توجه کنید که Q_5 را می توان به چهار کپی از Q_3 ، به صورت زیرگراف القا شده، به نام های $Q_3^{(1)}, Q_3^{(2)}, Q_3^{(3)}, Q_3^{(4)}$ افراز کرد، به طوری که برای هر i ، هر راس در $Q_3^{(i)}$ ، با یک راس در $Q_3^{(i-1)}$ و با یک راس در $Q_3^{(i+1)}$ مجاور است و با هیچ راسی در $Q_3^{(i+2)}$ مجاور نیست.

فرض کنید S یک TDS دلخواه در Q_5 باشد. اگر به ازای هر i ، داشته باشیم $|S \cap V(Q_3^{(i)})| \geq 2$ ، یعنی حداقل دوتا از رئوس $Q_3^{(i)}$ در مجموعه احاطه گر کلی حضور دارند حال چون چهار کپی از Q_3 داریم لذا S حداقل دارای ۸ عضو می باشد که در این صورت $|S| \geq 8$ خواهد بود. همچنین اگر برای i ای داشته باشیم $|S \cap V(Q_3^{(i)})| = 0$ ، به این ترتیب رئوس $Q_3^{(i)}$ ، بایستی توسط رئوس $Q_3^{(i-1)}$ و $Q_3^{(i+1)}$ احاطه شوند و چون $Q_3^{(i)}$ دارای ۸ راس است که باید احاطه شود لذا این رئوس می بایست با ۸ راس در مجموعه احاطه گر مجاور باشند، در این صورت $|S \cap (V(Q_3^{(i-1)}) \cup V(Q_3^{(i+1)}))| \geq 8$ بوده و در نتیجه $|S| \geq 8$ می باشد. بنابراین فرض می کنیم $|S \cap V(Q_3^{(1)})| = 1$ باشد در این صورت $Q_3^{(1)}$ دارای یک راس در مجموعه ای احاطه گر کلی است و چون درجه هر راس در $Q_3^{(i)}$ ، برابر سه می باشد پس این راس می تواند سه راس از رئوس گراف $Q_3^{(i)}$ را احاطه کند، در نتیجه ۵ راس باقی می ماند که احاطه نشده است و

$|V(Q_3^{(1)}) - N_{Q_3^{(1)}}(S \cap V(Q_3^{(1)}))| = 5$ بوده پس این ۵ راس باقی مانده می بایست توسط $Q_3^{(i+1)}$ و $Q_3^{(i-1)}$ احاطه شوند و نتیجه می دهد که $|S \cap V(Q_3^{(2)}) \cup V(Q_3^{(4)})| \geq 5$ بوده و همچنین $|S| \geq 7$ خواهد بود.

اگر $|S| = 7$ باشد، چون $|S \cap V(Q_3^{(1)})| = 1$ در نظر گرفتیم و چون $Q_3^{(1)}$ با $Q_3^{(2)}$ و $Q_3^{(4)}$ مجاور است و با $Q_3^{(3)}$ ، هیچ مجاورتی ندارد می توان فرض کرد که $|S \cap V(Q_3^{(1)})| = |S \cap V(Q_3^{(4)})| = 1$ ، $\{|S \cap V(Q_3^{(2)})|, |S \cap V(Q_3^{(3)})|\} = \{2, 3\}$ ، مجموعه احاطه گر کلی است و هر راس در $Q_3^{(1)}$ تنها به تعداد درجه خود از رئوس دیگر را احاطه می کند لذا $|S \cap V(Q_3^{(1)}) - N_{Q_3^{(1)}}[S \cap V(Q_3^{(1)})]|$ با $K(1, 3)$ یکرخت است، که بوسیله S احاطه نمی شوند. بنابراین $|S| \geq 8$. از این رو S یک TDC دلخواه در Q_5 است به طوری که $\gamma_t(Q_5) \geq 8$. از طرف دیگر، از گزاره ۱.۵.۴ داریم $\gamma_t(Q_4) = 8$ ، در نتیجه $\gamma_t(Q_5) = 8$ می باشد. $\square$

با در نظر گرفتن گزاره ۵.۵.۴، احتمال می دهیم که تساوی در گزاره ۴.۵.۴ صدق کند.

