دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تجزیه شبه SVD ماتریس و کاربردهای آن

راضیه غلامی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به

پدر و مادرم

و همه‌ی کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس گزاری...

سپاس خداوند یکتاي عزتمندي که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی نهایت سپاس می‌گویم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ي مطلوب نائل آیم. به راستی که همه چیز از آن اوست و همه چیز به خواست اوست.

از استاد گرانقدر و فرهیخته **جناب آقاي دکتر حجت احسنی طهرانی** که با راهنمایی‌هاي سازنده‌شان همواره درکنار من بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. ایشان در نهایت دلسوزي و همیاري با کمک‌ها و پیشنهادهاي ارزشمندشان انجام این تحقیق را امکان‌پذیر نمودند.

از استاد بزرگوارم، **جناب آقاي دکتر مهدی قوتمند** که استاد مشاور اینجانب بودند هم صمیمانه سپاسگزارم.

از داوران محترم **جناب آقاي دکتر علی مس‌فروش** و **جناب آقاي دکتر محمدهادی نوری‌اسکندری** به خاطر پذیرش مسئولیت داوري این پایان‌نامه از سوي ایشان و توفیق بزرگی که نصیب اینجانب نموده‌اند، کمال تشکر را دارم.

از تمام اساتید بزرگوار دانشکده ریاضی که باعث پیشرفت اینجانب بوده‌اند، سپاسگزارم. همچنین از دوستان عزیز و همکلاسی‌هاي بزرگوارم، که همواره پشتوانه محکمی براي من بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

راضیه غلامی

شهریور ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **راضیه غلامی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تجزیه شبه** SVD **ماتریس و کاربردهای آن** ، تحت راهنمایی **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

راضیه غلامی
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ماتریس‌های سیمپلکتیک نقش مهمی در تجزیه و تحلیل و حل مسائل ماتریس ایفا می‌کنند. تبدیلات تشابهی سیمپلکتیک ساختارهای همیلتونی ،شبه‌همیلتونی و ماتریس‌های سیمپلکتیک را حفظ می‌کنند. بر اساس این حقیقت ماتریس‌های سیمپلکتیک به عنوان ابزار اصلی در تجزیه و تحلیل و حل عددی مسائل همیلتونی و مقدار ویژه سیمپلکتیک مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این پایان‌نامه چندین تجزیه مربوط به ماتریس‌های سیمپلکتیک و نیز تجزیه شبه مقدار منفرد $B = QDS^{-1}$ برای هر ماتریس حقیقی $B \in \mathbb{R}^{n\times 2m}$ که در آن ماتریس Q متعامد حقیقی و ماتریس S سیمپلکتیک حقیقی و D ماتریس قطری می‌باشد معرفی گردیده است و نیز ارتباط بین این تجزیه و فرم متعارف از ماتریس‌های پادمتقارن حقیقی معرفی شده است. همچنین نشان داده شده که هر ماتریس سیمپلکتیک داری تجزیه مقدار منفرد ساختارمند $S = UDV^*$ است که در آن ماتریس‌های U و V سیمپلکتیک یکانی و $D = \mathrm{diag}(\Omega, \Omega^{-1})$ ، Ω ماتریس قطری مثبت می‌باشند. همچنین به مطالعه فاکتورگیری BJB^T از ماتریس‌های پادمتقارن حقیقی پرداخته شده است. این فاکتورگیری در حل سیستم‌های پادمتقارن در معادلات خطی و مسائل مقادیرویژه خارج قسمت مدادی متقارن/پادمتقارن کاربرد دارد. فاکتورگیری BJB^T منحصربه‌فرد نمی‌باشد و در کاربردهای عددی برای پایداری عددی نیاز به عامل B با مینیمم نرم و عدد شرطی است. در این پایان‌نامه با به‌کارگیری تجزیه شبه مقدار منفرد و تجزیه مقدار منفرد ماتریس‌های سیمپلکتیک فرم کلی از عامل B با مینیمم نرم و عدد شرطی ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: ماتریس پادمتقارن، ماتریس سیمپلکتیک، ماتریس سیمپلکتیک متعامد، ماتریس همیلتونی، مسائل مقدار ویژه، تجزیه مقدار منفرد، تجزیه شبه مقدار منفرد، تجزیه BJB^T ، فرم شور، فرم متعارف جوردن.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصل‌های بعدی می‌باشد.

نمادگذاری

مجموعه‌ی $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط و مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی در نظر گرفته می‌شود.

۱.۱ ماتریس

تعریف ۱.۱.۱. گردایه‌ای از n بردار در $\mathbb{R}^n$ مرتب شده، در یک آرایه مستطیلی m سطری و n ستونی یک ماتریس نامیده می‌شود. بنابراین ماتریس A دارای شکل زیر می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

این ماتریس با $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ، یا به‌طور ساده $A = (a_{ij})$ نمایش داده می‌شود، از آن استنباط می‌شود که $i = ۱, ۲, \cdots, m$ و $j = ۱, ۲, \cdots, n$. ماتریس A از مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود. مجموعه همه ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ توسط $\mathbb{R}^{m\times n}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. ماتریسی که همه‌ی عناصر آن اعداد حقیقی باشد ماتریس حقیقی[۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. ماتریسی که همه یا بعضی از عناصر آن اعداد مختلط غیر حقیقی باشد ماتریس مختلط[۲] نامیده می‌شود.

[۱] Real matrix

[۲] Complex matrix

۲.۱ رتبه ماتریس

اگر A ماتریسی با مرتبه $m \times n$ باشد فضای برداری به وجود آمده توسط ستون‌های A فضای ستونی A نامیده می‌شود. برد A نیز همان فضای ستونی A می‌باشد.
رتبه ماتریس A بعد فضای ستونی A می‌باشد و با $\mathrm{rank}(A)$ نمایش داده می‌شود. یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد نامیده می‌شود اگر $\mathrm{rank(A) = n}$ باشد و در غیر این‌صورت منفرد می‌باشد.
ماتریس A از مرتبه $m \times n$ ، $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ دارای رتبه ستونی کامل است اگر ستون‌های آن مستقل خطی باشند. رتبه سطری کامل به‌طور مشابه تعریف می‌شود. ماتریس A رتبه کامل است اگر دارای رتبه سطری کامل و یا رتبه ستونی کامل باشد و اگر دارای رتبه کامل نباشد، ناقص رتبه نامیده می‌شود [۱۰].

۳.۱ دترمینان ماتریس

برای هر ماتریس مربعی A اسکالر یکتا وابسته به این ماتریس وجود دارد که *دترمینان* A نامیده می‌شود و با $\det(A)$ و یا $|A|$ نمایش داده می‌شود. برای ماتریس A از مرتبه ۲ × ۲:

$$\det(A) = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21}.$$

برای ماتریس A از مرتبه ۳ × ۳:

$$\det(A) = \mathrm{a}_{11}\det(A_{11}) - \mathrm{a}_{12}\det(A_{12}) + \mathrm{a}_{13}\det(A_{13}),$$

که در آن A_{1i} زیرماتریس ۲ × ۲ است و از حذف سطر اول و ستون iام به‌دست آمده است. این تعریف به آسانی می‌تواند تعمیم داده شود. بنابراین برای ماتریس $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij})$ از مرتبه $n \times n$ داریم:

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2}) + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in}),$$

که در آن A_{ij} زیرماتریسی از ماتریس A از مرتبه $(n-1)$ می‌باشد و از حذف سطر iام و ستون jام به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۳.۱. *خواص ساده زیر، برای دترمینان برقرار است:*

۱. $\det(A) = \det(A)^T$.

۲. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ *که در آن* α *یک اسکالر است.*

۳. $\det(AB) = \mathrm{detA.detB}$.

۴. *اگر دو سطر یا دو ستون* A *یکسان باشند آن‌گاه* $\det(A) = 0$.

۵. *اگر* B *ماتریس به‌دست آمده از* A *با تعویض دو سطر یا دو ستون باشد آن‌گاه* $\det(B) = -\det(A)$.

۶. *دترمینان ماتریس مثلثی (پایین‌مثلثی یا بالامثلثی) برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطری آن می‌باشد.*

۴.۱ انواع ماتریس

تعریف ۱.۴.۱. دو ماتریس A و B را می‌توان به‌شکل زیر افراز نمود:

$$A = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{۱۱} & B_{۱۲} \\ B_{۲۱} & B_{۲۲} \end{bmatrix}.$$

که به آن‌ها ماتریس‌هاي بلوکی می‌گویند و هر بلوك آن مولفه‌اي از ماتریس تلقی می‌شود. با فرض اینکه افراز به‌صورت مناسبی انجام شده باشد که جمع و ضرب‌هاي ماتریسی متناظر امکان‌پذیر باشد، آن‌گاه جمع و ضرب ماتریس‌هاي بلوکی به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{۱۱} + B_{۱۱} & A_{۱۲} + B_{۱۲} \\ A_{۲۱} + B_{۲۱} & A_{۲۲} + B_{۲۲} \end{bmatrix}.$$

و

$$AB = \begin{bmatrix} A_{۱۱}B_{۱۱} + A_{۱۲}B_{۲۱} & A_{۱۱}B_{۱۲} + A_{۱۲}B_{۲۲} \\ A_{۲۱}B_{۱۱} + A_{۲۲}B_{۲۱} & A_{۲۱}B_{۱۲} + A_{۲۲}B_{۲۲} \end{bmatrix}.$$

در ضرب، ماتریس‌ها به‌گونه‌اي افراز شده‌اند که عمل ضرب تسهیل شود، بنابراین اگر $A = (A_{ij})$ و $B = (B_{ij})$ دو ماتریس بلوکی باشند آنگاه $C = AB$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C = (C_{ij}) = \left(\sum_{k=۱}^{n} A_{ik} B_{kj} \right).$$

که C خود یک ماتریس بلوکی است.

تعریف ۲.۴.۱. ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر نامیده می‌شود و ماتریس صفر از مرتبه $m \times n$ را با نماد $O_{m\times n}$ نشان داده می‌شود و داریم:

$$O_{m\times n} = [\circ]_{m\times n}.$$

تعریف ۳.۴.۱. ماتریس مربعی I با مرتبه n را همانی گویند، هرگاه به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ داشته باشیم $a_{ii} = ۱$ و به‌ازای $i \neq j$ داشته باشیم، $a_{ij} = \circ$.

تعریف ۴.۴.۱. اگر α یک اسکالر و I_n ماتریس همانی از مرتبه n باشد، آنگاه αI_n را یک ماتریس اسکالر گویند.

چند خاصیت از ماتریس ها: اگر A ، B و C سه ماتریس $m \times n$ و α, β دو اسکالر دلخواه باشند،

آن‌گاه:

$$A+B=B+A$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$
$$A+(-A)=O_{m\times n}$$
$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$
$$۱.A=A$$

- اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[C_{ij}]_{p\times q}$ آن‌گاه $A(BC)=(AB)C$.
- اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[C_{ij}]_{n\times p}$ باشد داریم، $A(B+C)=AB+AC$.
- اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ باشد آن‌گاه، $AI_n=I_nA=A$ در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد حتی اگر AB و BA تعریف شده باشند.

تعریف ۵.۴.۱. ماتریس‌های مثلثی[۳] به دو صورت بالامثلثی[۴] و پایین‌مثلثی[۵] بیان می‌شوند، شکل کلی یک ماتریس بالامثلثی و پایین‌مثلثی به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشد.

$$U=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad U_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i\leq j, \\ ۰, & i>j. \end{cases}$$

$$L=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i\geq j, \\ ۰, & i<j. \end{cases}$$

تعریف ۶.۴.۱. ماتریسی که ترانهاده‌اش با خودش برابر باشد ماتریس متقارن[۶] نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر برای هر ماتریس متقارن A،

$$A=A^T.$$

[۳]Triangular
[۴]Upper Triangular
[۵]Lower Triangular
[۶]Symmetric

تعریف ۷.۴.۱. اگر ماتریس A با منفی ترانهاده‌اش برابر باشد، آن ماتریس شبه‌متقارن[۷] یا پادمتقارن نامیده می‌شود.

$$A = -A^T, \quad a_{ij} = -a_{ji}.$$

تعریف ۸.۴.۱. ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن به‌غیر از عناصر قطر اصلی همگی صفر باشند ماتریس قطری[۸] نامیده، و به‌شکل زیر نشان داده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = ۰, \quad i \neq j.$$

ماتریس قطری به‌شکل زیر نیز نمایش داده می‌شود.

$$A = \mathrm{diag}(\mathrm{a}_{۱۱}, \mathrm{a}_{۲۲}, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{nn}}).$$

ماتریسی که درایه‌های خارج از قطر فرعی آن صفر باشد ماتریس شبه‌قطری[۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۴.۱. ماتریس قطري-بلوکی یک ماتریس $n\times n$ است که هر مولفه روي قطر اصلی یک ماتریس مربعی است و دیگر مولفه‌ها صفر هستند، و ماتریس قطری بلوکی به‌شکل $\mathrm{diag}(\mathrm{A}_{۱۱}, \mathrm{A}_{۲۲}, \cdots, \mathrm{A}_{\mathrm{nn}})$ نمایش داده می‌شوند. هر A_{ii} یک ماتریس مربعی است و جمع رتبه آن‌ها برابر با n می‌باشد. دترمینان ماتریس قطري-بلوکی به‌شکل زیر تعیین می‌شود:

$$\det(A) = \det(A_{۱۱}) \det(A_{۲۲}) \cdots \det(A_{nn}).$$

تعریف ۱۰.۴.۱. ماتریس ترانهاده مزدوج[۱۰]، همان مزدوج ترانهاده يك ماتریس است. ترانهاده مزدوج ماتریس A با نماد $\overline{A}^T$ یا A^* نشان داده می‌شود.

- بدیهی است که مزدوج A^T همان ترانهاده $\overline{A}$ است و $(A^*)^* = A$ می‌باشد.
- همچنین اگر ماتریس‌های $A + B$ و AB قابل تعریف باشند، آن‌گاه:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

- اگر c یک عدد مختلط باشد آن‌گاه:

$$(cA)^* = \overline{c} A^*.$$

[۷] Skew-symmetric matrix

[۸] Diagonal matrix

[۹] Skew-diagonal matrix

[۱۰] Conjugate Transposed

- در صورتی‌که A ماتریسی حقیقی باشد، آن‌گاه $A^* = A^T$ می‌باشد.
- برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره تساوی $|A^*| = |\overline{A}|$ برقرار می‌باشد.
- برای ماتریس نامنفرد $A_{n\times n}$ همواره داریم:

$$(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*.$$

تعریف ۱۱.۴.۱. ماتریس مربعی A یکانی[۱۱] نامیده می‌شود، هرگاه

$$AA^* = A^*A = I.$$

که در آن A^* برابر ترانهاده مزدوج A است.

تعریف ۱۲.۴.۱. ماتریس حقیقی A ماتریس متعامد[۱۲] نامیده می‌شود اگر رابطه زیر را برآورده سازد.

$$AA^T = A^TA = I.$$

- برای هر ماتریس متعامد، بدیهی است که باید $|A| = \pm ۱$ باشد و لذا ماتریس A نامنفرد است.
- در ماتریس متعامد، معکوس ماتریس برابر ترانهاده آن ماتریس است. $A^{-۱} = A^T$
- اگر A و B ماتریس‌های مربعی متعامد باشند، آن‌گاه $A^{-۱}$، A^T و AB نیز ماتریس‌های متعامد می‌باشند.
- از آنجایی‌که ماتریس‌های متعامد تساوی $AA^* = A^*A = I$ را برآورده می‌سازند، از این رو یکانی هستند.
- مدل مختلط ماتریس متعامد، ماتریس یکانی است.

تعریف ۱۳.۴.۱. اگر ماتریس مختلط A رابطه زیر را برآورده سازد آن را یک ماتریس هرمیتی[۱۳] گویند.

$$A^* = A.$$

- هر ماتریس هرمیتی مربعی می‌باشد و درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر یا حقیقی است.
- معکوس یک ماتریس هرمیتی مانند A، هرمیتی می‌باشد. به‌عبارت دیگر $A^{-۱} = (A^{-۱})^*$ می‌باشد.
- اگر ماتریس‌های A و B هرمیتی باشند آنگاه ماتریس‌های $A + B$ ، $A - B$ و $AB + BA$ نیز هرمیتی می‌باشند.

---
[۱۱] Unitary matrix
[۱۲] Orthogonal matrix
[۱۳] Hermitian matrix

- دترمینان یک ماتریس هرمیتی همواره حقیقی است، زیرا:

$$|A| = |A^*| = |\overline{A}|.$$

تعریف ۱۴.۴.۱. ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را ماتریس غیرمنفرد[۱۴] یا ناویژه گفته می‌شود اگر ماتریسی مانند $B_{n\times n}$ چنان وجود داشته باشد، که $AB = BA = I$ باشد این ماتریس را با نماد A^{-1} نشان داده و به آن معکوس[۱۵] ماتریس A می‌گویند. اگر A^{-1} وجود نداشته باشد ماتریس A را منفرد[۱۶] یا ویژه گویند.
نکته: ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که دترمینان ماتریس A غیر صفر باشد.

تعریف ۱۵.۴.۱. برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه K ماتریس شبه معکوس[۱۷] $A^\dagger$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_{m\times n} = U\Sigma V^T \quad \longrightarrow \quad A^\dagger_{n\times m} = V\Sigma^\dagger U^T,$$

در آن داریم،

$$\Sigma^\dagger_{n\times m} = \mathrm{diag}(1/\omega_1, 1/\omega_2, \cdots, 1/\omega_k, 0, \cdots, 0), \quad \omega_1 \geq \omega_2 \geq \cdots \geq \omega_k > 0.$$

که ω_i نشان دهنده مقادیر منفرد ماتریس A است. ستون‌های ماتریس $U_{m\times m}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T و ستون‌های ماتریس $V_{n\times n}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA تشکیل می‌شوند. به عبارت دیگر ماتریس $A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$، هنگامی که A یک ماتریس $m\times n$ $(m \geq n)$ بوده و دارای رتبه n می‌باشد، یا ماتریس $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$، هنگامی که A یک ماتریس $m \times n$ $(m < n)$ بوده و دارای رتبه m می‌باشد، شبه معکوس یا معکوس تعمیم یافته مور[۱۸]− پنروز[۱۹] A نامیده می‌شوند.

به‌طور واضح این تعریف شبه معکوس تعریف معمولی معکوس ماتریس مربعی را تعمیم می‌دهد. توجه کنید که اگر A مربعی و معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه:

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T = A^{-1}(A^T)^{-1}A^T = A^{-1}.$$

چهار خاصیت شبه معکوس

ماتریس شبه معکوس تعریف شده داراي شرایط زیر است،

۱. $AA^\dagger A = A$

[۱۴] Nonsingular
[۱۵] Inverse
[۱۶] Singular
[۱۷] Pseudo - Inverse
[۱۸] Moore
[۱۹] Penrose

۲. $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$

۳. $(AA^{\dagger})^T = AA^{\dagger}$

۴. $(A^{\dagger}A)^T = A^{\dagger}A$

این چهار شرط را شرایط مور- پنرُوز نامیده می‌شود. علاوه بر این برخي از خواص ماتریس شبه معکوس عبارتند از:

- $(A^{\dagger})^{\dagger} = A \quad , \quad (A^T)^{\dagger} = (A^{\dagger})^T$
- $A^{\dagger} = (A^TA)^{\dagger}A^T = A^T(AA^T)^{\dagger}$
- ماتریس‌های $A^{\dagger}A$ ، $I - A^{\dagger}A$ و $I - AA^{\dagger}$ متقارن هستند.

شبه معکوس یک ماتریس همیشه وجود دارد و منحصربه‌فرد است. از ماتریس شبه معکوس براي حل مسئله حداقل مربعات استفاده مي‌شود، جزئیات بیشتر از شبه معکوس یک ماتریس مستطیلی، در [۶] بیان شده است.

تعریف ۱.۴.۱۶. ماتریس متقارن A معین مثبت[۲۰] نامیده می‌شود اگر براي هر بردار ناصفر x داشته باشیم:

$$x^TAx > 0.$$

و ماتریس A معین نامنفی یا نیمه معین مثبت[۲۱] نامیده می‌شود، هرگاه براي هر بردار ناصفر x داشته باشیم:

$$x^TAx \geqslant 0.$$

اگر x^TAx بتواند علامت‌هاي مثبت، منفي و صفر را داشته باشد ماتریس نامعین[۲۲] نامیده می‌شود.

برخی مشخصه‌ها و خاصیت‌های ماتریس معین مثبت

۱. ماتریس متقارن معین مثبت است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشد.

۲. مجموع دو ماتریس معین مثبت یک ماتریس معین مثبت می‌باشد.

۳. اگر $A = (a_{ij})$ معین مثبت باشد، آنگاه به‌ازای همه مقادیر i، $a_{ii} > 0$ می‌باشد.

[۲۰] Positive Definite
[۲۱] Positive Semi Definite
[۲۲] Indefinite

۴. اگر $A=(a_{ij})$ معین مثبت باشد، آنگاه بزرگترین عنصر (از لحاظ اندازه) ماتریس باید بر روی قطر قرار داشته باشد.

تعریف ۱۷.۴.۱. ماتریس مربعی مخالف صفر مانند P یک ماتریس جایگشت[۲۳] نامیده می‌شود اگر تنها یک عنصر مخالف صفر که ۱ است در هر سطر و هر ستون یافت شود و بقیه همگی برابر صفر باشند. بنابراین اگر $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ یک جایگشت از $(1, 2, \cdots, n)$ باشد، آنگاه

$$P=\begin{bmatrix} e_{\alpha_1}^T \\ e_{\alpha_2}^T \\ \vdots \\ e_{\alpha_n}^T \end{bmatrix}.$$

که در آن e_i ، i امین ستون ماتریس واحد I از مرتبه $n \times n$ می‌باشد. به طور مشابه ماتریس

$$P=(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_n}).$$

که در آن e_i ، i امین ستون I می‌باشد، ماتریس جایگشت است. خاصیت مهم ماتریس جایگشت متعامد بودن آن است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

۱. معکوس یک ماتریس جایگشت P ترانهاده آن است و ترانهاده آن نیز یک ماتریس جایگشت است.