حس ۱.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 6$ داریم: $\gamma_t(Q_n) = 2^{n-2}$.

گزاره زیر، به صورت دست آوردی از گزاره های ۳.۵.۴ و ۴.۵.۴ می باشد.

گزاره ۶.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 4$ داریم، $\chi_d^t(Q_n) \leq 2^{n-2} + 2$.

نتیجه ۱.۵.۴. [۱۲] اگر حس ۱.۵.۴، درست باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح $n \geq 6$ داریم:

$$2^{n-2} \leq \chi_d^t(Q_n) \leq 2^{n-2} + 2$$

در گزاره بعد مقدار $\chi_d^t(Q_n)$ را برای $1 \leq n \leq 4$ محاسبه می کنیم.

گزاره ۷.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $1 \leq n \leq 4$ داریم:

$$\chi_d^t(Q_n) = \begin{cases} 2^n & \text{اگر } n = 1, \\ 2^{n-1} & \text{اگر } n = 2, 3, \\ 2^{n-2} + 2 & \text{اگر } n = 4. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $\{ \text{برای } n \leq i \leq n, a_i \in \{0, 1\}, a_1 a_2 \dots a_n \} = V(Q_n)$ باشد. اگر n برابر یک یا دو باشد، در این صورت Q_n به ترتیب با K_2 یا C_4 هم‌ریخت است، در این صورت طبق تعریف رنگ‌آمیزی احاطه‌گرکلی، $\chi_d^t(Q_n) = 2$ می‌باشد. چون گراف K_2 دارای دو راس مجاور می‌باشد که برای رنگ‌آمیزی آن‌ها به دو رنگ نیاز داریم و در گراف C_4 نیز دور زوج داریم که برای رنگ‌آمیزی آن به دو رنگ نیاز داریم که به صورت یک‌درمیان به رئوس C_4 اختصاص داده می‌شود. در هر دو گراف، به ازای هر راسی که در نظر بگیریم یک کلاس رنگ وجود خواهد داشت که توسط آن راس احاطه شود. برای $n = 3$ ، با استفاده از گزاره ۳.۵.۴ و ۵.۵.۴ داریم $\gamma_t(Q_3) = 4$ و $\chi_d^t(Q_3) \geq 4$ ادعا می‌کنیم تابع

$$f = (\{000, 011\}, \{001, 010\}, \{100, 111\}, \{110, 101\})$$

یک TDC در Q_3 می‌باشد. برای اثبات این ادعا دو مورد، مجاز بودن رنگ‌آمیزی و احاطه‌گری کلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، اولاً این رنگ‌آمیزی مجاز است زیرا رئوس موجود در هر کلاس مجاور نیستند چون طبق تعریف، مجاورت زمانی برقرار بود که رئوس گراف تنها در یک درایه متفاوت باشند لذا رنگ‌آمیزی مجاز است از طرفی به ازای هر راسی که در نظر بگیریم یک کلاس وجود دارد که توسط راس مورد نظر احاطه شود پس ادعای ما ثابت شد و خواهیم داشت $\chi_d^t(Q_3) = 4$. اگر $n = 4$ باشد، در این صورت با استفاده از این واقعیت که $\gamma_t(Q_3) = \chi_d^t(Q_3) = 4$ است و به کمک گزاره‌ی ۱.۵.۴ داریم:

$$\chi_d^t(Q_{n-1}) + 1 \leq \chi_d^t(Q_n) \leq 2\chi_d^t(Q_{n-1})$$

$$\Rightarrow \chi_d^t(Q_3) + 1 \leq \chi_d^t(Q_4) \leq 2\chi_d^t(Q_3).$$

$$\Rightarrow 4 + 1 \leq \chi_d^t(Q_4) \leq 2 \times 4$$

$$\Rightarrow 5 \leq \chi_d^t(Q_4) \leq 8$$

و همچنین به کمک گزاره ۳.۵.۴ داریم:

$$\gamma_t(Q_n) \leq \chi_d^t(Q_n) \leq \gamma_t(Q_n) + 2$$

$$\Rightarrow \gamma_t(Q_4) \leq \chi_d^t(Q_4) \leq \gamma_t(Q_4) + 2$$

$$\Rightarrow 4 \leq \chi_d^t(Q_4) \leq 4 + 2$$

$$\Rightarrow 4 \leq \chi_d^t(Q_4) \leq 6$$

و نتیجه می‌گیریم که $5 \leq \chi_d^t(Q_4) \leq 6$ می‌باشد.

از گزاره ۲.۵.۴ داریم:

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots + nl_n + (n+1)l_0 \leq 2^n \leq nl_1 + 2l_2 + l_3 + \dots + l_n.$$

$$\Rightarrow^{n=4} l_1 + 2l_2 + 3l_3 + 4l_4 + 5l_0 \leq 16 \leq 4l_1 + 2l_2 + l_3 + l_4.$$

$$\implies 2l_3 + 3l_4 + 5l_5 \leq 3l_1$$

گزاره ۲.۵.۴ برای $n = 4$ و $k = 5$ ، برقرار نیست، چون در آن صورت خواهیم داشت $15 \leq 16$ ، که تناقض می باشد، در نتیجه داریم $\chi_d^t(Q_4) = 6$. $\square$

حدس می زنیم که اگر $n \geq 5$ باشد، در این صورت عدد رنگی احاطه گر کلی گراف Q_n ، برابر کران بالای داده شده در نتیجه ۲.۵.۴ باشد.

حدس ۲.۵.۴. [۱۲] برای هر عدد صحیح $n \geq 5$ داریم: $\chi_d^t(Q_n) = 2^{n-2} + 2$.

مراجع

- [1] Chellali M. and Maffray F. (2012), " Dominator colorings in some classes of graphs" *Graphs Combin.* 28 97–107.
- [2] Fink J.F. and Jacobson M.S. Kinch L.F. Roberts J. (1985), " On graphs having domination number half their order" *Period. Math. Hungar.* 16, 287–293
- [3] Gera R. (2007), " On the dominator colorings in bipartite graphs" *Inform. Technol. New Gen., ITNG07* 947–952 .
- [4] Gera R. (2007), " On dominator colorings in graphs" *Graph Theory Notes N. Y.* LII 25–30.
- [5] Gera R., Horton S. and Rasmussen C. (2006), " Dominator colorings and safe clique partitions " *Congress. Num.* 181 19–32.
- [6] Haynes T. W. Hedetniemi S. T. Slater P. J. (1998), "**Domination in Graphs**" Advanced Topics, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 209, Marcel Dekker, Inc. New York, .
- [7] Haynes T. W., Hedetniemi S. T. and Slater P. J. (1998), **Fundamentals of Domination in Graphs**, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 208, Marcel Dekker, Inc., New York, .
- [8] Henning M. A. and Yeo A. (2013), "**Total domination in graphs**" (Springer Monographs in Mathematics) ISBN: 978-1-4614-6524-9 (Print) 978-1-4614-6525-6 (Online).
- [9] Kazemi A. P. "Total dominator chromatic number of a graph" Manuscript, arXiv:1307.7486 [math.CO].
- [10] Kazemi A. P. "Total dominator chromatic number and Mycielskian graphs" Manuscript, arXiv:1307.7706 [math.CO].

- [11] Kazemi A. P., Pahlavsay B. "k-tuple total domination number of Cartesian product graphs" submitted.
- [12] Kazemi A. P. "Total dominator coloring in product graphs" Utilitas Mathematica, accepted.
- [13] Ore, O. (1962), "**Theory of graphs**", Am. Math. Soc. Colloq. Publ . 38
- [14] Payan C. and Xuong N.H. (1982), "Domination-balanced graphs" J. Graph Theory 6, 23–32
- [15] Seinsche D. (1974), "On a property of the class of n-colorable graphs" J. Combin. Theory B 16, 191–193
- [16] West D. B. (2001), "**Introduction to Graph Theorey**", 2nd ed., Prentice Hall, USA

پیوست

پیشنهادهات

مسائل باز زیر، جهت مطالعه بیشتر پیشنهاد می شود.