۲. حاصل‌ضرب دو ماتریس جایگشت یک ماتریس جایگشت است و در نتیجه متعامد است.

تعریف ۱۸.۴.۱. *ماتریس‌های متشابه.* دو ماتریس A و B متشابه نامیده می‌شوند، اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته باشد به‌قسمی که،

$$T^{-1}AT=B,$$

خاصیت مهم ماتریس‌های متشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند [۶].

تعریف ۱۹.۴.۱. ماتریس $S \in C^{2m\times 2m}$ سیمپلکتیک[۲۴] نامیده می‌شود اگر

$$SJ_mS^*=J_m,$$

که در آن

$$J_m=\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}.$$

می‌باشد [۱۷].

[۲۳] Permutation matrix
[۲۴] Symplectic

تعریف ۲۰.۴.۱. اگر ماتریس $S \in C^{2m\times 2m}$ یکانی و سیمپلکتیک باشد S یکانی سیمپلکتیک[۲۵] نامیده می‌شود و در حالت حقیقی S سیمپلکتیک متعامد[۲۶] می‌باشد.
ماتریس سیمپلکتیک را $J-$متعامد نیز می‌نامند.

مثال ۲۱.۴.۱. برای ماتریس سیمپلکتیک حقیقی $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

و همچنین برای ماتریس سیمپلکتیک

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تعریف ۲۲.۴.۱. ماتریس $A \in C^{2m\times 2m}$ ماتریس همیلتونی[۲۷] نامیده می‌شود اگر

$$(AJ)^* = AJ.$$

تعریف ۲۳.۴.۱. ماتریس $A \in C^{2m\times 2m}$ ماتریس شبه همیلتونی[۲۸] نامیده می‌شود اگر

$$(AJ)^* = -AJ.$$

[۲۵] Unitary symplectic
[۲۶] Orthogonal symplectic
[۲۷] Hamiltonian matrix
[۲۸] Skew-Hamiltonian

۵.۱ نرم ماتریس

نرم[۲۹] یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می‌دهد:

$$x \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow Ax$$

تابع $y = f(x) = Ax$ را می‌توان به‌صورت نگاشتی در نظر گرفت که یک بردار n بعدی x را بر روی یک بردار m بعدی y می‌نگارد. لذا نسبت $\| Ax \| \ / \ \| x \|$ را می‌توان به عنوان بهره یا بزرگنمایی اپراتور f در جهت بردار x تعریف کرد:

$$\text{gain}(x) = \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

بدیهی است که این بهره می‌تواند مقداری بزرگ، کوچک حتی صفر باشد. حال می‌توان نرم یک ماتریس را به‌صورت بزرگترین بهره قابل دسترسی از بین تمامی بردارهای x دانست که در اختیار هست.

$$\| A \| = \max_{x\neq ۰} \text{gain}(x) = \max_{x\neq ۰} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

لذا اگر $۱ \gg \| A \|$ باشد، در این صورت برای تمامی $x \neq ۰$ خواهیم داشت $\| x \| \ll \| Ax \|$ یعنی تابع f بردار x را به شدت تضعیف می‌نماید و اگر $\| A \|$ مقدار بزرگی داشته باشد $gain(x)$ هم مقدار بزرگی خواهد داشت. نرم ماتریسی، یک تابع با مقدار حقیقی است که دامنه آن مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ می‌باشد. براي نُرم ماتريس تعاريف مختلفي وجود دارد که به برخي از آنها اشاره مي شود [۱۱].

- یکی از نرم‌های ماتریسی معروف نرم فروبنیوس[۳۰] می‌باشد، که به این صورت تعریف می‌شود،

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}},$$

همچنین می‌توان نوشت،

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}.$$

- با مفروض بودن ماتریس A ، یک نرم که به نرم P معروف است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_p = \max_{x\neq ۰} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \qquad p \geq ۱.$$

- در تعریف قبل به ازای $p = ۱$ داریم،

$$\|A\|_۱ = \max_{۱\leq j\leq n} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ij}|.$$

[۲۹] Norm

[۳۰] Frobenius Norm

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدرمطلق‌های عناصر ستون‌های ماتریس است.

- برای حالتی که $p=\infty$ باشد نرم به‌شکل زیر تعریف می‌گردد،

$$\| A \|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \| Ax \|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدر مطلق عناصر سطرهای ماتریس است.

- نرم برای $p=2$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \left(\rho\left(A^T A\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

در اینجا $\rho\left(A^T A\right)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ است و می‌توان نشان داد که:

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}.$$

که در آن $\lambda_{\min}$ کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ می‌باشد این نرم، نرم طیفی[31] ماتریس نامیده می‌شود.

تمام تعریف‌های ارائه شده برای نرم ماتریس $A_{n\times n}$ دارای خواص زیر هستند:

$$\begin{array}{ll}
(a) & \| A \| = \| A^* \|, \quad \| A \| = \| A^T \| \\
(b) & \| A+B \| \leq \| A \| + \| B \| \\
(c) & \| AB \| \leq \| A \| \| B \| \\
(d) & \| Ax \| \leq \| A \| \| x \| \\
(e) & \| A \| \geq 0, \quad \| A \| = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \\
(f) & \| \alpha A \| = |\alpha| \| A \| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}.
\end{array}$$

نرمی که در این پایان‌نامه به‌صورت $\| . \|$ آورده شده اشاره به نرم طیفی ماتریس دارد.

تعریف ۱.۵.۱. اگر در مجموعه‌ای از بردارها علاوه بر متعامد بودن دو به دو بردارها، نُرم آن‌ها نیز برابر یك باشد، به آن‌ها بردارهای یکامتعامد[32] گفته می‌شود.

[31] Spectral Norm

[32] Orthonormal

۶.۱ ماتریس هوس‌هولدر

اگر $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$ برداری در $\mathbb{R}^n$ و $\| v \| = 1$ باشد. ماتریس $P = I - 2vv^T$ که به‌صورت:

$$P = \begin{bmatrix} 1 - 2v_1^2 & -2v_1v_2 & \cdots & -2v_1v_n \\ -2v_2v_1 & 1 - 2v_2^2 & \cdots & -2v_2v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2v_nv_1 & -2v_nv_2 & \cdots & 1 - 2v_n^2 \end{bmatrix}.$$

نمایش داده می‌شود، به افتخار متخصص آمریکایی مشهور آنالیز عددی آلستون هوس‌هولدر[۳۳] یک ماتریس هوس‌هولدر [۳۴] نامیده شد. ماتریس P متقارن و متعامد می‌باشد، زیرا:

$$P^T = \left(I - 2vv^T\right)^T = I - 2vv^T = P,$$
$$P^TP = \left(I - 2vv^T\right)\left(I - 2vv^T\right) = I - 2vv^T - 2vv^T + 4v\,\overbrace{v^Tv}^{1}\,v^T = I.$$

حال اگر ماتریس v به‌صورت $v = \begin{bmatrix} 0 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$ باشد. در این صورت ماتریس هوس‌هولدر متناظر به‌صورت زیر می‌باشد.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - 2v_2^2 & \cdots & -2v_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -2v_nv_2 & \cdots & 1 - 2v_n^2 \end{bmatrix}.$$

به‌طور کلی اگر r مؤلفه اول ماتریس v صفر باشد، یعنی $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_{r+1} & v_{r+2} & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$، آن‌گاه ماتریس هوس‌هولدر متناظر عبارت است از:

$$P_r = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(n-r)\times r} & U_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right], \tag{۱.۱}$$

که در آن

$$U_{(n-r)\times(n-r)} = \begin{bmatrix} 1 - 2v_{r+1}^2 & -2v_{r+1}v_{r+2} & \cdots & -2v_{r+1}v_r \\ -2v_{r+2}v_{r+1} & 1 - 2v_{r+2}^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2v_nv_{r+1} & -2v_nv_{r+2} & \cdots & 1 - 2v_n^2 \end{bmatrix}.$$

[۳۳] Alston Householder(1904-1993)

[۳۴] Householder matrix

اگر ماتریس $A_{n\times n}$ و P_r در (۱.۰) از چپ در ماتریس A ضرب شود r سطر اول A تغییر نمی‌کند و اگر از راست در ماتریس A ضرب شود r ستون اول A تغییر نمی‌کند. پس اگر $B = PAP$ آن‌گاه ماتریس‌های A و B متشابه می‌باشند و اولین زیرماتریس $r \times r$ در ماتریس‌های A و B یکسان هستند. اهمیت ماتریس‌های هوس‌هولدر در این حقیقت نهفته است که می‌توانند برای ایجاد صفر در یک بردار نیز استفاده شوند [۱۰].

۷.۱ مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه

دستگاه معادلات $A_{n\times n}X_{n\times 1} = b_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید. این دستگاه می‌تواند به‌صورت نگاشتی در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته شود، که بردار X را به بردار b تبدیل می‌کند. در این نگاشت‌ها مواردی وجود دارد که تنها اندازه‌ی بردار X را تغییر می‌دهد و امتداد آن حفظ می‌شود. به عبارت دیگر بردار b به‌صورت مضربی از بردار X تعریف می‌شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$AX = \lambda X.$$

بردارهای غیر صفر x_i که چنین خاصیتی دارند را بردارهای ویژه[۳۵] ماتریس $A_{n\times n}$ و ضرایب ثابت λ_i را مقادیر ویژه[۳۶] ماتریس $A_{n\times n}$ گویند. با توجه به تعریف داریم،

$$(\lambda_i - A)x_i = 0.$$

حال اگر $|\lambda I - A|$ را بسط دهیم، چند جمله‌ای مشخصه[۳۷] به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_n.$$

که به آن چند جمله ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ گفته می‌شود. چند جمله‌ای مشخصه دارای n ریشه است که همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

نکته۱: برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $|\lambda I - A| = 0$ یک معادله چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به‌صورت حقیقی یا به فرم مختلط $\alpha \pm i\beta$ است [۱۱].

نکته ۲: اگر بردار v_i یک بردار ویژه برای ماتریس A باشد، آن‌گاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند α حاصل αv_i نیز یک بردار ویژه برای آن خواهد بود [۱۰].

نکته ۳: اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار V بردار ویژه نظیر آن باشد، در این صورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k متناظر با بردار ویژه نظیر خواهد بود. (k مقدار صحیح مثبت

[۳۵] Eigenvector

[۳۶] Eigenvalue

[۳۷] Charactristic polynomial

است.)
برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

چند جمله‌ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ یک چند جمله‌ای از مرتبه n است.

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_n.$$

این چند جمله‌ای را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ای هستند که می‌توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ را قرار دهیم، مقدار $|A|$ به‌دست می آید:

$$|A| = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

نکته ۴: اگر λ_i یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشند، آن‌گاه λ_i^{-1} یک مقدار ویژه برای ماتریس A^{-1} خواهد بود.
نکته ۵: در ماتریس‌های قطری، بالامثلثی و پایین‌مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.
در مورد ماتریس‌های خاص شرایط ویژه برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه وجود دارد:

- ماتریس متقارن و هرمیتی $(A = A^T, A = A^*)$ دارای مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامد هستند.
- ماتریس متعامد و یکانی $(A^{-1} = A^T, A^{-1} = A^*)$ دارای مقادیر ویژه $|\lambda_i| = 1$ و بردارهای ویژه متعامد هستند.
- ماتریس پادمتقارن $(A = -A^T)$ دارای مقادیر ویژه موهومی و بردارهای ویژه متعامد می‌باشد.
- ماتریس معین مثبت $(x^TAx > 0)$ دارای مقادیر ویژه مثبت و بردارهای ویژه متعامد است.
- ماتریس نیمه معین مثبت $(x^TAx \geq 0)$ دارای مقادیر ویژه مثبت، صفر و بردارهای ویژه متعامد می‌باشد.

۸.۱ فضای برداری

فضای برداری V روی میدان F عبارت است از مجموعه V از اشیاء که بردار نامیده می‌شوند، همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که به‌ترتیب به هر دو عضو x و y از V عضو منحصربه فرد $x+y$ از V و به‌ازای هر عضو $\mathrm{a} \in \mathrm{F}$ و $\mathrm{x} \in \mathrm{V}$ عضو منحصربه‌فرد $ax \in \mathrm{V}$ را نسبت می‌دهد، یا به عبارت دیگر فضای برداری نسبت به عمل جمع و ضرب بسته می‌باشد.

تعریف ۱.۸.۱. زیرمجموعه W از فضای برداری V روی میدان F *زیرفضای* V نامیده می‌شود هرگاه W با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V ، یک فضای برداری روی میدان F باشد.

تعریف ۲.۸.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد. بردار $\nu \in V$ را *ترکیب خطی* از اعضای V گوییم، هرگاه تعداد متناهی از بردارهای V مانند $u_۱, \ldots, u_n$ و اسکالرهای $a_۱, \ldots, a_n$ از F وجود داشته باشند به‌طوری‌که،

$$\nu = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_nu_n.$$

تعریف ۳.۸.۱. اگر S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S *زیرفضای تولید شده* توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۸.۱. زیرمجموعه S از فضای V را *وابسته خطی* گوییم، هرگاه تعداد متناهی از بردارهای $u_۱, \ldots, u_n$ در S و اسکالرهای $a_۱, \ldots, a_n$ که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند به‌طوری‌که،

$$a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_nu_n = ۰.$$

همچنین در این‌صورت، اعضای S وابسته خطی‌اند. مجموعه S را که وابسته خطی نباشد، *مستقل خطی* گویند.

تعریف ۵.۸.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را *پایه* V گوییم، هرگاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی V باشد که V را تولید می‌کند.

تعریف ۶.۸.۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، تعداد بردارهای پایه V را *بعد فضای* V نامیده و با $\dim(\mathrm{V})$ نمایش داده‌می‌شود.

ذر مرجع [۶] مفاهیم و قضیه‌های مربوط به فضای برداری به تفضیل بیان شده است.

۹.۱ عدد شرطی یک ماتریس

در دستگاه معادلات خطی $A_{n\times n}X_{n\times ۱} = b_{n\times ۱}$ اگر ماتریس A نامنفرد باشد می‌توان نوشت:

$$X = A^{-۱}b.$$

حال اگر b شامل نویز یا خطاهای محاسباتی ناشی از گرد کردن مانند Δb باشد. در این‌صورت این خطا به‌صورت زیر در پاسخ ظاهر خواهد شد.

$$X + \Delta X = A^{-1}(b + \Delta b).$$

لذا می‌توان نوشت،

$$\Delta X = A^{-1}\Delta b.$$

با توجه به خواص نرم ماتریس‌ها خواهیم داشت:

$$\| \Delta X \| \leqslant \| A^{-1} \| \| \Delta b \| .$$

از عبارت فوق می‌توان تعبیر کرد که اگر $\| A^{-1} \|$ مقدار کوچکی داشته باشد، برای تغییرات کم در b یعنی $\| \Delta b \|$ کوچک، مقدار $\| \Delta X \|$ کم خواهد بود. ولی برای $\| A^{-1} \|$ های بزرگ، مقدار $\| \Delta X \|$ بزرگ است. حتی اگر $\| \Delta b \|$ مقدار کوچکی باشد. لذا برای تشخیص بد حالت بودن یک دستگاه معادلات، پارامتری به نام عدد شرطی[۳۸] یا عدد حالت تعریف می‌گردد.

تعریف ۱.۹.۱. اگر $\| . \|$ یک نرم ماتریسی باشد. عدد شرطی ماتریس نامنفرد وابسته به این نرم را با $k(A)$ نمایش داده و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$k(A) = \| A \| \| A^{-1} \| .$$

اگر عدد شرطی ماتریس مقدار کوچکی باشد ماتریس خوش حالت[۳۹] و بردارهای ستونی ماتریس بخوبی مستقل خطی هستند. اگر عدد شرطی مقدار بزرگی باشد ماتریس بدحالت[۴۰] و بردارهای ستونی ماتریس نزدیک به وابستگی خطی هستند و ماتریس در حال منفرد شدن است و خطای محاسباتی در معکوس ماتریس A زیاد می‌شود [۶].

۱۰.۱ مقادیر منفرد

براي ماتریس مختلط $A_{m\times n}$ هر یک از ماتریس‌های A^*A و AA^* هرميتي و معین مثبت می‌باشند. اگر $n < m$ باشد، جذر مقادیر ویژه AA^* و اگر $m > n$ باشد جذر مقادیر ویژه A^*A مقادیر منفرد[۴۱] ماتریس A نامیده می‌شود. برای ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$ جذر مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن A^TA و AA^T به‌عنوان مقادیر منفرد در نظر گرفته می‌شود.

از جمله کاربردهاي مقادیر منفرد تعیین رتبه ماتریس، محاسبه نرم دو و عدد شرطی ماتریس است. رتبه

[۳۸] Condition number

[۳۹] Well condition

[۴۰] Ill condition

[۴۱] Singular value

یك ماتریس برابر با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس می‌باشد. با توجه به مطالبی که پیش‌تر ذکر شد، نُرم دو و عدد شرطی یك ماتریس به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند،

$$\|A\|_۲ = \max_{\|x\|_۲=۱} \|Ax\|_۲ = \sqrt{\lambda_{max}}.$$

که در آن λ_{max} بزرگترین مقدار عددی است، که سبب می‌شود ماتریس $A^TA - \lambda I$ منفرد گردد. در واقع λ_{max} همان بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^TA است، لذا جذر آن بزرگترین مقدار منفرد ماتریس A خواهد بود. پس داریم:

$$\|A\|_۲ = \omega_{max}.$$

از طرفی در تعریف عدد شرطی یک ماتریس داریم:

$$k(A) = \|A\|\|A^{-۱}\|,$$

لذا عدد شرطی می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان شود،

$$k(A) = \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}},$$

مثال ۱.۱۰.۱. نتایج انجام آزمایشات تجربی منجر به، به‌دست آمدن دستگاه معادلات ماتریسی به‌شکل زیر گردیده است.

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} ۹۳/۴۷۷ & ۱۰/۲۰۲ & -۲۸/۸۳۲ \\ ۱/۹۶۳ & ۳۲/۸۱۶ & ۶۲/۴۱۴ \\ ۲۶/۸۲۱ & ۳۶/۸۱۶ & ۵۷/۲۳۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۴/۷۱۷۷ \\ ۷۰/۹۲۴۱ \\ ۸۲/۹۲۷۱ \end{bmatrix}.$$

از آنجایی‌که $|A| = -۱/۹۱۷۰ \neq ۰$ است، داریم:

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹۳/۴۷۷ & ۱۰/۲۰۲ & -۲۸/۸۳۲ \\ ۱/۹۶۳ & ۳۲/۸۱۶ & ۶۲/۴۱۴ \\ ۲۶/۸۲۱ & ۳۶/۸۱۶ & ۵۷/۲۳۴ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۳۴/۷۱۷۷ \\ ۷۰/۹۲۴۱ \\ ۸۲/۹۲۷۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵۰۰۰ \\ ۰/۸۰۰۰ \\ ۰/۷۰۰۰ \end{bmatrix}.$$

اگر این نتایج حاصل از اندازه‌گیری یک آزمایش عملی باشد، در این‌صورت این احتمال وجود دارد که برخی از ارقام را به منظور سهولت در محاسبات گرد شود. با این فرض نتایج را دوباره بررسی می‌کنیم،

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹۳/۴۷۷ & ۱۰/۲۰۲ & -۲۸/۸۳۲ \\ ۱/۹۶۳ & ۳۲/۸۱۶ & ۶۲/۴۱۴ \\ ۲۶/۸۲۱ & ۳۶/۸۱۶ & ۵۷/۲۳۴ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۳۴/۷ \\ ۷۰/۹ \\ ۸۲/۹ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/۶۸۲۹۴ \\ ۸/۹۲۲۸۲ \\ -۳/۵۰۲۵۴ \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج به‌طور چشم‌گیری تغییر نموده است. به‌منظور بررسی علت این موضوع ابتدا مقادیر منفرد ماتریس A محاسبه می‌شود.

$$\omega_۱ = ۱۰۰/۰۰۰۴, \quad \omega_۲ = ۱۰۰/۰۰۰۰, \quad \omega_۳ = ۰/۰۰۰۲$$

در نتیجه، عدد شرطی برابر می‌شود با:

$$k(A) = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{100/0004}{0/0002} = 5/2164 \times 10^5 \gg 1$$

مشاهده می‌شود که عدد شرطی این ماتریس مقدار بسیار بزرگی دارد، لذا ماتریس A نزدیک به منفرد شدن می‌باشد. در این‌صورت اعمال تغییرات بسیار کوچک در بردار b سبب بروز خطای بزرگی در بردار x می‌شود.

۱۱.۱ فاکتورگیری و انواع تجزیه ماتریس

۱.۱۱.۱ تجزیه LU

در این روش ماتریس مربعی نامنفرد $A_{n\times n}$ به‌صورت حاصل‌ضرب دو ماتریس L و U تجزیه می‌گردد.

$$A = LU.$$

به‌طوری‌که L ماتریسی پایین مثلثی با عناصر قطری واحد و U یک ماتریس بالا مثلثی باشد. برای به‌دست آوردن تجزیه LU یک ماتریس مربعی می‌توان از روش حذفی گوسی و روش ماتریس‌های بلوکی استفاده نمود. در اینجا به توضیح مختصر روش ماتریس‌های بلوکی اکتفا می‌شود. برای توضیح بیشتر به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

تجزیه LU به روش ماتریس‌های بلوکی

اگرصورت کلی ماتریس‌های بلوکی A ، U و L به‌شکل زیر در نظر گرفته شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}.$$

در این‌صورت:

$$A = LU \to \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ u_{11}L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{bmatrix}.$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11}, \\ U_{12} &= A_{12}, \\ L_{21} &= \frac{1}{u_{11}} A_{21}, \\ A_{22} - L_{21}U_{12} &= L_{22}U_{22}. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۱۱.۱. *تجزیه LU منحصربه‌فرد است.*

برهان. ماتریس A نامنفرد است، لذا می‌توان نوشت:

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) \neq 0,$$

بنابراین ماتریس U معکوس پذیر می‌باشد. حال اگر L_1U_1 و L_2U_2 دو تجزیه برای ماتریس A باشند، داریم:

$$L_1U_1 = L_2U_2,$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1},$$

ماتریس $U_2U_1^{-1}$ بالامثلثی و ماتریس $L_2^{-1}L_1$ پایین مثلثی با عناصر قطری واحد هستند. بنابراین باید هر دو ماتریس همانی باشند در نتیجه:

$$L_1 = L_2, \quad U_1 = U_2.$$

از این رو تجزیه LU منحصربه‌فرد می‌باشد. □

حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه تجزیه LU

یکی از کاربردهای تجزیه LU در حل دستگاه $Ax = b$ می‌باشد. اگر $A = LU$ در این صورت دستگاه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$LUx = b,$$

قرار می‌دهیم:

$$Ux = y, \tag{۲.۱}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Ly = b. \tag{۳.۱}$$

بنابراین برای حل دستگاه $Ax = b$ ابتدا از حل دستگاه پایین‌مثلثی (۳.۱)، y محاسبه می‌شود و سپس از حل دستگاه بالامثلثی (۲.۱)، x محاسبه می‌گردد.
از جمله کاربردهای دیگر این تجزیه در محاسبه ماتریس معکوس می‌باشد که در [۱۱] به آن پرداخته شده است.

۲.۱۱.۱ تجزیه چولسکی

تجزیه چولسکی حالت خاصی از تجزیه LU است و زمانی کاربرد دارد که ماتریس A مورد نظر معین مثبت باشد.
بنا به تعریف می‌توان یک ماتریس معین مثبت $A_{n\times n}$ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو ماتریس به‌شکل $A = LL^T$ تجزیه کرد، به‌طوری‌که L یک ماتریس پایین‌مثلثی با عناصر قطری مثبت باشد، به این منظور تجزیه ماتریس A را به‌صورت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},$$

در نظر گرفت. با ضرب سطر اول ماتریس L در ستون‌های ماتریس L^T خواهیم داشت:

$$a_{1j} = l_{11} l_{j1}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

بنابراین عناصر ستون اول ماتریس L به‌صورت زیر تعیین می‌شوند،

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \\ l_{j1} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 2, 3, \cdots, n. \end{aligned}$$

از ضرب سطر دوم ماتریس L در ستون‌های دوم به بعد ماتریس L^T داریم:

$$a_{2j} = l_{21} l_{j1} + l_{22} l_{j2}, \quad j = 2, 3, \cdots, n.$$

بنابراین عناصر ستون دوم ماتریس L به‌صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}, \\ l_{j2} &= \frac{a_{2j} - l_{21} l_{j1}}{l_{22}}, \quad j = 3, 4, \cdots, n. \end{aligned}$$

به همین ترتیب با فرض اینکه $i-1$ ستون از ماتریس L محاسبه شده است از ضرب سطر iام ماتریس L در ستون‌های iام به بعد ماتریس L^T خواهیم داشت:

$$a_{ij} = l_{i1} l_{j1} + l_{i2} l_{j2} + \cdots + l_{ii} l_{ji}, \quad j = i, i+1, \cdots, n.$$

بنابراین عناصر ستون iام ماتریس L به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \\ l_{ji} &= \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right), \quad j = i+1, i+2, \cdots, n. \end{aligned}$$

در نهایت با فرض اینکه $n-۱$ ستون از ماتریس L محاسبه شده است از ضرب سطر nام ماتریس L در ستون nام ماتریس L^T خواهیم داشت:

$$a_{nn} = l_{n۱}^۲ + l_{n۲}^۲ + \cdots + l_{nn}^۲,$$

در نتیجه آخرین عنصر از ماتریس L به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=۱}^{n-۱} l_{nk}^۲}.$$

به این ترتیب تجزیه چولسکی ماتریس A حاصل می‌شود. علاوه بر حل دستگاه معادلات جبری، یکی از مهم‌ترین کاربردهای تجزیه چولسکی در حل مسئله حداقل مربعات می‌باشد [۶].
برای محاسبه این تجزیه مانند تجزیه LU می‌توان از الگوریتم حذفی گوسی و از ماتریس‌های بلوکی استفاده شود. در اینجا فقط به شرح روش ماتریس‌های بلوکی پرداخته می‌شود.

تجزیه چولسکی با روش ماتریس‌های بلوکی

شکل کلی ماتریس‌های بلوکی $A_{n\times n}$ و L به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود،

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & A_{۲۱}^T \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{۱۱} & ۰ \\ L_{۲۱} & L_{۲۲} \end{bmatrix}.$$

که در آن:

$$\begin{aligned} l_{۱۱} &= \sqrt{a_{۱۱}}, \\ L_{۲۱} &= \frac{۱}{l_{۱۱}} A_{۲۱}, \\ A_{۲۲} - L_{۲۱}L_{۲۱}^T &= L_{۲۲}L_{۲۲}^T. \end{aligned}$$

به این ترتیب ماتریس معین مثبت مذکور به‌صورت $A = LL^T$ تجزیه می‌گردد.

حل دستگاه معادلات جبری خطی با تجزیه چولسکی

ابتدا تجزیه چولسکی ماتریس معین مثبت $A_{n\times n}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$A = LL^T.$$

سپس با جایگزاری در معادله دستگاه داریم:

$$Ax = b \to LL^T x = b,$$

با فرض اینکه $y = L^T x$ باشد آنگاه:

$$LL^T x = b \to Ly = b.$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات اصلی با حل یک سری معادلات ساده به‌صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$\begin{cases} Ly = b \\ y = L^T x \end{cases}$$

که در حل این دو معادله از الگوریتم جایگزینی پیشرو و جایگزینی پسرو استفاده می‌شود.

۳.۱۱.۱ تجزیه QR

در این روش ماتریس رتبه کامل $A_{m\times n}$ به حاصل‌ضرب دو ماتریس $A = QR$ تجزیه می‌گردد، که در آن، $Q_{m\times n}$ ماتریسی متعامد و $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر بالامثلثی با عناصر قطری مثبت است. تجزیه QR [۴۲] نقش کلیدی در حل عددی دستگاه‌های خطی، مسائل کمترین مربعات، محاسبه مقادیر ویژه و مقادیر منفرد دارد. برای محاسبه تجزیه QR از روش متعامد سازی گرام اشمیت[۴۳]، روش هوس‌هولدر و روش گیونز استفاده می‌شود. در اینجا به شرح مختصر روش گرام اشمیت و روش هوس‌هولدر پرداخته شده است.

روش متعامد سازی گرام اشمیت

به‌منظور ساخت یک دسته بردار متعامد توسط یک دسته بردار مستقل خطی $\{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ می‌توان از این روش استفاده شود. اگر ستون‌های ماتریس A مجموعه بردارهای $\{a_۱, a_۲, \cdots a_n\}$ باشند با روندی که بیان می‌شود می‌توان ماتریس $A = (a_{ij})$ را به‌صورت $A = QR$ تجزیه نمود که در آن ماتریس Q متعامد و R بالامثلثی است. در اینجا ستون‌های ماتریس Q همان دسته بردارهای متعامد و مستقل‌خطی می‌باشند. به این منظور ابتدا $A = QR$ به‌صورت زیر تشکیل داده می‌شود.

[۴۲] QR Factorization

[۴۳] Gram-Schmidt

با توجه به ویژگی ماتریس متعامد و معادله $A = QR$ می‌توان نوشت.

$$A = [a_1, a_2, \cdots, a_n], \quad Q = [q_1, q_2, \cdots, q_n], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [q_1, q_2, \cdots, q_n] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_1 = r_{11} q_1 \Rightarrow q_1 = \dfrac{a_1}{r_{11}}, \\ a_1^T a_1 = |r_{11}| \overbrace{q_1^T q_1}^{=1} \Rightarrow r_{11} = \| a_1 \|_2 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2, \\ q_1^T a_2 = r_{12} q_1^T q_1 + r_{22} \overbrace{q_1^T q_2}^{=0} \Rightarrow r_{12} = q_1^T a_2, \quad q_2 = \dfrac{\overbrace{a_2 - r_{12} q_1}^{=b_2}}{r_{22}}, \\ r_{22} = \|a_2 - r_{12} q_1\|_2 = \|b_2\|_2. \end{cases}$$

به همین ترتیب برای معادله jام خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b_j &= a_j - r_{1j} q_1 - r_{2j} q_2 - \cdots - r_{j-1,j} q_{j-1}. \\ r_{ij} &= q_i^T a_j, \quad r_{jj} = \|b_j\|_2, \quad q_j = \frac{b_j}{r_{jj}}. \end{aligned}$$

در تجزیه QR لزومی به مربعی بودن ماتریس A نیست بلکه با همین روند الگوریتم گرام اشمیت می‌توان تجزیه QR را برای یک ماتریس غیر مربعی نیز به‌دست آورد.

مثال ۱.۱۱.۲. اگر ماتریس A به‌شکل زیر در نظر گرفته شود،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

برای محاسبه تجزیه QR این ماتریس با روش گرام اشمیت به‌صورت زیر عمل می‌شود.

داریم $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ در نتیجه،

$$r_{11} = \| a_1 \|_2 = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad q_1 = \frac{a_1}{r_{11}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$r_{12} = q_1^T a_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 11,$$

$$b_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} - 11 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix},$$

$$r_{22} = \| b_2 \| = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}} = 2\sqrt{5}, \quad q_2 = \frac{b_2}{r_{22}} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

$$r_{13} = q_1^T a_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = -1,$$

$$r_{23} = q_2^T a_3 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\sqrt{5},$$

$$b_3 = a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - 2\sqrt{5} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$r_{33} = \| b_3 \|_2 = \sqrt{0 + 36 + 9} = 3\sqrt{5}, \quad q_3 = \frac{b_3}{r_{33}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

در نتیجه ماتریس‌های Q و R به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند،

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۵}{۳\sqrt{۵}} & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۴}{۳\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} ۳ & ۱۱ & -۱ \\ ۰ & ۲\sqrt{۵} & ۲\sqrt{۵} \\ ۰ & ۰ & ۳\sqrt{۵} \end{bmatrix}.$$

روش تجزیه QR هاوس هولدر

بدون این که به کلیت مسئله خللی وارد شود و برای سادگی فرض می‌شود A یک ماتریس ۴ × ۴ باشد. در گام اول ماتریس هوس‌هولدر $P_۱$ چنان ساخته می‌شود که،

$$A_۱ = P_۱ A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ ۰ & * & * & * \\ ۰ & * & * & * \\ ۰ & * & * & * \end{bmatrix}.$$

در گام دوم ماتریس هوس‌هولدر $P_۲$ طوری ساخته می‌شود که،

$$A_۲ = P_۲ A_۱ = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ ۰ & * & * & * \\ ۰ & ۰ & * & * \\ ۰ & ۰ & * & * \end{bmatrix}.$$

و در نهایت ماتریس هوس‌هولدر $P_۳$ به‌صورت زیر ساخته می‌شود که،

$$P_۳ A_۲ = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ ۰ & * & * & * \\ ۰ & ۰ & * & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & * \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $P_۳ A_۲ = R$، واضح است که ماتریس R بالامثلثی می‌باشد و $R = P_۳ P_۲ P_۱ A$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$A = P_۱^{-۱} P_۲^{-۱} P_۳^{-۱} R = P_۱ P_۲ P_۳ R.$$

فرض می‌کنیم $Q = P_۱ P_۲ P_۳$، که Q ماتریسی متعامد می‌باشد، زیرا:

$$Q^T Q = (P_۱ P_۲ P_۳)^T (P_۱ P_۲ P_۳) = P_۳^t P_۲^T P_۱^T P_۱ P_۲ P_۳ = I.$$

به این ترتیب تجزیه QR ماتریس A حاصل می‌شود.

۱.۱۱.۴ تجزیه طیفی

تجزیه طیفی[۴۴] ماتریس K برابر است با:

$$K = Q^T X Q,$$

که در آن Q ماتریسی متعامد و ماتریس X، ماتریسی قطری بلوکی که هر بلوک روی قطر آن یک ماتریس با مرتبه ۲×۲ به فرم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & \delta_i \\ -\delta_i & ۰ \end{bmatrix},$$

با $\delta_i > ۰$ که در آن $\pm\delta_i$، یک جفت از مزدوج مختلط (صرفاً قسمت موهومی) مقادیر ویژه ماتریس K است [۱۱].

۱.۱۱.۵ تجزیه SVD

یکی از مهم‌ترین روش‌های تجزیه ماتریس‌ها تجزیه براساس مقادیر منفرد[۴۵] می‌باشد. در این روش یک ماتریس مانند $A_{m\times n}$ با رتبه K به‌صورت زیر تجزیه می‌شود،

$$A = U\Sigma V^T,$$

که در آن $U_{m\times m} = [u_۱ \quad \dots \quad u_m]$ و $V_{n\times n} = [v_۱ \quad \dots \quad v_n]$ ماتریس‌های متعامد می‌باشند.
ستون‌های ماتریس $U_{m\times m}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T و ستون‌های ماتریس $V_{n\times n}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA تشکیل می‌شوند و $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس AA^T یا A^TA می‌باشند،

$$\begin{aligned} &\Sigma_{m\times n} = \mathrm{diag}(\omega_۱, \cdots, \omega_p) \qquad P = min\{m, n\} \\ &\omega_۱ \geq \omega_۲ \geq \cdots \geq \omega_k > ۰ \quad \omega_{k+۱} = \cdots = \omega_p = ۰ \end{aligned}$$

رتبه ماتریس A برابر P می‌باشد و در اینجا $\omega_۱$ و ω_k به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار منفرد غیر صفر ماتریس A هستند [۱۰].

مثال ۱.۱۱.۳. اگر ماتریس A به‌شکل زیر در نظر گرفته شود،

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

[۴۴] Spectral decomposition

[۴۵] Singular Value Decomposition (SVD)

برای محاسبه تجزیه مقدار منفرد $A = U\Sigma V^T$، ابتدا بردار U ساخته می‌شود. برای این کار نیاز به بردارهای یکامتعامد ماتریس AA^T است.

$$A^T = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \to AA^T = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱ \\ ۱ & ۱۱ \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس AA^T محاسبه می‌شود:

$$|\lambda I_۲ - AA^T| = (\lambda - ۱۲)(\lambda - ۱۰),$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T برابر هستند با:

$$\lambda_۱ = ۱۲, \quad \lambda_۲ = ۱۰.$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آن‌ها را به دست آورده می‌شود.

$$(AA^T - \lambda_۱ I_۲)u_۱ = ۰ \to \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{۱۱} \\ u_{۲۱} \end{bmatrix} = ۰ \to u_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix},$$
$$(AA^T - \lambda_۲ I_۲)u_۲ = ۰ \to \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{۱۲} \\ u_{۲۲} \end{bmatrix} = ۰ \to u_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix},$$

پس،

$$\begin{bmatrix} u_۱ & u_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix},$$

می‌توان با اعمال فرایند گرام اشمیت این دو بردار را به‌صورت یکامتعامد تبدیل کرد. لذا ماتریس $U_{۲\times۲}$ به‌شکل زیر به‌دست می‌آید،

$$U = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}.$$

ماتریس $V_{۳\times۳}$ نیز از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA به‌دست می‌آید. مقادیر ویژه ماتریس A^TA عبارتند از،

$$\lambda_۱ = ۱۲, \quad \lambda_۲ = ۱۰, \quad \lambda_۳ = ۰.$$

ماتریس A^TA سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آن‌ها برابر است با:

$$(A^TA - \lambda_۱ I_۳)v_۱ = ۰ \to \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۴ & -۱۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{۱۱} \\ v_{۲۱} \\ v_{۳۱} \end{bmatrix} = ۰ \to v_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix},$$

$$(A^TA-\lambda_2 I_3)v_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(A^TA-\lambda_3 I_3)v_3 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

با اعمال فرایند یکامتعامد سازی گرام اشمیت بردارهای ویژه یکامتعامد را می‌توان به‌دست آورد. لذا،

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

در انتها ماتریس $\Sigma_{2\times3}$ با استفاده از مقادیر منفرد محاسبه شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید،

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین، تجزیه مقادیر منفرد ماتریس به‌شکل زیر به‌دست می‌آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}^T.$$

۶.۱۱.۱ کاربردهای تجزیه SVD

تعیین زیر فضاهاي اساسي ماتریس

فرم گسترده تجزیه مقادیر منفرد به‌صورت زیر مي‌باشد،

$$AV = U\Sigma \quad \longrightarrow \quad Av_i = \omega_i u_i.$$

یعنی هر بردار v_i به یک بردار متناظر مانند u_i نگاشت می‌شود، که اندازه این نگاشت برابر با ω_i است. بردارهای u_i و v_i به‌ترتیب بردارهای منفرد چپ و راست[۴۶] نامیده می‌شوند. با در نظر گرفتن مقادیر

[۴۶] Left and Right Singular Vectors

منفرد صفر ماتریس $A_{m\times n}$، تجزیه مقادیر ویژه را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد،

$$\begin{bmatrix} \underbrace{u_1 \cdots u_k}_{Basis for R(A)} & | & \underbrace{u_{k+1} \cdots u_m}_{Basis for N(A^T)} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \omega_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \omega_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underbrace{v_1 \cdots v_k}_{Basis for R(A^T)} & | & \underbrace{v_{k+1} \cdots v_n}_{Basis for N(A)} \end{bmatrix}^T .$$

بر روی تجزیه حاصل، بردارهای پایه هر یک از چهار زیر فضای اصلی ماتریس مشخص شده‌اند.

محاسبه دترمینان، معکوس و شبه‌معکوس ماتریس

از تجزیه مقادیر منفرد یک ماتریس می‌توان برای محاسبه دترمینان و معکوس آن ماتریس استفاده کرد. برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دترمینان به‌صورت:

$$|A| = \pm \prod_{i=1}^{n} \omega_i.$$

محاسبه می‌شود. با توجه به اینکه ماتریس‌های U و V متعامد هستند داریم:

$$|A| = |U\Sigma V^T| = |A||\Sigma||V^T| = (\pm 1)|\Sigma|(\pm 1) = \pm|\Sigma| = \pm \prod_{i=1}^{n} \omega_i.$$

برای ماتریس مربعی و رتبه کامل A معکوس ماتریس به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T,$$

که در آن $\Sigma^{-1} = \mathrm{diag}(1/\omega_1, 1/\omega_2, \cdots, 1/\omega_n)$ می‌باشد.
شبه معکوس ماتریس $A_{m\times n}$ با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد برابر است با:

$$A^{\dagger}_{n\times m} = V\Sigma^{\dagger}U^T,$$

که در آن:

$$\Sigma^{\dagger}_{n\times m} = \mathrm{diag}(1/\omega_1, 1/\omega_2, \cdots, 1/\omega_k, 0, \cdots, 0), \quad \omega_1 \geq \omega_2 \geq \cdots \geq \omega_k > 0.$$

مثال ۰۱.۱۱.۴. با به‌کارگیری روش تجزیه مقدار منفرد، شبه‌معکوس ماتریس زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار منفرد ماتریس A به‌شکل زیر می‌باشد.

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} ۰/۵۷۷۴ & ۰/۷۰۷۱ & -۰/۴۰۸۲ \\ -۰/۵۷۷۴ & ۰/۷۰۷۱ & ۰/۴۰۸۲ \\ -۰/۵۷۷۴ & ۰ & -۰/۸۱۶۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲/۴۴۹۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰/۵۷۷۴ & ۰/۱۰۶۶ & -۰/۸۰۹۵ \\ -۰/۵۷۷۴ & ۰/۵۷۷۴ & ۰/۳۵۱۵ & ۰/۴۵۸۱ \\ -۰/۵۷۷۴ & ۰ & -۰/۸۰۹۵ & -۰/۱۰۶۶ \\ -۰/۵۷۷۴ & -۰/۵۷۷۴ & ۰/۴۵۸۱ & -۰/۳۵۱۵ \end{bmatrix}^T$$

لذا $\mathrm{rank}(A)=۲$ است، بنابراین ماتریس‌های $\Sigma^\dagger$ و $A^\dagger$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\Sigma^\dagger=\begin{bmatrix} ۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۴۰۸۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow A^\dagger=V\Sigma^\dagger U^T=\begin{bmatrix} ۰/۱۶۶۷ & ۰/۱۶۶۷ & ۰ \\ ۰/۰۵۵۶ & ۰/۲۷۷۸ & ۰/۱۱۱۱ \\ -۰/۱۱۱۱ & ۰/۱۱۱۱ & ۰/۱۱۱۱ \\ -۰/۲۷۷۸ & -۰/۰۵۵۶ & ۰/۱۱۱۱ \end{bmatrix}$$

حل مسئله حداقل مربعات

در مسئله حداقل مربعات هدف يافتن بهترين پاسخ $\widehat{X}$ براي دستگاه معادلات ناسازگار $A_{m\times n}X_{n\times ۱}=b_{m\times ۱}$ است، به‌طوري‌که $\|A\widehat{X}-b\|$ حداقل گردد. زماني‌كه ماتريس A رتبه كامل باشد، مي توان با حل مستقيم معادلات نرمال و يا با استفاده از تجزيه QR و تجزيه چولسكي پاسخ مسئله حداقل مربعات را به‌دست آورد. ليكن روش‌هاي ذكر شده در مواقعي كه ماتريس A نقص رتبه دارد و يا زماني‌كه ماتريس A^TA يك ماتريس بدحالت باشد قابل استفاده نيستند. در چنين مواقعي مي‌توان از روشي مبتني بر تجزيه مقادير منفرد ماتريس استفاده شود.
از ماتريس شبه‌معكوس براي حل مسئله حداقل مربعات استفاده مي‌شود، اگر شبه‌معكوس به‌صورت $A^\dagger=V\Sigma^\dagger U^T$ معرفی گردد، $X=A^\dagger b$ جواب مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات ناسازگار $AX=b$ می‌باشد.