مسئله آ.۱۰۰. پیدا کردن کران هایی برای $\chi_d^t(G) + \chi_d^t(\bar{G})$ و $\chi_d^t(G) \cdot \chi_d^t(\bar{G})$.

مسئله آ.۲۰۰. پیدا کردن عدد رنگی احاطه گر کلی برای درختی با قطر کمتر از ۶.

مسئله آ.۳۰۰. پیدا کردن گراف G ، به طوری که برای $k \geq 3$ ، داشته باشیم $\chi_d^t(G) = k$.

مسئله آ.۴۰۰. پیدا کردن گراف G که در روابط زیر صدق کند:

$$1. \chi_d^t(G) = \chi_d(G)$$

$$2. \chi_d^t(G) = \chi(G)$$

$$3. \chi_d^t(G) = \gamma_t(G) \text{ و یا}$$

$$4. \chi_d^t(G) = \gamma_t(G) + \min_S \chi(G[V(G) - S]), \text{ که } S \subset V(G), \gamma_t(G) - \text{عضوی باشد.}$$

مسئله آ.۵۰۰. پیدا کردن گراف های G و H ، بطوریکه در رابطه زیر صدق کنند.

$$\chi_d^t(G \times H) = \chi_d^t(G) \cdot \chi_d^t(H)$$

مسئله آ.۶۰۰. پیدا کردن کران پائین برای $\chi_d^t(G \times H)$.

مسئله آ.۷.۰. پیدا کردن کران بالا و پائین، دقیق تر برای $\chi_d^t(G \times H)$ ، اگر G یا H ، خانواده‌ای از گراف‌های داده شده باشند.

مسئله آ.۸.۰. اثبات حدس داده شده در ۱.۵.۴ و ۲.۵.۴.

مسئله آ.۹.۰. ثابت کردن این مطلب که برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ و $m \geq 2$ داریم

$$\chi_d^t(P_n \square K_m) = \begin{cases} m & \text{اگر } m \geq n, \\ n & \text{اگر } m = 2 \text{ و } n \text{ زوج باشد.} \\ n + m - 1 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

مسئله آ.۱۰.۰. ثابت کردن این مطلب که برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ و $m \geq 2$ ، داریم

$$\chi_d^t(C_n \square K_m) = \begin{cases} n + m - 1 & \text{اگر } m = 2 \text{ و } n \text{ فرد باشد، یا } m \geq 4 \text{ زوج باشد.} \\ n & \text{اگر } m = 2 \text{ و } n \text{ زوج باشد.} \\ n + 2m - 2 & \text{اگر } m = 2 \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

Aabstract

For any integer k , a k -coloring of a graph G is a mapping $c : V(G) \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$ such that any two adjacent vertices u and v recieve different colors, i. e, $c(u) \neq c(v)$. The smallest integer k such that G admits a k -coloring is called the chromatic number of G , denoted by $\chi(G)$.

A dominator coloring of a graph G is a coloring such that every vertex of $V(G)$ dominates all vertices of at least one color class. The dominator chromatic number $\chi_d(G)$ is the minimum number of colors in a dominator coloring of G .

Also, a total dominator coloring is a proper coloring of G in which each vertex of G is adjacent to every vertex of some color class. The total dominator chromatic number of G , $\chi_d^t(G)$, is the minimum number of colors in a total dominator coloring of G .

In this work, we study the total dominator chromatic number on several classes of graphs, as well as finding general bounds presending and characterizations. We also compare the total dominator chromatic number of a graph with the chromatic number and the total domination number of it.

Keywords: dominator coloring, total dominator coloring, cross product, cartesian product, hypercubes.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graphs and combinatorics

Some results in total dominator coloring of graphs

By: Narjess Khatoon Majidi

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

January 2017