تقریب رتبه پایین ماتریس‌ها[۴۷]

يكي از كاربردهاي تجزيه مقادير منفرد در تقريب يك ماتريس با يك ماتريس رتبه پايين‌تر مي‌باشد. تجزيه مقادير منفرد ماتريس A با رتبه r برابر است با:

$$A=U\Sigma V^T,$$

[۴۷] Low Rank Approximation

$$A = \begin{bmatrix} U_1 & | & U_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \omega_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \omega_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_1^T \\ \hline V_2^T \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}(A) = r.$$

مسئله، یافتن ماتریسB با رتبه $k < r$ می‌باشد، به‌طوری‌که $\| A - B \|_2$ مقدار کوچکی باشد. تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A می‌تواند به‌صورت زیر نمایش داده شود،

$$A = u_1\omega_1 v_1^T + u_2\omega_2 v_2^T + \cdots + u_r\omega_r v_r^T, \quad \omega_1 > \omega_2 > \cdots > \omega_r,$$

براي يافتن پاسخ اين مسئله، ماتریس A به‌صورت زیر بیان مي‌شود،

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} U_{1a} & U_{1b} & U_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \omega_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & 0 \\ 0 & & \omega_k & & & & \\ \hline & & & \omega_{k+1} & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & & \omega_r & \\ \hline & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{1a}^T \\ \hline V_{1b}^T \\ \hline V_2^T \end{bmatrix},$$

و یا به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$A = u_1\omega_1 v_1^T + u_2\omega_2 v_2^T + \cdots + u_k\omega_k v_k^T + u_{k+1}\omega_{k+1} v_{k+1}^T + \cdots + u_r\omega_r v_r^T.$$

و چون $\omega_1 > \omega_2 > \cdots > \omega_r$ ، جملاتي که شامل مقادیر منفرد غالب‌تري هستند نقش بیشتري در ساختار ماتریس A دارند. حال اگر اختلاف بین ω_k وω_{k+1} زیاد باشد، به راحتي مي‌توان از جملات $k+1$ به بعد صرف‌نظر کرد و ماتریس را فقط برحسب جملات غالب‌تر بیان نمود. بنابراین ماتریس B مي‌تواند به‌صورت زیر انتخاب شود،

$$B = u_1\omega_1 v_1^T + u_2\omega_2 v_2^T + \cdots + u_k\omega_k v_k^T,$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} U_{1a} & U_{1b} & U_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c|c} \omega_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & & \omega_k & & \\ \hline & 0 & & 0 & 0 \\ \hline & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{1a}^T \\ \hline V_{1b}^T \\ \hline V_2^T \end{bmatrix},$$

بنابراین:

$$B = U_{1a} \begin{bmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_k \end{bmatrix} V_{1a}^T.$$

تفاوت بین این دو ماتریس به‌صورت زیر بیان مي‌شود،

$$A - B = u_{k+1}\omega_{k+1}v_{k+1}^T + \cdots + u_r\omega_r v_r^T,$$

$$A - B = U_{1b} \begin{bmatrix} \omega_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_r \end{bmatrix} V_{1b}^T.$$

رابطه بالا يك تجزيه‌ی مقدار منفرد مي‌باشد، لذا $\| A - B \|_2 \leqslant \omega_{k+1}$ خواهد بود و به این ترتیب خطاي تقریب نیز به‌دست مي‌آید.

کاهش نویز سیگنال ها

یکي از کاربردهاي تجزیه مقادیر منفرد ماتریس‌ها در کاهش نویز سیگنال‌ها به ویژه سیگنال‌هاي صوتي و تصویري است. اگر نمونه برداری از سیگنال زمان پیوسته $X(t)$ به‌صورت زیر نمایش داده شود،

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

می‌توان نمونه‌ها را با يك ترتیب مناسب دسته‌بندي و آن‌ها را در قالب يك ماتریس نمایش داد،

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{m+1} & x_{2m+1} & \cdots \\ x_2 & x_{m+2} & x_{2m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{2m} & x_{3m} & \cdots \end{bmatrix}.$$

با محاسبه مقادیر منفرد ماتریس مشخص خواهد شد که برخي از آنها نسبت به دیگر مقادیر منفرد غالب تر هستند، لذا جملات آخر نقش کمتري در ایجاد ساختار ماتریس و سیگنال دارند،

$$A = u_1\omega_1 v_1^T + u_2\omega_2 v_2^T + \cdots + u_K\omega_K v_K^T + u_{k+1}\omega_{k+1}v_{k+1}^T + \cdots + u_r\omega_r v_r^T.$$

حال با در نظر گرفتن سیگنال نویزي زیر،

$$X_n = X + n.$$

نویز سبب افزایش اندازه مقادیر منفرد کوچك‌تر ماتریس شده و جملات آخر را پر اهمیت‌تر جلوه مي‌دهد و دخالت این جملات سبب تخریب ساختار اصلي ماتریس و سیگنال مي‌شود. حال اگر با استفاده از روش تقریب رتبه پایین ماتریس بتوان این جملات را حذف نمود به نوعي مي‌توان نویز را کاهش داد. در این روش جهت بهتر شدن وضعیت سیگنال گاهي از روش وزن‌دهي براي مقادیر ویژه میاني نیز استفاده مي‌شود [۶].

فشرده سازي داده‌هاي تصويري[۴۸]

کاربرد ديگري از تقريب رتبه پايين ماتريس‌ها در فشرده‌سازي داده‌هاي تصويري است. درسيستم کامپيوتري هر تصوير در قالب يك ماتريس ذخيره مي‌گردد که ابعاد اين ماتريس به حجم و کيفيت تصوير بستگي دارد. براي هر يك از رنگ‌هاي طيف رنگي، عددي اختصاص داده مي‌شود. هر چه کيفيت اين تصاوير بالاتر باشد حجم ماتريس ذخيره‌سازي شده بالاتر است. روش تقريب رتبه پايين ماتريس اين امکان را فراهم مي‌کند تا بتوان تصاوير مذکور را با حفظ کيفيت آنها در حجم کمتري ذخيره سازي نمود. به‌عنوان مثال اين موضوع به‌ويژه در ارسال تصاوير گرفته شده توسط کاوشگرهاي فضاپيما به زمين، اهميت ويژه‌اي پيدا مي‌کند زيرا تعداد تصاوير در چنين مواقعي بسيار بالا مي‌باشد که حاکي از ارسال حجم داده‌هاي بالايي است. تنها با استفاده از تعدادی از مقادير منفرد به راحتي مي‌توان تصوير اصلي را به طرز قابل قبولي بازسازي کرد، البته اين بستگي به کيفيت تصوير مورد نظر دارد [۶].

۱۲.۱ مثلثی‌سازی شور

قضیه ۱.۱۲.۱ (تجزیه شور). [۴۹] *هر ماتریس مختلط A با یک ماتریس بالا مثلثی «متشابه یکانی» است. یعنی برای هر ماتریس A ماتریس یکانی U وجود دارد به‌طوری‌که،*

$$B = U^*AU.$$

یک ماتریس بالامثلثی است. توجه شود که در این‌صورت درایه‌های روی قطر B همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند. مشابه این قضیه برای ماتریس‌های پایین مثلثی نیز برقرار است [۱۱].

این قضیه دارای معنای نظری مهمی می‌باشد. نتایج مهمی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه از این قضیه به‌دست آید. در اینجا به ارائه چند نتیجه از این قضیه می‌پردازیم.

قضیه ۲.۱۲.۱. *اگر $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند. آن‌گاه مقادیر ویژه ماتریس A^m عبارتند از $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m$.*

برهان. با توجه به قضیه مثلثی‌سازی شور:

$$B = U^*AU.$$

در این‌صورت:

$$\begin{aligned} B^m &= \underbrace{(U^*AU)(U^*AU)\cdots(U^*AU)}_{m} = U^*A(U^*U)A(U^*U)\cdots(U^*U)AU \\ &= U^*A^mU. \end{aligned}$$

[۴۸] Data Compression

[۴۹] Schur decomposition

اما ماتریس B^m نیز یک ماتریس مثلثی می‌باشد و $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m$ عناصر قطری آن هستند. چون ماتریس‌های A^m و B^m متشابه‌اند، در نتیجه آن‌ها دارای مقادیر ویژه برابر می‌باشند. $\square$

قضیه ۱.۱۲.۳. *اگر A ماتریسی هرمیتی باشد. آن‌گاه*

۱. *ماتریس یکانی مانند U وجود دارد به‌گونه‌ای که:*

$$U^*AU = D.$$

یک ماتریس قطری باشد.

۲. *مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی می‌باشند.*

۳. *بردارهای ویژه A می‌توانند به‌گونه‌ای انتخاب شوند که یکامتعامد باشند.*

۱. ***برهان.*** طبق قضیه مثلثی سازی شور داریم:

$$U^*AU = B,$$

که در آن B ماتریس مثلثی می‌باشد. اکنون نشان داده می‌شود که B قطری است. داریم:

$$(U^*AU)^* = B^*,$$

یا

$$U^*A^*U = B^*.$$

و چون $A^* = A$ در نتیجه:

$$U^*AU = B^*,$$

یا

$$B = B^*.$$

نشان‌دهنده این موضوع است که ماتریس B هرمیتی می‌باشد. چون B مثلثی و هرمیتی است، پس باید ماتریسی قطری باشد. $\square$

۲. ***برهان.*** چون مقادیر ویژه ماتریس A عناصر قطری ماتریس D هستند و عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی باید حقیقی باشند، در نتیجه مقادیر ویژه A حقیقی هستند. $\square$

لازم به ذکر است که اگر A حقیقی باشد، آن‌گاه $A^* = A$ ایجاب می‌کند که A متقارن باشد $(A^T = A)$ و مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن حقیقی همچنین حقیقی هستند.

۳. ***برهان.*** اگر ستون‌های ماتریس U توسط u_1 تا u_n نمایش داده شود. سپس از رابطه،

$$U^*AU = D,$$

یا

$$AU = UD,$$

یا

$$A(u_1, u_1, \cdots, u_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

ملاحظه می‌شود که u_i بردار ویژه A نظیر مقدار ویژه d_i است. چون U یک ماتریس یکانی است، بردارهای ویژه $u_1, u_2, \cdots, u_n$ یکامتعامد هستند. □

اگر ماتریس A حقیقی و متقارن باشد، آن‌گاه چون مقادیر ویژه آن حقیقی هستند و بردارهای ویژه می‌توانند حقیقی انتخاب شوند، در نتیجه ماتریس یکانی U در قضیه بالا می‌تواند متعامد باشد.

۱۳.۱ فرم متعارف جردن

در بخش قبل بیان شد که هر ماتریس دلخواه از مرتبه $n \times n$ با یک ماتریس قطری متشابه است اگر و فقط اگر دارای یک مجموعه کامل از n بردار ویژه مستقل خطی باشد. بنابراین، ماتریس هرمیتی، ماتریس متقارن حقیقی و ماتریس دارای مقادیر ویژه متمایز با یک ماتریس قطری متشابه هستند. در قضیه بعد نشان داده می‌شود هر ماتریس دلخواه همیشه با یک ماتریس قطری بلوکی متشابه است.

قضیه ۱.۱۳.۱ (فرم متعارف جردن). [۵۰] *برای هر ماتریس از مرتبه $n\times n$ مانند A، یک ماتریس نامنفرد X وجود دارد که:*

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_n \end{bmatrix},$$

به‌طوری‌که هر یک از زیر ماتریس‌های J_i به‌صورت:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

است. در ماتریس J_i درایه‌هایی که خالی گذاشته شده‌اند برابر صفر هستند [۱۱].

[۵۰] Jordan form

در حالت خاصی که همه‌ی زیر ماتریس‌های J_i سایز ۱ × ۱ داشته باشند، ماتریس A قطری شدنی است. توجه شود که λ_i–ها (مستقل از اینکه A قطری شدنی باشد یا خیر) همان مقادیر ویژه‌ی A هستند. اگر J_iسایزی بزرگتر از ۱ × ۱ داشته باشد آن‌گاه مقدار ویژه‌ی λ_i تکرار دارد.

فصل ۲

ماتریس سیمپلکتیک و ماتریس پادمتقارن

در این فصل به معرفی ماتریس‌های سیمپلکتیک و ویژگی‌های ماتریس سیمپلکتیک و پادمتقارن پرداخته شده و نیز تجزیه ماتریس‌های سیمپلکتیک ارائه می‌شود، که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۲ ماتریس سیمپلکتیک

ماتریس‌های سیمپلکتیک نقش مهمی را در تجزیه و تحلیل و حل مسائل ماتریس ایفا می‌کنند.
تبدیلات تشابهی سیمپلکتیک ساختارهای همیلتونی ،شبه‌همیلتونی و ماتریس‌های سیمپلکتیک را حفظ می‌کنند. بر اساس این حقیقت ماتریس‌های سیمپلکتیک به عنوان ابزار اصلی در تجزیه و تحلیل و حل عددی مسائل همیلتونی و مقدار ویژه سیمپلکتیک مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۷].

تعریف ۱.۱.۲. ماتریس $S \in C^{2m\times 2m}$ سیمپلکتیک[۱] نامیده می‌شود اگر

$$SJ_mS^* = J_m,$$

که در آن

$$J_m = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}. \tag{۱.۲}$$

در حالت حقیقی ماتریس S سیمپلکتیک متعامد[۲] می‌باشد. بنابراین ماتریس سیمپلکتیک حقیقی به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲. ماتریس $S \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ سیمپلکتیک حقیقی[۳] نامیده می‌شود اگر داشته باشیم.

$$SJS^T = J.$$

که در آن J به‌صورت (۱.۲) است. ماتریس سیمپلکتیک همچنین $J-$ متعامد نیز نامیده می شود.

[۱] Symplectic

[۲] Orthogonal symplectic

[۳] Real symplectic

ماتریس J یک ماتریس پادمتقارن حقیقی است. ویژگی‌های زیر از ماتریس J به راحتی قابل اثبات هستند.

$$J^T = -J, \quad J^۲ = -I, \quad J^{-۱} = -J = J^T,$$
$$J^T J = I^۲, \quad J^T J^T = -I, \quad \det(J) = \pm ۱.$$

ویژگی‌های فوق در اثبات قضایای مربوط به ماتریس سیمپلکتیک استفاده می‌شود.

مثال ۳.۱.۲. ماتریس $S \in \mathbb{R}^{۲\times۲}$ سیمپلکتیک است اگر و تنها اگر $\det(S) = ۱$ باشد.

برهان. قرار می‌دهیم $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ داریم:

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

با توجه به تعریف ماتریس سیمپلکتیک داریم:

$$S^T J S = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ad - bc \\ -ad + bc & ۰ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه اگر $\det(S) = ad - bc = ۱$ باشد آن‌گاه $S^T J S = J$ و برعکس اگر $S^T J S = J$ باشد آن‌گاه $\det(S) = ad - bc = ۱$. □

در اینجا ابتدا خصوصیات پایه‌ای ماتریس سیمپلکتیک که در اثبات قضایا مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌شود.

گزاره ۴.۱.۲. *اگر ماتریس‌های A و B سیمپلکتیک حقیقی باشند آن‌گاه:*

۱. *ماتریس A، نامنفرد است.*

۲. $A^{-۱} = -JA^T J$.

۳. *ماتریس‌های A^T، $A^{-۱}$ و AB سیمپلکتیک حقیقی هستند.*

برهان. ۱. با توجه به تعریف ماتریس سیمپلکتیک داریم:

$$A^T J A = J \longrightarrow \det(A^T J A) = \det(J) \longrightarrow \det(A^T).\det(J).\det(A) = \det(J),$$

پس:

$$\det(A^T)\det(A) = ۱,$$
$$(\det(A))^۲ = ۱ \Longrightarrow \det(A) = \pm ۱ \neq ۰.$$

بنابراین ماتریس A، ماتریسی نامنفرد است.

۲. ماتریس A یک ماتریس سیمپلکتیک است با توجه به تعریف ماتریس سیمپلکتیک داریم:

$$A^T JA = J \Longrightarrow A^T J = JA^{-1},$$

خواهیم داشت:

$$J^{-1}A^T J = A^{-1} \Longrightarrow J^T A^T J = A^{-1},$$

$-J = J^T$ بنابراین داریم:

$$A^{-1} = -JA^T J.$$

۳. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ یک ماتریس سیمپلکتیک است دراین‌صورت:

$$\begin{aligned} A^T JA = J &\Longrightarrow A^T JAJ = J^2 = -I, \\ &\Longrightarrow A^T JAJA^T = -IA^T = -A^T, \end{aligned}$$

با ضرب دو طرف تساوی در $(A^T)^{-1}$ داریم:

$$JAJA^T = -I,$$

با ضرب دو طرف تساوی در J^{-1} خواهیم داشت:

$$AJA^T = -J^{-1} = -(-J) = J \Longrightarrow AJA^T = J.$$

آن‌گاه،

$$(A^T)^T JA^T = J.$$

بنابراین ماتریس A^T یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی است.
حال نشان می‌دهیم ماتریس $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی است. از رابطه $A^{-1} = -JA^T J$ در قسمت (۲) داریم:

$$\begin{aligned} A^T JA = J \Longrightarrow (A^{-1})^T JA &= (-JA^T J)^T J(-JA^T J) \\ &= J^T (JA)^T JJA^T J \\ &= J^T AJ^T (-I)A^T J \\ &= -J^T AJ^T A^T J \\ &= -J^T J^T J \\ &= -(-I)J \\ &= J. \end{aligned}$$

بنابراین A^{-1} یک ماتریس سیمپلکتیک متعامد است.
نشان می‌دهیم اگر ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ و B سیمپلکتیک حقیقی باشند آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز سیمپلکتیک حقیقی است.

$$(AB)^T JAB = B^T A^T JAB = B^T JB = J.$$

بنابراین ماتریس AB نیز سیمپلکتیک می‌باشد.

□

در آنالیز عددی ماتریس‌های سیمپلکتیک متعامد دارای نقش مهمی هستند در ادامه این گروه از ماتریس‌ها بیشتر معرفی می‌شوند.

لم ۲.۱.۵. *ماتریس متعامد $U \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ سیمپلکتیک است اگر و تنها اگر داشته باشیم:*

$$U = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}.$$

که در آن $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ هستند.

برهان. ماتریس U متعامد است اگر و تنها اگر

$$Q_1^T Q_1 + Q_2^T Q_2 = I_m.$$

و

$$Q_1^T Q_2 = Q_2^T Q_1.$$

رابطه $U^T JU = J$ معادل دو رابطه فوق است در نتیجه U یک ماتریس سیمپلکتیک است. □

گزاره ۲.۱.۶. *اگر M ماتریسی حقیقی با مرتبه $2n \times 2n$ به فرم بلوکی زیر باشد.*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

آن‌گاه:

۱. *ماتریس M سیمپلکتیک است اگر و تنها اگر هر دو ماتریس $A^T C$ و $B^T D$ متقارن و نیز تساوی $A^T D - C^T B = I$ برقرار باشد.*

۲. *اگر $C = 0$ باشد ماتریس M سیمپلکتیک است اگر و تنها اگر A نامنفرد و ماتریس M را بتوان به‌شکل:*

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & E \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

نمایش داد.

برهان. ۱. با توجه به تعریف ماتریس سیمپلکتیک خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \circ & I \\ -I & \circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C^TA+A^TC & -C^TB+A^TD \\ -D^TA+B^TC & -D^TB+B^TD \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \circ & I \\ -I & \circ \end{bmatrix}.$$

رابطه فوق برقرار است اگر و تنها اگر دو ماتریس A^TC و B^TD متقارن و تساوی $A^TD - C^TB = I$ برقرار باشد.

۲. اگر $C = \circ$ باشد با توجه به قسمت اول داریم :

$$A^TD = I,$$

در نتیجه:

$$M = \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & (A^T)^{-۱} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & E \\ \circ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AE \\ \circ & (A^T)^{-۱} \end{bmatrix},$$

قرار می‌دهیم $E = A^{-۱}B$ و در نتیجه ۲ برقرار است.

□

گزاره ۷.۱.۲. *عبارت‌های زیر معادل یکدیگر هستند.*

۱. *ماتریس A ماتریسی همیلتونی است.*

۲. $A = JS$ *که در آن* $S = S^T$.

۳. $(JA)^T = JA$.

برهان. "۱ $\Longleftrightarrow$ ۲"

$$A = JJ^{-۱}A \Longleftrightarrow A = J(-J)A.$$

ماتریس A یک ماتریس همیلتونی است، پس:

$$\Longleftrightarrow (J(-JA))^TJ + JA = \circ \Longleftrightarrow (-JA)^TJ^TJ = -JA$$
$$\Longleftrightarrow (-JA)^T = -JA \Longleftrightarrow J(-JA)^T = A,$$

اگر $-JA = S$ باشد داریم:

$$A = J(-JA) = J(-JA)^T \Longleftrightarrow A = JS = JS^T \Longrightarrow S = S^T,$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$S = S^T.$$

"۳ $\Longleftarrow$ ۱"

$$\begin{aligned} &A^TJ + JA = 0 \Longleftrightarrow A^TJ = -JA \Longleftrightarrow \\ &(A^TJ)^T = (-JA)^T \Longleftrightarrow J^TA = -(JA)^T \Longleftrightarrow \\ &-JA = -(JA)^T \Longleftrightarrow (JA)^T = JA. \end{aligned}$$

□

گزاره ۸.۱.۲. *اگر ماتریس $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$، یک ماتریس نامنفرد باشد آن‌گاه ماتریس $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix}$ سیمپلکتیک است. $(X^{-*} = (X^{-1})^*)$*

برهان. ماتریس X، نامنفرد است پس X^{-1} موجود است. طبق تعریف ماتریس سیمپلکتیک داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix}^* &= \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ 0 & X^{-**} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & X \\ -X^{-*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ 0 & X^{-**} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix}$ یک ماتریس سیمپلکتیک است. □

گزاره ۹.۱.۲. *اگر ماتریس $Y \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ماتریسی هرمیتی باشد آن‌گاه ماتریس $\begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$، یک ماتریس سیمپلکتیک است.*

برهان. از تعریف ماتریس سیمپلکتیک داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^* &= \begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ Y^* & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -Y & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ Y & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$، سیمپلکتیک می‌باشد. □

گزاره ۱۰.۱.۲. *اگر دو ماتریس $Y \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و X به‌صورتی وجود داشته باشند که تساوی $XY^* = YX^*$ برقرار باشد و $\det(X) \neq 0$ باشد آن‌گاه ماتریس $\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix}$ سیمپلکتیک است.*

برهان. ماتریس X نامنفرد است پس داریم:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ Y^* & X^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -Y & X \\ -X^{-*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ Y^* & X^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -YX^* + XY^* & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X^{-*} \end{bmatrix}$ یک ماتریس سیمپلکتیک است. □

گزاره ۱۱.۱.۲. *اگر ماتریس $S \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$ سیمپلکتیک باشد آن‌گاه ماتریس‌های S^*، $S^{-*}(= JSJ^*)$ و $S^{-1}(= J^*S^*J)$ نیز سیمپلکتیک هستند.*

برهان. مشابه اثبات گزاره (۴.۱.۲) می‌باشد. □

در ادامه چند تجزیه از ماتریس‌های سیمپلکتیک که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌شود.

۱.۱.۲ تجزیه QR ماتریس سیمپلکتیک

تجزیه QR با استفاده از ماتریس‌های سیمپلکتیک به‌این‌صورت می‌باشد که برای هر ماتریس حقیقی C از مرتبه $2m \times r$، یک ماتریس سیمپلکتیک متعامد حقیقی مانند U وجود دارد به‌طوری‌که زمانی $r > m$ آن‌گاه داریم:

$$C = UR = U \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix},$$

که در آن ماتریس‌های R_{11} و R_{21}، ماتریس‌های مربعی حقیقی با مرتبه $m \times m$ و ماتریس‌های R_{12} و R_{22} ماتریس‌های حقیقی با مرتبه $m \times (r-m)$ هستند.

اگر $r \leqslant m$ آن‌گاه داریم:

$$C = UR = U \begin{bmatrix} R_{11} \\ 0 \\ R_{21} \\ 0 \end{bmatrix},$$

که در آن ماتریس‌های R_{11} و R_{21} ماتریس‌های مربعی حقیقی با مرتبه $r \times r$ و در هر دو تجزیه، ماتریس‌های R_{11} و R_{21} ماتریس‌های بالامثلثی هستند [۱۷].

لم ۲.۱.۱۲. *اگر ماتریس $C \in \mathbb{R}^{n\times 2m}$ به‌صورتی وجود داشته باشد که تساوی $CJC^T = 0$ برقرار باشد آن‌گاه:*

$$\operatorname{rank}(C) = r \leqslant \min\{n, m\},$$

و یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی مانند Z و یک ماتریس متعامد حقیقی مانند Q وجود دارد به‌صورتی که تساوی:

$$Q^T CZ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

برقرار است.

برهان. تجزیه QR ماتریس C را به‌شکل $C = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم. که در آن R ماتریسی حقیقی از مرتبه $r \times 2m$ با رتبه کامل سطری است. با توجه به تجزیه QR ماتریس سیمپلکتیک برای ماتریس R^T، یک ماتریس سیمپلکتیک متعامد مانند Z_1 وجود دارد که اگر $r > m$ باشد داریم:

$$RZ_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix},$$

و اگر $r \leqslant m$ باشد داریم:

$$RZ_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{12} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۲.۲)$$

که در آن ماتریس‌های R_{11} و R_{12} ماتریس‌های حقیقی و پایین مثلثی با مرتبه $s \times s$ می‌باشند و نیز

$$s = \min\{r, m\},$$

و اگر $r > m$ داریم:

$$R_{21}, R_{22} \in \mathbb{R}^{(r-m)\times m}.$$

با در نظر گرفتن شرط $CJC^T = 0$ داریم:

$$(RZ_1)J(RZ_1)^T = 0,$$

زمانی‌که $r > m$ باشد خواهیم داشت:

$$R_{11}R_{12}^T = R_{12}R_{11}^T, \quad R_{11}R_{22}^T = R_{12}R_{21}^T. \qquad (۳.۲)$$

با مقایسه اجزای متناظر ماتریس‌های اولین تساوی (۳.۲) و این حقیقت که $[R_{11}, R_{12}]$ رتبه کامل سطری است به این نتیجه می‌رسیم که ماتریس R_{11} نامنفرد و $R_{12} = 0$ می‌باشد و با مقایسه، با دومین معادله (۳.۲)خواهیم داشت $R_{22} = 0$. حال ماتریس،

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad and \quad R_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

نامنفرد است. اما می‌توان نتیجه گرفت که $r = \operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(R) = m$، که یک تناقض است. در نتیجه $r \leqslant m$ (بدیهی است که $r \leqslant n$). حال اگر ماتریس دارای فرم (۲.۲) باشد به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که ماتریس $R_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ نامنفرد و $R_{12} = 0$ است. اکنون ماتریس Z_2 به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$Z_2 = \operatorname{diag}(R_{11}^{-1}, I_{m-r}; R_{11}^T, I_{m-r}).$$

داریم:

$$RZ_1Z_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین برای ماتریس $Z = Z_1Z_2$، خواهیم داشت:

$$Q^TCZ = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

لم ۱۳.۱.۲. *اگر ماتریس $X \in \mathbb{R}^{2n\times 2m}$ به‌صورتی وجود داشته باشد که تساوی $XJ_mX^T = J_n$ برقرار باشد آن‌گاه یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی مانند Z وجود دارد که:*

$$XZ = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n & m-n & n & m-n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

باشد [۱۷].

۲.۱.۲ تجزیه قطبی ماتریس سیمپلکتیک

لم ۱۴.۱.۲. *هر ماتریس سیمپلکتیک $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ را می‌توان به‌شکل زیر تجزیه نمود:*

$$M = AU, \tag{۴.۲}$$

که درآن A ماتریسی سیمپلکتیک ، متقارن و مثبت معین و U یک ماتریس سیمپلکتیک متعامد است. این دو ماتریس منحصراً توسط ماتریس M مشخص می‌شوند.

برهان. ماتریس A به‌شکل $A = \sqrt{MM^T}$ در نظر گرفته می‌شود، دراین‌صورت A یک ماتریس متقارن و نامنفی معین است. با توجه به این‌که M یک ماتریس نامنفرد و ماتریس A مثبت معین است. قرار می‌دهیم $U = A^{-1}M$ و با برقراری رابطه (۴.۲) و از :

$$UU^T = A^{-1}MM^TA^{-1} = A^{-1}A^2A^{-1} = I,$$

نتیجه گرفته می‌شود که ماتریس U، متعامد است. اگر ماتریس M دارای دو تجزیه قطبی باشد یعنی:

$$M = A_1U_1 = A_2U_2,$$

آن‌گاه:

$$U_1^TA_1 = U_2^TA_2,$$

بنابراین،

$$A_1^2 = A_1U_1U_1^TA_1 = A_2U_2U_2^TA_2 = A_2^2,$$

پس $A_1 = A_2$ در نتیجه $U_1 = U_2$ دراین‌صورت تجزیه (۴.۲) منحصربه‌فرد است. با در نظر گرفتن تعریف ماتریس سیمپلکتیک و $M = J^{-1}(M^T)^{-1}J$ و در نظر گرفت رابطه (۴.۲) داریم:

$$M = J^{-1}A^{-1}(U^T)^{-1}J = J^{-1}A^{-1}JJ^{-1}(U^T)^{-1}J,$$

باتوجه به منحصربه‌فرد بودن تجزیه (۴.۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = J^{-1}A^{-1}J, \quad U = J^{-1}(U^T)^{-1}J,$$

که هر دو ماتریس A و U سیمپلکتیک هستند. □

لم ۱۵.۱.۲. *ماتریس متعامد U،سیمپلکتیک است اگر و تنها اگر دارای فرم بلوکی زیر باشد.*

$$U = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix},$$

که درآن ماتریس A^TB یک ماتریس متقارن و تساوی $A^TA + B^TB = I$ برقرار باشد.

برهان. ۱. کفایت: با محاسبه مستقیم نشان داده می‌شود.

۲. لزوم: با شرایط داده شده داریم:

$$U^T K U = K, \tag{۵.۲}$$

که در آن $K = I$ یا J. بنابراین تساوی (۵.۲) برای رابطه زیر نیز برقرار است.

$$K = I + iJ,$$

قرار می‌دهیم:

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} A^T & B^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{bmatrix}. \tag{۶.۲}$$

با مقایسه دو طرف رابطه داریم:

$$E^*E = F^*F = I, \quad E^*F = iI, \tag{۷.۲}$$

که در آن $E = A + iC$، $F = B + iD$ و E^* ماتریس مزدوج ترانهاده ماتریس E می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$E^*(E + iF) = \circ.$$

ازتساوی‌های (۷.۲) می‌توان نتیجه گرفت ماتریس E^* یک ماتریس نامنفرد است. بنابراین داریم:

$$E + iF = \circ.$$

که نشان می‌دهد $D = A$ و $B = -C$است. از متعامد بودن ماتریس U می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس A^TB متقارن وتساوی $AA^T + B^TB = I$ برقرار است.

□

اگر ماتریس $T \in \mathbb{C}^{۲n\times۲n}$ به‌شکل زیر تعریف شود.

$$T = \begin{bmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{bmatrix}. \tag{۸.۲}$$

آن‌گاه ماتریس U در لم قبل به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$TUT^{-۱} = \begin{bmatrix} A + iB & \circ \\ \circ & A - iB \end{bmatrix}. \tag{۹.۲}$$

لم ۱۶.۱.۲. *اگر M یک ماتریس سیمپلکتیک باشد آن‌گاه* $\det(M) = 1$.

برهان. با توجه به رابطه (۴.۲)، ماتریس M دارای تجزیه قطبی $M = PU$ می‌باشد. که در آن P یک ماتریس مثبت معین، متقارن و سیمپلکتیک است و U ماتریس سیمپلکتیک متعامد می‌باشد. بنابراین:

$$\det(M) = \det(P)\det(U).$$

بنا به (۹.۲) داریم:

$$\det(U) = \det(TUT^{-1}) = [(A+iB)(A+iB)^*] = 1.$$

که در آن $A^* = A$، $B^* = B$ و ماتریس $A+iB$ یک ماتریس یکانی است. می‌دانیم P یک ماتریس سیمپلکتیک است

$$(\det(P))^2 = 1.$$

و P مثبت معین نیز هست آن‌گاه:

$$\det(P) = 1.$$

بنابراین $\det(M) = 1$ می‌باشد. □

۲.۲ ماتریس پادمتقارن

۱.۲.۲ تبدیلات تشابهی متعامد ماتریس پادمتقارن

گزاره ۱.۲.۲. *اگر ماتریس K یک ماتریس حقیقی پادمتقارن با مرتبه $2n \times 2n$ باشد ماتریس متعامد مانند A وجود دارد به‌صورتی‌که:*

$$A^TKA = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \lambda_r \\ -\lambda_r & 0 \end{bmatrix}, 0, 0, \ldots\right).$$

که در آن مقادیر ویژه ماتریس K برابر است با $\pm\lambda_1 i, \ldots, \pm\lambda_r i$ و به تعداد $2(n-r)$ صفر و رتبه ماتریس A برابر $2r$ است [۱۵].

۳.۲ تجزیه شبه شور ماتریس پادمتقارن

در این بخش به معرفی تجزیه شبه شور ماتریس پادمتقارن پرداخته می‌شود.
هر ماتریس پادمتقارن حقیقی مانند K با جایگشت مناسب دارای تجزیه شبه شور حقیقی زیر خواهد بود،

$$K = Q\begin{bmatrix} 0 & \Sigma^2 & 0 \\ -\Sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T, \qquad (۱۰.۲)$$

که در آن Q ماتریس متعامد حقیقی و $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, .., \sigma_m) > 0$ می‌باشد.
از این تجزیه شبه شور می‌توان گزاره‌های زیر نتیجه گرفته شود [۱۷].

گزاره ۱.۳.۲. *اگر ماتریس K یک ماتریس پادمتقارن با تجزیه شبه شور (۱۰.۲) باشد آن‌گاه داریم:*

۱. $\| K \| = \| \Sigma \|^2$.

۲. $\| K^\dagger \| = \| \Sigma^{-1} \|^2$.

۳. $k(K) = k^2(\Sigma)$.

۴. $\operatorname{rank}(K) = 2m$.

۴.۲ تجزیه شبه چولسکی ماتریس پادمتقارن

هر ماتریس پادمتقارن دارای تجزیه شبه چولسکی $K = B^T J B$ می‌باشد که در آن،

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

است. این نوع تجزیه به‌عنوان یک ابزار کلیدی در الگوریتم حل مسائل مقدار ویژه با ساختار همیلتونی به شمار می‌رود [۱]. در برخی موارد با بررسی دقیق می‌توان فاکتورگیری کارآمدی به‌شکل $K = B^T J B$ داشت.

مثال ۱.۴.۲. ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & 0 \end{bmatrix},$$

خواهیم داشت:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ I & 0 \end{bmatrix} = B^T J B.$$

اگر ماتریس E نامنفرد باشد فاکتورگیری فوق بسیار کارآمد خواهد بود.

مثال ۲.۴.۲. اگر ماتریس K به‌شکل زیر در نظر گرفته‌شود.

$$K = \begin{bmatrix} G & M \\ -M & 0 \end{bmatrix},$$

خواهیم داشت:

$$K = \begin{bmatrix} I & -\frac{1}{2}G \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{2}G & M \end{bmatrix} = B^T J B.$$

قضیه ۳.۴.۲. *اگر ماتریس $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ یک ماتریس نامنفرد پادمتقارن باشد آن‌گاه ماتریس $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که ماتریس K به‌صورت زیر فاکتورگیری شود [۱].*

$$K = B^T J B.$$

برهان. با استفاده از تجزیه طیفی ماتریس K ، اثبات این قضیه به‌راحتی امکان‌پذیر است. تجزیه طیفی ماتریس K برابر است با:

$$K = Q^T X Q,$$

که در آن Q یک ماتریس متعامد و ماتریس X، ماتریس قطری بلوکی که هر بلوک روی قطر آن یک ماتریس ۲×۲ به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \circ & \delta_i \\ -\delta_i & \circ \end{bmatrix},$$

با $\delta_i > \circ$ که در آن $\pm\delta_i$، یک جفت از مزدوج مختلط (قسمت صرفاً موهومی) مقادیر ویژه ماتریس K است.

ماتریس D را به‌شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\delta_۱}, \sqrt{\delta_۱}, \cdots, \sqrt{\delta_n}, \sqrt{\delta_n}\right).$$

خواهیم داشت:

$$X = D\hat{J}D = D^T\hat{J}D,$$

که در آن ماتریس $\hat{J}$ یک ماتریس قطری بلوکی که بلوک‌های روی قطر اصلی آن ماتریس ۲×۲ به‌شکل:

$$\begin{bmatrix} \circ & I \\ -I & \circ \end{bmatrix}.$$

هستند. واضح است که ماتریس $\hat{J}$ متشابه جایگشتی با ماتریس J است بنابراین:

$$\hat{J} = PJP^T,$$

که در آن ماتریس P یک جایگشت کاملاً تصادفی است.

$$P = [e_۱, e_۳, \cdots, e_{۲n-۱}, e_۲, e_۴, \cdots, e_{۲n}],$$

که در آن e_j ، jامین بردار واحد در $\mathbb{R}^{۲n}$ است. با ترکیب این فاکتورگیری داریم:

$$K = B^T J B,$$

که در آن

$$B = P^T D Q.$$

□

فصل ۳

تجزیه شبه SVD

در این فصل تجزیه شبه SVD و در ادامه تجزیه SVD ساختاردار ماتریس‌های سیمپلکتیک که در فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند معرفی، وجود و یکتایی این تجزیه‌ها اثبات شده است.

۱.۰.۳ تجزیه شبه SVD

در قضیه زیر تجزیه شبه SVD برای ماتریس های حقیقی ارائه شده. این تجزیه را تجزیه شبه SVD می‌نامیم زیرا بسیار شبیه به تجزیه SVD است.

قضیه ۴.۰.۳. *اگر $B \in \mathbb{R}^{n\times ۲m}$، آن‌گاه ماتریس سیمپلکتیک حقیقی S و ماتریس متعامد حقیقی مانند Q وجود دارد به‌صورتی‌که:*

$$Q^T BS = D = \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ p \\ n-۲p-q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & q & m-p-q & p & q & m-p-q \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Sigma & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & I & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \Sigma & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{array} \qquad (۱.۳)$$

که در آن $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_۱, \cdots, \sigma_p) > ۰$ و $\mathrm{rank}(B) = ۲p + q$ [۱۷].

برهان. می‌دانیم ماتریس BJB^T پادمتقارن است با توجه به (۱۰.۲) تجزیه شبه شور ماتریس BJB^T به‌شکل زیر است.

$$BJB^T = U \begin{bmatrix} ۰ & \Sigma^۲ & ۰ \\ -\Sigma^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} U^T,$$

که در آن ماتریس U یک ماتریس متعامد حقیقی و $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_۱, \cdots, \sigma_p) > ۰$ می‌باشد.
قرار می‌دهیم $\Gamma = \mathrm{diag}(\Sigma, \Sigma, I_{n-۲p})$ و $X := \Gamma^{-۱}U^T B$ داریم:

$$XJX^T = \begin{bmatrix} ۰ & I_p & ۰ \\ -I_p & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}. \tag{۲.۳}$$

ماتریس X را به‌صورت $X = [X_۱^T, X_۲^T, X_۳^T]^T$ تقسیم‌بندی می‌کنیم آن‌گاه با توجه به (۲.۳) داریم:

$$[X_۱^T, X_۲^T]^T J [X_۱^T, X_۲^T] = J_p.$$

با توجه به لم (۱۳.۱.۲) یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی مانند $S_۱ \in \mathbb{R}^{۲m\times ۲m}$ وجود دارد که:

$$[X_۱^T, X_۲^T]^T S_۱ = \begin{bmatrix} I_p & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_p & ۰ \end{bmatrix}.$$

می‌دانیم $(XS_۱)J(XS_۱)^T = XJX^T$ ، با توجه به (۲.۳) و فرم بلوکی بالا داریم:

$$XS_۱ = \begin{bmatrix} I_p & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_p & ۰ \\ ۰ & X_{۳۲} & ۰ & X_{۳۴} \end{bmatrix},$$

و

$$[X_{۳۲}, X_{۳۴}] J_{m-p} [X_{۳۲}, X_{۳۴}]^T = ۰$$

با توجه به لم (۱۲.۱.۲) یک ماتریس سیمپلکتیک مانند Z و یک ماتریس متعامد مانند V وجود دارد به‌طوری‌که:

$$V^T [X_{۳۲}, X_{۳۴}] Z = \begin{bmatrix} I_q & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

و

$$q \leqslant min\{n - ۲p, m - p\}.$$

ماتریس سیمپلکتیک $S_۲$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_۲ = \begin{bmatrix} I_p & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & Z_{۱۱} & ۰ & Z_{۱۲} \\ ۰ & ۰ & I_p & ۰ \\ ۰ & Z_{۲۱} & ۰ & Z_{۲۲} \end{bmatrix}.$$

که در آن $Z = [Z_{ij}]_{۲\times۲}$ به‌طوری‌که $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{(m-p)\times(m-p)}$ برای $i, j = ۱, ۲$ می‌باشد. در نتیجه،

$$XS_۱S_۲ = \begin{bmatrix} I_{۲p} & ۰ \\ ۰ & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & I_p & ۰ & ۰ \\ ۰ & I_q & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

با توجه به این که ماتریس‌های Γ و $\mathrm{diag}(I_{۲p}, V)$ قابل تبدیل به یکدیگر هستند.
قرار می دهیم $S := S_۱S_۲$ و $Q = U\mathrm{diag}(I_{۲p}, V)P$ به‌طوری‌که:

$$P = \mathrm{diag}\left(I_p, \begin{bmatrix} ۰ & I_p \\ I_q & ۰ \end{bmatrix}, I_{n-۲p-q}\right).$$

با توجه به این که $B = U\Gamma X$، داریم:

$$Q^TBS = Q^TU\Gamma XS = P^T\Gamma \begin{bmatrix} I_p & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & I_p & ۰ & ۰ \\ ۰ & I_q & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \Sigma & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & I_q & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \Sigma & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

□

مثال ۵.۰.۳. ماتریس مربعی $B \in \mathbb{R}^{۱۰\times۱۰}$ را به‌شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$B =$$
$$\begin{bmatrix}
-۱۹۳/۹۰ & -۱۰/۳۱ & ۰/۵۲ & -۷/۷۴ & ۳۵/۶۷ & ۱۹۳/۸۹ & ۱۰/۵۶ & -۰/۵۵ & -۰/۰۳ & ۰/۰۰ \\
-۱۳۹/۰۸ & -۴/۱۹ & ۱/۸۰ & ۵/۵۷ & -۴۳/۵۹ & ۱۳۹/۰۹ & ۴/۲۴ & -۱/۲۹ & ۰/۰۸ & ۰/۰۰ \\
-۱۴۹/۸۶ & ۱۹/۰۱ & -۰/۸۷ & ۶/۲۳ & ۲۳/۶۵ & ۱۴۹/۸۵ & -۱۹/۰۹ & -۰/۴۷ & -۰/۰۵ & ۰/۰۰ \\
-۱۷۳/۵۱ & ۵/۰۳ & -۰/۸۴ & -۳/۰۷ & -۴۷/۰۲ & ۱۷۳/۴۸ & -۵/۰۵ & ۱/۴۲ & -۰/۰۱ & ۰/۰۰ \\
-۱۶۳/۲۰ & -۸/۸۶ & ۰/۹۳ & ۶/۱۰ & ۱۶/۸۵ & ۱۶۳/۲۲ & ۸/۷۸ & ۰/۶۷ & -۰/۰۹ & ۰/۰۰ \\
-۱۲۹/۶۵ & -۶/۹۹ & -۲/۴۵ & ۸/۹۵ & -۲۰/۳۶ & ۱۲۹/۶۶ & ۷/۱۴ & ۱/۰۰ & ۰/۰۰ & -۰/۰۰ \\
-۱۵۹/۶۵ & -۱۷/۲۷ & ۰/۹۱ & -۰/۹۷ & -۱۱/۸۳ & ۱۵۹/۶۴ & ۱۷/۰۸ & -۱/۳۵ & -۰/۰۲ & -۰/۰۰ \\
-۱۶۱/۷۲ & -۷/۶۵ & -۱/۸۶ & -۶/۰۷ & ۲۷/۷۰ & ۱۶۱/۷۴ & ۷/۵۰ & ۱/۱۱ & ۰/۱۰ & ۰/۰۰ \\
-۱۷۰/۹۸ & ۱۷/۹۸ & ۱/۳۲ & ۳/۲۰ & ۳۳/۳۶ & ۱۷۰/۹۷ & -۱۷/۹۵ & -۰/۲۸ & ۰/۰۸ & -۰/۰۰ \\
-۱۲۷/۱۳ & ۱۶/۷۷ & ۰/۱۶ & -۹/۷۵ & -۳۶/۵۵ & ۱۲۷/۱۵ & -۱۶/۷۷ & -۰/۳۶ & -۰/۰۴ & -۰/۰۰
\end{bmatrix}$$

ماتریس B دارای مقادیر ویژه $\{\pm 25i, \pm 16i, \pm 9i, \pm 4i, \pm 1i\}$ و $\operatorname{rank}(B) = 10$ می‌باشد. در این صورت در قضیه (۴.۰.۳) خواهیم داشت:

$$n = 10, \quad m = 5, \quad p = 5, \quad q = 0$$

در نتیجه تجزیه شبه SVD ماتریس B به شکل:

$$B = QDS^{-1} = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} S^{-1}.$$

خواهد بود، که در آن $Q \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ ماتریسی متعامد به‌صورت زیر می‌باشد.

$$Q =$$

$$\begin{bmatrix} -0.38 & -0.26 & 0.18 & 0.168 & -0.17 & -0.13 & 0.62 & -0.009 & -0.38 & 0.35 \\ -0.27 & -0.10 & 0.43 & -0.433 & -0.40 & 0.23 & 0.13 & 0.170 & 0.28 & -0.43 \\ -0.29 & 0.47 & 0.15 & 0.296 & -0.41 & -0.08 & -0.19 & -0.450 & 0.30 & 0.23 \\ -0.34 & 0.12 & -0.47 & 0.051 & -0.20 & -0.55 & -0.03 & 0.194 & -0.15 & -0.47 \\ -0.32 & -0.21 & -0.22 & 0.455 & -0.03 & 0.37 & -0.18 & 0.538 & 0.30 & 0.16 \\ -0.25 & -0.17 & -0.33 & -0.000 & 0.39 & 0.11 & 0.38 & -0.482 & 0.44 & -0.20 \\ -0.31 & -0.42 & 0.45 & 0.136 & 0.35 & -0.30 & -0.47 & -0.147 & -0.05 & -0.11 \\ -0.32 & -0.18 & -0.37 & -0.504 & -0.16 & 0.27 & -0.36 & -0.251 & -0.29 & 0.27 \\ -0.34 & 0.44 & 0.09 & -0.401 & 0.46 & -0.18 & 0.06 & 0.345 & 0.16 & 0.33 \\ -0.25 & 0.41 & 0.12 & 0.224 & 0.26 & 0.49 & 0.00 & -0.065 & -0.49 & -0.36 \end{bmatrix}$$

ماتریس $D = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix}$ می‌باشد که در آن Σ ماتریس قطری مثبت، به‌شکل:

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sqrt{25}, \sqrt{16}, \sqrt{9}, \sqrt{4}, \sqrt{1}) > 0$$

خواهد بود، در نتیجه:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و ماتریس نامنفرد سیمپلکتیک $S \in \mathbb{R}^{۱۰\times۱۰}$ برابر خواهد شد با:

$$S = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱۰۰/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱۰/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱/۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۰۱ \\ -۰/۰۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱۰۰/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۰/۱۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱۰/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱/۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱۰/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱۰۰/۰۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۰۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۶.۰.۳. ماتریس $B \in \mathbb{R}^{۱۰\times۱۴}$ به‌شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$B = \begin{bmatrix} -۵/۴۰۰۰ & -۱۱/۶۰۵۴ & ۱۰/۵۴۲۸ & -۹/۶۹۳۹ & ۲۲/۳۷۳۶ & ۲۳/۴۲۵۵ & -۲۳/۱۴۳۴ & -۶/۵۵۶۷ \\ ۲/۵۰۸۳ & ۳/۶۱۷۴ & -۳/۶۹۱۹ & ۴/۰۰۰۴ & -۸/۷۴۴۵ & -۷/۴۰۳۸ & ۷/۹۵۲۱ & ۲/۴۲۴۷ \\ ۲/۲۸۶۸ & ۳/۸۲۶۱ & -۳/۶۸۳۱ & ۳/۷۲۸۲ & -۸/۶۷۷۵ & -۷/۶۳۰۵ & ۷/۸۸۷۷ & ۲/۰۳۹۸ \\ ۰/۳۱۱۶ & ۱۷/۷۵۹۹ & -۱۰/۴۷۰۸ & ۱/۱۹۵۰ & -۸/۱۳۷۵ & -۳۴/۶۹۱۳ & ۲۵/۱۳۶۵ & ۸/۲۴۲۷ \\ ۳/۲۹۷۱ & ۴/۴۷۱۰ & -۴/۲۰۸۱ & ۵/۴۰۹۳ & -۱۱/۶۲۵۶ & -۹/۳۴۶۵ & ۱۰/۰۷۰۶ & ۳/۰۸۳۸ \\ -۹/۸۲۳۴ & ۱۰/۸۷۸۵ & ۰/۷۴۵۴ & -۱۶/۶۵۶۹ & ۲۷/۵۴۴۲ & -۱۹/۲۹۰۲ & ۱/۸۲۸۵ & ۱/۸۷۲۲ \\ ۰/۸۸۴۱ & -۱۰/۵۱۷۴ & ۵/۱۵۵۴ & ۲/۰۵۹۰ & -۰/۰۳۱۱ & ۲۰/۳۱۸۵ & -۱۲/۹۰۳۳ & -۴/۶۵۹۴ \\ ۶/۹۴۲۲ & -۱۷/۱۶۳۶ & ۵/۰۱۳۹ & ۱۲/۰۴۷۲ & -۱۶/۰۲۰۲ & ۳۲/۳۷۴۹ & -۱۴/۶۵۹۱ & -۵/۸۰۲۲ \\ ۱/۳۶۹۴ & ۳/۴۲۱۵ & -۲/۹۶۹۱ & ۲/۱۱۷۳ & -۶/۲۸۹۲ & -۷/۲۱۱۲ & ۶/۹۳۳۴ & ۱/۸۰۴۹ \\ -۰/۶۳۰۵ & -۶/۰۵۸۵ & ۳/۱۲۵۶ & -۱/۱۴۶۰ & ۴/۳۸۱۲ & ۱۱/۸۵۱۸ & -۸/۷۰۳۷ & -۲/۶۱۵۳ \end{bmatrix}$$

ستون ۱۰ تا ۱۴:

$$\begin{bmatrix} ۱۶/۹۴۰۲ & -۴/۷۴۸۴ & -۱۱/۵۴۹۷ & ۱۵/۳۷۶۶ & -۳۱/۳۱۵۰ & ۱۳/۹۶۳۲ \\ -۶/۴۴۱۲ & ۱/۹۴۸۷ & ۳/۵۹۰۳ & -۴/۸۸۱۱ & ۱۲/۳۳۳۰ & -۵/۸۳۳۱ \\ -۶/۶۴۵۷ & ۱/۶۱۲۳ & ۳/۶۶۲۷ & -۴/۸۴۱۵ & ۱۲/۱۱۶۸ & -۵/۵۰۶۹ \\ -۶/۲۰۷۰ & -۱/۶۳۹۰ & ۱۴/۰۷۳۰ & -۲۳/۸۵۵۴ & ۱۰/۵۶۴۲ & ۱/۹۵۹۵ \\ -۸/۵۱۷۰ & ۳/۰۰۴۲ & ۴/۷۴۹۰ & -۶/۲۶۹۴ & ۱۶/۴۴۱۴ & -۸/۳۰۹۲ \\ ۲۰/۲۲۷۹ & -۱۲/۹۵۹۷ & ۳/۵۳۹۰ & -۱۴/۱۵۸۲ & -۴۰/۳۲۱۷ & ۳۰/۸۷۲۴ \\ -۰/۲۲۵۷ & ۳/۲۵۲۳ & -۷/۲۵۵۸ & ۱۴/۳۰۲۰ & ۰/۶۶۳۰ & -۵/۸۷۱۳ \\ -۱۲/۰۶۳۰ & ۱۰/۷۸۵۰ & -۱۰/۱۷۵۴ & ۲۳/۲۴۷۵ & ۲۴/۰۵۴۴ & -۲۳/۸۳۰۸ \\ -۴/۴۴۷۲ & ۰/۹۲۷۱ & ۳/۹۱۶۳ & -۵/۰۷۱۲ & ۸/۸۴۰۴ & -۳/۸۰۸۳ \\ ۳/۴۳۵۱ & ۰/۰۹۳۷ & -۴/۷۹۱۸ & ۸/۰۴۱۳ & -۵/۸۰۱۱ & ۰/۸۸۷۶ \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای مقادیر ویژه $\{\pm i۱۰^{۴}, \pm i, \pm i۱۰^{-۴}, \pm i۱۰^{-۸}, ۰, ۰\}$ و $\mathrm{rank}(B) = ۱۰$ و $\| B \| = ۱۰^{۲}$ می‌باشد. در این صورت در قضیه (۴.۰.۳) خواهیم داشت:

$$n = ۱۰, \quad m = ۷, \quad p = ۴, \quad q = ۲$$

در نتیجه تجزیه شبه SVD ماتریس B به‌شکل:

$$B = QDS^{-1} = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

خواهد بود، که در آن $Q \in \mathbb{R}^{10\times 14}$ ماتریسی متعامد به‌شکل زیر می‌باشد.

$$Q =$$
$$\begin{bmatrix} -0.3518 & -0.3350 & 0.0997 & -0.5279 & -0.2817 & -0.2078 & -0.3285 & -0.1959 & 0.3164 & 0.3264 \\ -0.3089 & -0.4934 & 0.1928 & 0.1809 & 0.1516 & -0.3881 & 0.6286 & -0.0563 & 0.0151 & -0.1379 \\ -0.2939 & -0.1720 & 0.5000 & 0.1816 & 0.3518 & 0.0463 & -0.5497 & 0.1324 & -0.3710 & -0.1333 \\ -0.3297 & -0.1748 & -0.5833 & 0.5745 & 0.0489 & 0.0702 & -0.273 & -0.2688 & 0.1855 & 0.0435 \\ -0.2970 & 0.3327 & 0.2073 & 0.2319 & -0.2091 & -0.1043 & -0.0366 & 0.5317 & 0.5746 & -0.1886 \\ -0.3381 & 0.3404 & 0.1439 & 0.0487 & 0.3341 & 0.2520 & 0.2688 & -0.0403 & 0.0099 & 0.7054 \\ -0.2691 & -0.3485 & -0.2888 & -0.2960 & 0.0125 & 0.5985 & 0.1509 & 0.4806 & -0.0783 & -0.1301 \\ -0.3162 & 0.3458 & -0.0166 & -0.3387 & 0.3252 & 0.1352 & 0.0587 & -0.4596 & 0.1720 & -0.5451 \\ -0.3342 & 0.1629 & 0.1756 & 0.1585 & -0.7129 & 0.2138 & 0.1372 & -0.2460 & -0.4066 & -0.0849 \\ -0.3149 & 0.3001 & -0.4295 & -0.2050 & 0.0444 & -0.5500 & -0.0384 & 0.2857 & -0.4431 & 0.0187 \end{bmatrix}$$

در این صورت ماتریس نامنفرد سیمپلکتیک $S \in \mathbb{R}^{14\times 14}$ متعامد می‌شود و برابر خواهد شد با:

$$S =$$
$$\begin{bmatrix} -0.0349 & 0.2561 & 0.3174 & 0.0192 & 0.0140 & -0.4352 & 0.2456 & 0.4741 \\ -0.3202 & 0.0591 & 0.1116 & 0.2996 & 0.3128 & 0.1557 & -0.0254 & -0.4811 \\ -0.16037 & -0.1091 & 0.4044 & -0.1819 & -0.2592 & 0.3721 & 0.4195 & -0.1076 \\ 0.2764 & 0.1736 & -0.2344 & 0.0353 & 0.3940 & -0.0984 & 0.2361 & 0.1364 \\ -0.0225 & 0.5354 & -0.2048 & -0.1746 & 0.0221 & -0.0155 & 0.1620 & -0.0806 \\ -0.4747 & 0.1863 & -0.1471 & -0.5868 & -0.1478 & -0.1931 & 0.0875 & -0.2035 \\ -0.1722 & -0.3235 & -0.2162 & 0.4362 & -0.0206 & -0.1705 & 0.5545 & -0.0654 \\ -0.4741 & -0.1675 & -0.1834 & 0.1398 & -0.0310 & -0.5037 & -0.1464 & -0.0349 \\ 0.4811 & -0.2149 & -0.1007 & -0.1313 & -0.4540 & -0.3855 & 0.0967 & -0.3202 \\ 0.1076 & 0.0999 & -0.5735 & -0.0221 & 0.0527 & 0.1627 & -0.0629 & -0.1603 \\ -0.1364 & 0.2323 & -0.3329 & 0.2397 & -0.4389 & 0.3158 & 0.2887 & 0.2764 \\ 0.0806 & -0.3942 & -0.1115 & -0.4029 & 0.3474 & 0.0814 & 0.3867 & -0.0225 \\ 0.2035 & 0.3353 & 0.2109 & 0.2313 & -0.1679 & -0.1202 & 0.1129 & -0.4747 \\ 0.0654 & 0.2384 & 0.1325 & 0.0030 & 0.3248 & -0.1484 & 0.2924 & -0.1722 \end{bmatrix}$$

ستون ۹ تا ۱۴:

$$
\begin{bmatrix}
0.1675 & 0.1834 & -0.1398 & 0.0310 & 0.5037 & 0.1464 \\
0.2149 & 0.1007 & 0.1313 & 0.4540 & 0.3855 & -0.0967 \\
-0.0999 & 0.5735 & 0.0221 & -0.0527 & -0.1627 & 0.0629 \\
-0.2323 & 0.3329 & -0.2397 & 0.4389 & -0.3158 & -0.2887 \\
0.3942 & 0.1115 & 0.4029 & -0.3474 & -0.0814 & -0.3867 \\
-0.3353 & -0.2109 & -0.2313 & 0.1679 & 0.1202 & -0.1129 \\
-0.2384 & -0.1325 & -0.0030 & -0.3248 & 0.1484 & -0.2924 \\
0.2561 & 0.3174 & 0.0192 & 0.0140 & -0.4352 & 0.2456 \\
0.0591 & 0.1116 & 0.2996 & 0.3128 & 0.1557 & -0.0254 \\
-0.1091 & 0.4044 & -0.1819 & -0.2592 & 0.3721 & 0.4195 \\
0.1736 & -0.2344 & 0.0353 & 0.3940 & -0.0984 & 0.2361 \\
0.5354 & -0.2048 & -0.1746 & 0.0221 & -0.0155 & 0.1620 \\
0.1863 & -0.1471 & -0.5868 & -0.1478 & -0.1931 & 0.0875 \\
-0.3235 & -0.2162 & 0.4362 & -0.0206 & -0.1705 & 0.5545
\end{bmatrix}
\tag{3.3}
$$

ماتریس $D = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد که در آن Σ ماتریس قطری مثبت، به‌صورت:

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sqrt{10^{-8}}, \sqrt{10^{-4}}, \sqrt{1}, \sqrt{10^{4}}) > 0$$

خواهد بود، در نتیجه:

$$
D =
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 10^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{2} & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

۱.۳ تجزیه SVD ماتریس‌های سیمپلکتیک

همه ماتریس‌ها دارای تجزیه SVD هستند [۱۱]. اما ماتریس‌های سیمپلکتیک داری تجزیه SVD با ساختار ویژه‌ای هستند که در ادامه بیان خواهد شد. در این‌جا ابتدا به تجزیه SVD ساختاردار ماتریس‌های سیمپلکتیک مختلط و سپس ماتریس‌های سیمپلکتیک حقیقی پرداخته شده است.

قضیه ۱.۱.۳. *اگر S یک ماتریس سیمپلکتیک مربعی باشد به طوری‌که $S \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$ آن‌گاه ماتریس S دارای تجزیه SVD به‌شکل:*

$$S = U \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{bmatrix} V^*,$$

که در آن U و V ماتریس‌های سیمپلکتیک یکانی و $\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ که در آن $\omega_1 \geqslant \cdots \geqslant \omega_m \geqslant 1$ می‌باشد [۱۷].

برهان. تجزیه SVD ماتریس S به‌صورت

$$S = WDZ^*, \tag{۴.۳}$$

است. که در آن W و Z ماتریس های یکانی و ماتریس D قطری می‌باشد. ماتریس S یک ماتریس سیمپلکتیک است با توجه به تعریف ماتریس سیمپلکتیک تساوی $S = JS^{-*}J^*$ برقرار است و درنتیجه داریم:

$$S = J(WDZ^*)^{-*}J^* = (JW)D^{-1}(JZ)^*. \tag{۵.۳}$$

اگر ω را به عنوان مقدار منفرد ماتریس S در نظر گرفته شود بدیهی است که ω^{-1} نیز مقدار منفرد ماتریس S می‌باشد. در این صورت ماتریس D را می‌توان به شکل،

$$D = \operatorname{diag}(\Omega, \Omega^{-1}),$$

نمایش داده شود. که در آن Ω ماتریس قطری مثبت و عناصر قطری آن به‌صورت نزولی و کمتر از یک مرتب شده‌اند. همچنین از تجزیه های SVD، (۴.۳) و (۵.۳) خواهیم داشت:

$$D(Z^*JZ)D = W^*JW, \qquad D(W^*JW)D = Z^*JZ, \tag{۶.۳}$$

در نتیجه:

$$D^2(Z^*JZ)D^2 = D(D(Z^*JZ)D)D = D(W^*JW)D = Z^*JZ.$$

قرار می‌دهیم:

$$\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1 I, ..., \omega_p I, I).$$

که در آن $\omega_1 > ... > \omega_p > 1$ است. از تساوی $D^2(Z^*JZ)D^2 = Z^*JZ$ و این حقیقت که ماتریس

Z^*JZ یک ماتریس شبه هرمیتی است می‌توان نتیجه گرفت:

$$Z^*JZ = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \circ & & & & X_۱ & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & \circ & & & & X_p & \\ & & & Y_{۱۱} & & & & Y_{۱۲} \\ \hline -X_۱^* & & & & \circ & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & -X_p^* & & & & \circ & \\ & & & -Y_{۱۲}^* & & & & Y_{۲۲} \end{array}\right]. \qquad (۷.۳)$$

ماتریس‌های Z و J یکانی هستند پس ماتریس Z^*JZ نیز یکانی است. بنابراین ماتریس

$$\begin{bmatrix} \circ & -X_i \\ -X_i^* & \circ \end{bmatrix} \quad (i = ۱, \cdots, p).$$

نیز یکانی است. از این رو برای $i = ۱, \cdots, p$ داریم:

$$X_i^* X_i = I.$$

همچنین می‌توان نتیجه گرفت ماتریس

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{۱۱} & Y_{۱۲} \\ -Y_{۱۲}^* & Y_{۲۲} \end{bmatrix}.$$

شبه‌هرمیتی و یکانی است. ماتریس Z^*JZ متشابه با ماتریس J است. بنابراین ماتریس Z^*JZ به ترتیب دارای m مقدار ویژه یکسان i و $-i$ است. همچنین با توجه به فرم بلوکی (۷.۳) می‌توان گفت هر ماتریس

$$\begin{bmatrix} \circ & -X_i \\ -X_i^* & \circ \end{bmatrix}$$

دارای همان تعداد مقدار ویژه i و $-i$ می‌باشد. پس ماتریس Y نیز باید دارای همان تعداد مقدار ویژه i و $-i$ می‌باشد. ماتریس Y متشابه یکانی با ماتریس $\mathrm{diag}(iI, -iI)$ است. از سوی دیگر ماتریس J همچنین متشابه یکانی با ماتریس $\mathrm{diag}(iI, -iI)$ است. بنابراین ماتریس یکانی مانند P وجود دارد به‌صورتی‌که:

$$Y = PJP^* = P \begin{bmatrix} \circ & I \\ -I & \circ \end{bmatrix} P^*.$$

ماتریس یکانی را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{۱۱} & \tilde{Z}_{۱۲} \\ \tilde{Z}_{۲۱} & \tilde{Z}_{۲۲} \end{bmatrix},$$

که در آن:

$$\tilde{Z}_{11} = \mathrm{diag}(X_1, \cdots, X_P, P_{11}), \quad \tilde{Z}_{12} = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, P_{12}),$$
$$\tilde{Z}_{22} = \mathrm{diag}(I, \cdots, I, P_{22}), \quad \tilde{Z}_{21} = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, P_{21}).$$

در این صورت تساوی $(Z\tilde{Z})^* J (Z\tilde{Z}) = J$ برقرار است و آن‌گاه ماتریس $V = Z\tilde{Z}$ یک ماتریس سیمپلکتیک یکانی است. با توجه به این حقیقت که ماتریس‌های D و $\tilde{Z}$ قابل تبدیل به یکدیگر هستند و اولین تساوی (۶.۳) داریم:

$$(W\tilde{Z})^* J (W\tilde{Z}) = \tilde{Z}^* W^* J W \tilde{Z} = \tilde{Z}^* D (Z^* J Z) D \tilde{Z} = D V^* J V D = DJD = J,$$

قرار می‌دهیم $U = W\tilde{Z}$ ، U ماتریسی سیمپلکتیک و یکانی می‌باشد. در انتها داریم:

$$S = WDZ^* = WD\tilde{Z}\tilde{Z}^* Z^* = (W\tilde{Z}) D (\tilde{Z}^* Z^*) = UDV^*.$$

□

تجزیه ماتریس‌های سیمپلکتیک حقیقی در ادامه ذکر شده است.

قضیه ۲.۱.۳. *هر ماتریس سیمپلکتیک مربعی $S \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ دارای تجزیه SVD به‌صورت:*

$$S = U \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{bmatrix} V^T,$$

می‌باشد که در آن ماتریس‌های U و V سیمپلکتیک متعامد حقیقی هستند و $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ که $\omega_1 \geqslant \cdots \geqslant \omega_m \geqslant 1$ می‌باشد.

برهان. اثبات مشابه اثبات قضیه (۱.۱.۳) می‌باشد. □

در تجزیه SVD ساختاردار ماتریس‌های سیمپلکتیک، ماتریس‌های U، V و D می‌توانند سیمپلکتیک انتخاب شوند. و نیز مقادیر منفرد زوج (ω, ω^{-1}) می‌باشد.

فصل ۴

فاکتورگیری BJB^T

در فصل دوم نشان داده شد هر ماتریس پادمتقارن حقیقی $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دارای تجزیه شبه‌چولسکی به‌شکل BJB^T برای برخی ماتریس‌های حقیقی B است. فاکتورگیری BJB^T مشابه فاکتورگیری رتبه کامل $A = BB^T$ برای یک ماتریس حقیقی، متقارن و نیمه معین مثبت A است. هیچ‌یک از این دو فاکتورگیری منحصربه‌فرد نیستند. به‌عنوان مثال اگر $A = BB^T$ باشدبرای هر ماتریس متعامد Q داریم:

$$A = (BQ)(BQ)^T.$$

که یک فاکتورگیری رتبه کامل دیگر است. به‌طور مشابه اگر $K = BJB^T$ باشد برای هر ماتریس سیمپلکتیک S داریم:

$$K = (BS)J(BS)^T.$$

که یک فاکتورگیری دیگر است. این دو فاکتورگیری تفاوت‌های عمده‌ای دارند، برای فاکتورگیری رتبه کامل تمام عوامل مختلف دارای مقادیر منفرد یکسانی هستند ولی برای فاکتورگیری BJB^T ممکن است به دلیل متعامد نبودن ماتریس‌های سیمپلکتیک، عوامل مختلف دارای مقادیر منفرد متفاوتی باشند. در برخی مواقع نیاز به عواملی با مینیمم نرم و عدد شرطی داریم.

مسائل مینیمم سازی اهمیت عددی دارند، برای مثال در حل سیستم معادلات خطی $Kx = b$ که ماتریس K پادمتقارن حقیقی می‌باشد از فاکتورگیری $K = BJB^T$ استفاده می‌شود. برای مثالی دیگر بنر[۱] و همکارانش در سال ۲۰۰۲ روشی عددی برای حل مسائل مقادیر ویژه از ماتریس شبه همیلتونی/همیلتونی مدادی ارائه داده‌اند که معادل ماتریس پاد متقارن/متقارن مدادی $\alpha K - \beta M$ است [۲]. مهم‌ترین قسمت این روش محاسبه فرم فشرده معین B، JB^T و به‌طور هم‌زمان M است که در آن B فاکتوری از $K = BJB^T$ است. برای پایداری عددی در هر دو صورت این مثال‌ها فاکتور B با مینیمم نرم و عدد شرطی نیاز هست. در این فصل فرمی کلی برای فاکتور B به ترتیب با مینیمم نرم و عدد شرطی ارائه می‌شود. به منظور تسهیل در تجزیه و تحلیل، در فاکتورگیری عامل $B \in \mathbb{R}^{n\times ۲m}$ را رتبه کامل ستونی که در آن $\mathrm{rank}(K) = ۲m$ در نظر گرفته می‌شود.

[۱] Benner

۱.۴ فرم کلی عامل B

گزاره ۱.۱.۴. *اگر ماتریس K ماتریسی پادمتقارن و دارای فرم شبه‌شور (۱۰.۲) باشد و ماتریس B به‌صورتی وجود داشته باشد که تساوی $K = BJ_mB^T$ برقرار باشد آن‌گاه یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی مانند S وجود دارد به‌طوری‌که:*

$$B = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S = B_0 S. \tag{۱.۴}$$

تجزیه فوق یک تجزیه شبه SVD نامیده می‌شود.

برهان. با استفاده از تجزیه شبه‌چولسکی $K = BJ_mB^T$ و تجزیه شبه‌شور (۱۰.۲) برای $\Gamma = \mathrm{diag}(\Sigma, \Sigma, I)$ داریم:

$$\Gamma^{-1}Q^TKQ\Gamma^{-1} = \Gamma^{-1}Q^TBJ_m(\Gamma^{-1}Q^TB)^T = \begin{bmatrix} J_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در نظر می‌گیریم $\Gamma^{-1}Q^TB = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$ که در آن $S \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ پس $SJ_mS^T = J_m$ و $T = 0$ هستند. بنابراین:

$$B = Q\Gamma \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S = B_0 S.$$

□

برای به‌دست آوردن فرم کلی عوامل بهینه نتایج زیر مورد نیاز است.

لم ۲.۱.۴. *اگرماتریس $B \in \mathbb{R}^{n\times 2m}$ دارای تجزیه شبه SVD (۱.۴) باشد که در آن ماتریس Q متعامد حقیقی و S یک ماتریس سیمپلکتیک حقیقی و ماتریس مثبت Σ به‌صورت:*

$$\Sigma = \mathrm{diag}\left(\sigma_1 I_{n_1}, \cdots, \sigma_r I_{n_r}\right).$$

که در آن $\sigma_1 > \cdots > \sigma_r > 0$ باشد و نیز مقادیر منفرد ماتریس سیمپلکتیک S به‌صورت:

$$\omega_m^{-1} \leqslant \cdots \leqslant \omega_1^{-1} \leqslant 1 \leqslant \omega_1 \leqslant \cdots \leqslant \omega_m.$$

باشد آن‌گاه نتایج زیر برقرار است [۱۷]:

۱.

$$\| B \| \geqslant \sigma_۱ \sqrt{\frac{\omega_{n_۱}^{۲} + \omega_{n_۱}^{-۲}}{۲}} \geqslant \sigma_۱.$$

همچنین، $\| B \| = \sigma_۱$ اگر و تنها اگر ماتریس S دارای تجزیه SVD به‌شکل زیر باشد.

$$S = \begin{bmatrix} I_{n_۱} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & U_۱ & \circ & U_۲ \\ \circ & \circ & I_{n_۱} & \circ \\ \circ & -U_۲ & \circ & U_۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_۱} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \widehat{\Omega} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & I_{n_۱} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \widehat{\Omega}^{-۱} \end{bmatrix} V^T,$$

که در آن:

$$U = \begin{bmatrix} U_۱ & U_۲ \\ -U_۲ & U_۱ \end{bmatrix}.$$

و ماتریس V سیمپلکتیک متعامد، $\widehat{\Omega}$ یک ماتریس قطری به شکل $\widehat{\Omega} = \operatorname{diag}(\omega_{n_۱+۱}, \cdots, \omega_m)$ است و داریم:

$$\left\| \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma} & \circ \\ \circ & \widehat{\Sigma} \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} \widehat{\Omega} & \circ \\ \circ & \widehat{\Omega}^{-۱} \end{bmatrix} \right\| \leqslant \sigma_۱,$$

که در آن،

$$\widehat{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_۲ I_{n_۲}, \cdots, \sigma_r I_{n_r}).$$

۲. کوچک‌ترین مقدار منفرد ماتریس B به‌صورتی است که نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\sigma_{۲m}(B) \leqslant \sigma_r \sqrt{\frac{۲}{\omega_{n_r}^{۲} + \omega_{n_r}^{-۲}}} \leqslant \sigma_r.$$

همچنین، تساوی $\sigma_{۲m}(B) = \sigma_r$ برقرار است اگر و تنها اگر ماتریس S دارای تجزیه SVD

$$S = \begin{bmatrix} U_۱ & \circ & U_۲ & \circ \\ \circ & I_{n_r} & \circ & \circ \\ -U_۲ & \circ & U_۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & I_{n_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Omega} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & I_{n_r} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \widehat{\Omega}^{-۱} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \widehat{\Omega}^{-۱} \end{bmatrix} V^T,$$

که در آن،

$$U = \begin{bmatrix} U_۱ & U_۲ \\ -U_۲ & U_۱ \end{bmatrix}.$$

و ماتریس v سیمپلکتیک متعامد است و

$$\widehat{\Omega}=\operatorname{diag}\left(\omega_{n_r+1},\cdots,\omega_m\right),$$

و نیز ماتریس‌های U و $\widehat{\Omega}$ در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\left\|\begin{bmatrix}\widehat{\Sigma} & 0\\ 0 & \widehat{\Sigma}\end{bmatrix} U \begin{bmatrix}\widehat{\Omega} & 0\\ 0 & \widehat{\Omega}^{-1}\end{bmatrix}\right\| \geqslant \sigma_r,$$

که در آن:

$$\widehat{\Sigma}=\operatorname{diag}(\sigma_1 I_{n_1},\cdots,\sigma_{r-1} I_{n_{r-1}}).$$

برهان. ۱. تجزیه SVD ساختاردار ماتریس سیمپلکتیک S برابر خواهد بود با:

$$S=W\begin{bmatrix}\Omega & 0\\ 0 & \Omega^{-1}\end{bmatrix}Z^T,$$

که در آن ماتریس‌های W و Z سیمپلکتیک متعامد و $\Omega=\operatorname{diag}(\omega_1,\cdots,\omega_m)$ با $\omega_m \leqslant \cdots \leqslant \omega_1 \leqslant 1$ می‌باشند. با استفاده از تجزیه SVD ماتریس B و تجزیه شبه SVD (۴.۱)، می‌توان نتیجه گرفت ماتریس B و

$$\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix} W \begin{bmatrix}\Omega & 0\\ 0 & \Omega^{-1}\end{bmatrix},$$

دارای مقادیر منفرد مشابه هستند. بنابراین مقادیر منفرد ماتریس B شامل جذر مقادیر ویژه ماتریس زیر می‌باشند.

$$A=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix} W \begin{bmatrix}\Omega^2 & 0\\ 0 & \Omega^{-2}\end{bmatrix} W^T \begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix} H \begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix}. \qquad (۴.۲)$$

واضح است که:

$$\| A \| I-\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix} H \begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix} \geqslant 0,$$

یا

$$\| A \| \begin{bmatrix}\Sigma^{-2} & 0\\ 0 & \Sigma^{-2}\end{bmatrix} \geqslant H.$$

با اجرای یک تبدیل تشابهی مناسب رویه ماتریس J و این واقعیت که ماتریس:

$$H=W\begin{bmatrix}\Omega^2 & 0\\ 0 & \Omega^{-2}\end{bmatrix}W^T,$$

یک ماتریس سیمپلکتیک و متقارن است، داریم:

$$\|A\| \begin{bmatrix} \Sigma^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Sigma^{-۲} \end{bmatrix} \geqslant H^{-۱}.$$

با ترکیب دو نامساوی بالا خواهیم داشت:

$$۲\|A\| \begin{bmatrix} \Sigma^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Sigma^{-۲} \end{bmatrix} \geqslant H + H^{-۱} = W \begin{bmatrix} \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} \end{bmatrix} \geqslant W^{T}.$$

قرار می‌دهیم:

$$E_x = \begin{bmatrix} I_{n_۱} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_{n_۱} & ۰ \end{bmatrix}^{T}.$$

می‌دانیم $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_۱ I_{n_۱}, \cdots, \sigma_r I_{n_r})$ و برای هر بردار $x \in \operatorname{range} E_x$ با نرم واحد،

$$\frac{۲\|A\|}{\sigma_۱^۲} = ۲\|A\| x^{T} \begin{bmatrix} \Sigma^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Sigma^{-۲} \end{bmatrix} x \geqslant x^{T} W \begin{bmatrix} \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} \end{bmatrix} W^{T} x,$$

یا هم ارز هر بردار $y = W^{T}x \in \operatorname{range} W^{T} E_x$ با نرم واحد،

$$\frac{۲\|A\|}{\sigma_۱^۲} \geqslant y^{T} \begin{bmatrix} \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} \end{bmatrix} y. \tag{۳.۴}$$

با توجه به این‌که ماتریس:

$$\begin{bmatrix} \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} \end{bmatrix}$$

دارای مقادیر ویژه $\omega_۱^۲ + \omega_۱^{-۲}, \omega_۱^۲ + \omega_۱^{-۲}, \cdots, \omega_m^۲ + \omega_m^{-۲}, \omega_m^۲ + \omega_m^{-۲}$ می‌باشد که به‌صورت غیر کاهشی مرتب شده‌اند. زیرا تابع $f(\omega) = \omega^۲ + \omega^{-۲}$ برای هر $\omega \geqslant ۱$ کاهشی می‌باشد و عناصر قطری ماتریس Ω به‌صورت غیرنزولی $\omega_m \geqslant \cdots \geqslant \omega_۱ \geqslant ۱$ است. با توجه به قضیه مینیمم و ماکزیمم می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{۲\|A\|}{\sigma_۱^۲} \geqslant \min_{\varphi, \operatorname{rank}\varphi = ۲n_۱} \max_{y \in \varphi} y^{T} \begin{bmatrix} \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} & ۰ \\ ۰ & \Omega^{۲} + \Omega^{-۲} \end{bmatrix} y = \omega_{n_۱}^{۲} + \omega_{n_۱}^{-۲}.$$

بنابراین داریم:

$$\| B \| = \sqrt{\| A \|} \geqslant \sigma_۱ \sqrt{\frac{\omega_{n_۱}^{۲} + \omega_{n_۱}^{-۲}}{۲}} \geqslant \sigma_۱.$$

هنگامی‌که $\|B\| = \sigma_1$ باشد واضح است که $\omega_{n_1} = 1$. بنابراین حداقل n_1 از عناصر قطری ماتریس Ω برابر ۱ می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $\Omega = \mathrm{diag}(I_t, \omega_{t+1}, \cdots, \omega_m)$ ، که در آن $t \geqslant n_1$ و $1 < \omega_{t+1} \leqslant \cdots \leqslant \omega_m$ باشد. می‌دانیم $\|B\| = \sqrt{\|A\|} = \sigma_1$ با توجه به (۳.۴) برای هر بردار با نرم واحد $y \in W^T E_x$، داریم:

$$y^T \begin{bmatrix} \Omega^2 + \Omega^{-2} & 0 \\ 0 & \Omega^2 + \Omega^{-2} \end{bmatrix} y = 2$$

در ماتریس،

$$\begin{bmatrix} \Omega^2 + \Omega^{-2} & 0 \\ 0 & \Omega^2 + \Omega^{-2} \end{bmatrix}$$

دارای $2t$ نسخه از کوچکترین مقدار ویژه ۲، با فضای ویژه متناظر:

$$= \mathrm{range} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}^T .$$

می‌باشد. بنابراین همه‌ی بردارهای y باید در این فضای ویژه قرار داشته باشند و یا:

$$\mathrm{range} W^T E_x \subseteq \mathrm{range} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

با توجه به نکته فوق و ساختار بلوکی از ماتریس سیمپلکتیک متعامد W،

$$W^T E_x = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ 0 & 0 \\ E_2 & E_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

که در آن $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^{t \times n_1}$ می‌باشند. قرار می‌دهیم:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -E_2 & E_1 \end{bmatrix} .$$

واضح است که،

$$E^T J_t E = (W^T E_x)^T J_m (W^T E_x) = J_{n_1}, \quad E^T E = (W^T E_x)^T W^T E_x = I_{n_1} .$$

با توجه به این حقیقت و تجزیه QR سیمپلکتیک، ماتریس سیمپلکتیک متعامدی مانند F وجود دارد بطوریکه:

$$F^T E = \begin{bmatrix} I_{n_۱} & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & I_{n_۱} \\ \circ & \circ \end{bmatrix}. \tag{۴.۴}$$

ماتریس Fسیمپلکتیک متعامد و به فرم زیر می‌باشد،

$$\begin{bmatrix} F_۱ & F_۲ \\ -F_۲ & F_۱ \end{bmatrix}$$

که در آن $F_۱, F_۲ \in \mathbb{R}^{t\times t}$ است. ماتریس سیمپلکتیک متعامد $\hat{F}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} F_۱ & \circ & F_۲ & \circ \\ \circ & I & \circ & \circ \\ F_۲ & \circ & F_۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & I \end{bmatrix}.$$

از رابطه (۴.۴) می‌توان نتیجه گرفت $\hat{F}^T W^T E_x = E_x$، یا

$$W\hat{F} = \begin{bmatrix} I_{n_۱} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & U_۱ & \circ & U_۲ \\ \circ & \circ & I_{n_۱} & \circ \\ \circ & -U_۲ & \circ & U_۱ \end{bmatrix},$$

که در آن ماتریس:

$$\begin{bmatrix} U_۱ & U_۲ \\ -U_۲ & U_۱ \end{bmatrix} = U$$

سیمپلکتیک متعامد است. ماتریس F به ماتریس $\mathrm{diag}(\Omega, \Omega^{-۱})$ تبدیل می‌گردد. بنابراین با در نظر گرفتن تساوی $V = Z\hat{F}$داریم:

$$S = (W\hat{F}) \begin{bmatrix} \Omega & \circ \\ \circ & \Omega^{-۱} \end{bmatrix} V^T$$

در نتیجه برای برقراری تساوی $\|B\| = \sigma_۱$، لازم و کافی است که نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\left\| \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & \circ \\ \circ & \hat{\Sigma} \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} \hat{\Omega} & \circ \\ \circ & \hat{\Omega} \end{bmatrix} \right\| \leqslant \sigma_۱$$

۲. برای ماتریس A تعریف شده در رابطه (۲.۴) داریم:

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{(\sigma_{2m}(B))^2}$$

می‌دانیم،

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix}^{-1} H^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix}^{-1},$$

و

$$H^{-1} = W \begin{bmatrix} \Omega^{-2} & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} W^T.$$

ماتریس A و H در قسمت اول را با A^{-1} و H^{-1} جایگزین می‌کنیم. می‌توان نشان داد که،

$$(\sigma_{2m}(B))^{-1} = \sqrt{\|A^{-1}\|} \geqslant \sigma_r^{-1}\sqrt{\frac{\omega_{n_r}^2 + \omega_{n_r}^{-2}}{2}} \geqslant \sigma_r^{-1}.$$

بنابراین،

$$\sigma_{2m}(B) \leqslant \sigma_r\sqrt{\frac{2}{\omega_{n_r}^2 + \omega_{n_r}^{-2}}} \leqslant \sigma_r. \tag{۵.۴}$$

و هنگامی‌که $\sigma_{2m}(B) = \sigma_r$ باشد ساختار بلوکی ماتریس S را می‌توان با راه مشابه بدست آورد.

□

۱.۱.۴ فرم کلی عامل B با مینیمم نرم

در ادامه به ارائه فرم کلی برای عامل B با مینیمم نرم در فاکتورگیری BJB^T پرداخته می‌شود.

قضیه ۳.۱.۴. *اگر ماتریس $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس پادمتقارن به‌صورتی‌که $\operatorname{rank}(K) = 2m$ باشد در این صورت نامساوی $\| B \| \geqslant \sqrt{\| K \|}$ برای هر عامل B در فاکتورگیری $K = BJ_mB^T$ برقرار است. همچنین اگر ماتریس K دارای فرم شبه‌شور (۱۰.۲) باشد که در آن ماتریس Q یک ماتریس متعامدحقیقی و $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1 I_{n_1}, \cdots, \sigma_{n_r})$ که $\sigma_1 > \cdots > \sigma_r > 0$باشد. آنگاه عامل B در تساوی*

$$\| B \| = \sqrt{\| K \|},$$

صدق می‌کند اگر و تنها اگر:

$$B = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_1 & 0 & U_2 \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & -U_2 & 0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{\Omega}^{-1} \end{bmatrix} V^T.$$

که در آن ماتریس

$$U = \begin{bmatrix} U_۱ & U_۲ \\ -U_۲ & U_۱ \end{bmatrix},$$

و ماتریس V، سیمپلکتیک متعامد حقیقی هستند و $\widehat{\Omega}$ ماتریس قطری مثبت و نیز ماتریس‌های U و $\widehat{\Omega}$ در نامساوی:

$$\left\| \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma} & ۰ \\ ۰ & \widehat{\Sigma} \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} \widehat{\Omega} & ۰ \\ ۰ & \widehat{\Omega}^{-۱} \end{bmatrix} \right\| \leqslant \sqrt{\|K\|},$$

که در آن،

$$\widehat{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_۲ I_{n_۲}, \cdots, \sigma_r I_{n_r}).$$

است صدق می‌کنند [۱۷].

۲.۱.۴ فرم کلی عامل B با مینیمم عدد شرطی

در قضیه بعدی به ارائه فرم کلی برای عامل B با مینیمم عددشرطی در فاکتورگیری BJB^T پرداخته می‌شود.

قضیه ۴.۱.۴. اگر ماتریس $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس پادمتقارن و $\mathrm{rank}(K) = ۲m$ باشد، آن‌گاه نامساوی $k(B) \geqslant \sqrt{k(K)}$ برای هر عامل B در $K = BJ_mB^T$ برقرار می‌باشد. همچنین اگر ماتریس K دارای فرم شبه شور (۱۰.۲) باشد که در آن ماتریس Q یک ماتریس متعامد حقیقی و $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_۱ I_{n_۱}, \cdots, \sigma_{n_r})$ که $\sigma_۱ > \cdots > \sigma_r > ۰$ می‌باشد آن‌گاه جملات زیر معادل یکدیگر هستند.

۱.

$$k(B) = \sqrt{k(K)}.$$

۲.

$$\|B\| = \sqrt{\| K \|}, \quad \|B^\dagger\| = \sqrt{\|K^\dagger\|}.$$

۳. ماتریس B دارای فرم زیر است،

$$Q\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & U_1 & 0 & 0 & U_2 & 0\\ 0 & 0 & I_{n_r} & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n_1} & 0 & 0\\ 0 & -U_2 & 0 & 0 & U_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_r}\end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{ccc|ccc} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \tilde{\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{n_r} & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Omega}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_r}\end{array}\right]V^T,$$

که در آن

$$U=\begin{bmatrix}U_1 & U_2\\ -U_2 & U_1\end{bmatrix},$$

و ماتریس V سیمپلکتیک متعامد حقیقی هستند و ماتریس $\tilde{\Omega}$ قطری مثبت و ماتریس‌های U و $\tilde{\Omega}$ در نامساوی:

$$\sigma_r \leqslant \left\|\begin{bmatrix}\tilde{\Sigma} & 0\\ 0 & \tilde{\Sigma}\end{bmatrix}U\begin{bmatrix}\tilde{\Omega} & 0\\ 0 & \tilde{\Omega}^{-1}\end{bmatrix}\right\| \leqslant \sigma_1,$$

که در آن

$$\tilde{\Sigma}=\operatorname{diag}(\sigma_2 I_{n_2},\cdots,\sigma_{r-1}I_{n_{r-1}}).$$

است صدق می‌کنند [۱۷].

برهان. کمترین مقدار منفرد ماتریس های B و K را به ترتیب بصورت $\sigma_{2m}(B)$ و $\sigma_{2m}(K)$ در نظر می‌گیریم با توجه به لم (۲.۱.۴) داریم:

$$\| B \| \geqslant \sigma_1=\sqrt{\| K \|},\quad \sigma_{2m}(B)\leqslant\sqrt{\sigma_{2m}(K)}.$$

با توجه به تعریف شبه معکوس ماتریس، $\| B^\dagger \| = 1/\sigma_{2m}(B)$ و $\| K^\dagger \| = 1/\sigma_{2m}(K)$ خواهیم داشت:

$$k(B)=\| B \|\| B^\dagger \| = \| B \| /\sigma_{2m}(B)\geqslant\sqrt{\| K \|}/\sqrt{\sigma_{2m}(K)}=\sqrt{k(K)}.$$

اثبات (۱) به (۲) با استفاده از نامساوی‌های بالا صورت می‌گیرد.
اثبات (۲) به (۳) با ترکیب مورد یک و دو لم (۲.۱.۴) صورت می‌گیرد. □

با توجه به قضایای فوق مشخص است که عامل مشخص شده به‌صورت (۱.۴) همیشه دارای مینیمم نرم و عدد شرطی می‌باشد.

مثال ۵.۱.۴. ماتریس پاد متقارن

$$K = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

که نامنفرد و در فرم شبه شور قرار دارد. پس:

$$\| K \| = ۴, \qquad k(K) = ۴,$$

فرم کلی ماتریس B که در تجزیه $k = BJB^T$ صدق کند برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} S,$$

که در آن ماتریس S سیمپلکتیک می‌باشد. فرم کلی ماتریس B به‌صورتی که تساوی

$$\| B \| = \sqrt{\| K \|} = ۲,$$

برقرار باشد برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & c & ۰ & s \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -s & ۰ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \omega & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \omega^{-۱} \end{bmatrix} V^T,$$

که در آن $۲ \leqslant \omega \leqslant \frac{۱}{۲}$ و ماتریس V سیمپلکتیک متعامد و ماتریس:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix},$$

یک تبدیل گیونز است که سیمپلکتیک متعامد می‌باشد و فرم کلی ماتریس B به‌صورتی که تساوی $۲ = k(B) = \sqrt{k(K)}$ برقرار باشد برار است با:

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} V^T,$$

که در آن ماتریس V سیمپلکتیک متعامد می‌باشد.

نتیجه ۶.۱.۴. *اگر $B \in \mathbb{R}^{n\times 2m}$ و رتبه ماتریس B برابر با $2m$ باشد آن‌گاه ماتریس B دارای تجزیه شبه SVD (۱.۴) می‌باشد و همچنین اگر φ را به عنوان مجموعه ماتریس‌های سیمپلکتیک با مرتبه $2m\times 2m$ در نظر گرفته شود آن‌گاه:*

$$\min_{Z\in\varphi}\|BZ\| = \|\Sigma\|,$$
$$\max_{Z\in\varphi}\sigma_{2m}(BZ) = \sigma_{2m}(\Sigma),$$
$$\min_{Z\in\varphi}k(BZ) = k(\Sigma).$$

که در آن Σ ماتریس قطری مثبتی است که در (۱.۴) تعریف شده است.

برهان. با علم به این‌که ماتریس B رتبه کامل ستونی است و قضیه (۴.۰.۳) پس دارای تجزیه شبه SVD (۱.۴) می‌باشد. به عنوان مثال داریم:

$$B = Q\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix}S^{-1},$$

که در آن Q ماتریس متعامد حقیقی، ماتریس S سیمپلکتیک حقیقی و ماتریس Σ قطری مثبت می‌باشد. برای هر ماتریس سیمپلکتیک Z داریم:

$$BZ = Q\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & \Sigma\end{bmatrix}(S^{-1}Z).$$

اگر Z ماتریس سیمپلکتیک حقیقی باشد آنگاه $S^{-1}Z$ ماتریس سیمپلکتیک می‌باشد. با توجه به قسمت اول لم (۲.۱.۴) :

$$\| BZ \| \geqslant \| \Sigma \|,$$

و اگر $Z = S$ آن‌گاه:

$$\| BZ \| = \| \Sigma \| .$$

بنابراین:

$$\min_{Z\in\varphi}\|BZ\| = \|\Sigma\|.$$

اثبات قسمت دوم مشابه قسمت اول می‌باشد و اثبات قسمت سوم از دو قسمت اول نتیجه گیری می‌شود. □

نتیجه ۷.۱.۴. *اگر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین، $\rho(JA)$ و $\rho((JA)^{-1})$ به ترتیب شعاع طیفی ماتریس‌های JA و $(JA)^{-1}$ باشند و φ را به‌عنوان مجموعه ماتریس‌های سیمپلکتیک حقیقی $2m\times 2m$ در نظر گرفته شود آن‌گاه:*

$$\min_{Z\in\varphi}\| Z^TAZ \| = \rho(JA),$$
$$\max_{Z\in\varphi}\sigma_{2m}(Z^TAZ) = \frac{1}{\rho((JA)^{-1})},$$
$$\min_{Z\in\varphi}k(Z^TAZ) = \rho(JA)\rho((JA)^{-1}).$$

برهان. تجزیه چولسکی ماتریس A را به‌صورت $A = LL^T$ در نظر می‌گیریم ماتریس A مثبت معین و ماتریس L^T نامنفرد می‌باشد. نتایج فوق با به‌کارگیری نتیجه (۶.۱.۴) برای ماتریس L^T حاصل می‌شود.
در اینجا تنها نشان‌می‌دهیم $\rho(JA) = \|\Sigma\|^2$ و $\rho((JA)^{-1}) = \|\Sigma^{-1}\|^2$.
این موارد را می‌توان از حقیقت زیر نتیجه گرفت:

$$L^T = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} S^{-1}, \quad JA = JLL^T = S \begin{bmatrix} 0 & \Sigma^2 \\ -\Sigma^2 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

□

فصل ۵

پیشنهاد روشی عددی برای محاسبه تجزیه شبه SVD

در این بخش یک روش عددی برای محاسبه تجزیه شبه SVD، $B = QDS^{-۱}$ که در آن Q ماتریس متعامد، S ماتریس سیمپلکتیک و D ماتریس قطری است برای پژوهش‌های آینده پیشنهاد می‌گردد. این روش می‌تواند برای حل مسائل کاربردی مرتبط مانند سیستم‌های ژیروسکوپی و سیستم‌های همیلتونی خطی مورد استفاده قرار گیرد. آنالیز خطا و مثال‌های عددی می‌تواند نشان دهنده این موضوع باشد که مقادیر ویژه‌ی محاسبه شده ماتریس BJB^T توسط این روش در مقایسه با روش‌های دیگر از دقت بالاتری برخوردار هستند.
در فصل ۳ نشان داده شد هر ماتریس $B \in \mathbb{R}^{n\times ۲m}$ دارای تجزیه شبه SVD:

$$Q^TBS = D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} p & q & m-p-q & p & q & m-p-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \\ p \\ n-۲p-q \end{array} & \begin{pmatrix} \Sigma & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & I & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \Sigma & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{array} \qquad (۱.۵)$$

می‌باشد که در آن Q ماتریس متعامد حقیقی، S ماتریس سیمپلکتیک حقیقی و Σ ماتریس قطری مثبت هستند. تجزیه شبه SVD (۱.۵) دارای ارتباط زیادی با فرم‌های متعارف ماتریس پادمتقارن حقیقی BJB^T و ماتریس همیلتونی JB^TB است [۱۸].

فرم متعارف ساختاردار ماتریس JB^TB برابر است با:

$$JB^TB = S \left[\begin{array}{ccc|ccc} \circ & \circ & \circ & \Sigma^{2} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline -\Sigma^{2} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -I & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}\right] S^{-1}. \qquad (۲.۵)$$

که در آن $\Sigma = diag\,(\sigma_1, .., \sigma_p)$ می‌باشد.

مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های JB^TB و BJB^T مشابه یکدیگر هستند. یک روش کارآمد و معتبر برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس BJB^T استفاده از روش QR یا ژاکوبی است [۱۲]. از جمله معایب این روش‌ها این است که آن‌ها نمی‌توانند ماتریس سیمپلکتیک S را محاسبه کنند و فقط روی حاصل صریح ماتریس JB^TB یا BJB^T قابل اجرا هستند. اما روشی که در اینجا پیشنهاد شده است تجزیه شبه SVD ماتریس B را محاسبه می‌کند و همزمان قادر به محاسبه مقادیر ویژه ماتریس JB^TB و ماتریس سیمپلکتیک S می‌باشد. علاوه بر این، چون روش پیشنهادی فقط روی عامل B اجرا می‌شود، بنابراین مقادیر ویژه ماتریس JB^TB دقیق‌تر از روش‌های دیگر قابل محاسبه می‌باشد.

۱.۵ الگوریتم پیشنهادی

شیوه محاسبه تجزیه شبه SVD ارائه شده به این صورت است که ابتدا با استفاده از تبدیلات متعامد فرم فشرده‌ی ماتریس B را محاسبه و سپس از این فرم فشرده برای ساخت تجزیه شبه SVD استفاده شده. این روش محاسبه فرم فشرده در حقیقت مدل ضمنی از روش شبه QR برای ماتریس پادمتقارن BJB^T است.

به منظور توصیف ساده این روش، ابتدا ماتریس B را به‌صورتی در نظر گرفته شده که ماتریس پادمتقارن BJB^T نامنفرد باشد. با این فرض ماتریس B لزوماً رتبه کامل سطری و دارای تعداد زوج سطر است.

خلاصه روش پیشنهادی در الگوریتم زیر آمده است:

ماتریس حقیقی $B \in \mathbb{R}^{n\times 2m}$ با BJB^T نامنفرد در نظر گرفته شده، در این الگوریتم مقدار ویژه JB^TB ، BJB^T و تجزیه شبه SVD محاسبه می‌شود.

گام اول: ماتریس متعامد Q_1 و ماتریس سیمپلکتیک متعامد U_1، به‌صورتی تعیین می‌شود که:

$$Q_1^TBU_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ \hline \circ & \circ & B_{23} & \circ \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \circ & B_3 \end{bmatrix},$$

که در آن ماتریس B_{11} بالامثلثی، ماتریس B_{23} پایین مثلثی، $B_{11}B_{23}^T$ ماتریس بالا دو قطری و $B_1B_2 = B_2B_1^T$ هستند.

گام دوم: ماتریس‌های متعامد $Z_{۱}$، $Z_{۲}$ و W به‌صورتی مشخص می‌شود که،

$$R_{۱۱} = Z_{۱}^{T} B_{۱۱} W, \quad R_{۲۳} = Z_{۲}^{T} B_{۲۳} W,$$

که در آن $R_{۱۱}$ بالامثلثی، $R_{۲۳}$ پایین مثلثی و

$$R_{۱۱} R_{۲۳}^{T} = diag(\sigma_{۱}, \cdots, \sigma_{p}) = \Delta,$$

ماتریس قطری مثبت باشد.

گام سوم: اگر مقادیر ویژه BJB^{T} و $JB^{T}B$ مورد نیاز باشد، مقادیر ویژه غیر صفر $\pm i\sigma_{۱}, \cdots, \pm i\sigma_{p}$ محاسبه و متوقف شوید. اگر تجزیه شبه SVD، (۵.۱) مورد نیاز است به گام بعد بروید.

گام چهارم: ۱. ماتریس‌های $Q = Q_{۱} \begin{bmatrix} Z_{۱} & ۰ \\ ۰ & Z_{۲} \end{bmatrix}$ ، $U = U_{۱} diag(W, I, W, I)$ و

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc} R_{۱۱} & R_{۱۲} & R_{۱۳} & R_{۱۴} \\ \hline ۰ & ۰ & R_{۲۳} & ۰ \end{array}\right],$$

مجدد محاسبه می‌شود که در آن‌ها $R_{۱۲} = Z_{۱}^{T} B_{۱۲}$، $R_{۱۳} = Z_{۱}^{T} B_{۱۳} W$ و $R_{۱۴} = Z_{۱}^{T} B_{۱۴}$.

۲. ماتریس $\Sigma = \sqrt{\Delta}$ محاسبه می‌شود.

۳. ماتریس سیمپلکتیک S با استفاده از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$S = U \left[\begin{array}{cc|cc} R_{۲۳}^{T}\Sigma^{-۱} & -(R_{۲۳}^{T}\Sigma^{-۱})(R_{۱۲}^{T}\Sigma^{-۱})^{T} & -R_{۱۳}^{T}\Sigma^{-۱} & -(R_{۲۳}^{T}\Sigma^{-۱})(R_{۱۴}^{T}\Sigma^{-۱})^{T} \\ ۰ & I & -R_{۱۴}^{T}\Sigma^{-۱} & \\ \hline ۰ & ۰ & R_{۱۱}^{T}\Sigma^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ & R_{۱۲}^{T}\Sigma^{-۱} & I \end{array}\right].$$

سپس ماتریس B در تجزیه شبه SVD به‌شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$Q^{T} B S = D = \begin{array}{c} \\ p \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & m-p & p & m-p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Sigma & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \Sigma & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

جزئیات این روش در [۱۸] ذکر شده است.

مراجع

[1] P. Benner, R. Byers, H. Fassbender, V. Mehrmann, and D. Watkins. *Cholesky-like factorizations of skew-symmetric matrices.* Citeseer, 2000.

[2] P. Benner, R. Byers, V. Mehrmann, and H. Xu. Numerical computation of deflating subspaces of skew-hamiltonian/hamiltonian pencils. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24(1):165–190, 2002.

[3] J. R. Bunch. A note on the stable decompostion of skew-symmetric matrices. *Mathematics of Computation*, 38(158):475–479, 1982.

[4] A. Bunse-Gerstner. Matrix factorizations for symplectic qr-like methods. *Linear Algebra and its Applications*, 83:49–77, 1986.

[5] R. Byers. A hamiltonian qr algorithm. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(1):212–229, 1986.

[6] B. N. Datta. *Numerical linear algebra and applications.* Siam, 2010.

[7] F. M. Dopico and C. R. Johnson. Complementary bases in symplectic matrices and a proof that their determinant is one. *Linear algebra and its applications*, 419(2):772–778, 2006.

[8] H. Fabender. *Symplectic Methods for Symplectic Eigenproblems.* PhD thesis, Habilitationsschrift, Universitat Bremen, Fachbereich 3Mathematik und Informatik, Bremen, Germany, 1998.

[9] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Indefinite linear algebra and applications.* Springer Science & Business Media, 2006.

[10] G. Golub, K. Solna, and P. Van Dooren. Computing the svd of a general matrix product/quotient. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 22(1):1–19, 2000.

[11] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*, volume 3. JHU Press, 2012.

[12] Y. Long. *Index theory for symplectic paths with applications*, volume 207. Birkhäuser, 2012.

[13] V. L. Mehrmann. The autonomous linear quadratic control problem: theory and numerical solution. *Lecture notes in control and information sciences*, 163:1–173, 1991.

[14] M. Paardekooper. An eigenvalue algorithm for skew-symmetric matrices. *Numerische Mathematik*, 17(3):189–202, 1971.

[15] G. Thompson. Normal forms for skew-symmetric matrices and hamiltonian systems with first integrals linear in momenta. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 104(3):910–916, 1988.

[16] D. Wainberg. On some properties of the symplectic and hamiltonian matrices. *Acta Universitatis Apulensis. Mathematics-Informatics*, 8:442–447, 2004.

[17] H. Xu. An svd-like matrix decomposition and its applications. *Linear algebra and its applications*, 368:1–24, 2003.

[18] H. Xu. A numerical method for computing an svd-like decomposition. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 26(4):1058–1082, 2005.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بالا مثلثی .... Upper Triangular
بد حالت .... ill condition
بردار ویژه .... Eigenvector
بردارهای منفرد چپ و راست .... Left and Right Singular Vectors
پاد متقارن .... Skew-symmetric
پایین مثلثی .... Lower Triangular
پنروز .... Penrose
ترانهاده .... Transposed
تقریب رتبه پایین .... Low Rank Approximation
تجزیه .... decomposition
تجزیه شبه مقدار منفرد ماتریس .... SVD-like matrix decomposition
تجزیه شور .... Schur decomposition
تجزیه طیفی .... spectral decomposition
تجزیه مقدار منفرد .... Singular value decomposition
جایگشت .... Permutation
چندجمله‌ای مشخصه .... Charactristic polynomial
خوش حالت .... well condition
دترمینان .... Determinant
رتبه .... Rank
رتبه کامل .... Full rank
سیمپلکتیک .... Symplectic
سیمپلکتیک حقیقی .... Real symplectic
سیمپلکتیک متعامد .... Orthogonal symplectic
سیمپلکتیک یکانی .... Unitary symplectic
شبه معکوس .... Pseudo - Inverse

شبه هرمیتی .... Skew-Hermitian
شبه همیلتونی .... Skew-Hamiltonian
عدد حالت .... Condition Number
QR فاکتورگیری .... QR Factorization
فرم جوردن .... Jordan form
فشرده سازی داده .... Data Compression
گرام اشمیت .... Gram-Schmidt
ماتریس پادمتقارن .... Skew-diagonal matrix
ماتریس جایگشت .... Permutation matrix
ماتریس حقیقی .... Real matrix
ماتریس قطری .... Diagonal matrix
ماتریس مختلط .... Complex matrix
ماتریس هوس هولدر .... Householder matrix
متعامد .... Orthogonal matrix
متقارن .... Symmetric
مثلثی .... Triangular
مزدوج .... Conjugate
معکوس .... Inverse
معین مثبت .... Positive Definite
نیمه معین مثبت .... Positive Semi Definite
مقدار منفرد .... Singular value
مقدار ویزه .... Eigenvalue
منفرد .... Singular
مور .... Moore
نامنفرد .... Nonsingular
نامعین .... Indefinite
نرم .... Norm
نرم طیفی .... Spectral Norm
نرم فروبنیوس .... Frobenius Norm
هرمیتی .... Hermitian
همیلتونی .... Hamiltonian
هوس هولدر .... Alston Householder

یکانی .... Unitary

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Alston Householder	هوس هولدر
Charactristic polynomial	چندجمله‌ای مشخصه
Complex matrix	ماتریس مختلط
Condition Number	عدد حالت
Conjugate	مزدوج
Data Compression	فشرده سازی داده
Decomposition	تجزیه
Determinant	دترمینان
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Eigenvalue	مقدار ویزه
Eigenvector	بردار ویژه
Frobenius Norm	نرم فروبنیوس
Full rank	رتبه کامل
Gram-Schmidt	گرام اشمیت
Hamiltonian	همیلتونی
Hermitian	هرمیتی
Householder matrix	ماتریس هوس هولدر
Ill condition	بد حالت
Indefinite	نامعین
Inverse	معکوس
Jordan form	فرم جوردن
Left and Right Singular Vectors	بردارهای منفرد چپ و راست
Lower Triangular	پایین مثلثی
Low Rank Approximation	تقریب رتبه پایین
Nonsingular	نامنفرد

Moore .... مور
Norm .... نرم
Orthogonal matrix .... متعامد
Orthogonal symplectic .... سیمپلکتیک متعامد
Penrose .... پنروز
Permutation .... جایگشت
Permutation matrix .... ماتریس جایگشت
Positive Definite .... معین مثبت
Positive Semi Definite .... نیمه معین مثبت
Pseudo - Inverse .... شبه معکوس
QR Factorization .... QR فاکتورگیری
Rank .... رتبه
Real matrix .... ماتریس حقیقی
Real symplectic .... سیمپلکتیک حقیقی
Schur decomposition .... تجزیه شور
Singular .... منفرد
Singular value .... مقدار منفرد
Singular Value decomposition .... تجزیه مقدار منفرد
Skew-diagonal matrix .... ماتریس پادمتقارن
Skew-Hamiltonian .... شبه همیلتونی
Skew-Hermitian .... شبه هرمیتی
Skew-Symmetric .... پاد متقارن
Spectral decomposition .... تجزیه طیفی
Spectral Norm .... نرم طیفی
SVD-like matrix decomposition .... تجزیه شبه مقدار منفرد ماتریس
Symmetric .... متقارن
Symplectic .... سیمپلکتیک
Transposed .... ترانهاده
Triangular .... مثلثی
Unitary .... یکانی
Unitary symplectic .... سیمپلکتیک یکانی
Upper Triangular .... بالا مثلثی

Abstract

Symplectic matrices play an important role in the analysis and numerical solution of matrix problems.
Symplectic similarity transformations preserve the structures of Hamiltonian, skew Hamiltanian and symplectic matrices. Based on this fact symplectic matrices are used as the basic tool in the analysis and the numerical solution of Hamiltonian, skew Hamiltonian and symplectic eigenvalue problems. In this thesis several matrix factorizations related to symplectic matrices is provided and a singular value-like decomposition $B = QDS^{-1}$ for any real matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times 2m}$, is introduced where Q is real orthogonal, S is real symplectic, and D is diagonal. Then the relation between this decomposition and the canonical form of real skew-symmetric matrices is shown. also it was shown that every symplectic matrix that has the structured singular value decomposition $S = UDV^*$, where U and V are unitary and symplectic, $D = diag(\Omega, \Omega^{-1})$ and Ω is positive diagonal. Then it has studied the BJB^T factorization of real skew-symmetric matrices. The BJB^T factorization has the applications in solving the skew-symmetric systems of linear equations, and the eigenvalue problem for skew-symmetric/symmetric pencils. The BJB^T factorization is not unique, and in numerical application one requires the factor B with small norm and condition number to improve the numerical stability. By employing the singular value-like decomposition and the singular value decomposition of symplectic matrices presented the general formula for B with minimal norm and condition number.
latinkeywords: Skew-symmetric matrix; Symplectic matrix; Orthogonal (unitary) symplectic matrix; Hamiltonian matrix; Eigenvalue problem; Singular value decomposition (SVD); SVD-like decomposition; BJB^T factorization; Schur form; Jordan canonical form.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

An SVD-like matrix decomposition and its applications

Razie Gholami

Supervisor

Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor

Mehdi Ghovatmand

September 2016